2.7 状态空间模型

- 为什么需要状态空间模型

输入输出模型		状态空间模型
单输入单输出（SISO）	→	多入多出系统（MIMO）
线性时不变系统（LTI）	→	线性系统、非线性系统等
仅描述输入输出关系（外部特性）	→	全面描述系统动态特性
传递函数、频域法	→	频域法、时域法、微分方程、差分方程等
经典控制理论	→	现代控制理论

2.7 状态空间模型

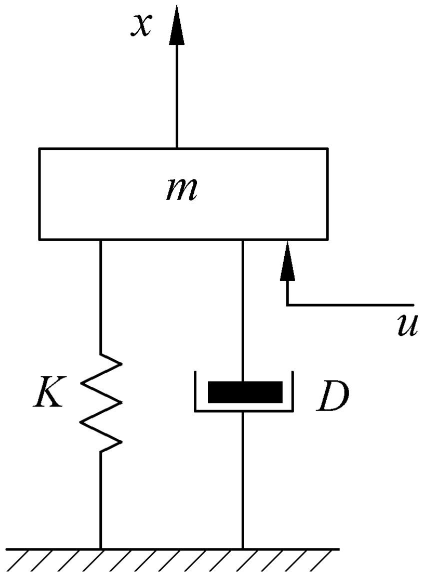
<例2.10> 机械系统如图所示，质量块m在输入变量作用力u下产生的位移为x。位移及速度正方向如图中所示，D为阻尼器的阻尼系数，K为弹簧弹性系数，试推导其状态空间描述。

解：弹簧和质量块是储能元件，因此系统有 2 个独立储能元件。

根据牛顿运动定律及力的平衡条件，可得方程

$$m\ddot{x} = u - Kx - D\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + Kx + D\dot{x} = u$$



选位移 x 作为状态变量 x_1, 速度为状态变量 x_2

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1 \end{cases}$$

2.7 状态空间模型

$$m\ddot{x}+Kx+D\dot{x}=u \xrightarrow[\begin{cases}x_1=x\\ x_2=\dot{x}=\dot{x}_1\end{cases}]{} m\dot{x}_2+Kx_1+Dx_2=u$$

$$\downarrow$$

$$\dot{x}_2=-\frac{K}{m}x_1-\frac{D}{m}x_2+\frac{1}{m}u$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{K}{m} & -\frac{D}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}u$$

$$y=x_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\longleftarrow$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{K}{m} & -\frac{D}{m}\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}, D=0$$

状态空间表达

State space representation

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$$

2.7 状态空间模型

相关术语：

状态：动态系统的状态是系统的最小一组变量（称为状态变量），只要知道了在时刻$t=t_0$的一组状态变量和时刻$t>t_0$的输入量，就能够完全确定系统在未来时刻的行为

状态变量：动态系统的状态变量是确定动态系统状态的最小一组变量 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$, 构成了系统变量中的极大线性无关组。

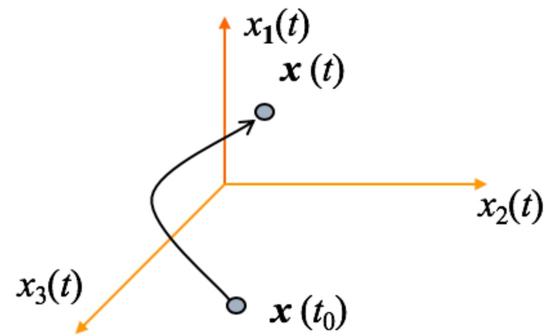
（状态变量组的最小性：状态变量$x_1(t), x_2(t),\ldots, x_n(t)$ 是为完全表征系统行为所必需的系统变量的最少个数）

状态向量：如果完全描述一个给定的系统的行为需要n个状态变量，那么这n个状态变量 $x(t)=[x_1(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}$ 可以看成是向量$\boldsymbol{x}$的n个分量，这个向量就称为状态向量

状态空间：由状态向量张成的函数空间。在特定时刻t, 状态向量就是状态空间中的一个点。

2.7 状态空间模型

状态轨迹：以$x(t)=x(t_0)$为起点，随着时间的推移，$x(t)$在状态空间绘出的一条轨迹，具体形状由$x(t_0)$，$u(t)$和系统本身的动力学特性决定。



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & \text{——状态方程} \\ y = Cx + Du & \text{——输出方程} \end{cases}$$

状态方程：描述系统状态与输入之间关系的、一阶微分方程（组）

输出方程：描述系统输出与状态、输入之间关系的数学表达式

状态空间表达式：状态方程 + 输出方程

2.7 状态空间模型

状态变量的特点：

(1) 独立性：状态变量之间线性独立

(2) 多样性：状态变量的选取并不唯一，实际上存在无穷多种方案

(3) 等价性：两个状态向量之间只差一个非奇异线性变换

(4) 现实性：状态变量通常取为含义明确的物理量

(5) 抽象性：状态变量可以没有直观的物理意义

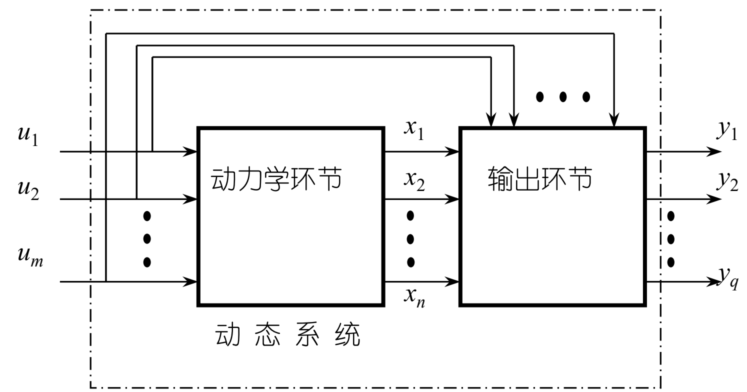
2.7 状态空间模型

- 状态微分方程

假设MIMO系统包含 n 个状态变量，系统由 m 个输入量和 q 个输出量,可以用下列方程描述系统：

状态方程

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t) \\
\dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t)
\end{aligned}
$$



输出方程

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t) \\
y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t) \\
&\vdots \\
y_q(t) &= g_q(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t)
\end{aligned}
$$

2.7 状态空间模型

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t)$$
$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n(t) = f_\mathrm{n}(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t)$$

$$y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t)$$
$$y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t)$$
$$\vdots$$
$$y_q(t) = g_\mathrm{q}(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

general form

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_q \end{bmatrix}$$

2.7 状态空间模型

线性定常系统(LTI)的状态空间表达式

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$ 状态方程

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$ 输出方程

$t \geq 0, x_0 = x(0)$ (初始条件)

$\mathbf{x} \in R^n$状态向量， $\mathbf{u} \in R^m$输入向量， $\mathbf{y} \in R^q$输出向量

$\mathbf{A} \in R^{n\times n}$,系统的状态矩阵(系统矩阵)

$\mathbf{B} \in R^{n\times m}$,系统的控制矩阵(输入矩阵);

$\mathbf{C} \in R^{q\times n}$,系统的输出矩阵;

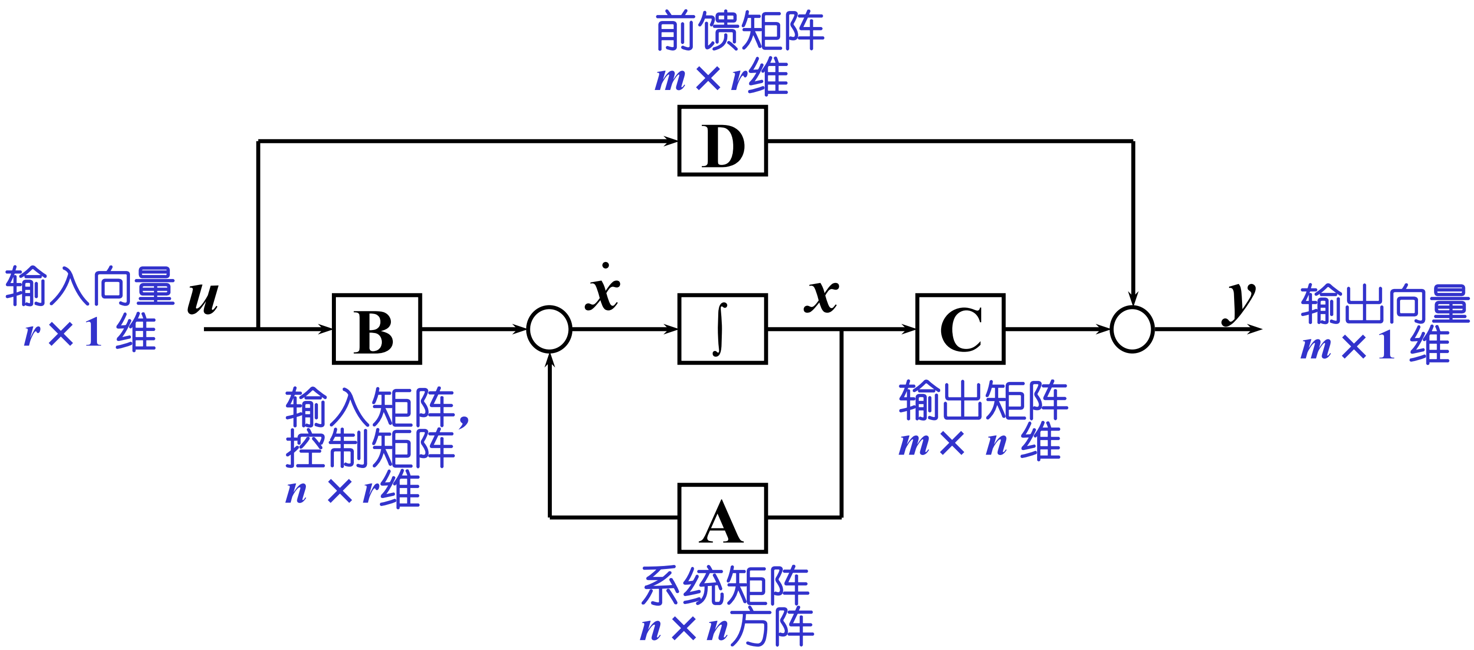
$\mathbf{D} \in R^{q\times m}$,系统的前馈矩阵;

常用符号 $\Sigma(A,\ B,\ C,\ D)$ 来表示所讨论的动力学系统，或者用 $\Sigma(A, B)$ 表示所讨论系统的状态方程。

2.7 状态空间模型

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

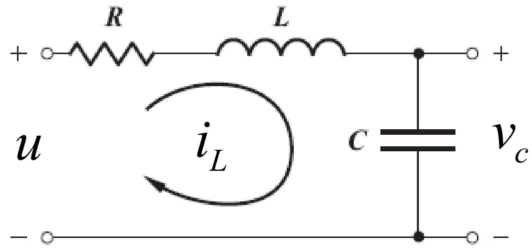


状态空间表示的线性系统方框图

2.7 状态空间模型

<例2.11> 列写图示RLC串联网络状态空间表达式

解：选择电容电压v_C和电感电流i_L为状态变量



$$i_C = C\dot{v}_C, \qquad v_L = L\dot{i}_L$$

$$v_R + v_L + v_C = u(t), \qquad Ri_L + L\dot{i}_L + v_C = u(t)$$

$\dot{v}_C$和$\dot{i}_L$分别用v_C, i_L和$u(t)$来表示

$$\dot{v}_C = \frac{1}{C} i_L$$

$$\dot{i}_L = -\frac{1}{L} v_C - \frac{R}{L} i_L + \frac{1}{L} u(t)$$

令$x_1 = v_C, x_2 = i_L$;

输出$\mathbf{y} = y = v_C(t)$，输入$\mathbf{u} = u = u(t)$

可以写成

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

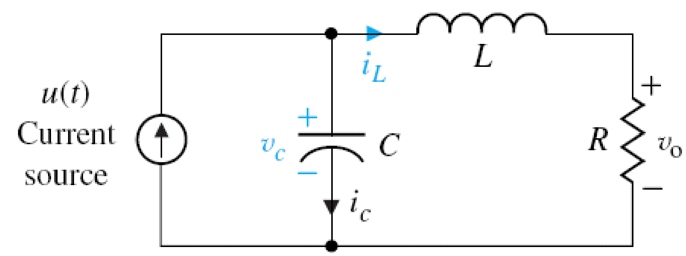
2.7 状态空间模型

<例2.12> 列写图示RLC网络状态空间表达式

同学板书

(a)： 选v_c和i_L为状态变量, v_o为输出

(b)： 选 v_c 和 v_o 为状态变量, v_o为输出



解(a): $i_c = C\dot{v}_c, \qquad v_L = L\dot{i}_L$

由KCL: $i_c = C\dot{v}_c = u(t) - i_L$

由KVL: $L\dot{i}_L = v_c - Ri_L$

output： $v_o = Ri_L(t)$

令$x_1 = v_C, \quad x_2 = i_L$

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t)$$

$$\dot{x}_2 = +\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2$$

可以写成

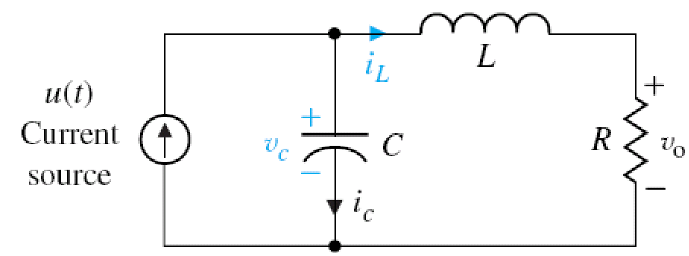
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{C}\\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{C}\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

2.7 状态空间模型

<例2.13> 列写图示RLC网络状态空间表达式

解(b)：选 v_c 和 v_o 为状态变量



由KCL：$C\dot{v}_c + v_o / R = u(t)$

由KVL：$L\dfrac{d(v_o / R)}{dt} = v_c - v_o$

$$x_1 = v_c, \quad x_2 = v_o,$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{CR}x_2 + \frac{1}{C}u(t)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{R}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2$$

思考1：不一样中有哪些一样之处？
两个系统矩阵的特征根？

思考2：选择其他变量组合行不行？

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{CR}\\ \dfrac{R}{L} & -\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dfrac{1}{C}\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

2.7 状态空间模型

- 传递函数 转换为 状态空间模型

由状态空间模型可以唯一的转换为一个传递函数(阵)；由传递函数转换为状态空间模型，称为系统的实现问题。由于状态量选择的多样性，对于一个传递函数(阵)，系统的实现是不唯一的。这里给出一种“能控规范型”的实现形式。

(control normal form / canonical form)

2.7 状态空间模型

- Case I: 当传递函数的分子为常数项时

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^{n}+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

Laplace反变换

n阶ODE
$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0 y(t)=u(t)$$

定义状态变量

$$\begin{cases} x_1=y \\ x_2=\dot{y} \\ \vdots \\ x_n=y^{(n-1)} \end{cases}$$

一阶微分方程组

2.7 状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = y^{(n)} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u(t) \end{cases}$$

定义状态向量 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] x \end{cases}$$

2.7 状态空间模型

- Case II：传递函数的分子为多项式 $m<n$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$\begin{cases}\dfrac{X_1(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\\[2ex] Y(s)=X_1(s)\left[b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0\right]\end{cases}$$

2.7 状态空间模型

$$\frac{X_1(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

$$\Big\downarrow \text{根据Case I}$$

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

2.7 状态空间模型

$$Y(s)=X_1(s)\left[b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0\right]$$

$$\Big\downarrow \text{Laplace反变换}$$

$$\begin{aligned}
y(t)&=b_m\frac{d^m x_1}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x_1}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{dx_1}{dt}+b_0x_1\\
&=b_0x_1+b_1x_2+\cdots+b_{m-1}x_m+b_mx_{m+1}\\
&=\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_{m+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2.7 状态空间模型

补充方法：由传递函数的部分分式展开求状态空间表达式

Special case 1: 传递函数中只含有两两相异的实数极点

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{(s-\lambda_1)\cdots(s-\lambda_n)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-\lambda_i}$$

$$G(s)=\frac{C_1}{s-\lambda_1}+\frac{C_2}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{C_n}{s-\lambda_n}$$

$$C_i=\left[G(s)(s-\lambda_i)\right]_{s=\lambda_i}$$

$$Y(s)=\frac{c_1}{s-\lambda_1}U(s)+\frac{c_2}{s-\lambda_2}U(s)+\cdots+\frac{c_n}{s-\lambda_n}U(s)$$

★选取状态变量：

令 $X_i(s)=\dfrac{U(s)}{s-\lambda_i}$ $(i=1,2,\dots,n)$

$y(t)=c_1x_1+\cdots+c_nx_n$ ——输出方程

2.7 状态空间模型

$$X_i(s) = \frac{U(s)}{s - \lambda_i} \longrightarrow \dot{x}_i = \lambda_i x_i + u$$

状态空间实现为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

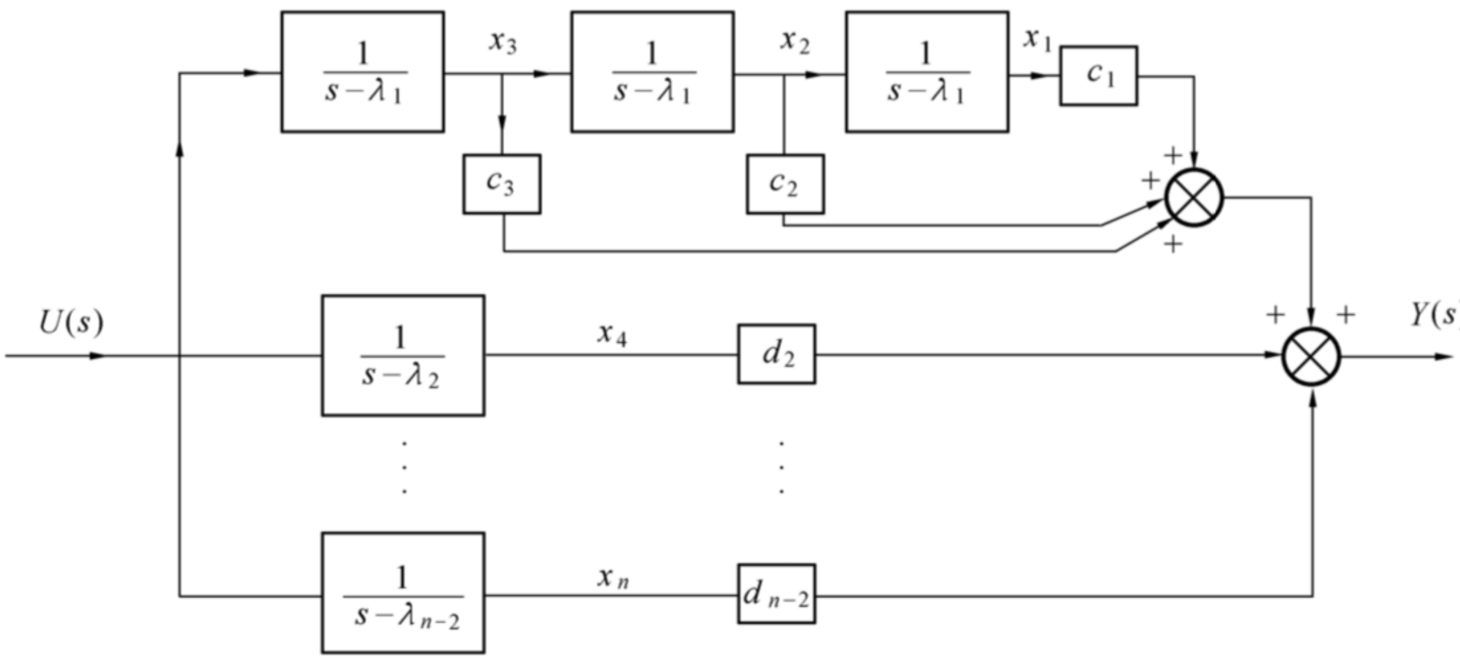
$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix} x$$

2.7 状态空间模型

补充方法：由传递函数的部分分式展开求状态空间表达式

Special case 2: 传递函数中有重实数极点

$$G(s)=\frac{N(s)}{(s-\lambda_1)^3(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_{n-2})}=\frac{c_1}{(s-\lambda_1)^3}+\frac{c_2}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{c_3}{s-\lambda_1}+\sum_{j=2}^{n-2}\frac{d_j}{s-\lambda_j}$$



2.7 状态空间模型

补充方法：由传递函数的部分分式展开求状态空间表达式

Special case 2: 传递函数中有重实数极点

$$G(s)=\frac{N(s)}{(s-\lambda_1)^3(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_{n-2})}=\frac{c_1}{(s-\lambda_1)^3}+\frac{c_2}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{c_3}{s-\lambda_1}+\sum_{j=2}^{n-2}\frac{d_j}{s-\lambda_j}$$

★选取状态变量：

$$X_1(s)=\frac{1}{s-\lambda_1}X_2(s)\Rightarrow \dot{x}_1=\lambda_1x_1+x_2$$

$$X_2(s)=\frac{1}{s-\lambda_1}X_3(s)\Rightarrow \dot{x}_2=\lambda_1x_2+x_3$$

$$X_3(s)=\frac{1}{s-\lambda_1}U(s)\Rightarrow \dot{x}_3=\lambda_1x_3+u$$

$$X_4(s)=\frac{1}{s-\lambda_2}U(s)\Rightarrow \dot{x}_4=\lambda_2x_4+u$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$X_n(s)=\frac{1}{s-\lambda_{n-2}}U(s)\Rightarrow \dot{x}_n=\lambda_{n-2}x_n+u$$

状态空间实现为

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-2}\end{array}\right]x+\left[\begin{array}{c}0\\0\\1\\ \hline \vdots\\1\end{array}\right]u$$

$$y=\left[\begin{array}{ccc|ccc}c_1 & c_2 & c_3 & d_2 & \cdots & d_{n-2}\end{array}\right]x$$

2.7 状态空间模型

- 状态空间模型转换为传递函数(阵)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Laplace变换
零初始条件

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \longrightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

2.7 状态空间模型

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)+\mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$
$$=[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{U}(s)$$

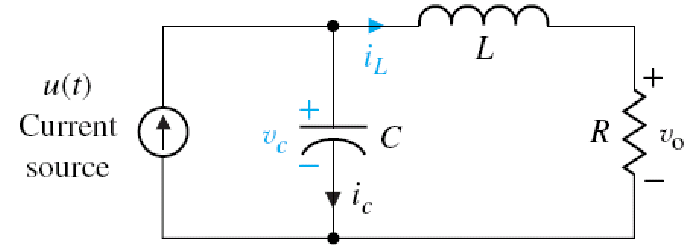
$\boxed{\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}}$ 称为传递函数矩阵

对于单输入单输出的系统, $U(s),Y(s)$是标量，则传递函数为：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+D$$

2.7 状态空间模型

<例2.14> 下图RLC网络，由系统状态空间模型推导出系统传递函数模型



$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}=\frac{adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}=\frac{1}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}\begin{bmatrix}(s+\frac{R}{L}) & -\frac{1}{C}\\ \frac{1}{L} & s\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{C}\\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{C}\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow$$

$$G(s)=\mathbf{C}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & \frac{1}{C}\\ -\frac{1}{L} & (s+\frac{R}{L})\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{C}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{R/LC}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

2.7 状态空间模型

<例2.15> 求下面状态空间表达式的传递函数

3min

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{s-3}{s^2-2s+5}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}-3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{s-3}{s^2-2s+5}$$

Q：两个状态空间模型有着相同的传递函数，二者是什么关系？

2.7 状态空间模型

$$\Sigma_1:\ \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u \qquad \Sigma_2:\ \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \qquad y=\begin{bmatrix}-3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

存在非奇异变换矩阵 $T=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

$$T\begin{bmatrix}0 & 1\\ -5 & 2\end{bmatrix}T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-3 & 1\end{bmatrix}T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

∴系统S_1和系统S_2是等价的。

2.7 状态空间模型

通过一个非奇异线性变换关联起来的两个状态空间模型是等价的。

数学描述：
给定系统 $S(A, B, C, D)$，引入线性变换

$$\bar{x} = Tx$$

其中，T 为$n \times n$的非奇异矩阵，则可以得到系统 $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}\left(\bar{\boldsymbol{A}}, \bar{\boldsymbol{B}}, \bar{\boldsymbol{C}}, \bar{\boldsymbol{D}}\right)$

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \bar{B} = TB,$$
$$\bar{C} = CT^{-1}, \quad \bar{D} = D$$

$$\bar{x}(0) = Tx(0)$$

我们称系统S和系统 $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$ 是等价的。

用途：通过线性变换，可将状态方程变成对角线或约当标准型（或其他标准型）。

2.7 状态空间模型

对于等价的系统，必然有一些不变的特征，使得两个系统等价，这个不变的特征就是特征多项式和特征根。

结论1：等价的状态空间模型具有相同的传递函数。

结论2：等价的状态空间模型具有相同的特征多项式、特征方程和极点。