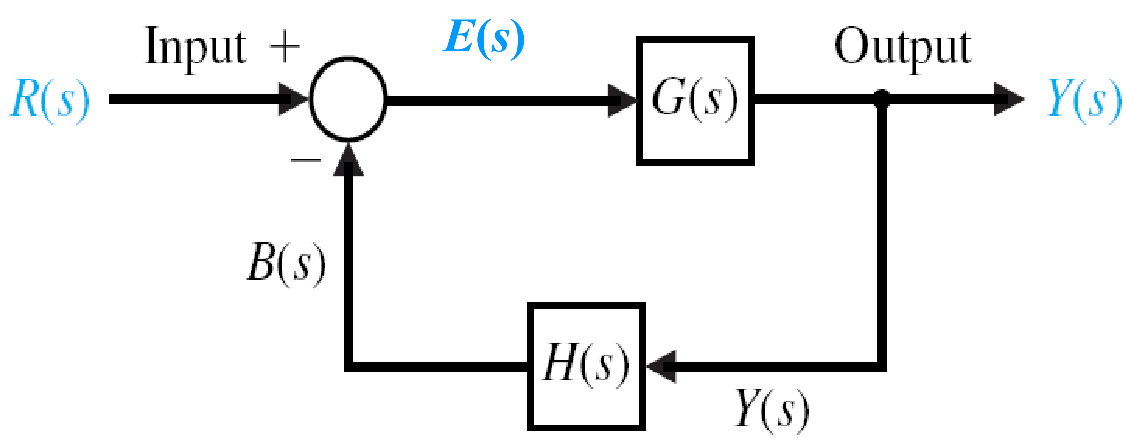
2.5 方框图模型

- 系统方框图模型 (Block diagram)

是系统中各环节的传函功能和信号流向的图解表示，是一种图形化的数学模型。也称作：系统结构图、方块图。

每个环节用方框图表示，框中表明其传函，根据信号的传递关系将各环节框图连接起来，如



2.5 方框图模型

各个环节的传函及信号联系

↓

系统方框图

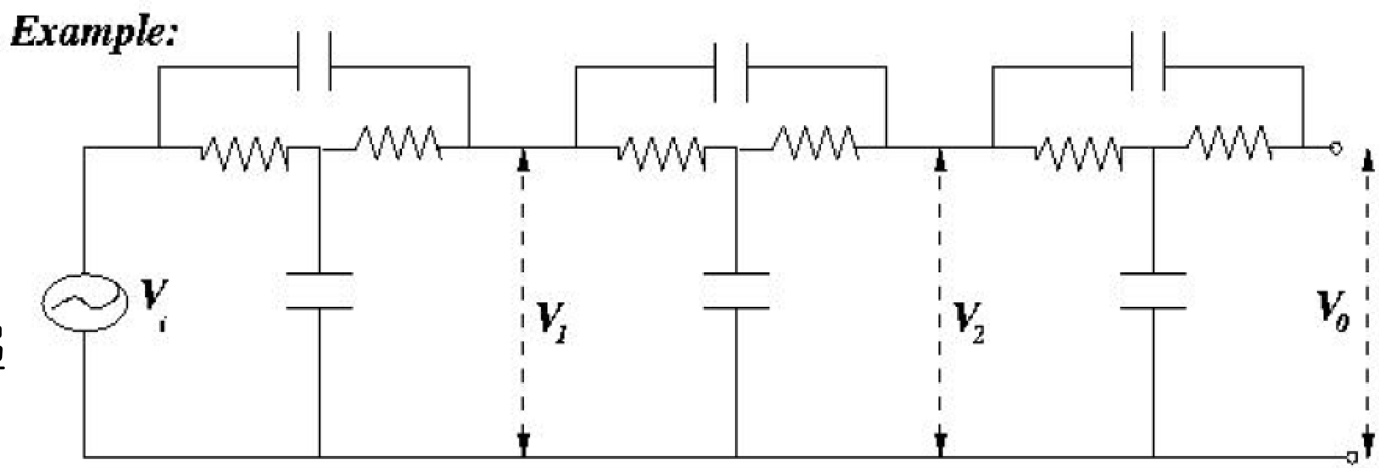
↙ ↘

系统传递函数

对系统进行实验、仿真分析

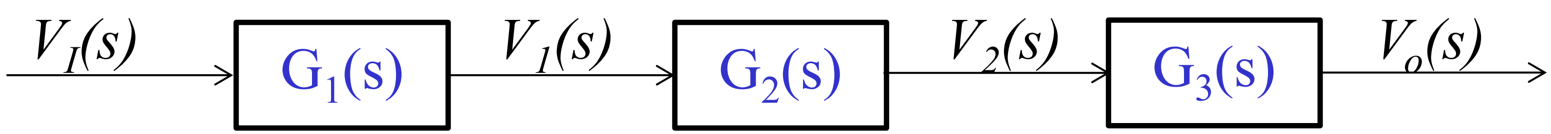
2.5 方框图模型

利用方框图模型研究系统模型的便利性



求此系统的传递函数 $V_o(s)/V_I(s)$

方法1：根据KVL, KCL直接寻找 $G(s)=V_o(s)/V_I(s)$



方法2：分别求解

$$\left.\begin{aligned} G_1(s)&=V_1(s)/V_I(s),\\ G_2(s)&=V_2(s)/V_1(s),\\ G_3(s)&=V_o(s)/V_2(s) \end{aligned}\right\}$$

假设负载效应可以忽略

$$G(s)=G_1(s)\ G_2(s)\ G_3(s)$$

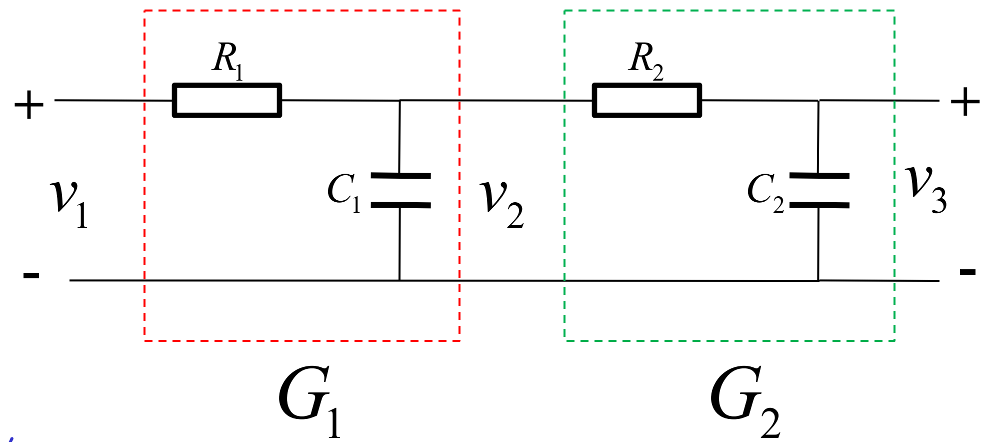
2.5 方框图模型

课下思考：

如果负载效应不可忽略

求此系统的传递函数

$G = V_3(s)/V_1(s)$



Case 1： 如果两个环节没有相连

$$G_1 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{R_1C_1s+1} \qquad G_2 = \frac{V_3}{V_2} = \frac{1}{R_2C_2s+1}$$

$$G = \frac{V_3}{V_1} = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2)s + 1}$$

Case 2： 如果两个环节直接相连

$$G_1 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2C_2s+1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2) + 1}$$

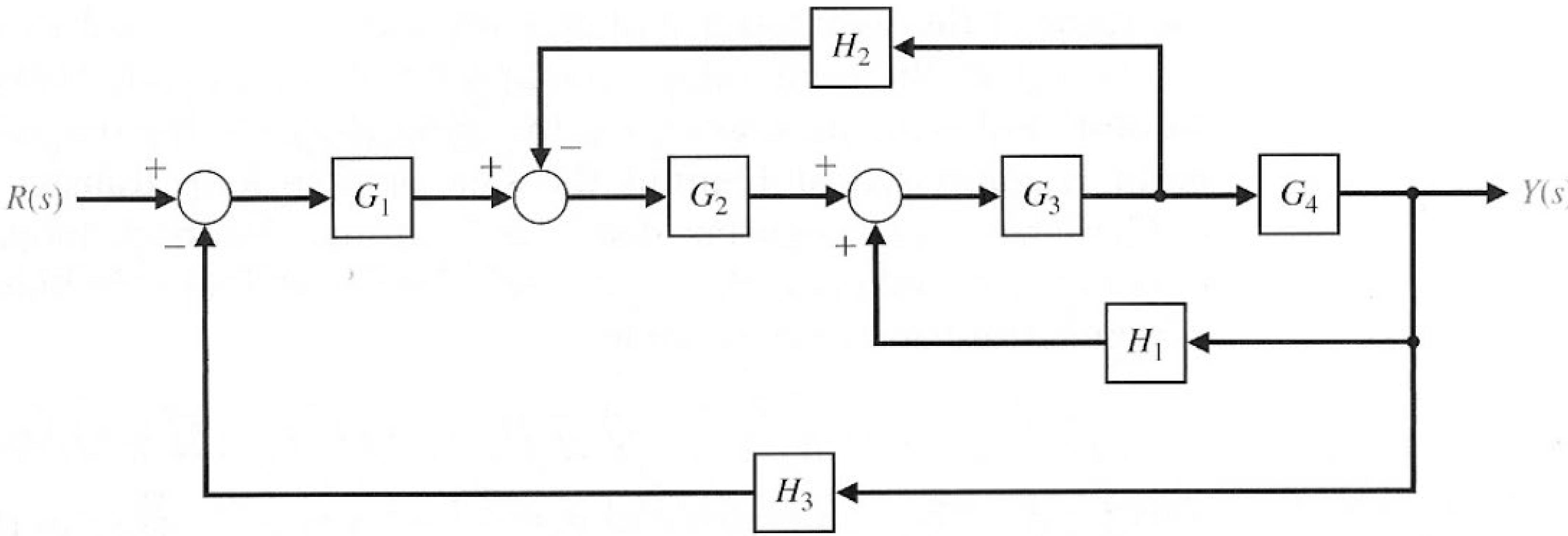
$$G_2 = \frac{V_3}{V_2} = \frac{1}{R_2C_2s+1}$$

$$G = \frac{V_3}{V_1} = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + 1}$$

2.5 方框图模型

利用方框图模型研究系统模型的便利性

假设负载效应可以忽略



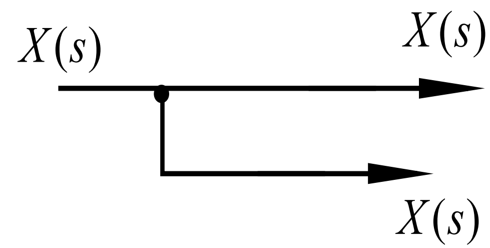
$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}\ ?$$

2.5 方框图模型

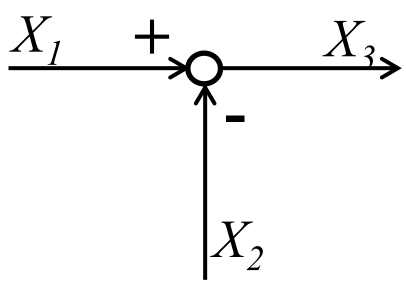
方框图包含有四种基本单元：

1. 信号线

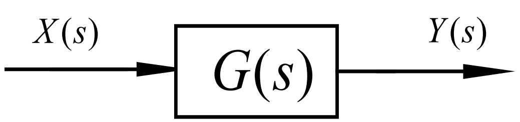
2. 分支点
（引出点、测量点）



3. 相加点
（比较点、综合点）



4. 方框
（环节）

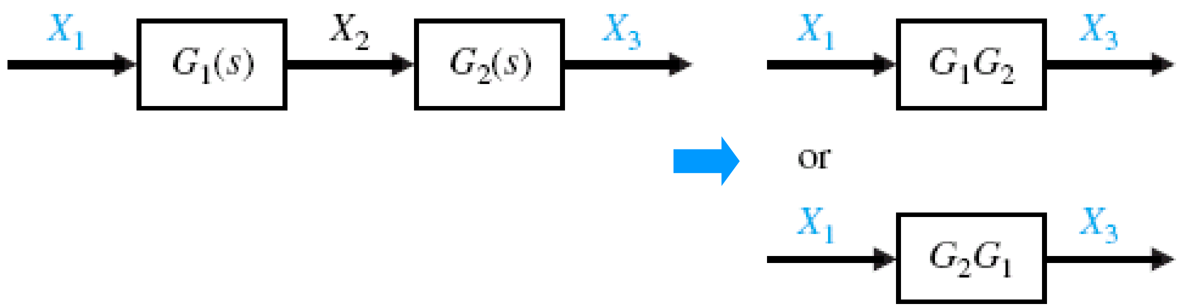


2.5 方框图模型

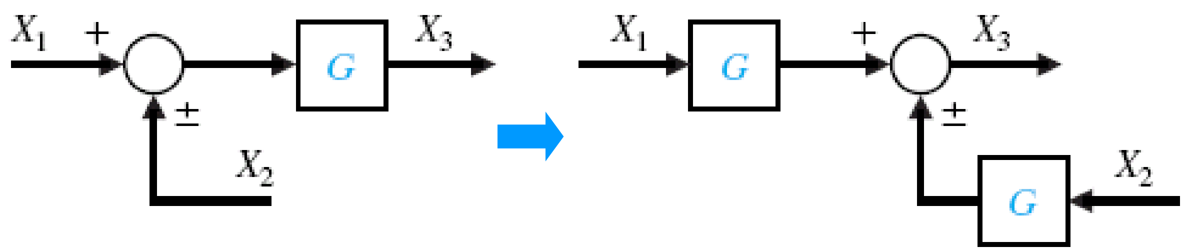
- 框图的基本变换 (Dorf书表2.6)

原则：输出、输入信号不变 (端口条件不变)

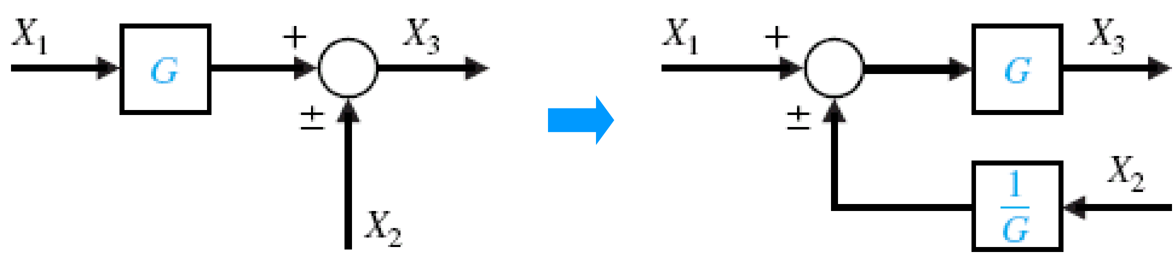
T1：合并串联方框



T2：相加点后移

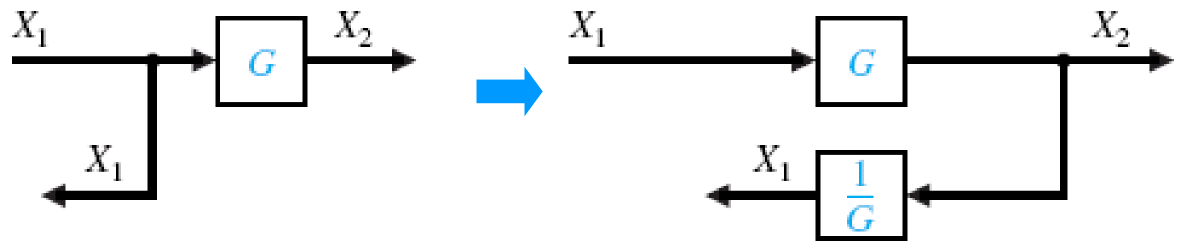


T3：相加点前移

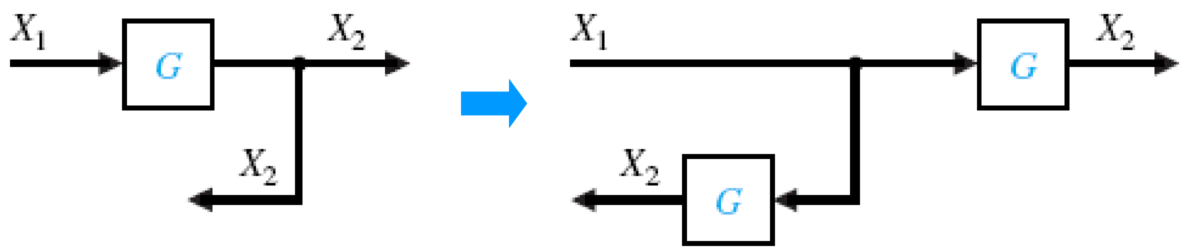


2.5 方框图模型

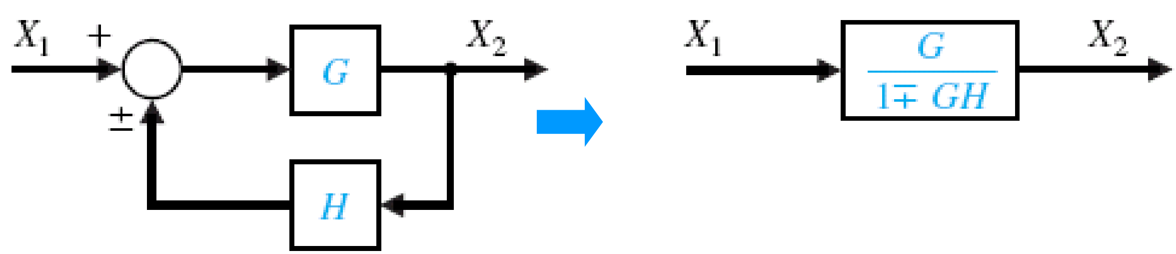
T4：分支点后移



T5：分支点前移

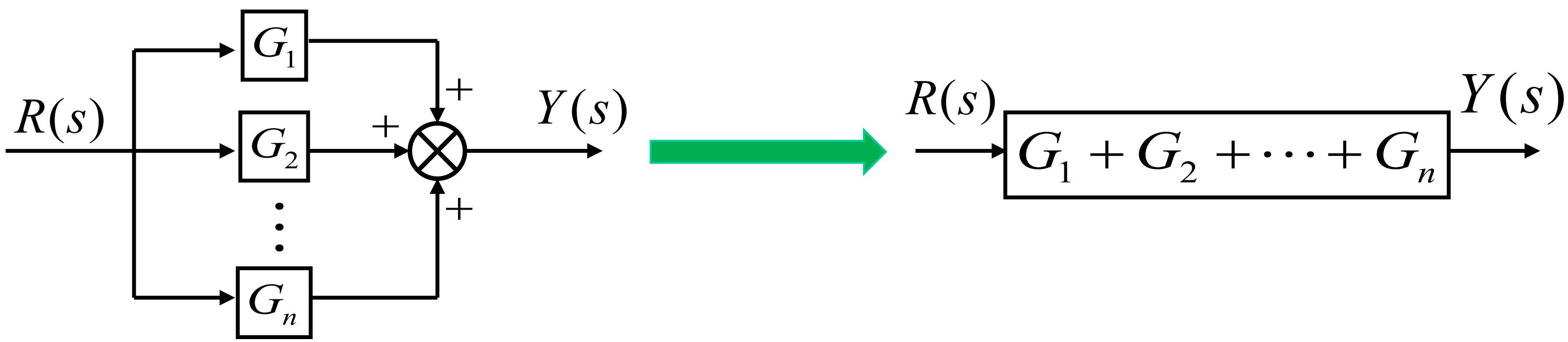


T6：消去反馈回路

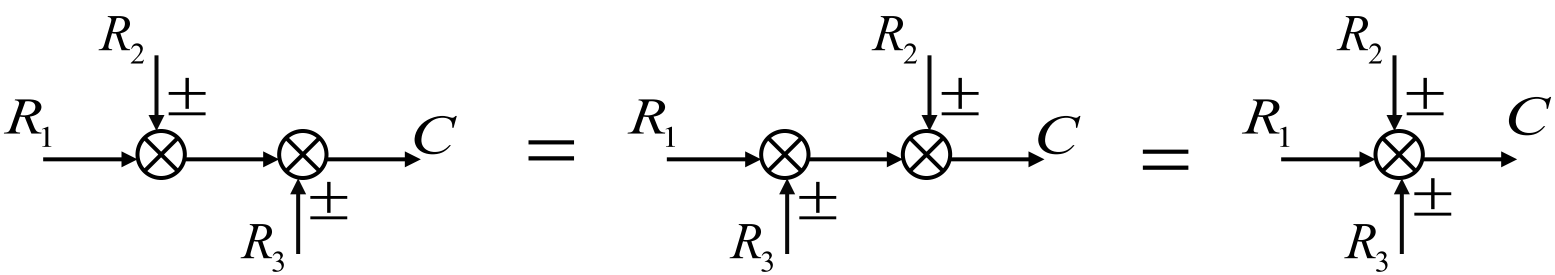


2.5 方框图模型

T7：并联方框

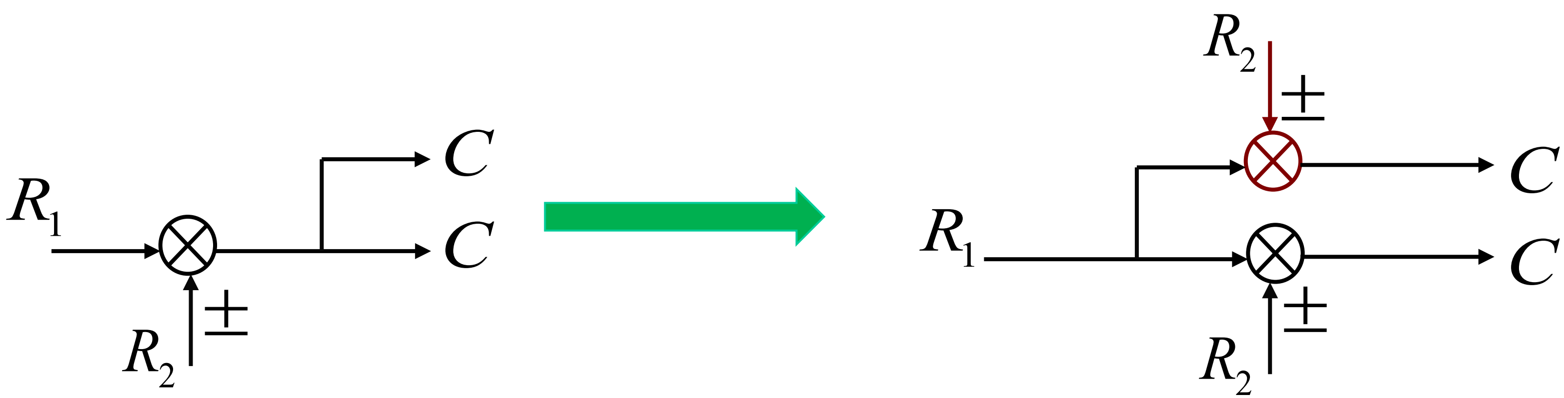


T8：相邻相加点之间的移动



2.5 方框图模型

T9：相加点与分支点交换位置

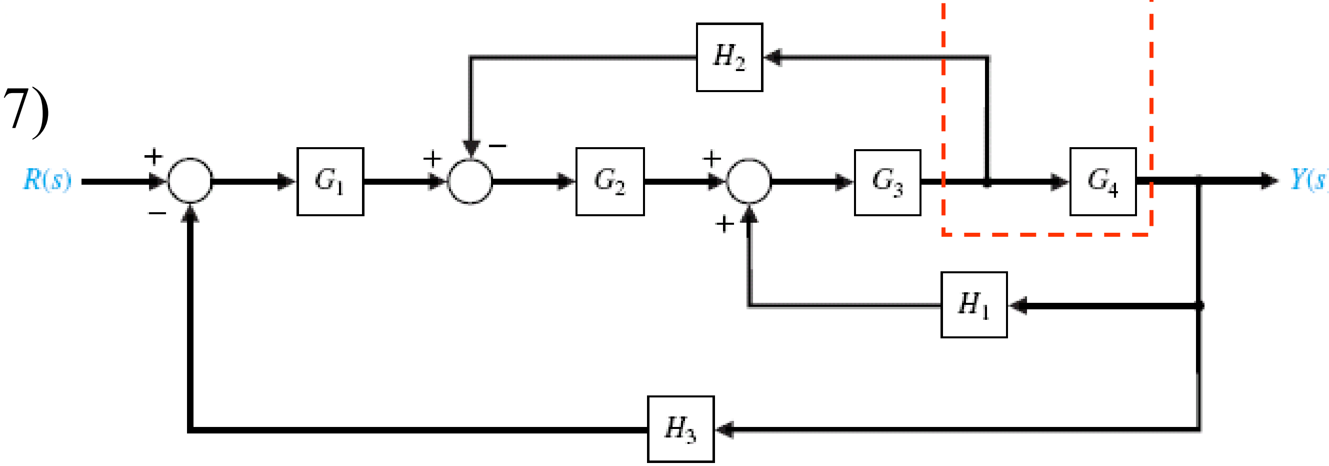


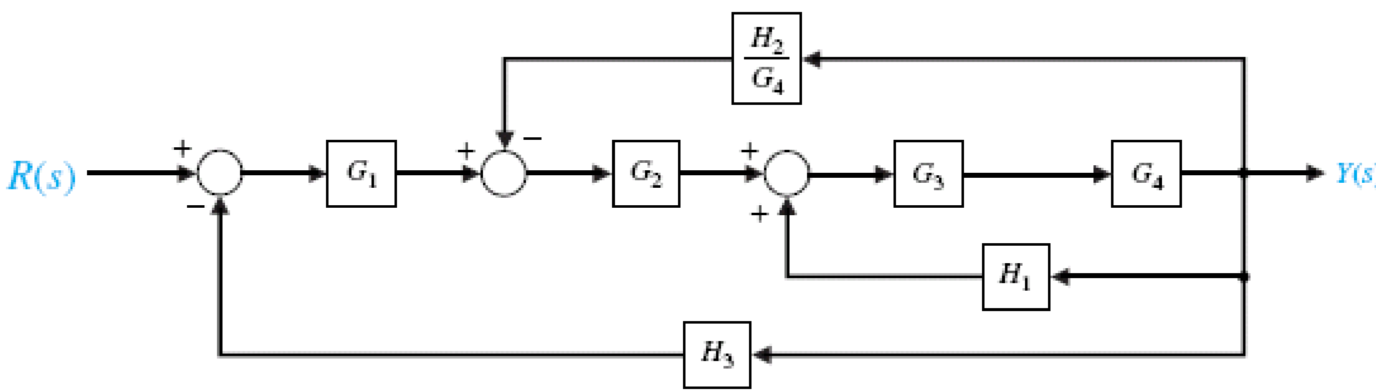
注意：相加点和分支点之间交换位置，往往会使结构图变复杂，一般尽量避免使用。

2.5 方框图模型

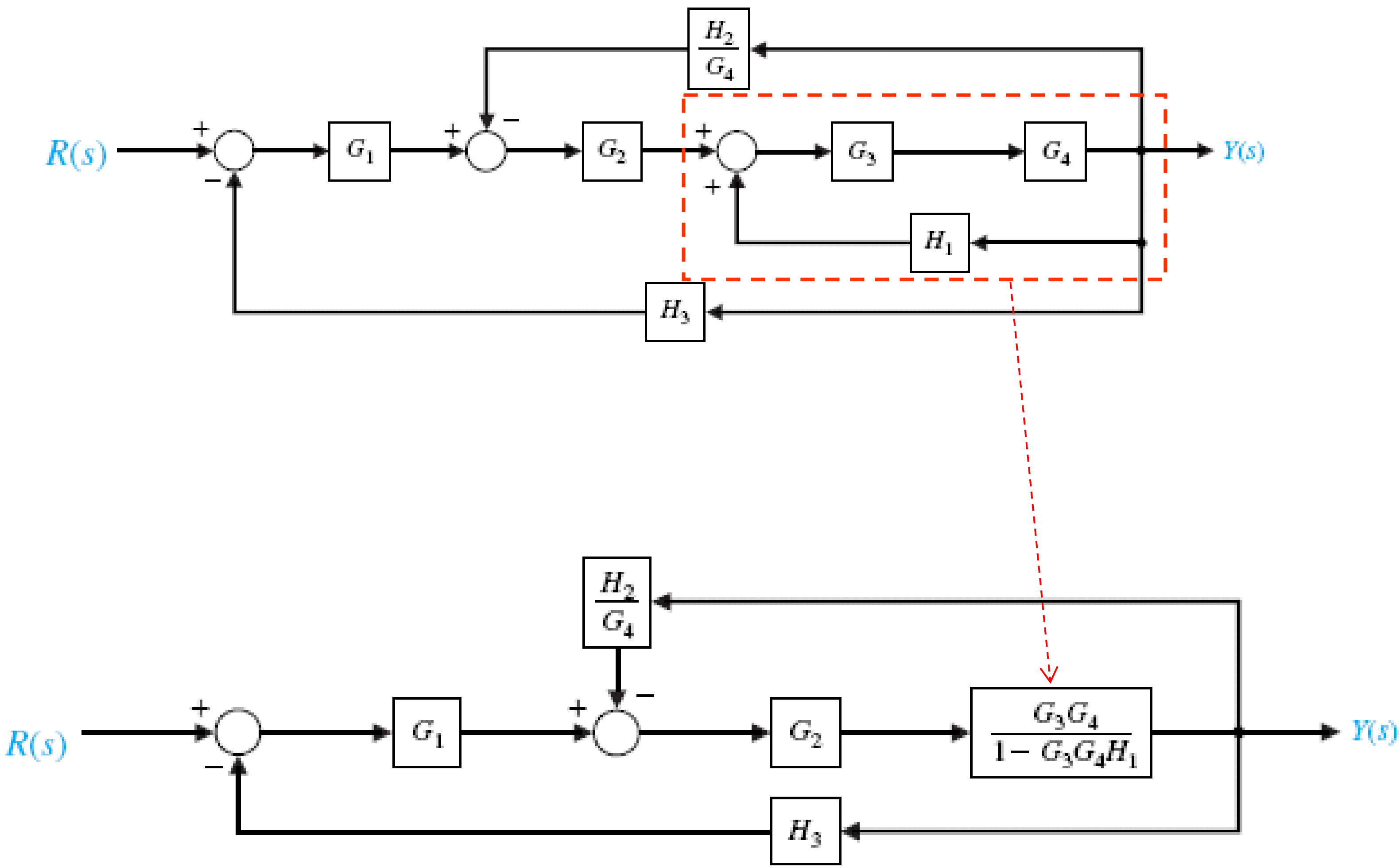
<例2.4> 化简以下方框图

(Dorf 例2.7)

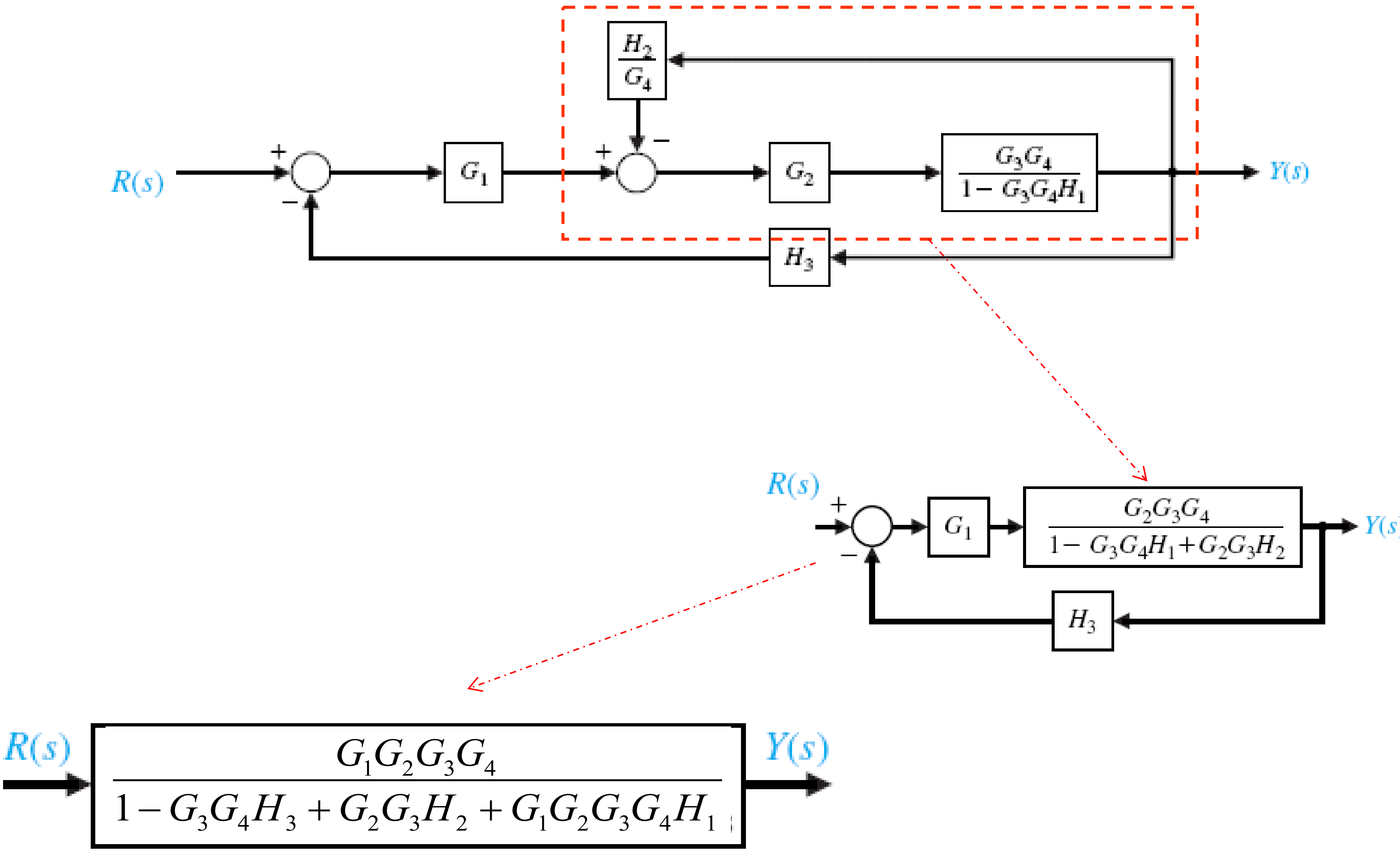




2.5 方框图模型



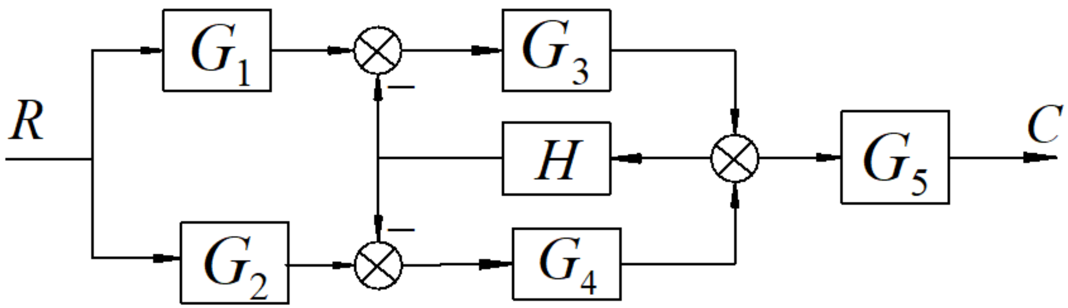
2.5 方框图模型

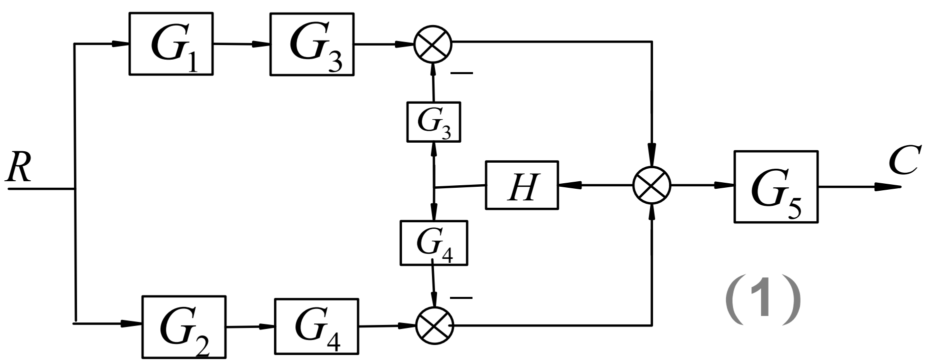


$R(s)$
G_1
$\frac{H_2}{G_4}$
G_2
$\frac{G_3G_4}{1-G_3G_4H_1}$
H_3
$Y(s)$
$R(s)$
G_1
$\frac{G_2G_3G_4}{1-G_3G_4H_1+G_2G_3H_2}$
H_3
$Y(s)$
$R(s)$
$\frac{G_1G_2G_3G_4}{1-G_3G_4H_3+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3G_4H_1}$
$Y(s)$

2.5 方框图模型

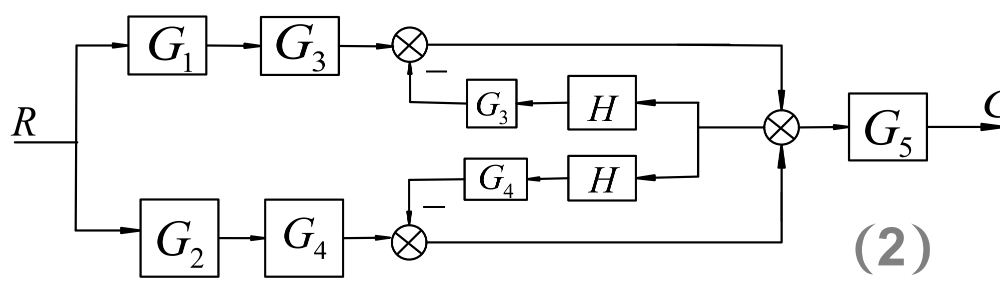
<例2.5> 化简以下方框图





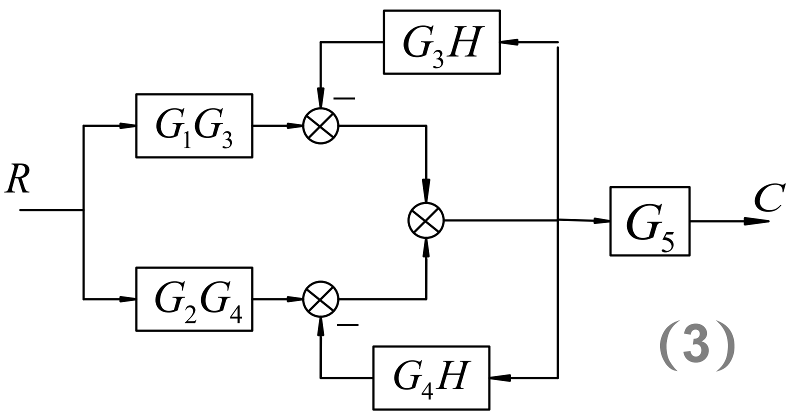
(1)

相加点后移

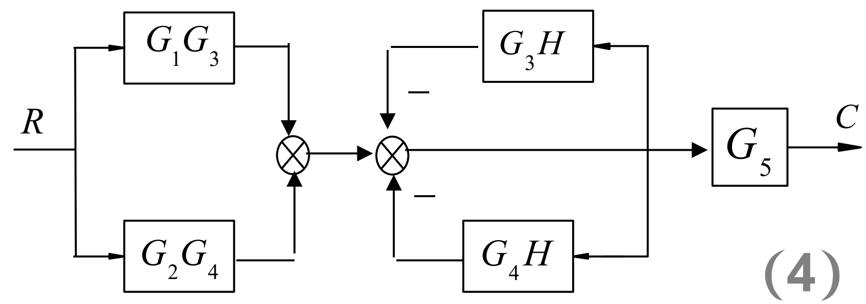


(2)

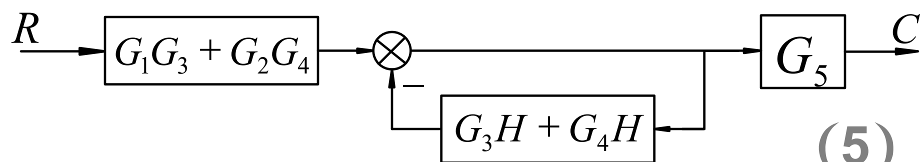
2.5 方框图模型



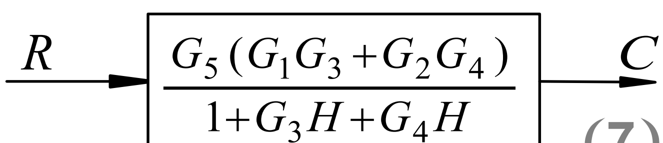
(3)



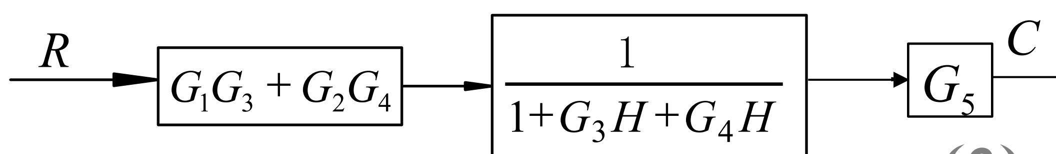
(4)



(5)



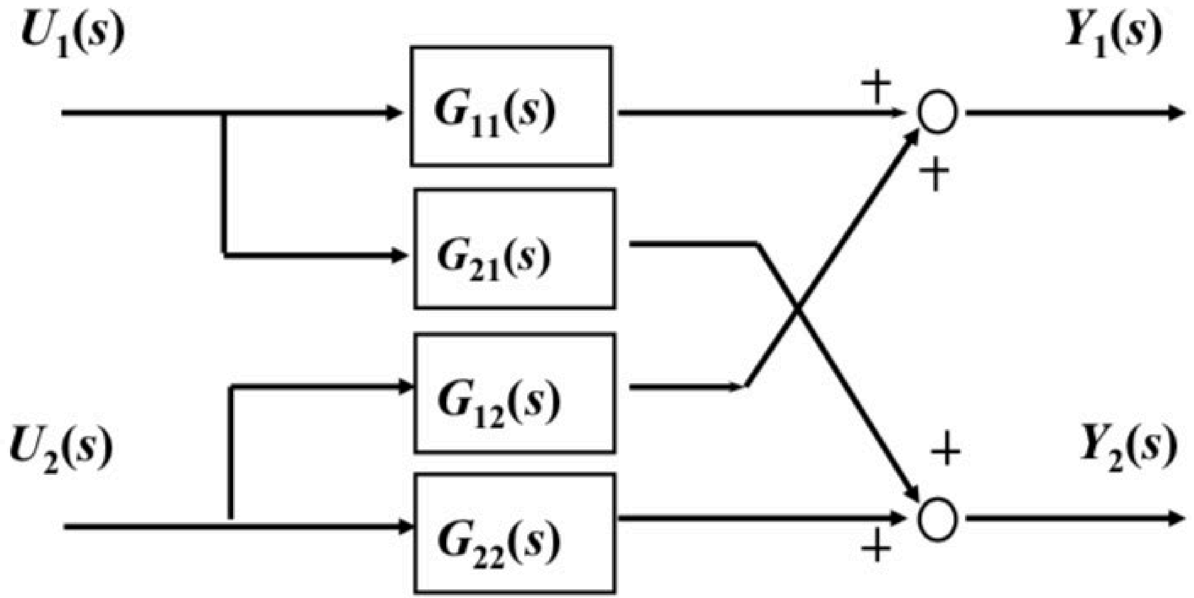
(7)



(6)

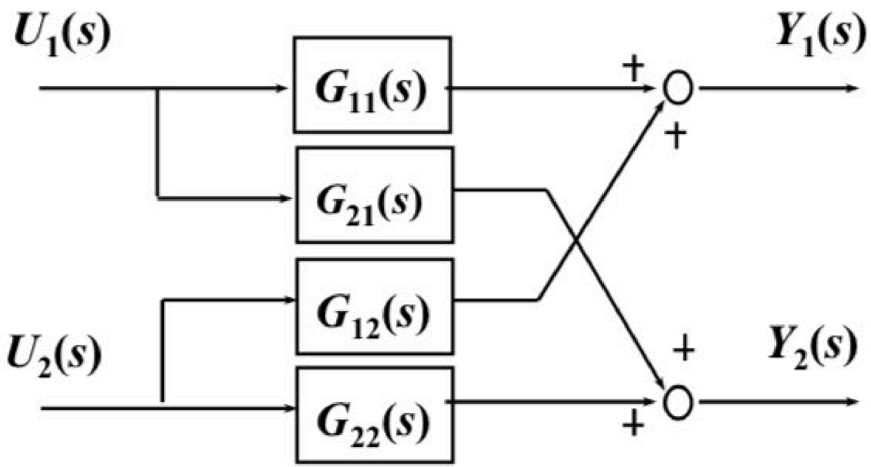
课后拓展：多变量系统的传函矩阵

将描述单输入单输出系统的动态特性的传递函数概念推广到多输入多输出系统，就可用**传递函数矩阵**来描述多变量系统的动态特性。



如图所示两变量系统，当初始条件为零时，Y_1=?，Y_2=?

2.5 方框图模型



写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

当初始条件为零时，可以用拉氏变换式表示：

$$Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s)$$
$$Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s)$$

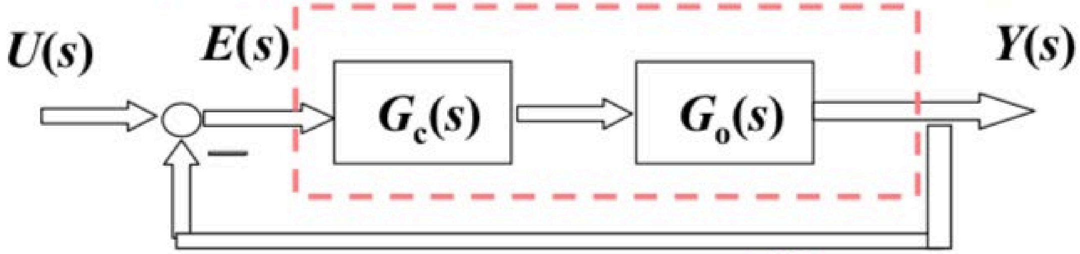
$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}(s) \cdot \boldsymbol{U}(s)$$

传递函数矩阵

传递函数矩阵$G(s)$拓宽了传递函数的概念，它适用于r个输入、m个输出的系统，这时的$G(s)$为$m \times r$维矩阵，其元素$G_{ij}(s)$表示第j个输入对第i个输出的传递函数。

2.5 方框图模型

对于多变量系统的方块图运算，特别要注意在计算时**必须按照矩阵运算的规则**进行，乘法的前后顺序不能颠倒。



$$Y(s)=\Phi(s)\cdot U(s)$$

闭环传递函数矩阵 $\Phi(s)$

如图所示系统：

$$Y(s)=G(s)E(s)=G_0(s)G_c(s)E(s)$$

$$E(s)=U(s)-Y(s)$$

$$Y(s)=G(s)[U(s)-Y(s)]$$

$$Y(s)=[I+G(s)]^{-1}G(s)U(s)$$

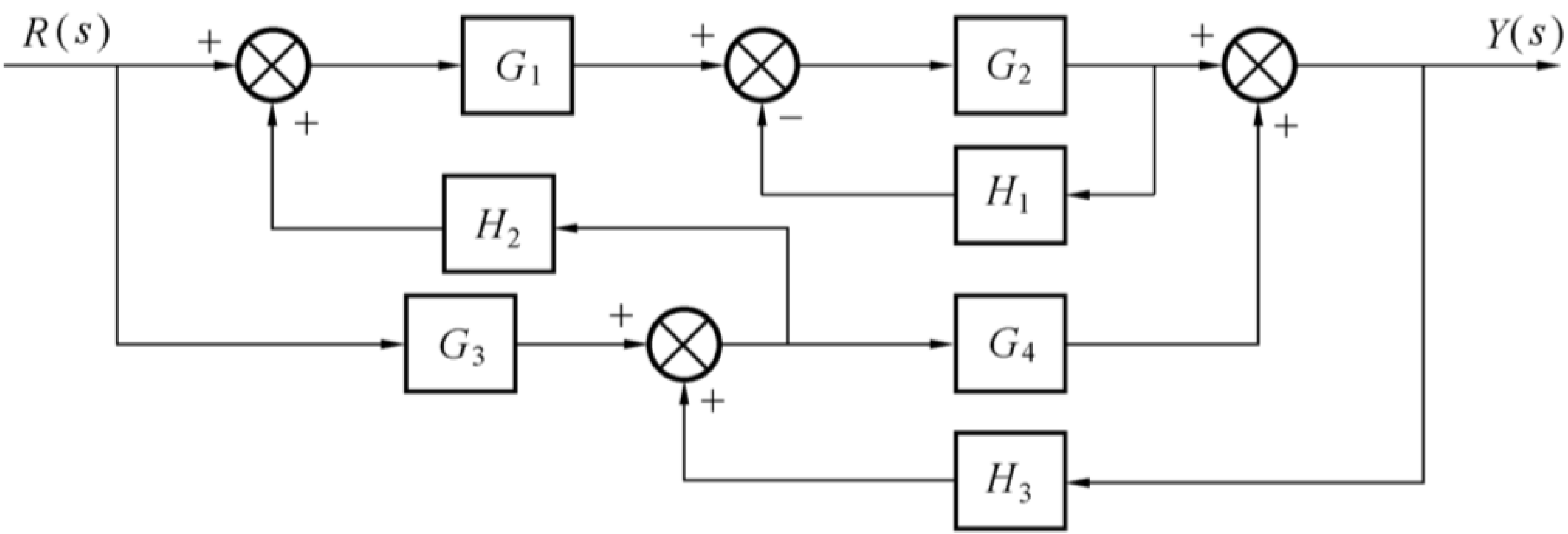
$G(s)$称为系统的开环传递函数矩阵

注意：计算时要从输出端开始，逆着箭头方向，顺序不能变换。

2.6 信号流图(signal-flow graphs)

热身小练习：用方框图化简法，求传递函数 Y(s)/R(s)

8min



Why do we need signal-flow graph models?

Block diagram are adequate for the representation of the interrelationships of controlled and input variables. However, for a system with reasonably complex interrelationships, the block diagram reduction procedure is cumbersome and often quite difficult to complete.

2.6 信号流图

- 基于信号流图模型，就不再必须使用方框图化简方法来计算系统变量之间的关系

- 利用信号流图分析方法可以处理复杂系统的方框图模型

- 什么是信号流图?

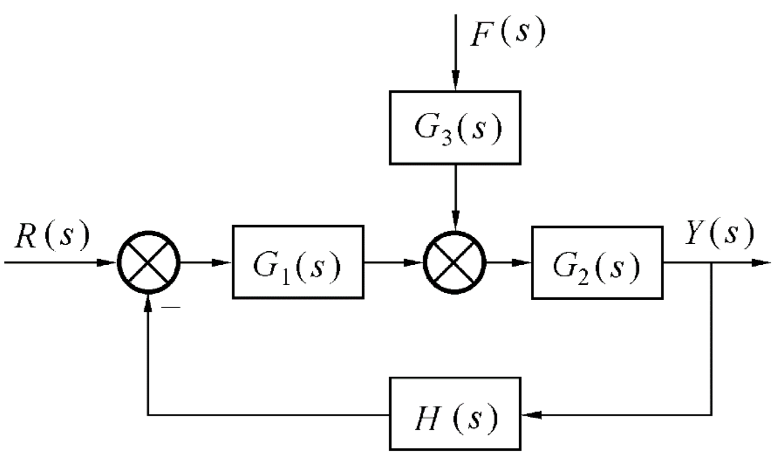
2.6 信号流图

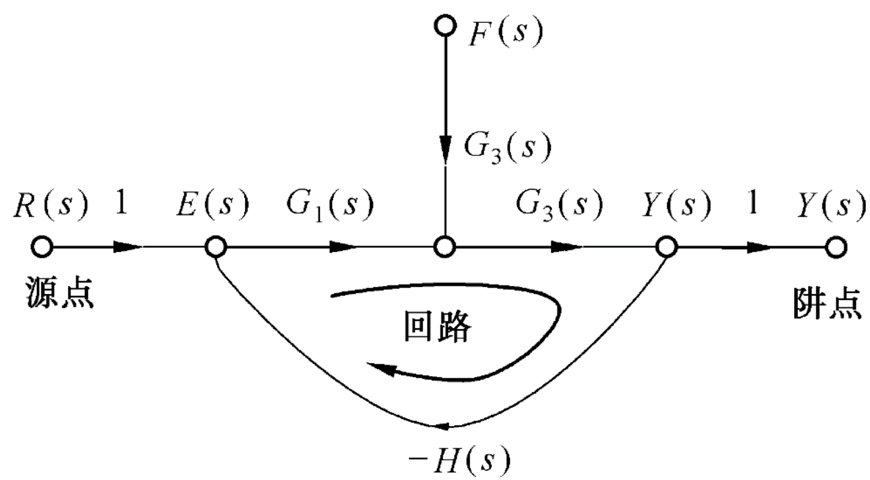
信号流图：系统中各变量间相互关系以及信号传递的一种图解方法

➢节点（node）：表示系统的变量，用o表示。

➢支路（branch）：相当于乘法器，信号流经支路时，被乘以支路增益（即传递函数）而变换为另一信号。

➢信号在支路上只能沿箭头单向传递。



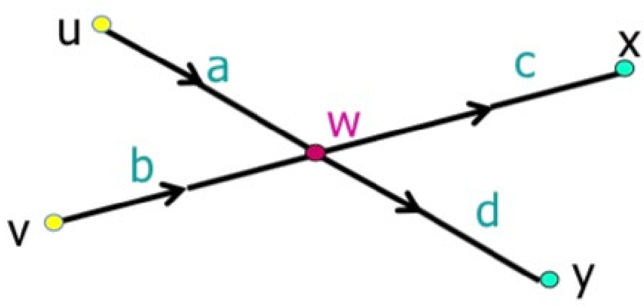


2.6 信号流图

- 节点具有两种作用:

  (1) 对所有来自于流入支路的信号作加法运算;

  (2) 将流入信号之和传输给所有的流出支路。



$$w = au + bv$$

$$x = cw = c(au + bv)$$

$$y = dw = d(au + bv)$$

2.6 信号流图

相关术语：

输入节点(源点)：输入信号对应的节点。只有输出支路，无输入支路

输出节点(阱点)：输出信号对应的节点，常用传输为1的支路引出。只有输入，没有输出支路。

混合节点：既有输入支路，又有输出支路。

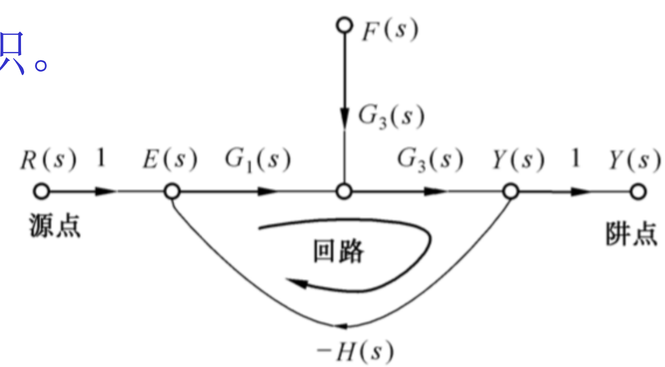
通路 (path)：沿箭头所指方向从一个节点穿过各相连支路到另一个节点

前向通路：当信号从输入节点至输出节点传递时，每个节点只通过1次的通路。

回路(loop): 起点和终点是同一节点，而且信号通过每个节点不多于1次的闭合通路。

回路/通路增益：回路/通路中所有支路增益的乘积。

不接触回路：之间没有公共节点的回路。

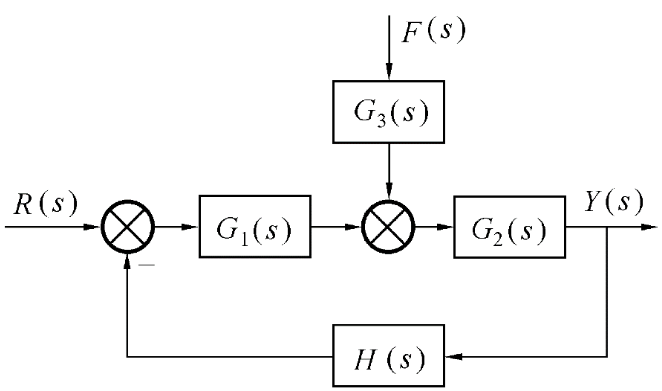


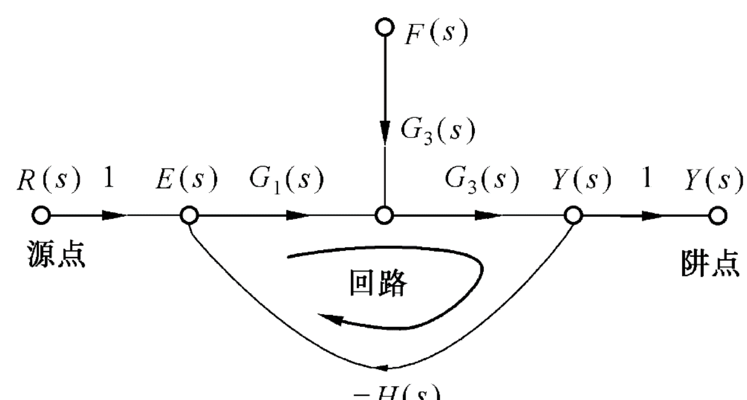
2.6 信号流图

➢ 根据系统微分方程（拉氏变换）绘制，也可由系统的方框图按照对应关系得出。

方框图： 输入 → 相加点 / 引出点 / 信号线 → 方框 → 输出

信号流图 输入节点（源点） → 混合节点 → 支路 → 输出节点（阱点）

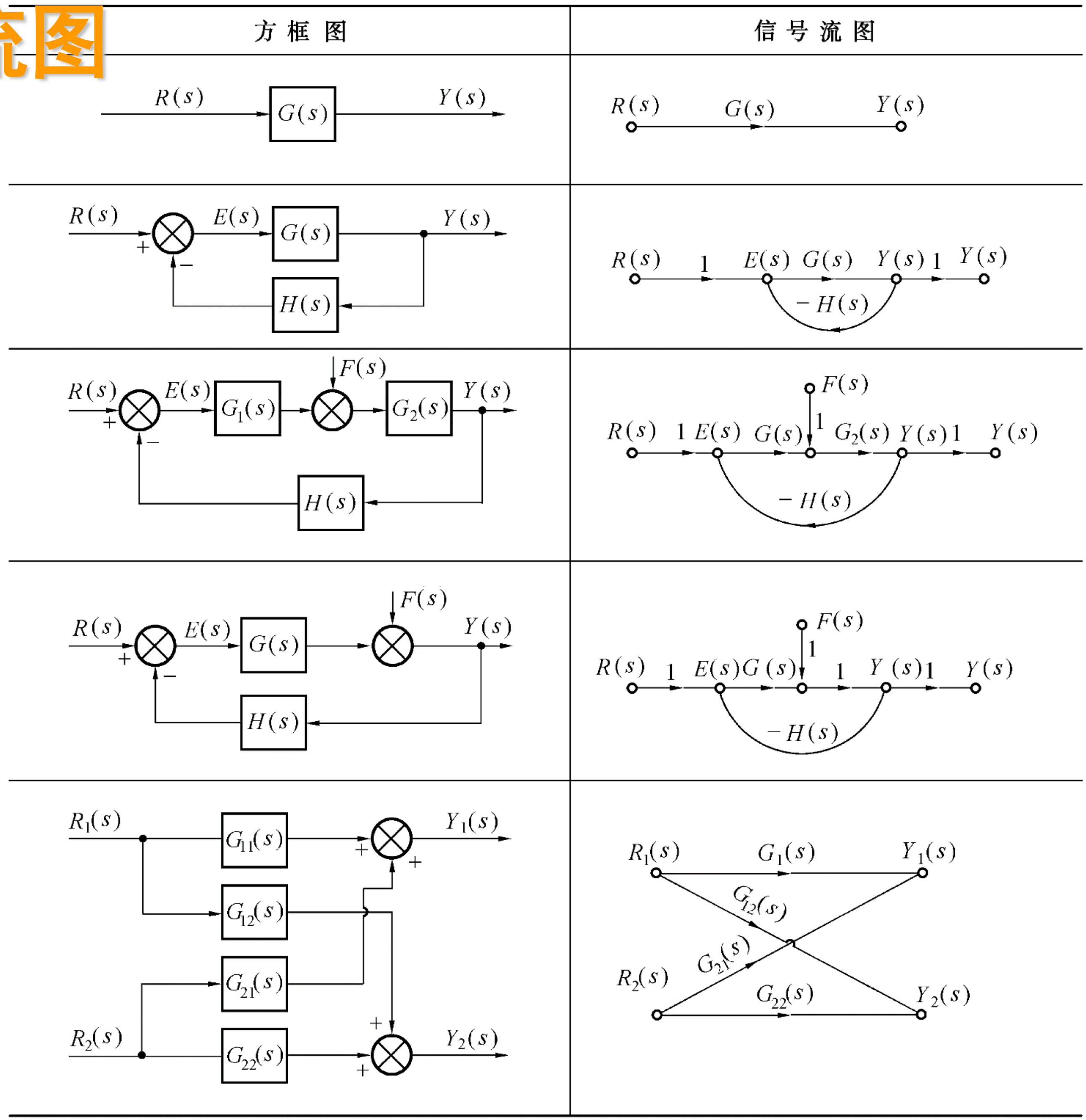




2.6 信号流图

参考书：
裴润、宋申民
《自动控制原理》

表 2.4.1　控制系统方框图与信号流图对照表



2.6 信号流图

系统传递函数 = 信号流图的输入输出节点间总传输增益

梅森公式(Mason's formula): $P = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} P_k \Delta_k$

P—— 总增益；

P_k—— 第 k 条前向通路的通路增益；

Δ—— 信号流图的特征式，即 (Determinant of the graph) see Dolf, pp.85-86

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b L_c - \sum_{def} L_d L_e L_f + \cdots$$

$\sum_a L_a$—— 所有回路增益之和；

$\sum_{bc} L_b L_c$—— 每两个互不接触回路增益乘积之和；

$\sum_{def} L_d L_e L_f$—— 每三个互不接触回路增益乘积之和；

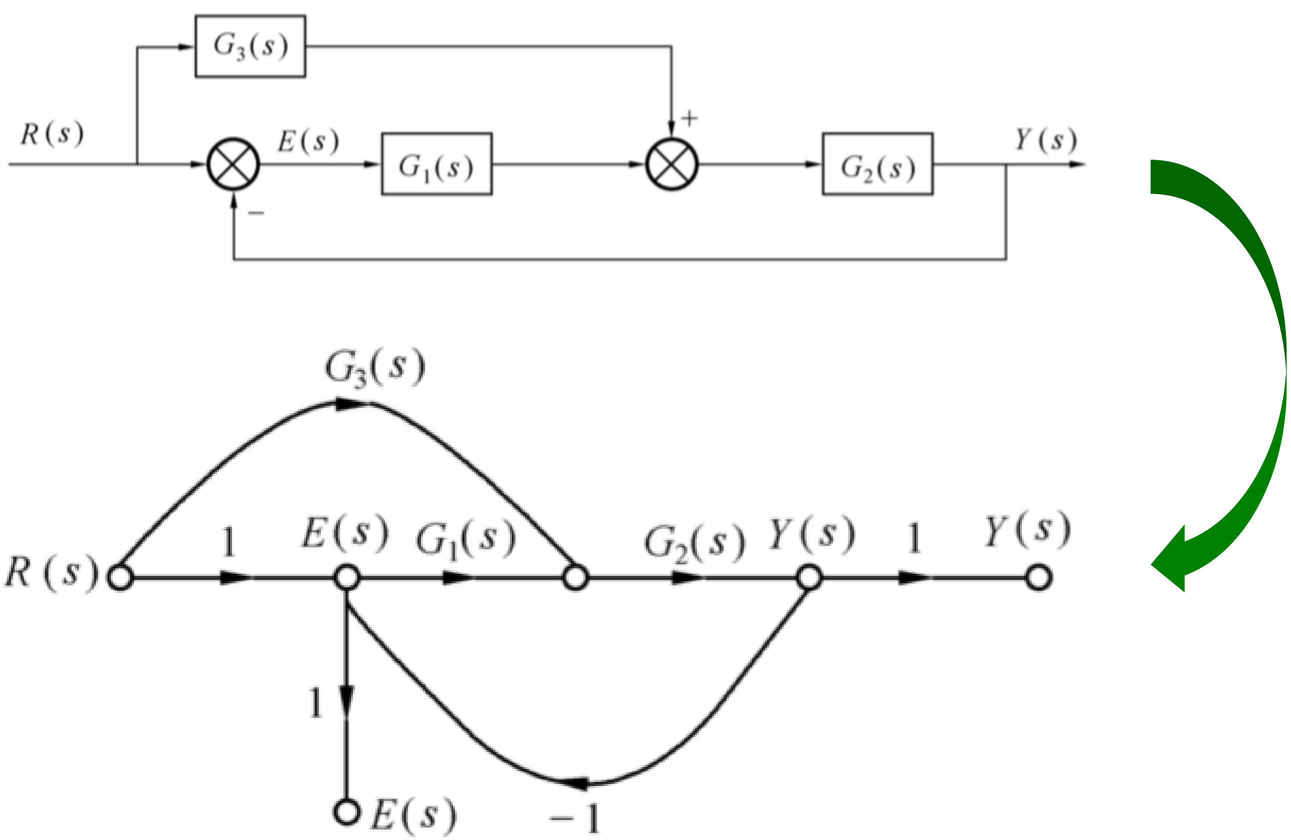
不接触回路：一个信号流图可能有多个回路，若回路之间没有任何公共节点，则称为不接触回路，反之称为接触回路

Δ_k—— 在 Δ 中除去与第 k 条前向通路相接触的(即有共有节点) 回路后的特征式，称为第 k 条前向通路特征式的余因子。

注意：当前向通道接触所有的回路时，Δ_i 等于1；
当前向通道不接触所有的回路时，Δ_i 等于Δ

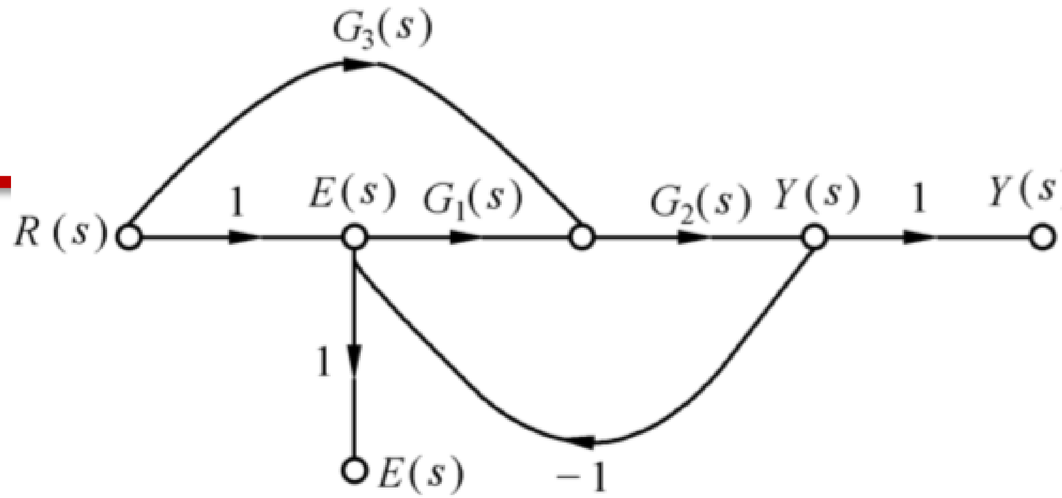
2.6 信号流图

<例2.6> 控制系统方框图如下，试画出信号流图，并用梅森公式求Y(s)/R(s)和E(s)/R(s)



2.6 信号流图

(1) 求Y(s)/R(s)



只有一个回路，回路增益为

$$L_1 = -G_1(s)G_2(s)$$

信号流图的特征式为

$$\Delta = 1 - L_1 = 1 + G_1(s)G_2(s)$$

$$P = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} P_k\Delta_k$$

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b L_c - \sum_{def} L_d L_e L_f + \cdots$$

由R(s)到Y(s)有两条前向通路

$$P_1 = G_1(s)G_2(s)$$

$$P_2 = G_3(s)G_2(s)$$

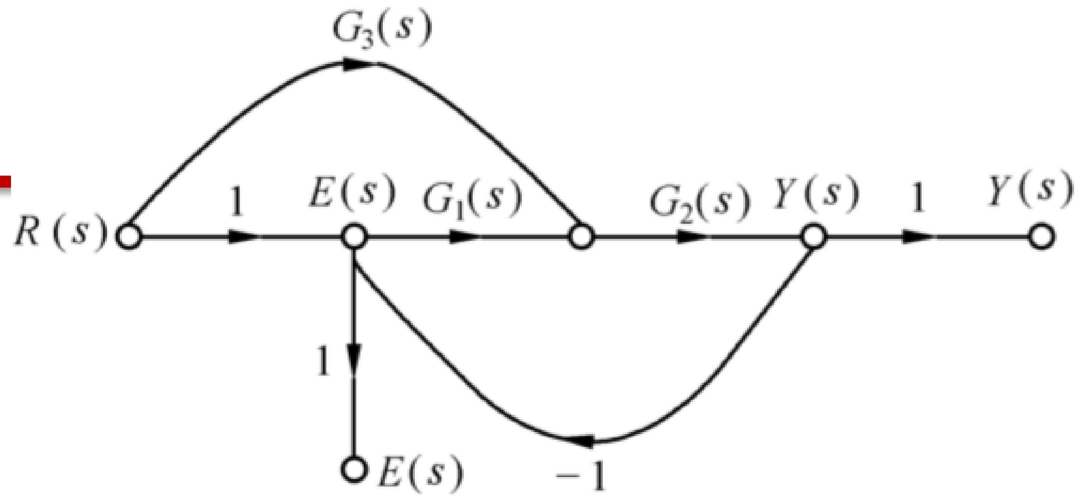
回路L_1与两条前向通路都接触 $\Delta_1 = 1$ $\Delta_2 = 1$

根据梅森公式可写出

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{2} P_k\Delta_k = \frac{G_1(s)G_2(s) + G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

2.6 信号流图

(2) 求E(s)/R(s)



只有一个回路，回路增益为

$$L_1 = -G_1(s)G_2(s)$$

信号流图的特征式为

$$\Delta = 1 - L_1 = 1 + G_1(s)G_2(s)$$

$$P = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} P_k\Delta_k$$

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_bL_c - \sum_{def} L_dL_eL_f + \cdots$$

由R(s)到E(s)有两条前向通路

$$P_1 = 1 \qquad P_2 = -G_3(s)G_2(s)$$

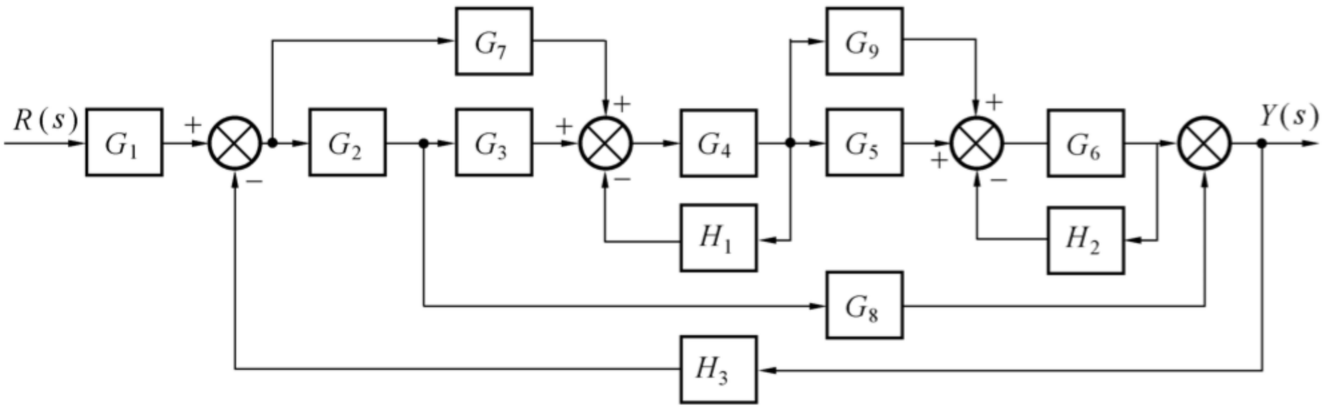
回路L_1与两条前向通路都接触 $\Delta_1 = 1 \qquad \Delta_2 = 1$

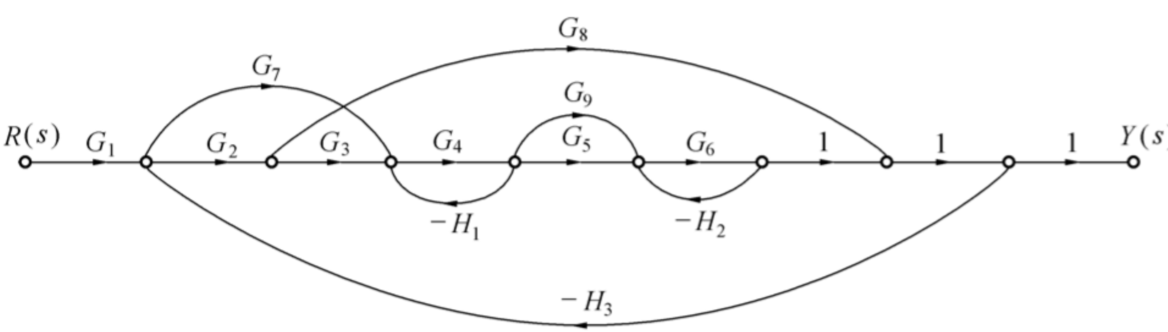
根据梅森公式可以写出

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{2} P_k\Delta_k = \frac{1 - G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

2.6 信号流图

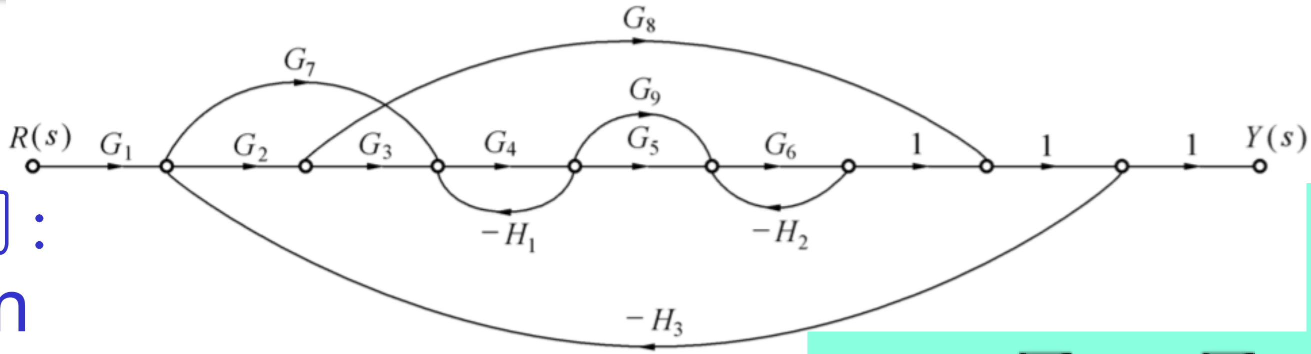
<例2.7> 控制系统方框图如下，试画出信号流图，并用梅森公式求Y(s)/R(s)





练习：
3min

2.6 信号流图



练习：
3min

$$P = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} P_k \Delta_k$$

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b L_c - \sum_{def} L_d L_e L_f + \cdots$$

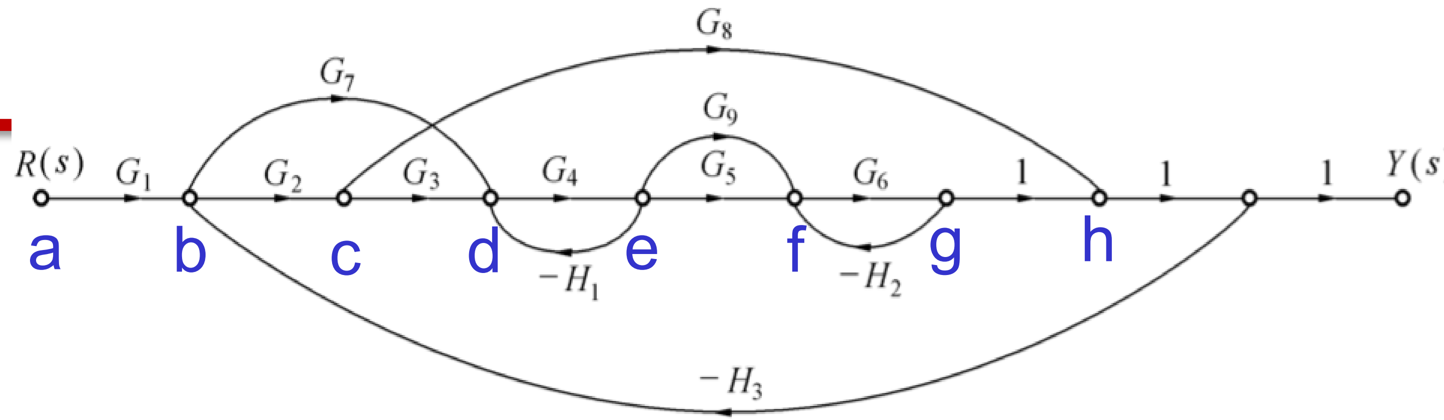
第1步：此图共有__个回路，回路增益分别为

$$L_1 = -G_4 H_1$$
$$L_2 = -G_6 H_2$$
$$L_3 = -G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_3$$
$$L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_9 G_6 H_3$$
$$L_5 = -G_7 G_4 G_5 G_6 H_3$$
$$L_6 = -G_7 G_4 G_9 G_6 H_3$$
$$L_7 = -G_2 G_8 H_3$$

第2步：每两个互不接触回路的增益乘积

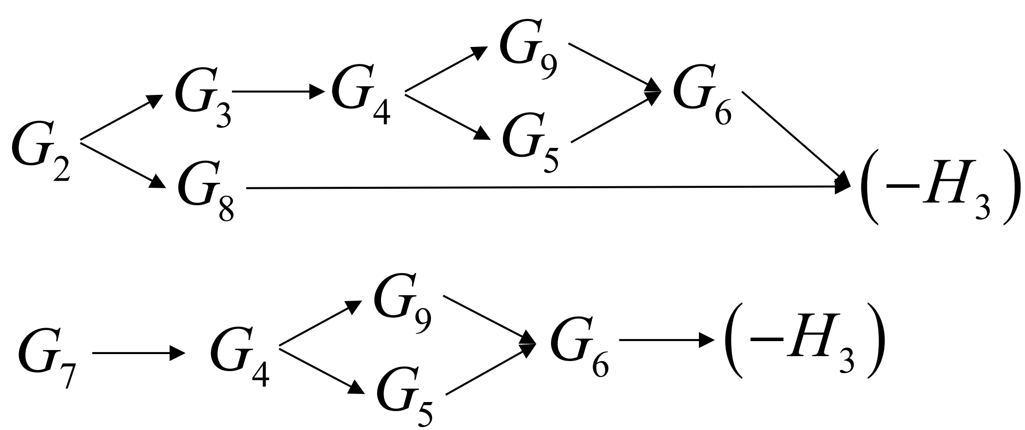
第3步：每三个互不接触回路的增益乘积

思考：怎样不重不漏？



找回路Tip：遍历有反馈输入支路的节点

b:

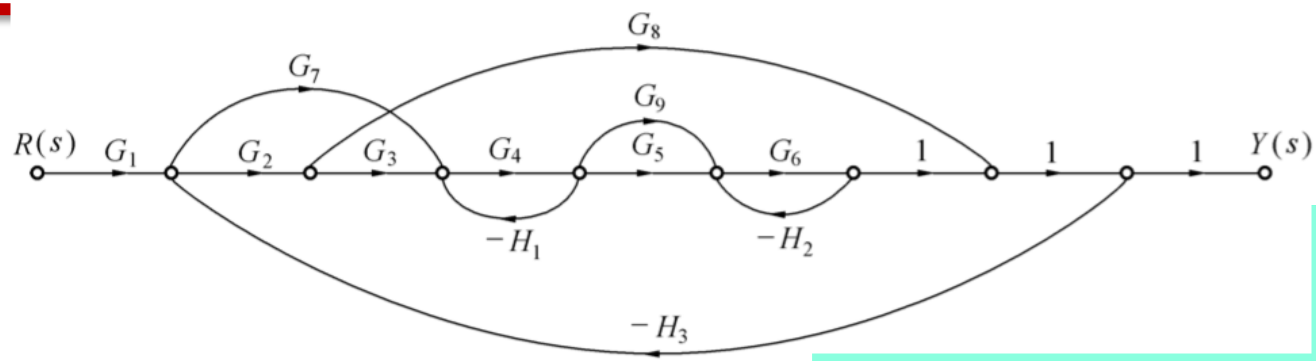


d: $G_4 \longrightarrow (-H_1)$

f: $G_6 \longrightarrow (-H_2)$

$$L_1 = -G_2G_3G_4G_9G_6H_3$$
$$L_2 = -G_2G_3G_4G_5G_6H_3$$
$$L_3 = -G_2G_8H_3$$
$$L_4 = -G_7G_4G_9G_6H_3$$
$$L_5 = -G_7G_4G_5G_6H_3$$
$$L_6 = -G_4H_1$$
$$L_7 = -G_6H_2$$

2.6 信号流图



$$P = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} P_k \Delta_k$$

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b L_c - \sum_{def} L_d L_e L_f + \cdots$$

第1步：此图共有__个回路，回路增益分别为

$$L_1 = -G_4 H_1$$
$$L_2 = -G_6 H_2$$
$$L_3 = -G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_3$$
$$L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_9 G_6 H_3$$
$$L_5 = -G_7 G_4 G_5 G_6 H_3$$
$$L_6 = -G_7 G_4 G_9 G_6 H_3$$
$$L_7 = -G_2 G_8 H_3$$

第2步：每两个互不接触回路的增益乘积

$$L_1 L_2 = G_4 G_6 H_1 H_2$$
$$L_1 L_7 = G_2 G_4 G_8 H_1 H_3$$
$$L_2 L_7 = G_2 G_6 G_8 H_2 H_3$$

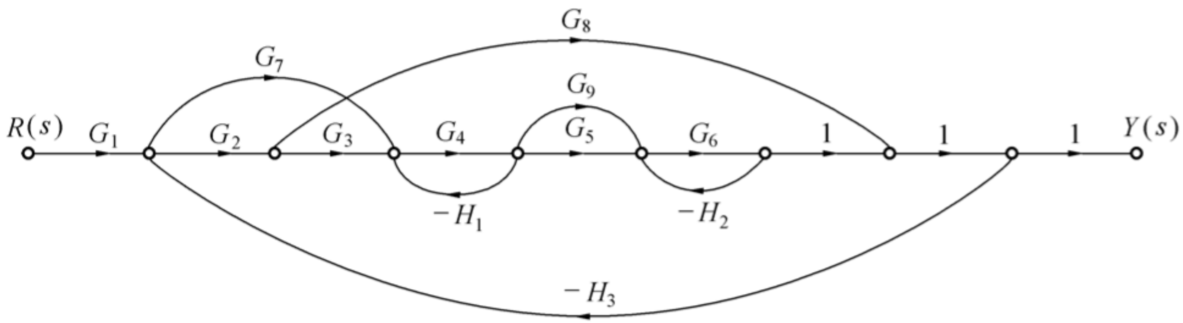
练习：3min

第3步：每三个互不接触回路的增益乘积

$$L_1 L_2 L_7 = -G_2 G_4 G_6 G_8 H_1 H_2 H_3$$

2.6 信号流图

$$L_1 = -G_4H_1$$
$$L_2 = -G_6H_2$$
$$L_3 = -G_2G_3G_4G_5G_6H_3$$
$$L_4 = -G_2G_3G_4G_9G_6H_3$$
$$L_5 = -G_7G_4G_5G_6H_3$$
$$L_6 = -G_7G_4G_9G_6H_3$$
$$L_7 = -G_2G_8H_3$$



第4步：信号流图的特征式为

$$\boxed{\Delta = 1-(L_1+L_2+L_3+L_4+L_5+L_5+L_7)+L_1L_2+L_1L_7+L_2L_7-L_1L_2L_7 =}$$

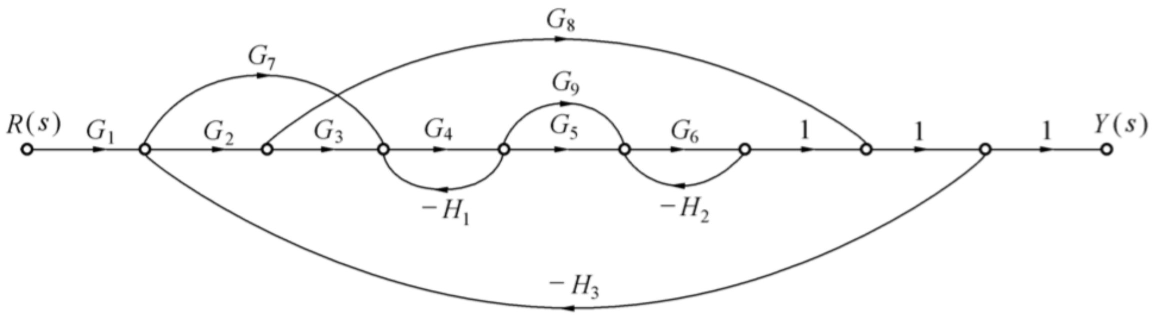
$$1+G_4H_1+G_6H_2+G_2G_3G_4G_5G_6H_3+G_2G_3G_4G_9G_6H_3+G_7G_4G_5G_6H_3+$$
$$G_7G_4G_9G_6H_3+G_2G_8H_3+G_4G_6H_1H_2+G_2G_4G_8H_1H_3+$$
$$G_2G_6G_8H_2H_3+G_2G_4G_6G_8H_1H_2H_3$$

第5步：信号流图的前向通道及其对应的特征式余子式为

练习：
3min

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5G_6 \qquad \Delta_1 = 1$$
$$P_2 = G_1G_2G_8 \qquad \Delta_2 = 1-(L_1+L_2)+L_1L_2 = 1+G_4H_1+G_6H_2+G_4G_6H_1H_2$$
$$P_3 = G_1G_7G_4G_5G_6 \qquad \Delta_3 = 1$$
$$P_4 = G_1G_2G_3G_4G_9G_6 \qquad \Delta_4 = 1$$
$$P_5 = G_1G_7G_4G_9G_6 \qquad \Delta_5 = 1$$

2.6 信号流图



$$P = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} P_k \Delta_k$$

最后，应用梅森增益公式计算给定系统的闭环传递函数 $Y(s)/R(s)$，即

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{5} P_k\Delta_k = (G_1G_2G_3G_4G_5G_6 + G_1G_2G_8 + G_1G_2G_4G_8H_1 + G_1G_2G_6G_8H_2 + G_1G_2G_4G_6G_8H_1H_2 + G_1G_4G_5G_6G_7 + G_1G_2G_3G_4G_6G_9 + G_1G_4G_6G_7G_9)/(1 + G_4H_1 + G_6H_2 + G_2G_3G_4G_5G_6H_3 + G_2G_3G_4G_9G_6H_3 + G_7G_4G_5G_6H_3 + G_7G_4G_9G_6H_3 + G_2G_8H_3 + G_4G_6H_1H_2 + G_2G_4G_8H_1H_3 + G_2G_6G_8H_2H_3 + G_2G_4G_6G_8H_1H_2H_3)$$