第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据（3.8~3.9）
2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据（6.7）

4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差、动态误差系数（3.10）
2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数（6.8.3）

4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则（4.1~4.3）
2. 根轨迹法分析控制系统性能（4.4）
3. 特殊根轨迹（4.6）

4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov 意义下的稳定性基本概念
2. Lyapunov 第一法（间接法）
3. Lyapunov 第二法（直接法）
4. 线性定常系统的 Lyapunov 稳定性分析

4.2 基于状态空间表达式的稳定性分析

稳定性是系统的重要性质，是系统正常工作的必要条件。它描述初始条件下系统方程的解是否具有收敛性，与输入作用无关。

1892年俄国学者李雅普诺夫提出的稳定性理论，采用状态向量描述，适用于单变量、线性、定常系统，而且适用于多变量、非线性、时变系统。是确定系统稳定性的更一般的理论。

在数学中以他的姓氏命名的有：李雅普诺夫第一方法，李雅普诺夫第二方法，李雅普诺夫定理，李雅普诺夫函数，李雅普诺夫变换，李雅普诺夫曲线，李雅普诺夫曲面，李雅普诺夫球面，李雅普诺夫数，李雅普诺夫随机函数，李雅普诺夫随机算子，李雅普诺夫特征指数，李雅普诺夫维数，李雅普诺夫系统，李雅普诺夫分式，李雅普诺夫稳定性等等，而其中以他的姓氏命名的定理、条件有多种。

第一法：利用微分方程的解判断系统稳定性

第二法：利用Lyapunov函数判断系统稳定性

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

设系统方程为

$$\dot{x} = f(x,t)$$

式中 x 为 n 维状态向量，且显含时间变量 t; $f(x,t)$ 为线性或非线性、定常或时变的 n 维向量函数，展开式为

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t); i = 1,2, \dots, n$$

假定方程的解为 $x(t; x_0, t_0)$, 式中x_0 和 t_0分别为初始状态向量和初始时刻，则初始条件x_0必满足 $x(t_0; x_0, t_0) = x_0$

(1) 平衡状态

(2) Lyapunov意义下的稳定性

(3) 渐近稳定性

(4) 大范围（全局）渐近稳定性

(5) 不稳定性

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

（1）平衡状态

李雅普诺夫关于稳定性的研究均针对平衡状态而言。对于所有t，满足

$$\dot{x}_e = f(x_e, t) = 0 \;(\text{系统方程 } \dot{x} = f(x, t))$$

的状态 x_e 称为平衡状态。平衡状态的各分量相对于时间不再发生变化。若已知状态方程，令 $\dot{x} = 0$ 所求得的解 x，便是一种平衡状态。

线性定常系统 $\dot{x} = Ax$，其平衡状态满足 $Ax_e = 0$，当A为非奇异矩阵时，系统只有唯一的零解，即只存在一个位于状态空间原点的平衡状态。若A为奇异矩阵，则系统存在有无穷多个平衡状态。对于非线性系统，可能有一个或多个平衡状态。

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 cos\, x_1 \\ \dot{x_2} = -sin\, x_1 - x_2 \end{cases}$$

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

(2) Lyapunov意义下的稳定性

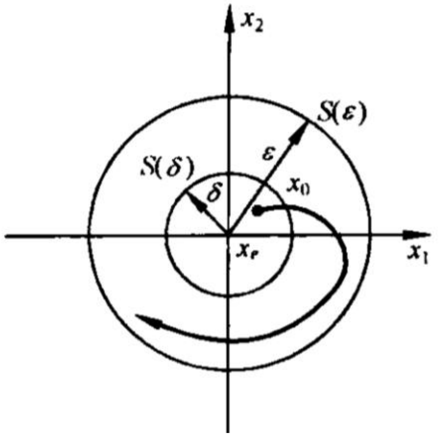
设 x_e 为系统的一个平衡状态，如果对于给定的任一实数 $\epsilon > 0$,都对应地存在一个实数 $\delta(\epsilon, t_0) > 0$，使得系统初始状态位于以平衡状态 x_e 为球心，$\delta(\epsilon, t_0)$ 为半径的闭球域 $S(\delta)$ 内，即

$$\| x_0 - x_e \| \leq \delta(\epsilon, t_0)$$

若系统方程的解 $x(t; x_0, t_0)$ 在 $t \to \infty$ 的过程中，都位于以 x_e 为球心、半径为 ϵ 的闭球域 $S(\epsilon)$内，即

$$\| x(t; x_0, t_0) - x_e \| \leq \epsilon, t \geq t_0$$

则称系统的平衡状态 x_e 在李雅普诺夫意义下是稳定的。



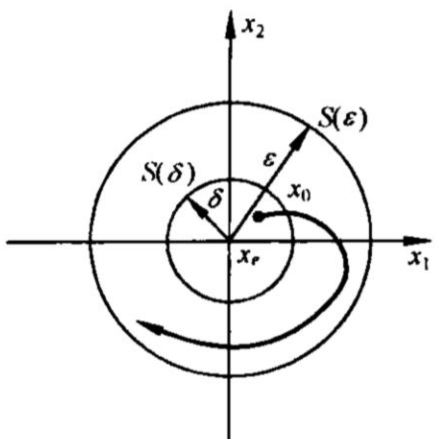
式中‖·‖为欧几里得范数，其几何意义是空间距离的尺度。例如$\| x_0 - x_e \|$表示状态空间中x_0至x_e点之间距离的尺度，其数学表达式为

$$\| x_0 - x_e \| = [(x_{10} - x_{1e})^2 + \cdots + (x_{n0} - x_{ne})^2]^{\frac{1}{2}}$$

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

(2) Lyapunov意义下的稳定性

注意：按李雅普诺夫意义下的稳定性定义，当系统作不衰减的振荡运动时，将在平面描绘出一条封闭曲线，但只要不超出S(ε)，则认为是稳定的，这与经典控制理论中线性定常系统稳定性的定义是有差异的。经典控制理论中的稳定，指的是渐近稳定性。



Lyapunov意义下的稳定性

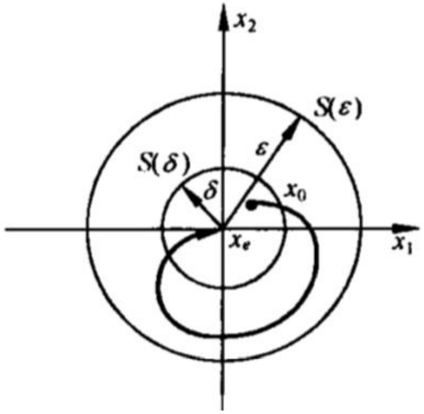
1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

(3) 渐近稳定性

若系统的平衡状态 x_e 不仅具有李雅普诺夫意义下的稳定性，且有

$$\lim_{t\to\infty} \| x(t;x_0,t_0) - x_e \| = 0$$

则称此平衡状态是渐近稳定的。此时，从$S(\delta)$出发的轨迹不仅不会超出$S(\varepsilon)$，且当$t\to\infty$时收敛于x_e。



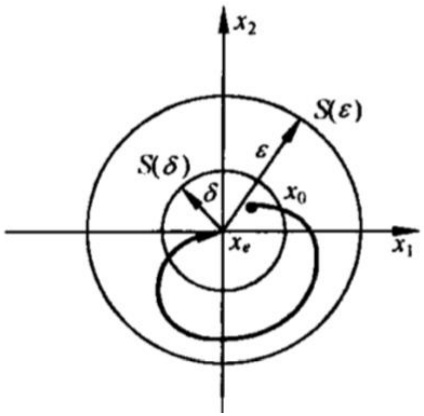
经典控制理论中的稳定性定义与此处的渐近稳定性对应。

若δ与t_0无关，且$\lim_{t\to\infty} \| x(t;x_0,t_0) - x_e \| = 0$的极限过程与$t_0$无关，则称平衡状态是一致渐近稳定的。

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

(4) 大范围（全局）渐近稳定性

当初始条件扩展至整个状态空间，且平衡状态均具有渐近稳定性时，称此平衡状态是大范围渐近稳定的。此时$\delta \to \infty$， $S(\delta) \to \infty$。当$t \to \infty$时，由状态空间中任一点出发的轨迹都收敛至 x_e 。



对于线性系统，如果它是渐近稳定的，则必定是大范围渐近稳定的，这是因为线性系统的稳定性与初始条件的大小无关。而对于非线性系统来说，其稳定性往往与初始条件的大小密切相关，系统渐近稳定不一定是大范围渐近稳定。

考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax$$

原点是其平衡点之一。

线性定常系统所有平衡点的稳定性是相同的。因为，对于非零平衡点，经过状态平移，均可转换为原点，并且状态矩阵不变。

事实上，设 x_e 是系统的非零平衡点，即$Ax_e = 0$，令$z = x - x_e$，则

$$\dot{z} = \dot{x} - \dot{x}_e = A(x - x_e) = Az$$

可见任意非零平衡点x_e的稳定性与原点的稳定性是一样的。

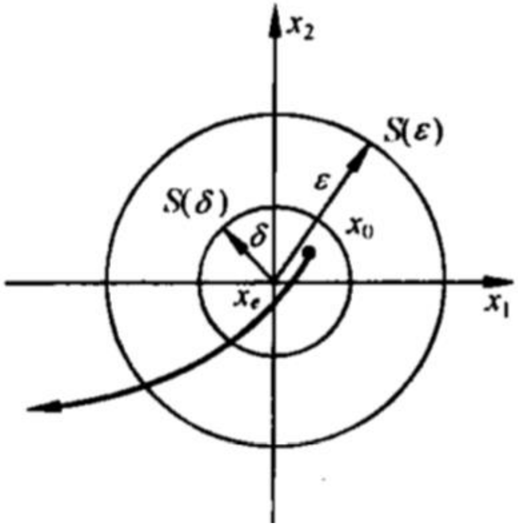
因此，当原点是该系统的稳定（渐近稳定）平衡点时，我们称该系统是稳定（渐近稳定）的。

对于线性系统而言，系统稳定性和平衡状态稳定性是一回事儿。

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

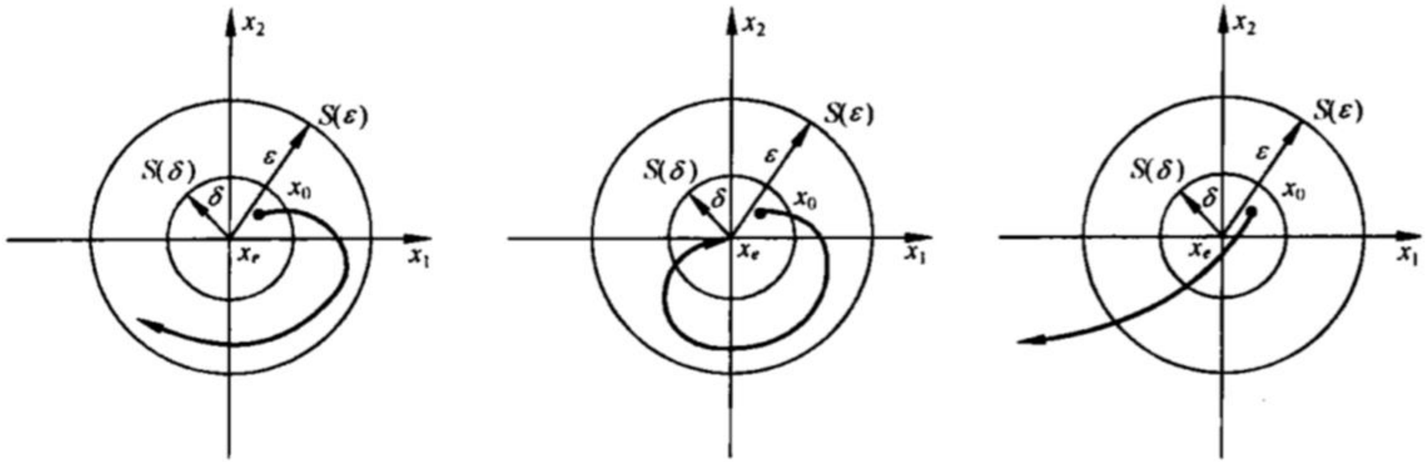
(5) 不稳定性

如果对于某个实数 ε >0 和任一个实数 δ >0, 不管这两个实数有多么小，在$S(\delta)$内总存在着一个状态x_0, 使得由这一状态出发的轨迹超出$S(\varepsilon)$, 则平衡状态 x_e称为是不稳定的，如图所示。



1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

- 平衡状态 $\dot{x}_e = f(x_e, t) = 0$ (系统方程 $\dot{x} = f(x, t)$)



(a) 李雅普诺夫意义下的稳定性 (b) 渐近稳定性 (c) 不稳定性

- 大范围（全局）渐近稳定性

当初始条件扩展至整个状态空间，且平衡状态均具有渐近稳定性

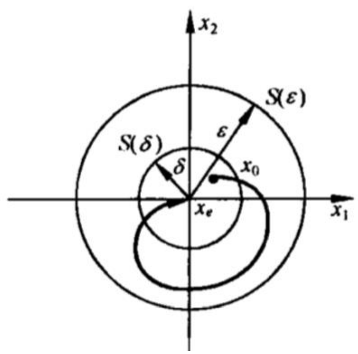
- 对于线性系统，如果它是渐近稳定的，则必定是大范围渐近稳定的

2. Lyapunov 第一法（间接法）

李雅普诺夫第一法是利用状态方程解的特性来判断系统稳定性的方法，它适用于线性定常、线性时变以及非线性函数可线性化的情况。我们主要研究线性定常系统，所以在此仅介绍线性定常系统的特征值判据。

定理9-9 对于线性定常系统 $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0, t \geq 0$, 有：系统的唯一平衡状态$x_e = 0$ 是渐近稳定的充分必要条件是，A的所有特征值均具有负实部。

$$\lim_{t\to\infty} \| x(t; x_0, t_0) - x_e \| = 0$$



$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 \qquad (t \geq 0)$$

$$e^{At} = Pe^{\bar{A}t}P^{-1} = P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

说明： 由于所讨论的系统为线性定常系统，当其为稳定时必是一致稳定，当其为渐近稳定时必是大范围一致渐近稳定。

定理9-9 对于线性定常系统 $\dot{x}=Ax, x(0)=x_0, t\geq 0$, 有：系统的唯一平衡状态$x_e=0$是渐近稳定的充分必要条件是，$A$的所有特征值均具有负实部。

证明 假定$\boldsymbol{A}$有相异特征值$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$，存在非奇异线性变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\,\overline{\boldsymbol{x}}$使$\overline{\boldsymbol{A}}$对角化

变换后状态方程的解为 $\overline{\boldsymbol{x}}(t)=e^{\overline{\boldsymbol{A}}t}\overline{\boldsymbol{x}}(0)=\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1 t}\ \ldots e^{\lambda_n t}\right)\overline{\boldsymbol{x}}(0)$

原状态方程的解为 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{P}e^{\overline{\boldsymbol{A}}t}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(0)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}e^{\overline{\boldsymbol{A}}t}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1 t}\ \ldots e^{\lambda_n t}\right)\boldsymbol{P}^{-1}$$

可以写矩阵多项式的形式

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{R}_i e^{\lambda_i t}=\boldsymbol{R}_1 e^{\lambda_1 t}+\cdots+\boldsymbol{R}_n e^{\lambda_n t}$$

故 $\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)=\left[\boldsymbol{R}_1 e^{\lambda_1 t}+\cdots+\boldsymbol{R}_n e^{\lambda_n t}\right]\boldsymbol{x}(0)$

当$\boldsymbol{A}$的所有特征值均具有负实部时，对于任意$\boldsymbol{x}(0)$均有$\boldsymbol{x}(t)|_{t\to\infty}\to 0$，系统渐近稳定。只要有一个特征值实部大于零，对于$\boldsymbol{x}(0)\neq 0$， $\boldsymbol{x}(t)$ 便无限增长，系统不稳定。如果只有一个或一对特征值（非重根）的实部等于零，其余特征值实部均小于零，$\boldsymbol{x}(t)$便含有常数项或三角函数项，则系统是李雅普诺夫意义下稳定的。

2. Lyapunov 第一法（间接法）

例9-25 已知线性定常连续系统状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2$$

试用李雅普诺夫方程判断系统的渐近稳定性。

解： 用特征值判据判断。系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

特征值为−2，1, 故系统不稳定。

定理9-9 对于线性定常系统 $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0, t \geq 0$, 有：系统的唯一平衡状态$x_e = 0$ 是渐近稳定的充分必要条件是，A的所有特征值均具有负实部。

3. Lyapunov 第二法（直接法）

根据古典力学中的振动现象，若系统能量（含动能与位能）随时间推移而衰减，系统迟早会达到平衡状态，但要找到实际系统的能量函数表达式并非易事。李雅普诺夫提出，可虚构一个能量函数，后来便被称为李雅普诺夫函数。一般它与$x_1, x_2, \ldots, x_n$及t有关，记为$V(x,t)$。若不显含t，则记以$\boldsymbol{V(x)}$。它是一个标量函数，考虑到能量总大于零，故为正定函数。能量衰减特性用$\dot{V}(x,t)$或$\dot{V}(x)$表示。李雅普诺夫第二法利用V 及$\dot{V}$的符号特征，直接对平衡状态稳定性作出判断，无需求出系统状态方程的解，故称直接法。

优点与不足： 此方法解决了一些用其他稳定判据难以解决的非线性系统的稳定性问题，遗憾的是对一般非线性系统仍未找到构造李雅普诺夫函数的通用方法。

经验结论： 对于线性系统，通常用二次型函数 $\boldsymbol{x^T P x}$ 作为李雅普诺夫函数。

只讨论定理的物理概念和应用。

3. Lyapunov 第二法（直接法）

(1) 标量函数定号性的简要回顾

正定性　标量函数$V(x)$对所有在域S中的非零状态x有$V(x)>0$且$V(0)=0$，则在域S（域S 包含状态空间的原点）内的标量函数$V(x)$称为是正定的。

负定性　如果-$V(x)$是正定函数，则标量函数$V(x)$称为负定函数。

半正定性　如果标量函数$V(x)$除了原点及某些状态处等于零外，在域S内的所有状态都是正定的，则$V(x)$称为半正定函数。

半负定性　如果-$V(x)$是半正定函数，则标量函数$V(x)$称为半负定函数。

不定性　如果在域S内，不论域S多么小，$V(x)$既可为正值也可为负值，则标量函数$V(x)$称为不定函数。

例如，在二维空间中：

$x_1^2+x_2^2$	正定
$(x_1+x_2)^2$	半正定
$-(x_1^4+x_2^2)$	负定
$-x_1^2$	半负定
$x_1^2-x_2^2$	不定

3. Lyapunov 第二法（直接法）

☛ **标量函数的定号性**

考虑二次型函数 $x^T Ax$ 的定号性，A是实对称矩阵

结论1： 实对称矩阵A是正定（半正定）的，**当且仅当**所有**特征值**均大于（大于等于）零。

结论2： 实对称矩阵A是正定（半正定）的，**当且仅当**所有**主子式**均大于（大于等于）零。

经验结论： 对于线性系统，通常用二次型函数 $x^T P x$ 作为李雅普诺夫函数。

3. Lyapunov 第二法（直接法）

(2) Lyapunov第二法主要定理

定理9-10（定常系统大范围渐近稳定判别定理1） 对于定常系统

$$\dot{x} = f(x), t \geq 0$$

其中$f(0) = 0$,如果存在一个具有连续一阶导数的标量函数$V(x)$，$V(0) = 0$,并且对于状态空间 X 中的一切非零点 x 满足以下条件:

1）$V(x)$为正定;

2）$\dot{V}(x)$为负定;

3）当$\|x\| \to \infty$ 时 $V(x) \to \infty$。

则系统的原点平衡状态是大范围渐近稳定的。

[定理9-10] $V(x)$正定，$\dot{V}(x)$负定，则原点是渐近稳定的；进而，若$\|x\| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$，则原点是全局渐近稳定的。

[定理9-10] $V(x)$正定，$\dot{V}(x)$负定，则原点是渐近稳定的；进而，若$\|x\| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$，则原点是全局渐近稳定的。

(2) Lyapunov第二法主要定理

例9-23　设系统状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

试确定系统的稳定性。

解　显然，原点（$x_1 = 0$，$x_2 = 0$）是该系统唯一的平衡状态。选取正定标量函数$V(x)$为

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

则沿任意轨迹 $V(x)$ 对时间的导数

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

是负定的。这说明$V(x)$沿任意轨迹是连续减小的，因此$V(x)$是一个李雅普诺夫函数。由于当$\|x\| \to \infty$时$V(x) \to \infty$，所以系统在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

(2) Lyapunov第二法主要定理

例 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\dot{x}_1 = -{x_1}^3 - 4x_2$$

$$\dot{x}_2 = 3x_1 - 7x_2$$

解：原点是唯一平衡点。考虑

$$V(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 > 0$$

$$\dot{V}(x) = -6x_1^4 - 56x_2^2 < 0$$

当$\|x\| \to \infty$时$V(x) \to \infty$，故原点全局渐近稳定。

[定理9-10] $V(x)$正定，$\dot{V}(x)$负定，则原点是渐近稳定的；进而，若$\|x\| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$，则原点是全局渐近稳定的。

3. Lyapunov 第二法（直接法）

(2) Lyapunov第二法主要定理

定理9-11（定常系统大范围渐近稳定判别定理2） 对于定常系统，如果存在一个具有连续一阶导数的标量$V(x)$， $V(0)=0$，并且对状态空间 X 中的一切非零点 x 满足如下的条件：

1） $V(x)$为正定；

2） $\dot{V}(x)$为负半定；

3） 对任意 $x \in X$， $\dot{V}(x(t;x_0,0)) \neq 0$；

4） 当$\|x\| \to \infty$时$V(x) \to \infty$ 。

则系统的原点平衡状态是大范围渐近稳定的。

[定理9-11] $V(x)$正定，$\dot{V}(x)$半负定，则原点是稳定的；此外，若$\dot{V}(x)$除原点外沿状态轨线不恒为零，则原点是渐近稳定的；再进一步，若$\|x\| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$，则原点是全局渐近稳定的。

[定理9-11] $V(x)$正定，$\dot{V}(x)$半负定，则原点是稳定的；此外，若$\dot{V}(x)$除原点外沿状态轨线不恒为零，则原点是渐近稳定的；再进一步，若$\|x\| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$，则原点是全局渐近稳定的。

例 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

(1) 取 $V(x) = 2x_1^2 + x_2^2 > 0$

得 $\dot{V}(x) = 2x_1x_2 - 2x_2^2$ 不定，不能判定。

(2) 取 $V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$

得 $\dot{V}(x) = -2x_2^2$ 半负定，故原点稳定。

若$\dot{V}(x)=0$，则$x_2= \dot{x}_1=0$，代入原方程得$x_1=0$，因而$\dot{V}(x)=0$仅发生在原点处。而当$\|x\| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$，所以原点全局渐近稳定。

(3) 取 $V(x) = 1.5x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = x^T \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} x > 0$

得 $\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_2^2 < 0$

且当$\|x\| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$，所以原点全局渐近稳定。

- 此例说明，选择不同的V函数，可能得到不同的结果，但得到的结论是不矛盾的。找到“好”的V函数，需要经验和运气。

3. Lyapunov 第二法（直接法）

(2) Lyapunov第二法主要定理

定理9-12（不稳定判别定理）对于定常系统，如果存在一个具有连续一阶导数的标量函数$V(x)$（其中$V(0)=0$），和围绕原点的域 Ω，使得对于一切x∈ Ω和一切 t≥ t_0满足如下条件：

1） $V(x)$为正定；

2） $\dot{V}(x)$为正定。

则系统平衡状态为不稳定。

[定理9-12] $V(x)$正定，$\dot{V}(x)$也正定，则原点是不稳定的。

3. Lyapunov 第二法（直接法）

(2) Lyapunov第二法主要定理

[定理9-10] $V(x)$正定，$\dot{V}(x)$负定，则原点是渐近稳定的；进而，若$\|x\| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$，则原点是全局渐近稳定的。

[定理9-11] $V(x)$正定，$\dot{V}(x)$半负定，则原点是稳定的；此外，若$\dot{V}(x)$除原点外沿状态轨线不恒为零，则原点是渐近稳定的；再进一步，若$\|x\| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$，则原点是全局渐近稳定的。

[定理9-12] $V(x)$正定，$\dot{V}(x)$也正定，则原点是不稳定的。

- 以上均为充分条件。某$V(x)$不满足定理条件时，不能下结论。
- 若$V(x)$代表广义能量，则$\dot{V}(x)$代表广义功率。$\dot{V}(x)<0$，说明沿状态轨线运动是消耗能量的。

4. 线性定常系统的Lyapunov稳定性分析

此处只讨论第二法（直接法）。

（1）线性定常连续系统渐近稳定性的判别

状态方程$\dot{x} = Ax, \mathrm{x}(0) = x_0, t \geq 0$，$A$ 为非奇异矩阵，故原点是唯一平衡状态。

设取正定二次型函数:$V(x) = x^T Px$作为可能的李雅普诺夫函数，考虑到系统状态方程，则有:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T \mathrm{P}x + x^T P\dot{x} = x^T(A^T P + PA)x$$

$$A^T P + PA = -Q, \dot{V}(x) = -x^T \mathrm{Q}x$$

根据定理9-10（定常系统大范围渐近稳定判别定理1），只要Q正定（即$\dot{V}(x)$负定），则系统是大范围渐近稳定的。

[定理9-10] $V(x)$正定，$\dot{V}(x)$负定，则原点是渐近稳定的；进而，若$\|x\| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$，则原点是全局渐近稳定的。

(1) 线性定常连续系统渐近稳定性的判别

线性定常连续系统渐近稳定的充要条件是：给定一正定矩阵P，存在着满足

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q$$

的正定矩阵Q，而$x^T Px$是该系统的一个李雅普诺夫函数，上述方程称为李雅普诺夫矩阵代数方程。

说明：按上述先给定P、再验证Q是否正定的步骤去分析系统稳定性时，若P选取不当，往往会导致Q非正定。需反复多次选取P来检验Q是否正定，很不方便。

因此，最好是:先选取Q为正定实对阵矩，再求解方程，若求得P为正定实对称矩阵，则可判定系统是渐近稳定的。通常选取Q为单位阵或对角阵。

(1) 线性定常连续系统渐近稳定性的判别

定理9-13 线性定常系统$\dot{x} = Ax$，$x(0) = x_0$，t≥0的原点平衡状态 $x_e = 0$ 为渐近稳定的充要条件是，对于任意给定的一个正定对称矩Q，有唯一的正定对称矩阵P满足式

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q$$

说明1：定理9-13给出了矩阵A的所有特征值均具有负实部的充要条件。

说明2：定理中Q的唯一限制是其应为对称正定阵。当然，满足这种限制的Q可能有无穷多个，但判断的结果即系统是否为渐近稳定，则和Q的不同选择无关。进而Q常选取单位阵I。因此方程简化为：

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = -I$$

根据定理9-13（定常系统大范围渐近稳定判别定理2）可知，若系统任意状态轨迹在非零状态不存在$\dot{V}(x)$=0时，Q可选择为正半定的，即允许Q取半正定对角阵时主对角线上部分元素为零，而解得的 P 仍为正定。

(1) 线性定常连续系统渐近稳定性的判别

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = -I$$

例9-25 已知线性定常连续系统状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2$$

试用李雅普诺夫方程判断系统的渐近稳定性。

解　为便于对比，先用特征值判据判断。系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

特征值为-2，1，故系统不稳定。令

$$A^T P + PA = -Q = -I \qquad P = P^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -3/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

由于$P_{11} = -\frac{3}{4} < 0$，$\det P = -\frac{1}{4} < 0$，故，$P$不定，可知系统非渐近稳定。由特征值判据知系统是不稳定的。

(1) 线性定常连续系统渐近稳定性的判别

【例】 判定下述线性定常系统的渐近稳定性。

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = -I$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

解：取$Q = I$，令$P = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$，代入李雅普诺夫方程得：

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

解得：

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} > 0$$

所以该系统是渐近稳定的。

(1) 线性定常连续系统渐近稳定性的判别

【9-32】试用李雅普诺夫第二法判断下列线性系统平衡状态的稳定性：

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2$$

解：原点$x_1 = 0, x_2 = 0$是该系统唯一的平衡状态。

（1） $x_e = 0$是系统唯一的平衡状态。选取正定标量函数

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2$$

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{2}x_2\dot{x}_2 = x_1(-x_1 + x_2) + \frac{1}{2}x_2(2x_1 - 3x_2)$$

$$= -x_1^2 + 2x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 = -(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}x_2^2$$

$V(x)$正定， $\dot{V}(x)$负定，原点平衡状态大范围渐近稳定。

[定理9-10] $V(x)$正定，$\dot{V}(x)$负定，则原点是渐近稳定的；进而，若$\|x\| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$，则原点是全局渐近稳定的。

说明： 由于所讨论的系统为线性定常系统，当其为稳定时必是一致稳定，当其为渐近稳定时必是大范围一致渐近稳定。

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = -I$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2$$

（2）Q、P 法判断平衡状态稳定性。

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}, \qquad \det A = 1$$

A是非奇异阵，所以$x_e = 0$是系统唯一的平衡状态。

$$V(x) = x^T P x, \dot{V}(x) = -x^T Q x, P > 0, Q > 0$$

$$A^T P + PA = -Q = -I$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

解得：

$$P_{12} = P_{21}, P = \begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}14 & 5\\ 5 & 3\end{bmatrix}$$

判断P正定性：

$$P_{11} > 0, \det P = \frac{17}{64} > 0$$

由于P正定，系统原点平衡状态是大范围渐近稳定的。

(1) 线性定常连续系统渐近稳定性的判别

本部分小结

线性定常系统 $\dot{x} = Ax$

① 渐近稳定的充要条件：A的特征值全部在左半开平面内；

② 渐近稳定的充要条件：对任意正定阵Q，存在正定阵P满足李雅普诺夫方程：

$$A^T P + PA = -Q$$

(2) 线性定常离散系统渐近稳定性的判别

线性定常离散系统状态方程：

$$x(k+1)=\Phi x(k), x(0)=x_0; k=0,1,2\cdots$$

式中， Φ是非奇异阵，原点是平衡状态。

取正定二次型函数：$V\big(x(k)\big)=x^T(k)Px(k)$

以$\triangle V\big(x(k)\big)$取代$\dot{V}(x)$有： $\triangle V\big(x(k)\big)=\mathrm{V}(x(k+1)-V(\mathrm{x(k)})$

$$=x^T(k+1)Px(k+1)\text{-}x^T(k)Px(k)$$

$$=[\Phi x(k)]^T P[\Phi x(k)]-x^T(k)Px(k)$$

$$=x^T(k)(\Phi^T P\Phi-P)x(k)$$

离散Lyapunov矩阵代数方程

令：$\Phi^T P\Phi-P=-Q$ 则：$\Delta V(x(k)=-x^T(k)Qx(k)$

定理9-14 线性定常离散系统渐近稳定的充分必要条件是，给定任一正定对称矩阵Q，存在一个正定对称矩阵P，满足 $\Phi^T P\Phi-P=-Q$

说明： $x^T(k)Px(k)$是系统的一个李雅普诺夫函数。通常可取 Q=I.

【例】考虑如下离散系统:

$$x(k+1) = \Phi x(k),\quad \Phi = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 \\ 1.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

试分析其稳定性。

解：假设$Q = I$，求解离散李雅普诺夫方程:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1.2 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 \\ 1.2 & 0.8 \end{bmatrix} - P = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

得

$$P = \begin{bmatrix} 8.2566 & 1.6073 \\ 1.6073 & 2.2665 \end{bmatrix} > 0$$

所以该系统是渐近稳定的。

(2) 线性定常离散系统渐近稳定性的判别

本部分小结

对于线性定常离散系统

$$x(k+1) = \Phi x(k)$$

- 系统渐近稳定的充要条件：Φ的特征值的模均小于1
- 系统为渐近稳定的充要条件：对任意给定的正定矩阵 Q，存在正定矩阵P满足离散李雅普诺夫方程:

$$\Phi^T P \Phi - P = -Q$$

（ × ）7. 一个系统的平衡状态可能有多个，因此系统的李雅普诺夫稳定性与系统受扰前所处的平衡位置无关。

（ × ）4. 若一个系统是李雅普诺夫意义下稳定的，则该系统在任意平衡状态处都是稳定的；

（ √ ）8. 若一线性定常系统的平衡状态是渐近稳定的，则从系统的任意一个状态出发的状态轨迹随着时间的推移都将收敛到该平衡状态。

（ √ ）4. 对系统 $\dot{x}=Ax$，其Lyapunov意义下的渐近稳定性和矩阵A的特征值都具有负实部是一致的。

（ × ）10. 如果一个系统的李雅普诺夫函数确实不存在，那么我们就可以断定该系统是不稳定的。