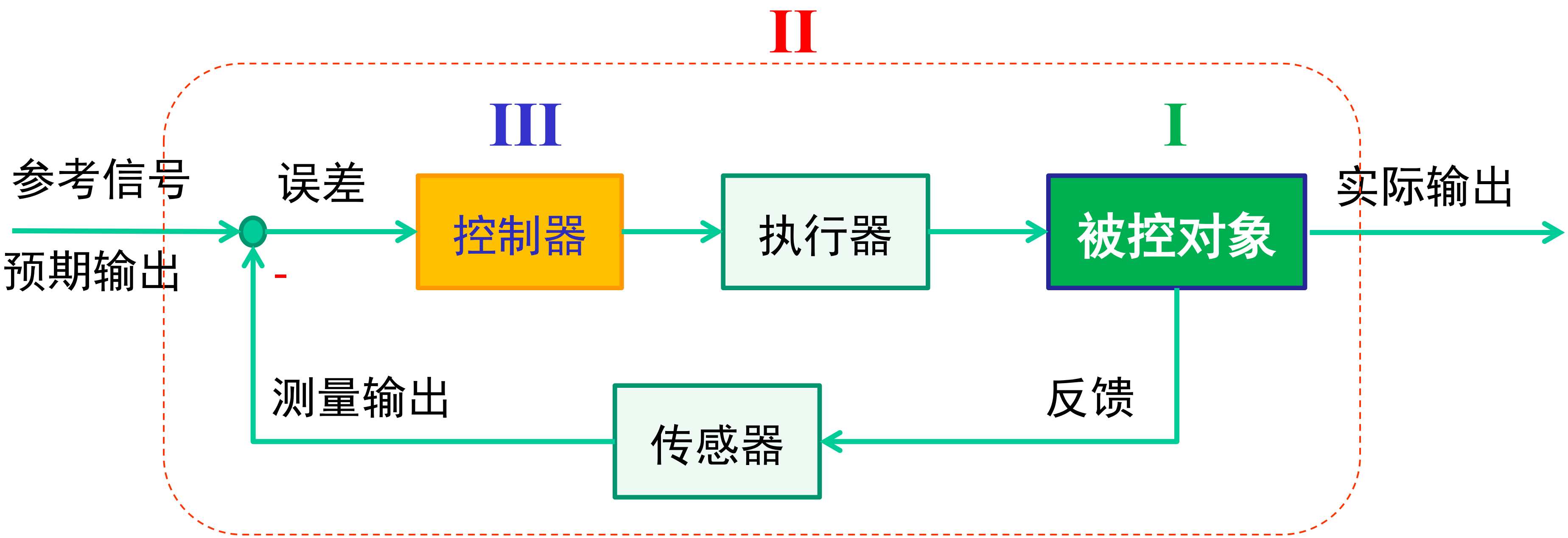
第二章 控制系统的数学模型



I: 系统建模
II: 系统分析
III: 系统设计/综合

I: Modeling
II: Analysis
III: Design/Synthesis

第二章 控制系统的数学模型

2.1 引言

分析、设计控制系统的第一步是建立系统的数学模型。自控理论方法是先将系统抽象为数学模型，然后用数学方法处理。

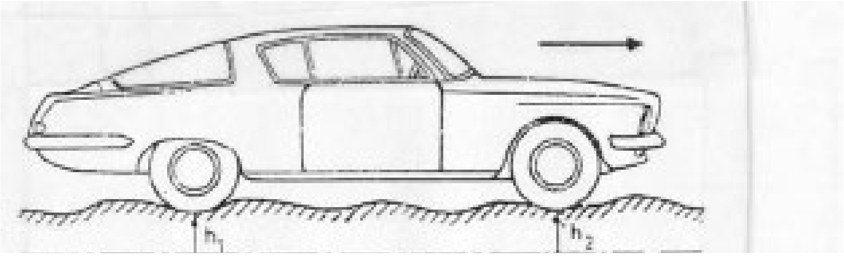
- 数学模型是描述系统各物理量（或变量）之间关系的数学表达式或图形表达式或数字表达式。
- 数学模型是实际物理系统的抽象与近似，是对实际物理系统作简化假设的结果。
- 同一个物理系统可以由若干不同的模型描述，这些模型对应着不同的、待研究的系统特性。
- 不同的实际物理系统可以对应同一个模型 。

控制系统性能分析与设计的效果取决于系统数学模型的优劣

2.1 引言

汽车减震系统建模过程

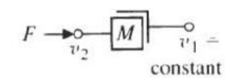
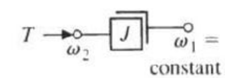
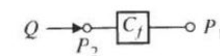
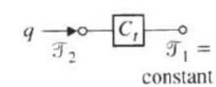
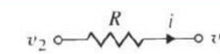
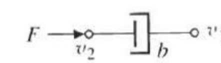
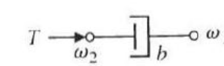
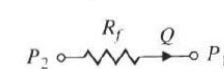
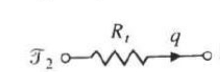
实际系统



2.1 引言

理想原件的微分方程
(Dolf 表2.2)

Table 2.2 Summary of Governing Differential Equations for Ideal Elements

Type of Element	Physical Element	Governing Equation	Energy E or Power $\mathcal{P}$	Symbol
Inductive storage	Electrical inductance	$v_{21} = L\dfrac{di}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}Li^2$	
	Translational spring	$v_{21} = \dfrac{1}{k}\dfrac{dF}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}\dfrac{F^2}{k}$	
	Rotational spring	$\omega_{21} = \dfrac{1}{k}\dfrac{dT}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}\dfrac{T^2}{k}$	
	Fluid inertia	$P_{21} = I\dfrac{dQ}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}IQ^2$	
Capacitive storage	Electrical capacitance	$i = C\dfrac{dv_{21}}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}Cv_{21}^2$	
	Translational mass	$F = M\dfrac{dv_2}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}Mv_2^2$	
	Rotational mass	$T = J\dfrac{d\omega_2}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}J\omega_2^2$	
	Fluid capacitance	$Q = C_f\dfrac{dP_{21}}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}C_f P_{21}^2$	
	Thermal capacitance	$q = C_t\dfrac{d\mathcal{T}_2}{dt}$	$E = C_t\mathcal{T}_2$	
Energy dissipators	Electrical resistance	$i = \dfrac{1}{R}v_{21}$	$\mathcal{P} = \dfrac{1}{R}v_{21}^2$	
	Translational damper	$F = bv_{21}$	$\mathcal{P} = bv_{21}^2$	
	Rotational damper	$T = b\omega_{21}$	$\mathcal{P} = b\omega_{21}^2$	
	Fluid resistance	$Q = \dfrac{1}{R_f}P_{21}$	$\mathcal{P} = \dfrac{1}{R_f}P_{21}^2$	
	Thermal resistance	$q = \dfrac{1}{R_t}\mathcal{T}_{21}$	$\mathcal{P} = \dfrac{1}{R_t}\mathcal{T}_{21}$	

2.1 引言

性质不同的系统用不同的数学工具描述其模型

- 线性定常系统： 常系数线性 常微分方程
  传递函数
  脉冲响应（FIR, IIR）
  状态空间
- 线性时变系统： 变系数线性 常微分方程
- 非线性系统： 非线性 常微分方程
- 分布参数系统： 偏微分方程
- 离散系统： 差分方程

什么是:
常微分方程 ODE
偏微分方程 PDE
差分方程 DE
阶数

2.1 引言

线性控制系统描述方法

输入输出描述法
(外部描述法)

状态空间描述法
(内部描述法)

输入输出模型

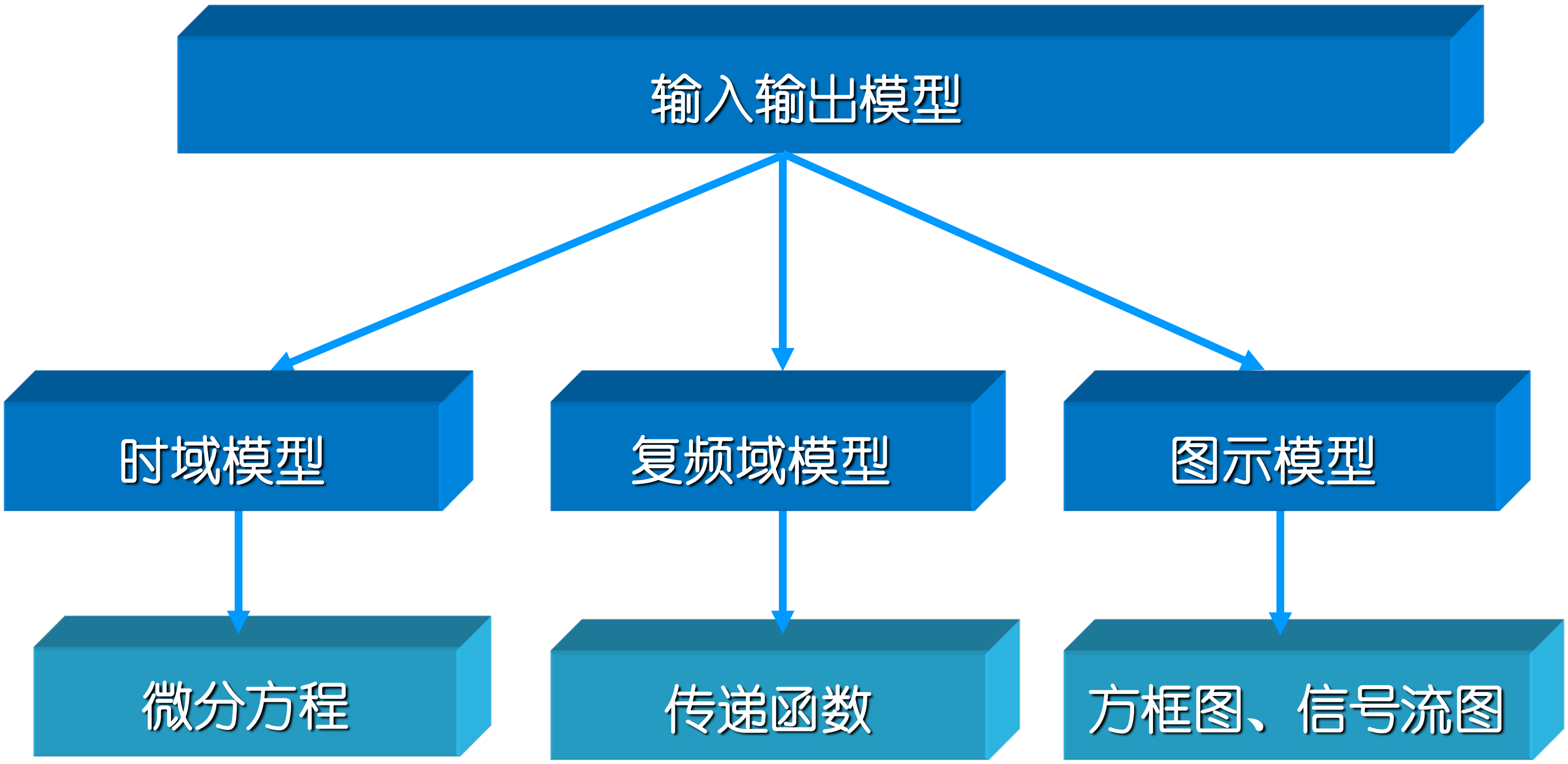
转换

状态空间模型

线性控制系统数学模型

2.1 引言

线性控制系统输入输出数学模型



2.1 引言

建立系统数学模型的方法

- 机理分析法（白箱模型）

　　根据基本的物理规律、化学规律及能量守恒定律等，动态系统可用微分方程描述

- 试验法/测试法 （黑箱模型）

　　经典辨识（脉冲响应、阶跃响应）

- 综合法（灰箱模型）

　　一般通过机理分析建立模型结构，然后通过系统辨识确定模型参数

数学模型的合理性：

在模型简化性和分析结果的准确性之间，折衷考虑

Great minds on modeling

Our acceptance of models should thus be guided by ‘usefulness’ rather than ‘truth.’

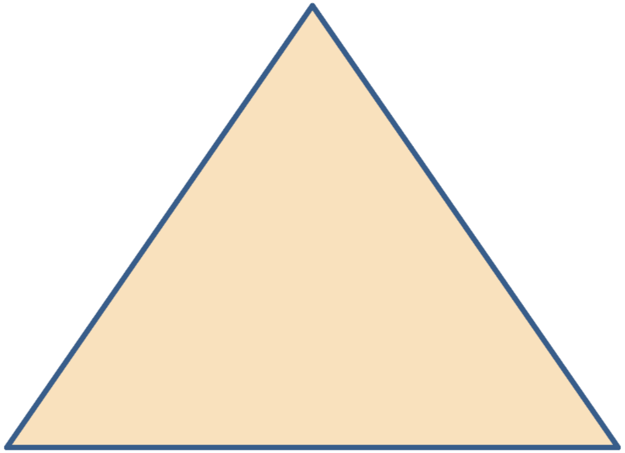
- Lennart Ljung

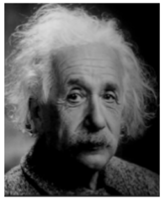
True 真

1. Get the physics right

2. After that, it is all mathematics.

- Rudolf E Kalman





Make things as simple as possible, but not simpler.

- Albert Einstein

Useful 益

Simple 朴

Acknowledge to:
Prof. Xiaohua Xia

All models are wrong, some are useful.

- George E P Box

2.2 时域中的数学模型—微分方程

- 系统数学模型举例

机械系统的数学模型

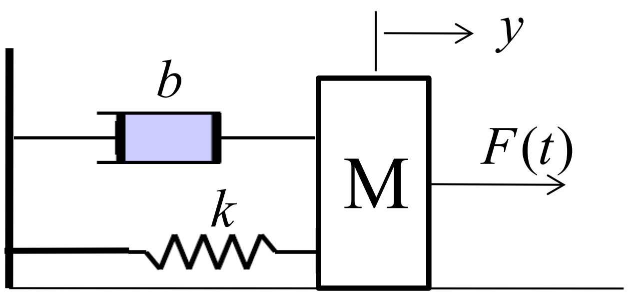


Fig. 2.2 弹簧-质量块-阻尼系统

牛顿定律
- $F = \mathrm{m}a$
- $\tau = I\ddot{\theta}$

输入：F　　　输出：y

$$M\ddot{y} + ky + b\dot{y} = F(t)$$

$$v = \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

输入：F　　　输出：v

$$M\dot{v} + bv + k\int_0^t v(\tau)d\tau = F(t)$$

2.2 时域中的数学模型—微分方程

基尔霍夫电流定律 KCL
基尔霍夫电压定律 KVL

电气系统的数学模型

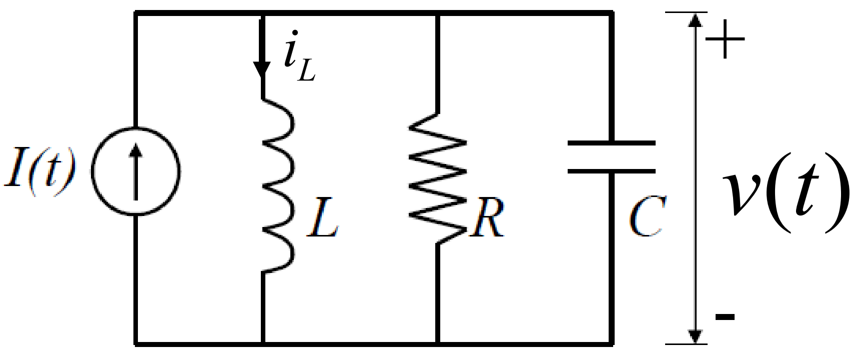


Fig. 2.3 RLC 电路

输入：I 输出：$v(t)$

$$C\dot{v}+\frac{1}{R}v+\frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau=I(t)$$

输入：I 输出：$x(t)=i_L$

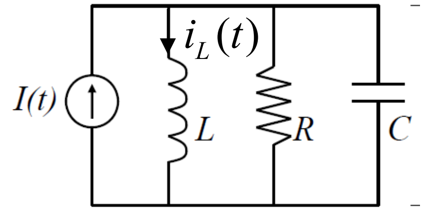
$$CL\ddot{x}+\frac{L}{R}\dot{x}+x=I(t)$$

电容 $i_c(t)=C\dfrac{dv(t)}{dt}$ $v(t)=\dfrac{1}{C}\int_0^t i_c(\tau)d\tau$

电感 $v=L\dfrac{di_L}{dt}$ $i_L(t)=\dfrac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau$

2.2 时域中的数学模型—微分方程

电气系统



令$x(t)=i_L(t)$

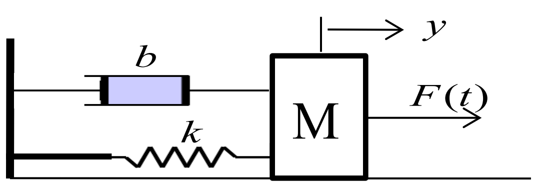
$$CL\ddot{x}+\frac{L}{R}\dot{x}+x=I(t)$$

$$\frac{M}{k}\ddot{y}+\frac{b}{k}\dot{y}+y=F(t)$$

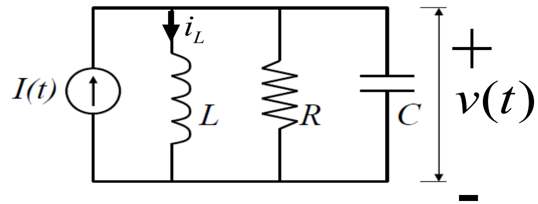
相似系统

相似变量：
电感电流----位移

机械系统



2.2 时域中的数学模型—微分方程

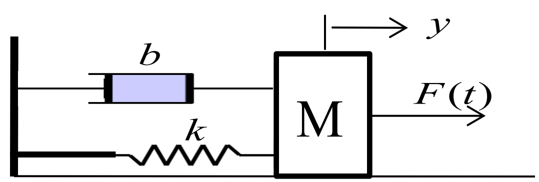


电气系统

$$C\dot{v}+\frac{1}{R}v+\frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau=I(t)$$

$$M\dot{v}+bv+k\int_0^t v(\tau)d\tau=F(t)$$

机械系统



相似系统

相似变量：
电压--速度

透过现象看**本质**

道

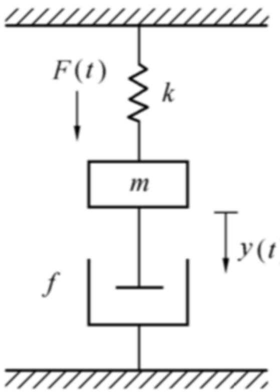
可以构建A系统来研究B系统

2.2 时域中的数学模型—微分方程

例 2.1.3 一个由弹簧－质量－阻尼器组成的机械平移系统如图2.1.3所示。m 为物体质量，k 为弹性系数，f 为粘性阻尼系数，外力 $F(t)$ 为输入量，位移 $y(t)$ 为输出量。列写系统的运动方程。

解 取垂直向下为力和位移的正方向。当 $F(t)=0$ 时，物体的平衡位置为位移 y 的零点。该物体受到四个力的作用：外力 $F(t)$、弹簧的弹力 F_k、粘性摩擦力 F_B 及重力 mg。

$$F(t) - F_k - F_B + mg = m\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$



$$F_B = f\frac{dy(t)}{dt}$$

$$F_k = k[y(t) + y_0]$$

$$mg = ky_0$$

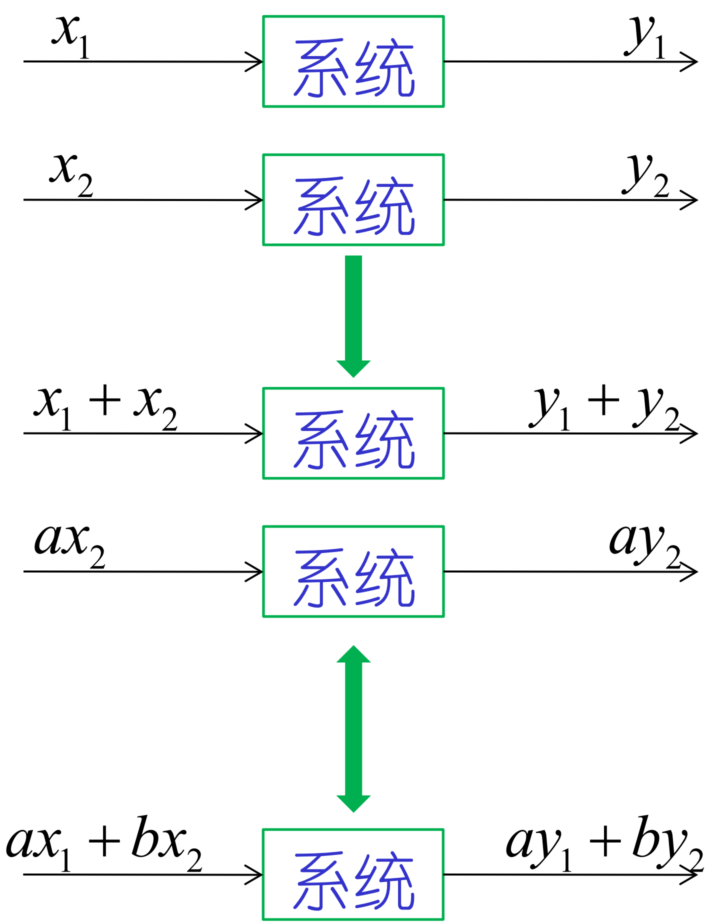
$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + f\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t)$$

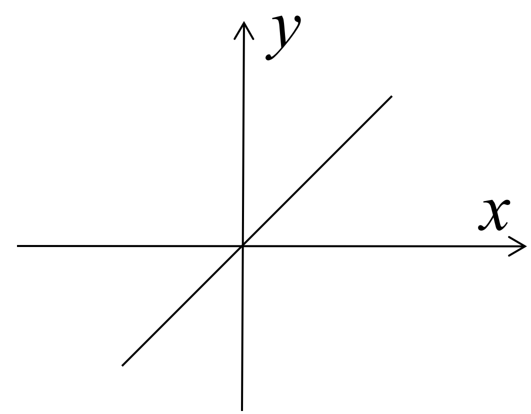
$$\frac{m}{k}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{f}{k}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{1}{k}F(t)$$

二阶线性定常系统

2.2 时域中的数学模型—微分方程

- 线性系统





叠加性

齐次性

线性系统

线性时变系统 (LTV)

线性时不变系统 (LTI)

2.2 时域中的数学模型—微分方程

- 描写线性定常(LTI)系统的微分方程

linear time-invariant
(LTI)

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0 y(t)$$
$$=b_m\frac{d^m r(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{dr(t)}{dt}+b_0 r(t)$$

$a_i\,(i=0,1,\cdots,n)$、$b_j\,(j=0,1,\cdots,m)$均为实数

输入：r
输出：y

建立微分方程的一般步骤:

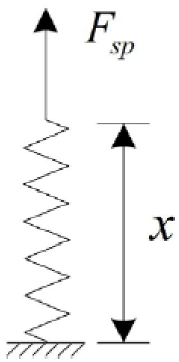
1. 确定输入$r(t)$和输出$y(t)$;
2. 列写各环节的微分方程;
3. 消去中间变量，求得输入/输出关系

思考：

1. 为什么叫动态系统 dynamic systems
2. n 与 m 的关系？

2.2 时域中的数学模型—微分方程

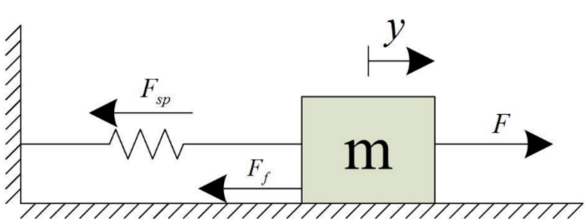
几乎所有的物理系统均是非线性系统！



非线性弹簧 $F_{sp} = x^2$

硬化弹簧 $F_{sp} = k(1 + a^2 x^2)x = kx + ka^2 x^3$

软弹簧 $F_{sp} = k(1 - a^2 x^2)x = kx - ka^2 x^3$



$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + k\alpha^2 y^3 = \gamma \cos(\omega t)$$

Duffing equation

$$m\ddot{y} = F - F_{sp} - F_f$$

where $F = \gamma \cos(\omega t)$ external force

$F_{sp} = k(1 + \alpha^2 y^2)y$ hardening spring

$F_f = c\dot{y}$ friction force due to velocity

2.2 时域中的数学模型—微分方程

几乎所有的物理系统均是非线性系统！

为什么还要研究线性系统??

非线性系统 $\xrightarrow{\text{特定条件}}$ 线性系统

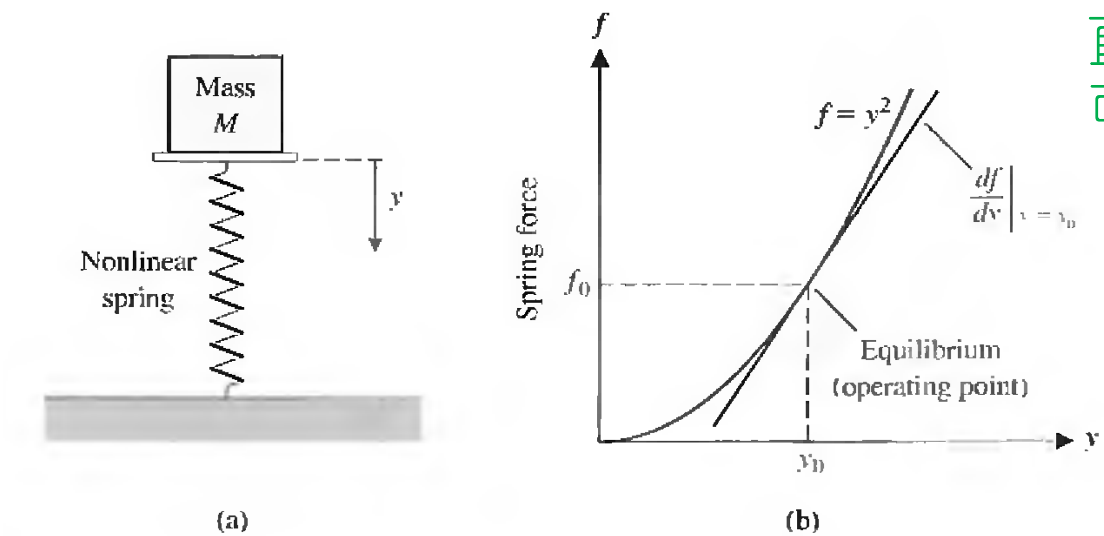
?

非线性微分方程
难以求解

线性微分方程
容易求解

2.2 时域中的数学模型—微分方程

特定条件：系统运行在工作点附近，即“小信号”假设



(Dolf) Fig.2.5 非线性弹簧工作点附近的线性化

直观： 曲线在平衡点邻域内可用直线来逼近

$$f - f_0 = \left.\frac{df}{dy}\right|_{y=y_0} (y - y_0)$$

$$\Delta f = m\Delta y$$

地球是圆的 ← 大范围

地球是平的 ← 小范围

2.2 时域中的数学模型—微分方程

理论依据：泰勒展开 (Taylor Expansion)

高阶项

$$f(y)=f(y_0)+\left.\frac{df}{dy}\right|_{y_0}(y-y_0)+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2f}{dy^2}\right|_{y_0}(y-y_0)^2+h.o.t.(y-y_0)$$

$\boxed{\text{当 } y-y_0 \text{ 非常小时}}$

$$f(y)\approx f(y_0)+\left.\frac{df}{dy}\right|_{y_0}(y-y_0)$$

$$f(y)-f(y_0)\approx \mathrm{m}(y-y_0)$$

非线性函数在工作点附近小邻域内的线性化

2.2 时域中的数学模型—微分方程

理论依据：泰勒展开 (Taylor Expansion)

多元函数 $y = g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

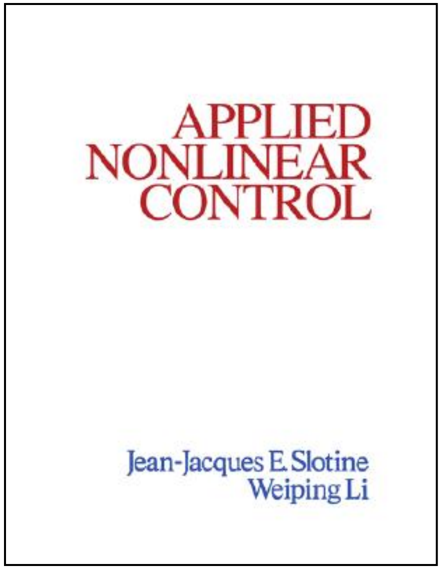
在工作点(平衡点) $(x_{1_0}, x_{2_0}, \cdots, x_{n_0})$ 附近的线性化

$$y = g(x_{1_0}, x_{2_0}, \cdots, x_{n_0}) + \left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_{x=x_0} (x_1 - x_{1_0})$$

$$+ \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{x=x_0} (x_2 - x_{2_0}) + \cdots + \left.\frac{\partial g}{\partial x_n}\right|_{x=x_0} (x_n - x_{n_0})$$

2.2 时域中的数学模型—微分方程

当非线性系统在较大范围内运行时，则不能近似为线性系统



自控原理：　线性时不变系统 (Linear Time-Invariant System, LTI)

输入输出关系不随时间改变
线性微分方程的系数为常数

2.3 Laplace变换

研究线性系统 → 求解微分方程 复杂

$f(t)$

Laplace变换

$F(s)$

求解代数方程 简单

参考书：Boyce & DiPrima, *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems* (QQ群)

Laplace变换 (Laplace Transform)

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}\triangleq\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

积分变换收敛 → $f(t)$可变换

物理可实现的信号通常都是可变换的

2.3 Laplace变换

Laplace逆变换 (Inverse Laplace Transform)

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\triangleq\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{+st}ds$$

运用到复变函数的知识

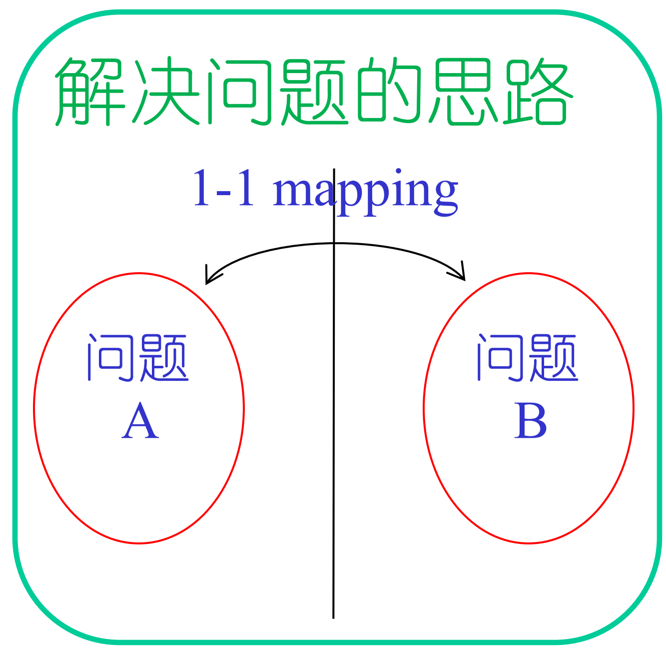
时域微分方程

$f(t)$

$\mathcal{L}^{-1}$ $\uparrow$ $\downarrow$ $\mathcal{L}$

$F(s)$

复数域代数方程



2.3 Laplace变换

Laplace变换的一些性质*

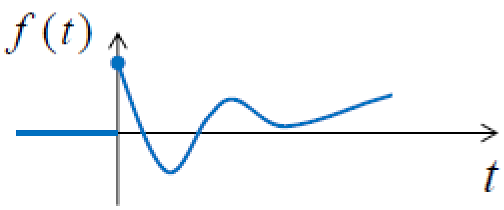
(a) Superposition of functions $f_1(t)$ and $f_2(t)$

$$\mathcal{L}[\alpha\ f_1(t)+\beta\ f_2(t)]=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$$

(b) Time Delay (Function shift to right by duration $\lambda>0$)

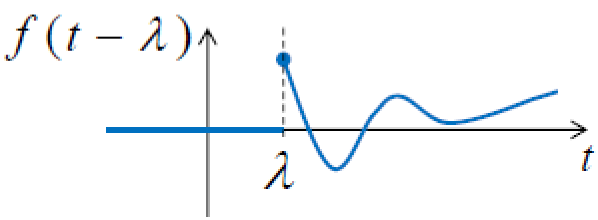
$$\mathcal{L}[f(t-\lambda)]=e^{-s\lambda}F(s)$$

Given



$\xrightarrow{\mathcal{L}}\ F(s)$

Then



$\xrightarrow{\mathcal{L}}\ e^{-s\lambda}F(s)$

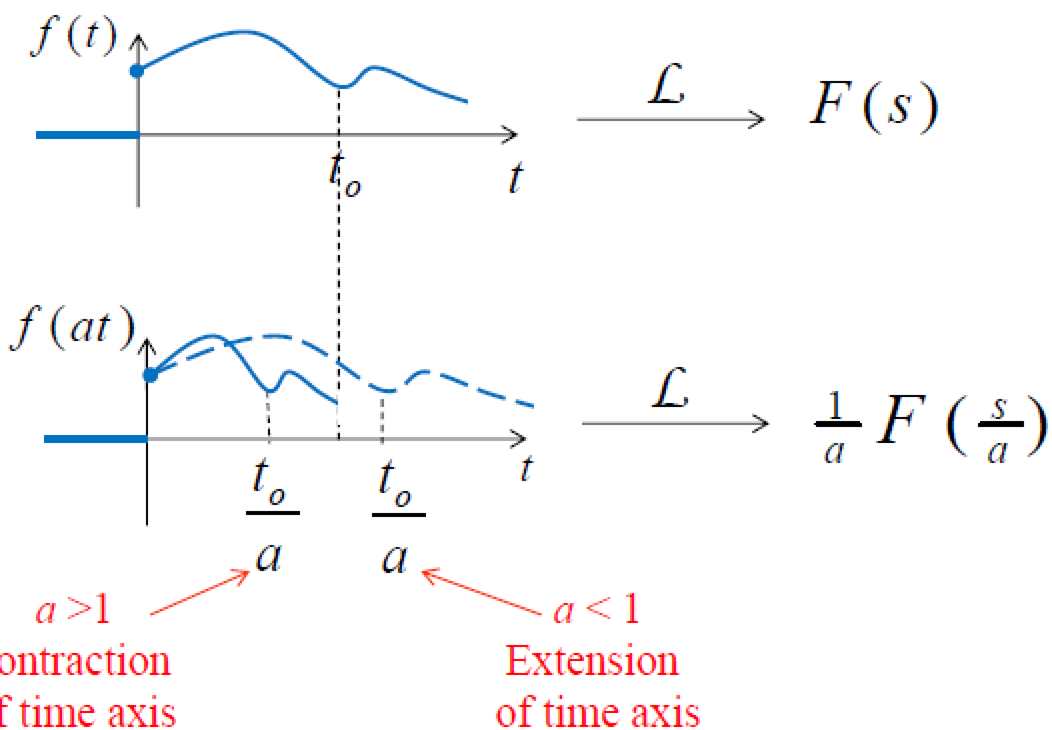
2.3 Laplace变换

(c) Time Scaling (Expansion/contraction of time axis)

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$$

Given

Then

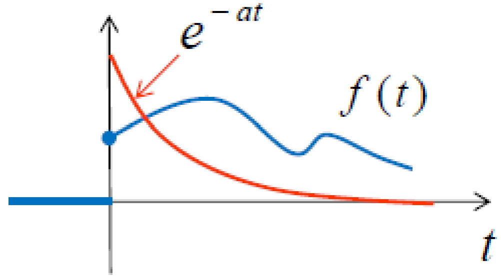


2.3 Laplace变换

(d) Modulation by Exponential factor

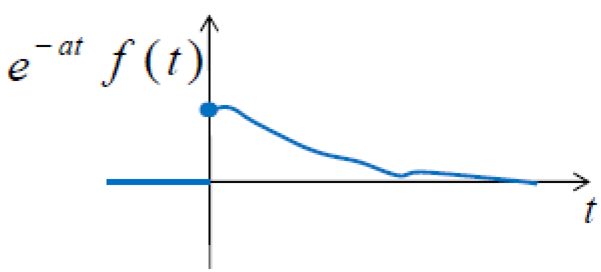
$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$$

Given



$$\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

Then



$$\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s+a)$$

2.3 Laplace变换

(e) Differentiation of a function

$$\mathcal{L}[\tfrac{d}{dt}f(t)] = sF(s) - f(0^-)$$

\- Generalization

Value of $f(t)$ at $t=0^-$

Value of $\frac{d}{dt}f(t)$ at $t=0^-$

Value of $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(t)$ at $t=0^-$

$$\mathcal{L}[\frac{d^n}{dt^n}f(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}\dot{f}(0^-) - \cdots - \overset{(n-1)}{f}(0^-)$$

\- For function and derivatives all starting at zero

$$\mathcal{L}[\frac{d^n}{dt^n}f(t)] = s^nF(s)$$

(f) Integration of a function

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(\xi)d\xi] = \frac{F(s)}{s}$$

2.3 Laplace变换

(g) Convolution Theorem

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$$

where "convolution" of function $f_1(t)$ and $f_2(t)$ defined as:

$$f_1(t) * f_2(t) \equiv \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

(h) Final value theorem (终值定理)

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

成立条件：Y(s)不能在虚轴和右半平面存在极点，原点处不能有多重极点

2.3 Laplace变换

<例2.1> 求解阶跃函数的拉氏变换 $\mathcal{L}\{1\}$

解：$$\mathcal{L}\{1\}=\int_0^{\infty}e^{-st}1dt=-\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_{t=0}^{t=\infty}=-\frac{0-1}{s}=\frac{1}{s}$$ 当s>0.

Exercise：求解$\mathcal{L}\{e^{-at}\}$

Exercise：求解$\mathcal{L}\{f'(t)\}$

Table 2.3 Important Laplace Transform Pairs

$f(t)$	$F(s)$
Step function, $u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$f^{(k)}(t)=\frac{d^kf(t)}{dt^k}$	$s^kF(s)-s^{k-1}f(0^-)-s^{k-2}f'(0^-)-\ldots-f^{(k-1)}(0^-)$
$\int_{-\infty}^{t}f(t)\,dt$	$\frac{F(s)}{s}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0}f(t)\,dt$
Impulse function $\delta(t)$	1
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\frac{1}{\omega}[(\alpha-a)^2+\omega^2]^{1/2}e^{-at}\sin(\omega t+\phi)$, $\phi=\tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha-a}$	$\frac{s+\alpha}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t,\ \zeta<1$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
$\frac{1}{a^2+\omega^2}+\frac{1}{\omega\sqrt{a^2+\omega^2}}e^{-at}\sin(\omega t-\phi)$, $\phi=\tan^{-1}\frac{\omega}{-a}$	$\frac{1}{s[(s+a)^2+\omega^2]}$

表2.3 Laplace变换对

2.3 Laplace变换

<例2.2> 用拉氏变换求解微分方程 $\ddot{y}+3\dot{y}+2y=r(t)$

其中 $r(t)=0,\ y(0^-)=y_0,\ \dot{y}(0^-)=0$

解：对微分方程 $\ddot{y}+3\dot{y}+2y=r(t)$ 进行Laplace变换，得到

$$\left(s^2Y(s)-sy(0^-)-\dot{y}(0^-)\right)+3\left(sY(s)-y(0^-)\right)+2Y(s)=R(s)$$

在初始条件下，有 $s^2Y(s)+3sY(s)+2Y(s)-(s+3)y_0=0$，即

$$Y(s)=\frac{2y_0}{s+1}-\frac{y_0}{s+2}$$

利用Laplace逆变换可得

$$y(t)=\mathcal{L}\{Y(s)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{2y_0}{s+1}-\frac{y_0}{s+2}\right\}$$

$$=2y_0e^{-t}-y_0e^{-2t},\quad t\geq 0$$

时域微分方程

$f(t)$

$\mathcal{L}^{-1}$ $\mathcal{L}$

$F(s)$

复数域代数方程

2.4 复数域中的数学模型—传递函数

传递函数（Transfer Function）的定义

$$r(t) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow y(t) \qquad \xrightarrow[\text{零初始条件}]{\text{Laplace 变换}} \qquad R(s) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow Y(s)$$

系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{r(t)\}}$$

注意：

1. 传递函数仅描述输入输出的关系，不反映系统的内部信息
2. 输入输出变量的初值假定为0

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\}&=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\cdots-y^{(n-1)}(0)\\ \mathcal{L}\{r^{(m)}(t)\}&=s^mR(s)-s^{m-1}r(0)-s^{m-2}r'(0)-\cdots-r^{(m-1)}(0)\end{aligned}}$$

2.4 复数域中的数学模型——传递函数

弹簧-质量块-阻尼系统的传递函数

$$M\ddot{y}+ky+b\dot{y}=r(t)$$

Laplace变换

$$M(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))+kY(s)+b(sY(s)-y(0))=R(t)$$

零初始条件

$$\left(Ms^2+k+bs\right)Y(s)=R(s)$$

$$\boxed{G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ms^2+bs+k}}$$

系统的传递函数

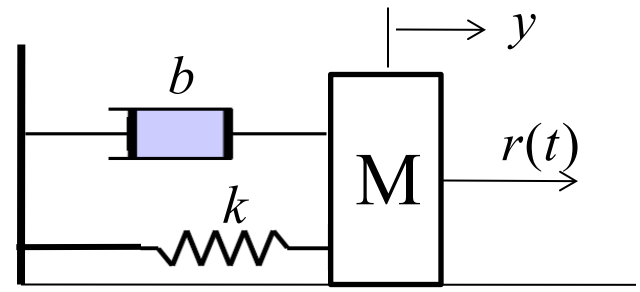


Fig. 2.2 弹簧-质量块-阻尼系统

2.4 复数域中的数学模型—传递函数

线性定常系统(LTI)的传递函数

线性定常系统的微分方程模型

$$
a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)
$$

$$
= b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)
$$

where $a_i \in R\ (i = 0,1,\cdots,n)$、 $b_j \in R\ (j = 0,1,\cdots,m)$

Laplace变换
(零初始条件)

$$
\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} = s^k F(s)
$$

$$
(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s)
$$

$$
= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) R(s)
$$

2.4 复数域中的数学模型—传递函数

线性定常系统的传递函数

$$G(s) \triangleq \left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{\text{零初始}} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- 传递函数反映系统“零状态”响应的传递关系；
- 表明了系统数学模型的阶次n，它表征着系统的固有特性(如系统的结构与参数等)，与输入$r(t)$的形式无关；
- 传递函数是研究线性系统动态特性的重要工具。利用Laplace变换给出的传递函数$G(s)$是最常见的形式

2.4 复数域中的数学模型—传递函数

传递函数$G(s)$也常用以下形式表示：

$$G(s)=\frac{b_0}{a_0}\frac{d_m s^m+d_{m-1}s^{m-1}+\cdots+d_1 s+1}{c_n s^n+c_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c_1 s+1}=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(T_i s+1)}{\prod_{j=1}^{n}(\tau_j s+1)}$$

其中, K—系统增益 或 传递系数 或 静态增益

$$G(s)=\frac{b_m}{a_n}\frac{s^m+h_{m-1}s^{m-1}+\cdots+h_1 s+h_0}{s^n+l_{n-1}s^{n-1}+\cdots+l_1 s+l_0}=K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

其中, z_i—系统零点　　p_j—系统极点

2.4 复数域中的数学模型—传递函数

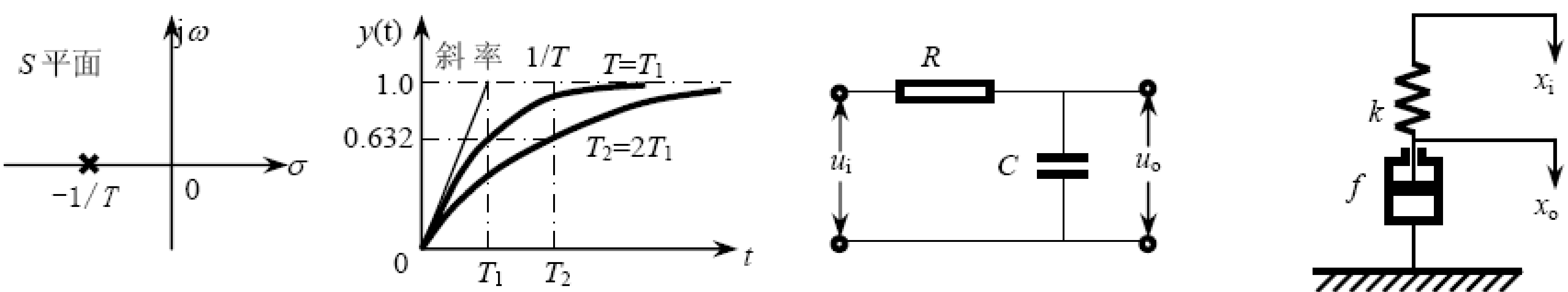
典型环节的传递函数

1. 惯性环节

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=r(t)$$

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

其中，T—惯性环节时间常数



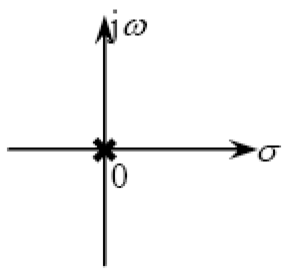
(a)零极点分布　(b)单位阶跃响应曲线　(c)RC 电路 $\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{1}{Ts+1}$　(d)弹簧-阻尼器系统

2.4 复数域中的数学模型—传递函数

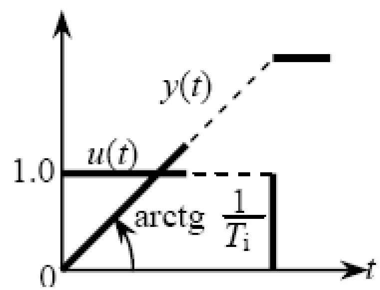
2. 积分环节

$$T_i \frac{dy(t)}{dt} = r(t)$$

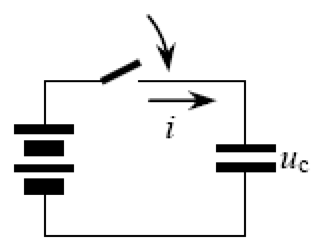
$$G(s) = \frac{1}{T_i s}$$



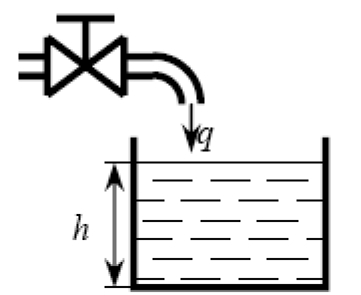
(a) 零极点分布



(b)单位阶跃响应曲线



(c)电容器充电 $\frac{Uc(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$



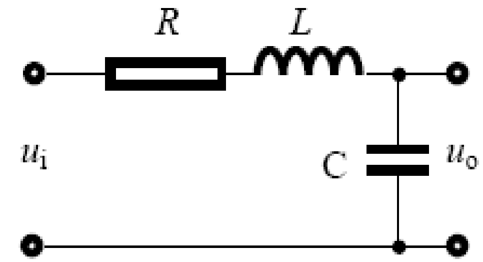
（d） 水箱 $\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{1}{Cs}$

2.4 复数域中的数学模型—传递函数

3. 振荡环节

通常包含两种不同的储能元件

$$T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2T\zeta\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=r(t),\quad 0<\zeta<1$$



(c)RLC 串联电路

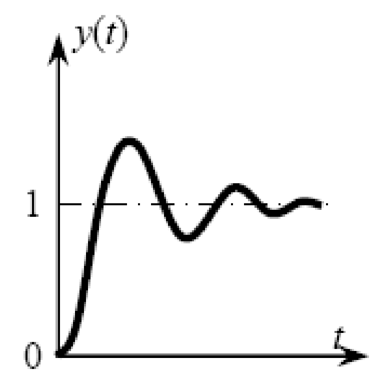
$$G(s)=\frac{1}{Ts^2+2\zeta Ts+1}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2},$$

其中:

T为时间常数,

ζ 为阻尼比, $0<\zeta<1$

$\omega_n=\dfrac{1}{T}$为无阻尼自然振荡角频率

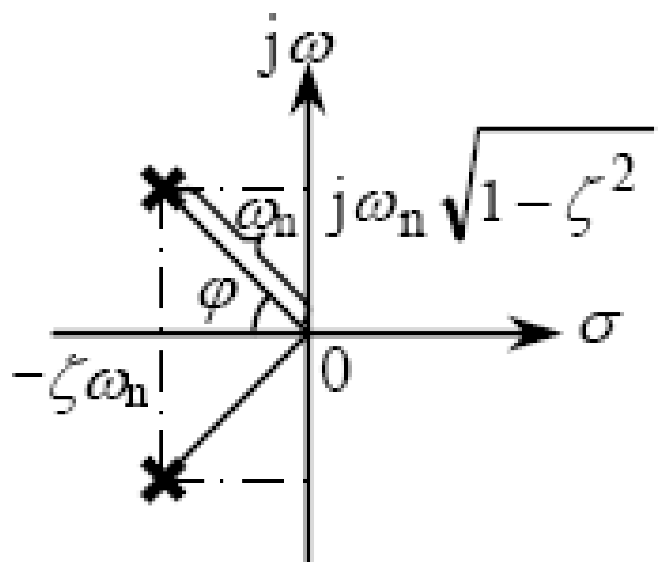


(b)单位阶跃响应曲线

2.4 复数域中的数学模型—传递函数

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{1}{Ts^2 + 2\zeta Ts + 1} \\
&= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\
&= \frac{\omega_n^2}{(s + p_1)(s + p_2)}, \qquad \omega_n = \frac{1}{T}
\end{aligned}
$$

传函极点 $p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

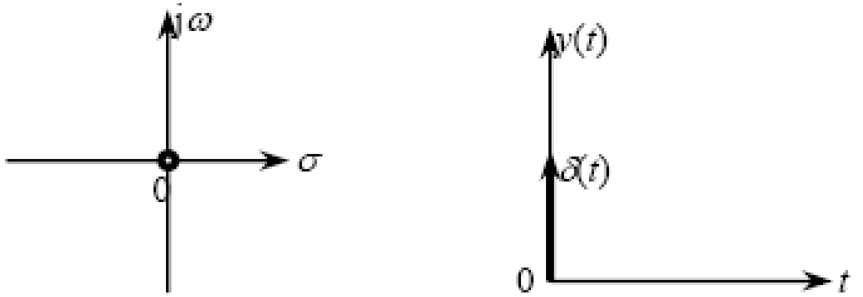


2.4 复数域中的数学模型—传递函数

4. 微分环节

$$y(t) = T_d \frac{dr(t)}{dt}$$

$$G(s) = T_d s$$



(a)零极点分布　　(b)单位阶跃响应曲线

? 理想微分环节的传递函数不是真有理分式，
工程实现较为困难

$$\left.\frac{dr(t)}{dt}\right|_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t}$$

2.4 复数域中的数学模型—传递函数

工程上常采用具有惯性环节的微分环节

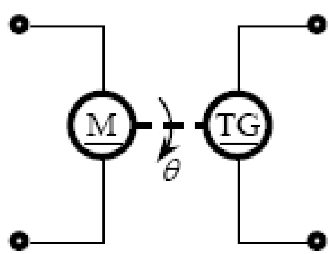
$$G(s)=\frac{T_1 s}{T_2 s+1}$$

$$s=\sigma+j\omega$$

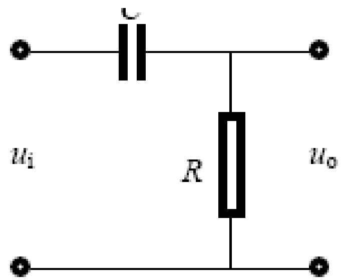
低频近似

$$\omega\rightarrow 0$$

$$G(s)\approx T_3 s$$



(c)安装在电动机轴上的测速发电机



(d)RC 电路

$$v_o=iR=RC\frac{d(v_i-v_o)}{dt}$$

$$CR\dot{v}_i=v_o+CR\dot{v}_o$$

$$CRsV_I(s)=(CRs+1)V_o(s)$$

$$G(s)=\frac{V_o(s)}{V_I(s)}=\frac{CRs}{CRs+1}$$

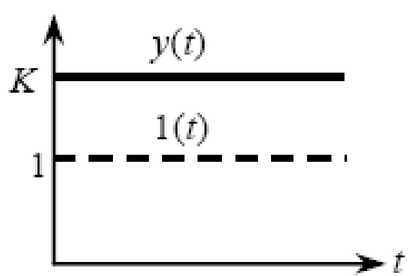
2.4 复数域中的数学模型—传递函数

5. 比例环节

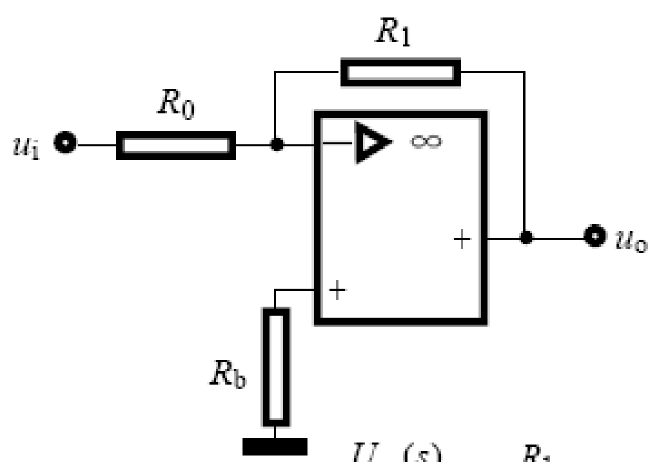
$$G(s)=K_p$$

$$y(t)=K_p r(t)$$

其中, K_p为比例系数（增益）



(a)单位阶跃响应曲线



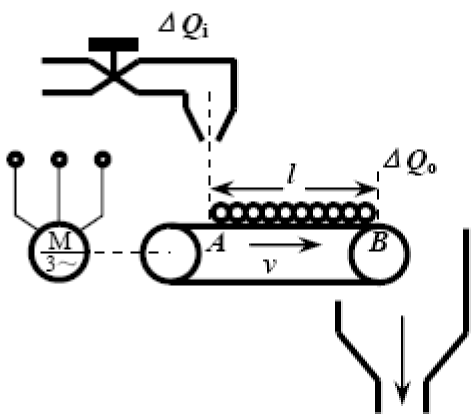
(b)比例调节器 $\dfrac{U_o(s)}{U_i(s)}=-\dfrac{R_1}{R_0}$

2.4 复数域中的数学模型—传递函数

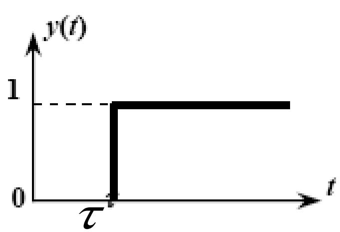
6. 时滞环节

$$y(t)=r(t-\tau)$$

$$G(s)=e^{-\tau s}$$



(a)带式运输机系统



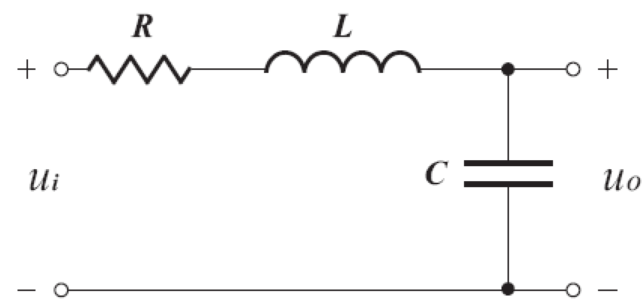
(b)单位阶跃响应曲线

实际控制系统的传递函数均可视为上述典型环节的某种组合,因此熟悉和掌握典型环节对于分析研究系统是很基本的,也是很重要的

2.4 复数域中的数学模型—传递函数

推导电网络的传递函数时，可直接通过电路元件的复阻抗根据电路定律获得

<例 2.3> 求解系统传递函数



$$G(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{Z_C(s)}{Z_L(s)+Z_R(s)+Z_C(s)}$$

$$=\frac{1/Cs}{Ls+R+1/Cs}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

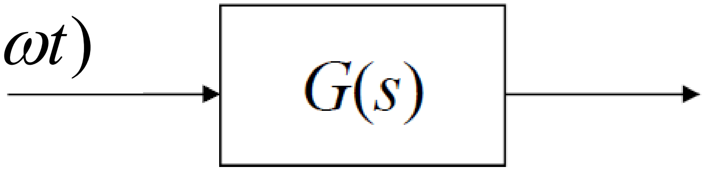
$$v_L=L\frac{di_L}{dt} \qquad i_c=C\frac{dv_c}{dt}$$

$$V_L(s)=LsI_L(s) \qquad I_c(s)=CsV_c(s)$$

复阻抗 $Z_L(s)=\frac{V_L}{I_L}=Ls \qquad Z_c(s)=\frac{V_c}{I_c}=\frac{1}{Cs}$

2.4 复数域中的数学模型—传递函数

$r(t) = A\sin(\omega t)$



$y(t) = ?$

稳定线性时不变系统

幅值：$A \to |G(j\omega)| A$

频率：$\omega \to \omega$

相角：$0 \to \angle G(j\omega)$

频率特性：

在正弦输入信号作用下，系统输出的稳态分量与输入量的复数之比，用$G(j\omega)$表示。

$$G(j\omega) = G(s)\,|_{s=j\omega}$$

教科书第8章：频率响应法

2.4 复数域中的数学模型—传递函数

- 三种输入输出（I/O）模型之间的关系