第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据（3.8~3.9）
2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据（6.7）

4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差、动态误差系数（3.10）
2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数（6.8.3）

4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则（4.1~4.3）
2. 根轨迹法分析控制系统性能（4.4）
3. 特殊根轨迹（4.6）

4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念
2. Lyapunov第一法（间接法）
3. Lyapunov第二法（直接法）
4. 线性定常系统的Lyapunov稳定性分析

二阶系统的时域分析

(1) 二阶系统的数学模型

ω_d—— 有阻尼振荡频率，$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

⑤ 标准二阶系统的特征方程和特征根

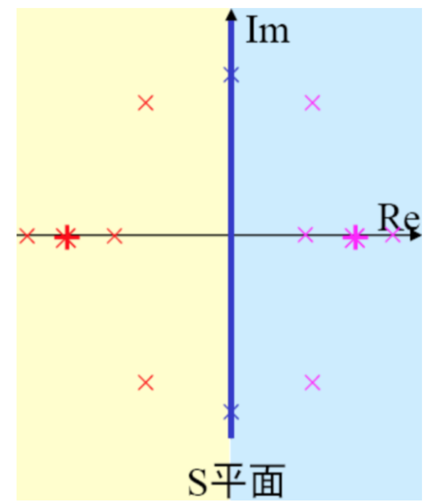
特征根：$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

$\zeta>0$ 实部为负 $\begin{cases} 0<\zeta<1 & \text{一对共扼复根} \\ \zeta=1 & \text{两个相等的实根} \\ \zeta>1 & \text{两个不相等的实根} \end{cases}$

$\zeta=0$ 实部为零，即纯虚根，即：$s_{1,2}=\pm j\omega_n$

$\zeta<0$ 实部为正 $\begin{cases} -1<\zeta<0 & \text{一对共扼复根} \\ \zeta=-1 & \text{两个相等的实根} \\ \zeta<-1 & \text{两个不相等的实根} \end{cases}$

$$\boxed{\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}$$



$\boxed{0<\zeta<1 \text{ ——欠阻尼}}$

$\zeta=1$ ——临界阻尼

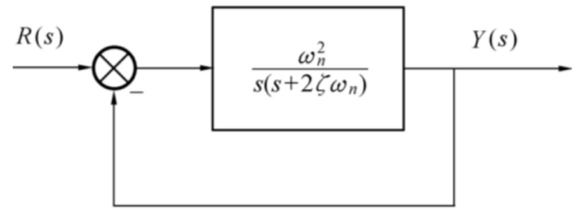
$\zeta>1$ ——过阻尼

$\zeta=0$ ——无阻尼

$-1<\xi<0$ —— 负阻尼

$0 \le \xi < 1$（欠阻尼，零阻尼）时系统动态性能指标的计算

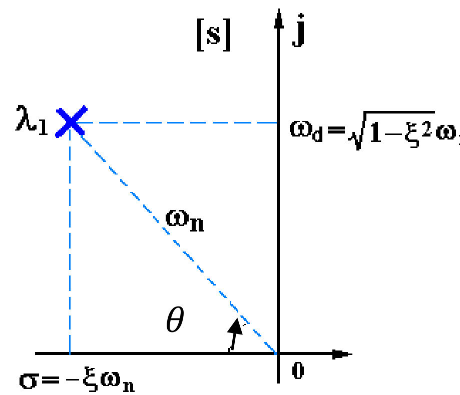
$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad 0 \leqslant \xi < 1$$



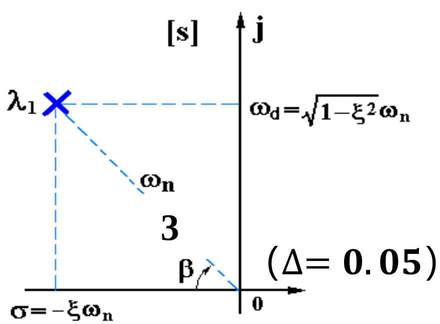
（1） $0 \le \xi < 1$时系统极点的两种表示方法

（2）单位阶跃响应 $y(t)$ 表达式

$$y(t)=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t+\theta\right)$$



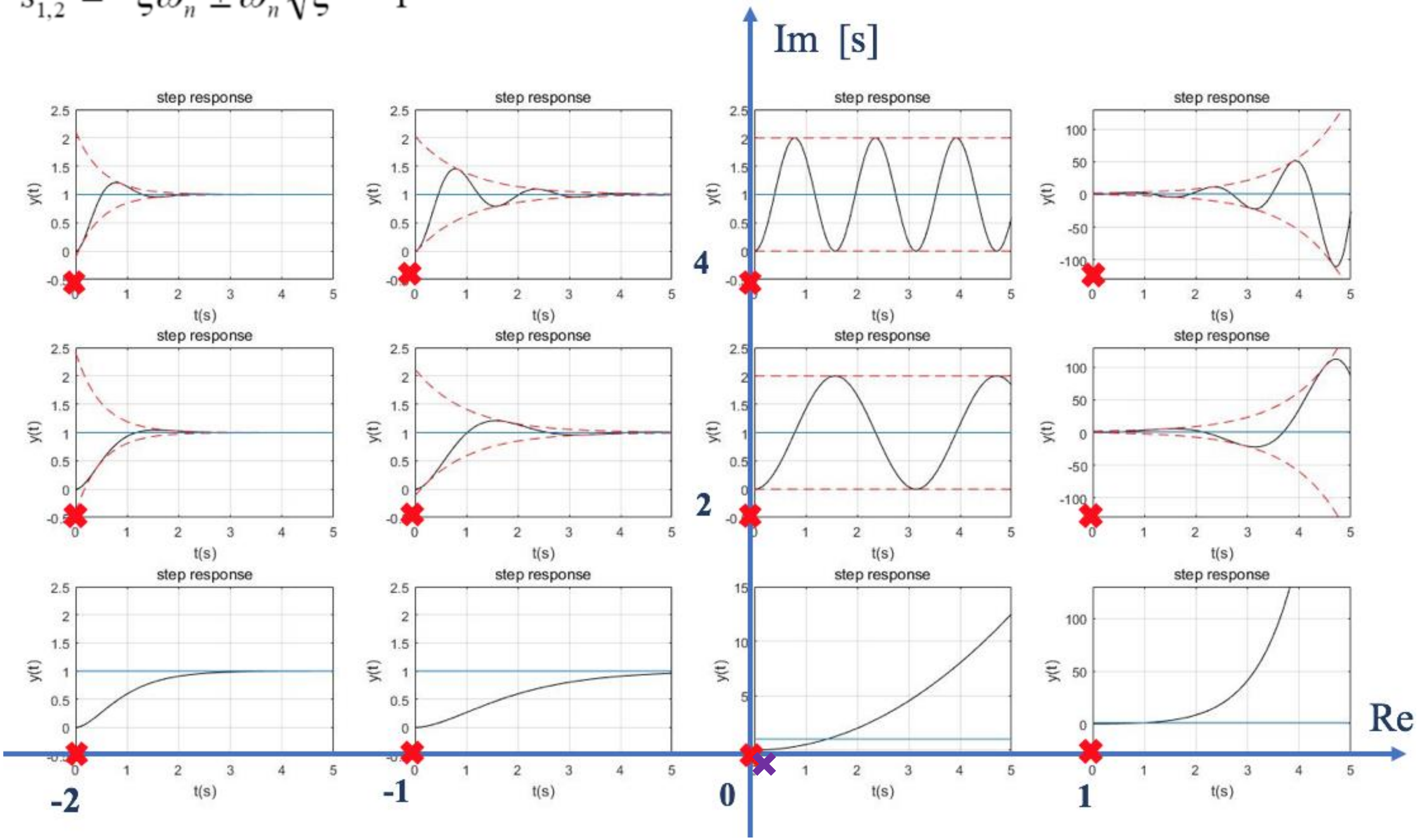
（3）动态指标计算公式



（4）动态性能随系统极点分布变化的规律

二阶系统动态性能随极点位置分布的变化规律

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$



两个问题：

➢一是如何通过闭环系统特征根的分布来全面了解闭环系统的动态特性；

➢二是如何通过对闭环系统的动态特性要求来决定闭环特征根的合理分布，进而确定控制器的结构和参数

图解方法：根轨迹法------本章；频率响应法---- 下一章

根轨迹法: 三大分析、设计方法之一

- 根轨迹的概念
  - 什么是根轨迹?
  - 为什么要用根轨迹？
- 根轨迹的绘制
  - 如何简单方便地绘制根轨迹?
- 系统性能分析
  - 如何使用根轨迹分析系统性能指标?

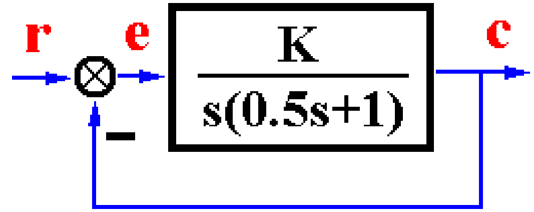
- 根轨迹的概念
  - 什么是根轨迹?
  - 为什么要用根轨迹?
- 根轨迹的绘制
  - 如何简单方便地绘制根轨迹?
- 系统性能分析
  - 如何使用根轨迹分析系统性能指标?

根轨迹定义:

当系统某一参数（如开环增益）变化时，闭环系统特征方程的根在S平面上变化的轨迹。

该方法是1948年Evans提出的，并广泛应用于控制工程中

例1 系统结构图如图所示，分析闭环极点随开环增益K 变化的趋势。



解. $G(s)=\dfrac{K}{s(0.5s+1)}=\dfrac{K^*=2K}{s(s+2)}$

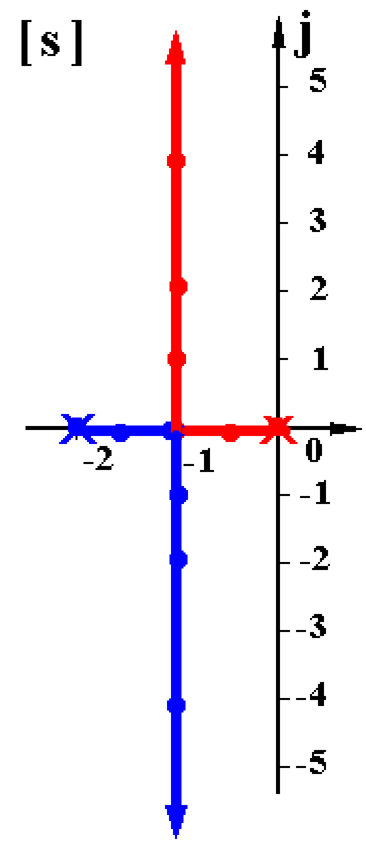
$$\begin{cases} K: & 开环增益 \\ K^*: & 根轨迹增益 \end{cases}$$

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K^*}{s^2+2s+K^*}$$

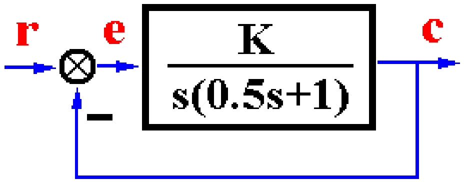
$$D(s)=s^2+2s+K^*=0$$

$$\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-K^*}$$

K*=2K	λ_1	λ_2
0	0	-2
0.64	-0.4	-1.6
1	-1	-1
2	-1+j1	-1-j1
5	-1+j2	-1-j2
17	-1+j4	-1-j4
⋮	⋮	⋮
∞	-1+j∞	-1-j∞



根轨迹与系统性能



$$D(s) = s^2 + 2s + K^* = 0$$

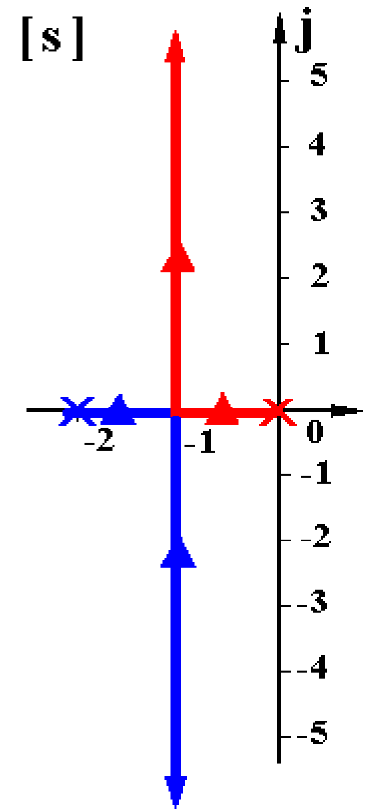
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K^*}$$

$K^* = 2K = 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \infty$

	$\xi > 1$	$0 < \xi < 1$
动态性能	$\sigma\% = 0$	$\theta \uparrow \Rightarrow \xi \downarrow \Rightarrow \sigma\% \uparrow$
	$t_s \downarrow$	$t_s = \dfrac{3.5}{\xi \omega_n} \sim$

稳定性：$\mathrm{Re}[\lambda_{1,2}] < 0$，系统绝对稳定

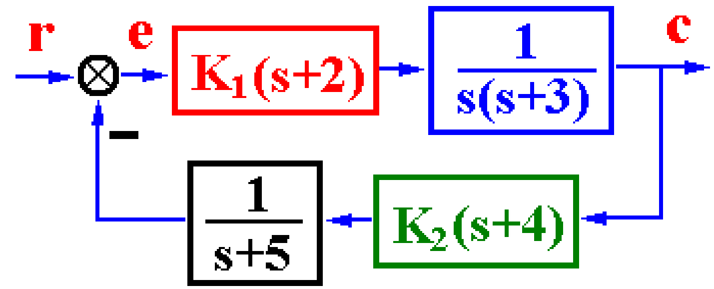
稳态误差 [r(t)=At]：$K^* \uparrow \Rightarrow e_{ss} = \dfrac{A}{K} = \dfrac{2A}{K^*} \downarrow$



闭环零、极点与开环零、极点之间的关系

系统结构图如图所示，确定闭环零点

$$G(s)=\frac{K_1K_2(s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+5)}\qquad \begin{cases} K^*=K_1K_2 \\ K=\dfrac{8}{15}K_1K_2 \\ v=1 \end{cases}$$



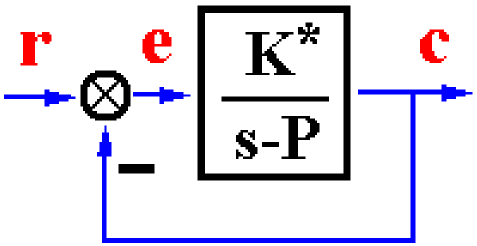
$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{K_1(s+2)}{s(s+3)}}{1+\dfrac{K_1K_2(s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+5)}}=\frac{K_1(s+2)(s+5)}{s(s+3)(s+5)+K_1K_2(s+2)(s+4)}$$

闭环零点=前向通道开环零点+反馈通道开环极点

闭环极点与开环零点、开环极点及K^*均有关

根轨迹方程及其含义

$$G(s)=\frac{K^*}{s-p}$$

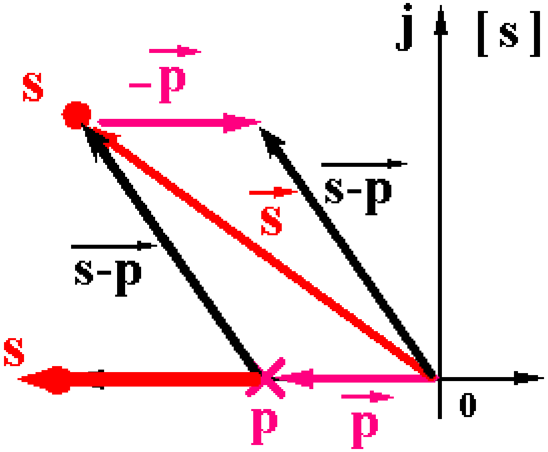


$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$1+G(s)=0$$

$$G(s)=-1$$

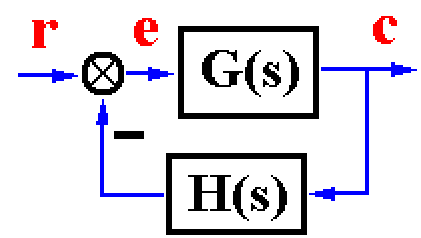
根轨迹方程



$$\begin{cases} \left|G(s)\right|=\dfrac{K^*}{\left|s-p\right|}=1 \\ \angle G(s)=-\angle(s-p)=(2k+1)\pi \end{cases}$$

根轨迹方程及其含义

一般情况下



$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$K=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}|z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|p_j|}$$

根轨迹方程

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=-1$$

$$|G(s)H(s)|=\frac{K^*|s-z_1|\cdots|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|}=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}|(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^{n}|(s-p_j)|}=1$$

— 模值条件

$$\angle G(s)H(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=(2k+1)\pi$$

— 相角条件

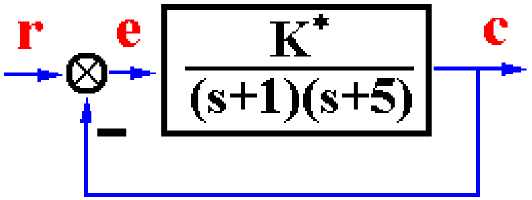
$$|G(s)H(s)| = \frac{K^*|s-z_1|L|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|L|s-p_n|} = K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}|(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^{n}|(s-p_j)|} = 1$$

例2 判定s_i是否为根轨迹上的点。

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i) - \sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j) = (2k+1)\pi$$

解. $G(s)=\dfrac{K^*}{(s+1)(s+5)}$

由p指向s的向量



模值条件 $K^*=|s+1|\,|s+5|$

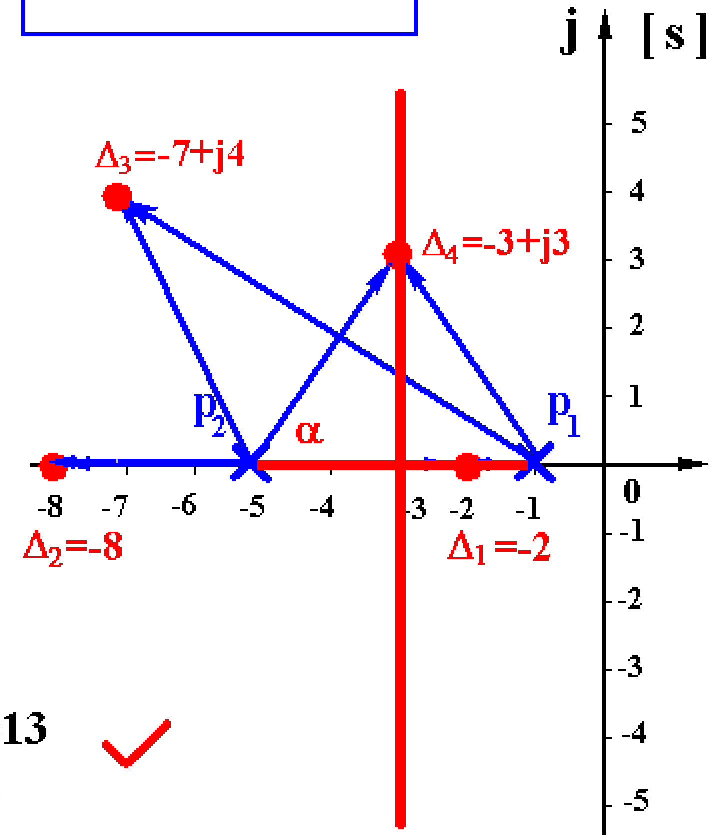
相角条件 $-\angle s-p_1-\angle s-p_2=(2k+1)\pi$

$\Delta_1=-2$ $\begin{cases} K^*_{\Delta_1}=|-2+1||-2+5|=3 \\ -\angle -2+1-\angle -2+5=-180-0=-180 \end{cases}$ ✓

$\Delta_2=-8$ $\begin{cases} K^*_{\Delta_2}=|-8+1||-8+5|=21 \\ -\angle -8+1-\angle -8+5=-180-180=-360 \end{cases}$ ✗

$\Delta_3=-7+j4$ $\begin{cases} K^*_{\Delta_3}=|-7+j4+1||-7+j4+5| \\ \quad=\sqrt{6^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2}=32.25 \\ -\angle -7+j4+1-\angle -7+j4+5 \neq (2k+1)\pi \end{cases}$ ✗

$\Delta_4=-3+j3$ $\begin{cases} K^*_{\Delta_4}=|-3+j3+1||-3+j3+5|=\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}=13 \\ -\angle -3+j3+1-\angle -3+j3+5=-(180-\alpha)-\alpha=-180 \end{cases}$ ✓



- 对s平面上任意的点，总存在一个 K^*，使其满足模值条件，但该点不一定是根轨迹上的点。

- s平面上满足相角条件的点（必定满足模值条件）一定在根轨迹上。

满足相角条件是s点位于根轨迹上的充分必要条件。

- 根轨迹上某点对应的 K^* 值，应由模值条件来确定。

绘制根轨迹

$$
\begin{cases}
|G(s)H(s)| = \dfrac{K^*|s-z_1|\cdots|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|} = K^* \dfrac{\prod_{i=1}^{m}|(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^{n}|(s-p_j)|} = 1 \\
\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i) - \sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j) = (2k+1)\pi
\end{cases}
$$

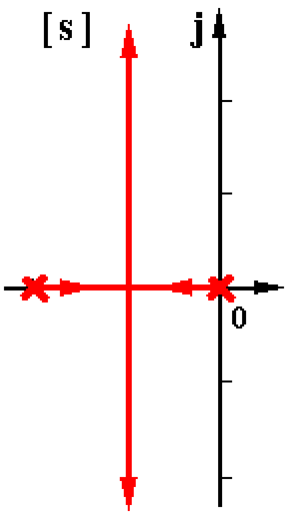
法则1 根轨迹的起点和终点：

根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点；如果开环极点个数n大于开环零点个数m ，则有 n-m 条根轨迹终止于无穷远处。

$$K^* = \frac{|s-p_1|\cdots|s-p_n|}{|s-z_1|\cdots|s-z_m|} = \frac{s^{n-m}\left|1-\frac{p_1}{s}\right|\cdots\left|1-\frac{p_n}{s}\right|}{\left|1-\frac{z_1}{s}\right|\cdots\left|1-\frac{z_m}{s}\right|} = 0 \qquad s = p_i \quad i = 1, 2, \cdots n$$

$$K^* = \frac{|s-p_1|\cdots|s-p_n|}{|s-z_1|\cdots|s-z_m|} = \frac{s^{n-m}\left|1-\frac{p_1}{s}\right|\cdots\left|1-\frac{p_n}{s}\right|}{\left|1-\frac{z_1}{s}\right|\cdots\left|1-\frac{z_m}{s}\right|} = \infty \qquad \begin{cases} s = z_j \\ s = \infty \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \cdots m$$



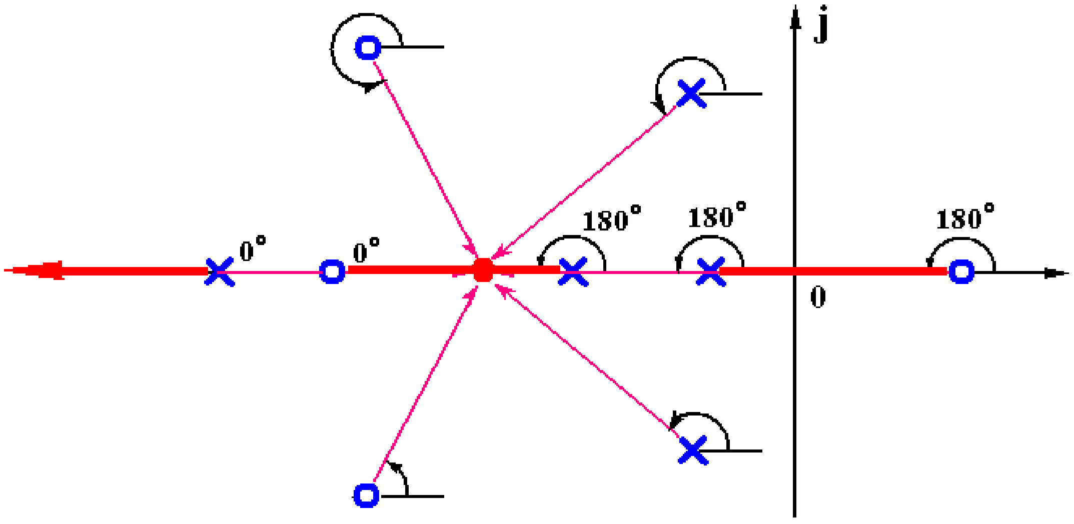
$$\angle G(s)H(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=(2k+1)\pi$$

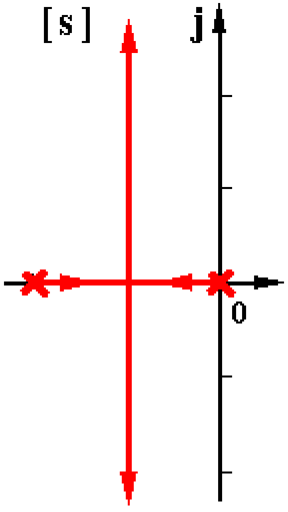
法则2 根轨迹的分支数，对称性和连续性：

根轨迹的分支数=开环极点数；根轨迹连续且对称于实轴。

法则3 实轴上的根轨迹：

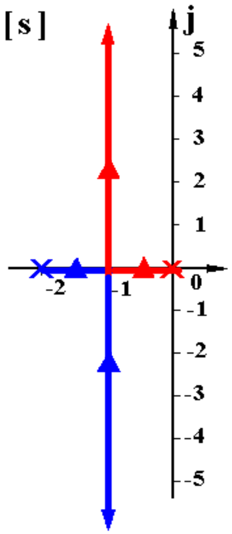
从实轴上最右端的开环零、极点算起，奇数开环零、极点到偶数开环零、极点之间的区域必是根轨迹。





$$G(s)=\frac{K}{s(0.5s+1)}=\frac{K^*=2K}{s(s+2)}$$

法则4 根之和：$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=C \quad (n-m\geq 2)$



n-m ≥ 2时，闭环根之和保持一个常值。

证明：$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}=\frac{K^*(s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}$

由代数定理：$-a_{n-1}=\sum_{i=1}^{n}p_i$ $\boxed{=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=-a_{n-1}=C}$

$$\begin{aligned}D(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}&+a_{n-2}s^{n-2}+a_{n-3}s^{n-3}+\cdots+a_0\\&+K^*s^{n-2}+K^*b_{n-3}s^{n-3}+\cdots+K^*b_0\end{aligned}$$

$$=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+(a_{n-2}+K^*)s^{n-2}+(a_{n-3}+K^*b_{n-3})s^{n-3}+\cdots+(a_0+K^*b_0)$$

$$D(s)=(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)=0$$

n-m ≥ 2时,一部分根左移,另一部分根必右移,且移动总量为零。

例3 某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$， $K^*=0\to\infty$， 证明复平面的根轨迹为圆弧。

$$G(s)=\frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}\qquad \begin{cases} K=2K^* \\ v=1 \end{cases}$$

$$D(s)=s(s+1)+K^*(s+2)=s^2+(1+K^*)s+2K^*$$

$$s_{1,2}=\frac{-(1+K^*)\pm\sqrt{(1+K^*)^2-8K^*}}{2}$$

$$=\frac{-(1+K^*)}{2}\pm j\frac{\sqrt{8K^*-(1+K^*)^2}}{2}=\sigma\pm j\omega$$

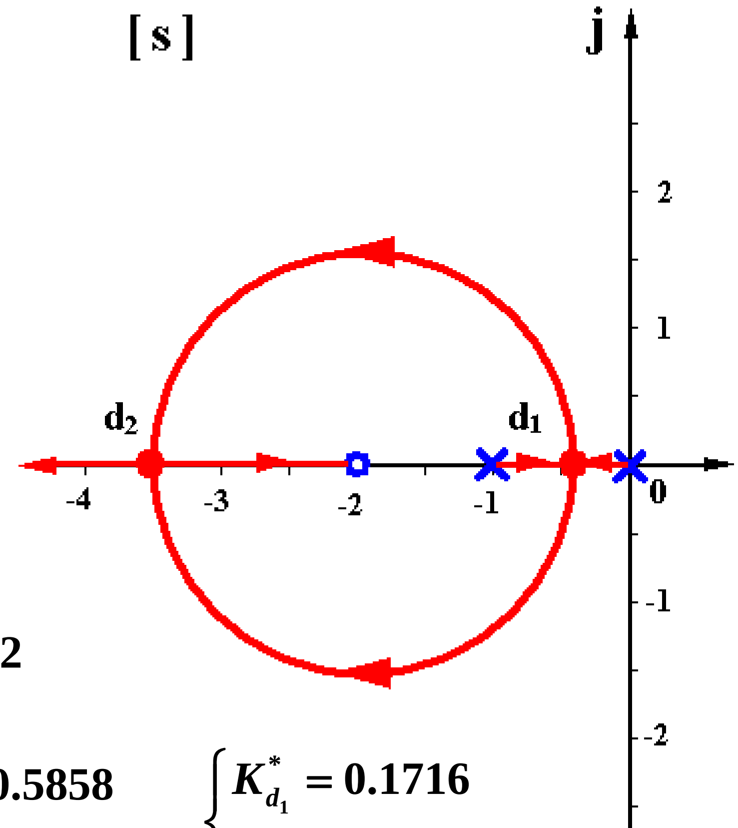
$$\sigma=\frac{-(1+K^*)}{2}\qquad\Rightarrow K^*=-2\sigma-1$$

$$\omega^2=\frac{8K^*-(1+K^*)^2}{4}=\frac{-8(2\sigma+1)-4\sigma^2}{4}=-\sigma^2-4\sigma-2$$

$$\sigma^2+4\sigma+4+\omega^2=2\qquad(\sigma+2)^2+\omega^2=\sqrt{2}^2$$

$$\Delta=(1+K^*)^2-8K^*=K^{*2}-6K^*+1=0$$

$$\begin{cases} d_1=-0.5858 \\ d_2=-3.4142 \end{cases}\qquad \begin{cases} K^*_{d_1}=0.1716 \\ K^*_{d_2}=5.828 \end{cases}$$



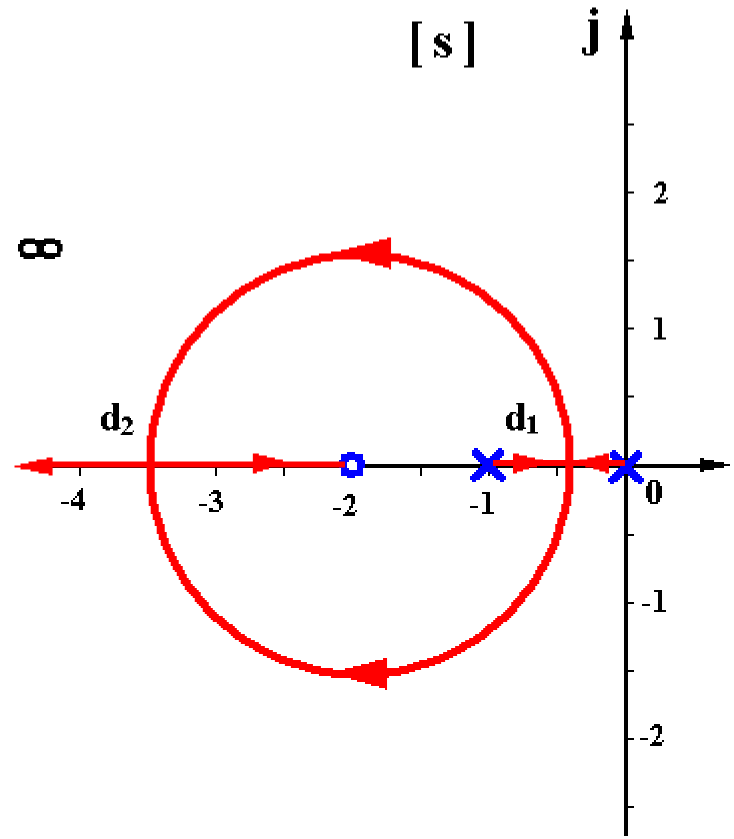
例3 某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$ ，$K^*=0\rightarrow\infty$， 证明复平面的根轨迹为圆弧。

$$K^*=0 \xRightarrow{h(t)\text{ 单调}} \underset{0.1716}{K^*_{d1}} \xRightarrow{h(t)\text{ 振荡}} \underset{5.828}{K^*_{d2}} \xRightarrow{\xi>0} \infty$$

$t_s\downarrow$ $\sigma\%=0$ $\qquad$ $t_s\downarrow$ $\sigma\%$ $\qquad$ $t_s\downarrow$

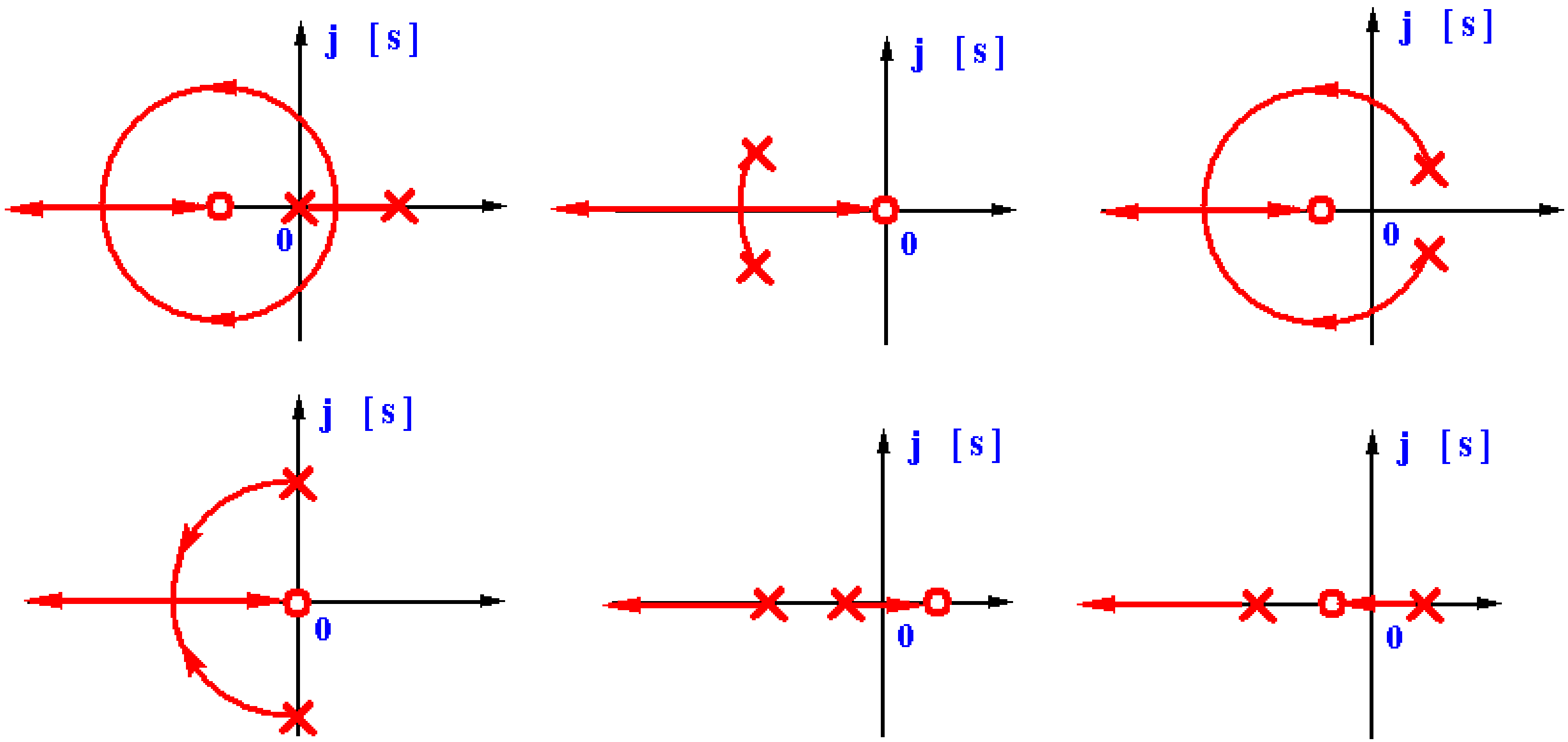
系统绝对稳定

$$K^*\uparrow \Rightarrow e_{ss} \xlongequal{r(t)=t} \frac{A}{K}=\frac{1}{2K^*}\downarrow$$



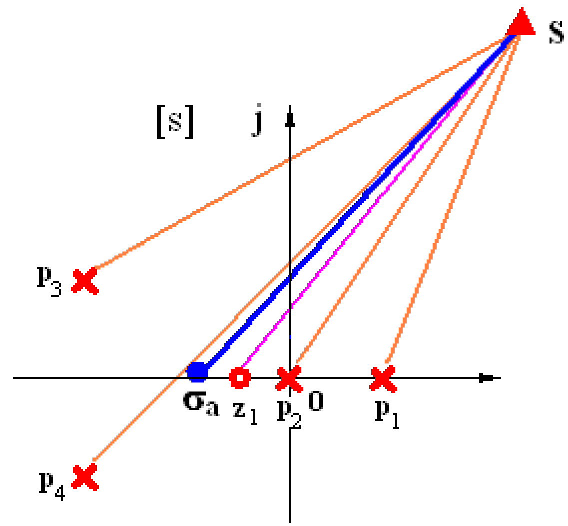
定理：若系统有2个开环极点，1个开环零点，且在复平面存在根轨迹，

则复平面的根轨迹一定是以该零点为圆心的圆弧。



根轨迹方程 $G(s)H(s)=\dfrac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=-1$

法则5 渐近线: $\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i-\sum\limits_{j=1}^{m}z_i}{n-m}\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}\end{cases}$



$n > m$时，n-m条根轨迹趋于无穷远处的规律。

证明: (1) $\dfrac{\prod\limits_{j=1}^{n}(s-p_j)}{\prod\limits_{i}^{m}(s-z_i)}=-K^*=(s-\sigma_a)^{n-m}$ 根轨迹方程

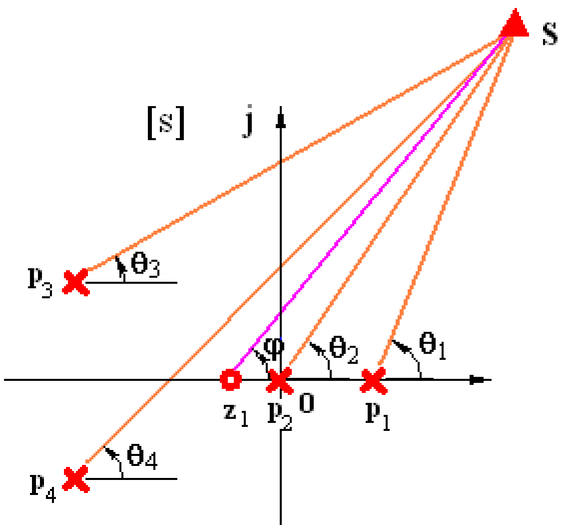
$$=s^{n-m}-\sigma_a(n-m)s^{n-m-1}+\cdots$$

长除法求系数

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(s-p_j)}{\prod\limits_{i}^{m}(s-z_i)}=\frac{s^n-(\sum\limits_{j=1}^{n}p_j)s^{n-1}+\cdots}{s^m-(\sum\limits_{i=1}^{m}z_i)s^{m-1}+\cdots}=s^{n-m}-(\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}z_i)s^{n-m-1}+\cdots$$

根轨迹方程 $G(s)H(s)=\dfrac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=-1$

法则5 渐近线:
$$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_i}{n-m}\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}\end{cases}$$



$n>m$时，n-m条根轨迹趋于无穷远处的规律。

证明: (2) 由相角条件

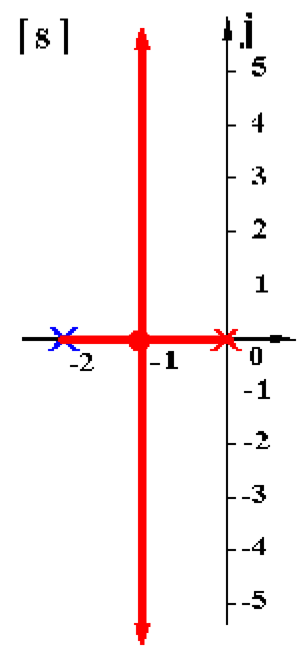
$$\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=-(2k+1)\pi$$
$$=m\varphi_a-n\varphi_a=(m-n)\varphi_a$$

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

法则5 渐近线:
$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i - \sum\limits_{j=1}^{m} z_i}{n-m} \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} \end{cases}$$

$n > m$时，n-m条根轨迹趋于无穷远处的规律。

例1 系统开环传递函数为 $G(s) = \dfrac{K^*}{s(s+2)}$，试绘制根轨迹。



解. ① 实轴上的根轨迹：[-2，0]

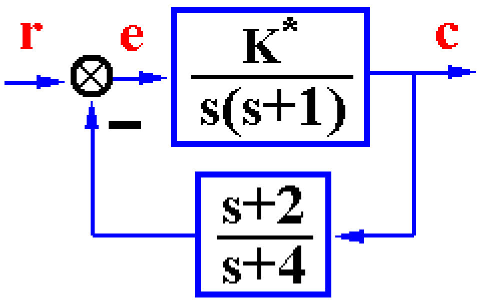
② 渐近线：
$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i - \sum\limits_{j=1}^{m} z_i}{n-m} = \dfrac{-2+0}{2-0} = -1 \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pm 90^\circ \end{cases}$$

$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_i}{n-m}\qquad \varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

例2 系统结构图如图所示。

（1）绘制当 $K^*=0\to\infty$ 时系统的根轨迹；

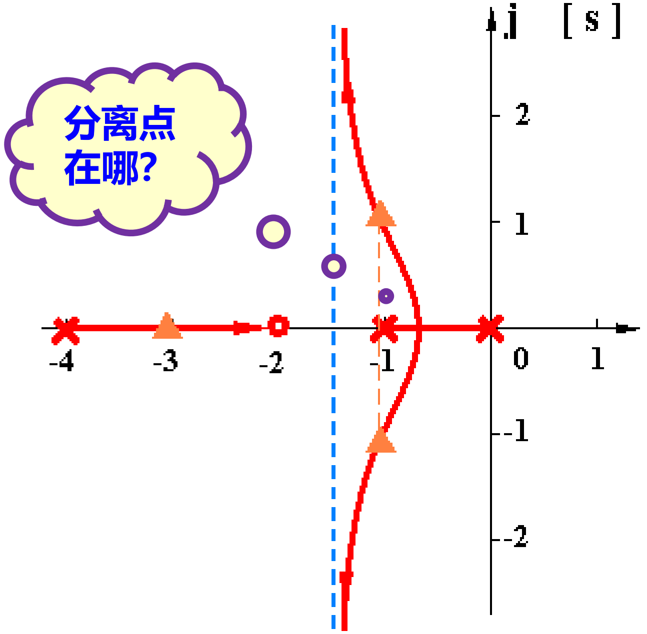
（2）当$\mathrm{Re}[\lambda_1]=-1$ 时，$\lambda_3=?$



解. (1) $$G(s)=\frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)}\qquad \begin{cases}K=K^*/2\\ v=1\end{cases}$$

① 实轴上的根轨迹：[-4,-2], [-1,0]

② 渐近线：$$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{0-1-4+2}{3-1}=-\dfrac{3}{2}\\[2ex] \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3-1}=\pm 90^\circ\end{cases}$$

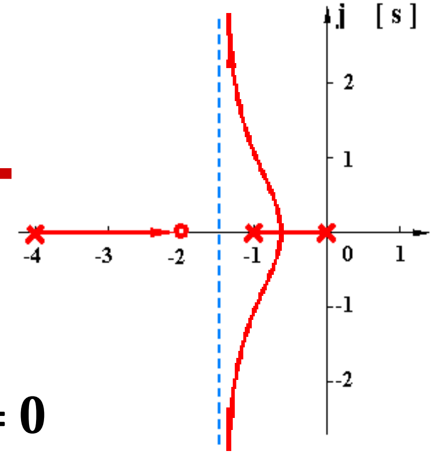


用根之和法则分析绘制根轨迹：

(2) $$a_{n-1}=0-1-4=-5=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2(-1)+\lambda_3$$

$$\lambda_3=-5+2=-3$$

$$G(s)=\frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)}$$

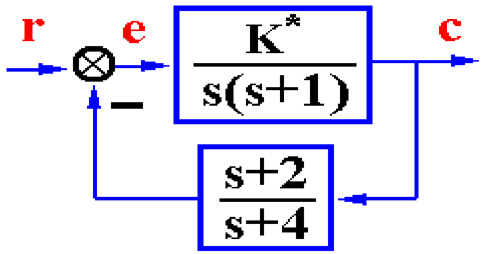


法则6 分离点 d: $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$ (对应重根)

说明: $D(s)=\underline{s(s+1)(s+4)}+\underline{K^*(s+2)}\overset{s=d}{=}(s-\lambda_3)(s-d)^2=0$

$$\boxed{\frac{dD(s)}{ds}=\frac{d}{ds}\left[s(s+1)(s+4)\right]+K^*\frac{d}{ds}(s+2)\overset{s=d}{=}(s-d)^2+2(s-d)(s-\lambda_3)=0}$$

$$\frac{\frac{d}{ds}\left[s(s+1)(s+4)\right]}{s(s+1)(s+4)}\overset{s=d}{=}\frac{-K^*\frac{d}{ds}(s+2)}{-K^*(s+2)}=\frac{\frac{d}{ds}(s+2)}{s+2}$$



$$\frac{d}{ds}\ln\left[s(s+1)(s+4)\right]\overset{s=d}{=}\frac{d}{ds}\ln(s+2)$$

$$\frac{d}{ds}\left[\ln s+\ln(s+1)+\ln(s+4)\right]\overset{s=d}{=}\frac{d}{ds}\ln(s+2)$$

试根: $d\in[-1,-0.5]$

$d_1=-0.5$

$d_2=-0.6$

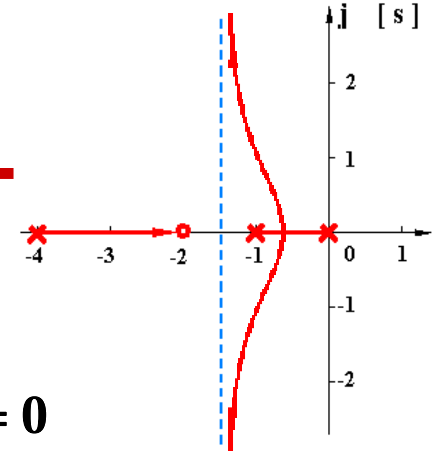
$d_3=-0.55$

$$\boxed{\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+4}=\frac{1}{d+2}}$$

(无零点时右端为0)

$$K_d^*=\frac{|d||d+1||d+4|}{|d+2|}\overset{d=-0.55}{=}0.589$$

$$G(s)=\frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)}$$

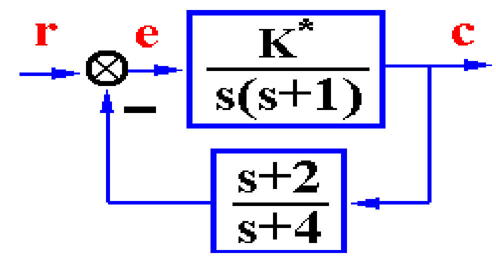


法则6 分离点 d: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$ (对应重根)

说明: $D(s)=\underline{s(s+1)(s+4)}+\underline{K^*(s+2)}\overset{s=d}{=}(s-\lambda_3)(s-d)^2=0$

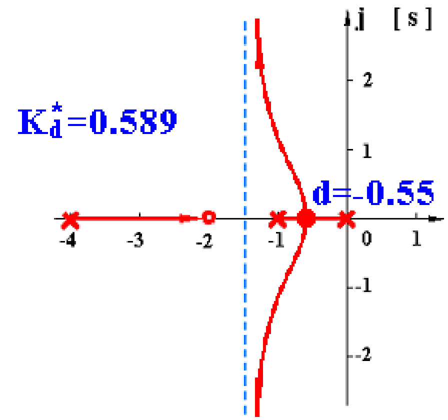
$$\boxed{\frac{dD(s)}{ds}=\underline{\frac{d}{ds}\big[s(s+1)(s+4)\big]}+K^*\underline{\frac{d}{ds}(s+2)}\overset{s=d}{=}(s-d)^2+2(s-d)(s-\lambda_3)=0}$$

$$\frac{\frac{d}{ds}\big[s(s+1)(s+4)\big]}{s(s+1)(s+4)}\overset{s=d}{=}\frac{-K^*\frac{d}{ds}(s+2)}{-K^*(s+2)}=\frac{\frac{d}{ds}(s+2)}{s+2}$$



$$\frac{d}{ds}\ln\big[s(s+1)(s+4)\big]\overset{s=d}{=}\frac{d}{ds}\ln(s+2)$$

$$\frac{d}{ds}\big[\ln s+\ln(s+1)+\ln(s+4)\big]\overset{s=d}{=}\frac{d}{ds}\ln(s+2)$$

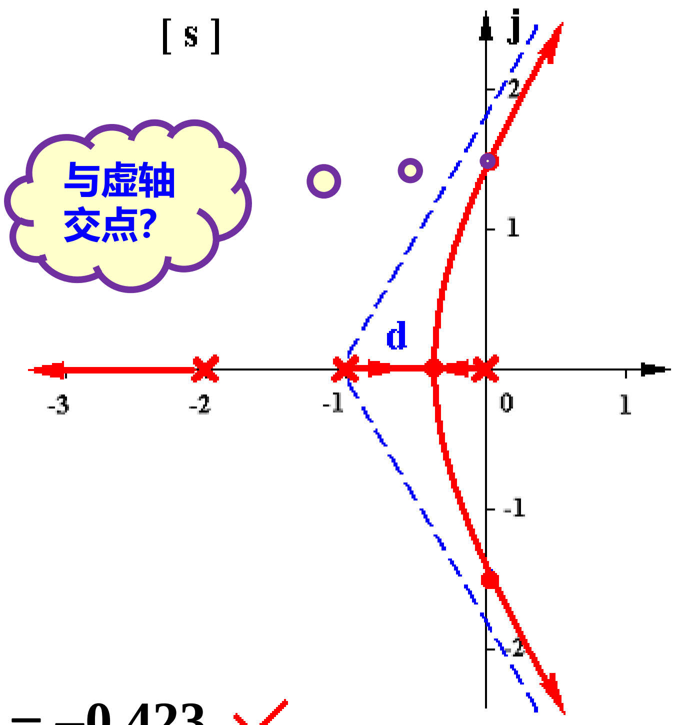


$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+4}=\frac{1}{d+2}$$ (无零点时右端为0)

分离点 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$ 渐近线 $\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_i}{n-m}$ $\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$

例3 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$，绘制根轨迹。

解. $G(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$ $\begin{cases}K=K^*/2\\ v=1\end{cases}$



① 实轴上的根轨迹：(-∞,-2], [-1,0]

② 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=\frac{0-1-2}{3}=-1\\ \varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{3}=\pm 60°, 180°\end{cases}$

③ 分离点：$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+2}=0$

整理得：$3d^2+6d+2=0$ 解根：$\begin{cases}d_1=-0.423 \checkmark\\ d_2=-1.577 \times\end{cases}$

④ 与虚轴交点：？

$K_d^*=|d||d+1||d+2|\overset{d=-0.423}{=}0.385$

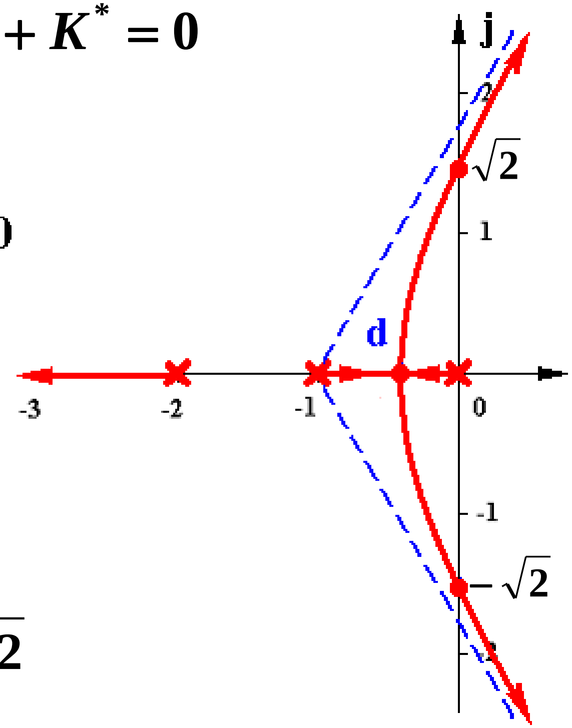
法则7 与虚轴交点:

$\begin{cases} 1）系统临界稳定点 \\ 2）s = j\omega \ 是根的点 \end{cases}$

[接例3] $$G(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

稳定范围： 0<K<3

$$D(s)=s(s+1)(s+2)+K^*=s^3+3s^2+2s+K^*=0$$



解法I： Routh：

s^3	1	2		
s^2	3	K^*	$\Rightarrow$	令 $K^*=6$ $\begin{cases} 3s^2+6=0 \\ s=\pm j\sqrt{2} \end{cases}$
s^1	$\frac{6-K^*}{3}$		$\Rightarrow$	$K^*<6$
s^0	K^*		$\Rightarrow$	$K^*>0$

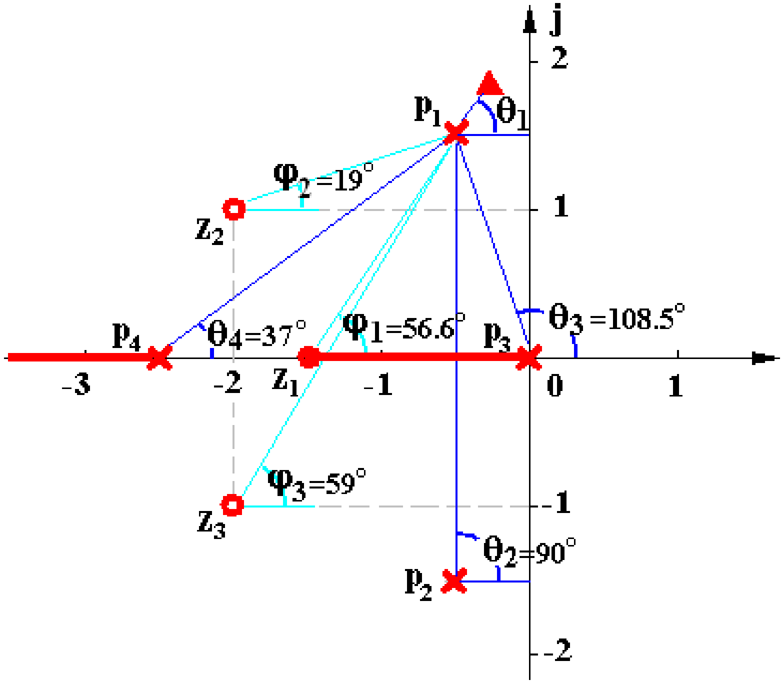
解法II： $$D(j\omega)=-j\omega^3-3\omega^2+j2\omega+K^*=0$$

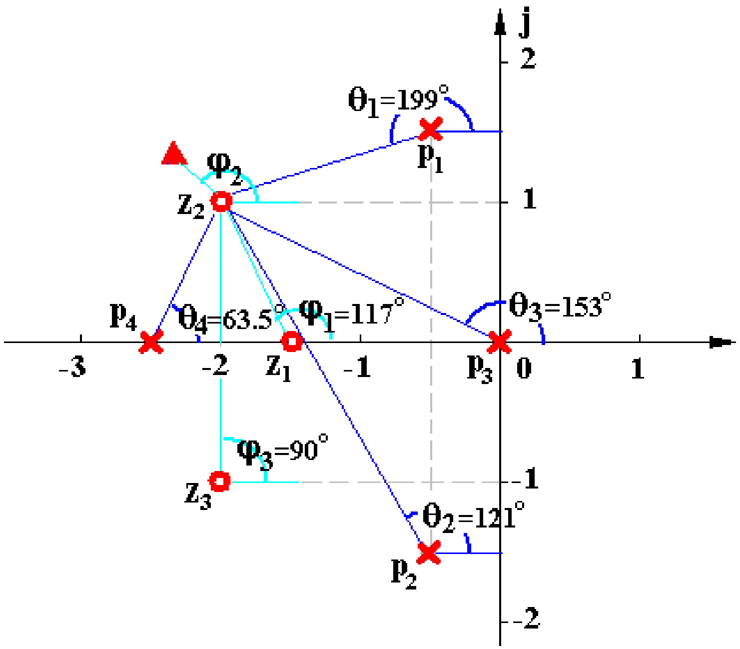
$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left[D(j\omega)\right]=-3\omega^2+K^*=0 \\ \mathrm{Im}\left[D(j\omega)\right]=-\omega^3+2\omega=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega=\pm\sqrt{2} \\ K^*=6 \end{cases}$$

法则8 出射角/入射角 $\sum_{j=1}^{m} \angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s-p_i) = (2k+1)\pi$

(起始角/终止角)

例4 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*(s+1.5)(s+2\pm j)}{s(s+2.5)(s+0.5\pm j1.5)}$ ，绘制根轨迹。





$$56.5°+19°+59°-[\theta_1+90°+108.5°+37°]=-180° \qquad \theta_1=79°$$

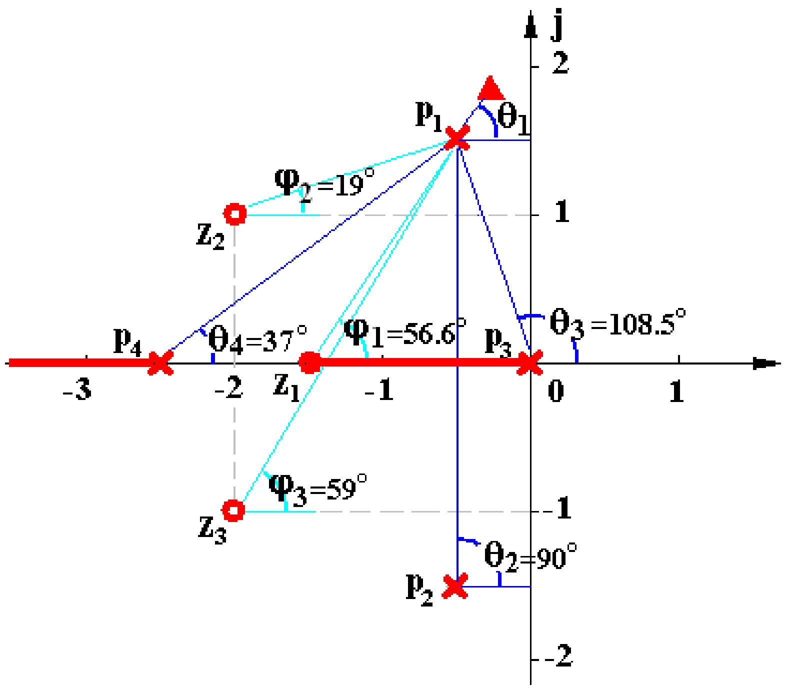
$$[117°+\varphi_2+90°]-[199°+121°+153°+63.5]=-180° \qquad \varphi_2=149.5°$$

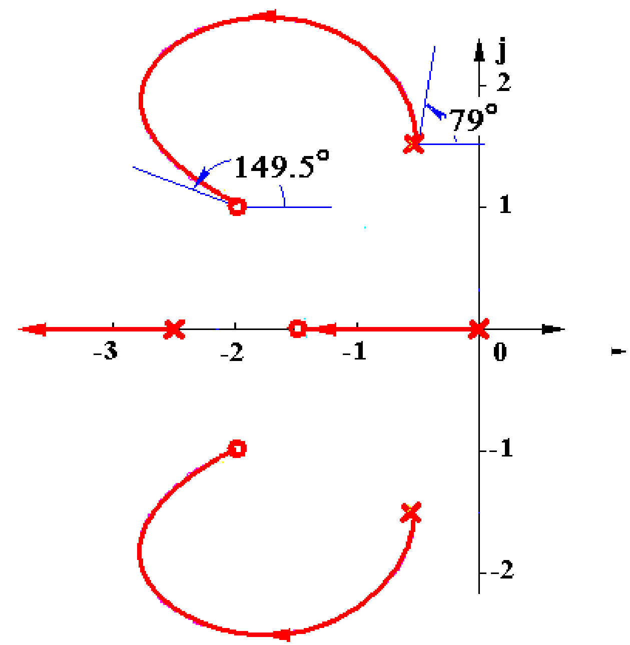
法则8 出射角/入射角

（起始角/终止角）

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)=(2k+1)\pi$$

例4 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*(s+1.5)(s+2\pm j)}{s(s+2.5)(s+0.5\pm j1.5)}$，绘制根轨迹。





$$56.5°+19°+59°-[\theta_1+90°+108.5°+37°]=-180° \qquad \theta_1=79°$$

$$[117°+\varphi_2+90°]-[199°+121°+153°+63.5]=-180° \qquad \varphi_2=149.5°$$

绘制根轨迹的基本法则

法则 1　根轨迹的起点和终点

法则 2　根轨迹的分支数，对称性和连续性

法则 3　实轴上的根轨迹

法则 4　根之和　$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = C \qquad (n-m \geq 2)$

法则 5　渐近线　$\sigma_a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_i}{n-m} \qquad \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}$

法则 6　分离点　$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^{m}\dfrac{1}{d-z_j}$

法则 7　与虚轴交点　$\mathrm{Re}[D(j\omega)] = \mathrm{Im}[D(j\omega)] = 0$

法则 8　出射角/入射角　$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i) = (2k+1)\pi$

分离点 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$

渐近线 $\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_i}{n-m}$ $\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$

例5 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{K^*}{s(s+20)(s^2+4s+20)}$，绘制根轨迹。

解. $G(s)=\frac{K^*}{s(s+20)(s+2\pm j4)}$ $\begin{cases}K=K^*/400\\ v=1\end{cases}$

① 实轴上的根轨迹：[-20, 0]

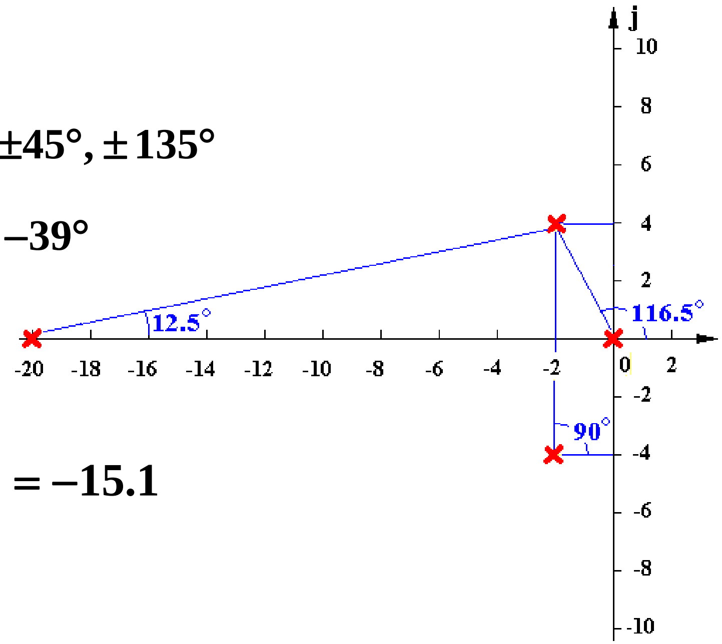
② 渐近线： $\sigma_a=\frac{0-20-2-2}{4}=-6$ $\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{4}=\pm45°,\pm135°$

③ 出射角： $-[\theta_1+90°+116.5°+12.5°]=-180° \Rightarrow \theta_1=-39°$

④ 分离点： $\frac{1}{d}+\frac{1}{d+20}+\frac{1}{d+2+j4}+\frac{1}{d+2-j4}=0$

$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+20}+\frac{2(d+2)}{(d+2)^2+4^2}=0$ 试根得： $d=-15.1$

$K_d^*=|d||d+20|\left|(d+2)^2+4^2\right|\overset{d=-15.1}{=}13881$



⑤ 虚轴交点： $D(s)=s^4+24s^3+100s^2+400s+K^*=0$

$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=\omega^4-100\omega^2+K^*=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-24\omega^3+400\omega=0\end{cases}$ $\begin{cases}\omega=\sqrt{400/24}=4.1\\ K^*=1389\end{cases}$

出射角 $\sum_{j=1}^{m} \angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s-p_i) = (2k+1)\pi$

分离点 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{d-z_j}$

例5 $G(s) = \dfrac{K^*}{s(s+20)(s+2\pm j4)}$

$\begin{cases} K = K^*/400 \\ v = 1 \end{cases}$

① 实轴上的根轨迹：[-20, 0]

② 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a = -6 \\ \varphi_a = \pm 45°, \pm 135° \end{cases}$

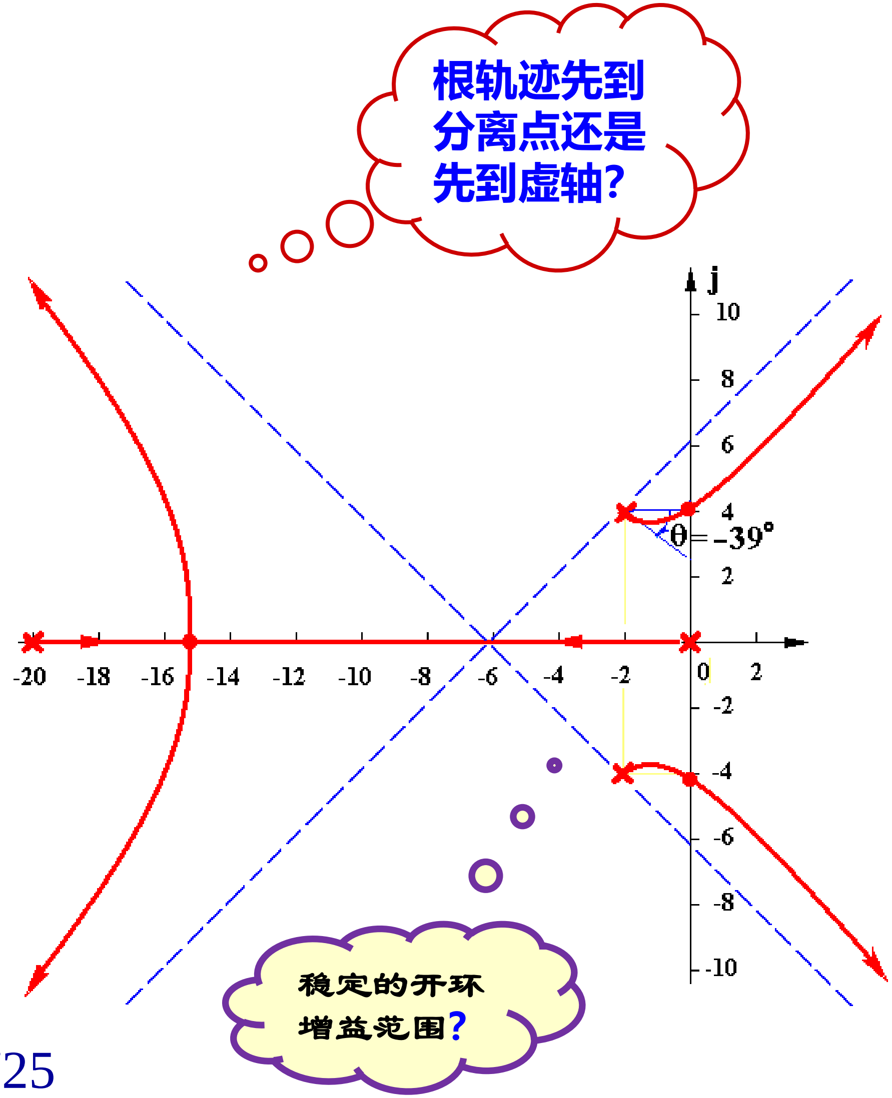
③ 出射角：$\theta = -39°$

④ 分离点：$d = -15.1$

$K_d^* = 13881$

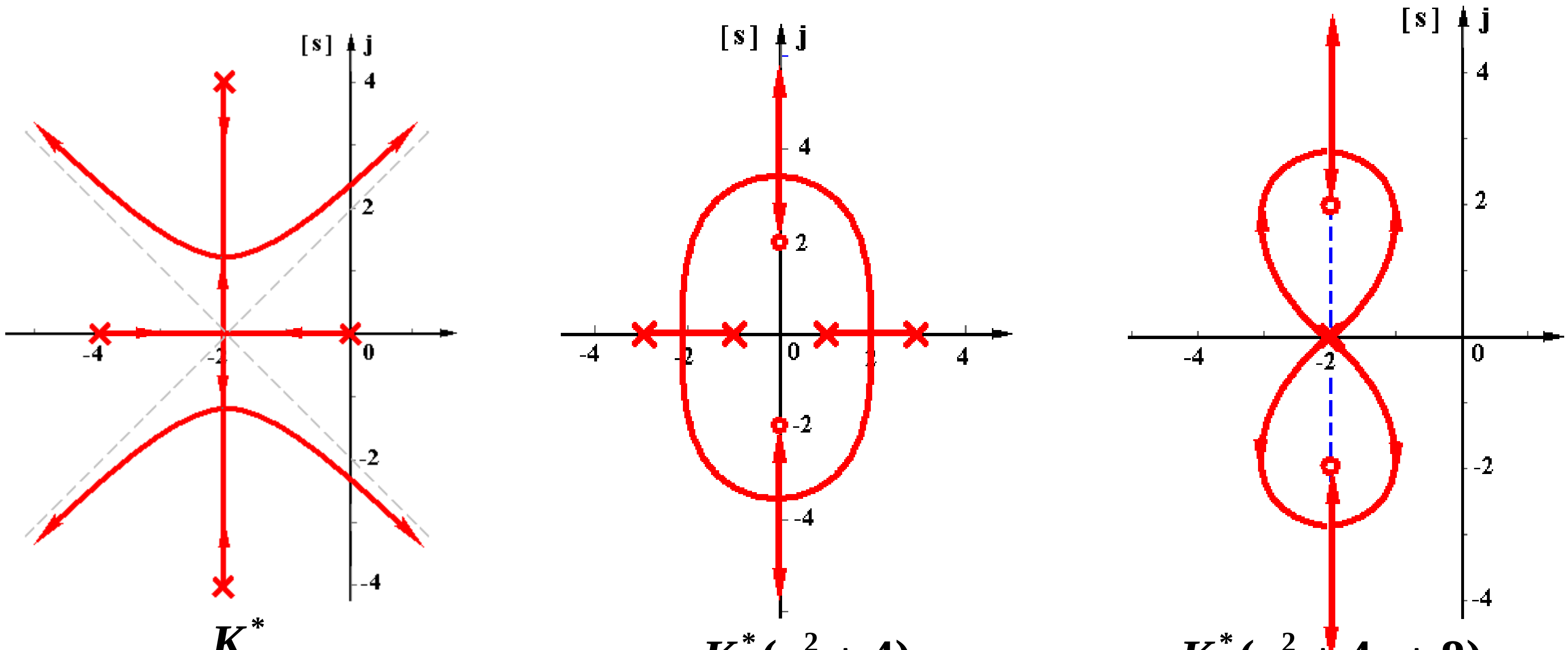
⑤ 虚轴交点：$\begin{cases} \omega = 4.1 \\ K^* = 1389 \end{cases}$

稳定的开环增益范围：$0 < K < 3.4725$



关于根轨迹对称性的一个定理：

若开环零极点均为偶数个，且关于一条平行于虚轴的直线左右对称分布，则根轨迹一定关于该直线左右对称。



$$\frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

$$\frac{K^*(s^2+4)}{(s^2-1)(s^2-9)}$$

$$\frac{K^*(s^2+4s+8)}{(s+2)^4}$$

分离点 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$

渐近线 $\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_i}{n-m}$ $\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$

例 4.3.9 负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{k}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

试绘制系统的根轨迹。

根轨迹起始于开环极点 $p_1=0$， $p_2=-4$, $p_3=-2+j4$, $p_4=-2-j4$，无零点

根轨迹有四条、连续且对称于实轴

① 实轴上的根轨迹 [-4, 0]

② 渐近线与实轴交点为__-2__，渐近线与实轴正方将夹角为__45__度、__135__度

③ 分离点:

$$\frac{dD(s)}{ds}=\frac{d}{ds}\left[s(s+4)(s^2+4s+20)+k\right]=0$$

$$d_1=-2,\ d_2=-2+j2.45,\ d_3=-2-j2.45$$

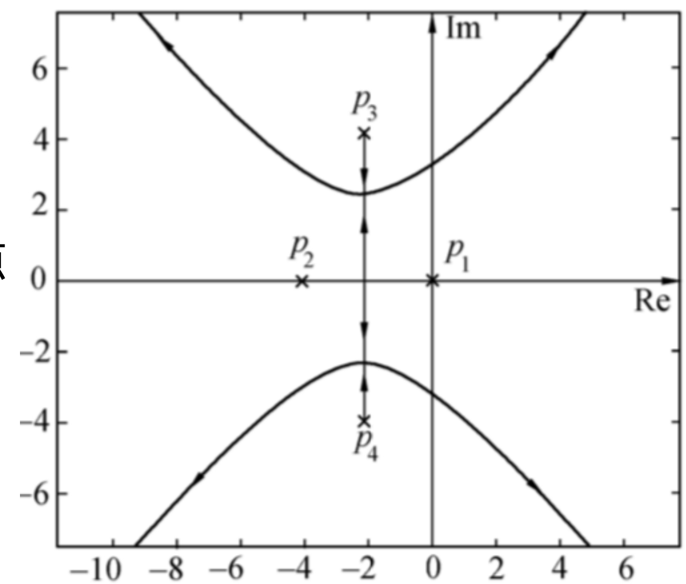
可以验证 d_2，d_3 是系统根轨迹上的点，也是分离点

④ p_3出射角 -90^o

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)=(2k+1)\pi$$

⑤ 与虚轴交点

$$\omega=0,k=0\ \text{或}\ \omega=\pm\sqrt{10},k=260$$



分离点 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$ 渐近线 $\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_i}{n-m}$ $\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$

例 4.3.10 单位负反馈系统开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{k(s+0.4)}{s^2(s+3.6)}$$

试绘制该系统根轨迹的大致图形。

解 该系统的开环传递函数已是典型零极点形式，有三个开环极点：$p_{1,2}=0,p_3=-3.6$；有一个开环零点 $z_1=-0.4$。

根轨迹起始于开环极点，一条终止于零点 $z_1=-0.4$，其他两条趋于渐近线。

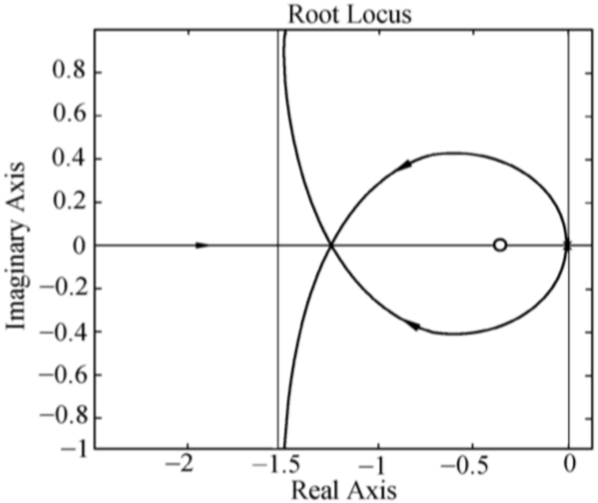
① 实轴上的根轨迹$[-3.6,\ -0.4]$

② 渐近线与实轴交点为 <u>-1.6</u> ，渐近线与实轴正方将夹角为 <u>90</u> 度

③ 分离点： $d=-1.2$

④ 出射角： $\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)=(2k+1)\pi$

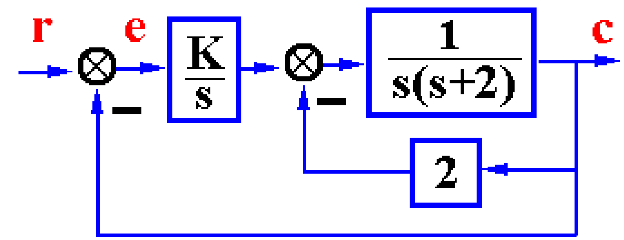
$\pm 90^o$



出射角 $\sum_{j=1}^{m} \angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s-p_i) = (2k+1)\pi$

渐近线 $\sigma_a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_i}{n-m}$ $\varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}$

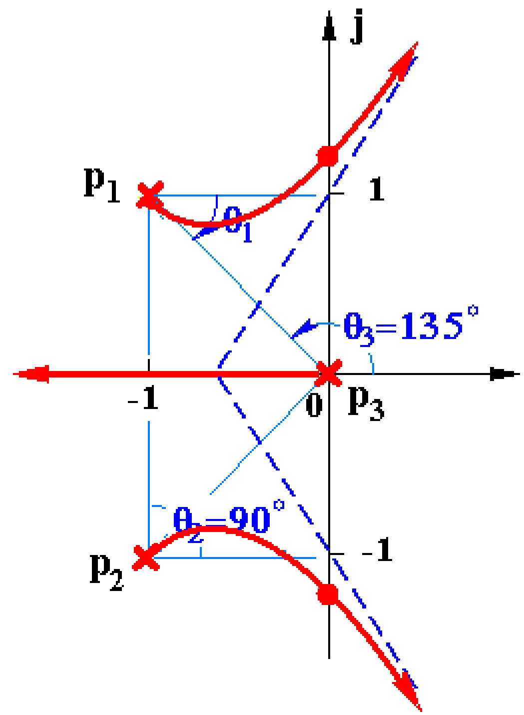
例6 已知系统结构图，绘制根轨迹。



解. $G(s) = \dfrac{K}{s} \dfrac{\dfrac{1}{s(s+2)}}{1+\dfrac{2}{s(s+2)}} = \dfrac{K}{s[s^2+2s+2]}$ $\begin{cases} K_k = K/2 \\ v = 1 \end{cases}$

① 实轴上的根轨迹(-∞,0]

② 渐近线: $\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{0-1-1}{3} = -\dfrac{2}{3} \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60°, 180° \end{cases}$



③ 出射角: $0-[\theta_1 + 90° + 135°] = -180° \Rightarrow \theta_1 = -45°$

④ 与虚轴交点: $D(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + K = 0$

$\begin{cases} \mathrm{Re}[D(j\omega)] = -2\omega^2 + K = 0 \\ \mathrm{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 2\omega = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K = 4 \end{cases}$

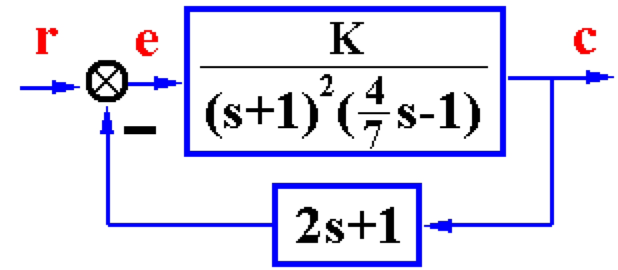
根轨迹法分析控制系统性能

性能分析小结

- 稳定性分析 ——看根什么情况下位于左半平面？
- 动态性能
  - 定性分析 ——随着参数变化，特征根怎么变？
  - 定量计算 ——先求相应的闭环极点，再进行计算。
- 稳态性能 ——看开环增益和系统的“型”。

根轨迹法分析控制系统性能

例1 系统结构图如图所示

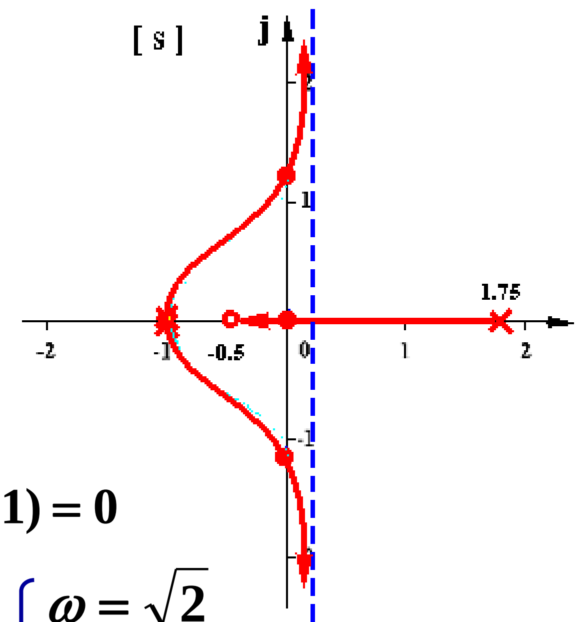


（1）绘制当$K^*=0\to\infty$时系统的根轨迹；

（2）分析系统稳定性随 K 变化的规律。

解. (1) $G(s)=\dfrac{K(2s+1)}{(s+1)^2(\frac{4}{7}s-1)}=\dfrac{3.5K(s+1/2)}{(s+1)^2(s-\frac{7}{4})}$ $\quad\begin{cases}K^*=3.5K\\ v=0\end{cases}$

① 实轴上的根轨迹：**[-0.5, 1.75]**



② 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{-2+7/4+1/2}{3-1}=\dfrac{1}{8}\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3-1}=\pm 90^\circ\end{cases}$

③ 出射角：$180^\circ-[2\theta+180^\circ]=-180^\circ \quad \Rightarrow \theta=90^\circ$

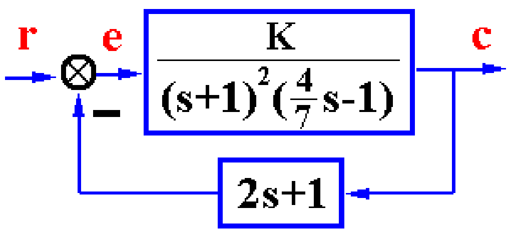
④ 与虚轴交点：$D(s)=4s^3+s^2+(14K-10)s+7(K-1)=0$

$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=-\omega^2+7(K-1)=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-4\omega^3+(14\omega-10)\omega=0\end{cases}$ $\quad\begin{cases}\omega=0\\ K=1\end{cases}$ $\quad\begin{cases}\omega=\sqrt{2}\\ K=9/7\end{cases}$

例1 系统结构图如图所示

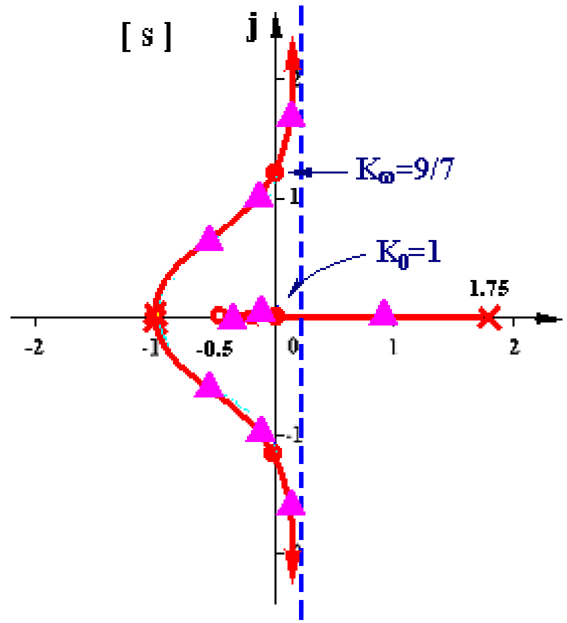
（1）绘制当$K^*= 0\rightarrow\infty$ 时系统的根轨迹；

（2）分析系统稳定性随 K 变化的规律。



解. (2) 分析:

$$K=0 \underbrace{\xrightarrow{h(t)\text{ 单调发散}}}_{\text{不稳定}} K_0=1 \underbrace{\xrightarrow{h(t)\text{ 收敛}}}_{\text{稳定}} K_\omega=\frac{9}{7} \underbrace{\xrightarrow{h(t)\text{ 振荡发散}}}_{\text{不稳定}} \infty$$



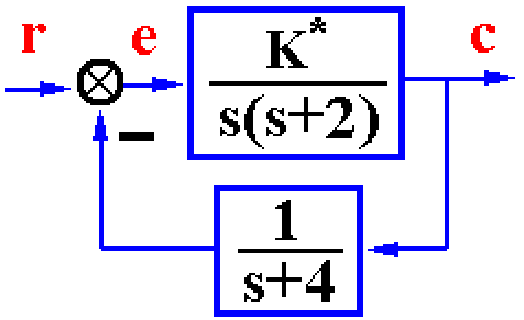
根轨迹法分析控制系统性能

例2 已知系统结构图，$K^*= 0\to\infty$，绘制系统根轨迹并确定：

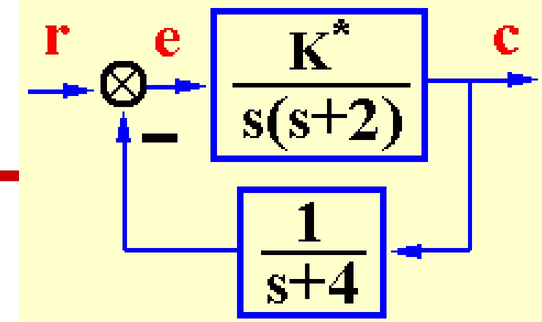
(1) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围；

(2) 复极点对应 $\xi=0.5$ ($\theta=60^\circ$) 时的 K 值及闭环极点位置；

(3) 当 $\lambda_3=-5$ 时，$\lambda_{1,2}=?$ 相应 K=?

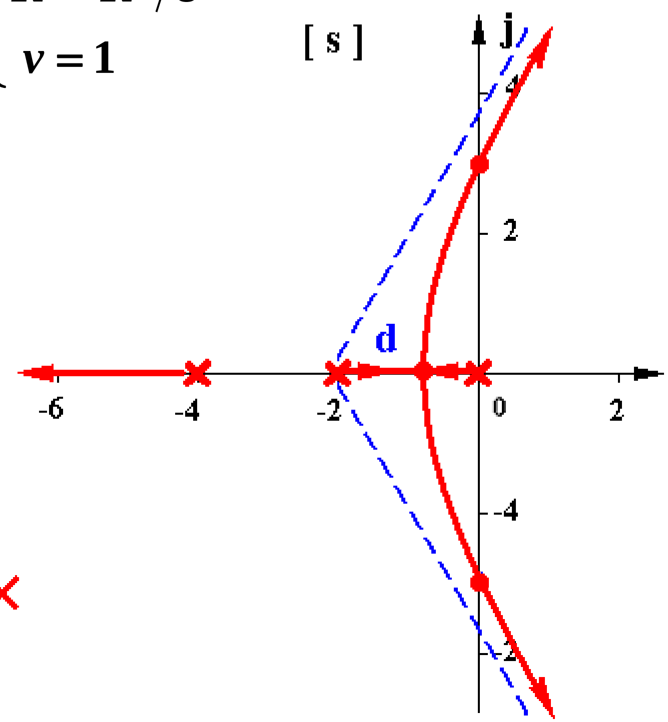


分离点 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$ 渐近线 $\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_i}{n-m}$ $\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$



(1) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围；

解. 绘制系统根轨迹 $G(s)=\frac{K^*}{s(s+2)(s+4)}$ $\begin{cases}K=K^*/8\\ v=1\end{cases}$



① 实轴上的根轨迹：(-∞,-4]，[-2,0]

② 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=(-2-4)/3=-2\\ \varphi_a=\pm 60°,180°\end{cases}$

③ 分离点：$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+2}+\frac{1}{d+4}=0$

整理得：$3d^2+12d+8=0$

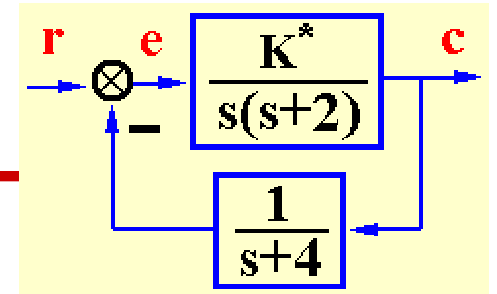
解根：$d_1=-0.845$; ✓ $d_2=-3.155$ ✗

$K_d^*=|d||d+2||d+4| \overset{d=-0.845}{=} 3.08$

④ 虚轴交点：$D(s)=s(s+2)(s+4)+K^*=s^3+6s^2+8s+K^*=0$

$\begin{cases}\mathrm{Im}[D(j\omega)]=-\omega^3+8\omega=0\\ \mathrm{Re}[D(j\omega)]=-6\omega^2+K^*=0\end{cases}$ $\begin{cases}\omega=\sqrt{8}=2.828\\ K_\omega^*=48\end{cases}$

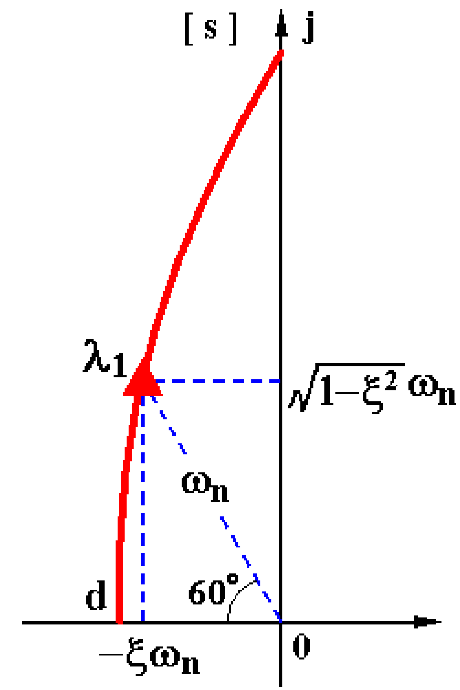
$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+2)(s+4)}$$



(1) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围

依题，对应 $0<\xi<1$ 有：
$$\begin{cases} K_d^*=3.08<K^*<48=K_\omega^* \\ \dfrac{3.08}{8}<K=\dfrac{K^*}{8}<\dfrac{48}{8}=6 \end{cases}$$

(2) 复极点对应 $\xi=0.5$ ($\theta=60^\circ$) 时的 K 值及闭环极点位置



设 $\lambda_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n$

由根之和 $C=0-2-4=-6=-2\xi\omega_n+\lambda_3$

$$\lambda_3=-6+2\xi\omega_n\overset{\xi=0.5}{=}-6+\omega_n$$

应有：
$$D(s)=s(s+2)(s+4)+K^*=\underline{s^3+6s^2+8s+K^*}$$
$$=(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)=(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(s+6-\omega_n)$$
$$=\underline{s^3+6s^2+6\omega_n s+\omega_n^2(6-\omega_n)}$$

比较系数 $\begin{cases} 6\omega_n=8 \\ \omega_n^2(6-\omega_n)=K^* \end{cases}$ 解根：$\begin{cases} \omega_n=4/3 \\ K^*=8.3 \end{cases}$

$$\begin{cases} K=K^*/8=1.0375 \\ \lambda_{1,2}=-0.667\pm j1.1547 \\ \lambda_3=-6+\omega_n=-4.667 \end{cases}$$

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+2)(s+4)}$$

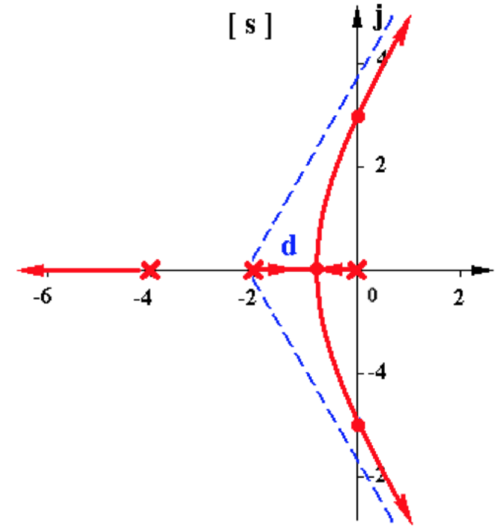
(3) 当 $\lambda_3=-5$ 时，$\lambda_{1,2}=?$ 相应 $K=?$

$$D(s)=s(s+2)(s+4)+K^*=s^3+6s^2+8s+K^*$$
$$=(s+5)(s^2+as+b)$$

$$a=1,\qquad b=3,\qquad K^*=15$$

$$\lambda_{1,2}=-0.5\pm j1.6583$$

$$K=K^*/8=15/8=1.875$$



$$D(s)=s^3+6s^2+8s+K^*$$
$$=(s+5)(s^2+s+3)$$

$$\lambda_{1,2}=-0.5\pm j1.6583$$

$$K^*=15$$
$$K=K^*/8=15/8=1.875$$

$$\begin{array}{r l}
 & \quad s^2\ \ +s\ \ +3 \\
s+5 & \big)\ \overline{s^3+6s^2+8s+K^*} \\
 & \quad \underline{s^3+5s^2} \\
 & \qquad\quad s^2+8s \\
 & \qquad\quad \underline{s^2+5s} \\
 & \qquad\qquad 3s+K^* \\
 & \qquad\qquad \underline{3s+15} \\
K^*=15 \ \Leftarrow & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

分离点 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$

例 4.4.1 负反馈系统的开环传递函数是

$$G(s)H(s)=\frac{k(s+1)}{s(s-3)}$$

试用根轨迹法分析该系统的性能。

绘制根轨迹

根轨迹起始于开环极点，一条终止于零点 $z_1=-1$，另一条趋于渐近线，渐近线为负实轴。

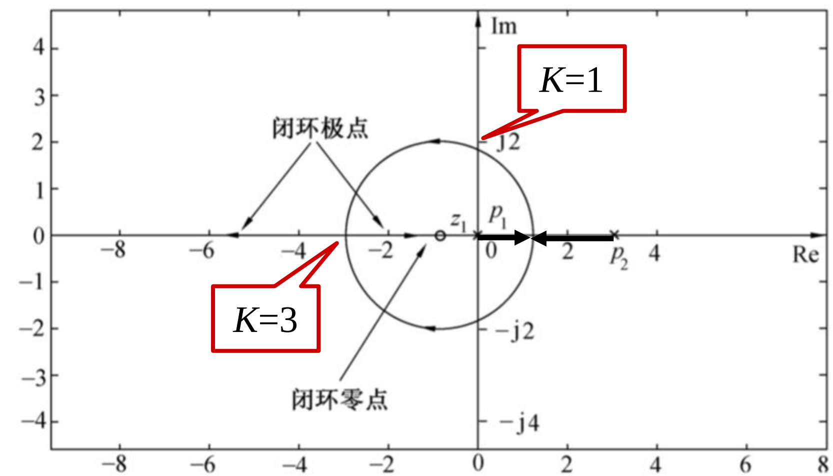
① 实轴上的根轨迹

② 分离点:

$d_1=1$，$d_2=-3$ (开环放大倍数 $K=\frac{k}{3}=3$)

③ 与虚轴交点:

$\omega=\pm\sqrt{3}$， $k=3$ (开环放大倍数 $K=\frac{k}{3}=1$)



系统性能分析:

① 稳定性分析：在开环放大倍数 K<1时不稳定

② 动态过程分析:

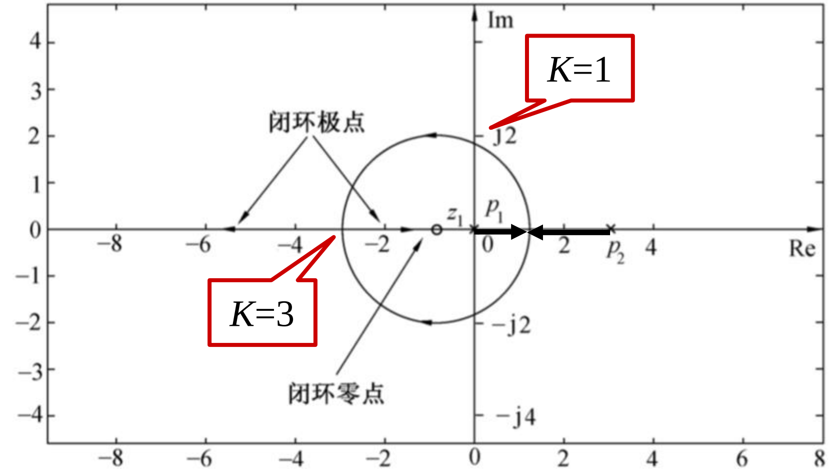
③ 稳态误差分析:

分离点 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$

例 4.4.1 负反馈系统的开环传递函数是

$$G(s)H(s)=\frac{k(s+1)}{s(s-3)}$$

试用根轨迹法分析该系统的性能。



系统性能分析:

① 稳定性分析：在开环放大倍数 $K<1$时不稳定

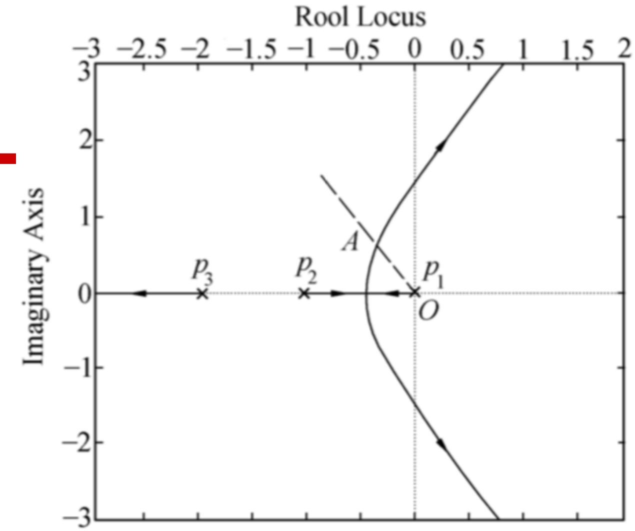
② 动态过程分析:

③ 稳态误差分析:

(2) 动态过程分析:根轨迹实轴上 -3 处汇合分离点对应的 $k=9$,开环放大倍数 $K=3$。当 $1<K<3$ 时,闭环传递函数有一对共轭的复数极点和一闭环极点 $z_1=-1$,系统是稳定的,但动态过程中会出现衰减振荡的分量;当 $k>9$, $K>3$ 时,系统的闭环传递函数有两个负实数极点和一个零点 $z_1=-1$,系统稳定,动态过程中无衰减振荡分量。由于系统的闭环传递函数中存在一个零点 $z=-1$ 和两个极点,所以需用拉氏反变换或用 MATLAB 求取系统的阶跃响应曲线,再求出各项动态性能指标。

(3) 稳态误差分析:该系统的开环传递函数有一个 $p_1=0$ 的极点,所以系统是 Ⅰ 型系统。根据闭环极点的位置可以求出该点对应的 k 与 K 的值,开环放大倍数 $K=K_v$,可以由此计算出稳态误差。

分离点 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$



例 4.4.2 负反馈系统的开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

试用根轨迹法分析该系统的性能。并计算闭环阻尼比为 $\zeta=0.5$ 时的各项性能指标。

绘制根轨迹

系统性能分析：

(1) 稳定性分析：根轨迹与虚轴交点坐标 $\pm\sqrt{2}$ (k=6, K=3)，当 0 < < 3 时闭环稳定。

(2) 动态过程分析：根轨迹在实轴上的分离点 d=-0.423 (k=0.385, K=0.193)

① 当 0<K<0.193 时，闭环系统有3个实数极点，单位阶跃响应单调上升；

② 当 0.193<K<3 时，2个共轭复数极点为主导极点，动态过程呈现欠阻尼二阶系统的特性。随着 K 的增加，超调量增大，调整时间增大。

(3) 当闭环极点位于图4.4.2中 A 点位置时，闭环系统阻尼比 $\zeta=0.5$，由根轨迹求出 A 点的坐标为 $\boldsymbol{A=-0.333+j0.577}$，对应的 $k=1.06$，$K=0.503$。按照第二章给出的方法，求出闭环系统的性能：$\sigma_p=16\%$，$t_s=12$ s，系统是 Ⅰ 型，$K_v=K=0.503$。

(4) 稳态误差分析：该系统是 Ⅰ 型系统，当闭环极点在 A 点时，$K_v=K=0.503$。所以该系统在阶跃函数输入作用下，稳态误差为零；单位斜坡输入作用下稳态误差 $e_{ss}=1/K_v=1/0.503$；在恒加速度输入信号作用下稳态误差为 ∞。

参数根轨迹 — 除 K^* 之外其他参数变化时系统的根轨迹

例1 单位反馈系统: $G(s)=\dfrac{(s+a)/4}{s^2(s+1)}$, a=0→∞ 变化，绘制根轨迹；ξ=1时， Φ(s)=?

解. (1) $D(s)=s^3+s^2+\dfrac{1}{4}s+\dfrac{1}{4}a=0$

构造 "等效开环传递函数" $G^*(s)=\dfrac{a/4}{s^3+s^2+s/4}=\dfrac{a/4}{s(s+0.5)^2}$

① 实轴根轨迹: (-∞,0]

② 渐近线: $\sigma_a=-1/3 \qquad \varphi_a=\pm 60°, 180°$

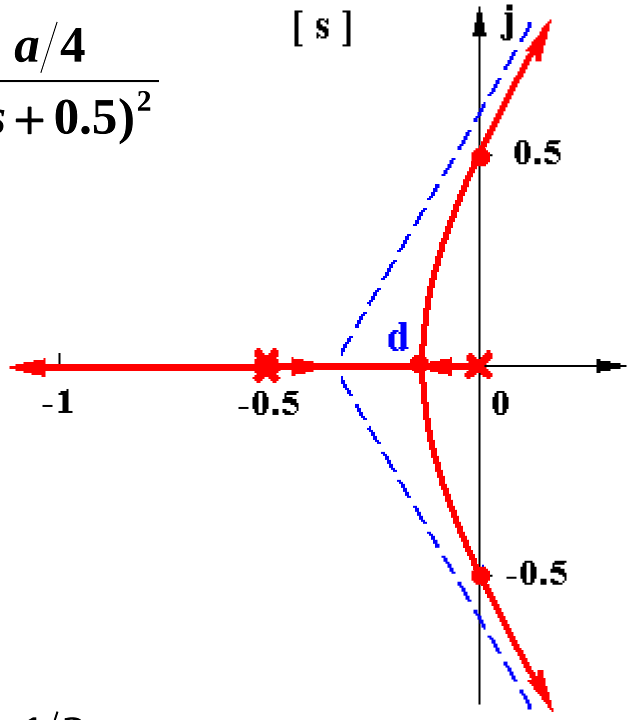
③ 分离点: $\dfrac{1}{d}+\dfrac{2}{d+0.5}=0$

整理得: $3d+0.5=0 \qquad \Rightarrow d=-1/6$

分离点处a的值: $a_d=4|d||d+0.5|^2=2/27$

④ 与虚轴交点: $D(s)=s^3+s^2+s/4+a/4=0$

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=-\omega^2+a/4=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-\omega^3+\omega/4=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\omega=1/2\\ a=1\end{cases}$$

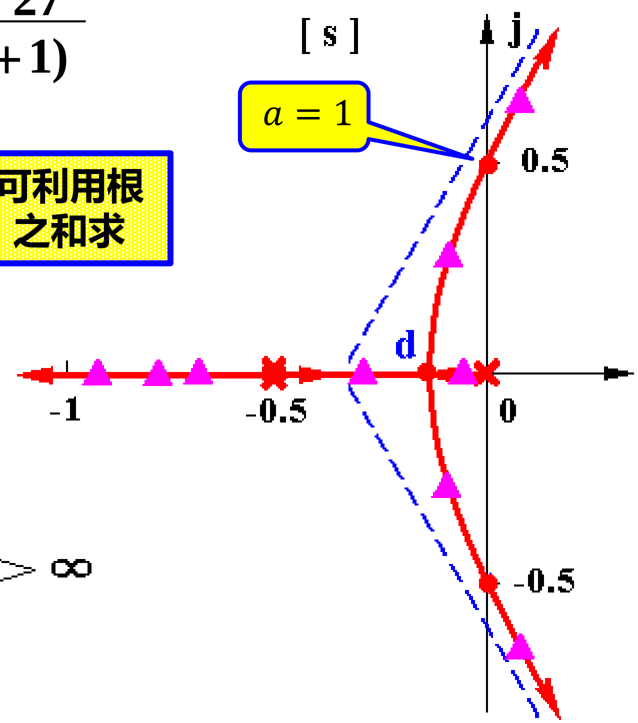


$$G(s)=\frac{(s+a)/4}{s^2(s+1)}$$

等效传函仅用来绘制根轨迹

解. (2) $\xi=1$ 时，对应于分离点 d， $a_d=2/27$， $\Phi(s)=?$

$$G^*(s)=\frac{a/4}{s(s+0.5)^2} \qquad G(s)=\frac{\frac{1}{4}(s+a)}{s^2(s+1)} \overset{a=2/27}{=} \frac{\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}{s^2(s+1)}$$



$$\Phi(s)=\frac{\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}{s^2(s+1)+\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}=\frac{\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}{(s+\frac{1}{6})^2(s+\frac{2}{3})}$$

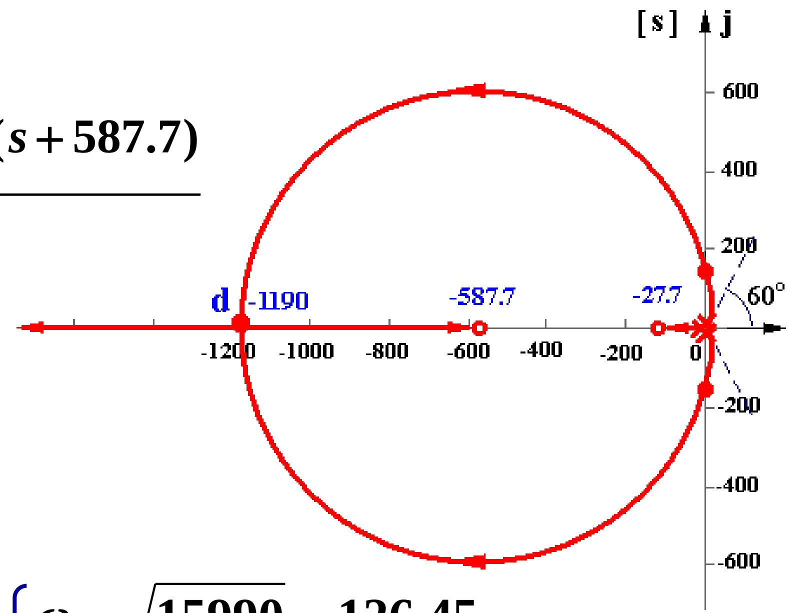
可利用根之和求

	h(t) 单调收敛		h(t) 振荡收敛		h(t) 振荡发散	
	$a=0$ ⟹	$a_d=\frac{2}{27}$	⟹	$a_\omega=1$	⟹	∞
动态性能	$\sigma\%=0$, t_s ↓		$\sigma\%$ ↑ , t_s ↑			
稳定性	稳定				不稳定	
稳态误差	$r(t)=\frac{At^2}{2}$	$K=\frac{a}{4}$ ↑，	$e_{ss}=\frac{4A}{a}$ ↓		$e_{ss_{min}}=4A$	

例2 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{615(s+26)}{s^2(Ts+1)}$，$T$=0→∞，绘制根轨迹。

解Ⅰ. $D(s)=Ts^3+s^2+615s+15990=0$

$$G^*(s)=\frac{\frac{1}{T}(s^2+615s+15990)}{s^3}=\frac{\frac{1}{T}(s+27.7)(s+587.7)}{s^3}$$



① 实轴上的根轨迹：(-∞,-587.7]，[-27.7,0]

② 出射角：　$2\times 0-3\theta=(2k+1)\pi$

$\theta=\pm 60°, 180°$

③ 虚轴交点：$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=-\omega^2+15990=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-T\omega^3+615\omega=0\end{cases}$　$\begin{cases}\omega=\sqrt{15990}=126.45\\ T=615/15990=0.0385\end{cases}$

④ 分离点：$\dfrac{3}{d}=\dfrac{1}{d+27.7}+\dfrac{1}{d+587.7}$

整理得：$d^2+1231d+47970=0$

解根：$\begin{cases}d_1=-40.5,\quad d_2=-1190 \\ T_d=\dfrac{|d+27.7||d+587.7|}{|d|^3}=0.00055\end{cases}$ ✓

例2 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{615(s+26)}{s^2(Ts+1)}$，$T$=0→∞，绘制根轨迹。

解II． $D(s)=Ts^3+s^2+615s+15990=0$

$$G_2^*(s)=\frac{Ts^3}{(s+27.7)(s+587.7)(\frac{s}{\infty}+1)}$$

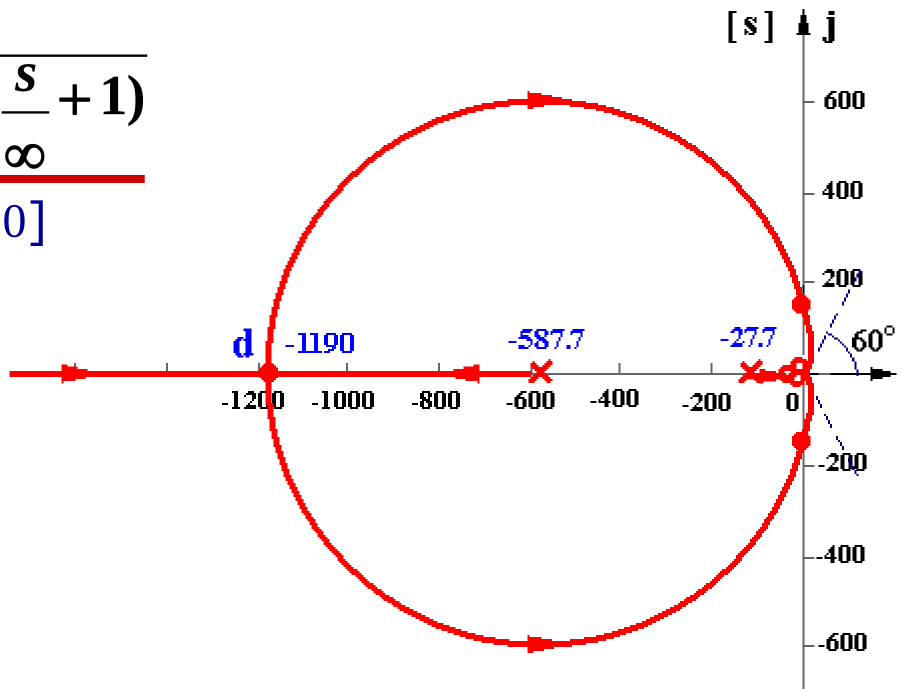
① 实轴根轨迹：(-∞,-587.7]，[-27.7,0]

② 分离点： $d=-1190$

$T_d=0.00055$

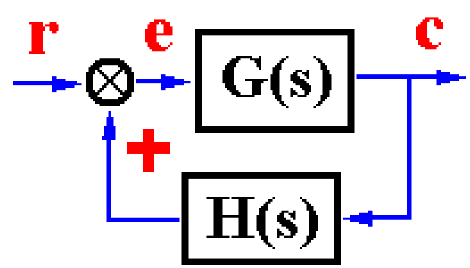
③ 虚轴交点： $\begin{cases}\omega=126.45\\ T=0.0358\end{cases}$

④ 入射角： $\theta=\pm60°,180°$



零度根轨迹 ——— 系统实质上处于正反馈时的根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$



$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$$

根轨迹方程

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=+1$$

$$|G(s)H(s)|=\frac{K^*|s-z_1|\cdots|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|}=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}|(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^{n}|(s-p_j)|}=1$$

— 模值条件

$$\angle G(s)H(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=2k\pi$$

— 相角条件

绘制零度根轨迹的基本法则

法则 1　根轨迹的起点和终点

法则 2　根轨迹的分支数，对称性和连续性

★ 法则 3　实轴上的根轨迹

法则 4　根之和　$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = C \qquad (n-m\geq 2)$

★ 法则 5　渐近线　$\sigma_a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_i}{n-m} \qquad \varphi_a = \dfrac{2k\pi}{n-m}$

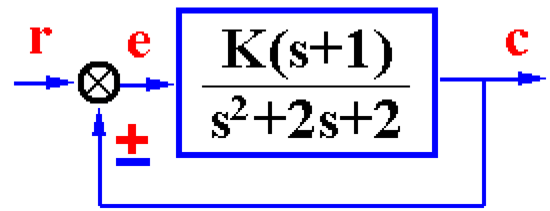
法则 6　分离点　$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^{m}\dfrac{1}{d-z_j}$

法则 7　与虚轴交点　$\mathrm{Re}[D(j\omega)] = \mathrm{Im}[D(j\omega)] = 0$

★ 法则 8　出射角/入射角　$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i) = 2k\pi$

例5 系统结构图如图所示，K*= 0→∞, 变化，

试分别绘制 180°、0°根轨迹。



解. $G(s)=\dfrac{K(s+1)}{s^2+2s+2}=\dfrac{K(s+1)}{(s+1+j)(s+1-j)}$ $\quad\begin{cases}K_k = K/2\\ v=0\end{cases}$

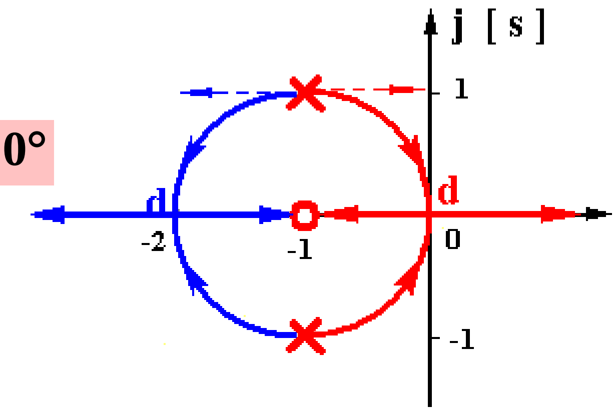
(1) 180° 根轨迹　　　(2) 0° 根轨迹

① 实轴轨迹：(-∞, -1]　　　[-1, ∞)

② 出射角：

$90°-[\theta+90°]=-180°$　　　$90°-[\theta+90°]=0°$

$\Rightarrow \theta=180°$　　　$\Rightarrow \theta=0°$



③ 分离点：$\dfrac{1}{d+1+j}+\dfrac{1}{d+1-j}=\dfrac{2(d+1)}{d^2+2d+2}=\dfrac{1}{d+1}$

整理得：$d^2+2d=d(d+2)=0$

解根：$\begin{cases}d_1=-2\\ K_{d_1}=\dfrac{|d+1+j||d+1-j|}{|d+1|}\overset{d=-2}{=}2\end{cases}$　　　$\begin{cases}d_2=0\\ K_{d_2}=\dfrac{|d+1+j||d+1-j|}{|d+1|}\overset{d=0}{=}2\end{cases}$

例6 系统开环传递函数 $G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{(s+3)^3}$,分别绘制 0°、180°根轨迹。

解. $G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{(s+3)^3}$ $\begin{cases} K=K^*/27 \\ v=0 \end{cases}$

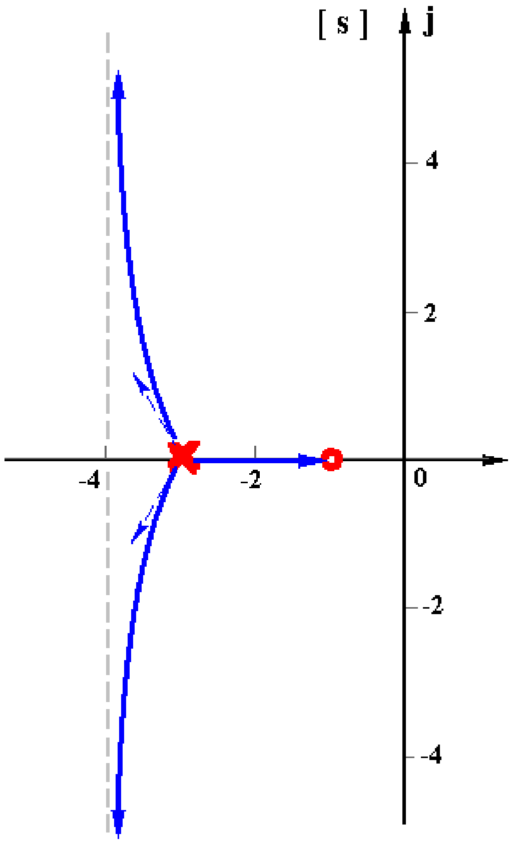
(1) 绘制 180° 根轨迹

① 实轴上的根轨迹：[-3, -1]

② 出射角：$180°-3\theta=(2k+1)\pi$

$$\Rightarrow \theta_1=\frac{2k\pi}{3}=0°,\ \pm 120°$$

③ 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a=\dfrac{-3\times 3+1}{2}=-4 \\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{2}=\pm 90° \end{cases}$



解. $G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{(s+3)^3}$ $\begin{cases} K=K^*/27 \\ v=0 \end{cases}$

(2) 绘制 0° 根轨迹

① 实轴轨迹：$(-\infty,-3]$, $[-1,\ \infty)$

② 出射角： $180°-3\theta=2k\pi$

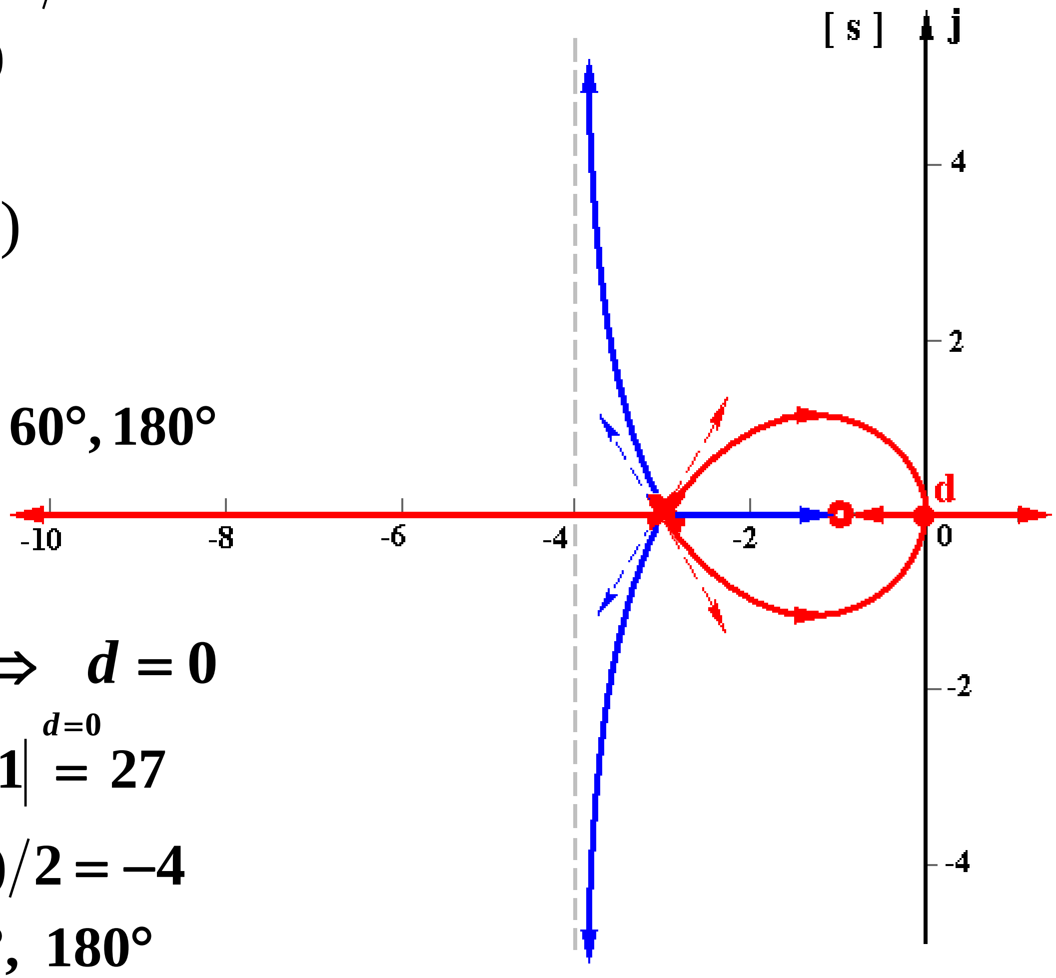
$$\theta=\frac{(2k+1)\pi}{3}=\pm 60°, 180°$$

③ 分离点： $\dfrac{3}{d+3}=\dfrac{1}{d+1}$

整理得： $3d+3=d+3 \ \Rightarrow \ d=0$

$$K_d^*=|d+3|^3/|d+1| \overset{d=0}{=} 27$$

④ 渐近线： $\begin{cases} \sigma_a=(-3\times 3+1)/2=-4 \\ \varphi_a=2k\pi/2=0°,\ 180° \end{cases}$



渐近线 $\sigma_a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_i}{n-m}$ $\varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}$

例7 已知 $G(s) = \dfrac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$，绘根轨迹; 求稳定的K范围。

解. $G(s) = \dfrac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s+2\pm j2\sqrt{3})}$ $\begin{cases} K = K^*/16 \\ v=1 \end{cases}$

① 实轴上的根轨迹: (-∞,-1], [0, 1]

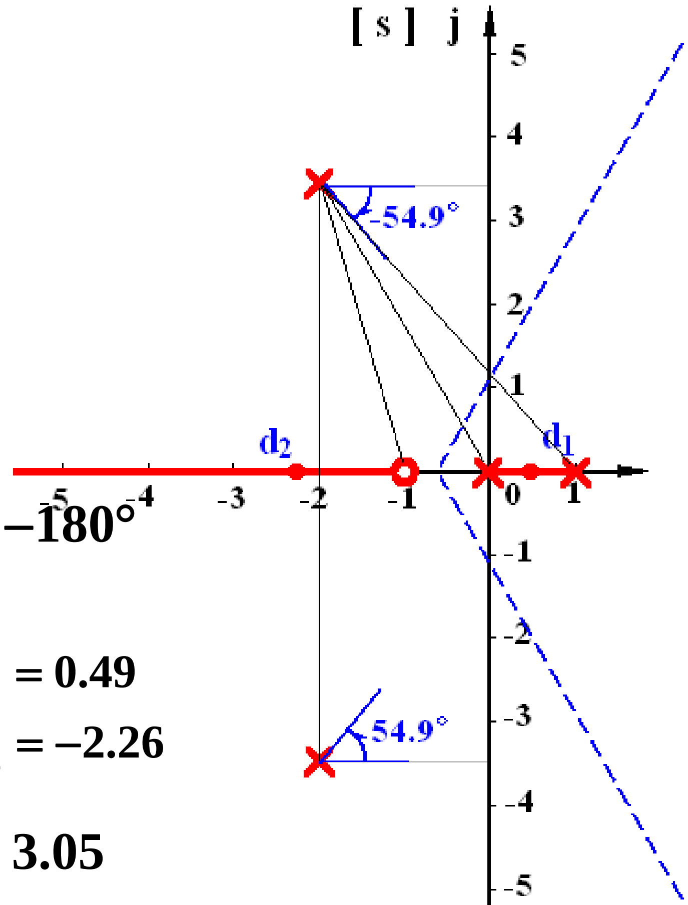
② 渐近线: $\begin{cases} \sigma_a = (1-4+1)/3 = -2/3 \\ \varphi_a = (2k+1)\pi/3 = \pm 60°,\ 180° \end{cases}$

③ 出射角: $106.1° - [\theta_1 + 90° + 120° + 130.9°] = -180°$

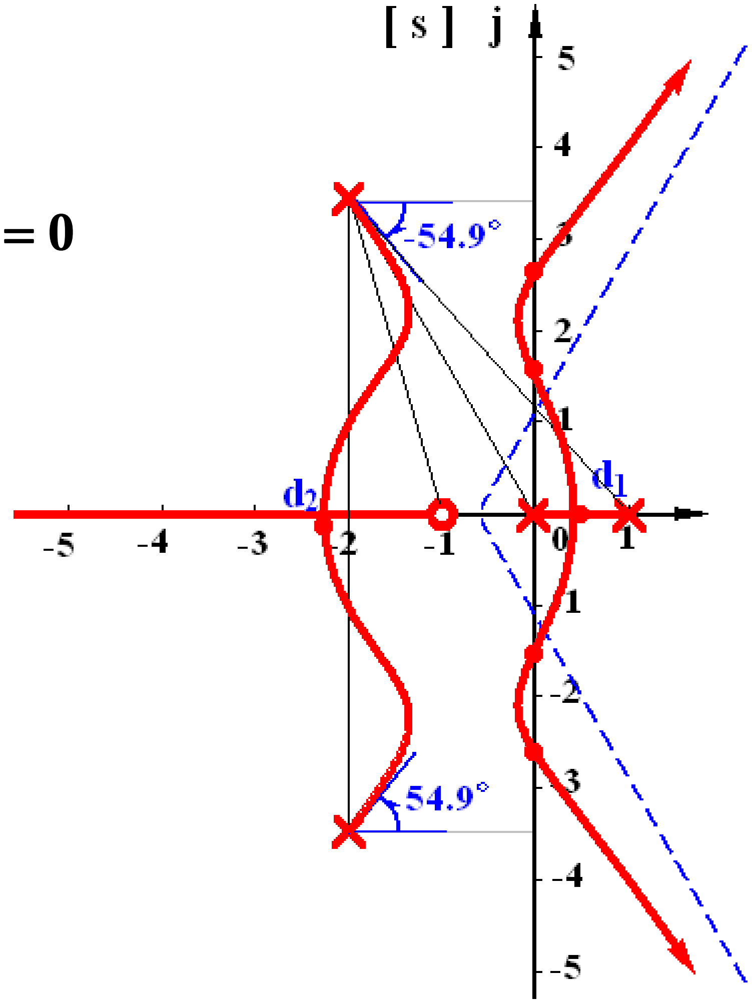
$\Rightarrow \theta_1 = -54.9°$

④ 分离点: $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{d-1} + \dfrac{2(d+2)}{d^2+4d+16} = \dfrac{1}{d+1}$ $\begin{cases} d_1 = 0.49 \\ d_2 = -2.26 \end{cases}$

$$K^*_{d_{1,2}} = \frac{|d||d-1||d^2+4d+16|}{|d+1|} \underset{d=-2.26}{\overset{d=0.49}{=}} \begin{cases} 3.05 \\ 70.6 \end{cases}$$



例7 $G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$ $\begin{cases} K=K^*/16 \\ v=1 \end{cases}$



⑤ 虚轴交点:

$$D(s)=s^4+3s^3+12s^2+(K^*-16)s+K^*=0$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[D(j\omega)]=\omega^4-12\omega^2+K^*=0 \\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-3\omega^3+(K^*-16)\omega=0 \end{cases}$$

$$K^*=3\omega^2+16$$
$$\omega^4-9\omega^2+16=0$$

$$\begin{cases} \omega_1=1.56 \\ \omega_2=2.56 \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1^*=19.7 \\ K_2^*=35.7 \end{cases}$$

稳定的 K^*范围: $19.7<K^*<35.7$

稳定的 K 范围: $1.234<K=\dfrac{K^*}{16}<2.23$