第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据（3.8~3.9）
2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据（6.7）

4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差、动态误差系数（3.10）
2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数（6.8.3）

4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则
2. 根轨迹法分析控制系统性能
3. 特殊根轨迹

4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念
2. Lyapunov第一法（间接法）
3. Lyapunov第二法（直接法）
4. 线性定常系统的Lyapunov稳定性分析

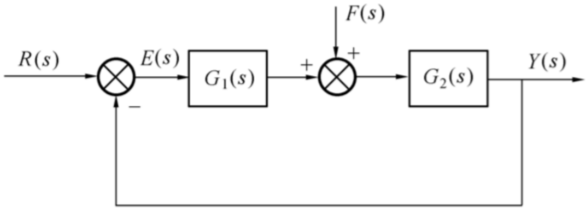
线性系统的稳态误差

稳态误差是系统的稳态性能指标，
是对系统控制精度的度量。

对稳定的系统研究稳态误差才有意义，
所以计算稳态误差以系统稳定为前提。

此处只讨论系统的原理性误差，
不考虑由于非线性因素引起的误差。

阶跃输入作用下
没有原理性误差的系统成为“无差系统”，
有原理性稳态误差的系统称为“有差系统”。



稳态误差（两种）：
　由给定输入引起的稳态误差称为给定稳态误差；
　由扰动输入引起的稳态误差称为扰动稳态误差。
　当线性系统既受到给定输入作用同时又受到扰动作用时，它的稳态误差是上述两项误差的代数和。

控制系统的稳态误差

1. 误差与稳态误差

（1）误差定义：按输入端定义误差；按输出端定义误差

（2）稳态误差：静态误差；动态误差

2. 计算稳态误差的一般方法

（1）判定系统的稳定性

（2）求误差传递函数

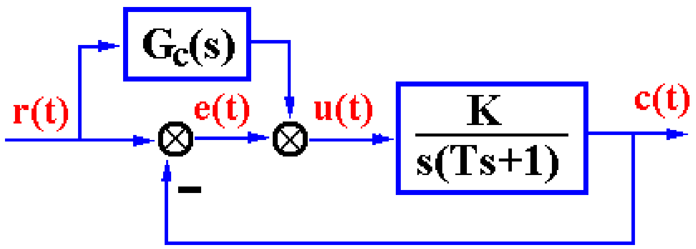
（3）用终值定理求稳态误差

3. 给定输入下的稳态误差（静态误差系数法）

（1）静态误差系数Kp，Kv，Ka

（2）计算误差方法

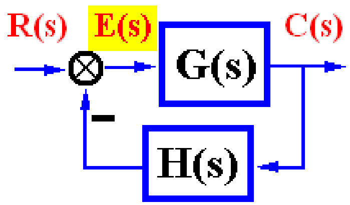
（3）适用条件
- 1）系统稳定
- 2）按输入端定义误差
- 3）r(t)作用，且r(t)无其他前馈通道

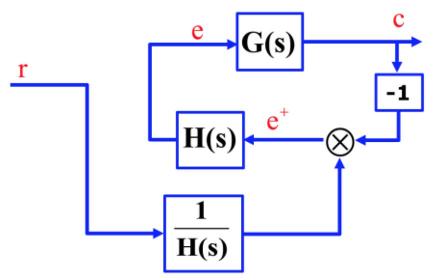


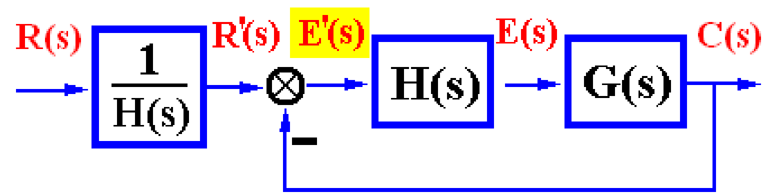
4. 干扰作用引起的稳态误差

误差及稳态误差

(1) 线性控制系统的稳态误差　① 误差和稳态误差定义







按输入端定义的误差

$$E(s)=R(s)-H(s)C(s)$$

给定—反馈

按输出端定义的误差

$$E'(s)=\frac{R(s)}{H(s)}-C(s)$$

希望的输出—实际输出

$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

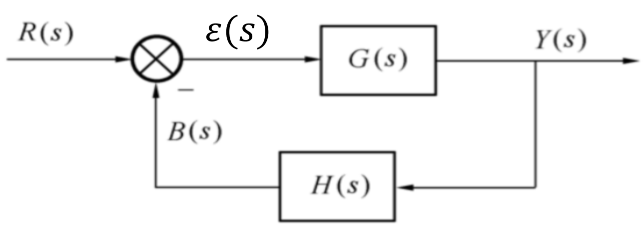
对于单位反馈系统：

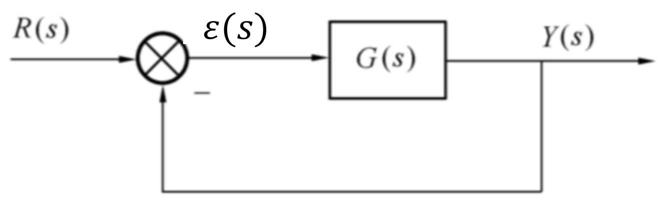
$$E(s)=E'(s)=\frac{1}{1+G(s)}R(s)$$

稳态误差
- 静态误差：$e_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=e(\infty)$
- 动态误差：误差中的稳态分量 $e_s(t)$

误差及稳态误差

(1) 线性控制系统的稳态误差　① 误差和稳态误差定义





期望输出信号 $y_r(t)$ 与实际输出信号 $y(t)$ 之差定义为**误差**：　$e(t) \triangleq y_r(t) - y(t)$

希望的输出—实际输出

对于负反馈系统，$Y_r(s) = \frac{1}{H(s)} B_r(s) = \frac{1}{H(s)} R(s)$

$$E(s) = Y_r(s) - Y(s) = \frac{1}{H(s)}\big(R(s) - B(s)\big) = \frac{1}{H(s)}\varepsilon(s) = \frac{1}{H(s)}\Phi_\varepsilon(s)R(s) = \frac{1}{H(s)}\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

对于单位反馈系统，$H(s) = 1$，$\varepsilon(s) = E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)$　　$e(t) = L^{-1}[E(s)]$

稳态误差：误差信号的稳态值，记为 $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)$

$$\boxed{\Phi_\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}}$$

稳态误差的定义

$e(t)=L^{-1}[E(s)]$

当 $t\to\infty$ 时，系统误差称为稳态误差，用 e_{ss} 表示，即

对于稳定系统，有：

$$e_{ss}=\begin{cases}\lim\limits_{s\to 0} sE(s)\\ \lim\limits_{t\to\infty} e(t)\end{cases}$$

注意：终值定理应用的条件是 $\lim\limits_{t\to\infty} e(t)$ 存在，这相当于 $sE(s)$ 的极点都在 S 平面的左半平面（包括坐标原点）。

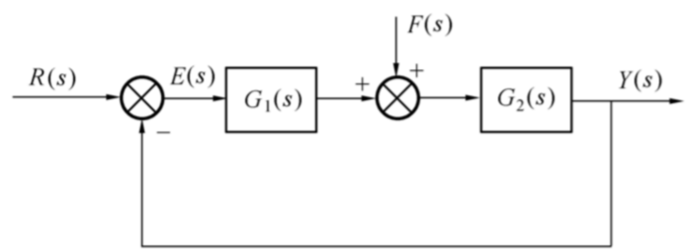
② 计算稳态误差的一般方法

（1）判定系统的稳定性

（2）求误差传递函数 $\Phi_e(s)=\dfrac{E(s)}{R(s)}$，$\Phi_{ef}(s)=\dfrac{E(s)}{F(s)}$

（3）用终值定理求稳态误差

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s[\Phi_e(s)R(s)+\Phi_{ef}(s)F(s)]$$



注意：终值定理应用的条件是 $\lim_{t\to\infty} e(t)$ 存在，这相当于$sE(s)$的极点都在S平面的左半平面（包括坐标原点）。

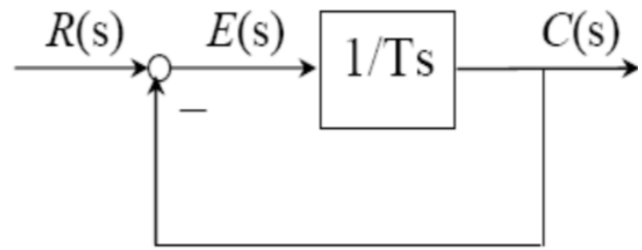
$$e_{ss} = \begin{cases} \lim_{s\to 0} sE(s) \\ \lim_{t\to\infty} e(t) \end{cases}$$

例 某单位反馈系统开环传递函数为G(s)=1/Ts，T>0

输入信号 r(t)=1(t)，t，$t^2/2$ 以及 r(t)=sin ω t（t>0），求系统稳态误差e_{ss}

解:

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{Ts}{Ts+1}$$



1) $R(s) = \dfrac{1}{s}$ $\qquad E(s) = \dfrac{Ts}{Ts+1} \cdot \dfrac{1}{s} = \dfrac{T}{Ts+1}$

满足终值定理的应用条件， $e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \dfrac{sT}{Ts+1} = 0$

2) $R(s) = \dfrac{1}{s^2}$ $\qquad E(s) = \dfrac{Ts}{Ts+1} \cdot \dfrac{1}{s^2} = \dfrac{T}{s(Ts+1)}$

满足终值定理的应用条件， $e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \dfrac{T}{Ts+1} = T$

注意：终值定理应用的条件是 $\lim_{t\to\infty} e(t)$ 存在，这相当于$sE(s)$的极点都在S平面的左半平面（包括坐标原点）。

$$e_{ss}=\begin{cases}\lim_{s\to0} sE(s)\\ \lim_{t\to\infty} e(t)\end{cases}$$

3） $R(s)=\dfrac{1}{s^3}$ $\quad E(s)=\dfrac{T}{s^2(Ts+1)}$

$$e_{ss}=\lim_{s\to0} sE(s)=\lim_{s\to0}\frac{T}{s(Ts+1)}=\infty$$

$$e(t)=L^{-1}[E(s)]=L^{-1}[\frac{T}{s^2}-\frac{T^2}{s}+\frac{T^2}{s+1/T}]=T(t-T)+T^2e^{-\frac{t}{T}}$$

$$e_{ss}(t)=T(t-T)$$

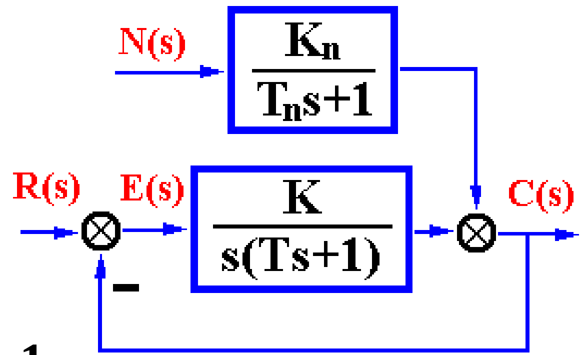
4） $R(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $\quad E(s)=\dfrac{Ts}{Ts+1}\cdot\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

不满足终值定理的应用条件，不能求终值。

$$e(t)=-\frac{T\omega}{T^2\omega^2+1}e^{-\frac{t}{T}}+\frac{T\omega}{T^2\omega^2+1}(\cos\omega t+T\omega\sin\omega t)$$

$$e_{ss}(t)=\frac{T\omega}{T^2\omega^2+1}(\cos\omega t+T\omega\sin\omega t)$$

例 系统结构图如图所示，已知 r(t) = n(t) = t，求系统的稳态误差。T、K>0



解.

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+\dfrac{K}{s(Ts+1)}}=\frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}$$

$$D(s)=Ts^2+s+K=0$$

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0} s\,\Phi_e(s)\,R(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{1}{K}$$

$$\Phi_{en}(s)=\frac{E(s)}{N(s)}=\frac{-\dfrac{K_n}{T_ns+1}}{1+\dfrac{K}{s(Ts+1)}}=\frac{-K_ns(Ts+1)}{(T_ns+1)[s(Ts+1)+K]}$$

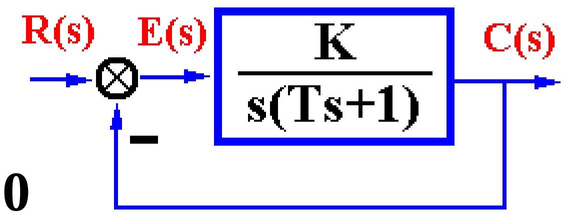
$$e_{ssn}=\lim_{s\to 0} s\,\Phi_{en}(s)\,N(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{-K_ns(Ts+1)}{(T_ns+1)[s(Ts+1)+K]}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{-K_n}{K}$$

$$e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssn}=\frac{1-K_n}{K}$$

e_{ss} 与系统自身的结构参数有关；与外作用的类型有关（控制量，扰动量及作用点）

误差及稳态误差

例 系统结构图如图所示，求 r(t)分别为A·1(t), At, At²/2时系统的稳态误差。



解.
$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}$$

$$r(t)=A\cdot 1(t) \qquad e_{ss1}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}\cdot\frac{A}{s}=0$$

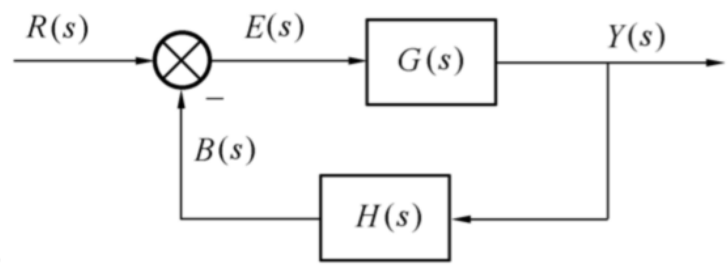
$$r(t)=A\cdot t \qquad e_{ss2}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}\cdot\frac{A}{s^2}=\frac{A}{K}$$

$$r(t)=\frac{A}{2}\cdot t^2 \qquad e_{ss3}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}\cdot\frac{A}{s^3}=\infty$$

影响 e_{ss} 的因素：
- 系统自身的结构参数
- 外作用的类型（控制量，扰动量及作用点）
- 外作用的形式（阶跃、斜坡或加速度等）

控制系统的型别

系统开环传递函数记为：



$$G(s)H(s)=\frac{K}{s^{\nu}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m_1}(\tau_i s+1)\prod_{k=1}^{m_2}(\tau_k^2 s^2+2\zeta_k\tau_k s+1)}{\prod_{j=1}^{n_1}(T_j s+1)\prod_{l=1}^{n_2}(T_l^2 s^2+2\zeta_l T_l s+1)}$$

K—— 开环放大倍数； $K=\lim_{s\to 0} s^{\nu}G(s)H(s)$

v—— 开环传递函数中串联积分环节的个数。

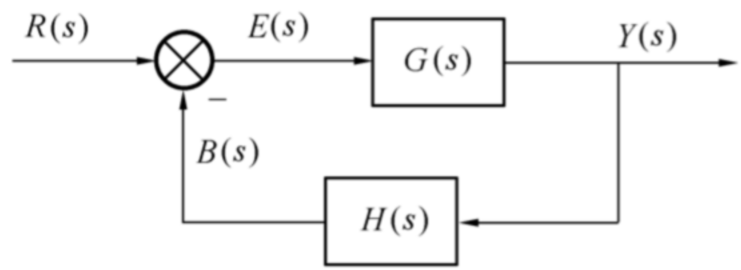
定义：开环传递函数包含积分环节的个数 v 称为**系统的型别**（类型）

$v=0$ ——零型系统； $v=1$—— I 型系统； $v=2$ ——II 型系统

★影响稳态误差的因素有：
- ① 输入信号$r(t)$的形式
- ② 开环放大倍数K
- ③ 开环传递函数中积分环节的个数v

给定输入下的稳态误差（静态误差系数法）

1. 阶跃输入作用下的稳态误差



设 $r(t) = A$, 则 $R(s) = A/s$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{A}{1+\boxed{\lim_{s\to 0}G(s)H(s)}} = \frac{A}{1+\boxed{\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{v}}}} = \frac{A}{1+\boxed{K_p}}$$

定义 K_p 为静态位置误差系数

$$K_p = \begin{cases} K & v = 0 \\ \infty & v \geqslant 1 \end{cases}$$ 0 型系统

$$e_{ss} = \begin{cases} \dfrac{A}{1+K_p} & v = 0 \\ 0 & v \geqslant 1 \end{cases}$$ 0 型系统

结论：

0 型系统能跟踪阶跃输入但有位置误差；

I 型及以上系统能完全跟踪阶跃输入.

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^{\nu}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m_1}(\tau_i s+1)\prod_{k=1}^{m_2}(\tau_k^2 s^2+2\zeta_k\tau_k s+1)}{\prod_{j=1}^{n_1}(T_j s+1)\prod_{l=1}^{n_2}(T_l^2 s^2+2\zeta_l T_l s+1)}$$

给定输入下的稳态误差

2. 斜坡信号输入下的稳态误差

设 $r(t) = At$, 则 $R(s) = A/s^2$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{A}{s+sG(s)H(s)} = \frac{A}{\boxed{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)H(s)}} = \frac{A}{\boxed{K_v}}$$

定义 K_v 为静态速度误差系数

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) = \lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{v-1}} = \begin{cases} 0 & v = 0 \\ K & v = 1 \\ \infty & v = 2 \end{cases}$$

$$e_{ss} = \begin{cases} \infty & v = 0 \\ \dfrac{A}{K_v} & v = 1 \\ 0 & v = 2 \end{cases}$$

0型系统不能跟踪斜坡输入;

Ⅰ型系统能跟踪斜坡输入，但有稳态误差;

Ⅱ型及以上系统，能准确跟踪斜坡输入信号，无稳态误差

给定输入下的稳态误差

3. 加速度信号输入下的稳态误差

设 $r(t) = At^2/2$，则 $R(s) = A/s^3$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{A}{s^2+s^2G(s)H(s)} = \frac{A}{\boxed{\lim_{s\to 0}s^2G(s)H(s)}} = \frac{A}{\boxed{K_a}}$$

定义 K_a 为静态加速度误差系数

$$K_a = \lim_{s\to 0}s^2G(s)H(s) = \lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{v-2}} = \begin{cases} 0 & v = 0 \\ 0 & v = 1 \\ K & v = 2 \end{cases}$$

$$e_{ss} = \begin{cases} \infty & v = 0 \\ \infty & v = 1 \\ \dfrac{A}{K_a} & v = 2 \end{cases}$$

0，I 型系统不能跟踪加速度输入；

II 型系统能跟踪加速度输入，但有稳态误差；

III 型及以上系统，能准确跟踪加速度输入，无稳态误差；

一个表格四句话

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s^{\nu}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m_1}(\tau_i s+1)\prod_{k=1}^{m_2}(\tau_k^2 s^2+2\zeta_k\tau_k s+1)}{\prod_{j=1}^{n_1}(T_j s+1)\prod_{l=1}^{n_2}(T_l^2 s^2+2\zeta_l T_l s+1)}$$

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
(V)	$K_p=\lim\limits_{s\to 0}GH=\lim\limits_{s\to 0}\frac{K}{s^{\nu}}$	$K_v=\lim\limits_{s\to 0}sGH=\lim\limits_{s\to 0}\frac{K}{s^{\nu-1}}$	$K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2GH=\lim\limits_{s\to 0}\frac{K}{s^{\nu-2}}$	r=A·1(t) $e_{ss}=\frac{A}{1+K_p}$	r=A·t $e_{ss}=\frac{A}{K_v}$	r= A·$t^2/2$ $e_{ss}=\frac{A}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{A}{1+K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$

◈由表可知：

1．0 型系统对单位阶跃输入信号的稳态误差为常数。

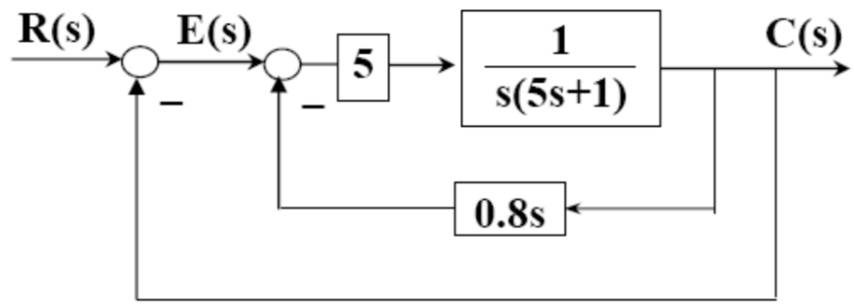
2．I 型系统单位阶跃输入信号的稳态误差为零。

3．II 型系统对阶跃输入信号和斜坡信号的稳态误差为零。

4．系统的型别越高，跟踪输入信号的能力越强。但型别越高，稳定性越难以保证。

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s^{\nu}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m_1}(\tau_i s+1)\prod_{k=1}^{m_2}(\tau_k^2 s^2+2\zeta_k\tau_k s+1)}{\prod_{j=1}^{n_1}(T_j s+1)\prod_{l=1}^{n_2}(T_l^2 s^2+2\zeta_l T_l s+1)}$$

例　系统如图。计算r(t)=1(t)，t，$t^2/2$时系统稳态误差。



解. 系统稳定，系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

本系统为 I 型系统，$v=1$，$K=1$

其静态误差系数和稳态误差为：

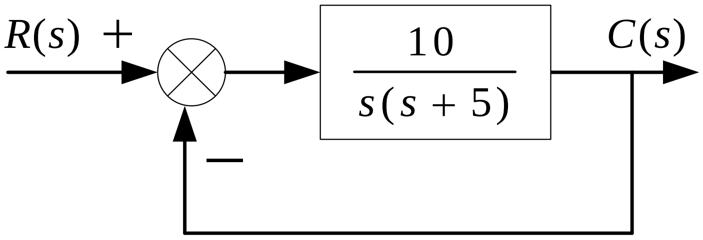
$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)=\infty \qquad e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}=0$$

$$K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)=s\frac{1}{s(s+1)}=1 \qquad e_{ss}=\frac{1}{K_v}=1$$

$$K_a=\lim_{s\to 0}s^2G(s)=s^2\frac{1}{s(s+1)}=0 \qquad e_{ss}=\frac{1}{K_a}=\infty$$

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
(V)	$K_p=\lim_{s\to0}GH=\lim_{s\to0}\frac{K}{s^v}$	$K_v=\lim_{s\to0}sGH=\lim_{s\to0}\frac{K}{s^{v-1}}$	$K_a=\lim_{s\to0}s^2GH=\lim_{s\to0}\frac{K}{s^{v-2}}$	r=A·1(t) $e_{ss}=\frac{A}{1+K_p}$	r=A·t $e_{ss}=\frac{A}{K_v}$	r=A·$t^2/2$ $e_{ss}=\frac{A}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{A}{1+K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$

例 对于如下系统，试求当输入信号 $r(t)$ 分别为 2，$2t$ 和 t^2 时，系统的稳态误差。



解：由劳斯判据判定系统是稳定的。

I 型系统，$K = 2$

在阶跃、斜坡、加速度信号作用下的稳态误差系数和稳态误差分别为

$$K_p = \infty \qquad e_{ss} = \frac{2}{1 + K_p} = 0$$

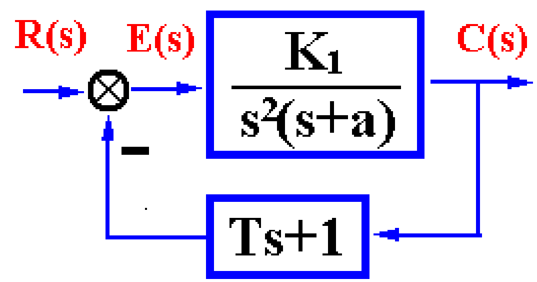
$$K_v = 2 \qquad e_{ss} = \frac{2}{K_v} = 1$$

$$K_a = 0 \qquad e_{ss} = \frac{2}{K_a} = \infty$$

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
(V)	$K_p = \lim_{s\to 0} GH = \lim_{s\to 0}\frac{K}{s^v}$	$K_v = \lim_{s\to 0} sGH = \lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{v-1}}$	$K_a = \lim_{s\to 0} s^2GH = \lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{v-2}}$	$r = A\cdot 1(t)$ $e_{ss} = \frac{A}{1+K_p}$	$r = A\cdot t$ $e_{ss} = \frac{A}{K_v}$	$r = A\cdot t^2/2$ $e_{ss} = \frac{A}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{A}{1+K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$

V	r=A·1(t)	r=A·t	r= A·t²/2
0	$\frac{A}{1+K}$	∞	∞
I	0	$\frac{A}{K}$	∞
II	0	0	$\frac{A}{K}$

例 3　系统结构图如图所示，已知输入 $r(t)=2t+4t^2$，求系统的稳态误差。



解. $G(s)=\dfrac{K_1(Ts+1)}{s^2(s+a)}$　　$\begin{cases} K=K_1/a \\ v=2 \end{cases}$

$$\Phi(s)=\frac{K_1}{s^2(s+a)+K_1(Ts+1)}$$

$$D(s)=s^3+as^2+K_1Ts+K_1=0$$

s^3	1	K_1T		
s^2	a	K_1	$\Rightarrow$	$a>0$
s^1	$\frac{(aT-1)K_1}{a}$	0	$\Rightarrow$	$aT>1$
s^0	K_1		$\Rightarrow$	$K_1>0$

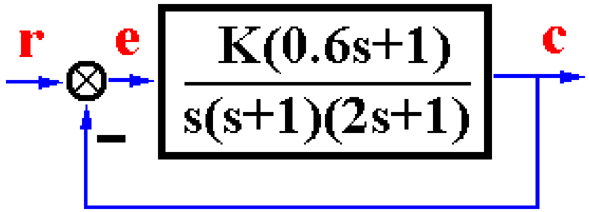
$r_1(t)=2t$　　$e_{ss1}=0$

$r_2(t)=4t^2=8\cdot\frac{1}{2}t^2$　　$e_{ss2}=\dfrac{A}{K}=\dfrac{8a}{K_1}$

$$e_{ss}=e_{ss1}+e_{ss2}=\frac{8a}{K_1}$$

举例

例 系统结构图如图所示，当r(t)=t 时，要求$e_{ss}<0.1$，求K的范围。



解：$G(s)=\dfrac{K(0.6s+1)}{s(s+1)(2s+1)}$ $\qquad \begin{cases} K \\ v=1 \end{cases}$

$r(t)=t \qquad e_{ss}=\dfrac{1}{K}<0.1 \quad \Rightarrow \quad K>10$

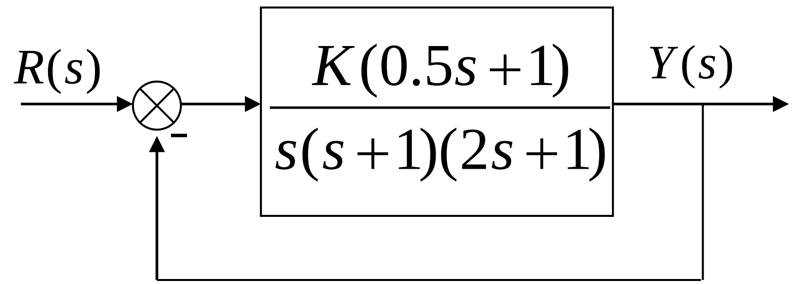
$$D(s)=s(s+1)(2s+1)+K(0.6s+1)=2s^3+3s^2+(1+0.6K)s+K=0$$

Routh

s^3	2	1+0.6K	
s^2	3	K	
s^1	$\dfrac{3(1+0.6K)-2K}{3}$	0	$\longrightarrow$ 3-0.2K>0 $\longrightarrow$ K<15
s^0	K		$\longrightarrow$ K>0

10 < K <15

例　系统方块图如图所示，当输入为单位斜坡函数时，如何调整K值才能使稳态误差小于0.1?



解：　先判断稳定性

$$2s^3+3s^2+(1+0.5K)s+K=0$$

由劳斯判据知稳定的条件为：$0<K<6$

系统的误差传递函数为

$$\Phi_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}=\frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1)+K(0.5s+1)}$$

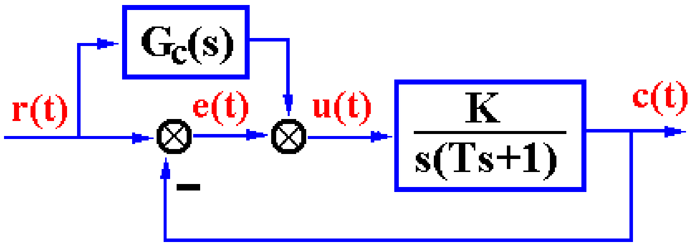
$$R(s)=\frac{1}{s^2}\qquad E(s)=\frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1)+K(0.5s+1)}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}s\frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1)+K(0.5s+1)}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{1}{K}$$

为使稳态误差小于**0.1**，需满足e_{ss}=**1/K<0.1**，即**K>10**。

由稳定的条件知，当K>10时，系统不稳定，故无法通过选择K来满足e_{ss}<0.1的要求。

例 4 系统结构图如图所示，已知输入 $r(t) = At$，求 $G_c(s)$，使稳态误差为零。

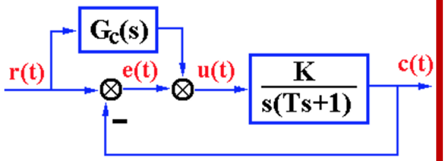


3. 给定输入下的稳态误差（静态误差系数法）

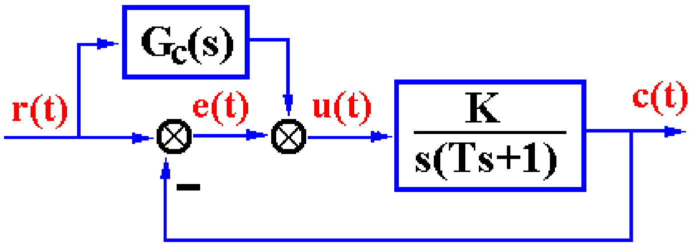
（1）静态误差系数Kp，Kv，Ka

（2）计算误差方法

（3）适用条件
- 1）系统稳定
- 2）按输入端定义误差
- 3）r(t)作用，且r(t)无其他前馈通道



例 4 系统结构图如图所示，已知输入 $r(t)=At$，求 $G_c(s)$，使稳态误差为零。



解. $G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$ $\qquad \begin{cases} K=K \\ v=1 \end{cases}$

$$D(s)=Ts^2+s+K=0$$

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1-\dfrac{KG_c(s)}{s(Ts+1)}}{1+\dfrac{K}{s(Ts+1)}}=\frac{s(Ts+1)-KG_c(s)}{s(Ts+1)+K}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\Phi_e(s)\frac{A}{s^2}=\lim_{s\to 0}\frac{A\left[sT+1-\dfrac{K}{s}G_c(s)\right]}{s(Ts+1)+K}=\frac{A\left[1-\dfrac{K}{s}G_c(s)\right]}{K}=0$$

$$G_c(s)=\frac{s}{K}$$

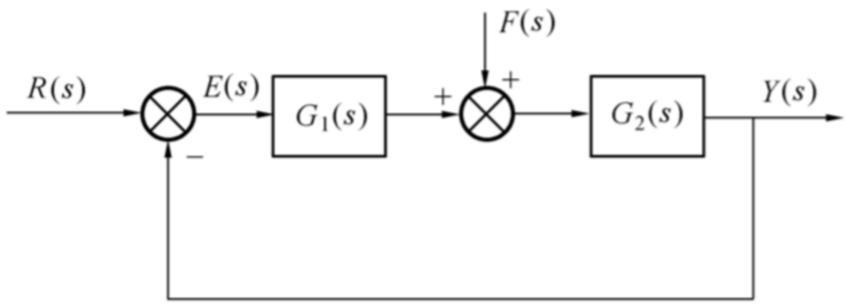
按前馈补偿的复合控制方案可以有效提高系统的稳态精度

干扰信号作用下的稳态误差

◆系统在扰动作用下的稳态误差的大小，反映了系统的抗扰动能力。

◆由于给定输入与扰动信号作用在系统的不同位置上，即使系统对某一给定输入的稳态误差为零，对同一形式的扰动作用的稳态误差未必是零。

◆同一系统面对同一形式的扰动作用，由于扰动的作用点不同，其稳态误差也不一定相同。



令 $R(s)=0$，由干扰引起的偏差信号 $E_f(s)$ 为

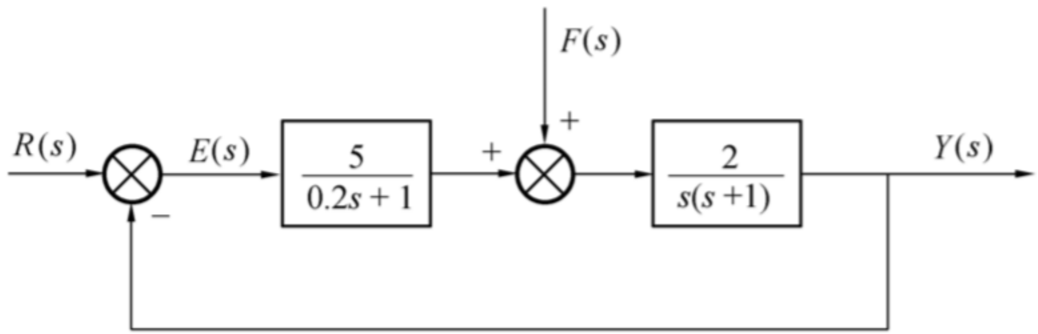
$$E_f(s)=\Phi_{ef}(s)\cdot F(s)=\frac{-G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot F(s)$$

对于不同形式的干扰信号 $f(t)$，如单位阶跃、单位斜坡等，可以用终值定理求出 $e_f(t)$ 的稳态值

$$e_{ssf}=\lim_{t\to\infty}e_f(t)=\lim_{s\to 0}sE_f(s)=\lim_{s\to 0}s\Phi_{ef}(s)\cdot F(s)$$

干扰信号作用下的稳态误差

例 3.10.1 控制系统如图3.10.5所示，同时作用有 $r(t)=t, f(t)=1(t)$。试计算该系统的稳态误差。



V	r=A·1(t)	r=A·t	r=A·t²/2
0	$\frac{A}{1+K}$	∞	∞
I	0	$\frac{A}{K}$	∞
II	0	0	$\frac{A}{K}$

解 该系统是 Ⅰ 型系统，由特征方程判断该系统是稳定的。首先，求输入信号 $r(t)=1(t)$ 作用下的稳态误差(令 $f(t)=0$)

$$e_{ssr}=\frac{1}{K_v}=\frac{1}{10}=0.1$$

然后，求干扰信号作用下引起的稳态误差(令 $r(t)=0$)

$$e_{ssf}=\lim_{s\to 0} s\Phi_{ef}(s)\cdot F(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{-2(0.02s+1)}{s(s+1)(0.02s+1)+10}\cdot\frac{1}{s}=-0.2$$

在输入信号和干扰信号同时作用下的稳态误差

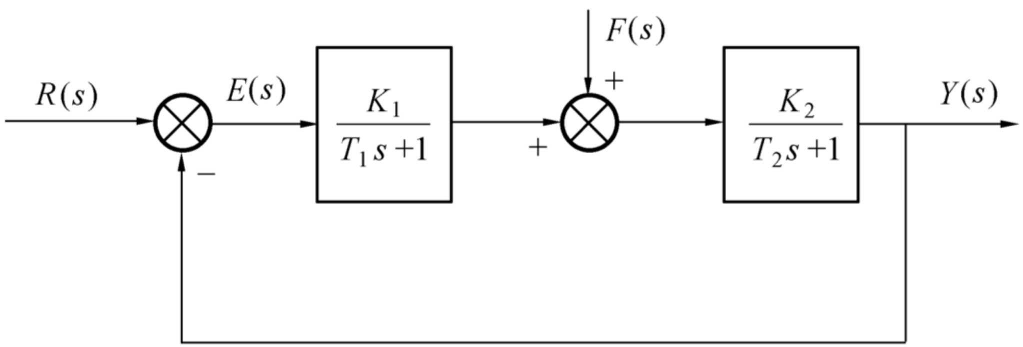
$$e_{ss}=e_{ssf}+e_{ssr}=-0.1$$

干扰信号作用下的稳态误差

例 3.10.2 对于图 3.10.6 所示系统，试求

(1) 当 $r(t)=0, f(t)=1(t)$ 时，系统的稳态误差 e_{ss}。

(2) 当 $r(t)=1(t), f(t)=1(t)$ 时，系统的稳态误差 e_{ss}。



解 图 3.10.6 所示系统是 0 型系统。可以证明，只要 $K_1>0, K_2>0, T_1>0, T_2>0$，闭环系统即是稳定的。

(1) 求干扰引起的稳态误差

$$\Phi_{ef}(s)=\frac{E(s)}{F(s)}=\frac{-K_2(T_1s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}$$

按终值定理，有

$$e_{ssf}=\lim_{s\to 0}s\Phi_{ef}(s)\cdot F(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{-K_2(T_1s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{-K_2}{1+K_1K_2}$$

例 3.10.2 对于图 3.10.6 所示系统，试求

(1) 当 $r(t)=0, f(t)=1(t)$ 时，系统的稳态误差 e_{ss}。

(2) 当 $r(t)=1(t), f(t)=1(t)$ 时，系统的稳态误差 e_{ss}。

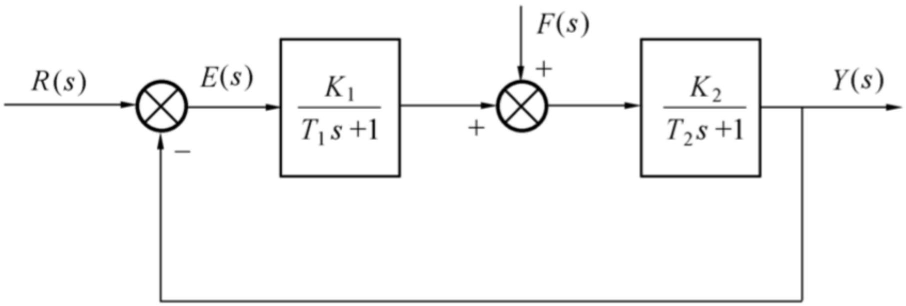
$$e_{ssf}=\frac{-K_2}{1+K_1K_2}$$

(2) 求输入信号作用下的稳态误差

$$e_{ssr}=\frac{1}{1+K_p}=\frac{1}{1+K_1K_2}$$

总的稳态误差为二者相加

$$e_{ss}=e_{ssf}+e_{ssr}=\frac{1-K_2}{1+K_1K_2}$$



干扰信号作用下的稳态误差

例 3.10.3 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

若输入信号 $r(t)=a\times 1(t)+bt$(a、b 为正的常数),欲使系统的稳态误差 $e_{ss}<\varepsilon_0$(正的常数),求系统各参数应满足的条件。

解 首先应满足系统稳定的条件。系统的特征方程是

$$D(s)=T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s+K=0$$

列出劳斯行列表

$$\begin{array}{lcc}
s^3 & T_1T_2 & 1 \\
s^2 & T_1+T_2 & K \\
s^1 & \dfrac{T_1+T_2-T_1T_2K}{T_1+T_2} & 0 \\
s^0 & K &
\end{array}$$

系统稳定的条件是

$$T_1>0 \quad T_2>0 \quad 0<K<\frac{T_1+T_2}{T_1T_2} \qquad\qquad e_{ss}=\frac{b}{k_v}=\frac{b}{K}$$

按题意 $e_{ss}<\varepsilon_0$,所以 $K>b/\varepsilon_0$。综合以上各项条件,系统参数应满足的条件是

$$T_1>0 \quad T_2>0 \quad \frac{b}{\varepsilon_0}<K<\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$$

动态误差系数法

用静态误差系数法只能求出误差的稳态值 $e_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty}e(t)$ ；而稳态误差随时间变化的规律无法获得。

用动态误差系数法可以研究误差中的稳态分量 $e_s(t)$ 随时间的变换规律。

（1）动态误差系数法解决问题的思路

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\Phi_e(0)+\frac{1}{1!}\Phi_e'(0)s+\frac{1}{2!}\Phi_e''(0)s^2+\cdots+\frac{1}{i!}\Phi_e^{(i)}(0)s^i+\cdots$$

$$C_i=\frac{1}{i!}\Phi_e^{(i)}(0)\qquad i=0,1,2,\cdots$$

$$=C_0+C_1s+C_2s^2+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}C_is^i$$

$$E(s)=\Phi_e(s).R(s)$$

$$=C_0R(s)+C_1sR(s)+C_2s^2R(s)+\cdots+C_is^iR(s)+\cdots$$

$$e_s(t)=C_0r(t)+C_1\dot{r}(t)+C_2\ddot{r}(t)+\cdots+C_ir^{(i)}(t)+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}C_ir^{(i)}(t)$$

例 3.10.4 控制系统的闭环偏差传递函数为

$$\Phi_e(s) = \frac{0.02s^3 + 1.02s^2 + s}{0.02s^3 + 1.02s^2 + s + 10}$$

求动态误差系数。

解 首先将 $\Phi_e(s)$ 的分子与分母分别按 s 的升幂排列，然后做多项式除法

$$\begin{array}{r|l} & 0.1s + 0.92s^2 + \cdots \\ \hline 10 + s + 1.02s^2 + 0.02s^3 & s + 1.02s^2 + 0.02s^3 \\ & \underline{s + 0.1s^2 + 0.102s^3 + 0.002s^4} \\ & 0.92s^2 - 0.082s^3 - 0.002s^4 \end{array}$$

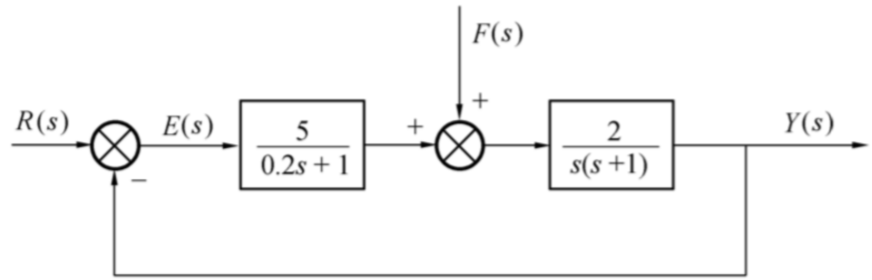
商式与式(3.10.20)对比，可得到各动态误差系数

$$c_0 = 0 \qquad c_1 = 0.1 \qquad c_2 = 0.092$$

$$\boxed{\Phi_e(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_l s^l + \cdots}$$

$$e(t) = c_0 r(t) + c_1 r^{(1)}(t) + c_2 r^{(2)}(t) + \cdots + c_l r^{(l)}(t) + \cdots$$

例 3.10.5 单位反馈系统如图 3.10.5 所示,用动态误差系数法求 $r(t)=t, f(t)=1(t)$ 时的稳态误差。



解 首先求输入信号作用的稳态误差,即

$$\Phi_e(s) = \frac{s + 1.02s^2 + 0.02s^3}{10 + s + 1.02s^2 + 0.02s^3}$$

在例 3.10.4 中已求出 $c_0 = 0, c_1 = 0.1, c_2 = 0.092$。根据题意 $r(t) = t, \dot{r}(t) = 1, \ddot{r}(t) = 0$,由式(3.10.23)得出 $r(t)$ 作用下的稳态误差为

$$e_{ssr}(t) = 0.1$$

然后求干扰作用下的稳态误差,即

$$\Phi_{ef}(s) = \frac{E(s)}{F(s)} = \frac{-2(0.02s+1)}{s(0.02s+1)(s+1)+10} = \frac{-2-0.4s}{10 + s + 1.02s^2 + 0.02s^3}$$

用多项式除法求得 $c_{0f} = -0.2, c_{1f} = -0.02$,根据题意,$f(t) = 1(t), \dot{f}(t) = 0$,所以 $f(t)$ 作用下的稳态误差

$$e_{ssf}(t) = -0.2$$

二者叠加,得

$$e_{ss}(t) = e_{ssr}(t) + e_{ssf}(t) = -0.1$$

$$\boxed{e(t) = c_0 r(t) + c_1 r^{(1)}(t) + c_2 r^{(2)}(t) + \cdots + c_l r^{(l)}(t) + \cdots}$$

例 3.10.6 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{100}{s(0.1s + 1)}$$

求当输入信号 $r(t) = 1(t) + 2t + t^2$ 时的稳态误差 $e_{ss}(t)$

解 $$\Phi_e(s) = \frac{s(0.1 + 1)}{s(0.1s + 1) + 100} = \frac{s + 0.1s^2}{100 + s + 0.1s^2}$$

用多项式除法可求得

$$c_0 = 0 \qquad c_1 = 0.1 \qquad c_2 = 0.0009$$

$r(t)$ 的各阶导数分别是

$$r(t) = 1 + 2t + t^2$$
$$\dot{r}(t) = 2 + 2t$$
$$\ddot{r}(t) = 2$$
$$\dddot{r}(t) = 0$$

最后求得

$$e_{ss}(t) = c_0 r(t) + c_1 \dot{r}(t) + c_2 \ddot{r}(t) = 0.01(2 + 2t) + 0.0009 \times 2 = 0.0218 + 0.02t$$

课程回顾

1. 误差与稳态误差

（1）误差定义：

（2）稳态误差：静态误差；动态误差

2. 计算稳态误差的一般方法

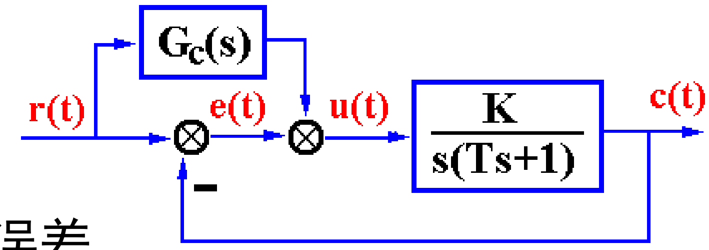
（1）判定系统的稳定性

（2）求误差传递函数

（3）用终值定理求稳态误差

3. 给定输入下的稳态误差（静态误差系数法）

（1）静态误差系数Kp，Kv，Ka



（2）计算误差方法

（3）适用条件
- 1）系统稳定
- 2）按输入端定义误差
- 3）r(t)作用，且r(t)无其他前馈通道

4. 干扰作用引起的稳态误差

5. 动态误差系数法

$$\Phi_e(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_l s^l + \cdots$$

$$E(s) = \Phi_e(s).R(s) = C_0 R(s) + C_1 sR(s) + C_2 s^2 R(s) + \cdots + C_i s^i R(s) + \cdots$$

$$e(t) = c_0 r(t) + c_1 r^{(1)}(t) + c_2 r^{(2)}(t) + \cdots + c_l r^{(l)}(t) + \cdots$$

第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据（3.8~3.9）
2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据（6.7）

4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差、动态误差系数（3.10）
2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数（6.8.3）

4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则（4.1~4.3）
2. 根轨迹法分析控制系统性能（4.4）
3. 特殊根轨迹（4.6）

4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念
2. Lyapunov第一法（间接法）
3. Lyapunov第二法（直接法）
4. 线性定常系统的Lyapunov稳定性分析

线性离散系统稳态误差

只有稳定的系统，才有稳态误差。

对于稳定的线性离散系统，当过渡过程结束以后，系统误差信号的脉冲序列就是离散系统的稳态误差$\boldsymbol{e}_{ss}^{*}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t}_{s}$ 。

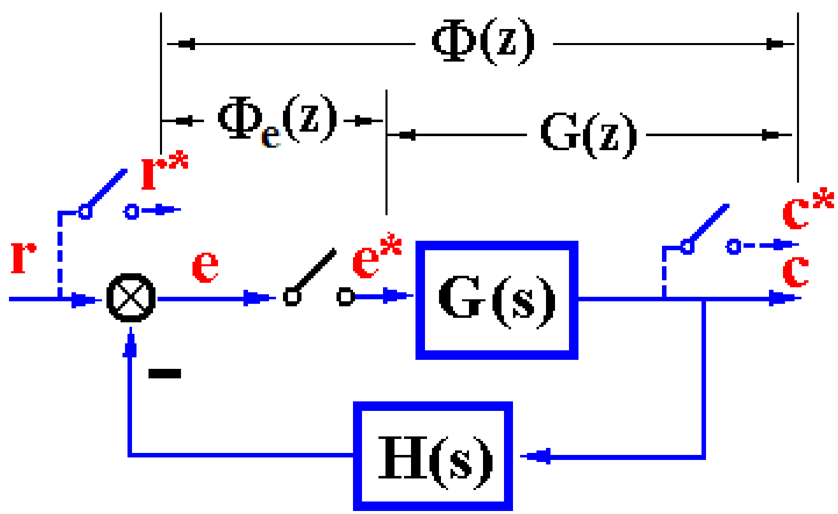
当时间$\boldsymbol{t} \to \infty$时，可求得线性离散系统在采样点上的稳态误差终值$\boldsymbol{e}_{ss}^{*}(\infty)$。

线性离散系统稳态误差计算

一般方法（利用终值定理）

设 $$\begin{cases} GH(z) = Z[G(s)H(s)] = \dfrac{1}{(z-1)^v} GH_0(z) \\ \lim\limits_{z\to 1} GH_0(z) = K \end{cases}$$

v：型别（类型）



计算稳态误差的步骤

（1）判定稳定性

（2）求误差脉冲传递函数

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+GH(z)}$$

（3）用终值定理求 $e_{ss}^*(\infty)$

$$e_{ss}^*(\infty) = \lim_{t\to\infty} e^*(t) = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{1+GH(z)}R(z)$$

静态误差系数法—— r(t) 作用时稳态误差的计算

(适用于系统稳定, $r(t)$作用, 对误差采样的线性定常离散系统)

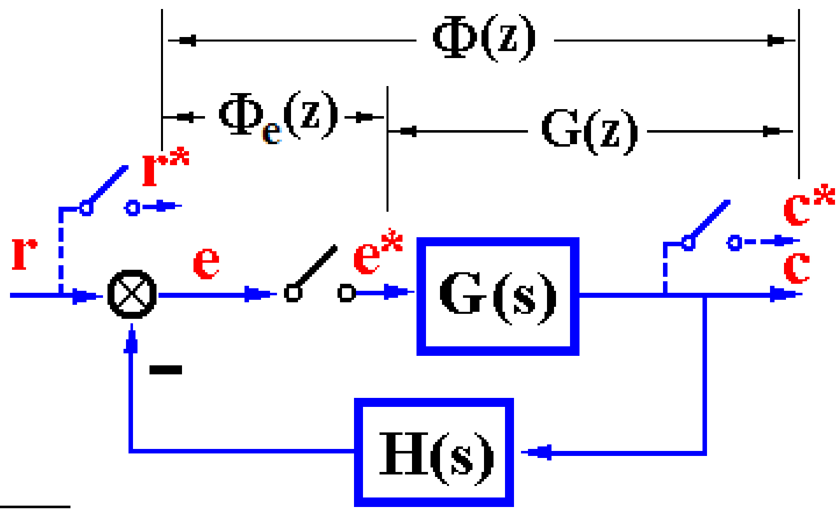
设
$$\begin{cases} GH(z) = Z[G(s)H(s)] = \dfrac{1}{(z-1)^v} GH_0(z) \\ \lim\limits_{z\to 1} GH_0(z) = K \end{cases}$$

v: 型别 (类型)

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+GH(z)}$$

$$e_{ss}^*(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\,\Phi_e(z)\,R(z)$$

$$= \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot R(z)\cdot \frac{1}{1+GH(z)}$$



$$e_{ss}^*(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)\,\Phi_e(z)\,R(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\cdot R(z)\cdot\frac{1}{1+GH(z)}$$

$$r(t)=A\cdot1(t)\quad e_{ss}^*(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)\cdot\frac{Az}{z-1}\cdot\frac{1}{1+GH(z)}=\frac{A}{1+\lim\limits_{z\to1}GH(z)}=\frac{A}{1+K_p}$$

静态位置误差系数 $\boxed{K_p=\lim\limits_{z\to1}GH(z)}$

$$r(t)=A\cdot t\quad e_{ss}^*(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)\cdot\frac{ATz}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1+GH(z)}=\frac{AT}{\lim\limits_{z\to1}(z-1)GH(z)}=\frac{AT}{K_v}$$

静态速度误差系数 $\boxed{K_v=\lim\limits_{z\to1}(z-1)GH(z)}$

$$r(t)=\frac{A}{2}t^2\quad e_{ss}^*(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)\cdot\frac{AT^2z(z+1)}{2(z-1)^3}\cdot\frac{1}{1+GH(z)}=\frac{AT^2}{\lim\limits_{z\to1}(z-1)^2GH(z)}=\frac{AT^2}{K_a}$$

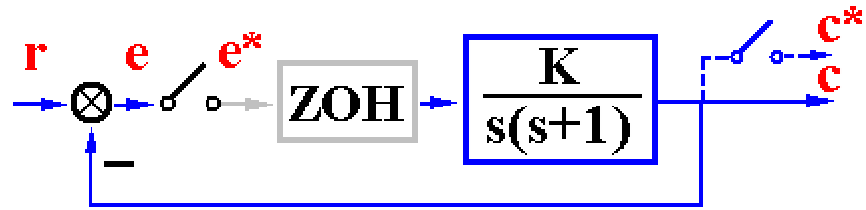
静态加速度误差系数 $\boxed{K_a=\lim\limits_{z\to1}(z-1)^2GH(z)}$

$$\begin{cases} GH(z) = \dfrac{1}{(z-1)^v} GH_0(z) \\ \lim\limits_{z\to 1} GH_0(z) = K \end{cases}$$

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
V	$K_p=\lim GH(z)$	$K_v=\lim(z-1)GH(z)$	$K_a=\lim(z-1)^2GH(z)$	$r=A\cdot 1(t)$ $e_{ss}^*(\infty)=\dfrac{A}{1+k_p}$	$r=A\cdot t$ $e_{ss}^*(\infty)=\dfrac{AT}{k_v}$	$r=A\cdot t^2/2$ $e_{ss}^*(\infty)=\dfrac{AT^2}{k_a}$
0	K_p	0	0	$\dfrac{A}{1+K_p}$	∞	∞
I	∞	K_v	0	0	$\dfrac{AT}{K_v}$	∞
II	∞	∞	K_a	0	0	$\dfrac{AT^2}{K_a}$

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
V	$K_p=\lim GH(z)$	$K_v=\lim(z-1)GH(z)$	$K_a=\lim(z-1)^2GH(z)$	$r=A\cdot 1(t)$ $e_{ss}^*(\infty)=\frac{A}{1+k_p}$	$r=A\cdot t$ $e_{ss}^*(\infty)=\frac{AT}{k_v}$	$r=A\cdot t^2/2$ $e_{ss}^*(\infty)=\frac{AT^2}{k_a}$
0	K_p	0	0	$\frac{A}{1+K_p}$	∞	∞
I	∞	K_v	0	0	$\frac{AT}{K_v}$	∞
II	∞	∞	K_a	0	0	$\frac{AT^2}{K_a}$

例1 稳定离散系统的结构图如图所示，已知r(t)=2t，试讨论有或没有ZOH 时的$e_{ss}^*(\infty)$。



解.

无ZOH时

$$G(z)=Z\left[\frac{K}{s(s+1)}\right]=\frac{K(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}\qquad v=1$$

$$K_v=\lim_{z\to1}(z-1)G(z)=\lim_{z\to1}\frac{K(1-e^{-T})z}{(z-e^{-T})}=K$$

$$\boxed{e_{ss}^*(\infty)=\frac{AT}{k_v}=\frac{2T}{K}}$$

— 与T有关

有ZOH时

$$G(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{K}{s(s+1)}\right]=K\frac{z-1}{z}\cdot Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]$$

$$=K\frac{(T-1+e^{-T})z+(1-e^{-T}-Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}\qquad v=1$$

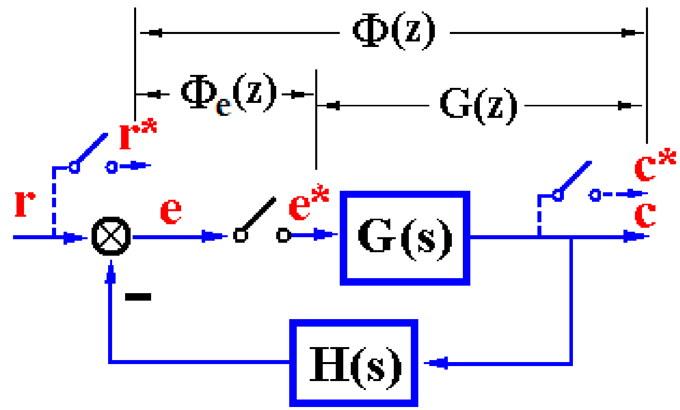
$$K_v=\lim_{z\to1}(z-1)G(z)=\lim_{z\to1}\frac{K(T-Te^{-T})}{z-e^{-T}}=KT$$

$$\boxed{e_{ss}^*(\infty)=\frac{AT}{k_v}=\frac{2}{K}}$$

— 与T无关

动态误差系数法

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+GH(z)}$$



$$\Phi_e^*(s) = \Phi_e^*(z)\Big|_{z=e^{Ts}}$$

$$= \Phi_e(0) + \frac{1}{1!}\Phi_e'(0)s + \frac{1}{2!}\Phi_e''(0)s^2 + \cdots + \frac{1}{m!}\Phi_e^{(m)}(0)s^m + \cdots$$

$$c_m = \frac{1}{m!}\frac{\mathrm{d}^m\Phi_e^*(s)}{\mathrm{d}s^m}\Bigg|_{s=0} \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

（动态误差系数）

$$\Phi_e^*(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots c_m s^m + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i s^i$$

$$E^*(s) = \Phi_e^*(s)R(s) = c_0 R(s) + c_1 s R(s) + \cdots + c_m s^m R(s) + \cdots$$

$$e_{ss}^*(kT) = c_0 r(kT) + c_1\dot{r}(kT) + c_2\ddot{r}(kT) + \cdots + c_m r^{(m)}(kT) + \cdots$$

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
V	$K_p=\lim GH(z)$	$K_v=\lim(z-1)GH(z)$	$K_a=\lim(z-1)^2GH(z)$	$r=A\cdot 1(t)$ $e_{ss}^*(\infty)=\frac{A}{1+k_p}$	$r=A\cdot t$ $e_{ss}^*(\infty)=\frac{AT}{k_v}$	$r=A\cdot t^2/2$ $e_{ss}^*(\infty)=\frac{AT^2}{k_a}$
0	K_p	0	0	$\frac{A}{1+K_p}$	∞	∞
I	∞	K_v	0	0	$\frac{AT}{K_v}$	∞
II	∞	∞	K_a	0	0	$\frac{AT^2}{K_a}$

例 6.8.2 单位负反馈离散系统的开环脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{e^{-T}z+(1-2e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

采样周期 $T=1$ s,闭环系统输入信号为 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$。

(1) 用稳态误差系数求终值稳态误差 $e_{ss}^*(\infty)$;

(2) 用动态误差系数求 $t=20$ s 时的稳态误差。

解 (1) $G(z)=\left.\frac{e^{-T}z+1-2e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})}\right|_{T=1}=\frac{0.368z+0.264}{z^2-1.368z+0.368}$

$$K_p=\lim_{z\to1}\frac{0.368z+0.264}{z^2-1.368z+0.368}=\infty$$

$$K_v=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{0.368z+0.264}{z^2-1.368z+0.368}=1$$

$$K_a=\lim_{z\to1}(z-1)^2\frac{0.368z+0.264}{z^2-1.368z+0.368}=0$$

当 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ 时,稳态误差终值为

$$e_{ss}^*(\infty)=\frac{1}{K_a}=\infty$$

$$c_m = \frac{1}{m!}\frac{\mathrm{d}^m \Phi_e^*(s)}{\mathrm{d}s^m}\Big|_{s=0} \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\Phi_e^*(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots c_m s^m + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i s^i$$

$$E^*(s) = \Phi_e^*(s)R(s) = c_0 R(s) + c_1 sR(s) + \cdots + c_m s^m R(s) + \cdots$$

$$e_{ss}^*(kT) = c_0 r(kT) + c_1 \dot{r}(kT) + c_2 \ddot{r}(kT) + \cdots + c_m r^{(m)}(kT) + \cdots$$

(2) 系统闭环误差脉冲传递函数

$$\Phi_e(z) = \frac{1}{1 + G(z)} = \frac{z^2 - 1.368z + 0.368}{z^2 - z + 0.632}$$

因为 $t > 0$ 时，$\dot{r}(t) = t$，$\ddot{r}(t) = 1$，$\dddot{r}(t) = 0$，所以动态误差系数只需求出 c_0，c_1 和 c_2。

$$\Phi_e^*(s) = \Phi_e(z)\Big|_{z=e^{Ts}} = \frac{e^{2s} - 1.368e^s + 0.368}{e^{2s} - e^s + 0.632}$$

$$c_0 = \Phi_e^*(0) = 0$$

$$c_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Phi_e^*(s)\Big|_{s=0} = 1$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\Phi_e^*(s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

系统稳态误差在采样时刻的值为

$$e_{ss}(kT) = c_0 r(kT) + c_1 \dot{r}(kT) + c_2 \ddot{r}(kT) = kT + 0.5$$

由此可见，系统的稳态误差是随时间线性增长的，当 $t \to \infty$ 时，稳态误差终值为无穷大；当 $t = 20$ s 时，系统的稳态误差为 $e_{ss}^* = 20.5$。

离散系统的稳态误差

（1）一般方法

$G(z) \rightarrow \Phi_e(z)$

$G(z) \rightarrow \Phi_e(z)$ 判定稳定性

$e_{ss}^*(\infty) = \lim_{z \to 1}(z-1)R(z)\Phi_e(z)$

（2）静态误差系数法

$e(\infty) = \lim_{z \to 1}(z-1)R(z)\Phi_e(z)$

$G(z) \rightarrow \Phi_e(z)$ 判定稳定性

计算 $e_{ss}^*(\infty)$

（3）动态误差系数法