Laboratório 4: Análise de Sistemas de Controle via Resposta em Frequência

Universidade Federal de Itajubá

26 de outubro de 2021

Disciplina: ECA612 – Laboratório de Sistemas de Controle

UNIFEI – IESTI

Prof. Caio Fernandes de Paula

1 Objetivo

A finalidade deste laboratório é proceder um estudo sobre a análise de sistemas de controle pelo método de Resposta em Frequência utilizando-se os comandos e facilidades do OCTAVE.

É importante que o pacote de controle do OCTAVE deve ser carregado, o que é feito através de:

```
>> pkg load control
```

2 Diagramas de Bode e Critério de Estabilidade de Bode

O critério de estabilidade de Bode, embora seja restrito a sistemas de fase mínima (sem zeros no SPD e/ou atraso de transporte) e também sem pólos no SPD, é um método bastante importante e utilizado para analisar estabilidade de sistemas em malha aberta. Considere o sistema de controle em tempo contínuo ilustrado na Figura 1.

Dada a equação característica em malha fechada deste sistema

$$1 + G_C(s)G_P(s)H(s) = 0 \ , \tag{1}$$

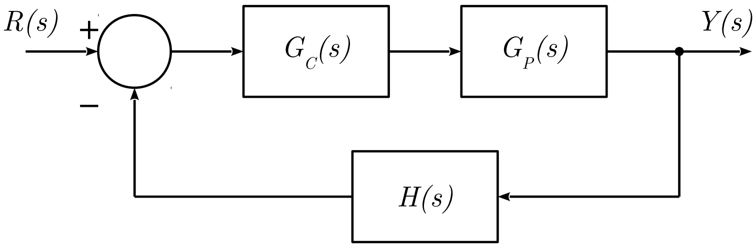

Figura 1: Diagrama de blocos geral de um sistema de controle em tempo contínuo.

o critério de estabilidade de Bode diz que, para que todas as raízes características em malha fechada estejam no SPE, isto é, o sistema em malha fechada seja estável:

- A fase da malha aberta $G_C(j\omega)G_P(j\omega)H(j\omega)$ deve ser maior que $-180°$ na frequência onde o módulo de $G_C(j\omega)G_P(j\omega)H(j\omega)$ é unitário (ou seja, gera uma margem de fase positiva) – frequência esta conhecida como *frequência de cruzamento de ganho* ω_u, e que o cruzamento de ganho deve ser único e no sentido da amplificação para atenuação

- A margem de ganho, que é a distância entre a linha de 0 [dB] e o módulo de $G_C(j\omega)G_P(j\omega)H(j\omega)$ quando a fase deste atinge os $-180°$ (frequência a qual é conhecida como frequência de cruzamento de fase) indica o quanto o ganho pode ser aumentado (ou diminuído) para que o sistema apresente margem de fase positiva, isto é, seja éstável.

A Figura 2 ilustra um diagrama de Bode com as localizações das margens de estabilidade relativas que caracterizam um sistema estável em malha fechada segundo o critério de estabilidade de Bode.

No OCTAVE, o comando utilizado para gerar o diagrama de Bode, que é a base para aplicar o critério de Bode pois fornece a informação do módulo e da fase em função da frequência, é o comando `bode`. Dado um sistema dinâmico LIT representado através de um objeto do tipo *transfer function* `Gs`, o OCTAVE oferece as seguintes opções de sintaxe para o comando `bode`:

a. `bode(Gs)`: esta opção plota diretamente na tela a figura contendo o diagrama de Bode de `Gs`. O número de pontos e a faixa de frequências são escolhidos automaticamente.

b. `bode(Gs,{wmin,wmax})`: esta opção é semelhante à anterior, no entanto, plotando o diagrama de Bode apenas para frequências situadas entre `wmin` e `wmax` (frequências em [rad/s]) também escolhidas automaticamente na faixa desejada;

c. `bode(Gs,W)`: opção semelhante à primeira, entretanto plotando o diagrama de Bode somente para um vetor de frequências `W` (em [rad/s]) escolhido pelo usuário;

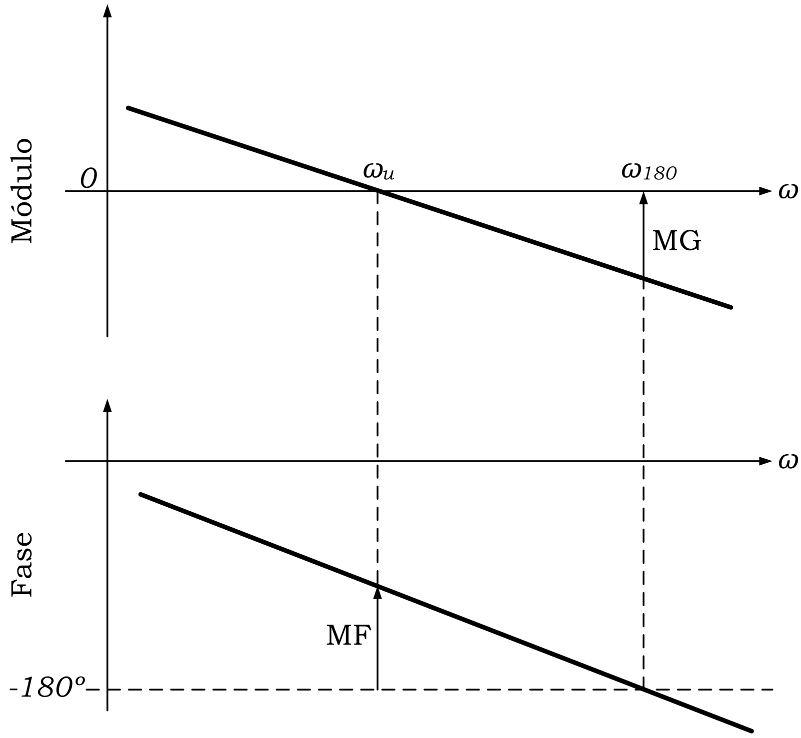

Figura 2: Margens de estabilidade relativa e critério de estabilidade de Bode.

d. `[mag,phase,W] = bode(Gs)`: esta opção, ao invés de plotar o diagrama de Bode, retorna o módulo e a fase presentes no diagrama, juntamente com o vetor de frequências `W` utilizado (em [rad/s]) escolhido automaticamente;

e. `[mag,phase] = bode(Gs,W)`: mesmo efeito que o anterior, entretanto o vetor de frequências `W` (em [rad/s]) é pré-determinado pelo usuário.

Exemplo 2.1 *Para o sistema de controle em tempo contínuo ilustrado na Figura 1, onde*

$$G_P(s) = \frac{100}{s^2 + 8s + 100} \quad G_C(s) = \frac{K(s+4)}{s} \quad H(s) = 1 \ ,$$

utilize o OCTAVE para gerar o diagrama de Bode para $K = 10$ e analise a estabilidade deste sistema em malha fechada segundo o critério de estabilidade de Bode. Qual a faixa de K que estabiliza o sistema em malha fechada?

Resolução: Os seguintes comandos devem ser empregados no OCTAVE:

```
>> NGps = 100;
>> DGps = [1 8 100];
>> Gps = tf(NGps,DGps)
>> K = 10;
```

```
>> NGcs = K*[1 4];
>> DGcs = [1 0];
>> Gcs = tf(NGcs,DGcs)
>> NHs = 1;
>> DHs = 1;
>> Hs = tf(NHs,DHs)
>> GcGps = series(Gcs,Gps);
>> GcGpHs = series(GcGps,Hs);
>> figure
>> bode(GcGpHs)
```

Em primeiro lugar, nota-se que a malha aberta é de fase-mínima e sem pólos no SPD. Analisando-se o diagrama de Bode da malha aberta, vê-se que a frequência de cruzamento de ganho é aproximadamente $\omega_u = 33$ [rad/s], e nesta frequência a fase é, aproximadamente, igual a $-170°$ e, portanto, a margem de fase é igual a $\phi_m = 10°$, sendo, portanto, positiva, e consequentemente o sistema em malha fechada é **estável**.

Analisando-se novamente o diagrama vê-se que a frequência de cruzamento de fase não existe, pois a curva de fase nunca cruza a linha de $-180°$ e está sempre acima dela. Portanto, a margem de fase é infinita. Como a margem de fase é infinita, pode-se aumentar o ganho infinitamente (em teoria) sem que o sistema perca a estabilidade em malha fechada. Entretanto, sabe-se que o ganho não pode ser aumentado infinitamente por questões práticas (saturação de atuadores e afins).

O diagrama de Bode também poderia ser gerado pelos seguintes comandos:

```
>> [mag,phase,W] = bode(GcGpHs);
>> mag = 20*log10(mag); % convertendo modulo para dB
>> figure
>> subplot(2,1,1)
>> semilogx(W,mag) % curva de modulo
>> xlabel('Frequencia [rad/s]')
>> ylabel('Modulo [dB]')
>> title('Diagrama de Bode da Resposta em Frequencia de G_C(s)G_P(s)H(s)')
>> grid
>> subplot(2,1,2)
>> semilogx(W,phase) % curva de modulo
>> xlabel('Frequencia [rad/s]')
>> ylabel('Fase [graus]')
>> grid
```

Para verificar (até mesmo graficamente) as margens de estabilidade relativas, o comando `margin` também pode ser útil:

a. `margin(Gs)`: esta opção plota diretamente na tela a figura contendo o diagrama de Bode de `Gs` juntamente com marcações das margens de ganho e de fase com as respectivas frequências de cruzamento e os valores no título do gráfico. O número de pontos e a faixa de frequências são escolhidos automaticamente.

b. `[MG,MF,w180,wu] = margin(Gs)`: esta opção é semelhante à anterior, no entanto, retorna os valores da margem de ganho em `MG`, da margem de fase `MF`, frequência de cruzamento de fase `w180` e frequência de cruzamento de ganho `wu`.

Exemplo 2.2 *Para o sistema de controle em tempo contínuo ilustrado na Figura 1, onde*

$$G_P(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \quad G_C(s) = K \quad H(s) = 1 \ ,$$

utilize o OCTAVE para gerar o diagrama de Bode para $K = 2$ com as margens de estabilidade relativas e analise a estabilidade deste sistema em malha fechada segundo o critério de estabilidade de Bode. Qual a faixa de K que estabiliza o sistema em malha fechada?

Resolução: Os seguintes comandos devem ser empregados no OCTAVE:

```
>> NGps = 1;
>> DGps = poly([-1;-1;-1]);
>> Gps = tf(NGps,DGps)
>> K = 2;
>> NGcs = K;
>> DGcs = 1;
>> Gcs = tf(NGcs,DGcs)
>> NHs = 1;
>> DHs = 1;
>> Hs = tf(NHs,DHs)
>> GcGps = series(Gcs,Gps);
>> GcGpHs = series(GcGps,Hs);
>> figure
>> margin(GcGpHs)
```

Novamente, nota-se que a malha aberta é de fase-mínima e sem pólos no SPD. Analisando-se o diagrama de Bode, vê-se que a frequência de cruzamento de ganho é $\omega_u = 0,7664$ [rad/s] e a margem de fase é igual a $\phi_m = 67,6°$, sendo, portanto, positiva, e consequentemente o sistema é **estável** em malha fechada.

Analisando novamente o diagrama vê-se que a frequência de cruzamento de fase é $\omega_{180} = 1,7321$ [rad/s] e a margem de ganho é igual a $12,0412$ [dB], ou seja, em torno de 4 vezes. Isto significa que o ganho atual (que é igual a 2) pode ser aumentado em até 4 vezes (resultando em 8) que o sistema ainda será estável em malha fechada.

Lembre-se que o ganho proporcional altera apenas a curva de módulo, mantendo intacta a curva de fase. Perceba que o aumento do ganho em mais do que 4 vezes irá mover a curva de módulo "para cima", deslocando a frequência de cruzamento de ganho para a direita, e consequentemente gerando uma margem de fase negativa, tornando o sistema instável em malha fechada. No entanto, a diminuição do ganho move a curva de módulo "para baixo", deslocando a frequência de cruzamento de ganho para a esquerda, gerando uma margem de fase positiva, e o sistema será estável em malha fechada. Em outras palavras, neste caso a diminuição do ganho proporcional não é prejudicial para a estabilidade do sistema em malha fechada.

Portanto, a faixa de ganhos que estabiliza o sistema em malha fechada é $0 < K < 8$.

3 Critério de Estabilidade de Nyquist

O critério de Nyquist é baseado em um dos teoremas mais conhecidos do estudo de funções de variável complexa: o Princípio do Argumento de Cauchy. De forma resumida, dada a equação característica em malha fechada de um determinado sistema de controle em tempo contínuo

$$1 + G_C(s)G_P(s)H(s) = 0 \ , \tag{2}$$

o número de raízes desta equação (pólos em malha fechada) no SPD é igual ao número de pontos nos quais a função não é analítica (pólos em malha aberta) no SPD mais o número de circulações em torno do ponto -1 do diagrama polar criado avaliando-se $G_C(j\omega)G_P(j\omega)H(j\omega)$ para $\omega = -\infty$ até $\omega = +\infty$ (conhecido como diagrama de Nyquist). Circulações no sentido antihorário em torno de -1 são tomadas como negativas e circulações no sentido horário em torno de -1 são tomadas como positivas. Isto é conhecido como o critério de estabilidade de Nyquist. De maneira geral, enuncia-se o critério de estabilidade de Nyquist como

$$Z = P + N \ , \tag{3}$$

onde Z é o número de pólos em malha fechada no SPD, P é o número de pólos no SPD em malha aberta e N é o número de circulações em torno do ponto -1 do diagrama de Nyquist. Logo, de maneira que o sistema seja estável em malha fechada, é necessário que $Z = 0$, o que indica que não há pólos no SPD em malha fechada. Observe que a interpretação física de Z indica que este valor não pode ser negativo (assim como P), pois não há sentido em quantidade negativa de pólos.

As margens de ganho são encontradas nos pontos onde diagrama de Nyquist cruza o eixo real negativo, tomando-se o inverso da distância entre o ponto onde o diagrama cruza o eixo real negativo até a origem. O aumento do ganho proporcional faz com que o diagrama de Nyquist mantenha o formato mas “infle”, e a diminuição do ganho proporcional faz com que o diagrama mantenha o formato mas “murche”. Logo, aumentando-se o ganho do sistema numa proporção igual a margem de ganho fará com que o ponto de cruzamento com o eixo real negativo que estava à direita de -1 passe a ficar à esquerda de -1 (numa situação de aumento do ganho), causado pela “inflação” do diagrama. Da mesma forma, diminuindo-se o ganho do sistema numa proporção igual a margem de ganho fará com que o ponto de cruzamento com o eixo real negativo que estava à esquerda de -1 passe a ficar à direita de -1 (numa situação de diminuição do ganho), causado pela “deflação” do diagrama. A figura 3 ilustra a localização das margens de estabilidade relativa no diagrama de Nyquist.

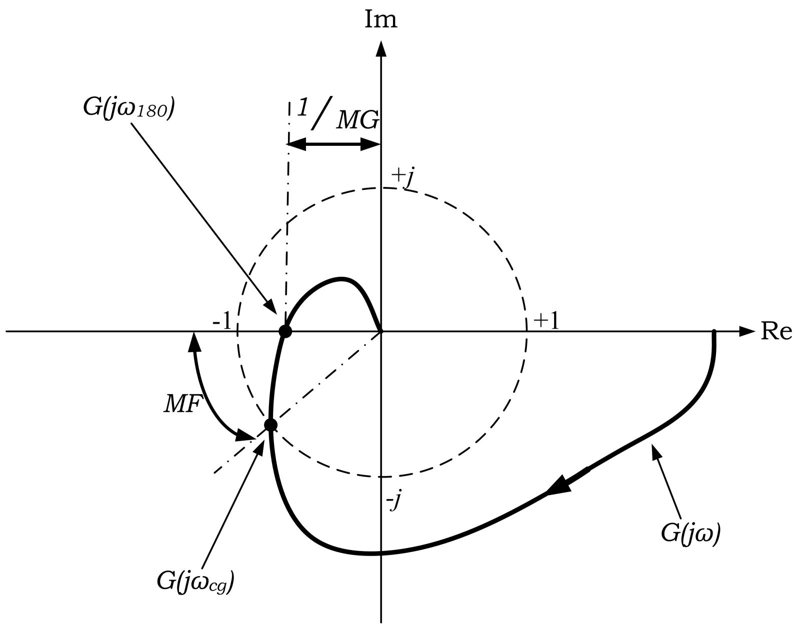

Figura 3: Margens de estabilidade relativa no diagrama de Nyquist.

No OCTAVE, o comando utilizado para se empregar a análise via critério de Nyquist é o comando `nyquist`. Dado um sistema dinâmico LIT representado através de um objeto tipo *transfer function* `Gs`, o OCTAVE oferece as seguintes opções de sintaxe para o comando `nyquist`:

a. `nyquist(Gs)`: esta opção plota diretamente na tela a figura contendo o diagrama de Nyquist de `Gs`. O número de pontos e a faixa de frequências são escolhidos automaticamente.

b. `nyquist(Gs,{wmin,wmax})`: esta opção é semelhante à anterior, no entanto, plotando o diagrama de Nyquist apenas para frequências situadas entre `wmin` e `wmax` (frequências em [rad/s]) também escolhidas automaticamente na faixa desejada;

c. `nyquist(Gs,W)`: opção semelhante à primeira, entretanto plotando o diagrama de Nyquist somente para um vetor de frequências `W` (em [rad/s]) escolhido pelo usuário;

d. `[Re,Im,W] = nyquist(Gs)`: esta opção, ao invés de plotar o diagrama de Nyquist, retorna as partes real e imaginária presentes no diagrama, juntamente com o vetor de frequências `W` utilizado (em [rad/s]) escolhido automaticamente;

e. `[Re,Im] = nyquist(Gs,W)`: mesmo efeito que o anterior, entretanto o vetor de frequências `W` (em [rad/s]) é pré-determinado pelo usuário.

Exemplo 3.1 *Para o sistema de controle do Exemplo 2.2, faça a análise de estabilidade de acordo com o critério de Nyquist.*

Resolução: Primeiramente, deve-se empregar os seguintes comandos no OCTAVE:

```
>> NGps = 1;
>> DGps = poly([-1;-1;-1]);
>> Gps = tf(NGps,DGps)
>> K = 2;
>> NGcs = K;
>> DGcs = 1;
>> Gcs = tf(NGcs,DGcs)
>> NHs = 1;
>> DHs = 1;
>> Hs = tf(NHs,DHs)
>> GcGps = series(Gcs,Gps);
>> GcGpHs = series(GcGps,Hs);
>> figure
>> nyquist(GcGpHs)
```

Analisando-se os pólos em malha aberta, vemos que nenhum está no SPD, logo $P = 0$. Analisando-se o diagrama de Nyquist, verifica-se que não há nenhuma circulação em torno do ponto -1, e portanto, $N = 0$. Logo, tem-se que $Z = 0$, e então não há pólo em malha fechada no SPD, e então conclui-se que o **sistema é estável em malha fechada** para $K = 2$.

O ponto onde o diagrama cruza o eixo real negativo é $-0,25$. Logo, a margem de ganho associada a este ponto, que é o inverso da distância deste ponto até a origem, é $M_g = 1/0,25 = 4$. Isto implica que, aumentando-se o ganho atual, que é igual a 2 em 4 vezes (resultando em um ganho $K = 8$), o diagrama "inflará" a ponto de haver duas circulações no sentido horário, e então $N = 2$ e consequentemente $Z = 2$, gerando um sistema instável em malha fechada. Por outro lado, diminuindo-se ainda mais o ganho não alteraria-se o número de circulações e então não a estabilidade em malha fechada não seria alterada.

Observe que o gráfico, plotado desta maneira, dificulta bastante para determinar o sentido da circulação. Sabe-se que, para $\omega = 0$, $G_C(j0)G_P(j0)H(j0) = 2/1^3 = 2$, e então sabe-se que o diagrama parte de 2. Para $\omega \to \infty$, $G_C(j\infty)G_P(j\infty)H(j\infty) \to 0$, e então o diagrama termina na origem. Ainda assim, não é claro o sentido da circulação do gráfico. Poderíamos escolher um próximo ponto próximo a $\omega = 0$, como por exemplo $\omega = 1$ [rad/s], e então $G_C(j1)G_P(j1)H(j1) = 2/(j1 + 1)^3 = -0,5 - j0,5$, e então poderíamos ver claramente o sentido do gráfico.

Uma maneira de se "facilitar" a análise do gráfico é plotar as frequências positivas e negativas de cores diferentes. Como, em geral, fisicamente os sistemas possuem mais pólos que zeros, o diagrama irá terminar na origem, e pela teoria, o caminho de Nyquist é formado desde $\omega = -\infty$ até $\omega = +\infty$, então basta seguir, da origem, a cor que representa as frequências negativas para saber o sentido do diagrama[1].

Como, exemplo, plotando o gráfico do exemplo anterior, poderíamos empregar os seguintes comandos:

```
>> NGps = 1;
>> DGps = poly([-1;-1;-1]);
>> Gps = tf(NGps,DGps)
>> K = 2;
>> NGcs = K;
>> DGcs = 1;
>> Gcs = tf(NGcs,DGcs)
>> NHs = 1;
```

[1] Em versões mais atuais do OCTAVE, esta dificuldade foi sanada devido ao fato de que, agora, o OCTAVE plota as frequências positivas em linha cheia e as negativas em linha tracejada, além do ponto crítico -1 em uma cruz vermelha.

```
>> DHs = 1;
>> Hs = tf(NHs,DHs)
>> GcGps = series(Gcs,Gps);
>> GcGpHs = series(GcGps,Hs);
>> figure
>> [Re,Im,W] = nyquist(GcGpHs);
>> figure
>> plot(Re,Im,'b') % plotando as frequencias positivas em azul
>> xlabel('Real')
>> ylabel('Imaginario')
>> hold
>> plot(Re,-Im,'g') % plotando as frequencias negativas em verde
>> grid
>> plot(-1,0,'+r') % plotando o ponto critico -1 em uma cruz vermelha
```

A partir deste último gráfico podemos ver claramente o sentido da circulação: seguindo a curva em verde a partir da origem (frequências negativas indo de $\omega \to -\infty$ até $\omega = 0$), vemos claramente que o sentido do gráfico é horário.

Exemplo 3.2 *Para o sistema de controle em tempo contínuo ilustrado na Figura 1, onde*

$$G_P(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \quad G_C(s) = K \quad H(s) = 1\ ,$$

utilize o OCTAVE para gerar o diagrama de Nyquist para $K = 5$ e analise a estabilidade deste sistema. Qual a faixa de K que estabiliza o sistema em malha fechada?

Resolução: Empregar os seguintes comandos no OCTAVE:

```
>> NGps = [1 -1];
>> DGps = poly([-1;-2]);
>> Gps = tf(NGps,DGps)
>> K = 5;
>> NGcs = K;
>> DGcs = 1;
>> Gcs = tf(NGcs,DGcs)
>> NHs = 1;
>> DHs = 1;
>> Hs = tf(NHs,DHs)
```

```
>> GcGps = series(Gcs,Gps);
>> GcGpHs = series(GcGps,Hs);
>> figure
>> [Re,Im,W] = nyquist(GcGpHs);
>> figure
>> plot(Re,Im,'b') % plotando as frequencias positivas em azul
>> xlabel('Real')
>> ylabel('Imaginario')
>> hold
>> plot(Re,-Im,'g') % plotando as frequencias negativas em verde
>> grid
>> plot(-1,0,'+r') % plotando o ponto critico -1 em uma cruz vermelha
```

Analisando-se os pólos em malha aberta, vemos que nenhum está no SPD, logo $P = 0$. Analisando-se o diagrama de Nyquist, verifica-se que há uma circulação no sentido horário em torno do ponto -1, e portanto, $N = 1$. Logo, tem-se que $Z = 1$, e então há um pólo em malha fechada no SPD, e então conclui-se que o **sistema é instável em malha fechada** para $K = 5$.

O ponto onde o diagrama cruza o eixo real negativo é $-2,5$. Logo, a margem de ganho associada a este ponto, que é o inverso da distância deste ponto até a origem, é $M_g = 1/2,5 = 0,4$. Isto implica que, diminuindo-se o ganho atual, que é igual a 5 em $0,4$ vezes (resultando em um ganho $K = 2$), o diagrama "murchará" a ponto de não haver circulações em torno do ponto -1, e então $N = 0$ e consequentemente $Z = 0$, gerando um sistema estável em malha fechada. Por outro lado, aumentando-se ainda mais o ganho não alteraria-se o número de circulações e então não a estabilidade em malha fechada não seria alterada – continuaria a ser instável. Logo, conclui-se que a faixa de ganhos que estabiliza o sistema em malha fechada é $0 < K < 2$.

Observe que, neste último exemplo, trata-se der um sistema de fase não-mínima, pois há um zero no SPD na planta. Gerando o diagrama de Bode deste sistema, abrindo uma nova figura e através de `bode(GcGpHs)`, chegaríamos a uma conclusão de margem de fase igual a $138°$ e margem de ganho infinita, o que nos levaria a conclusão de que o sistema é estável em malha fechada. Entretanto, sabemos pelo critério de Nyquist que o sistema é instável!

Isto nos mostra, por meio de um exemplo bastante simples, por que o critério de Bode não pode ser aplicável a sistemas de fase não-mínima, sendo sempre preferível o critério de Nyquist.

4 Bibliografia

1 Katsuhiko Ogata, “*Engenharia de Controle Moderno*”, Editora Pearson, 5ª Edição, 2010;

2 Charles L. Phillips & Royce D. Harbor, “*Feedback Control Systems*”, Editora Prentice Hall, 4ª Edição, 2000.

3 Caio Fernandes de Paula, “*Notas de Aula: ECA602 – Sistemas de Controle*”, Universidade Federal de Itajubá, 2021.