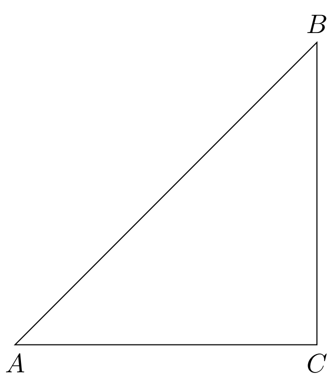
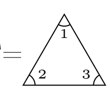
Книжка за упражнителни задачки на Деспина

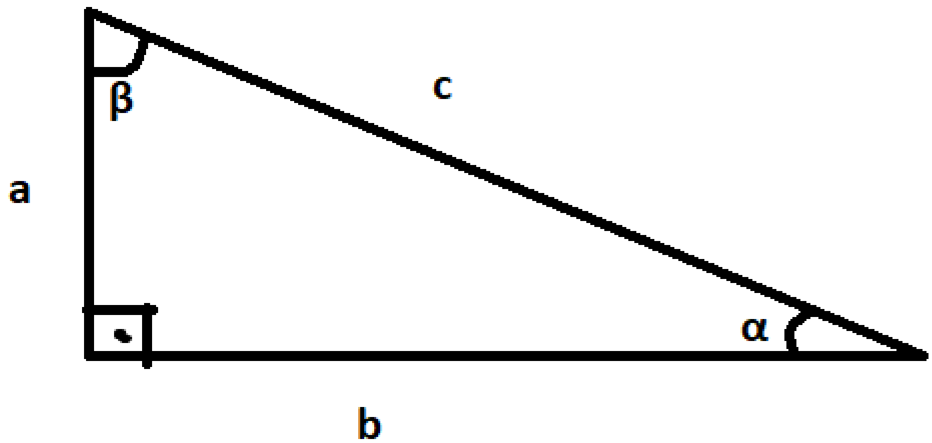
Съдържание

1 Теория

1.1 Триъгълник



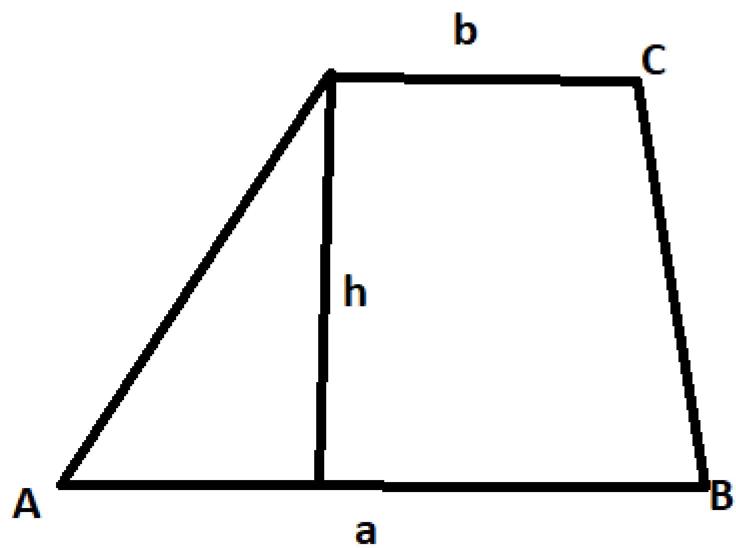
F= 



Дефиниция 1 $sin(\alpha) = \frac{a}{c}$, $cos(\alpha) = \frac{b}{c}$, $tg(\alpha) = \frac{a}{b}$, $cotg(\alpha) = \frac{b}{a}$

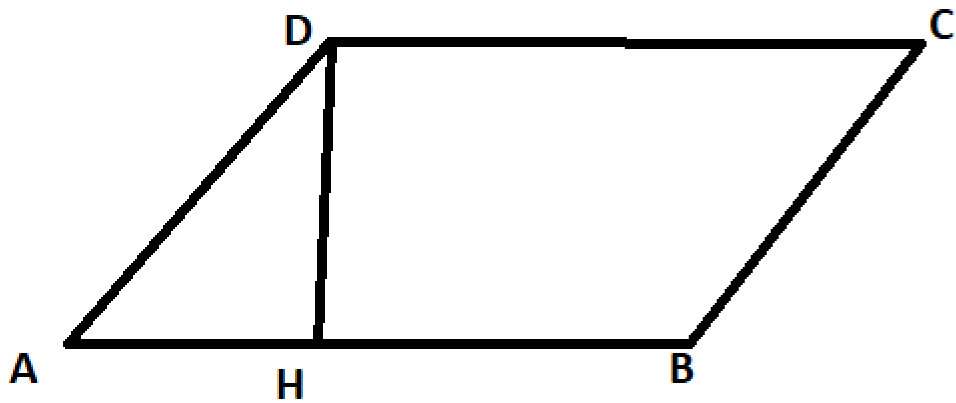
Да зебележим, че $sin(\beta) = cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ и аналогично $cos(\beta) = sin(\alpha) = \frac{a}{c}$.
$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow (\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = 1 \rightarrow sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$.
Тригонометрични тъждества ($\alpha, \beta \in [0, 90]$):
$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$
$sin(\alpha) = cos(\beta) = cos(90 - \alpha)$
$tg(\alpha)cotg(\alpha) = 1$
$tg(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$, $cotg(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)} = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$

1.2 Трапец



Лице на трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$
Трапец, вписан в окръжност е равнобедрен.
Трапец описан около окръжност: $AB + CD + AD + BC$, или сборът на срещуположнисте страни е равен.

1.3 Успоредник



Страните са две по две успоредни $AB||CD$, $BC||AD$. Лице на успоредник: $S = AB \cdot DH$ (тук се разбира дължините на страните)

Коментари: $\triangle ABD \equiv \triangle BCD$, $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$
$\angle BAD = \angle BCD$ и $\angle ADC = \angle ABC$. $\angle ABC + \angle BAD = 180$.

Задачи - дадени са две страни на успоредник и ъгъл.

1.4 Функции

Функция е правило за съпоставяне на число по някакво правило. По-конкретно, имаме x, и на него съпоставяме $f(x)$. Често се записва като $y = f(x)$. Всичките x-ове, на които можем да съпоставим $f(x)$, се нарича дефиниционно множество на функцията $f(x)$. Графично се изобразяват наредените двойки $(x, f(x))$ или (x, y) в координатна система, в която по хоризонталата е стойността на x, а по вертикалата - на y.
Пример за фунцкия. $y = f(x) = x$. Графиката минава през всички точки (x, x) за x в дефиниционното множество. Дефиниционното множество е ця-

лата реална права.
Примери за функции, където деф. множество не е цялата права. $y = \frac{1}{x}$(ДМ: $x \neq 0$) и $y = \sqrt{x}$ (ДМ: $x \geq 0$)

1.5 Линейна фунцкия

$y = f(x) = ax + b$
Значеения на буквите a,b,c: a - "колко стръмна е правата"
a>0 -> фунцкията е растяща("катерим"отляво-надясно)
a<0 -> фунцкията е намаляваща("спускаме се"отляво-надясно)
b - "позицията на правата в координатната система по-точно отместване спрямо абсцисата
b>0 колкото по-голямо е b, толкова по-голямо е отместването "нагоре".
b<0 колкото по-малко е b, толкова по-голямо е отместването "надолу".
$(0, b)$ е пресечената точка на правата с ординатата(y-оста).

1.6 Квадратни функции

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$
Значеения на буквите a,b,c:
a - "колко стръмна е една парабола"
a $>$ 0 дава изпъкнала парабола
a $<$ 0 дава вдлъбнала парабола
b и c - "позицията на параболата в координатната система"

$f(-\frac{b}{2a})$ е стойността на най-високата или най-ниската точка(a>0 най-ниска, a<0 най-висока)
$-\frac{b}{2a}$ е средата на абсцисата на корените(средната точка между двата корена) Координатите на най-висока(най-ниска точка са)$(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$.

1.7 Вероятности - Комбинации, Вариации и Пермутации.

Дефиниция 2 *Пермутации - начини, по които може да наредим n обекта в една линия. Обозначава се с P_n.*

Пример. Пермутация от 3 елемента са начините, по които може да наредим 3 "неща"на една линия едно до друго. Нека за определеност да са молив, химикал и флумастер. Начините, по които може да ги наредим са:
ФХМ, ФМХ, МХФ, МФХ, ХМФ, ХФМ или общо 6 начина. Нека да добавим 4ти елемент ролер. За първото нареждане ФХМ, ролерът може да е на 4 позиции: РФХМ, ФРХМ, ФХРМ, ФХМР. Тогава 4те елемента може да ги наредим по $6.4 = 24$ начина. n обекта могат да се наредят по $n(n-1)...1$ начина. Примерите по горе Ф, Х и М могат да се наредят по $3.2.1 = 6$ начина и Ф,Х, М, Р могат да се наредят по $4.3.2.1 = 24$ начина. Дефинираме n-факториел с $n! = n(n-1)...1$.

Нека напишем първите 6 факториела:
$P_1 = 1! = 1$
$P_2 = 2! = 2$
$P_3 = 3! = 6$
$P_4 = 4! = 24$
$P_5 = 5! = 120$
$P_6 = 6! = 720$

Дефиниция 3 *Вариация - избор на елементи където реда има значение - Налучкване на телефонен номер.* V_{10}^4.

Формула за вариация: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Пример: $V_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6.5.4.3.2}{4.3.2} = 6.5 = 30$

Дефиниция 4 *Комбинации - избор на елементи където реда няма значение - начини за вземане на различни цветове топки от урна(напр. сини, червени, зелени, жълти и т.н.).*

Формула за комбинации: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$ Пример: $C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4.3.2}{3.2.3.2} = 5.4 = 20$

Задача 1 *По колко начина може да изберем 6 молива(различни) 10 молива(различни)?(Реда няма значение).*

Решение :
Първи молив избираме по 10 начина, втория - по 9, и т.н. Общо 10.9.8.7.6.5 начина.

Задача 2 *Дадени са 10 молива с различни цветове. За оцветяване на картинка са необходими 6 точно определени цвята. Каква е вероятността случайно избрани 6 молива да могат да оцветят картинката?*

Решение :
Вероятността първия молив да е от 6те е $\frac{6}{10}$. Вероятността втория молив да е подходящ за оцветяване е $\frac{5}{9}$ и т.н. Вероятността от 6 тегления да изтеглим моливите за оцветяване е $\frac{6.5.4.3.2.1}{10.9.8.7.6,5} = \frac{3}{10.9.7} = \frac{1}{10.3.7} = \frac{1}{210}$.
За упражнение: 2 молива от 3.

Задача 3 *Да се намерят всичките възможни комбинации RGB цветове с интервал [0,255].*

1.8 Полиномиални и дробни неравенства - теория

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n < 0$.
$a_0(x - x_1) \ldots (x - x_n) < 0$ Нека, за определеност, имаме $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.
По подобен начин ако имаме дроби. (Да се редактира)

2 Неравенства - задачи

При умножаване на двете страни на неравенство с -1, сменяме знака на неравенството. Пример: $3 < 5 \to -3 > -5$

Квадратни или полиномиални неравенства:

Задача 4 *Дефиниционното множество на израза* $\frac{2x+4}{\sqrt{5-x}}$ *е:*
Определя се от $5 - x > 0$
$5 > x$
$x < 5$ $x \in (-\infty, 5)$

Задача 5 $A = \sqrt{3x^2 + 7x + 5} + 2x - 1$ *при* $x = -1$
$A = \sqrt{3.(-1)^2 + 7.(-1) + 5} + 2(-1) - 1 = \sqrt{3 - 7 + 5} - 2 - 1 = 1 - 3 = -2$

Задача 6 *Корените на уравнението* $\sqrt{x+1} = 5 - x$

Повдигаме на квадрат и имаме уравнението:
$x + 1 = (5 - x)^2$

$x^2 - 10x - x + 25 - 1 = 0$
$x^2 - 11x + 24 = 0$
$x_1 = 3$, $x_2 = 8$

ПРОВЕРКА:
$x_1 = 3 \to 3 + 1 =^? (5 - 3)^2$ OK
$x_2 = 8 \to 8 + 1 =^? (5 - 8)^2$ OK
Корените са 3 и 8.

Задача 7 *Произведението на корените на уравнението* $\sqrt{3x^2 - 8x - 2} = 1$ *са:*
$3x^2 - 8x - 3 = 0 \to x_1 = 3,\ x_2 = -\frac{1}{3}$
Формули на Виет:
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

ПРОВЕРКА: $x_1 = 3 \to \sqrt{3.9 - 8.3 - 2} = \sqrt{27 - 24 - 2} = \sqrt{1}$ *OK*

$x_1 = -\frac{1}{3} \to \sqrt{3.\frac{1}{9} + 8.\frac{1}{3} - 2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2} = \sqrt{1}$ *OK*

Задача 8 *Броят на корените на уравнението* $(9 - x^2)\sqrt{x+2} = 0$ *е:*
Решаваме поотделно $9 - x^2 = 0$ *и* $\sqrt{x+2} = 0$, *получаваме корени* $x_{1,2} = \pm 3$ *и* $x_3 = -2$, *НО при* $x = -3$ *израза* $\sqrt{x+2}$ *не е дефиниран, т.е.* $x = -3$ *не е корен. Тогава корените са два на брой.*

Задача 9 *Кое от посочените уравнения има корен:*

1. $\sqrt{x^2 + 8} = -3$, *няма отрицателен корен*

2. $\sqrt{x-7} = 5 - x$

3. $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3} = 0$,
не е възжможно едновременно $\sqrt{x+5} = 0$ *и* $\sqrt{x+3} = 0$, *по-точно* $\sqrt{x+5} = 0$ *тогава и само тогава, когато* $x = -5$ *и* $\sqrt{x+3} = 0$ *тогава и само тогава, когато* $x = -3$

4. $\sqrt{x-3} = 3 - x$

Задача 10 $\sqrt{x+6} = x$
$x^2 - x - 6 = 0$,
$D = 1 - 4.(-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2$

Задача 11 $\sqrt{\frac{3x}{x-2}} + 6\sqrt{\frac{x-2}{3x}} = 5$
Полагаме $y = \sqrt{\frac{3x}{x-2}}$, *то* $\sqrt{\frac{x-2}{3x}} = 1/y$
$y + \frac{6}{y} = 5$, $y \neq 0$
$y^2 - 5y + 6 = 0$

Задача 12 $\sqrt{x-4} + x - 4 = 6$. *Полагаме* $\sqrt{x-4} = y$.
$y + y^2 = 6$
$y^2 + y - 6 = 0$

3 Квадратни уравнения и системи

1. системи уравнения

2. квадратни уравнения

3. неравенства (???)

4. други уравнения

Фромули, които се изпозлват за квадратни уравния:
Ако е дадено уравнение $ax^2+bx+c=0$, имаме дискриминанта $D = b^2-4ac$, тогава решенията се задават с $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. Да разгледаме еднин пример.
Упражение(?): $(x - \frac{-b+\sqrt{D}}{2a})(x - \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}) = ax^2 + bx + c$

Припомняме формулите за съкратено умножение:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Упражнителни задачи, които Деспина е решавала сама:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Още примери за решаване:

1. $x^2 - 6x + 8 = 0$
2. $x^2 - 5x + 6 = 0$
3. $x^2 - 5x + 6 = 0$
4. $x^2 - 5x + 6 = 0$
5. $x^2 - 5x + 6 = 0$
6. $x^2 - 5x + 6 = 0$

4 Еднаквост и подобност на триъгълници

Един триъгълник се определя от "три неща три страни, две страни и ъгъл между тях, страна и два ъгъла.

Признаци за еднаквост:

1. две страни и ъгъл между тях = две страни и ъгъл между тях => еднакви
2. страна и два ъгъла = страна и два ъгъла => еднакви
3. три страни = три страни => еднакви

Подобните триъгълници си приличат по това, че имат една и съща форма, но единият е 10 пъти или 5 пъти(или колкото и да е пъти) "по-голям"от другия

Признаци за подобност:(Трябва да се потвърди от учебник)

1. две страни са 5 пъти по-малки и ъгълът между тях е равен.
2. една страна е 5 пъти по-малка и 2 ъгъла са равни.
3. трите ъгъла са равни

Коефицент на подобие k ще наричаме отношението на страните между два подобни триъгълника. Съответните височини, ългополовящи и медиани са в отнишение колкото е коефициента на подобие k. За лицата отношението е коефициента на квадрат k^2.

ирационални изрази, прогресии, статистика и обработка на данни, решаване на триъгълник- sin, cos, tg, cotg в (0,180), синусова и косинусова теорема (?), елементи от стереометрията

Задача 13 *Лицата на два подобни тригълници са 25 см^2 и 49 см^2. Намерете коефицента на подобие.*

Решение :
От услвието имаме, че $k^2 = \frac{25}{49}$, тогава $k = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$

Задача 14 *Лицата на два подобни тригълници са 24 см^2 и 6 см^2. Периметъра на първия триъгълник е 24см. Намерете периметъра на втория.*

Решение :
$k^2 = \frac{24}{6} = 4 \to k = 2$. $P_1 = 24$. $P_2 = \frac{1}{2}24 = 12$см.

Задача 15 *Страните на два равностранни триъгълника са 4 и 8см. Намерете отношението на лицата.*

Задача 16 *Две съответни страни в два подобни тръгълника са 8 и 12см, а сборът на лицата им е 52 см^2. Намерете лицата на*

5 Тригонометрия

Задача 17 *Да се намерят останалите тригонометрични функции, ако* $cos(\alpha) = 0.3$

Решение :
$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1 \to sin^2(\alpha) = 1 - 0,09 \to sin(\alpha) = \sqrt{0,91}$
$tg(\alpha) = \frac{\sqrt{0,91}}{0,3} = \frac{10\sqrt{0,91}}{3}$
$cotg(\alpha) = \frac{0,3}{\sqrt{0.91}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{\sqrt{0,91}}{0,91} = \frac{30\sqrt{0,91}}{91}$

Задача 18 *Да се намерят останалите тригонометрични функции, ако* $cos(\gamma) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Решение :
$cos(\alpha) = \frac{1}{2} \to sin^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \to \sqrt{sin^2(\alpha)} = \sqrt{\frac{3}{4}}$
$sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$tg(\alpha) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
$cotg(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

6 Задачи с текс

6.1 Разни

Задача 19 *Да се подредят по големина числата:* $1, 2, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}, 2\sqrt{2}$.

Решение :
$\sqrt{4} = 2$, тогава коренире около 2 се подреждат: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4} = 2, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$.
$\frac{5}{2} = 2.5$, $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \approx 2.667$, $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \approx 2.333$.

Ако a и b са положителни, то $a > b$, точно когато $a^2 > b^2$. Да сравним $\frac{5}{2}$ с $\sqrt{5}$. Повдигаме на втора степен. Получаваме $\frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$ и 5.

$\sqrt{5} \approx 2.25$, $1.74 > \sqrt{3} > 1.73$
$\sqrt{2} \approx 1.4$, защото $14^2 = 196$.
$\frac{8^2}{3^2} = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$.
$\frac{7^2}{3^2} = \frac{49}{9} = 5\frac{4}{9}$.

Квадратите на числата са: $1, 4, 2, 3, 5, 7, 6\frac{1}{4}, 7\frac{1}{9}, 5\frac{4}{9}, 8$
Отг. $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \frac{7}{3}, \frac{5}{2}, \sqrt{7}, \frac{8}{3}, 2\sqrt{2}$.

to do:
Правилните дроби със знаменат от 1 до 10:
$\frac{1}{2} = 0.5$
$\frac{1}{3} = 0.3333(3)$
$\frac{1}{4} = 0.25$
$\frac{1}{5} = 0.2$
$\frac{1}{6} = 0.16666(6)$
$\frac{1}{7} = 0.(142857)$
$\frac{2}{7} \approx 0.2857142857142857$
$\frac{3}{7} \approx 0.42857142857$
$\frac{1}{8} = 0.125$
$\frac{1}{9} = 0.111(1)$

Правилните дроби със знаменател 7 имат структура.
1,2,3,4,5,6
1,2,4,5,7,8
42857142857142857142857

Признаци на делимост:
2 : ако последата цифра се дели на 2
3: ако сумата на цифрите се дели на 3
4: ако последните две цифри се делят на 4
5: ако последната цифра е 5 или 0
6: ако се дели на 3 и на 2
8: ако последните 3 цифри се делят на 0
9: ако сумата на цифрите се дели на 9

Задача 20 *Да се намери стойността на израза:*

1. $\sqrt{(2\sqrt{6}-5)^2} - (-\sqrt{6})^3$

Решение :

$(-\sqrt{6})^3 = (-\sqrt{6}).(-\sqrt{6}).(-\sqrt{6}) = -6\sqrt{6}.$
$\sqrt{(2\sqrt{6}-5)^2} = |2\sqrt{6}-5| = 5-2\sqrt{6}$
Отг. $5-2\sqrt{6}-6\sqrt{6} = 5-4\sqrt{6}.$
Коментар: $\sqrt{(3-4)^2} \neq 3-4 = -1$, $\sqrt{(3-4)^2} = |3-4| = 1$
Коментар2: Да сравним числата $2\sqrt{6}$ и 5.
$a, b > 0$,то $a > b \iff a^2 > b^2$. $(2\sqrt{6})^2 = 24$, $5^2 = 25$. Тогава $2\sqrt{6} < 5$.

6.2 Линейни уравнения и неравенства

Задача 21 *Сборът на две последователни естествени числа е със 131 по-малък от произведението им. Намерете числата.*

Решение :
Ако първото(по-малкото от двете числа е x), второто число е $x+1$. Тогава от условието на задачата имаме $x+x+1 = x(x+1)-131$
$2x+1 = x^2+x-131.$
$x^2+x-131-2x-1 = 0.$
$x^2-x-132 = 0$. $D = (-1)^2-4.(-132) = 1+4.132 = 528+1 = 529$. $x_1 = \frac{1+23}{2} = 12$. $x_2 = \frac{1-23}{2} = -11$. -11 не е естествено. Отг. 12 и 13.

Задача 22 *В един магазин продали 488 кг портокали, лимони и маслини. Портокалите били с 40 кг повече от лимоните, а маслините - 5 пъти по-малко от портокалите. По колко килограма са продали от всеки вид?*

Решение :
Да означим портокалите с x. Тогава лимоните са $x-40$, а маслините са $\frac{x}{5}$.
Тогава $x+x-40+\frac{x}{5} = 488$. Умножаваме двете страни(на у-ето) по 5.
$10x-200+x = 488.5$
$11x = 488.5+200 = 2640$
$x = \frac{2640}{11} = 240.$
Отг. 240кг, 200кг лимони, 48 кг. маслини. Друг начин за смятане е следният:
$2\frac{1}{5}x = 488+40$
$\frac{11}{5}x = 528$
$x = 528 \cdot \frac{5}{11} = 240.$

Задача 23 *През един сезон в консервната фабрика "Добруджанка"са обработили по 48 т домати на ден. След като предали 1300 т пресметнали, че това е с 524тт по-малко от цялото количество домати. Колко дни във фабриката са обработвани домати?*

Задача 24 *Обиколката на един триъгълник е 126 см. Едната му страна е с 12 см по-къса от другата , а третатат е 3/ от сбора на првите две. Да се намери най–голямата страна на този триъгълник.*

Задача 25 *Попитали Николай на колко е години, а той отговорил: "Мама е на 38 години. Тя е с 2 години по-млада от татко. Татко пък има два пъти повче години, отколкото аз и сестра ми заедно. Но аз със с 4 години по-малък от сестра ми."На коолко години са Николай и сестра му?*

Задача 26 *Един работник може да свърши определена работа за 15 дни, а друг работник за същото време свършва само 75 % от тази работа. Отначало ддвамата работници работели заедно 6 дни, а след това вторият само довършил останалата част. За колко дни била свършена цялата работа и какъв процент от нея е изработил всеки един работник?*

6.3 Басейни

Задача 27 *Един басейн се пълни от една тръба за 2 ч, от друга за 3ч, от трета за 4ч. За колко време се пълни от трите едновременно?*

Задача 28 *Един басейн се пълни от една тръба за 2 ч, от друга за 3ч. За колко време се пълни от двете едновременно? Каква част пълни всяка от тръбите?*

Решение :
Разсъждения. За 1 час пълним $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$. Тогава ако времето за пълнене е x(в часове), то $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=1$. Тогава $3x+2x=6$ и $x=\frac{6}{5}$ часа или 1ч и 12мин. Първата тръба е напълнила $\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3}{5}=60\%\cdot$. Тогава втората е напълнила $\frac{2}{5}=40\%$ от басейна.

(Коментар: Първия басейн пълни за минута $\frac{1}{120}$, а втория $\frac{1}{180}$. За 12 минути пълним $\frac{12}{120}+\frac{12}{180}=\frac{12.3+12.2}{360}=\frac{60}{360}\cdot\frac{1}{6}\cdot$.)

Задача 29 *Един басейн се пълни от една тръба за 10ч, а от друга за 12ч. Първата тръба е пълнила 1 час, след което е спряла за 30 минути ремонт, след това е продължила да пълни. Втората тръба работи безотказно. За колко време двете тръби заедно напълват басейна.*

Решение :
Нека с х означим времето за пълнене. За 1ч имаме напълнено $\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{12}{120}+\frac{10}{120}=\frac{22}{120}\cdot$. За следващия половин час пълни само втората тръба, т.е. за времето между 1ч и 1ч и 30 минути пълним $\frac{1}{12}\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$. Остава ни да напълним $1-\frac{22}{120}-\frac{1}{24}$. Ако означим оставащото време с y, то за y имаме $\frac{y}{10}+\frac{y}{12}=1-\frac{22}{120}-\frac{1}{24}$. Сумарното време за пълнене е $y+1+\frac{1}{2}$. Остава да намерим y.

Задача 30 *Един басейн се пълни от една тръба за 10ч, а от друга за 12ч. Първата тръба е пълнила 1 час, след което е спряла за 1 ремонт, след това е продължила да пълни. Втората тръба работи след 1вия час. За колко време се напълва басейна?*

6.4 някакво състезание с логически задачи

Задача 31 $(1+a)^4=4$
$(1+b)^4=3$

Задача 32 $(1+x)^4*10000=10000+132$
$(1+x)^4=1.0132$

7 Системи

Задача 33

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 - xy - y^2 = 19 \end{cases} \qquad\qquad x = y + 7$$

Решение :
$x = y + 7$
$(y+7)^2 - (y+7)y - y^2 = 19$
$y^2 + 14y + 49 - y^2 - 7y - y^2 = 19$
$-y^2 + 7y + 30 = 0$
$y^2 - 7y - 30 = 0 \rightarrow a = 1, b = -7, c = -30$
$D = 49 + 120 = 169, y_1 = 10$, $y_2 = -3$
$x_1 = 10 + 7 = 17, x_2 = -3 + 7 = 4$
Отг. Решенията на системата са: $(17, 10), (4, -3)$

Задача 34

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Решение :
$y = 2x - 1$
$x(2x - 1) - 1 = 0$
$2x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow a = 2, b = -1, c = -1$
$D = 1 - 4.2.(-1) = 9$ $x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2.2} = \frac{4}{4} = 1,$ $x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2.2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$
$y_1 = 2x_1 - 1 = 2 - 1 = 1,$ $y_2 = 2x_2 - 1 = 2(-\frac{1}{2}) - 1 = -2$
Отг. $(1, 1), (-\frac{1}{2}, -2)$

Задача 35

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Задача 36

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ x^2 - 4xy + 3y^2 + x - y = 0 \end{cases}$$

8 Ирационални уравнения

Задача 37 *Решете уравнението:* $\sqrt{x-5} - \sqrt{20-x} = -1$

Решение :
$\left(\sqrt{x-5} - \sqrt{20-x}\right)\left(\sqrt{x-5} + \sqrt{20-x}\right) = x + 5 + 20 - x = 25 \rightarrow$ няма решение.

Задача 38 *Решете уравнението:* $\sqrt{x-2}-\sqrt{2x-1}=0$

Решение :
$(\sqrt{x-2}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-1})=x-2+2x-1=3x-3$
$3x=3\to x=1$.
Проверка: $\sqrt{1-2}-\sqrt{2-1}=\sqrt{-1}-\sqrt{1}\neq 0\to$ няма решение.
За другия път $x-2\geq 0$ и $2x-1\geq 0$

9 Опростяване на изрази

Задача 39 *Да се опрости изразът:*

1. $\sqrt{0.36*49*25}=\sqrt{0.6^2*7^2*5^2}=\sqrt{0.6^2}*\sqrt{7^2}*\sqrt{5^2}=0.6*7*5=35*0.6=21$
2. $\frac{\sqrt{22.5}}{\sqrt{0.4}}=\frac{\sqrt{225}\sqrt{0.1}}{\sqrt{4}\sqrt{0.1}}=\frac{15}{2}$
3. $\sqrt{60}-(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=\sqrt{60}-((\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2)=$
   $\sqrt{60}-(3+2\sqrt{15}+5)=\sqrt{60}-3-2\sqrt{15}-5=\sqrt{60}-8-2\sqrt{15}$.
   Разлагане на 60 *на прости множители:* $60=2*2*3*5$. *Тогава* $\sqrt{60}=\sqrt{2*2*3*5}=\sqrt{2^2*3*5}=2\sqrt{15}$. *Отг.* -8

Да се направят зад 5,6,7,8,10 от картинката

Задача 40 *Да се опрости изразът*

- $\sqrt{5a^4}=\sqrt{5}\sqrt{a^2.a^2}=\sqrt{(a^2)^2}\sqrt{5}=a^2\sqrt{5}$
- $\sqrt{25a}=5\sqrt{a}$
- $\sqrt{147a^5}=\sqrt{21.7.a^5}=\sqrt{3.7^2.a^4.a}=7a^2\sqrt{3a}$
- $\sqrt{16,9.6,4}=\sqrt{\frac{169}{10}\frac{64}{10}}=\frac{\sqrt{169}\sqrt{64}}{\sqrt{10^2}}=\frac{13.8}{10}=\frac{13.4}{5}=\frac{52}{5}=10,4$
- $\sqrt{0,000576}=\sqrt{\frac{576}{10^6}}=\frac{num}{10^3}=$

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$\sqrt{x^2}=x$, *при* $x\geq 0$.

$x^2+1=0 \to x^2=-1 \to x=\pm\sqrt{-1}$ НЕ е реален израз
$x*x=x^2 \geq 0$

$\sqrt{x-2}$ трябва $x-2 \geq 0$ или $x \geq 2$ Това го наричаме ДЕФИНИЦИОННО МНОЖЕСТВО или ДЕФИНИЦИОННА ОБЛАСТ

Пример $\sqrt{x-2}<2$ Трябва да осигурим две неща:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ (\sqrt{x-2})^2 < 2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x-2 < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 6 \end{cases}$$

ОТГ. $x \in [6,+\infty)$
ОТГ. $x \in [2,6]$
ОТГ. $x \in [2,6)$

$\sqrt{x-2}(x^2-8x+15)<0$
$(x-3)^2+-8(x-3)+15=0$
$x-3=y$
$y^2-8y+15=0$

10 Редици и прогресии. Прогресии

10.1 Редици

Редица е съпоставяне на число по индекс. Може да се мисли и като функция, която съпоставя на всяко цяло положително(неотрицателно число) съответния член от редицата.
Пример: 1,4,8,13,19 .... като $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+n+1$(рекурентна зависимост). Да намерим друг начин на записване. Вземаме за пример a_5, $a_5=1+3+4+5+6$ то $a_n=1+(3+4+...+(n-1))=1-1-2+1+2+3+4+...+(n-1)=-2+\frac{(n-1)n}{2}$ или $a_n=-2+\frac{(n-1)n}{2}$. Ако вземем функцията $f(x)=-2+\frac{(x-1)x}{2}$ $=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-2$ за $x \in \mathbf{R}$.

Задача 41 *Да се намерят първите 5 члена на редицата, зададена с $a_1=1$ и $a_n=3a_{n-1}+3$.*

$a_2=3a_1+3=3.1+3=6$

10.2 Прогресии

Прогресиите са два вида - аритметична и геометрична. При аритметичната събираме, при геометричната умножаваме.
Примери: 1,2,3,4,5,6...(аритметична); 2,4,6,8,10...(аритметична); 1,2,4,8,16,32....(геометрична) ; 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ... (геометрична). Цялата теория на тези прогресии се състои в няколко формули. Формула за n-ти член на прогресията и формула за сума на първите n члена.

Задача 42 *Да се намери формула за n-ти член на аритметичната прогресия. Да се намери 10тия, 15тия член, 50тия, както и сумата на първите 10 члена.*

- *-21, -16, -11, -6, ...*

Решение :

- $a_1 = -21$, $d = 5$.
  $a_2 = a_1 + d$,
  $a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$
  $a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$
  $a_{10} = a_1 + 9d$
  $a_{15} = a_1 + 14d$
  $a_{50} = a_1 + 49d$
  $a_n = a_1 + (n-1)d$

  Идея: Да се намери сумата на числата от 1 до 100:
  $1 + 2 + 3 + ... + 100 = S$
  $100 + 99 + 98 + ... + 1 = S$
  Като съберем двете равенства, получаваме:
  $(1 + 100) + (2 + 99) + ... + (100 + 1) = 2S$
  $101.100 = 2S$ или $S = 50.101 = 5050$.

  За да намерим формулата за сумата на първите n члена, записваме следните равенства:
  $a_1 + a_2 + ... + a_n = S_n$
  $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 = S_n$

  $a_n + a_1 = a_1 + (n-1)d + a_1 = 2a_1 + (n-1)d$
  $a_{n-1} + a_2 = 2a_1 + (n-1)d$
  Малко мисъл:
  $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$
  $n[2a_1 + (n-1)d] = 2S_n$
  $S_n = na_1 + \frac{n-1}{2}d$

  $S_{10} =$
  $S_{50} = 50.(-21) + \frac{49}{2}5 = -1050 + \frac{2450}{2} = 1225 - 1050 = 175.$

Задача 43 *Да се намери формула за n-ти член на геомтерична прогресия $1, 2, 4, 8, ...$ Да се намери 6тия член , както и сумата на първите 10 члена.*

Решение :

$a_1, a_2, a_3...$ *като* $a_1 = 1, q = 2$.
$a_2 = a_1 q = 2$
$a_3 = a_2 q = a_1 q^2 = 4$
$a_{110} = a_1 q^{109} = 2^{109}$
$a_n = a_1 q^{n-1}$

$a_1 + a_2 + a_3... + a_n = S_n$
$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} = S_n$. *Умножаваме по q:*
$a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 ... + a_1 q^n = qS_n$. *Изваждаме равенствата, за да получим формулата:* $a_1 - a_1 q^n = S_n - qS_n$
$a_1(1 - q^n) = S_n(1 - q)$

$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$

•

Задача 44 *Да се намери формула за n-ти член на геомтерична прогресия 81,27,9,.... Да се намери 6тия член , както и сумата на първите 10 члена.*

Решение :

$a_1, a_2, a_3...$ *като*
$a_2 = a_1 q$
$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$

•

Задача 45 *3тия и 5тия член на аритметична прогресия са . Да се намери сумата на първите 10 члена.*

Задача 46 *5тия член на аритметична прогресия е, а сумата на първите 10 члена е ... . Да се намери прогресията.*

11 Олимпиада по математика

Задача 47 (Задача 1) *Решете неравенството:* $\frac{x}{x+3} \leq \frac{5}{x^2 - x - 12}$. *Намерете всички цели числа, които са решения на неравенството.*

Решение :

Забелязваме, че от $ax^2 + bc + c = a(x - x_1)(x - x_2) \to x^2 - x - 12 = (x+3)(x-4)$. Задачата става $\frac{x}{x+3} \leq \frac{5}{(x+3)(x-4)}$. Решаваме чрез прехвърляне и привеждане под общ знаменател.
$\frac{x}{x+3} - \frac{5}{(x+3)(x-4)} \leq 0$
$\frac{x(x-4)}{(x+3)(x-4)} - \frac{5}{(x+3)(x-4)} \leq 0$

$\frac{x^2-4x-5}{(x+3)(x-4)} \leq 0$
$x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$, мислим си $[x^2-4x-5=0 \to x_1=-1, x_2=5]$
$\frac{(x+1)(x-5)}{(x+3)(x-4)} \leq 0$
Нареждаме на числовата ос числата $-3,-1,4,5$. Тогава знаците отдясно наляво са $+,-,+,-,+$. Знаците с $-$ на нас ни трябват и дават интервалите $(4,5] \cup (-3,-1]$. Единствените цели числа решения на неравенството са 5 и -1.

Задача 48 (Задача 2) *Дадена е фунцкията $y=f(x)=(2-a)x^2+bx+c$*

1. *Да се намерят a, b, c, ако ,c са съответно първият член a_1 и частното q на геометрична прогресия, за която:*

$$\begin{cases} a_2+a_5-a_4=10 \\ a_3+a_6-a_5=20 \end{cases}$$

   b е сборът на корените на уравнението: $\sqrt{5x^2+20}=x^2-6$

2. *За намерените сойности на параметрите a, b, c намерете най-голямата и най-малката стойност на $f(x)$ в интервала $[-1,1]$*

Решение :
Нека напишем системата само с a_1 и q.

$$\begin{cases} a_1q+a_1q^4-a_1q^3=10 \\ a_1q^2+a_1q^5-a_1q^4=20 \end{cases}$$

Умножаваме по q първото уравнение и изваждаме от него второто уравнение. Това цялото го записвам на мястото на второто уравнение. Накратко вместо второто уравение, първо у-е*q - пиша вт. у-е .

$$\begin{cases} a_1q+a_1q^4-a_1q^3=10 \\ (a_1q+a_1q^4-a_1q^3)q-(a_1q^2+a_1q^5-a_1q^4)=10q-20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1q+a_1q^4-a_1q^3=10 \\ q=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1+16a_1-8a_1=10 \\ q=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1=1 \\ q=2 \end{cases}$$

Геометричната прогресия е $1,2,4,8,16,32....$

Минаваме към уравнението: $\sqrt{5x^2+20} = x^2 - 6$
$5x^2 + 20 = (x^2-6)^2 = x^4 - 12x^2 + 36$
$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$
Полагаме $x^2 = t$.
$t^2 - 17t + 16 = 0$
$t_1 = 1$, $t_2 = 16$. Тогава трябва да проверим кои от $x = \pm 1, \pm 4$ са корени. $x = \pm 1$ не дава решение, защото дясната част на у-ето е < 0. $x = \pm 4$ дава две решения. Сборът е 0.

Намерихме $a = 1, b = 0, c = 2$. Остава да намерим най-голяма и най-малка стойност на $x^2 + 2$ в интервала $[-1, 1]$. Най-голямата стойност е при $x = \pm 1$ и тогава $f(\pm 1) = 3$ и най-малката е $f(0) = 2$.

Задача 49 (Задача 3) *Даден е трапец, вписан в окръжност, с основи с дължини 12 и 20. Да се намери лицето на трапеца и дължината на бедрото, ако центърът на описаната окръжност лежи на голямата основа на трапеца.*

ЧЕРТЕЕЕЖ .
Решение :

12 Матура 21.05.2021 г. – Вариант 1

Задача 50 *Стойността на израза* $\sqrt{21^2 - 15^2} - \sqrt{150} + \sqrt{(\sqrt{6}-3)^2}$ *е:*
$\sqrt{21^2 - 15^2} - \sqrt{150} + \sqrt{(\sqrt{6}-3)^2} = \sqrt{(21-15)(21+15)} - \sqrt{5.5.2.3} + \left|\sqrt{6}-3\right| =$
Нека $a, b > 0$. *Тогава* $\sqrt{(a-b)^2} = a - b$, *ако* $a > b$.
$(a-b)^2 = (b-a)^2$. *Ако* $a < b$, *тогава* $\sqrt{(a-b)^2} = b - a$. *В нашия случай* $\left|\sqrt{6}-3\right| = 3 - \sqrt{6}$, *защото* $9 > 6$*(сравняваме квадратите).*
Израза става: $\sqrt{6.36} - 5\sqrt{6} + 3 - \sqrt{6} = 6\sqrt{6} - 6\sqrt{6} + 3 = 3$.

Задача 51 *най-големият корен на уравнението* $(x^2-4x)^2 + 7(x^2-4x) + 12 = 0$
Полагаме $y = x^2 - 4x$. *Имаме уравнение* $y^2 + 7y + 12 = 0$. $y_1 = -3, y_2 = -4$
Получаваме две квадратни уравнения: $x^2 - 4x + 3 = 0$ *и* $x^2 - 4x + 4 = 0$. *Първото има корени* 3 *и* 1, *а второто има корен* 2. *Решамае и чрез заместване* $x = 4$ *дава* $12 = 0$. *не е корен*
$x = 3$ *дава* $(9-12)^2 + 7(9-12) + 12 = 9 + 7.(-3) + 12 = 9 - 21 + 12 = 0$

13 Матура 23.05.2018 г. – Вариант 1

Задача 52 *Намерете най-голямата стойност на функцията* $f(x) = x^2 - 7x + 6$ *в интервала* $[1, 5]$.

Решение :
Трябва да сравним стойностите $f(1), f(5), f(-\frac{b}{a}) = f(\frac{7}{2})$.
$f(1) = 1 - 7 + 6 = 0$
$f(5) = 5.5 - 7.5 + 6 = 25 - 35 + 6 = -4$
$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - \frac{7.3}{2} + 6 = \frac{9-42+24}{4} = \frac{-11}{4}$
Отг. 0

Задача 53 *Намерете решенията на неравенството:*
$\frac{2-x}{x^2-x-2} \leq \frac{2-x}{x^2+x-2.}$

Ако $ax^2 + bx + c$ има корени x_1 и x_2, то а $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Корените на лявата дроб са $-1, 2$, а на дясната $1, -2$. Неравенството добива вида: $\frac{2-x}{(x+1)(x-2)} \leq \frac{2-x}{(x-1)(x+2)}$. Привеждаме под общ знаменател и получваме $\frac{(2-x)(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)(x-1)(x+2)} - \frac{(2-x)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)(x+1)(x-2)} \leq 0$

$\frac{(2-x)}{(x+1)(x-2)(x-1)(x+2)} [(x-1)(x+2) - (x+1)(x-2)] \leq 0$
$\frac{(2-x)}{(x+1)(x-2)(x-1)(x+2)} \left[x^2 + x - 2 - (x^2 - x - 2)\right] \leq 0$
$\frac{(2-x)}{(x+1)(x-2)(x-1)(x+2)} [2x] \leq 0$ Умножаваме по -1 и съкращаваме(! $x \neq 2$):

$\frac{2x}{(x+1)(x-1)(x+2)} \geq 0$. Нареждаме на числовата ос $-2, -1, 0, 1$. Решението на неравенството е : $(-\infty, -2) \cup (-1, 0] \cup (1, +\infty)$ Най-голямото цяло отрицателно е -3, 3 е най-малкото цяло положително.

14 Статистика/Стакмистика

Дефиниция 5 *Генерална съвкупност е множество от обекти, които представляват интерес за изледване и извадка е подмножество на генералната съвкупност. На човешки език, генерална съвкупност са 'неща' , за които искаме да събирам данни(но не е възможно да са всички по някаква причина) и извадка са "част"са някаква част събрани данни или "числа, отделени със запетая".*

Трите понятия, който се срещат в задачи са:

1. медиана -при нечетен брой числа е "числото в средатаа при четен брой е средното на двете числа в средата. Забележка: числата трябва да са сортирани във възходящ ред.
2. мода - най-често срещаното число
3. средно аритметично - сумата на числата върху броя числа.

Задача 54 *Да се намерят медианата, модата и ср. аритметично на следната извадка:*

Задача 55 *За статистическия ред 0, 1, a, 2, b, 5, 9, 11 модата е 1, а медианата е 2,5. Средноаритметичното на реда е равно на:*

15 Синусова и косинусова теорема. Решаване на триъгълник.

15.1 Теореми

Теорема 1 (Синусова теорема) *При стандартни означения в триъгълник имаме:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Теорема 2 (Косинусова теорема) *При стандартни означения в триъгълник имаме:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

15.2 Решаване на триъгълник

Теоремите са полезни при задачи за решаване на триъгълник. Благодарение на признаците за еднаквост на триъгълник, един триъгълник е напълно определен от:

1. две страни и ъгъл между тях
2. страна и два ъгъла
3. три страни

Чрез тези две теореми и свойства на медиани, ъглоповящи и височини можем да намерим всички елементи на триъгълник, които ни интересуват. Следва пример:

Задача 56 *Периметърът на равнобедрен триъгълник е 18 cm. Основата му е с 3 cm по- голяма от бедрото. Намерете дължината на радиуса на описаната около триъгълника окръжност.*

Решение :
Нека △ABC е равнобедрен триъгълник с AC=BC. Първо намираме страните. $a+b+c = 18$ като от това, че е равнобедрен, имаме $a = b$. От условието, $c = b + 3$. Тогава $b = 5$ и $c = 8$. От синусова теорема, имаме

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Височината в равнобедрен △ е и медиана, и ъглополовяща. Имаме $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{5}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{1} : \frac{3}{5} = \frac{5}{1}\cdot\frac{5}{3} = \frac{25}{3} = \frac{24}{3} + \frac{1}{3} = 8 + \frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}$. Тогава $R = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{3} = \frac{25}{6}$

Задача 57 *В $\triangle$ ABC е вписана окръжност с център точка O. Ако $AO = 3$, $BO = 5$ и $\angle ACB = 60°$, намерете: А) дължината на страната AB Б) радиуса на описаната около ABC окръжност В) радиуса на вписаната вABC окръжност.*

Решение :
Можем да намерим дължината на $\angle AOB$, като Използваме косинусова теорема, за да намерим дължината на AB.

16 Лихви

Проста лихва - олихвяването е веднъж.
Пример - Вземам 200лв от теб назаем с лихва 5%. Колко пари трябва да ти върна? **Решение :**
Трябва да върна 105% от сумата или 1.05 * 200 = 210лв.
Сложна лихва - това е начин да накараш простите хора да мислят, че ще върнат по-малко при кредити. Среща се също при инфлация. Пример. Ако лева през 2015 го вземем да има стойност 1лв, а инфлацията 2015 е 3.5% и през 2016 е 4%, то за да имаш покупателна стойност 1лв през 2017 началото, трябва да изхарчиш 1лв + олихвяване 2016 + олихвяване 2017. 1лв + 3.5ст = 1лв 3.5ст е за 2016. За 2017, трябва да вземем 4% от лева на 2016, т.е. сумарно става 1.04*1.035 = 1.0764лв.
Така достигаме до формулата за сложна лихва. Нека винаги инфлацията да е 4%. Тогава за сума пари S, 1 година по-късно имаме $S * 1.04$, 2 години по-късно имаме $S * 1.04^2$ и т.н.
Формулата изглежда така:
$S_e = S_b * (1 + r)^p$, където
S_e - sum to end(with)/ending sum
S_b - sum to begin(with)/beginning sum
r - interest rate
p - period

Задачи

Задача 58 *Кредит - потребителстки, ипотечен/жилищен.*

Задача 59 *(Лош пример)Да се върнем на нашия пример. Нека да трябва да ти изплатя 200лв с лихва 4% в период от 4-5 месеца като имаме олихвяване в края на всеки месец(оставащата сума). Колко пари ще трябва да ти върна?*

Решение :
Нека месечната вноска е x. За 4 месеца плащаме 4x. Сумата за връщане във всеки един месец е съответно 200, 200-x, 200-2x, 200-3x,0. Накрая на всеки месец първо олихвяваме, после плащаме. След първия месец сумата за връщане е 200*1.04, след втория месец(200*1.04-x)*1.04. След третия е

(сумата на втория)S_2*1.04 - x. Получаваме една редица S_1, S_2, S_3, S_4, като $S_1 = S * 1.04$, $S_2 = (S_1 - x) * 1.04$. $S_3 = (S_2 - x) * 1.04$, $S_4 = (S_3 - x)1.04 = 0$
Разписваме $S_4 = 1.04x + 1.04 * S_3 = 1.04x + 1.04^2 x + 1.04^2 S_2 = 1.04x + 1.04^2 x + 1.04^3 x + S_1 * 1.04^3 = 1.04x + 1.04^2 x + 1.04^3 x + S * 1.04^4 = 0$
$x(p + p^2 + p^3) = Sp^4$
$x = \frac{S}{1+p+p^2} = 64.07$. На практика този пример само плаши, олихвяването е годишно, но за тези неща трябва да се внимава. Процентите на дългосрочните кредити не са с фиксирана лихва.

17 Физика

$1km/h = 1 * \frac{1000}{3600} m/s \approx \frac{1}{3} m/s$
$3km/h \approx 1m/s$

18 Из разни тестове

Задача 60 *Да се намерят корените на уравнението:* $\frac{(3x^2+5)(x-2)}{x^2-4} = 0$

Решение :
Дефиниционнтата област на израза в лявата страна е $x^2 - 4 \neq 0$ или $x \neq \pm 2$. Решаваме числителя = 0. $(3x^2 + 5)(x - 2) = 0$ когато $(3x^2 + 5) = 0$ или $(x - 2) = 0$. Първото няма решение, а второто има корен $x = 2$. Но при $x = 2$ дробта става $\frac{0}{0}$. Следователно уравнението няма решение.

Задача 61 $\frac{3x^2}{x^2-1} - \frac{3x}{x+1} = \frac{3x^2}{x^2-1} - \frac{3x(x-1)}{(x-1)(x+1)} =$

Задача 62 $\frac{x-5}{x-4} = \frac{x-3}{4-x}$
$\frac{x-5}{x-4} = \frac{-x+3}{x-4}$
$\frac{x-5}{x-4} - \frac{-x+3}{x-4} = 0$
$\frac{x-5+x-3}{x-4} = 0,\ x \neq 4$
$2x - 8 = 0$
$x = 4$. *Но* $x \neq 4$, *следователно няма решение.*

ДОБАВИ ПАРАБОЛА u smiley face and ∩ is negative.

Задача 63 *При* $x \neq 1$ *и* $x \neq 9$ *изразът* $\frac{x^4-10x^2+9}{x^2-10x+9}$ *е тъждествено равен на:*

Решение :
Разлагаме числителя и знаменателя по $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, където x_1 и x_2 са корените на уравнението. Това се прилага два пъти - за знаменателя и за числителя, като се има предвид $x^2 = y$ дава квадратно уравение. Получаваме:
$\frac{(x^2-1)(x^2-9)}{(x-1)(x-9)} = \frac{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}{(x-1)(x-9)} = \frac{(x+1)(x^2-9)}{(x-9)}$

Задача 64 $25x^3 - x^5 > 0$
умножаваме по (-1)$x^5 - 25x^3 < 0$
$x^3(x^2 - 25) < 0$
$x^3(x+5)(x-5) < 0$
$x \in (-\infty, -5) \cup (0, 5)$.

Задача 65 *Аритметична прогресия* $a_{10} + a_{11} = 6$.
$a_1 + \dots + a_{20} = ?$
Решение:
$a_1 + 9d + a_1 + 10d = 6$
$2a_1 + 19d = 6$
$a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = ?$
$a_1 + (a_1 + d) + \dots + (a_1 + 19d) = ?$
$20a_1 + (1 + 2 + \dots 19)d = ?$
$20a_1 + \frac{19.20}{2}d = 20a_1 + 190d = 10.6 = 60$

друг начин:
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$
$a_{10} + a_{11} = (a_9 + d) + (a_{12} - d) = a_9 + a_{12} = \dots = a_1 + a_{20}$
$S_{20} = \frac{6}{2}20 = 60$

AAAAAAAAAAAAAAAAAA

Задача 66 $\sin\alpha.\cos\alpha = -\frac{1}{4}$, *намерете* $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.
Малко други подобрни сметки(мотивация):
Виет:
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
$x_1x_2 = \frac{c}{a}$
Следните сметки са често използвани:
$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = (x+y)^2 - 2xy$
$x^4 + y^4 = (x^2)^2 + (y^2)^2 = (x^2)^2 + (y^2)^2 + 2x^2y^2 - 2(xy)^2 =$
$(x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 = ((x+y)^2 - 2xy)^2 - 2(xy)^2$

$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2(\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1 - 2.(-\frac{1}{4})^2 =$
$= 1 - \frac{2}{16} = \frac{7}{8}$

19 Коментари

$\frac{1}{3-2\sqrt{2}} \to \frac{3+2\sqrt{2}}{1}$, $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$

$64^{\frac{1}{64}}$
$\frac{-4+1}{2(-4)} = (-4+1) : (-8)$