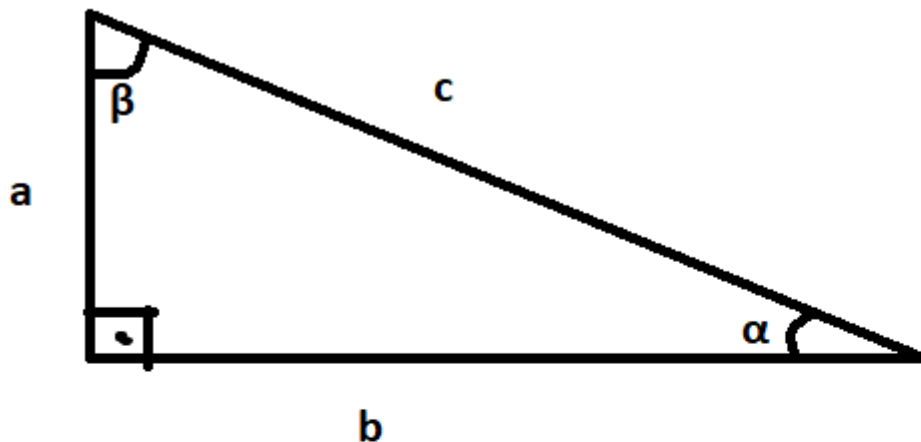


Книжка за упражнителни задачи на
Деспина

1 Теория

1.1 Триъгълник



Дефиниция 1 $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$, $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a}{b}$, $\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{b}{a}$

Да забележим, че $\sin(\beta) = \cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ и аналогично $\cos(\beta) = \sin(\alpha) = \frac{a}{c}$.
 $a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow (\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = 1 \rightarrow \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Тригонометрични тъждества ($\alpha, \beta \in [0, 90]$):

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(90 - \alpha)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) \operatorname{cotg}(\alpha) = 1$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Задача 1 Да се намерят останалите тригонометрични функции, ако $\cos(\alpha) = 0.3$

Решение :

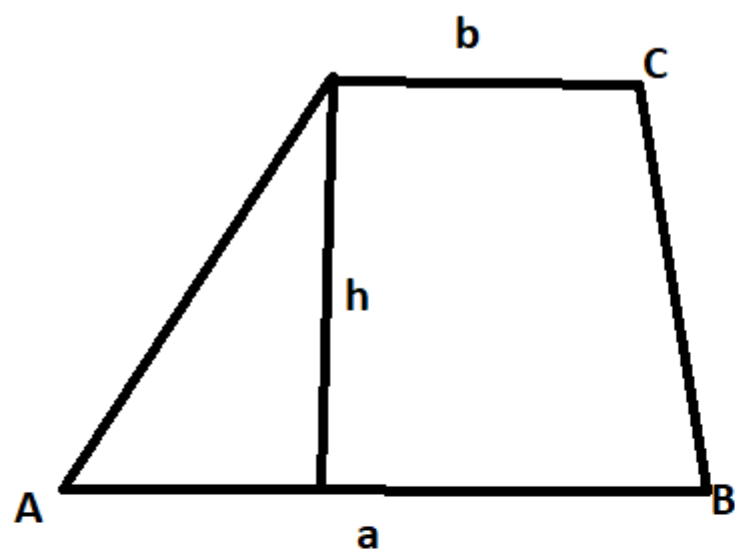
$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \rightarrow \sin^2(\alpha) = 1 - 0,09 \rightarrow \sin(\alpha) = \sqrt{0,91}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sqrt{0,91}}{0,3} = \frac{10\sqrt{0,91}}{3}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{0,3}{\sqrt{0,91}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{\sqrt{0,91}}{0,91} = \frac{30\sqrt{0,91}}{91}$$

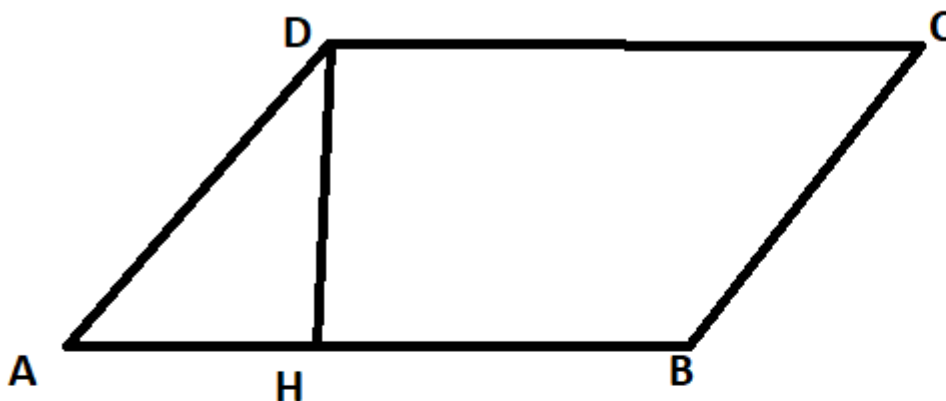
Задача 2 Да се намерят останалите тригонометрични функции, ако $\cos(\gamma) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.

1.2 Трапец



Лице на трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

1.3 Успоредник



Страните са две по две успоредни $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Лице на успоредник: $S = AB \cdot DH$ (тук се разбира дължините на страните)

Коментари: $\triangle ABD \equiv \triangle BCD$, $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$
 $\angle BAD = \angle BCD$ и $\angle ADC = \angle ABC$. $\angle ABC + \angle BAD = 180$.

Задачи - дадени са две страни на успоредник и ъгъл.

1.4 Вероятности - Комбинации, Вариации и Пермутации.

Дефиниция 2 *Пермутации - начини, по които може да наредим n обекта в една линия.*

Пример. Пермутация от 3 елемента са начините, по които може да наредим 3 "неща" на една линия едно до друго. Нека за определеност да са молив, химикал и флумастер. Начините, по които може да ги наредим са: ФХМ, ФМХ, МХФ, МФХ, ХМФ, ХФМ или общо 6 начина. Нека да добавим 4ти елемент ролер. За първото нареждане ФХМ, ролерът може да е на 4

позиции: РФХМ, ФРХМ, ФХРМ, ФХМР. Тогава 4те елемента може да ги наредим по $6.4 = 24$ начина. n обекта могат да се наредят по $n(n-1)\dots 1$ начина. Примерите по горе Ф, Х и М могат да се наредят по $3.2.1 = 6$ начина и Ф,Х, М, Р могат да се наредят по $4.3.2.1 = 24$ начина. Дефинираме n -факториел с $n! = n(n-1)\dots 1$.

Дефиниция 3 Вариация - избор на елементи където реда има значение - Налучкване на телефонен номер. V_{10}^4 .

Дефиниция 4 Комбинации - избор на елементи където реда няма значение - начини за вземане на различни цветове топки от урна(напр. сини, червени, зелени, жълти и т.н.).

Задача 3 По колко начина може да изберем 6 молива(различни) 10 молива(различни)?(Редът няма значение).

Решение :

Първи молив избираме по 10 начина, втория - по 9, и т.н. Общо $10.9.8.7.6.5$ начина.

Задача 4 Дадени са 10 молива с различни цветове. За оцветяване на картинка са необходими 6 точно определени цвята. Каква е вероятността случайно избрани 6 молива да могат да оцветят картинката?

Решение :

Вероятността първия молив да е от 6те е $\frac{6}{10}$. Вероятността втория молив да е подходящ за оцветяване е $\frac{5}{9}$ и т.н. Вероятността от 6 тегления да изтеглим моливите за оцветяване е $\frac{6.5.4.3.2.1}{10.9.8.7.6.5} = \frac{3}{10.9.7} = \frac{1}{10.3.7} = \frac{1}{210}$.

За упражнение: 2 молива от 3.

2 Неравенства

При умножаване на двете страни на неравенство с -1 , сменяме знака на неравенството. Пример: $3 < 5 \rightarrow -3 > -5$

Квадратни или полиномиални неравенства:

ДА СЕ ДОПИШАТ ПРИМЕРИ.

3 Квадратни уравнения и системи

1. системи уравнения
2. квадратни уравнения
3. неравенства (???)
4. други уравнения

Формули, които се използват за квадратни уравнения:

Ако е дадено уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, имаме дискриминанта $D = b^2 - 4ac$, тогава решенията се задават с $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Да разгледаме един пример.

Упражнение(?): $(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a})(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}) = ax^2 + bx + c$

Припомняме формулите за съкратено умножение:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Упражнителни задачи, които Деспина е решавала сама:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Още примери за решаване:

1. $x^2 - 6x + 8 = 0$

2. $x^2 - 5x + 6 = 0$

3. $x^2 - 5x + 6 = 0$

4. $x^2 - 5x + 6 = 0$

5. $x^2 - 5x + 6 = 0$

6. $x^2 - 5x + 6 = 0$

4 Еднаквост и подобност на триъгълници

Един триъгълник се определя от "три неща три страни, две страни и ъгъл между тях, страна и два ъгъла.

Признаци за еднаквост:

1. две страни и ъгъл между тях = две страни и ъгъл между тях => еднакви
2. страна и два ъгъла = страна и два ъгъла => еднакви
3. три страни = три страни => еднакви

Подобните триъгълници си приличат по това, че имат една и съща форма, но единият е 10 пъти или 5 пъти (или колкото и да е пъти) "по-голям" от другия

Признаци за подобност: (Трябва да се потвърди от учебник)

1. две страни са 5 пъти по-малки и ъгълът между тях е равен.
2. една страна е 5 пъти по-малка и 2 ъгъла са равни.
3. трите ъгъла са равни

Коефициент на подобие k ще наричаме отношението на страните между два подобни триъгълника. Съответните височини, ългополовящи и медиани са в отнишение колкото е коефициента на подобие k . За лицата отношението е коефициента на квадрат k^2 .

ирационални изрази, прогресии, статистика и обработка на данни, решаване на триъгълник- \sin , \cos , tg , cotg в $(0,180)$, синусова и косинусова теорема (?), елементи от стереометрията

Задача 5 Лицата на два подобни тригълници са 25 см^2 и 49 см^2 . Намерете коефициента на подобие.

Решение :

От условието имаме, че $k^2 = \frac{25}{49}$, тогава $k = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$

Задача 6 Лицата на два подобни тригълници са 24 см^2 и 6 см^2 . Периметра на първия тригълник е 24 см . Намерете периметра на втория.

Решение :

$$k^2 = \frac{24}{6} = 4 \rightarrow k = 2. P_1 = 24. P_2 = \frac{1}{2}24 = 12\text{см.}$$

Задача 7 Страните на два равностранни триъгълника са 4 и 8см. Намерете отношението на лицата.

Задача 8 Две съответни страни в два подобни триъгълника са 8 и 12см, а сборът на лицата им е 52 см². Намерете лицата на

5 Тригонометрия

6 Задачи с текст

6.1 Разни

Задача 9 Да се намери стойността на израза:

$$1. \sqrt{(2\sqrt{6} - 5)^2} - (-\sqrt{6})^3$$

Решение :

$$\begin{aligned} (-\sqrt{6})^3 &= (-\sqrt{6}) \cdot (-\sqrt{6}) \cdot (-\sqrt{6}) = -6\sqrt{6}. \\ \sqrt{(2\sqrt{6} - 5)^2} &= |2\sqrt{6} - 5| = 5 - 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{Отг. } 5 - 2\sqrt{6} - 6\sqrt{6} = 5 - 4\sqrt{6}.$$

$$\text{Коментар: } \sqrt{(3-4)^2} \neq 3-4 = -1, \sqrt{(3-4)^2} = |3-4| = 1$$

Коментар2: Да сравним числата $2\sqrt{6}$ и 5.

$$a, b > 0, \text{ то } a > b \iff a^2 > b^2. (2\sqrt{6})^2 = 24, 5^2 = 25. \text{ Тогава } 2\sqrt{6} < 5.$$

6.2 Линейни уравнения и неравенства

Задача 10 Сборът на две последователни естествени числа е със 131 по-малък от произведението им. Намерете числата.

Решение :

Ако първото(по-малкото от двете числа е x), второто число е $x+1$. Тогава от условието на задачата имаме $x + x + 1 = x(x+1) - 131$

$$2x + 1 = x^2 + x - 131.$$

$$x^2 + x - 131 - 2x - 1 = 0.$$

$$x^2 - x - 132 = 0. D = (-1)^2 - 4 \cdot (-132) = 1 + 4 \cdot 132 = 528 + 1 = 529.$$

$$x_1 = \frac{1+23}{2} = 12. x_2 = \frac{1-23}{2} = -11. -11 \text{ не е естествено. Отг. } 12 \text{ и } 13.$$

Задача 11 В един магазин продали 488 кг портокали, лимони и маслини. Портокалите били с 40 кг повече от лимоните, а маслините - 5 пъти по-малко от портокалите. По колко килограма са продали от всеки вид?

Задача 12 През един сезон в консервната фабрика "Добруджанка" са обработили по 48 т домати на ден. След като предали 1300 т пресметнали, че това е с 524 т по-малко от цялото количество домати. Колко дни във фабриката са обработвани домати?

Задача 13 Обиколката на един триъгълник е 126 см. Едната му страна е с 12 см по-къса от другата, а третата е 3/4 от сбора на првите две. Да се намери най-голямата страна на този триъгълник.

Задача 14 Попитали Николай на колко е години, а той отговорил: "Мама е на 38 години. Тя е с 2 години по-млада от татко. Татко пък има два пъти повече години, отколкото аз и сестра ми заедно. Но аз със с 4 години по-малък от сестра ми." На колко години са Николай и сестра му?

Задача 15 Един работник може да свърши определена работа за 15 дни, а друг работник за същото време свършва само 75 % от тази работа. Отначало двамата работници работели заедно 6 дни, а след това вторият само довършил останалата част. За колко дни била свършена цялата работа и какъв процент от нея е изработил всеки един работник?

6.3 Басейни

Задача 16 Един басейн се пълни от една тръба за 2 ч, от друга за 3ч, от трета за 4ч. За колко време се пълни от трите едновременно?

Задача 17 Един басейн се пълни от една тръба за 2 ч, от друга за 3ч. За колко време се пълни от двете едновременно? Каква част пълни всяка от тръбите?

Решение :

Разсъждения. За 1 час пълним $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Тогава ако времето за пълнене е x (в часове), то $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$. Тогава $3x + 2x = 6$ и $x = \frac{6}{5}$ часа или 1ч и 12мин. Първата тръба е напълнила $\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{5} = 60\%$. Тогава втората е напълнила $\frac{2}{5} = 40\%$ от басейна.

(Коментар: Първия басейн пълни за минута $\frac{1}{120}$, а втория $\frac{1}{180}$. За 12 минути пълним $\frac{12}{120} + \frac{12}{180} = \frac{12 \cdot 3 + 12 \cdot 2}{360} = \frac{60}{360} = \frac{1}{6}$.)

Задача 18 Един басейн се пълни от една тръба за 10ч, а от друга за 12ч. Първата тръба е пълнила 1 час, след което е спряла за 30 минути ремонт, след това е продължила да пълни. Втората тръба работи безотказно. За колко време двете тръби заедно напълват басейна.

Решение :

Нека с x означим времето за пълнене. За 1ч имаме напълнено $\frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{12}{120} + \frac{10}{120} = \frac{22}{120}$. За следващия половин час пълни само втората тръба, т.е. за времето между 1ч и 1ч и 30 минути пълним $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$. Остава ни да напълним $1 - \frac{22}{120} - \frac{1}{24}$. Ако означим оставащото време с y , то за y имаме $\frac{y}{10} + \frac{y}{12} = 1 - \frac{22}{120} - \frac{1}{24}$. Сумарното време за пълнене е $y + 1 + \frac{1}{2}$. Остава да намерим y .

Задача 19 Един басейн се пълни от една тръба за 10ч, а от друга за 12ч. Първата тръба е пълнила 1 час, след което е спряла за 1 ремонт, след това е продължила да пълни. Втората тръба работи след 1вия час. За колко време се напълва басейна?

7 Системи

Задача 20

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 - xy - y^2 = 19 \end{cases} \quad x = y + 7$$

Решение :

$$\begin{aligned} x &= y + 7 \\ (y + 7)^2 - (y + 7)y - y^2 &= 19 \\ y^2 + 14y + 49 - y^2 - 7y - y^2 &= 19 \\ -y^2 + 7y + 30 &= 0 \\ y^2 - 7y - 30 &= 0 \rightarrow a = 1, b = -7, c = -30 \\ D = 49 + 120 = 169, y_1 = 10, y_2 = -3 \\ x_1 = 10 + 7 = 17, x_2 = -3 + 7 = 4 \\ \text{Отг. Решенията на системата са: } (17, 10), (4, -3) \end{aligned}$$

Задача 21

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Решение :

$$\begin{aligned} y &= 2x - 1 \\ x(2x - 1) - 1 &= 0 \\ 2x^2 - x - 1 &= 0 \rightarrow a = 2, b = -1, c = -1 \\ D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 \quad x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \\ y_1 = 2x_1 - 1 = 2 - 1 = 1, \quad y_2 = 2x_2 - 1 = 2(-\frac{1}{2}) - 1 = -2 \\ \text{Отг. } (1, 1), (-\frac{1}{2}, -2) \end{aligned}$$

Задача 22

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Задача 23

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ x^2 - 4xy + 3y^2 + x - y = 0 \end{cases}$$

8 Ирационални уравнения

Задача 24 Решете уравнението: $\sqrt{x-5} - \sqrt{20-x} = -1$

Решение :

$$(\sqrt{x-5} - \sqrt{20-x})(\sqrt{x-5} + \sqrt{20-x}) = x+5+20-x = 25 \rightarrow \text{няма решение.}$$

Задача 25 Решете уравнението: $\sqrt{x-2} - \sqrt{2x-1} = 0$

Решение :

$$(\sqrt{x-2} - \sqrt{2x-1})(\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-1}) = x-2+2x-1 = 3x-3$$

$$3x = 3 \rightarrow x = 1.$$

Проверка: $\sqrt{1-2} - \sqrt{2-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{1} \neq 0 \rightarrow \text{няма решение.}$

За другия път $x-2 \geq 0$ и $2x-1 \geq 0$