

# Книжка за упражнителни задачи на Деспина

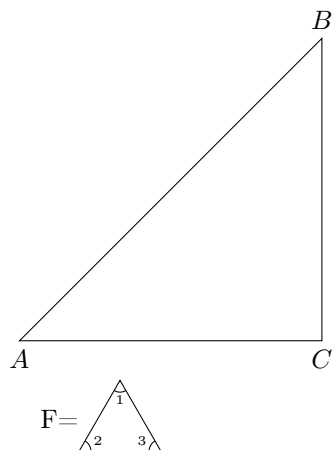
## Съдържание

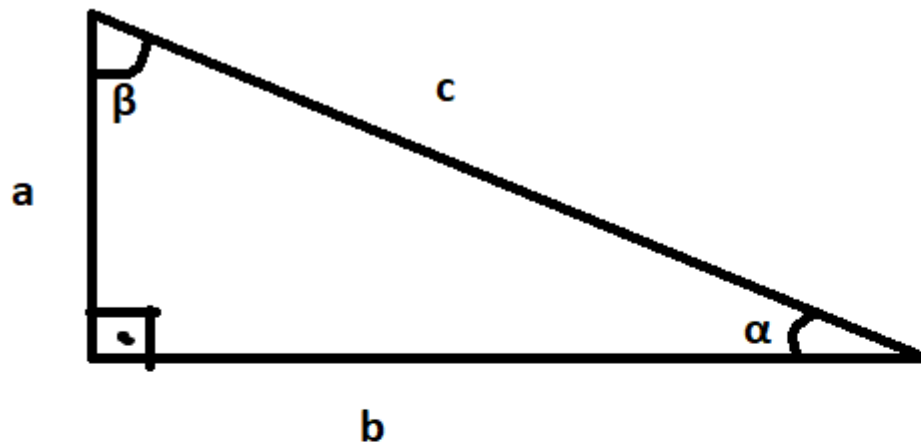
<b>1</b>	<b>Теория</b>	<b>2</b>
1.1	Триъгълник . . . . .	2
1.2	Трапец . . . . .	4
1.3	Успоредник . . . . .	5
1.4	Функции . . . . .	5
1.5	Линейна функция . . . . .	6
1.6	Квадратни функции . . . . .	6
1.7	Вероятности - Комбинации, Вариации и Пермутации. . . . .	6
1.8	Полиномиални и дробни неравенства - теория . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Неравенства - задачи</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Квадратни уравнения и системи</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Еднаквост и подобност на триъгълници</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Тригонометрия</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Задачи с текст</b>	<b>12</b>
6.1	Разни . . . . .	12
6.2	Линейни уравнения и неравенства . . . . .	14
6.3	Басейни . . . . .	15
6.4	някакво състезание с логически задачи . . . . .	15
<b>7</b>	<b>Системи</b>	<b>16</b>
<b>8</b>	<b>Ирационални уравнения</b>	<b>16</b>
<b>9</b>	<b>Опростяване на изрази</b>	<b>17</b>
<b>10</b>	<b>Редици и прогресии. Прогресии</b>	<b>18</b>
10.1	Редици . . . . .	18
10.2	Прогресии . . . . .	19

11 Олимпиада по математика	20
12 Матура 21.05.2021 г. – Вариант 1	22
13 Матура 23.05.2018 г. – Вариант 1	22
14 Статистика/Стакмистика	23
15 Синусова и косинусова теорема. Решаване на триъгълник.	24
15.1 Теорема . . . . .	24
15.2 Решаване на триъгълник . . . . .	24
16 Лихви	25
17 Физика	26
18 Из разни тестове	26
19 Коментари	27

## 1 Теория

### 1.1 Триъгълник





**Дефиниция 1**  $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ ,  $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a}{b}$ ,  $\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{b}{a}$

Да забележим, че  $\sin(\beta) = \cos(\alpha) = \frac{b}{c}$  и аналогично  $\cos(\beta) = \sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ .  
 $a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow (\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = 1 \rightarrow \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ .

Тригонометрични тъждества ( $\alpha, \beta \in [0, 90]$ ):

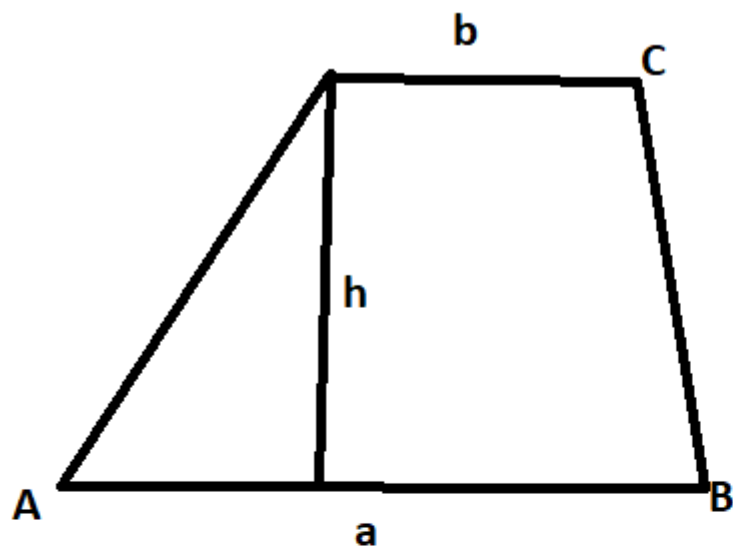
$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(90 - \alpha)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) \operatorname{cotg}(\alpha) = 1$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

## 1.2 Трапец

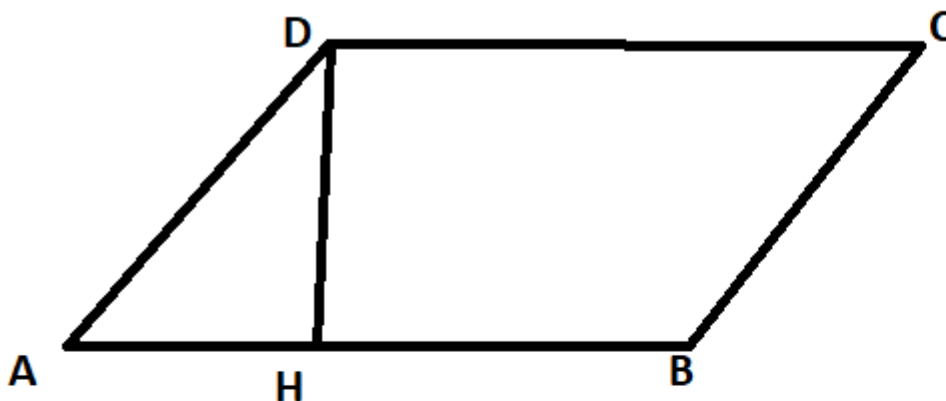


Лице на трапец:  $S = \frac{a+b}{2}h$

Трапец, вписан в окръжност е равнобедрен.

Трапец описан около окръжност:  $AB + CD + AD + BC$ , или сборът на срещуположните страни е равен.

### 1.3 Успоредник



Страните са две по две успоредни  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ . Лице на успоредник:  $S = AB \cdot DH$  (тук се разбира дължините на страните)

Коментари:  $\triangle ABD \equiv \triangle BCD$ ,  $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$   
 $\angle BAD = \angle BCD$  и  $\angle ADC = \angle ABC$ .  $\angle ABC + \angle BAD = 180$ .

Задачи - дадени са две страни на успоредник и ъгъл.

### 1.4 Функции

Функция е правило за съпоставяне на число по някакво правило. По-конкретно, имаме  $x$ , и на него съпоставяме  $f(x)$ . Често се записва като  $y = f(x)$ . Всичките  $x$ -ове, на които можем да съпоставим  $f(x)$ , се нарича дефиниционно множество на функцията  $f(x)$ . Графично се изобразяват наредените двойки  $(x, f(x))$  или  $(x, y)$  в координатна система, в която по хоризонталата е стойността на  $x$ , а по вертикалата - на  $y$ .

Пример за функция.  $y = f(x) = x$ . Графиката минава през всички точки  $(x, x)$  за  $x$  в дефиниционното множество. Дефиниционното множество е ця-

лата реална права.

Примери за функции, където деф. множество не е цялата права.  $y = \frac{1}{x}$  (ДМ:  $x \neq 0$ ) и  $y = \sqrt{x}$  (ДМ:  $x \geq 0$ )

## 1.5 Линейна функция

$$y = f(x) = ax + b$$

Значения на буквите а, b, c: а - "колко стръмна е правата"

$a > 0$  -> функцията е растяща ("катерим" отляво-надясно)

$a < 0$  -> функцията е намаляваща ("спускаме се" отляво-надясно)

b - "позицията на правата в координатната система по-точно отместване спрямо абсцисата

$b > 0$  колкото по-голямо е b, толкова по-голямо е отместването "нагоре".

$b < 0$  колкото по-малко е b, толкова по-голямо е отместването "надолу".

$(0, b)$  е пресечената точка на правата с ординатата (у-оста).

## 1.6 Квадратни функции

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Значения на буквите а, b, c:

а - "колко стръмна е една парабола"

$a > 0$  дава изгъбнала парабола

$a < 0$  дава вдлъбнала парабола

b и c - "позицията на параболата в координатната система"

$f(-\frac{b}{2a})$  е стойността на най-високата или най-ниската точка ( $a > 0$  най-ниска,  $a < 0$  най-висока)

$-\frac{b}{2a}$  е средата на абсцисата на корените (средната точка между двата корена) Координатите на най-висока (най-ниска точка са)  $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ .

## 1.7 Вероятности - Комбинации, Вариации и Пермутации.

**Дефиниция 2** Пермутации - начини, по които може да наредим n обекта в една линия. Обозначава се с  $P_n$ .

Пример. Пермутация от 3 елемента са начините, по които може да наредим 3 "неща" на една линия едно до друго. Нека за определеност да са молив, химикал и флумастер. Начините, по които може да ги наредим са:

ФХМ, ФМХ, МХФ, МФХ, ХМФ, ХФМ или общо 6 начина. Нека да добавим 4ти елемент ролер. За първото нареждане ФХМ, ролерът може да е на 4 позиции: РФХМ, ФРХМ, ФХРМ, ФХМР. Тогава 4те елемента може да ги наредим по  $6 \cdot 4 = 24$  начина. n обекта могат да се наредят по  $n(n-1) \dots 1$  начина. Примерите по горе Ф, Х и М могат да се наредят по  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  начина и Ф, Х, М, Р могат да се наредят по  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  начина. Дефинираме n-факториел с  $n! = n(n-1) \dots 1$ .

Нека напишем първите 6 факториела:

$$P_1 = 1! = 1$$

$$P_2 = 2! = 2$$

$$P_3 = 3! = 6$$

$$P_4 = 4! = 24$$

$$P_5 = 5! = 120$$

$$P_6 = 6! = 720$$

**Дефиниция 3** Вариация - избор на елементи където реда има значение - Налучкване на телефонен номер.  $V_{10}^4$ .

$$\text{Формула за вариация: } V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\text{Пример: } V_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 6 \cdot 5 = 30$$

**Дефиниция 4** Комбинации - избор на елементи където реда няма значение - начини за вземане на различни цветове топки от урна (напр. сини, червени, зелени, жълти и т.н.).

$$\text{Формула за комбинации: } C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \quad \text{Пример:}$$

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 5 \cdot 4 = 20$$

**Задача 1** По колко начина може да изберем 6 молива (различни) 10 молива (различни)? (Редът няма значение).

**Решение :**

Първи молив избираме по 10 начина, втория - по 9, и т.н. Общо  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$  начина.

**Задача 2** Дадени са 10 молива с различни цветове. За оцветяване на картинка са необходими 6 точно определени цвята. Каква е вероятността случайно избрани 6 молива да могат да оцветят картинката?

**Решение :**

Вероятността първия молив да е от 6те е  $\frac{6}{10}$ . Вероятността втория молив да е подходящ за оцветяване е  $\frac{5}{9}$  и т.н. Вероятността от 6 тегления да изтеглим моливите за оцветяване е  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{3}{10 \cdot 9 \cdot 7} = \frac{1}{10 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{1}{210}$ .

За упражнение: 2 молива от 3.

**Задача 3** Да се намерят всичките възможни комбинации RGB цветове с интервал  $[0, 255]$ .

## 1.8 Полиномиални и дробни неравенства - теория

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n < 0.$$

$$a_0(x - x_1) \dots (x - x_n) < 0 \quad \text{Нека, за определеност, имаме } x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

По подобен начин ако имаме дроби. (Да се редактира)

## 2 Неравенства - задачи

При умножаване на двете страни на неравенство с  $-1$ , сменяме знака на неравенството. Пример:  $3 < 5 \rightarrow -3 > -5$

Квадратни или полиномиални неравенства:

**Задача 4** Дефиниционното множество на израза  $\frac{2x+4}{\sqrt{5-x}}$  е:

Определя се от  $5 - x > 0$

$$5 > x$$

$$x < 5 \quad x \in (-\infty, 5)$$

**Задача 5**  $A = \sqrt{3x^2 + 7x + 5} + 2x - 1$  при  $x = -1$

$$A = \sqrt{3 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 5} + 2(-1) - 1 = \sqrt{3 - 7 + 5} - 2 - 1 = 1 - 3 = -2$$

**Задача 6** Корените на уравнението  $\sqrt{x+1} = 5 - x$

Повдигаме на квадрат и имаме уравнението:

$$x + 1 = (5 - x)^2$$

$$x^2 - 10x - x + 25 - 1 = 0$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$x_1 = 3, x_2 = 8$$

ПРОВЕРКА:

$$x_1 = 3 \rightarrow 3 + 1 = ? (5 - 3)^2 \text{ ОК}$$

$$x_2 = 8 \rightarrow 8 + 1 = ? (5 - 8)^2 \text{ ОК}$$

Корените са 3 и 8.

**Задача 7** Произведението на корените на уравнението  $\sqrt{3x^2 - 8x - 2} = 1$

са:

$$3x^2 - 8x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -\frac{1}{3}$$

Формули на Виет:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{ПРОВЕРКА: } x_1 = 3 \rightarrow \sqrt{3 \cdot 9 - 8 \cdot 3 - 2} = \sqrt{27 - 24 - 2} = \sqrt{1} \text{ ОК}$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} \rightarrow \sqrt{3 \cdot \frac{1}{9} + 8 \cdot \frac{1}{3} - 2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2} = \sqrt{1} \text{ ОК}$$

**Задача 8** Броят на корените на уравнението  $(9 - x^2)\sqrt{x+2} = 0$  е:

Решаваме поотделно  $9 - x^2 = 0$  и  $\sqrt{x+2} = 0$ , получаваме корени  $x_{1,2} = \pm 3$  и  $x_3 = -2$ , НО при  $x = -3$  израза  $\sqrt{x+2}$  не е дефиниран, т.е.  $x = -3$  не е корен. Тогава корените са два на брой.

**Задача 9** Кое от посочените уравнения има корен:

$$1. \sqrt{x^2 + 8} = -3, \text{ няма отрицателен корен}$$



2.  $\sqrt{x-7} = 5 - x$

3.  $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3} = 0$ ,  
*не е възможно едновременно  $\sqrt{x+5} = 0$  и  $\sqrt{x+3} = 0$ , по-точно  $\sqrt{x+5} = 0$  тогава и само тогава, когато  $x = -5$  и  $\sqrt{x+3} = 0$  тогава и само тогава, когато  $x = -3$*

4.  $\sqrt{x-3} = 3 - x$

**Задача 10**  $\sqrt{x+6} = x$

$x^2 - x - 6 = 0$ ,

$D = 1 - 4 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2$

**Задача 11**  $\sqrt{\frac{3x}{x-2}} + 6\sqrt{\frac{x-2}{3x}} = 5$

Полагаме  $y = \sqrt{\frac{3x}{x-2}}$ , то  $\sqrt{\frac{x-2}{3x}} = 1/y$

$y + \frac{6}{y} = 5$ ,  $y \neq 0$

$y^2 - 5y + 6 = 0$

**Задача 12**  $\sqrt{x-4} + x - 4 = 6$ . Полагаме  $\sqrt{x-4} = y$ .

$y + y^2 = 6$

$y^2 + y - 6 = 0$

### 3 Квадратни уравнения и системи

1. системи уравнения

2. квадратни уравнения

3. неравенства (???)

4. други уравнения

Формули, които се използват за квадратни уравнения:

Ако е дадено уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ , имаме дискриминанта  $D = b^2 - 4ac$ , тогава решенията се задават с  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ . Да разгледаме един пример.

Упражнение(?):  $(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a})(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}) = ax^2 + bx + c$

Припомняме формулите за съкратено умножение:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Упражнителни задачи, които Деспина е решавала сама:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Още примери за решаване:

1.  $x^2 - 6x + 8 = 0$

2.  $x^2 - 5x + 6 = 0$

3.  $x^2 - 5x + 6 = 0$

4.  $x^2 - 5x + 6 = 0$

5.  $x^2 - 5x + 6 = 0$

6.  $x^2 - 5x + 6 = 0$

## 4 Еднаквост и подобност на триъгълници

Един триъгълник се определя от "три неща три страни, две страни и ъгъл между тях, страна и два ъгъла.

Признаци за еднаквост:

1. две страни и ъгъл между тях = две страни и ъгъл между тях => еднакви
2. страна и два ъгъла = страна и два ъгъла => еднакви
3. три страни = три страни => еднакви

Подобните триъгълници си приличат по това, че имат една и съща форма, но единият е 10 пъти или 5 пъти (или колкото и да е пъти) "по-голям" от другия

Признаци за подобност: (Трябва да се потвърди от учебник)

1. две страни са 5 пъти по-малки и ъгълът между тях е равен.
2. една страна е 5 пъти по-малка и 2 ъгъла са равни.
3. трите ъгъла са равни

Коефициент на подобие  $k$  ще наричаме отношението на страните между два подобни триъгълника. Съответните височини, ългополовящи и медиани са в отнишение колкото е коефициента на подобие  $k$ . За лицата отношението е коефициента на квадрат  $k^2$ .

ирационални изрази, прогресии, статистика и обработка на данни, решаване на триъгълник-  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{cotg}$  в  $(0,180)$ , синусова и косинусова теорема (?), елементи от стереометрията

**Задача 13** *Лицата на два подобни тригълници са  $25 \text{ см}^2$  и  $49 \text{ см}^2$ . Намерете коефициента на подобие.*

**Решение :**

От условието имаме, че  $k^2 = \frac{25}{49}$ , тогава  $k = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$

**Задача 14** *Лицата на два подобни тригълници са  $24 \text{ см}^2$  и  $6 \text{ см}^2$ . Периметъра на първия триъгълник е  $24 \text{ см}$ . Намерете периметъра на втория.*

**Решение :**

$$k^2 = \frac{24}{6} = 4 \rightarrow k = 2. P_1 = 24. P_2 = \frac{1}{2}24 = 12\text{см.}$$

**Задача 15** Страните на два равностранни триъгълника са 4 и 8см. Намерете отношението на лицата.

**Задача 16** Две съответни страни в два подобни триъгълника са 8 и 12см, а сборът на лицата им е 52 см<sup>2</sup>. Намерете лицата на

## 5 Тригонометрия

**Задача 17** Да се намерят останалите тригонометрични функции, ако  $\cos(\alpha) = 0.3$

**Решение :**

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \rightarrow \sin^2(\alpha) = 1 - 0.09 \rightarrow \sin(\alpha) = \sqrt{0.91}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sqrt{0.91}}{0.3} = \frac{10\sqrt{0.91}}{3}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{0.3}{\sqrt{0.91}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{\sqrt{0.91}}{0.91} = \frac{30\sqrt{0.91}}{91}$$

**Задача 18** Да се намерят останалите тригонометрични функции, ако  $\cos(\gamma) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ .

**Решение :**

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow \sqrt{\sin^2(\alpha)} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

## 6 Задачи с текст

### 6.1 Разни

**Задача 19** Да се подредят по големина числата: 1, 2,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{7}$ ,  $\frac{5}{2}$ ,  $\frac{8}{3}$ ,  $\frac{7}{3}$ ,  $2\sqrt{2}$ .

**Решение :**

$\sqrt{4} = 2$ , тогава коренире около 2 се подреждат:  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{4} = 2$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{8}$ .  
 $\frac{5}{2} = 2.5$ ,  $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \approx 2.667$ ,  $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \approx 2.333$ .

Ако  $a$  и  $b$  са положителни, то  $a > b$ , точно когато  $a^2 > b^2$ . Да сравним  $\frac{5}{2}$  с  $\sqrt{5}$ . Повдигаме на втора степен. Получаваме  $\frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$  и 5.

$$\sqrt{5} \approx 2.25, 1.74 > \sqrt{3} > 1.73$$

$$\sqrt{2} \approx 1.4, \text{ защото } 14^2 = 196.$$

$$\frac{8^2}{3^2} = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}.$$

$$\frac{7^2}{3^2} = \frac{49}{9} = 5\frac{4}{9}.$$

Квадратите на числата са: 1, 4, 2, 3, 5, 7,  $6\frac{1}{4}$ ,  $7\frac{1}{9}$ ,  $5\frac{4}{9}$ , 8  
 Отг. 1,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ , 2,  $\sqrt{5}$ ,  $\frac{7}{3}$ ,  $\frac{5}{2}$ ,  $\sqrt{7}$ ,  $\frac{8}{3}$ ,  $2\sqrt{2}$ .

to do:

Правилните дроби със знаменател от 1 до 10:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= 0.5 \\ \frac{1}{3} &= 0.3333(3) \\ \frac{1}{4} &= 0.25 \\ \frac{1}{5} &= 0.2 \\ \frac{1}{6} &= 0.16666(6) \\ \frac{1}{7} &= 0.(142857) \\ \frac{2}{7} &\approx 0.2857142857142857 \\ \frac{3}{7} &\approx 0.42857142857 \\ \frac{4}{7} &= 0.125 \\ \frac{5}{7} &= 0.111(1)\end{aligned}$$

Правилните дроби със знаменател 7 имат структура.

1,2,3,4,5,6

1,2,4,5,7,8

42857142857142857142857

Признаци на делимост:

- 2 : ако последната цифра се дели на 2
- 3: ако сумата на цифрите се дели на 3
- 4: ако последните две цифри се делят на 4
- 5: ако последната цифра е 5 или 0
- 6: ако се дели на 3 и на 2
- 8: ако последните 3 цифри се делят на 0
- 9: ако сумата на цифрите се дели на 9

**Задача 20** *Да се намери стойността на израза:*

$$1. \sqrt{(2\sqrt{6} - 5)^2} - (-\sqrt{6})^3$$

**Решение :**

$$(-\sqrt{6})^3 = (-\sqrt{6}) \cdot (-\sqrt{6}) \cdot (-\sqrt{6}) = -6\sqrt{6}.$$

$$\sqrt{(2\sqrt{6} - 5)^2} = |2\sqrt{6} - 5| = 5 - 2\sqrt{6}$$

Отг.  $5 - 2\sqrt{6} - 6\sqrt{6} = 5 - 4\sqrt{6}$ .

Коментар:  $\sqrt{(3-4)^2} \neq 3-4 = -1$ ,  $\sqrt{(3-4)^2} = |3-4| = 1$

Коментар2: Да сравним числата  $2\sqrt{6}$  и 5.

$a, b > 0$ , то  $a > b \iff a^2 > b^2$ .  $(2\sqrt{6})^2 = 24$ ,  $5^2 = 25$ . Тогава  $2\sqrt{6} < 5$ .

## 6.2 Линејни уравнения и неравенства

**Задача 21** *Сборът на две последователни естествени числа е със 131 по-малък от произведението им. Намерете числата.*

**Решение :**

Ако първото (по-малкото от двете числа е  $x$ ), второто число е  $x + 1$ . Тогава от условието на задачата имаме  $x + x + 1 = x(x + 1) - 131$

$$2x + 1 = x^2 + x - 131.$$

$$x^2 + x - 131 - 2x - 1 = 0.$$

$$x^2 - x - 132 = 0. D = (-1)^2 - 4 \cdot (-132) = 1 + 4 \cdot 132 = 528 + 1 = 529.$$

$$x_1 = \frac{1+23}{2} = 12, x_2 = \frac{1-23}{2} = -11. -11 \text{ не е естествено. Отг. } 12 \text{ и } 13.$$

**Задача 22** *В един магазин продали 488 кг портокали, лимони и маслини. Портокалите били с 40 кг повече от лимоните, а маслините - 5 пъти по-малко от портокалите. По колко килограма са продали от всеки вид?*

**Решение :**

Да означим портокалите с  $x$ . Тогава лимоните са  $x - 40$ , а маслините са  $\frac{x}{5}$ . Тогава  $x + x - 40 + \frac{x}{5} = 488$ . Умножаваме двете страни (на  $y$ -ето) по 5.

$$10x - 200 + x = 488 \cdot 5$$

$$11x = 488 \cdot 5 + 200 = 2640$$

$$x = \frac{2640}{11} = 240.$$

Отг. 240кг, 200кг лимони, 48 кг. маслини. Друг начин за смятане е следният:

$$2\frac{1}{5}x = 488 + 40$$

$$\frac{11}{5}x = 528$$

$$x = 528 \cdot \frac{5}{11} = 240.$$

**Задача 23** *През един сезон в консервната фабрика "Добруджанка" са обработили по 48 т домати на ден. След като предали 1300 т пресметнали, че това е с 524 тт по-малко от цялото количество домати. Колко дни във фабриката са обработвани домати?*

**Задача 24** *Обиколката на един триъгълник е 126 см. Едната му страна е с 12 см по-къса от другата, а третата е 3/4 от сбора на првите две. Да се намери най-голямата страна на този триъгълник.*

**Задача 25** *Попитали Николай на колко е години, а той отговорил: "Мама е на 38 години. Тя е с 2 години по-млада от татко. Татко пък има два пъти повече години, отколкото аз и сестра ми заедно. Но аз със с 4 години по-малък от сестра ми." На колко години са Николай и сестра му?*

**Задача 26** Един работник може да свърши определена работа за 15 дни, а друг работник за същото време свършва само 75 % от тази работа. Отначало двамата работници работели заедно 6 дни, а след това вторият само довършил останалата част. За колко дни била свършена цялата работа и какъв процент от нея е изработил всеки един работник?

### 6.3 Басейни

**Задача 27** Един басейн се пълни от една тръба за 2 ч, от друга за 3ч, от трета за 4ч. За колко време се пълни от трите едновременно?

**Задача 28** Един басейн се пълни от една тръба за 2 ч, от друга за 3ч. За колко време се пълни от двете едновременно? Каква част пълни всяка от тръбите?

**Решение :**

Разсъждения. За 1 час пълним  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ . Тогава ако времето за пълнене е  $x$  (в часове), то  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$ . Тогава  $3x + 2x = 6$  и  $x = \frac{6}{5}$  часа или 1ч и 12мин. Първата тръба е напълнила  $\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{5} = 60\%$ . Тогава втората е напълнила  $\frac{2}{5} = 40\%$  от басейна.

(Коментар: Първия басейн пълни за минута  $\frac{1}{120}$ , а втория  $\frac{1}{180}$ . За 12 минути пълним  $\frac{12}{120} + \frac{12}{180} = \frac{12.3+12.2}{360} = \frac{60}{360} \cdot \frac{1}{6}$ .)

**Задача 29** Един басейн се пълни от една тръба за 10ч, а от друга за 12ч. Първата тръба е пълнила 1 час, след което е спряла за 30 минути ремонт, след това е продължила да пълни. Втората тръба работи безотказно. За колко време двете тръби заедно напълват басейна.

**Решение :**

Нека с  $x$  означим времето за пълнене. За 1ч имаме напълнено  $\frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{12}{120} + \frac{10}{120} = \frac{22}{120}$ . За следващия половин час пълни само втората тръба, т.е. за времето между 1ч и 1ч и 30 минути пълним  $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$ . Остава ни да напълним  $1 - \frac{22}{120} - \frac{1}{24}$ . Ако означим оставащото време с  $y$ , то за  $y$  имаме  $\frac{y}{10} + \frac{y}{12} = 1 - \frac{22}{120} - \frac{1}{24}$ . Сумарното време за пълнене е  $y + 1 + \frac{1}{2}$ . Остава да намерим  $y$ .

**Задача 30** Един басейн се пълни от една тръба за 10ч, а от друга за 12ч. Първата тръба е пълнила 1 час, след което е спряла за 1 ремонт, след това е продължила да пълни. Втората тръба работи след 1вия час. За колко време се напълва басейна?

### 6.4 някакво състезание с логически задачи

**Задача 31**  $(1 + a)^4 = 4$   
 $(1 + b)^4 = 3$

**Задача 32**  $(1 + x)^4 * 10000 = 10000 + 132$   
 $(1 + x)^4 = 1.0132$

## 7 Системи

### Задача 33

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 - xy - y^2 = 19 \end{cases} \quad x = y + 7$$

**Решение :**

$$x = y + 7$$

$$(y + 7)^2 - (y + 7)y - y^2 = 19$$

$$y^2 + 14y + 49 - y^2 - 7y - y^2 = 19$$

$$-y^2 + 7y + 30 = 0$$

$$y^2 - 7y - 30 = 0 \rightarrow a = 1, b = -7, c = -30$$

$$D = 49 + 120 = 169, y_1 = 10, y_2 = -3$$

$$x_1 = 10 + 7 = 17, x_2 = -3 + 7 = 4$$

Отг. Решенията на системата са:  $(17, 10), (4, -3)$

### Задача 34

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$

**Решение :**

$$y = 2x - 1$$

$$x(2x - 1) - 1 = 0$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow a = 2, b = -1, c = -1$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 \quad x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$y_1 = 2x_1 - 1 = 2 - 1 = 1, \quad y_2 = 2x_2 - 1 = 2(-\frac{1}{2}) - 1 = -2$$

Отг.  $(1, 1), (-\frac{1}{2}, -2)$

### Задача 35

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

### Задача 36

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ x^2 - 4xy + 3y^2 + x - y = 0 \end{cases}$$

## 8 Иррационални уравнения

**Задача 37** Решете уравнението:  $\sqrt{x-5} - \sqrt{20-x} = -1$

**Решение :**

$$(\sqrt{x-5} - \sqrt{20-x})(\sqrt{x-5} + \sqrt{20-x}) = x+5+20-x = 25 \rightarrow \text{няма решение.}$$



**Задача 38** Решете уравнението:  $\sqrt{x-2} - \sqrt{2x-1} = 0$

**Решение :**

$$(\sqrt{x-2} - \sqrt{2x-1})(\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-1}) = x-2 + 2x-1 = 3x-3$$

$$3x = 3 \rightarrow x = 1.$$

Проверка:  $\sqrt{1-2} - \sqrt{2-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{1} \neq 0 \rightarrow$  няма решение.

За другия път  $x-2 \geq 0$  и  $2x-1 \geq 0$

## 9 Опростиране на изрази

**Задача 39** Да се опрости изразът:

$$1. \sqrt{0.36 * 49 * 25} = \sqrt{0.6^2 * 7^2 * 5^2} = \sqrt{0.6^2} * \sqrt{7^2} * \sqrt{5^2} = 0.6 * 7 * 5 = 35 * 0.6 = 21$$

$$2. \frac{\sqrt{22.5}}{\sqrt{0.4}} = \frac{\sqrt{225} \sqrt{0.1}}{\sqrt{4} \sqrt{0.1}} = \frac{15}{2}$$

$$3. \sqrt{60} - (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = \sqrt{60} - ((\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2) = \sqrt{60} - (3 + 2\sqrt{15} + 5) = \sqrt{60} - 3 - 2\sqrt{15} - 5 = \sqrt{60} - 8 - 2\sqrt{15}.$$

Разлагане на 60 на прости множители:  $60 = 2 * 2 * 3 * 5$ . Тогава

$$\sqrt{60} = \sqrt{2 * 2 * 3 * 5} = \sqrt{2^2 * 3 * 5} = 2\sqrt{15}. \text{ Отг. } -8$$

Да се направят зад 5,6,7,8,10 от картинката

**Задача 40** Да се опрости изразът

$$\bullet \sqrt{5a^4} = \sqrt{5} \sqrt{a^2 \cdot a^2} = \sqrt{(a^2)^2} \sqrt{5} = a^2 \sqrt{5}$$

$$\bullet \sqrt{25a} = 5\sqrt{a}$$

$$\bullet \sqrt{147a^5} = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot a^5} = \sqrt{3 \cdot 7^2 \cdot a^4 \cdot a} = 7a^2 \sqrt{3a}$$

$$\bullet \sqrt{16,9,6,4} = \sqrt{\frac{169}{10} \frac{64}{10}} = \frac{\sqrt{169} \sqrt{64}}{\sqrt{10^2}} = \frac{13.8}{10} = \frac{13.4}{5} = \frac{52}{5} = 10,4$$

$$\bullet \sqrt{0,000576} = \sqrt{\frac{576}{10^6}} = \frac{\sqrt{576}}{10^3} =$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$
$$\sqrt{x^2} = x, \text{ при } x \geq 0.$$

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \text{ НЕ е реален израз}$$

$$x * x = x^2 \geq 0$$

$\sqrt{x-2}$  трябва  $x-2 \geq 0$  или  $x \geq 2$  Това го наричаме ДЕФИНИЦИОННО МНОЖЕСТВО или ДЕФИНИЦИОННА ОБЛАСТ

Пример  $\sqrt{x-2} < 2$  Трябва да осигурим две неща:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ (\sqrt{x-2})^2 < 2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x-2 < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 6 \end{cases}$$

$$\text{ОТГ. } x \in [6, +\infty)$$

$$\text{ОТГ. } x \in [2, 6]$$

$$\text{ОТГ. } x \in [2, 6)$$

$$\sqrt{x-2}(x^2 - 8x + 15) < 0$$

$$(x-3)^2 + -8(x-3) + 15 = 0$$

$$x-3 = y$$

$$y^2 - 8y + 15 = 0$$

## 10 Редици и прогресии. Прогресии

### 10.1 Редици

Редица е съпоставяне на число по индекс. Може да се мисли и като функция, която съпоставя на всяко цяло положително(неотрицателно число) съответния член от редицата.

Пример: 1,4,8,13,19 .... като  $a_1 = 1$ ,  $a_n = a_{n-1} + n + 1$ (рекурентна зависимост). Да намерим друг начин на записване. Вземаме за пример  $a_5$ ,  $a_5 = 1+3+4+5+6$  то  $a_n = 1+(3+4+\dots+(n-1)) = 1-1-2+1+2+3+4+\dots+(n-1) = -2 + \frac{(n-1)n}{2}$  или  $a_n = -2 + \frac{(n-1)n}{2}$ . Ако вземем функцията  $f(x) = -2 + \frac{(x-1)x}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 2$  за  $x \in \mathbf{R}$ .

**Задача 41** Да се намерят първите 5 члена на редицата, зададена с  $a_1 = 1$  и  $a_n = 3a_{n-1} + 3$ .

$$a_2 = 3a_1 + 3 = 3 \cdot 1 + 3 = 6$$

## 10.2 Прогресии

Прогресиите са два вида - аритметична и геометрична. При аритметичната събираме, при геометричната умножаваме.

Примери: 1,2,3,4,5,6... (аритметична); 2,4,6,8,10... (аритметична);  
1,2,4,8,16,32... (геометрична);  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots$  (геометрична). Цялата теория на тези прогресии се състои в няколко формули. Формула за  $n$ -ти член на прогресията и формула за сума на първите  $n$  члена.

**Задача 42** Да се намери формула за  $n$ -ти член на аритметичната прогресия. Да се намери 10тия, 15тия член, 50тия, както и сумата на първите 10 члена.

- -21, -16, -11, -6, ...

**Решение :**

- $a_1 = -21, d = 5.$   
 $a_2 = a_1 + d,$   
 $a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$   
 $a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$   
 $a_{10} = a_1 + 9d$   
 $a_{15} = a_1 + 14d$   
 $a_{50} = a_1 + 49d$   
 $a_n = a_1 + (n - 1)d$

Идея: Да се намери сумата на числата от 1 до 100:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = S$$

$$100 + 99 + 98 + \dots + 1 = S$$

Като съберем двете равенства, получаваме:

$$(1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (100 + 1) = 2S$$

$$101 \cdot 100 = 2S \text{ или } S = 50 \cdot 101 = 5050.$$

За да намерим формулата за сумата на първите  $n$  члена, записваме следните равенства:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n$$

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 = S_n$$

$$a_n + a_1 = a_1 + (n - 1)d + a_1 = 2a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{n-1} + a_2 = 2a_1 + (n - 1)d$$

Малко мисъл:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

$$n[2a_1 + (n - 1)d] = 2S_n$$

$$S_n = na_1 + \frac{n-1}{2}d$$

$$S_{10} =$$

$$S_{50} = 50 \cdot (-21) + \frac{49}{2} \cdot 5 = -1050 + \frac{2450}{2} = 1225 - 1050 = 175.$$

**Задача 43** Да се намери формула за  $n$ -ти член на геомтерична прогресия 1, 2, 4, 8, ... Да се намери 6тия член, както и сумата на първите 10 члена.

**Решение :**

$$a_1, a_2, a_3 \dots \text{ като } a_1 = 1, q = 2.$$

$$a_2 = a_1 q = 2$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2 = 4$$

$$a_{110} = a_1 q^{109} = 2^{109}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n = S_n$$

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} = S_n. \text{ Умножаваме по } q:$$

$$a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \dots + a_1 q^n = q S_n. \text{ Изваждаме равенствата, за да получим}$$

$$\text{формулата: } a_1 - a_1 q^n = S_n - q S_n$$

$$a_1(1 - q^n) = S_n(1 - q)$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

•

**Задача 44** Да се намери формула за  $n$ -ти член на геомтерична прогресия 81, 27, 9, ... Да се намери 6тия член, както и сумата на първите 10 члена.

**Решение :**

$$a_1, a_2, a_3 \dots \text{ като}$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$$

•

**Задача 45** 3тия и 5тия член на аритметична прогресия са . Да се намери сумата на първите 10 члена.

**Задача 46** 5тия член на аритметична прогресия е, а сумата на първите 10 члена е ... . Да се намери прогресията.

## 11 Олимпиада по математика

**Задача 47 (Задача 1)** Решете неравенството:  $\frac{x}{x+3} \leq \frac{5}{x^2-x-12}$ . Намерете всички цели числа, които са решения на неравенството.

**Решение :**

$$\text{Забелязваме, че от } ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2) \rightarrow x^2 - x - 12 = (x+3)(x-4).$$

$$\text{Задачата става } \frac{x}{x+3} \leq \frac{5}{(x+3)(x-4)}. \text{ Решаваме чрез прехвърляне и привеждане}$$

$$\text{под общ знаменател.}$$

$$\frac{x}{x+3} - \frac{5}{(x+3)(x-4)} \leq 0$$

$$\frac{x(x-4)}{(x+3)(x-4)} - \frac{5}{(x+3)(x-4)} \leq 0$$

$$\frac{x^2-4x-5}{(x+3)(x-4)} \leq 0$$

$x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$ , мислим си  $[x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 5]$

$$\frac{(x+1)(x-5)}{(x+3)(x-4)} \leq 0$$

Нареждаме на числовата ос числата  $-3, -1, 4, 5$ . Тогава знаците отлясно наляво са  $+, -, +, -, +$ . Знаците с  $-$  на нас ни трябва и дават интервалите  $(4, 5] \cup (-3, -1]$ . Единствените цели числа решения на неравенството са  $5$  и  $-1$ .

**Задача 48 (Задача 2)** Дадена е функцията  $y = f(x) = (2 - a)x^2 + bx + c$

1. Да се намерят  $a, b, c$ , ако  $a_1$  и частното  $q$  на геометрична прогресия, за която:

$$\begin{cases} a_2 + a_5 - a_4 = 10 \\ a_3 + a_6 - a_5 = 20 \end{cases}$$

$b$  е сборът на корените на уравнението:  $\sqrt{5x^2 + 20} = x^2 - 6$

2. За намерените стойности на параметрите  $a, b, c$  намерете най-голямата и най-малката стойност на  $f(x)$  в интервала  $[-1, 1]$

**Решение :**

Нека напишем системата само с  $a_1$  и  $q$ .

$$\begin{cases} a_1q + a_1q^4 - a_1q^3 = 10 \\ a_1q^2 + a_1q^5 - a_1q^4 = 20 \end{cases}$$

Умножаваме по  $q$  първото уравнение и изваждаме от него второто уравнение. Това цялото го записвам на мястото на второто уравнение. Накратко вместо второто уравнение, първо  $y = e^*q$  - пиша вт. у-е .

$$\begin{cases} a_1q + a_1q^4 - a_1q^3 = 10 \\ (a_1q + a_1q^4 - a_1q^3)q - (a_1q^2 + a_1q^5 - a_1q^4) = 10q - 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1q + a_1q^4 - a_1q^3 = 10 \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 16a_1 - 8a_1 = 10 \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$$

Геометричната прогресия е  $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$

Минаваме към уравнението:  $\sqrt{5x^2 + 20} = x^2 - 6$

$$5x^2 + 20 = (x^2 - 6)^2 = x^4 - 12x^2 + 36$$

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

Полагаме  $x^2 = t$ .

$$t^2 - 17t + 16 = 0$$

$t_1 = 1$ ,  $t_2 = 16$ . Тогава трябва да проверим кои от  $x = \pm 1, \pm 4$  са корени.  $x = \pm 1$  не дава решение, защото дясната част на у-ето е  $< 0$ .  $x = \pm 4$  дава две решения. Сборът е 0.

Намерихме  $a = 1, b = 0, c = 2$ . Остава да намерим най-голяма и най-малка стойност на  $x^2 + 2$  в интервала  $[-1, 1]$ . Най-голямата стойност е при  $x = \pm 1$  и тогава  $f(\pm 1) = 3$  и най-малката е  $f(0) = 2$ .

**Задача 49 (Задача 3)** Даден е трапец, вписан в окръжност, с основи с дължини 12 и 20. Да се намери лицето на трапеца и дължината на бед-ротто, ако центърът на описаната окръжност лежи на голямата основа на трапеца.

ЧЕРТЕЕЕЕЖ .

Решение :

## 12 Матура 21.05.2021 г. – Вариант 1

**Задача 50** Стойността на израза  $\sqrt{21^2 - 15^2} - \sqrt{150} + \sqrt{(\sqrt{6} - 3)^2}$  е:

$$\sqrt{21^2 - 15^2} - \sqrt{150} + \sqrt{(\sqrt{6} - 3)^2} = \sqrt{(21 - 15)(21 + 15)} - \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} + |\sqrt{6} - 3| =$$

Нека  $a, b > 0$ . Тогава  $\sqrt{(a - b)^2} = a - b$ , ако  $a > b$ .

$(a - b)^2 = (b - a)^2$ . Ако  $a < b$ , тогава  $\sqrt{(a - b)^2} = b - a$ . В нашия случай  $|\sqrt{6} - 3| = 3 - \sqrt{6}$ , защото  $9 > 6$  (сравняваме квадратите).

Израза става:  $\sqrt{6 \cdot 36} - 5\sqrt{6} + 3 - \sqrt{6} = 6\sqrt{6} - 6\sqrt{6} + 3 = 3$ .

**Задача 51** най-големият корен на уравнението  $(x^2 - 4x)^2 + 7(x^2 - 4x) + 12 = 0$

Полагаме  $y = x^2 - 4x$ . Имаме уравнение  $y^2 + 7y + 12 = 0$ .  $y_1 = -3, y_2 = -4$

Получаваме две квадратни уравнения:  $x^2 - 4x + 3 = 0$  и  $x^2 - 4x + 4 = 0$ . Първото има корени 3 и 1, а второто има корен 2. Решаваме и чрез заместване  $x = 4$  дава  $12 = 0$ . не е корен

$x = 3$  дава  $(9 - 12)^2 + 7(9 - 12) + 12 = 9 + 7 \cdot (-3) + 12 = 9 - 21 + 12 = 0$

## 13 Матура 23.05.2018 г. – Вариант 1

**Задача 52** Намерете най-голямата стойност на функцията  $f(x) = x^2 - 7x + 6$  в интервала  $[1, 5]$ .

**Решение :**

Трябва да сравним стойностите  $f(1), f(5), f(-\frac{b}{a}) = f(\frac{7}{2})$ .

$$f(1) = 1 - 7 + 6 = 0$$

$$f(5) = 5.5 - 7.5 + 6 = 25 - 35 + 6 = -4$$

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - \frac{7.3}{2} + 6 = \frac{9-42+24}{4} = \frac{-11}{4}$$

Отг. 0

**Задача 53** Намерете решенията на неравенството:

$$\frac{2-x}{x^2-x-2} \leq \frac{2-x}{x^2+x-2}.$$

Ако  $ax^2 + bx + c$  има корени  $x_1$  и  $x_2$ , то  $a(x - x_1)(x - x_2)$ .

Корените на лявата дроб са  $-1, 2$ , а на дясната  $1, -2$ . Неравенството добива вида:  $\frac{2-x}{(x+1)(x-2)} \leq \frac{2-x}{(x-1)(x+2)}$ . Привеждаме под общ знаменател и

$$\text{получаваме } \frac{(2-x)(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)(x-1)(x+2)} - \frac{(2-x)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)(x+1)(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{(2-x)}{(x+1)(x-2)(x-1)(x+2)} [(x-1)(x+2) - (x+1)(x-2)] \leq 0$$

$$\frac{(2-x)}{(x+1)(x-2)(x-1)(x+2)} [x^2 + x - 2 - (x^2 - x - 2)] \leq 0$$

$$\frac{(2-x)}{(x+1)(x-2)(x-1)(x+2)} [2x] \leq 0 \text{ Умножаваме по } -1 \text{ и съкращаваме (! } x \neq 2 \text{):}$$

$$\frac{2x}{(x+1)(x-1)(x+2)} \geq 0. \text{ Нарездаме на числовата ос } -2, -1, 0, 1. \text{ Решението}$$

на неравенството е :  $(-\infty, -2) \cup (-1, 0] \cup (1, +\infty)$  Най-голямото цяло отрицателно е  $-3$ ,  $3$  е най-малкото цяло положително.

## 14 Статистика/Стакмистика

**Дефиниция 5** Генерална съвкупност е множество от обекти, които представляват интерес за изследване и извадка е подмножество на генералната съвкупност. На човешки език, генерална съвкупност са 'неща', за които искаме да събирам данни (но не е възможно да са всички по някаква причина) и извадка са "част" са някаква част събрани данни или "числа, отделени със запетая".

Трите понятия, които се срещат в задачи са:

1. медиана - при нечетен брой числа е "числото в средата а при четен брой е средното на двете числа в средата. Забележка: числата трябва да са сортирани във възходящ ред.
2. мода - най-често срещаното число
3. средно аритметично - сумата на числата върху броя числа.

**Задача 54** Да се намерят медианата, модата и ср. аритметично на следната извадка:

**Задача 55** За статистическия ред  $0, 1, a, 2, b, 5, 9, 11$  модата е  $1$ , а медианата е  $2,5$ . Средноаритметичното на реда е равно на:

## 15 Синусова и косинусова теорема. Решаване на триъгълник.

### 15.1 Теорема

**Теорема 1 (Синусова теорема)** При стандартни означения в триъгълник имаме:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

**Теорема 2 (Косинусова теорема)** При стандартни означения в триъгълник имаме:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

### 15.2 Решаване на триъгълник

Теоремите са полезни при задачи за решаване на триъгълник. Благодарение на признаците за еднаквост на триъгълник, един триъгълник е напълно определен от:

1. две страни и ъгъл между тях
2. страна и два ъгъла
3. три страни

Чрез тези две теореми и свойства на медиани, ъглоповящи и височини можем да намерим всички елементи на триъгълник, които ни интересуват. Следва пример:

**Задача 56** Периметърът на равнобедрен триъгълник е 18 ст. Основата му е с 3 ст по-голяма от бедрото. Намерете дължината на радиуса на описаната около триъгълника окръжност.

**Решение :**

Нека  $\triangle ABC$  е равнобедрен триъгълник с  $AC=BC$ . Първо намираме страните.  $a+b+c = 18$  като от това, че е равнобедрен, имаме  $a = b$ . От условието,  $c = b + 3$ . Тогава  $b = 5$  и  $c = 8$ . От синусова теорема, имаме

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Височината в равнобедрен  $\triangle$  е и медиана, и ъглополовяща. Имам  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{5}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{1} : \frac{3}{5} = \frac{5}{1} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{3} = \frac{24}{3} + \frac{1}{3} = 8 + \frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}$ . Тогава  $R = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{3} = \frac{25}{6}$



**Задача 57** В  $\triangle ABC$  е вписана окръжност с център точка  $O$ . Ако  $AO = 3$ ,  $BO = 5$  и  $\angle ACB = 60^\circ$ , намерете: А) дължината на страната  $AB$  Б) радиуса на описаната около  $ABC$  окръжност В) радиуса на вписаната в  $ABC$  окръжност.

**Решение :**

Можем да намерим дължината на  $\angle AOB$ , като Използваме косинусова теорема, за да намерим дължината на  $AB$ .

## 16 Лихви

Проста лихва - олихвяването е веднъж.

Пример - Вземам 200лв от теб назаем с лихва 5%. Колко пари трябва да ти върна? **Решение :**

Трябва да върна 105% от сумата или  $1.05 * 200 = 210$ лв.

Сложна лихва - това е начин да накараш простите хора да мислят, че ще върнат по-малко при кредити. Среща се също при инфлация. Пример. Ако лева през 2015 го вземем да има стойност 1лв, а инфлацията 2015 е 3.5% и през 2016 е 4%, то за да имаш покупателна стойност 1лв през 2017 началото, трябва да изхарчиш 1лв + олихвяване 2016 + олихвяване 2017. 1лв + 3.5ст = 1лв 3.5ст е за 2016. За 2017, трябва да вземем 4% от лева на 2016, т.е. сумарно става  $1.04 * 1.035 = 1.0764$ лв.

Така достигаем до формулата за сложна лихва. Нека винаги инфлацията да е 4%. Тогава за сума пари  $S$ , 1 година по-късно имаме  $S * 1.04$ , 2 години по-късно имаме  $S * 1.04^2$  и т.н.

Формулата изглежда така:

$S_e = S_b * (1 + r)^p$ , където

$S_e$  - sum to end(with)/ending sum

$S_b$  - sum to begin(with)/beginning sum

$r$  - interest rate

$p$  - period

### Задачи

**Задача 58** Кредит - потребителски, ипотечен/жилищен.

**Задача 59** (Лош пример) Да се върнем на нашия пример. Нека да трябва да ти изплатя 200лв с лихва 4% в период от 4-5 месеца като имаме олихвяване в края на всеки месец(оставащата сума). Колко пари ще трябва да ти върна?

**Решение :**

Нека месечната вноска е  $x$ . За 4 месеца плащаме  $4x$ . Сумата за връщане във всеки един месец е съответно 200,  $200-x$ ,  $200-2x$ ,  $200-3x, 0$ . Накрая на всеки месец първо олихвяваме, после плащаме. След първия месец сумата за връщане е  $200 * 1.04$ , след втория месец  $(200 * 1.04 - x) * 1.04$ . След третия е

(сумата на втория)  $S_2 * 1.04 - x$ . Получаваме една редица  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , като  $S_1 = S * 1.04$ ,  $S_2 = (S_1 - x) * 1.04$ ,  $S_3 = (S_2 - x) * 1.04$ ,  $S_4 = (S_3 - x) * 1.04 = 0$ . Разписваме  $S_4 = 1.04x + 1.04 * S_3 = 1.04x + 1.04^2x + 1.04^2S_2 = 1.04x + 1.04^2x + 1.04^3x + S_1 * 1.04^3 = 1.04x + 1.04^2x + 1.04^3x + S * 1.04^4 = 0$   
 $x(p + p^2 + p^3) = Sp^4$   
 $x = \frac{S}{1+p+p^2} = 64.07$ . На практика този пример само плаши, олихвяването е годишно, но за тези неща трябва да се внимава. Процентите на дългосрочните кредити не са с фиксирана лихва.

## 17 Физика

$$1km/h = 1 * \frac{1000}{3600} m/s \approx \frac{1}{3} m/s$$

$$3km/h \approx 1m/s$$

## 18 Из разни тестове

**Задача 60** Да се намерят корените на уравнението:  $\frac{(3x^2+5)(x-2)}{x^2-4} = 0$

**Решение :**

Дефиниционната област на израза в лявата страна е  $x^2 - 4 \neq 0$  или  $x \neq \pm 2$ . Решаваме числителя  $= 0$ .  $(3x^2 + 5)(x - 2) = 0$  когато  $(3x^2 + 5) = 0$  или  $(x - 2) = 0$ . Първото няма решение, а второто има корен  $x = 2$ . Но при  $x = 2$  дробта става  $\frac{0}{0}$ . Следователно уравнението няма решение.

**Задача 61**  $\frac{3x^2}{x^2-1} - \frac{3x}{x+1} = \frac{3x^2}{x^2-1} - \frac{3x(x-1)}{(x-1)(x+1)} =$

**Задача 62**  $\frac{x-5}{x-4} = \frac{x-3}{4-x}$

$$\frac{x-5}{x-4} = \frac{-x+3}{x-4}$$

$$\frac{x-5}{x-4} - \frac{-x+3}{x-4} = 0$$

$$\frac{x-5+x-3}{x-4} = 0, x \neq 4$$

$$2x - 8 = 0$$

$x = 4$ . Но  $x \neq 4$ , следователно няма решение.

ДОБАВИ ПАРАБОЛА u smiley face and  $\cap$  is negative.

**Задача 63** При  $x \neq 1$  и  $x \neq 9$  изразът  $\frac{x^4-10x^2+9}{x^2-10x+9}$  е тождествено равен на:

**Решение :**

Разлагаме числителя и знаменателя по  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , където  $x_1$  и  $x_2$  са корените на уравнението. Това се прилага два пъти - за знаменателя и за числителя, като се има предвид  $x^2 = y$  дава квадратно уравнение. Получаваме:

$$\frac{(x^2-1)(x^2-9)}{(x-1)(x-9)} = \frac{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}{(x-1)(x-9)} = \frac{(x+1)(x^2-9)}{(x-9)}$$

**Задача 64**  $25x^3 - x^5 > 0$   
 умножаваме по  $(-1)x^5 - 25x^3 < 0$   
 $x^3(x^2 - 25) < 0$   
 $x^3(x + 5)(x - 5) < 0$   
 $x \in (-\infty, -5) \cup (0, 5).$

**Задача 65** Аритметична прогресия  $a_{10} + a_{11} = 6$ .  
 $a_1 + \dots + a_{20} = ?$

Решение:

$$a_1 + 9d + a_1 + 10d = 6$$

$$2a_1 + 19d = 6$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = ?$$

$$a_1 + (a_1 + d) + \dots + (a_1 + 19d) = ?$$

$$20a_1 + (1 + 2 + \dots + 19)d = ?$$

$$20a_1 + \frac{19 \cdot 20}{2}d = 20a_1 + 190d = 10 \cdot 6 = 60$$

друг начин:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$$

$$a_{10} + a_{11} = (a_9 + d) + (a_{12} - d) = a_9 + a_{12} = \dots = a_1 + a_{20}$$

$$S_{20} = \frac{6}{2}20 = 60$$

AAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

**Задача 66**  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{1}{4}$ , намерете  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ .  
 Малко други подобрени сметки(мотивация):

Виет:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Следните сметки са често използвани:

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = (x + y)^2 - 2xy$$

$$x^4 + y^4 = (x^2)^2 + (y^2)^2 = (x^2)^2 + (y^2)^2 + 2x^2y^2 - 2(xy)^2 =$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2(xy)^2$$

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \\ &= 1 - \frac{2}{16} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

## 19 Коментари

$$\frac{1}{3-2\sqrt{2}} \rightarrow \frac{3+2\sqrt{2}}{1}, \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$$

$$\frac{64^{\frac{1}{64}}}{\frac{-4+1}{2(-4)}} = (-4 + 1) : (-8)$$

$$5x^2 - 11x + 2 = 5(x - 2)(x - \frac{1}{5})$$

$$\frac{17-x}{2-x} \frac{5(x-\frac{1}{5})}{5(x-\frac{1}{5})}$$