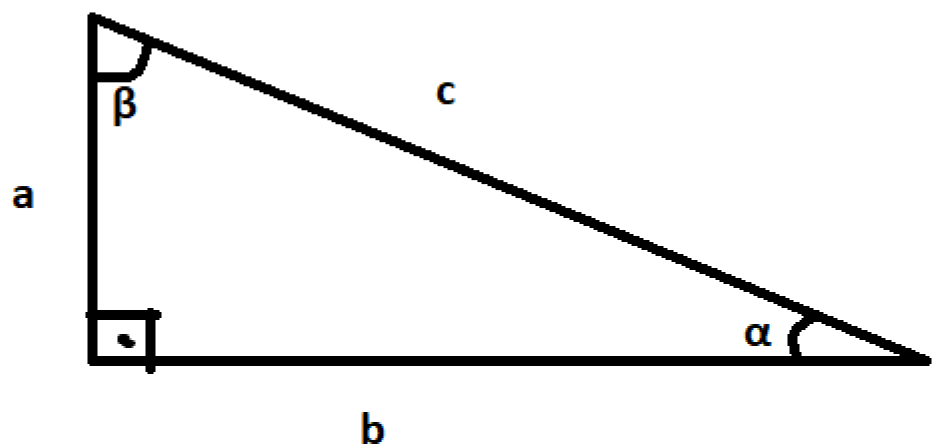
Книжка за упражнителни задачки на Деспина

1 Теория

1.1 Триъгълник



Дефиниция 1 $sin(\alpha) = \frac{a}{c}$, $cos(\alpha) = \frac{b}{c}$, $tg(\alpha) = \frac{a}{b}$, $cotg(\alpha) = \frac{b}{a}$

Да зебележим, че $sin(\beta) = cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ и аналогично $cos(\beta) = sin(\alpha) = \frac{a}{c}$.
$a^2 + b^2 = c^2 \to (\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = 1 \to sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$.
Тригонометрични тъждества ($\alpha, \beta \in [0, 90]$):
$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$
$sin(\alpha) = cos(\beta) = cos(90 - \alpha)$
$tg(\alpha)cotg(\alpha) = 1$
$tg(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$, $cotg(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)} = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$

Задача 1 *Да се намерят останалите тригонометрични функции, ако* $cos(\alpha) = 0.3$

Решение :
$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1 \to sin^2(\alpha) = 1 - 0,09 \to sin(\alpha) = \sqrt{0,91}$
$tg(\alpha) = \frac{\sqrt{0,91}}{0,3} = \frac{10\sqrt{0,91}}{3}$
$cotg(\alpha) = \frac{0,3}{\sqrt{0.91}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{\sqrt{0,91}}{0,91} = \frac{30\sqrt{0,91}}{91}$

Задача 2 *Да се намерят останалите тригонометрични функции, ако* $cos(\gamma) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Решение :
$cos(\alpha) = \frac{1}{2} \rightarrow sin^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow \sqrt{sin^2(\alpha)} = \sqrt{\frac{3}{4}}$
$sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$tg(\alpha) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
$cotg(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1.2 Вероятности - Комбинации, Вариации и Пермутации.

Дефиниция 2 *Пермутации - начини, по които може да наредим n обекта в една линия.*

Пример. Пермутация от 3 елемента са начините, по които може да наредим 3 "неща"на една линия едно до друго. Нека за определеност да са молив, химикал и флумастер. Начините, по които може да ги наредим са:
ФХМ, ФМХ, МХФ, МФХ, ХМФ, ХФМ или общо 6 начина. Нека да добавим 4ти елемент ролер. За първото нареждане ФХМ, ролерът може да е на 4 позиции: РФХМ, ФРХМ, ФХРМ, ФХМР. Тогава 4те елемента може да ги наредим по 6.4 = 24 начина. n обекта могат да се наредят по $n(n-1)...1$ начина. Примерите по горе Ф, Х и М могат да се наредят по 3.2.1 = 6 начина и Ф,Х, М, Р могат да се наредят по 4.3.2.1 = 24 начина. Дефинираме n-факториел с $n! = n(n-1)...1$.

Дефиниция 3 *Вариация - избор на елементи където реда има значение - Налучкване на телефонен номер.* V_{10}^4.

Дефиниция 4 *Комбинации - избор на елементи където реда няма значение - начини за вземане на различни цветове топки от урна(напр. сини, червени, зелени, жълти и т.н.).*

Задача 3 *По колко начина може да изберем 6 молива(различни) 10 молива(различни)?(Реда няма значение).*

Решение :
Първи молив избираме по 10 начина, втория - по 9, и т.н. Общо 10.9.8.7.6.5 начина.

Задача 4 *Дадени са 10 молива с различни цветове. За оцветяване на картинка са необходими 6 точно определени цвята. Каква е вероятността случайно избрани 6 молива да могат да оцветят картинката?*

Решение :
Вероятността първия молив да е от 6те е $\frac{6}{10}$. Вероятността втория молив да е подходящ за оцветяване е $\frac{5}{9}$ и т.н. Вероятността от 6 тегления да изтеглим моливите за оцветяване е $\frac{6.5.4.3.2.1}{10.9.8.7.6,5} = \frac{3}{10.9.7} = \frac{1}{10.3.7} = \frac{1}{210}$.
За упражнение: 2 молива от 3.

2 Входно ниво 10ти клас

3 Квадратни уравнения и системи

1. системи уравнения
2. квадратни уравнения
3. неравенства (???)
4. други уравнения

Фромули, които се изпозлват за квадратни уравния:
Ако е дадено уравнение $ax^2+bx+c=0$, имаме дискриминанта $D=b^2-4ac$, тогава решенията се задават с $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. Да разгледаме еднин пример.
Упражение(?): $(x-\frac{-b+\sqrt{D}}{2a})(x-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a})=ax^2+bx+c$

Припомняме формулите за съкратено умножение:
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Упражнителни задачи, които Деспина е решавала сама:

$$x^2-5x+6=0$$

Още примери за решаване:

1. $x^2-6x+8=0$
2. $x^2-5x+6=0$
3. $x^2-5x+6=0$
4. $x^2-5x+6=0$
5. $x^2-5x+6=0$
6. $x^2-5x+6=0$

4 Еднаквост и подобност на триъгълници

Важно! Един триъгълник се определя от "три неща три страни, две страни и ъгъл между тях, страна и два ъгъла.

Признаци за еднаквост:

1. две страни и ъгъл между тях = две страни и ъгъл между тях => еднакви
2. страна и два ъгъла = страна и два ъгъла => еднакви
3. три страни = три страни => еднакви

Важно! Подобните триъгълници си приличат по това, че имат една и съща форма, но единият е 10 пъти или 5 пъти(или колкото и да е пъти) "по-голям"от другия

Признаци за подобност:(Трябва да се потвърди от учебник)

1. (???) две страни са 5 пъти по-малки и ъгълът между тях е равен.
2. (???) една страна е 5 пъти по-малка и 2 ъгъла са равни.
3. (???) трите ъгъла са равни

ирационални изрази, прогресии, статистика и обработка на данни, решаване на триъгълник- sin, cos, tg, cotg в (0,180), синусова и косинусова теорема (?), елементи от стереометрията

5 Тригонометрия

6 Задачи с текс

6.1 Разни

6.2 Линейни уравнения и неравенства

Задача 5 *Сборът на две последователни естествени числа е със 131 по-малък от произведението им. Намерете числата.*

Решение :
Ако първото(по-малкото от двете числа е x), второто число е $x+1$. Тогава от условието на задачата имаме $x + x + 1 = x(x + 1) - 131$
$2x + 1 = x^2 + x - 131$.
$x^2 + x - 131 - 2x - 1 = 0$.
$x^2 - x - 132 = 0$. $D = (-1)^2 - 4.(-132) = 1 + 4.132 = 528 + 1 = 529$. $x_1 = \frac{1+23}{2} = 12$. $x_2 = \frac{1-23}{2} = -11$. -11 не е естествено. Отг. 12 и 13.

Задача 6 *В един магазин продали 488 кг портокали, лимони и маслини. Портокалите били с 40 кг повече от лимоните, а маслините - 5 пъти по-малко от портокалите. По колко килограма са продали от всеки вид?*

Задача 7 *През един сезон в консервната фабрика "Добруджанка"са обработили по 48 т домати на ден. След като предали 1300 т пресметнали, че това е с 524тт по-малко от цялото количество домати. Колко дни във фабриката са обработвани домати?*

Задача 8 *Обиколката на един триъгълник е 126 см. Едната му страна е с 12 см по-къса от другата , а третатат е 3/ от сбора на првите две. Да се намери най–голямата страна на този триъгълник.*

Задача 9 *Попитали Николай на колко е години, а той отговорил: "Мама е на 38 години. Тя е с 2 години по-млада от татко. Татко пък има два пъти повче години, отколкото аз и сестра ми заедно. Но аз със с 4 години по-малък от сестра ми."На коолко години са Николай и сестра му?*

Задача 10 *Един работник може да свърши определена работа за 15 дни, а друг работник за същото време свършва само 75 % от тази работа. Отначало ддвамата работници работели заедно 6 дни, а след това вторият само довършил останалата част. За колко дни била свършена цялата работа и какъв процент от нея е изработил всеки един работник?*

6.3 Басейни

Задача 11 *Един басейн се пълни от една тръба за 2 ч, от друга за 3ч, от трета за 4ч. За колко време се пълни от трите едновременно?*

Задача 12 *Един басейн се пълни от една тръба за 2 ч, от друга за 3ч. За колко време се пълни от двете едновременно? Каква част пълни всяка от тръбите?*

Решение :
Разсъждения. За 1 час пълним $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Тогава ако времето за пълнене е x(в часове), то $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$. Тогава $3x + 2x = 6$ и $x = \frac{6}{5}$ часа или 1ч и 12мин. Първата тръба е напълнила $\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{5} = 60\% \cdot$. Тогава втората е напълнила $\frac{2}{5} = 40\%$ от басейна.

(Коментар: Първия басейн пълни за минута $\frac{1}{120}$, а втория $\frac{1}{180}$. За 12 минути пълним $\frac{12}{120} + \frac{12}{180} = \frac{12.3+12.2}{360} = \frac{60}{360} \cdot \frac{1}{6}$.)

Задача 13 *Един басейн се пълни от една тръба за 10ч, а от друга за 12ч. Първата тръба е пълнила 1 час, след което е спряла за 30 минути ремонт, след това е продължила да пълни. Втората тръба работи безотказно. За колко време двете тръби заедно напълват басейна.*

Решение :
Нека с х означим времето за пълнене. За 1ч имаме напълнено $\frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{12}{120} + \frac{10}{120} = \frac{22}{120}$·. За следващия половин час пълни само втората тръба, т.е. за времето между 1ч и 1ч и 30 минути пълним $\frac{1}{12}\frac{1}{2} = \frac{1}{24}$. Остава ни да напълним $1 - \frac{22}{120} - \frac{1}{24}$. Ако означим оставащото време с y, то за y имаме $\frac{y}{10} + \frac{y}{12} = 1 - \frac{22}{120} - \frac{1}{24}$. Сумарното време за пълнене е $y + 1 + \frac{1}{2}$. Остава да намерим y.

Задача 14 *Един басейн се пълни от една тръба за 10ч, а от друга за 12ч. Първата тръба е пълнила 1 час, след което е спряла за 1 ремонт, след това е продължила да пълни. Втората тръба работи след 1вия час. За колко време се напълва басейна?*

7 Системи

Задача 15

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 - xy - y^2 = 19 \end{cases} \qquad x = y + 7$$

Решение :
$x = y + 7$
$(y+7)^2 - (y+7)y - y^2 = 19$
$y^2 + 14y + 49 - y^2 - 7y - y^2 = 19$
$-y^2 + 7y + 30 = 0$
$y^2 - 7y - 30 = 0 \to a = 1, b = -7, c = -30$
$D = 49 + 120 = 169, y_1 = 10\ ,\ y_2 = -3$
$x_1 = 10 + 7 = 17, x_2 = -3 + 7 = 4$
Отг. Решенията на системата са: $(17, 10), (4, -3)$

Задача 16

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Решение :
$y = 2x - 1$
$x(2x - 1) - 1 = 0$
$2x^2 - x - 1 = 0 \to a = 2, b = -1, c = -1$

$D = 1 - 4.2.(-1) = 9$ $x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2.2} = \frac{4}{4} = 1$, $x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2.2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$
$y_1 = 2x_1 - 1 = 2 - 1 = 1$, $y_2 = 2x_2 - 1 = 2(-\frac{1}{2}) - 1 = -2$
Отг. $(1, 1), (-\frac{1}{2}, -2)$

Задача 17

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Задача 18

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ x^2 - 4xy + 3y^2 + x - y = 0 \end{cases}$$

8 Ирационални уравнения

Задача 19 *Решете уравнението:* $\sqrt{x-5} - \sqrt{20-x} = -1$

Решение :
$\left(\sqrt{x-5} - \sqrt{20-x}\right)\left(\sqrt{x-5} + \sqrt{20-x}\right) = x + 5 + 20 - x = 25 \rightarrow$ няма решение.

Задача 20 *Решете уравнението:* $\sqrt{x-2} - \sqrt{2x-1} = 0$

Решение :
$(\sqrt{x-2} - \sqrt{2x-1})(\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-1}) = x - 2 + 2x - 1 = 3x - 3$
$3x = 3 \rightarrow x = 1$.
Проверка: $\sqrt{1-2} - \sqrt{2-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{1} \neq 0 \rightarrow$ няма решение.
За другия път $x - 2 \geq 0$ и $2x - 1 \geq 0$