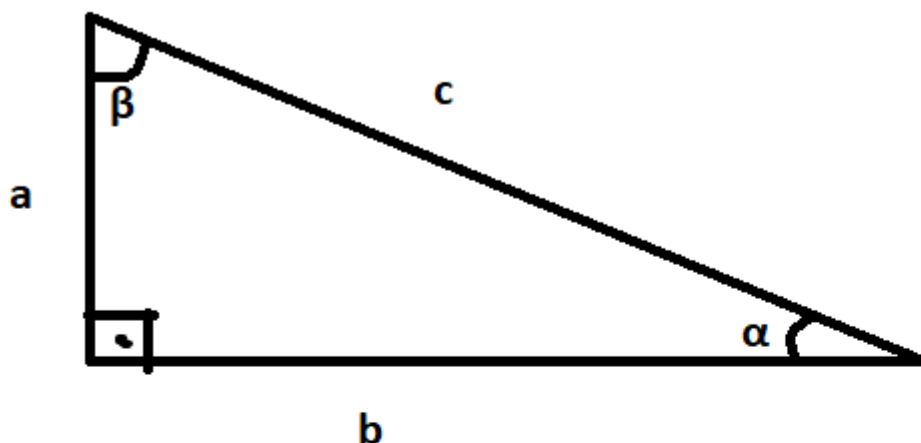


Книжка за упражнителни задачи на
Деспина

1 Теория



Дефиниция 1 $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$, $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a}{b}$, $\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{b}{a}$

Да забележим, че $\sin(\beta) = \cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ и аналогично $\cos(\beta) = \sin(\alpha) = \frac{a}{c}$.
 $a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow (\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = 1 \rightarrow \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Тригонометрични тъждества ($\alpha, \beta \in [0, 90]$):

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(90 - \alpha)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) \operatorname{cotg}(\alpha) = 1$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Задача 1 Да се намерят останалите тригонометрични функции, ако $\cos(\alpha) = 0.3$

Решение :

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \rightarrow \sin^2(\alpha) = 1 - 0.09 \rightarrow \sin(\alpha) = \sqrt{0.91}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sqrt{0.91}}{0.3} = \frac{10\sqrt{0.91}}{3}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{0.3}{\sqrt{0.91}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{\sqrt{0.91}}{0.91} = \frac{30\sqrt{0.91}}{91}$$

Задача 2 Да се намерят останалите тригонометрични функции, ако $\cos(\gamma) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Решение :

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow \sqrt{\sin^2(\alpha)} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2 Входно ниво 10ти клас

3 Квадратни уравнения и системи

1. системи уравнения
2. квадратни уравнения
3. неравенства (???)
4. други уравнения

Формули, които се използват за квадратни уравнения:

Ако е дадено уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, имаме дискриминанта $D = b^2 - 4ac$, тогава решенията се задават с $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Да разгледаме един пример.

Упражнение(?): $(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a})(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}) = ax^2 + bx + c$

Припомняме формулите за съкратено умножение:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Упражнителни задачи, които Деспина е решавала сама:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Още примери за решаване:

1. $x^2 - 6x + 8 = 0$

2. $x^2 - 5x + 6 = 0$

3. $x^2 - 5x + 6 = 0$

4. $x^2 - 5x + 6 = 0$

5. $x^2 - 5x + 6 = 0$

6. $x^2 - 5x + 6 = 0$

4 Еднаквост и подобност на триъгълници

Важно! Един триъгълник се определя от "три неща три страни, две страни и ъгъл между тях, страна и два ъгъла.

Признаци за еднаквост:

1. две страни и ъгъл между тях = две страни и ъгъл между тях => еднакви
2. страна и два ъгъла = страна и два ъгъла => еднакви
3. три страни = три страни => еднакви

Важно! Подобните триъгълници си приличат по това, че имат една и съща форма, но единият е 10 пъти или 5 пъти(или колкото и да е пъти) "по-голям"от другия

Признаци за подобност:(Трябва да се потвърди от учебник)

1. (???) две страни са 5 пъти по-малки и ъгълът между тях е равен.
2. (???) една страна е 5 пъти по-малка и 2 ъгъла са равни.
3. (???) трите ъгъла са равни

ирационални изрази, прогресии, статистика и обработка на данни, решаване на триъгълник- \sin , \cos , tg , cotg в $(0,180)$, синусова и косинусова теорема (?), елементи от стереометрията

5 Тригонометрия

6 Задачи с текст

6.1 Разни

6.2 Линейни уравнения и неравенства

Задача 3 *Сборът на две последователни естествени числа е със 131 по-малък от произведението им. Намерете числата.*

Решение :

Ако първото (по-малкото от двете числа е x), второто число е $x + 1$. Тогава от условието на задачата имаме $x + x + 1 = x(x + 1) - 131$

$$2x + 1 = x^2 + x - 131.$$

$$x^2 + x - 131 - 2x - 1 = 0.$$

$$x^2 - x - 132 = 0. D = (-1)^2 - 4 \cdot (-132) = 1 + 4 \cdot 132 = 528 + 1 = 529.$$

$$x_1 = \frac{1+23}{2} = 12, x_2 = \frac{1-23}{2} = -11. -11 \text{ не е естествено. Отг. } 12 \text{ и } 13.$$

Задача 4 В един магазин продали 488 кг портокали, лимони и маслини. Портокалите били с 40 кг повече от лимоните, а маслините - 5 пъти по-малко от портокалите. По колко килограма са продали от всеки вид?

Задача 5 През един сезон в консервната фабрика "Добруджанка" са обработили по 48 т домати на ден. След като предали 1300 т пресметнали, че това е с 524 тт по-малко от цялото количество домати. Колко дни във фабрика са обработвани домати?

Задача 6 Обиколката на един триъгълник е 126 см. Едната му страна е с 12 см по-къса от другата, а третата е $\frac{3}{4}$ от сбора на првите две. Да се намери най-голямата страна на този триъгълник.

Задача 7 Попитали Николай на колко е години, а той отговорил: "Мама е на 38 години. Тя е с 2 години по-млада от татко. Татко пък има два пъти повече години, отколкото аз и сестра ми заедно. Но аз със с 4 години по-малък от сестра ми." На колко години са Николай и сестра му?

Задача 8 Един работник може да свърши определена работа за 15 дни, а друг работник за същото време свършва само 75 % от тази работа. Отначало двамата работници работели заедно 6 дни, а след това вторият само довършил останалата част. За колко дни била свършена цялата работа и какъв процент от нея е изработил всеки един работник?

6.3 Басейни

Задача 9 Един басейн се пълни от една тръба за 2 ч, от друга за 3ч, от трета за 4ч. За колко време се пълни от трите едновременно?

Задача 10 Един басейн се пълни от една тръба за 2 ч, от друга за 3ч. За колко време се пълни от двете едновременно? Каква част пълни всяка от тръбите?

Решение :

Разсъждения. За 1 час пълним $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Тогава ако времето за пълнене е x (в часове), то $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$. Тогава $3x + 2x = 6$ и $x = \frac{6}{5}$ часа или 1ч и 12мин. Първата тръба е напълнила $\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{5}$.

(Коментар: Първия басейн пълни за минута $\frac{1}{120}$, а втория $\frac{1}{180}$. За 12 минути пълним $\frac{12}{120} + \frac{12}{180} = \frac{12 \cdot 3 + 12 \cdot 2}{360} = \frac{60}{360} \cdot \frac{1}{6}$.)

Задача 11 Един басейн се пълни от една тръба за 10ч, а от друга за 12ч. Първата тръба е пълнила 1 час, след което е спряла за 30 минути ремонт, след това е продължила да пълни. Втората тръба работи безотказно. За колко време двете тръби заедно напълват басейна.

Решение :

Нека с x означим времето за пълнене. За 1ч имаме напълнено $\frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{12}{120} + \frac{10}{120} = \frac{22}{120}$. За следващия половин час пълни само втората тръба, т.е. за времето между 1ч и 1ч и 30 минути пълним $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$. Остава ни да напълним $1 - \frac{22}{120} - \frac{1}{24}$. Ако означим оставащото време с y , то за y имаме $\frac{y}{10} + \frac{y}{12} = 1 - \frac{22}{120} - \frac{1}{24}$. Сумарното време за пълнене е $y + 1 + \frac{1}{2}$.

Задача 12 Един басейн се пълни от една тръба за 10ч, а от друга за 12ч. Първата тръба е пълнила 1 час, след което е спряла за 1 ремонт, след това е продължила да пълни. Втората тръба работи след 1вия час. За колко се напълва басейна.

7 Системи

Задача 13

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 - xy - y^2 = 19 \end{cases} \quad x = y + 7$$

Решение :

$$x = y + 7$$

$$(y + 7)^2 - (y + 7)y - y^2 = 19$$

$$y^2 + 14y + 49 - y^2 - 7y - y^2 = 19$$

$$-y^2 + 7y + 30 = 0$$

$$y^2 - 7y - 30 = 0 \rightarrow a = 1, b = -7, c = -30$$

$$D = 49 + 120 = 169, y_1 = 10, y_2 = -3$$

$$x_1 = 10 + 7 = 17, x_2 = -3 + 7 = 4$$

Отг. Решенията на системата са: $(17, 10), (4, -3)$

Задача 14

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Решение :

$$y = 2x - 1$$

$$x(2x - 1) - 1 = 0$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow a = 2, b = -1, c = -1$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 \quad x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$y_1 = 2x_1 - 1 = 2 - 1 = 1, \quad y_2 = 2x_2 - 1 = 2(-\frac{1}{2}) - 1 = -2$$

Отг. $(1, 1), (-\frac{1}{2}, -2)$

Задача 15

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Задача 16

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ x^2 - 4xy + 3y^2 + x - y = 0 \end{cases}$$