

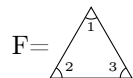
Книжка за упражнителни задачи на Деспина

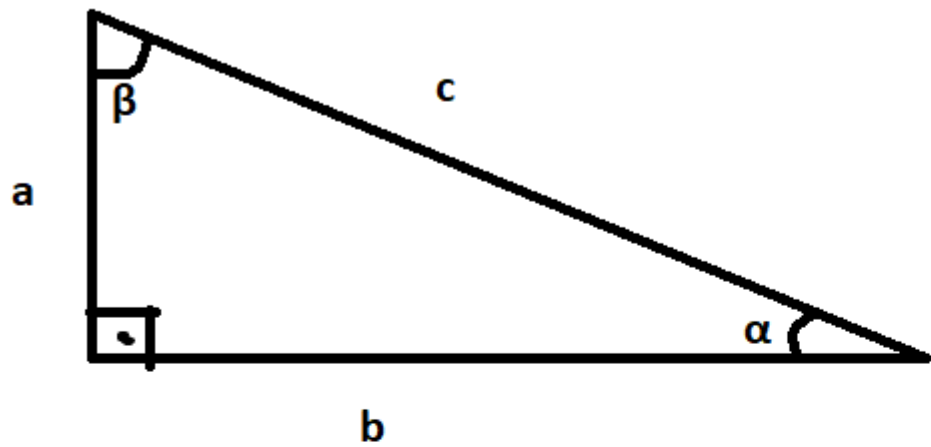
Съдържание

1	Теория	2
1.1	Триъгълник	2
1.2	Трапец	4
1.3	Успоредник	5
1.4	Функции	5
1.5	Линейна функция	6
1.6	Квадратни функции	6
1.7	Вероятности - Комбинации, Вариации и Пермутации.	6
1.8	Полиномиални и дробни неравенства - теория	7
2	Неравенства - задачи	7
3	Квадратни уравнения и системи	9
4	Еднаквост и подобност на триъгълници	11
5	Тригонометрия	12
6	Задачи с текст	12
6.1	Разни	12
6.2	Линейни уравнения и неравенства	14
6.3	Басейни	15
7	Системи	15
8	Ирационални уравнения	16
9	Опростяване на изрази	17
10	Редици и прогресии. Прогресии	18
10.1	Редици	18
10.2	Прогресии	19
11	Олимпиада по математика	20

1 Теория

1.1 Триъгълник





Дефиниция 1 $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$, $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a}{b}$, $\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{b}{a}$

Да забележим, че $\sin(\beta) = \cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ и аналогично $\cos(\beta) = \sin(\alpha) = \frac{a}{c}$.
 $a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow (\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = 1 \rightarrow \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Тригонометрични тъждества ($\alpha, \beta \in [0, 90]$):

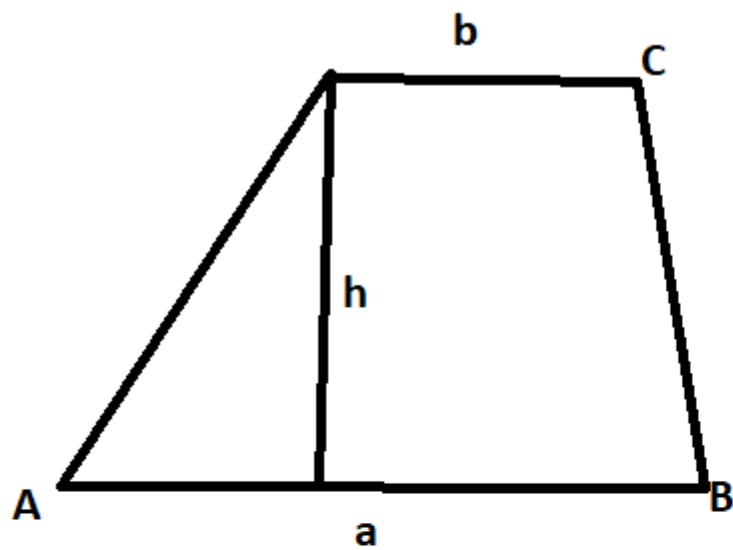
$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(90 - \alpha)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) \operatorname{cotg}(\alpha) = 1$$

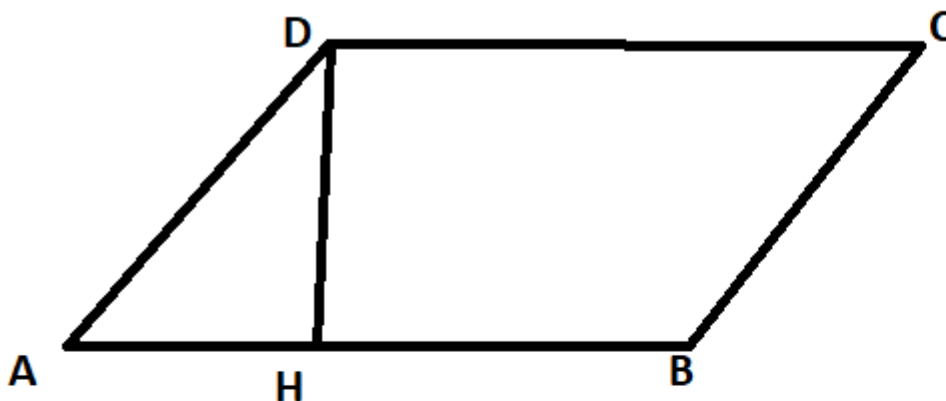
$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

1.2 Трапец



Лице на трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

1.3 Успоредник



Страните са две по две успоредни $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Лице на успоредник: $S = AB \cdot DH$ (тук се разбира дължините на страните)

Коментари: $\triangle ABD \equiv \triangle BCD$, $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$
 $\angle BAD = \angle BCD$ и $\angle ADC = \angle ABC$. $\angle ABC + \angle BAD = 180$.

Задачи - дадени са две страни на успоредник и ъгъл.

1.4 Функции

Функция е правило за съпоставяне на число по някакво правило. По-конкретно, имаме x , и на него съпоставяме $f(x)$. Често се записва като $y = f(x)$. Всичките x -ове, на които можем да съпоставим $f(x)$, се нарича дефиниционно множество на функцията $f(x)$. Графично се изобразяват наредените двойки $(x, f(x))$ или (x, y) в координатна система, в която по хоризонталата е стойността на x , а по вертикалата - на y .

Пример за функция. $y = f(x) = x$. Графиката минава през всички точки (x, x) за x в дефиниционното множество. Дефиниционното множество е ця-

лата реална права.

Примери за функции, където деф. множество не е цялата права. $y = \frac{1}{x}$ (ДМ: $x \neq 0$) и $y = \sqrt{x}$ (ДМ: $x \geq 0$)

1.5 Линейна функция

$$y = f(x) = ax + b$$

Значения на буквите а, b, c: а - "колко стръмна е правата"

$a > 0$ -> функцията е растяща ("катерим" отляво-надясно)

$a < 0$ -> функцията е намаляваща ("спускаме се" отляво-надясно)

b - "позицията на правата в координатната система по-точно отместване спрямо абсцисата

$b > 0$ колкото по-голямо е b, толкова по-голямо е отместването "нагоре".

$b < 0$ колкото по-малко е b, толкова по-голямо е отместването "надолу".

$(0, b)$ е пресечената точка на правата с ординатата (у-оста).

1.6 Квадратни функции

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Значения на буквите а, b, c:

а - "колко стръмна е една парабола"

$a > 0$ дава изгъбнала парабола

$a < 0$ дава вдлъбнала парабола

b и c - "позицията на параболата в координатната система"

$f(-\frac{b}{2a})$ е стойността на най-високата или най-ниската точка ($a > 0$ най-ниска, $a < 0$ най-висока)

$-\frac{b}{2a}$ е средата на абсцисата на корените (средната точка между двата корена) Координатите на най-висока (най-ниска точка са) $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$.

1.7 Вероятности - Комбинации, Вариации и Пермутации.

Дефиниция 2 Пермутации - начини, по които може да наредим n обекта в една линия.

Пример. Пермутация от 3 елемента са начините, по които може да наредим 3 "неща" на една линия едно до друго. Нека за определеност да са молив, химикал и флумастер. Начините, по които може да ги наредим са:

ФХМ, ФМХ, МХФ, МФХ, ХМФ, ХФМ или общо 6 начина. Нека да добавим

4ти елемент ролер. За първото нареждане ФХМ, ролерът може да е на 4 позиции: РФХМ, ФРХМ, ФХРМ, ФХМР. Тогава 4те елемента може да ги наредим по $6 \cdot 4 = 24$ начина. n обекта могат да се наредят по $n(n-1) \dots 1$ начина. Примерите по горе Ф, Х и М могат да се наредят по $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ начина и Ф, Х, М, Р могат да се наредят по $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ начина. Дефинираме n-факториел с $n! = n(n-1) \dots 1$.

Дефиниция 3 Вариация - избор на елементи където реда има значение - Налучкване на телефонен номер. V_{10}^4 .

Дефиниция 4 Комбинации - избор на елементи където реда няма значение - начини за вземане на различни цветове топки от урна (напр. сини, червени, зелени, жълти и т.н.).

Задача 1 По колко начина може да изберем 6 молива (различни) 10 молива (различни)? (Реда няма значение).

Решение :

Първи молив избираме по 10 начина, втория - по 9, и т.н. Общо $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ начина.

Задача 2 Дадени са 10 молива с различни цветове. За оцветяване на картинка са необходими 6 точно определени цвята. Каква е вероятността случайно избрани 6 молива да могат да оцветят картинката?

Решение :

Вероятността първия молив да е от 6те е $\frac{6}{10}$. Вероятността втория молив да е подходящ за оцветяване е $\frac{5}{9}$ и т.н. Вероятността от 6 тегления да изтеглим моливите за оцветяване е $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{3}{10 \cdot 9 \cdot 7} = \frac{1}{10 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{1}{210}$.
За упражнение: 2 молива от 3.

Задача 3 Да се намерят всичките възможни комбинации RGB цветове с интервал $[0, 255]$.

1.8 Полиномиални и дробни неравенства - теория

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n < 0.$$

$a_0(x - x_1) \dots (x - x_n) < 0$ Нека, за определеност, имаме $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

По подобен начин ако имаме дробни. (Да се редактира)

2 Неравенства - задачи

При умножаване на двете страни на неравенство с -1 , сменяме знака на неравенството. Пример: $3 < 5 \rightarrow -3 > -5$

Квадратни или полиномиални неравенства:

Задача 4 Дефиниционното множество на израза $\frac{2x+4}{\sqrt{5-x}}$ е:

Определя се от $5 - x > 0$

$$5 > x$$

$$x < 5 \quad x \in (-\infty, 5)$$

Задача 5 $A = \sqrt{3x^2 + 7x + 5} + 2x - 1$ при $x = -1$

$$A = \sqrt{3 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 5} + 2(-1) - 1 = \sqrt{3 - 7 + 5} - 2 - 1 = 1 - 3 = -2$$

Задача 6 Корените на уравнението $\sqrt{x+1} = 5-x$

Повдигаме на квадрат и имаме уравнението:

$$x+1 = (5-x)^2$$

$$x^2 - 10x - x + 25 - 1 = 0$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$x_1 = 3, x_2 = 8$$

ПРОВЕРКА:

$$x_1 = 3 \rightarrow 3+1 = ? (5-3)^2 \text{ ОК}$$

$$x_2 = 8 \rightarrow 8+1 = ? (5-8)^2 \text{ ОК}$$

Корените са 3 и 8.

Задача 7 Произведението на корените на уравнението $\sqrt{3x^2 - 8x - 2} = 1$

са:

$$3x^2 - 8x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -\frac{1}{3}$$

Формули на Виет:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{ПРОВЕРКА: } x_1 = 3 \rightarrow \sqrt{3 \cdot 9 - 8 \cdot 3 - 2} = \sqrt{27 - 24 - 2} = \sqrt{1} \text{ ОК}$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} \rightarrow \sqrt{3 \cdot \frac{1}{9} + 8 \cdot \frac{1}{3} - 2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2} = \sqrt{1} \text{ ОК}$$

Задача 8 Броят на корените на уравнението $(9-x^2)\sqrt{x+2} = 0$ е:

Решаваме поотделно $9-x^2 = 0$ и $\sqrt{x+2} = 0$, получаваме корени $x_{1,2} = \pm 3$ и $x_3 = -2$, НО при $x = -3$ израза $\sqrt{x+2}$ не е дефиниран, т.е. $x = -3$ не е корен. Тогава корените са два на брой.

Задача 9 Кое от посочените уравнения има корен:

1. $\sqrt{x^2+8} = -3$, няма отрицателен корен

2. $\sqrt{x-7} = 5-x$

3. $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3} = 0$,

не е възможно едновременно $\sqrt{x+5} = 0$ и $\sqrt{x+3} = 0$, по-точно $\sqrt{x+5} = 0$ тогава и само тогава, когато $x = -5$ и $\sqrt{x+3} = 0$ тогава и само тогава, когато $x = -3$

4. $\sqrt{x-3} = 3-x$

Задача 10 $\sqrt{x+6} = x$

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2$$

Задача 11 $\sqrt{\frac{3x}{x-2}} + 6\sqrt{\frac{x-2}{3x}} = 5$

Полагаме $y = \sqrt{\frac{3x}{x-2}}$, то $\sqrt{\frac{x-2}{3x}} = 1/y$

$$y + \frac{6}{y} = 5, y \neq 0$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Задача 12 $\sqrt{x-4} + x - 4 = 6$. Полагаме $\sqrt{x-4} = y$.

$$y + y^2 = 6$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

3 Квадратни уравнения и системи

1. системи уравнения
2. квадратни уравнения
3. неравенства (???)
4. други уравнения

Формули, които се използват за квадратни уравнения:

Ако е дадено уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, имаме дискриминанта $D = b^2 - 4ac$, тогава решенията се задават с $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Да разгледаме един пример.

Упражнение(?): $(x - \frac{-b+\sqrt{D}}{2a})(x - \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}) = ax^2 + bx + c$

Припомняме формулите за съкратено умножение:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Упражнителни задачи, които Деспина е решавала сама:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Още примери за решаване:

1. $x^2 - 6x + 8 = 0$

2. $x^2 - 5x + 6 = 0$

3. $x^2 - 5x + 6 = 0$

4. $x^2 - 5x + 6 = 0$

5. $x^2 - 5x + 6 = 0$

6. $x^2 - 5x + 6 = 0$

4 Еднаквост и подобност на триъгълници

Един триъгълник се определя от "три неща три страни, две страни и ъгъл между тях, страна и два ъгъла.

Признаци за еднаквост:

1. две страни и ъгъл между тях = две страни и ъгъл между тях => еднакви
2. страна и два ъгъла = страна и два ъгъла => еднакви
3. три страни = три страни => еднакви

Подобните триъгълници си приличат по това, че имат една и съща форма, но единият е 10 пъти или 5 пъти (или колкото и да е пъти) "по-голям" от другия

Признаци за подобност: (Трябва да се потвърди от учебник)

1. две страни са 5 пъти по-малки и ъгълът между тях е равен.
2. една страна е 5 пъти по-малка и 2 ъгъла са равни.
3. трите ъгъла са равни

Коефициент на подобие k ще наричаме отношението на страните между два подобни триъгълника. Съответните височини, ългополовящи и медиани са в отнишение колкото е коефициента на подобие k . За лицата отношението е коефициента на квадрат k^2 .

ирационални изрази, прогресии, статистика и обработка на данни, решаване на триъгълник- \sin , \cos , tg , cotg в $(0,180)$, синусова и косинусова теорема (?), елементи от стереометрията

Задача 13 Лицата на два подобни тригълници са 25 см^2 и 49 см^2 . Намерете коефициента на подобие.

Решение :

От условието имаме, че $k^2 = \frac{25}{49}$, тогава $k = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$

Задача 14 Лицата на два подобни тригълници са 24 см^2 и 6 см^2 . Периметъра на първия тригълник е 24 см . Намерете периметъра на втория.

Решение :

$$k^2 = \frac{24}{6} = 4 \rightarrow k = 2. P_1 = 24. P_2 = \frac{1}{2}24 = 12\text{см.}$$

Задача 15 Страните на два равностранни триъгълника са 4 и 8см. Намерете отношението на лицата.

Задача 16 Две съответни страни в два подобни триъгълника са 8 и 12см, а сборът на лицата им е 52 см². Намерете лицата на

5 Тригонометрия

Задача 17 Да се намерят останалите тригонометрични функции, ако $\cos(\alpha) = 0.3$

Решение :

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \rightarrow \sin^2(\alpha) = 1 - 0.09 \rightarrow \sin(\alpha) = \sqrt{0.91}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sqrt{0.91}}{0.3} = \frac{10\sqrt{0.91}}{3}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{0.3}{\sqrt{0.91}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{\sqrt{0.91}}{0.91} = \frac{30\sqrt{0.91}}{91}$$

Задача 18 Да се намерят останалите тригонометрични функции, ако $\cos(\gamma) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Решение :

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow \sqrt{\sin^2(\alpha)} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

6 Задачи с текст

6.1 Разни

Задача 19 Да се подредят по големина числата: 1, 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{3}$, $2\sqrt{2}$.

Решение :

$\sqrt{4} = 2$, тогава коренире около 2 се подреждат: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$.
 $\frac{5}{2} = 2.5$, $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \approx 2.667$, $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \approx 2.333$.

Ако a и b са положителни, то $a > b$, точно когато $a^2 > b^2$. Да сравним $\frac{5}{2}$ с $\sqrt{5}$. Повдигаме на втора степен. Получаваме $\frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$ и 5.

$$\sqrt{5} \approx 2.25, 1.74 > \sqrt{3} > 1.73$$

$$\sqrt{2} \approx 1.4, \text{ защото } 14^2 = 196.$$

$$\frac{8^2}{3^2} = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}.$$

$$\frac{7^2}{3^2} = \frac{49}{9} = 5\frac{4}{9}.$$

Квадратите на числата са: 1, 4, 2, 3, 5, 7, $6\frac{1}{4}$, $7\frac{1}{9}$, $5\frac{4}{9}$, 8
 Отг. 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{5}{2}$, $\sqrt{7}$, $\frac{8}{3}$, $2\sqrt{2}$.

to do:

Правилните дроби със знаменател от 1 до 10:

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{3} = 0.3333(3)$$

$$\frac{1}{4} = 0.25$$

$$\frac{1}{5} = 0.2$$

$$\frac{1}{6} = 0.16666(6)$$

$$\frac{1}{7} = 0.(142857)$$

$$\frac{2}{7} \approx 0.2857142857142857$$

$$\frac{3}{7} \approx 0.42857142857$$

$$\frac{1}{8} = 0.125$$

$$\frac{1}{9} = 0.111(1)$$

Правилните дроби със знаменател 7 имат структура.

1,2,3,4,5,6

1,2,4,5,7,8

42857142857142857142857

Задача 20 Да се намери стойността на израза:

$$1. \sqrt{(2\sqrt{6} - 5)^2} - (-\sqrt{6})^3$$

Решение :

$$(-\sqrt{6})^3 = (-\sqrt{6}).(-\sqrt{6}).(-\sqrt{6}) = -6\sqrt{6}.$$

$$\sqrt{(2\sqrt{6} - 5)^2} = |2\sqrt{6} - 5| = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\text{Отг. } 5 - 2\sqrt{6} - 6\sqrt{6} = 5 - 4\sqrt{6}.$$

Коментар: $\sqrt{(3-4)^2} \neq 3-4 = -1$, $\sqrt{(3-4)^2} = |3-4| = 1$

Коментар2: Да сравним числата $2\sqrt{6}$ и 5.

$a, b > 0$,то $a > b \iff a^2 > b^2$. $(2\sqrt{6})^2 = 24$, $5^2 = 25$. Тогава $2\sqrt{6} < 5$.

6.2 Линејни уравнения и неравенства

Задача 21 Сборът на две последователни естествени числа е със 131 по-малък от произведението им. Намерете числата.

Решение :

Ако първото (по-малкото от двете числа е x), второто число е $x + 1$. Тогава от условието на задачата имаме $x + x + 1 = x(x + 1) - 131$

$$2x + 1 = x^2 + x - 131.$$

$$x^2 + x - 131 - 2x - 1 = 0.$$

$$x^2 - x - 132 = 0. D = (-1)^2 - 4 \cdot (-132) = 1 + 4 \cdot 132 = 528 + 1 = 529.$$

$$x_1 = \frac{1+23}{2} = 12. x_2 = \frac{1-23}{2} = -11. -11 \text{ не е естествено. Отг. 12 и 13.}$$

Задача 22 В един магазин продали 488 кг портокали, лимони и маслини. Портокалите били с 40 кг повече от лимоните, а маслините - 5 пъти по-малко от портокалите. По колко килограма са продали от всеки вид?

Решение :

Да означим портокалите с x . Тогава лимоните са $x - 40$, а маслините са $\frac{x}{5}$. Тогава $x + x - 40 + \frac{x}{5} = 488$. Умножаваме двете страни (на y -ето) по 5.

$$10x - 200 + x = 488 \cdot 5$$

$$11x = 488 \cdot 5 + 200 = 2640$$

$$x = \frac{2640}{11} = 240.$$

Отг. 240кг, 200кг лимони, 48 кг. маслини. Друг начин за смятане е следният:

$$2\frac{1}{5}x = 488 + 40$$

$$\frac{11}{5}x = 528$$

$$x = 528 \cdot \frac{5}{11} = 240.$$

Задача 23 През един сезон в консервната фабрика "Добруджанка" са обработили по 48 т домати на ден. След като предали 1300 т пресметнали, че това е с 524т по-малко от цялото количество домати. Колко дни взъв фабриката са обработвани домати?

Задача 24 Обиколката на един триъгълник е 126 см. Едната му страна е с 12 см по-къса от другата, а третата е $\frac{3}{5}$ от сбора на првите две. Да се намери най-голямата страна на този триъгълник.

Задача 25 Попитали Николай на колко е години, а той отговорил: "Мама е на 38 години. Тя е с 2 години по-млада от татко. Татко пък има два пъти повече години, отколкото аз и сестра ми заедно. Но аз със с 4 години по-малък от сестра ми." На колко години са Николай и сестра му?

Задача 26 Един работник може да свърши определена работа за 15 дни, а друг работник за същото време свършва само 75 % от тази работа. Отначало двамата работници работели заедно 6 дни, а след това вторият само довършил останалата част. За колко дни била свършена цялата работа и какъв процент от нея е изработил всеки един работник?

6.3 Басейни

Задача 27 Един басейн се пълни от една тръба за 2 ч, от друга за 3ч, от трета за 4ч. За колко време се пълни от трите едновременно?

Задача 28 Един басейн се пълни от една тръба за 2 ч, от друга за 3ч. За колко време се пълни от двете едновременно? Каква част пълни всяка от тръбите?

Решение :

Разсъждения. За 1 час пълним $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Тогава ако времето за пълнене е x (в часове), то $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$. Тогава $3x + 2x = 6$ и $x = \frac{6}{5}$ часа или 1ч и 12мин. Първата тръба е напълнила $\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{5} = 60\%$. Тогава втората е напълнила $\frac{2}{5} = 40\%$ от басейна.

(Коментар: Първия басейн пълни за минута $\frac{1}{120}$, а втория $\frac{1}{180}$. За 12 минути пълним $\frac{12}{120} + \frac{12}{180} = \frac{12 \cdot 3 + 12 \cdot 2}{360} = \frac{60}{360} \cdot \frac{1}{6}$.)

Задача 29 Един басейн се пълни от една тръба за 10ч, а от друга за 12ч. Първата тръба е пълнила 1 час, след което е спряла за 30 минути ремонт, след това е продължила да пълни. Втората тръба работи безотказно. За колко време двете тръби заедно напълват басейна.

Решение :

Нека с x означим времето за пълнене. За 1ч имаме напълнено $\frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{12}{120} + \frac{10}{120} = \frac{22}{120}$. За следващия половин час пълни само втората тръба, т.е. за времето между 1ч и 1ч и 30 минути пълним $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$. Остава ни да напълним $1 - \frac{22}{120} - \frac{1}{24}$. Ако означим оставащото време с y , то за y имаме $\frac{y}{10} + \frac{y}{12} = 1 - \frac{22}{120} - \frac{1}{24}$. Сумарното време за пълнене е $y + 1 + \frac{1}{2}$. Остава да намерим y .

Задача 30 Един басейн се пълни от една тръба за 10ч, а от друга за 12ч. Първата тръба е пълнила 1 час, след което е спряла за 1 ремонт, след това е продължила да пълни. Втората тръба работи след 1вия час. За колко време се напълва басейна?

7 Системи

Задача 31

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 - xy - y^2 = 19 \end{cases} \quad x = y + 7$$

Решение :

$$\begin{aligned} x &= y + 7 \\ (y + 7)^2 - (y + 7)y - y^2 &= 19 \\ y^2 + 14y + 49 - y^2 - 7y - y^2 &= 19 \\ -y^2 + 7y + 30 &= 0 \end{aligned}$$

$y^2 - 7y - 30 = 0 \rightarrow a = 1, b = -7, c = -30$
 $D = 49 + 120 = 169, y_1 = 10, y_2 = -3$
 $x_1 = 10 + 7 = 17, x_2 = -3 + 7 = 4$
 Отг. Решенията на системата са: $(17, 10), (4, -3)$

Задача 32

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Решение :

$y = 2x - 1$
 $x(2x - 1) - 1 = 0$
 $2x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow a = 2, b = -1, c = -1$
 $D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 \quad x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$
 $y_1 = 2x_1 - 1 = 2 - 1 = 1, \quad y_2 = 2x_2 - 1 = 2(-\frac{1}{2}) - 1 = -2$
 Отг. $(1, 1), (-\frac{1}{2}, -2)$

Задача 33

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Задача 34

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ x^2 - 4xy + 3y^2 + x - y = 0 \end{cases}$$

8 Ирационални уравнения

Задача 35 Решете уравнението: $\sqrt{x-5} - \sqrt{20-x} = -1$

Решение :

$(\sqrt{x-5} - \sqrt{20-x})(\sqrt{x-5} + \sqrt{20-x}) = x+5+20-x = 25 \rightarrow$ няма решение.

Задача 36 Решете уравнението: $\sqrt{x-2} - \sqrt{2x-1} = 0$

Решение :

$(\sqrt{x-2} - \sqrt{2x-1})(\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-1}) = x-2+2x-1 = 3x-3$

$3x = 3 \rightarrow x = 1.$

Проверка: $\sqrt{1-2} - \sqrt{2-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{1} \neq 0 \rightarrow$ няма решение.

За другия път $x-2 \geq 0$ и $2x-1 \geq 0$

9 Опростяване на изрази

Задача 37 Да се опрости изразът:

$$1. \sqrt{0.36 * 49 * 25} = \sqrt{0.6^2 * 7^2 * 5^2} = \sqrt{0.6^2} * \sqrt{7^2} * \sqrt{5^2} = 0.6 * 7 * 5 = 35 * 0.6 = 21$$

$$2. \frac{\sqrt{22.5}}{\sqrt{0.4}} = \frac{\sqrt{225} \sqrt{0.1}}{\sqrt{4} \sqrt{0.1}} = \frac{15}{2}$$

$$3. \sqrt{60} - (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = \sqrt{60} - ((\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2) = \sqrt{60} - (3 + 2\sqrt{15} + 5) = \sqrt{60} - 3 - 2\sqrt{15} - 5 = \sqrt{60} - 8 - 2\sqrt{15}.$$

Разлагане на 60 на прости множители: $60 = 2 * 2 * 3 * 5$. Тогава $\sqrt{60} = \sqrt{2 * 2 * 3 * 5} = \sqrt{2^2 * 3 * 5} = 2\sqrt{15}$. Отг. -8

Да се направят зад 5,6,7,8,10 от картинката

Задача 38 Да се опрости изразът

$$\bullet \sqrt{5a^4} = \sqrt{5}\sqrt{a^2.a^2} = \sqrt{(a^2)^2}\sqrt{5} = a^2\sqrt{5}$$

$$\bullet \sqrt{25a} = 5\sqrt{a}$$

$$\bullet \sqrt{147a^5} = \sqrt{21.7.a^5} = \sqrt{3.7^2.a^4.a} = 7a^2\sqrt{3a}$$

$$\bullet \sqrt{16,9.6,4} = \sqrt{\frac{169}{10} \frac{64}{10}} = \frac{\sqrt{169}\sqrt{64}}{\sqrt{10^2}} = \frac{13.8}{10} = \frac{13.4}{5} = \frac{52}{5} = 10,4$$

$$\bullet \sqrt{0,000576} = \sqrt{\frac{576}{10^6}} = \frac{num}{10^3} =$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{x^2} = x, \text{ при } x \geq 0.$$

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \text{ НЕ е реален израз}$$

$$x * x = x^2 \geq 0$$

$\sqrt{x-2}$ трябва $x-2 \geq 0$ или $x \geq 2$ Това го наричаме ДЕФИНИЦИОННО МНОЖЕСТВО или ДЕФИНИЦИОННА ОБЛАСТ

Пример $\sqrt{x-2} < 2$ Трябва да осигурим две неща:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ (\sqrt{x-2})^2 < 2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x-2 < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 6 \end{cases}$$

$$\text{ОТГ. } x \in [6, +\infty)$$

$$\text{ОТГ. } x \in [2, 6]$$

$$\text{ОТГ. } x \in [2, 6)$$

$$\sqrt{x-2}(x^2 - 8x + 15) < 0$$

$$(x-3)^2 + -8(x-3) + 15 = 0$$

$$x-3 = y$$

$$y^2 - 8y + 15 = 0$$

10 Редици и прогресии. Прогресии

10.1 Редици

Редица е съпоставяне на число по индекс. Може да се мисли и като функция, която съпоставя на всяко цяло положително(неотрицателно число) съответния член от редицата.

Пример: 1,4,8,13,19 като $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + n + 1$ (рекурентна зависимост). Да намерим друг начин на записване. Вземаме за пример a_5 , $a_5 = 1+3+4+5+6$ то $a_n = 1+(3+4+\dots+(n-1)) = 1-1-2+1+2+3+4+\dots+(n-1) = -2 + \frac{(n-1)n}{2}$ или $a_n = -2 + \frac{(n-1)n}{2}$. Ако вземем функцията $f(x) = -2 + \frac{(x-1)x}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 2$ за $x \in \mathbf{R}$.

Задача 39 Да се намерят първите 5 члена на редицата, зададена с $a_1 = 1$ и $a_n = 3a_{n-1} + 3$.

$$a_2 = 3a_1 + 3 = 3 \cdot 1 + 3 = 6$$

10.2 Прогресии

Прогресиите са два вида - аритметична и геометрична. При аритметичната събираме, при геометричната умножаваме.

Примери: 1,2,3,4,5,6... (аритметична); 2,4,6,8,10... (аритметична);
1,2,4,8,16,32... (геометрична); $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots$ (геометрична). Цялата теория на тези прогресии се състои в няколко формули. Формула за n -ти член на прогресията и формула за сума на първите n члена.

Задача 40 Да се намери формула за n -ти член на аритметичната прогресия. Да се намери 10тия, 15тия член, 50тия, както и сумата на първите 10 члена.

- -21, -16, -11, -6, ...

Решение :

- $a_1 = -21, d = 5.$
 $a_2 = a_1 + d,$
 $a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$
 $a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$
 $a_{10} = a_1 + 9d$
 $a_{15} = a_1 + 14d$
 $a_{50} = a_1 + 49d$
 $a_n = a_1 + (n - 1)d$

Идея: Да се намери сумата на числата от 1 до 100:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = S$$

$$100 + 99 + 98 + \dots + 1 = S$$

Като съберем двете равенства, получаваме:

$$(1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (100 + 1) = 2S$$

$$101 \cdot 100 = 2S \text{ или } S = 50 \cdot 101 = 5050.$$

За да намерим формулата за сумата на първите n члена, записваме следните равенства:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n$$

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 = S_n$$

$$a_n + a_1 = a_1 + (n - 1)d + a_1 = 2a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{n-1} + a_2 = 2a_1 + (n - 1)d$$

Малко мисъл:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

$$n[2a_1 + (n - 1)d] = 2S_n$$

$$S_n = na_1 + \frac{n-1}{2}d$$

$$S_{10} =$$

$$S_{50} = 50 \cdot (-21) + \frac{49}{2} \cdot 5 = -1050 + \frac{2450}{2} = 1225 - 1050 = 175.$$

Задача 41 Да се намери формула за n -ти член на геомтерична прогресия 1, 2, 4, 8, ... Да се намери 6тия член, както и сумата на първите 10 члена.

Решение :

$$a_1, a_2, a_3 \dots \text{ като } a_1 = 1, q = 2.$$

$$a_2 = a_1 q = 2$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2 = 4$$

$$a_{110} = a_1 q^{109} = 2^{109}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n = S_n$$

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} = S_n. \text{ Умножаваме по } q:$$

$$a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \dots + a_1 q^n = q S_n. \text{ Изваждаме равенствата, за да получим}$$

$$\text{формулата: } a_1 - a_1 q^n = S_n - q S_n$$

$$a_1(1 - q^n) = S_n(1 - q)$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

•

Задача 42 Да се намери формула за n -ти член на геомтерична прогресия 81, 27, 9, ... Да се намери 6тия член, както и сумата на първите 10 члена.

Решение :

$$a_1, a_2, a_3 \dots \text{ като}$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$$

•

Задача 43 3тия и 5тия член на аритметична прогресия са . Да се намери сумата на първите 10 члена.

Задача 44 5тия член на аритметична прогресия е, а сумата на първите 10 члена е Да се намери прогресията.

11 Олимпиада по математика

Задача 45 (Задача 1) Решете неравенството: $\frac{x}{x+3} \leq \frac{5}{x^2-x-12}$. Намерете всички цели числа, които са решения на неравенството.

Решение :

$$\text{Забелязваме, че от } ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2) \rightarrow x^2 - x - 12 = (x+3)(x-4).$$

$$\text{Задачата става } \frac{x}{x+3} \leq \frac{5}{(x+3)(x-4)}. \text{ Решаваме чрез прехвърляне и привеждане}$$

$$\text{под общ знаменател.}$$

$$\frac{x}{x+3} - \frac{5}{(x+3)(x-4)} \leq 0$$

$$\frac{x(x-4)}{(x+3)(x-4)} - \frac{5}{(x+3)(x-4)} \leq 0$$

$$\frac{x^2-4x-5}{(x+3)(x-4)} \leq 0$$

$x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$, мислим си $[x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 5]$

$$\frac{(x+1)(x-5)}{(x+3)(x-4)} \leq 0$$

Нареждаме на числовата ос числата $-3, -1, 4, 5$. Тогава знаците отлясно наляво са $+, -, +, -, +$. Знаците с $-$ на нас ни трябва и дават интервалите $(4, 5] \cup (-3, -1]$. Единствените цели числа решения на неравенството са 5 и -1 .

Задача 46 (Задача 2) Дадена е функцията $y = f(x) = (2 - a)x^2 + bx + c$

1. Да се намерят a, b, c , ако a_1 и частното q на геометрична прогресия, за която:

$$\begin{cases} a_2 + a_5 - a_4 = 10 \\ a_3 + a_6 - a_5 = 20 \end{cases}$$

b е сборът на корените на уравнението: $\sqrt{5x^2 + 20} = x^2 - 6$

2. За намерените стойности на параметрите a, b, c намерете най-голямата и най-малката стойност на $f(x)$ в интервала $[-1, 1]$

Решение :

Нека напишем системата само с a_1 и q .

$$\begin{cases} a_1q + a_1q^4 - a_1q^3 = 10 \\ a_1q^2 + a_1q^5 - a_1q^4 = 20 \end{cases}$$

Умножаваме по q първото уравнение и изваждаме от него второто уравнение. Това цялото го записвам на мястото на второто уравнение. Накратко вместо второто уравнение, първо $y = e^*q$ - пиша вт. у-е .

$$\begin{cases} a_1q + a_1q^4 - a_1q^3 = 10 \\ (a_1q + a_1q^4 - a_1q^3)q - (a_1q^2 + a_1q^5 - a_1q^4) = 10q - 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1q + a_1q^4 - a_1q^3 = 10 \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 16a_1 - 8a_1 = 10 \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$$

Геометричната прогресия е $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$

Минаваме към уравнението: $\sqrt{5x^2 + 20} = x^2 - 6$

$$5x^2 + 20 = (x^2 - 6)^2 = x^4 - 12x^2 + 36$$

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

Полагаме $x^2 = t$.

$$t^2 - 17t + 16 = 0$$

$t_1 = 1$, $t_2 = 16$. Тогава трябва да проверим кои от $x = \pm 1, \pm 4$ са корени. $x = \pm 1$ не дава решение, защото дясната част на у-ето е < 0 . $x = \pm 4$ дава две решения. Сборът е 0.

Намерихме $a = 1, b = 0, c = 2$. Остава да намерим най-голяма и най-малка стойност на $x^2 + 2$ в интервала $[-1, 1]$. Най-голямата стойност е при $x = \pm 1$ и тогава $f(\pm 1) = 3$ и най-малката е $f(0) = 2$.

Задача 47 (Задача 3) Даден е трапец, вписан в окръжност, с основи с дължини 12 и 20. Да се намери лицето на трапеца и дължината на бед-рото, ако центърът на описаната окръжност лежи на голямата основа на трапеца.

ЧЕРТЕЕЕЕЖ .

Решение :

12 Матура 21.05.2021 г. – Вариант 1

Задача 48 Стойността на израза $\sqrt{21^2 - 15^2} - \sqrt{150} + \sqrt{(\sqrt{6} - 3)^2}$ е:

$$\sqrt{21^2 - 15^2} - \sqrt{150} + \sqrt{(\sqrt{6} - 3)^2} = \sqrt{(21 - 15)(21 + 15)} - \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} + |\sqrt{6} - 3| =$$

Нека $a, b > 0$. Тогава $\sqrt{(a - b)^2} = a - b$, ако $a > b$.

$(a - b)^2 = (b - a)^2$. Ако $a < b$, тогава $\sqrt{(a - b)^2} = b - a$. В нашия случай $|\sqrt{6} - 3| = 3 - \sqrt{6}$, защото $9 > 6$ (сравняваме квадратите).

Израза става: $\sqrt{6 \cdot 36} - 5\sqrt{6} + 3 - \sqrt{6} = 6\sqrt{6} - 6\sqrt{6} + 3 = 3$.

Задача 49 най-големият корен на уравнението $(x^2 - 4x)^2 + 7(x^2 - 4x) + 12 = 0$

Полагаме $y = x^2 - 4x$. Имаме уравнение $y^2 + 7y + 12 = 0$. $y_1 = -3, y_2 = -4$

Получаваме две квадратни уравнения: $x^2 - 4x + 3 = 0$ и $x^2 - 4x + 4 = 0$. Първото има корени 3 и 1, а второто има корен 2. Решаваме и чрез заместване $x = 4$ дава $12 = 0$. не е корен

$x = 3$ дава $(9 - 12)^2 + 7(9 - 12) + 12 = 9 + 7 \cdot (-3) + 12 = 9 - 21 + 12 = 0$