# ЛЕСНО НАКРАТКО ЗА МАТУРАТА ПО МАТЕМАТИКА

# ЧИСЛОВИ РЕДИЦИ. ПРОГРЕСИИ

Иван Георгиев
Стелиана Кокинова

ПРОСВЕТА
София

ISBN 978–954–01–2478–0

# ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМИ

Числова функция, дефинирана в множеството на естествените числа **N**, се нарича ***безкрайна числова редица***. Ако дефиниционното ѝ множество е $\{1, 2, \ldots, n\}$, т.е. първите $n$ естествени числа, редицата е ***крайна***.

Числова редица се означава с $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$ или по-кратко – с $\{a_n\}$ или $(a_n)$.

Числата $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots,$ се наричат ***членове*** на редицата, а 1, 2, 3, …, $n$, …, са техните ***номера***.

Редицата е ***намаляваща***, ако $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ $\forall n \in \mathbf{N}$, а при $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$ тя е ***строго намаляваща***.

Редицата е ***растяща***, ако $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$ $\forall n \in \mathbf{N}$, а при $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$ тя е ***строго растяща***.

Растящите и намаляващите редици се наричат още ***монотонни редици***.

Числова редица може да се зададе с формула, чрез връзка между членовете ѝ (рекурентна зависимост), графично, таблично или описателно. Например с формулата $a_n = (-1)^n$ се задава редицата – 1, 1, – 1, 1, ..., а с равенствата $a_1 = 2$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 2)$ се получава редицата от числа 2, 5, 11, 23, ... .

Числова редица, на която е даден първият член, а всеки следващ член се получава от предходния, като се прибавя едно и също число, се нарича ***аритметична прогресия***.

Числова редица, на която е даден първият член (число, различно от нула), а всеки следващ член се получава от предходния, като се умножава с едно и също число, различно от нула и единица[1], се нарича ***геометрична прогресия***.

Една редица е аритметична прогресия тогава и само тогава, когато всеки неин член без първия (и без последния за крайна редица) е средноаритметичен на съседните си два члена.

---

[1] В някои помагала се допуска частното на геометрична прогресия да е равно на единица.

Една редица е геометрична прогресия тогава и само тогава, когато всеки неин член без първия (и без последния за крайна редица) е средногеометричен на съседните си два члена.

Свойствата и важните равенства, свързани с двете прогресии, са дадени в следната таблица:

| | **Аритметична прогресия** $\div\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ | **Геометрична прогресия** $\div\!\div\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ |
|---|---|---|
| **Определение** | $a_n = a_{n-1} + d$;<br>$d$ – разлика,<br>$d \in \mathbf{R}$; $a_1 \in \mathbf{R}$ | $a_n = a_{n-1}\,q$;<br>$q$ – частно,<br>$q \neq 0$, $q \neq 1$; $a_1 \neq 0$ |
| **Формула за общия член** | $a_n = a_1 + (n-1)d$ | $a_n = a_1 q^{n-1}$ |
| **Свойства** | $a_m + a_n = a_k + a_l$<br>$\Leftrightarrow m + n = k + l$,<br>$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$,<br>$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$<br>$= a_3 + a_{n-2} = \ldots$ | $a_m a_n = a_k a_l$<br>$\Leftrightarrow m + n = k + l$,<br>$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$,<br>$a_1 a_n = a_2 a_{n-1}$<br>$= a_3 a_{n-2} = \ldots$ |
| **Сума на първите *n* члена** | $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}.n$,<br>$S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2}.n$ | $S_n = \dfrac{a_n q - a_1}{q-1}$,<br>$S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1}$ |
| **Важни суми** | $1 + 2 + 3 + \ldots + n$<br>$= \dfrac{n(n+1)}{2}$,<br>$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$<br>$= n^2$,<br>$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$<br>$= n(n+1)$ | $x^n - y^n$<br>$= (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y$<br>$+ \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ |

# НЯКОИ ИДЕИ ПРИ РЕШАВАНЕТО НА ЗАДАЧИ С ЧИСЛОВИ РЕДИЦИ И ПРОГРЕСИИ

**1.** Напишете първите пет члена на числовите редици $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$, където

$$a_n = 2^n - n,\ b_n = (-1)^{n+1}\ .\ n^2 \text{ и } c_n = 2c_{n-1} + c_{n-2},\ c_1 = 2,\ c_2 = 5.$$

***Решение.*** При $n = 1, 2, 3, 4$ и $5$ намираме:

$$a_1 = 2^1 - 1 = 1,\ a_2 = 2^2 - 2 = 2,\ a_3 = 2^3 - 3 = 5,$$
$$a_4 = 2^4 - 4 = 12,\ a_5 = 2^5 - 5 = 27;$$
$$b_1 = (-1)^{1+1}\ .\ 1^2 = 1,\ b_2 = (-1)^{2+1}\ .\ 2^2 = -4,$$
$$b_3 = (-1)^{3+1}\ .\ 3^2 = 9,\ b_4 = (-1)^{4+1}\ .\ 4^2 = -16,$$
$$b_5 = (-1)^{5+1}\ .\ 5^2 = 25;$$
$$c_3 = 2c_2 + c_1 = 2\ .\ 5 + 2 = 12,\ c_4 = 2c_3 + c_2 = 2\ .\ 12 + 5 = 29,$$
$$c_5 = 2c_4 + c_3 = 2\ .\ 29 + 12 = 70.$$

Първите пет члена на трите редици са съответно: 1, 2, 5, 12, 27; 1, – 4, 9, – 16, 25 и 2, 5, 12, 29, 70.

**2.** Петдесетият член на редицата с общ член $a_n = 4n - 20$ е последен член на редицата с общ член $b_m = m^2 - 3m$. Намерете броя на членовете на втората редица.

***Решение.*** По условие последният член на редицата $\{b_m\}$ е $a_{50}$ и от $m^2 - 3m = 4\ .\ 50 - 20 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 180 = 0$ намираме $m_1 = 15$ и $m_2 = -12$, като само 15 е естествено число.

Следователно втората редица се състои от 15 члена.

**3.** Сумата $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ за всяко $n \in \mathbf{N}$ се пресмята по формулата $S_n = n^2 - n + 3$. Намерете формула за общия член на редицата $\{a_n\}$ и пресметнете стойността на израза $A = a_5 - 2a_3 + a_{10}$.

***Решение.*** От $a_n = S_n - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = S_n - S_{n-1}$ и $S_{n-1} = (n-1)^2 - (n-1) + 3 = n^2 - 2n + 1 - n + 1 + 3 = n^2 - 3n + 5$ получаваме, че $a_n = n^2 - n + 3 - n^2 + 3n - 5 = 2n - 2$.

Тогава $a_3 = 2\ .\ 3 - 2 = 4$, $a_5 = 2\ .\ 5 - 2 = 8$, $a_{10} = 2\ .\ 10 - 2 = 18$ и $A = a_5 - 2a_3 + a_{10} = 8 - 2\ .\ 4 + 18 = 18$.