

MATEMATIČNO-FIZIKALNI PRAKTIKUM 2024/25

**7. naloga: Newtonov zakon**

Tadej Tomažič

29. november 2024

## Kazalo

<b>1</b>	<b>Navodila</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Rešitev</b>	<b>4</b>

## Slike

1	Ohranjanje energije pri različnih algoritmih . . . . .	4
2	Časovna odvisnost različnih algoritmov . . . . .	4
3	Trajektorija pravega nihala in matematičnega nihala . . . . .	5
4	Odvisnost frekvence matematičnega in točnega nihala od začetne lege . . . . .	5
5	Fazni diagram $\dot{\theta}(\theta)$ . . . . .	6

# 1 Navodila

Gibanje masne točke v polju sil v eni dimenziji opišemo z diferencialno enačbo drugega reda, z Newtonovim zakonom

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F.$$

Enačba je seveda enakovredna sistemu enačb prvega reda

$$m \frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = F$$

in tako jo tudi rešujemo: kot sistem dveh enačb prvega reda.

Seveda morajo biti na voljo tudi ustrezni začetni pogoji, tipično  $x(t=0) = x_0$  in  $dx/dt = v(t=0) = v_0$ . Splošnejše gre tu za sistem diferencialnih enačb drugega reda:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \dots),$$

ki ga lahko prevedemo na sistem enačb prvega reda z uvedbo novih spremenljivk v slogu gibalne količine pri Newtonovi enačbi ( $y' = v, y'' = z, \dots$ ).

Z nekaj truda se da eksplicitno dokazati, mi pa lahko privzamemo, da so metode za reševanje enačb hoda (Runge-Kutta 4. reda, prediktor-korektor...) neposredno uporabne za reševanje takšnih sistemov enačb in torej aplikabilne v poljubno dimenzijah, kar naj bi v principu zadovoljilo večino naših zahtev.

Obstaja še posebna kategorija tako imenovanih *simplektičnih* metod, za enačbe, kjer je  $f$  le funkcija koordinat,  $f(y)$ , ki (približno) ohranjajo tudi Hamiltonian, torej energijo sistema. Najbolj znana metoda je Verlet/Störmer/Encke metoda, ki je globalno natančna do drugega reda in ki točno ohranja tudi vrtilno količino sistema (če je ta v danem problemu smiselna). Rešujemo torej za vsak diskretni korak  $n$  velikosti  $h$ ,  $x_n = x_0 + n \cdot h$ :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

in pri diskretizaciji dobimo recept za korak  $y_n$  in  $v_n = y'_n$ :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot v_n + \frac{h^2}{2} \cdot f(y_n) \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{2} \cdot [f(y_n) + f(y_{n+1})]. \end{aligned}$$

Alternativno lahko to shemo zapišemo tudi s pomočjo dodatnih vmesnih točk in preskakujemo med lego in hitrostjo z zamikom  $h/2$  (od tod angleško ime 'leapfrog' za ta zapis):

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot v_{n+1/2} \\ v_{n+3/2} &= v_{n+1/2} + h \cdot f(y_{n+1}). \end{aligned}$$

V še enem drugačnem zapisu je metoda poznana tudi kot metoda "Središčne razlike" (Central Difference Method, CDM), če nas hitrost ne zanima:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \cdot f(y_n),$$

kjer prvo točko  $y_1$  izračunamo po originalni shemi. Metodo CDM lahko uporabljamo tudi za primere, ko je  $f$  tudi funkcija 'časa'  $x$ ,  $f(x, y)$ , le da tu simplektičnost ni zagotovljena (in tudi verjetno ne relevantna). Za simplektične metode višjih redov je na voljo na primer Forest-Ruth metoda ali Position Extended Forest-Ruth Like (PEFRL) metoda, ki sta obe globalno četrtega reda in enostavni za implementacijo.

*Naloga:* Čim več metod uporabi za izračun nihanja matematičnega nihala z začetnim pogojem  $\vartheta(0) = \theta_0 = 1, \dot{\vartheta}(0) = 0$ . Poišči korak, ki zadošča za natančnost na 3 mesta. Primerjaj tudi periodično

stabilnost shem: pusti, naj teče račun čez 10 ali 20 nihajev in poglej, kako se amplitude nihajev sistematično kvarijo. Pomagaš si lahko tudi tako, da občasno izračunaš energijo  $E \propto 1 - \cos \vartheta + \frac{\dot{\vartheta}^2}{2\omega_0^2}$ .

Nariši tudi ustrezne fazne portrete!. Z analitično rešitvijo dobimo za nihajni čas  $\frac{4}{\omega_0} K\left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2}\right)$ , kjer je  $K(m)$  popolni eliptični integral prve vrste, ki je v SciPy knjižnici in v članku na spletni učilnici podan z:

$$K(m) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-mz^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{(1-m\sin^2 u)}}$$

Previdno, obstaja tudi definicija z  $m^2$  v integralu - potem je prav  $K\left(\sin \frac{\theta_0}{2}\right)$ , brez kvadrata (npr že v Wikipediji)!

(Dodatno lahko tudi sprogramirate eliptični integral, ki je analitična rešitev dane enačbe ali pa ga vzamete iz ustreznih programskih knjižnic).

*Dodatna naloga:* Razišči še resonančno krivuljo vzbujenega dušenega matematičnega nihala

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \sin x = v \cos \omega_0 t,$$

kjer je  $\beta$  koeficient dušenja,  $v$  in  $\omega_0$  pa amplituda in frekvenca vzbujanja. Opazuj obnašanje odklonov in hitrosti nihala pri dušenju  $\beta = 0.5$ , vzbujevalni frekvenci  $\omega_0 = 2/3$  in amplitudo vzbujanja na območju  $0.5 < v < 1.5$ . Poskusi opaziti histerezo obnašanje resonančne krivulje pri velikih amplitudah vzbujanja (Landau, Lifšic, CTP, Vol. 1, *Mechanics*).

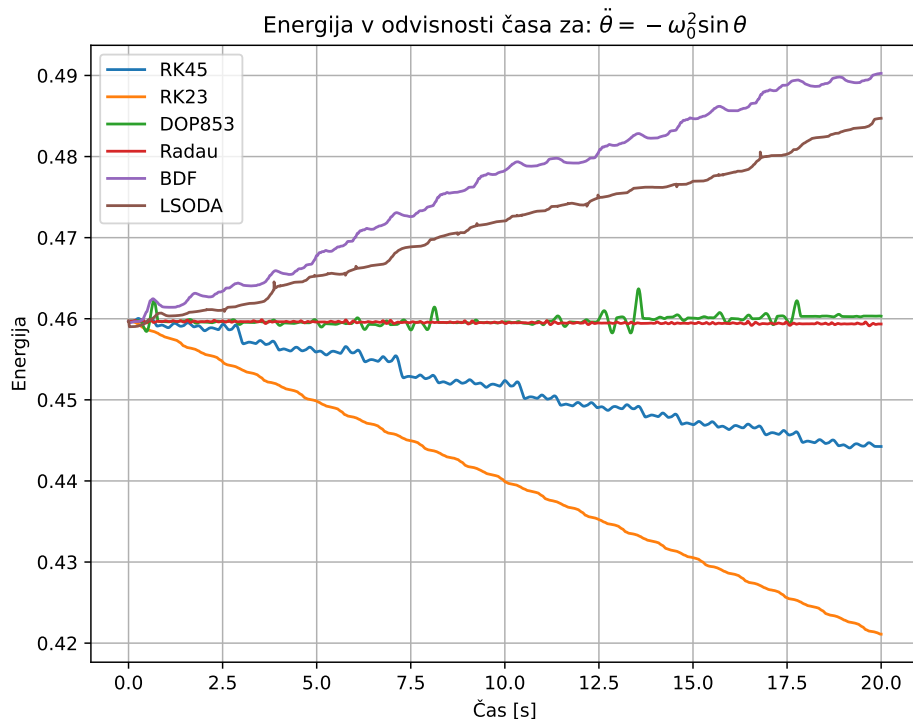
*Dodatna dodatna naloga:* če ti gre delo dobro od rok, si oglej še odmike in hitrosti (fazne portrete) van der Polovega oscilatorja

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda \frac{dx}{dt} (1 - x^2) + x = v \cos \omega_0 t$$

s parametri  $\omega_0 = 1$ ,  $v = 10$  ter  $\lambda = 1$  ali 100. Tu se ne trudi s preprostimi diferenčnimi shemami: problem je nelinearen in tog, zato uporabi neko preverjeno metodo (na primer iz družine Runge-Kutta ali ekstrapolacijsko metodo) s prilagajanjem velikosti koraka.

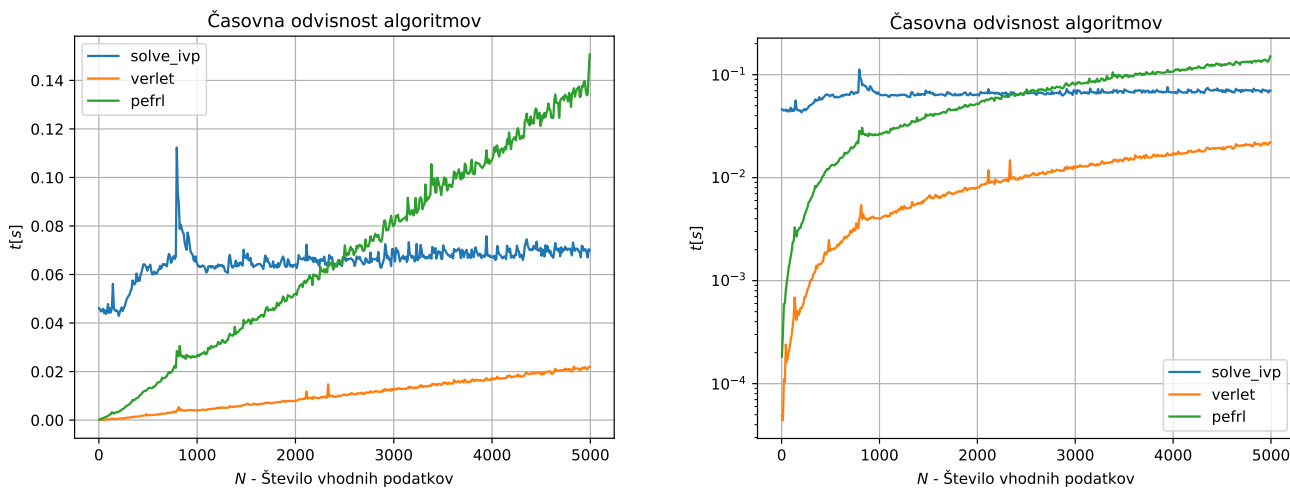
## 2 Rešitev

Najprej si pogledjmo, kako se obnašajo energije z različnimi algoritmi, ali se ohranjajo ali ne. Pogledjmo si že implementirane algoritme v `scipy.ivp_solve()`. Od tu vidimo, da je najbolj uporabna metoda



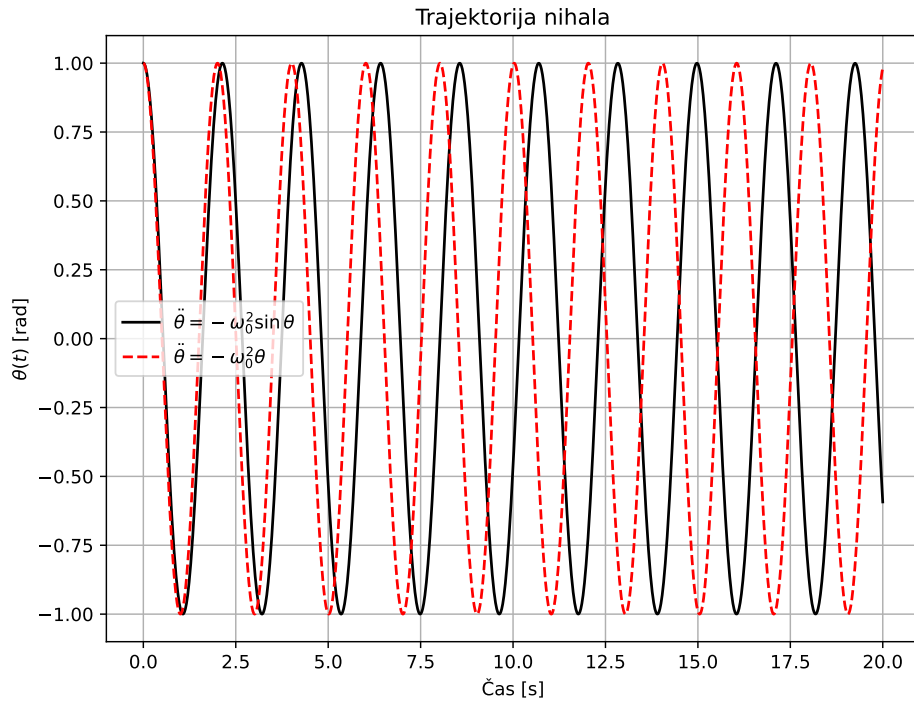
Slika 1: Ohranjanje energije pri različnih algoritmih

Radau, ki jo bomo v nadaljevanju vedno uporabljali. Pogledjmo si še časovno odvisnost algoritmov, ki ohranjajo energijo.



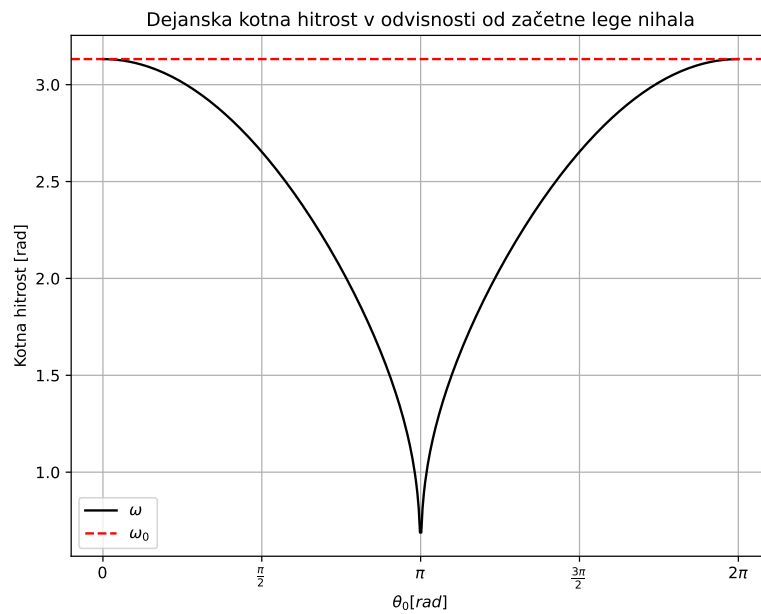
Slika 2: Časovna odvisnost različnih algoritmov

Poglejmo si še trajektorijo nihala. Poglejmo si še kako vpliva začetna lega na frekvenco, izračunano:



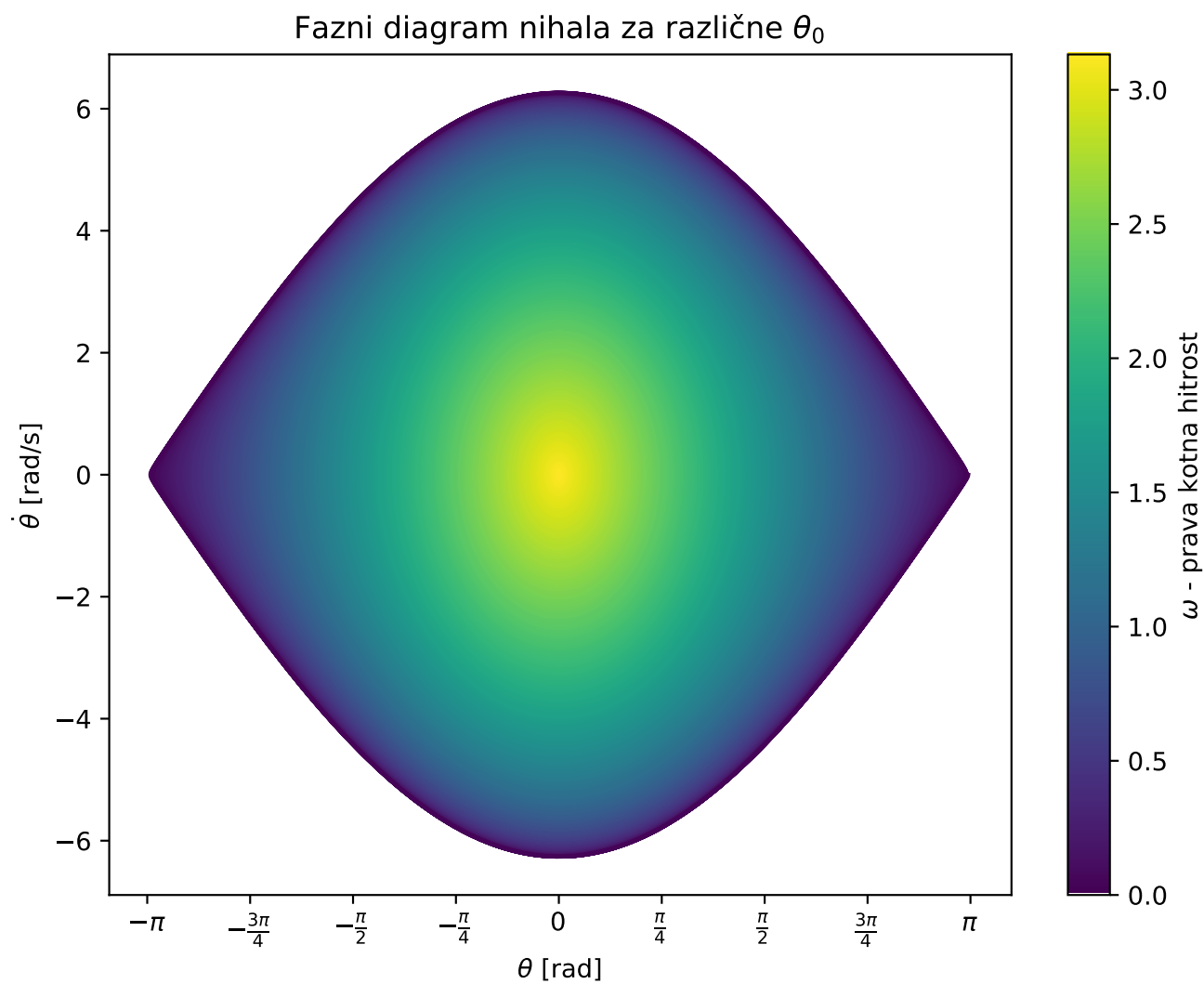
Slika 3: Trajektorija pravega nihala in matematičnega nihala

$\omega = \frac{2\pi}{t_0}$ , kjer je  $t_0$  obhodni čas.



Slika 4: Odvisnost frekvence matematičnega in točnega nihala od začetne lege

Polgejmo si še fazni diagram:



Slika 5: Fazni diagram  $\dot{\theta}(\theta)$