

Matematično-fizikalni praktikum

1. naloga: Airyjevi funkciji

Tadej Tomažič

10. oktober 2024

Kazalo

1	Naloga	2
2	Reštiev	3

Slike

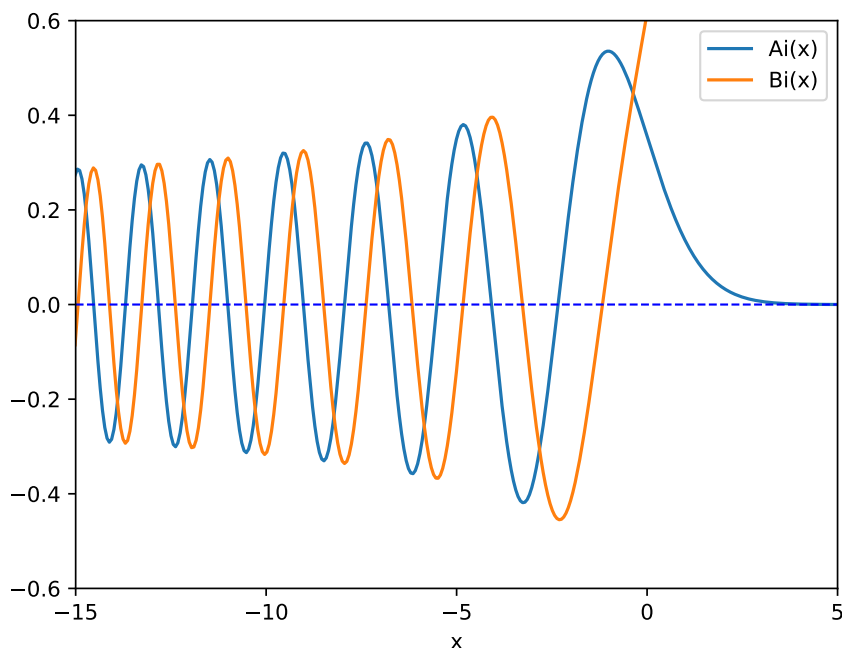
1	Funkciji $Ai(x)$ in $Bi(x)$	3
2	Funkciji $Ai(x)$ in $Bi(x)$ razviti po taylorju	4
3	Funkciji $Ai(x)$ in $Bi(x)$ asimptotsko razvit	6
4	Funkcija $Ai(x)$ absolutna in relativna napaka	7
5	Funkcija $Bi(x)$ absolutna in relativna napaka	8

1 Naloga

Z uporabo kombinacije Maclaurinove vrste in asimptotskega razvoja poišči čim učinkovitejši postopek za izračun vrednosti Airyjevih funkcij Ai in Bi na vsej realni osi z **absolutno** napako, manjšo od 10^{-10} . Enako naredi tudi z **relativno** napako in ugotovi, ali je tudi pri le-tej dosegljiva natančnost, manjša od 10^{-10} . Pri oceni napak si pomagaj s programi, ki znajo računati s poljubno natančnostjo, na primer z MATHEMATICO in/ali paketi MPMATH in DECIMAL v programskem jeziku PYTHON.

2 Reštiev

Najprej narišemo funkciji Ai in Bi z uporabo builtin funkcij v knjižnici `mpmath` in `matplotlib`.



Slika 1: Funkciji $Ai(x)$ in $Bi(x)$

Nato sem risal za majhne x s pomočjo razvojem Ai ter Bi v Maclaurinovo vrsto.

$$Ai(x) = \alpha f(x) - \beta g(x), \quad Bi(x) = \sqrt{3} \left[\alpha f(x) + \beta g(x) \right], \quad (1)$$

kjer v $x = 0$ veljata zvezi $\alpha = Ai(0) = Bi(0)/\sqrt{3} \approx 0.355028053887817239$ in $\beta = -Ai'(0) = Bi'(0)/\sqrt{3} \approx 0.258819403792806798$. Vrsti za f in g sta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)_k \frac{3^k x^{3k}}{(3k)!}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)_k \frac{3^k x^{3k+1}}{(3k+1)!}, \quad (2)$$

kjer je

$$(z)_k = \Gamma(z+k)/\Gamma(z), \quad (z)_0 = 1. \quad (3)$$

Enačbo (3) lahko še naprej razpišemo.

$$\Gamma(z+k)/\Gamma(z) = \frac{(z+k-1)!}{(z-1)!} \quad (4)$$

Fakulteta za necela števila za večja od 1, velja isto rekurzivno pravilo kot za cela števila. Za števila med 0 in 1 se fakulteto izračuna numerično. Tako potrebujemo vrednosti:

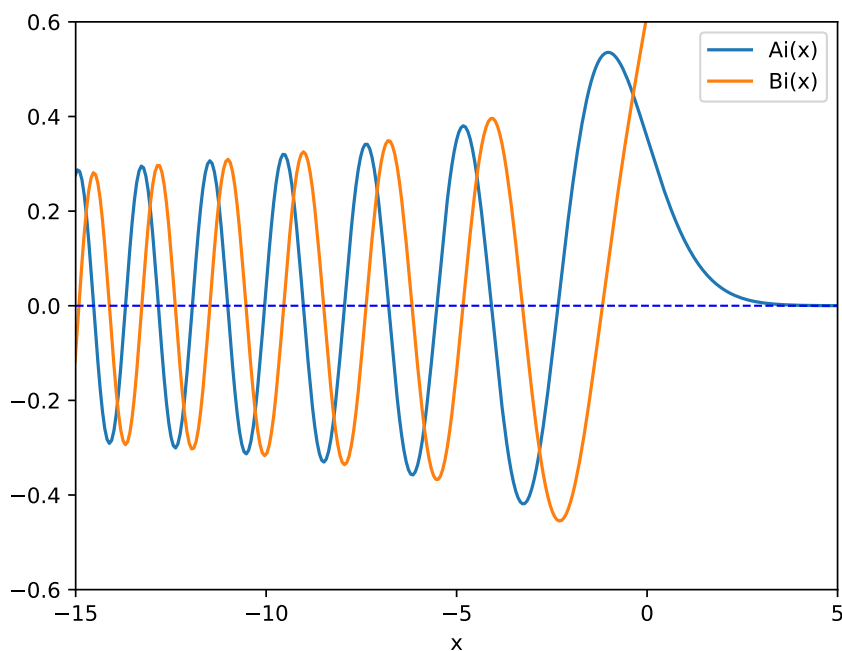
$$\left(\frac{1}{3}\right)! = \Gamma(4/3) = 0.89297951156924921 \quad (5)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)! = \Gamma(5/3) = 0.90274529295093361 \quad (6)$$

Vstavimo dobljeno (4) v sumand (2).

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{(\frac{1}{3} + k - 1)!}{(\frac{1}{3})!} \frac{3^k x^{3k}}{(3k)!} = 1 + \frac{1}{3 (\frac{1}{3})!} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{3} + k - 1)! \frac{3^k x^{3k}}{(3k)!} \quad (7)$$

Na zvit način se pa jih znebimo, če še naračunamo do $k = 1$, namreč $(\frac{1}{3})!$ se pokrajša. Podobno naredimo za funkcijo $g(x)$. Graf funkcije dobimo in izgleda takole:



Slika 2: Funkciji $Ai(x)$ in $Bi(x)$ razviti po Taylorju

Za velike vrednosti $|x|$ Airyjevi funkciji aproksimiramo z njunima asimptotskima razvojem. Z novo spremenljivko $\xi = \frac{2}{3}|x|^{3/2}$ in asimptotskimi vrstami

$$L(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s}{z^s}, \quad P(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_{2s}}{z^{2s}}, \quad Q(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_{2s+1}}{z^{2s+1}}, \quad (8)$$

s koeficienti

$$u_s = \frac{\Gamma(3s + \frac{1}{2})}{54^s s! \Gamma(s + \frac{1}{2})} \quad (9)$$

za velike pozitivne x izrazimo

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} L(-\xi), \quad \text{Bi}(x) \sim \frac{e^{\xi}}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} L(\xi), \quad (10)$$

za po absolutni vrednosti velike negativne x pa

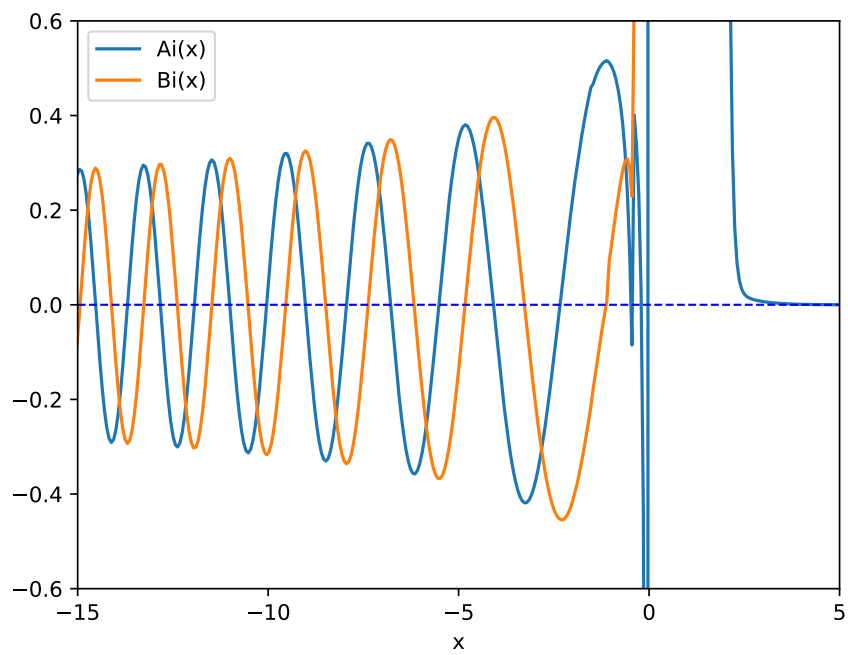
$$\text{Ai}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}} \left[\sin(\xi - \pi/4) Q(\xi) + \cos(\xi - \pi/4) P(\xi) \right], \quad (11)$$

$$\text{Bi}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}} \left[-\sin(\xi - \pi/4) P(\xi) + \cos(\xi - \pi/4) Q(\xi) \right]. \quad (12)$$

Koeficiente (9) lahko izrazimo:

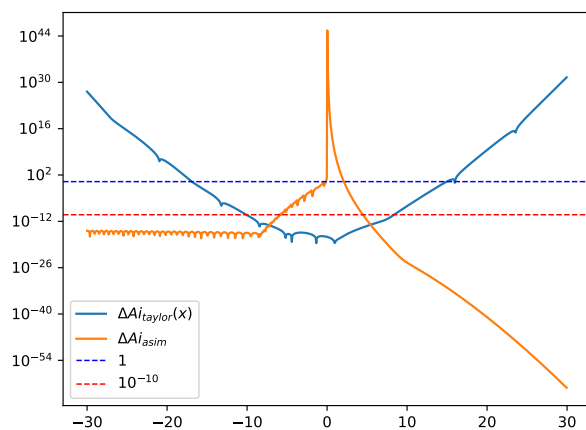
$$\frac{\Gamma(3s + \frac{1}{2})}{\Gamma(s + \frac{1}{2})} = \frac{(3s - \frac{1}{2})!}{(s - \frac{1}{2})!} \quad (13)$$

Dobimo naslednjo sliko za asimptotski približek funkciji.

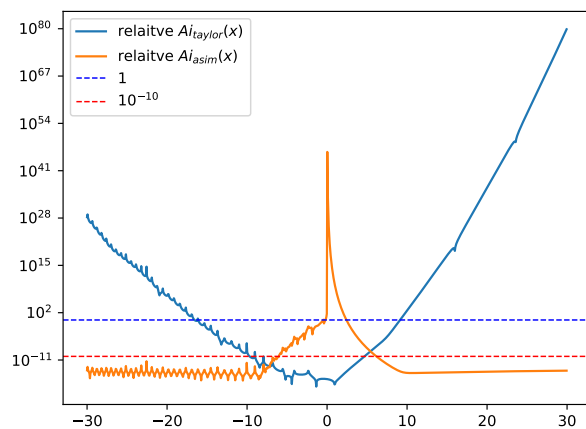


Slika 3: Funkciji $Ai(x)$ in $Bi(x)$ asimptotsko razvit

Iz samega grafa ne vidimo odstopanja od prave vrednosti, zato si pogledjmo absolutno napako in relativno.



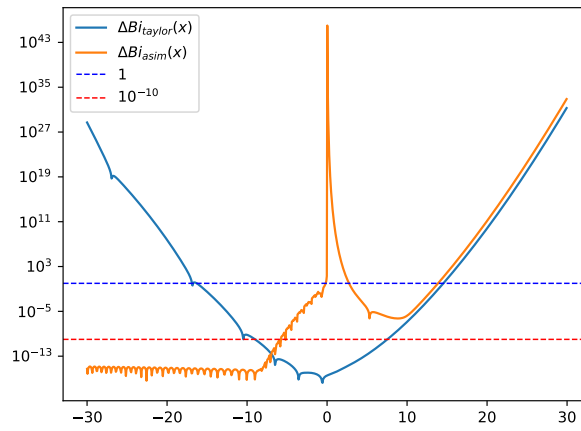
(a) Absolutna napaka



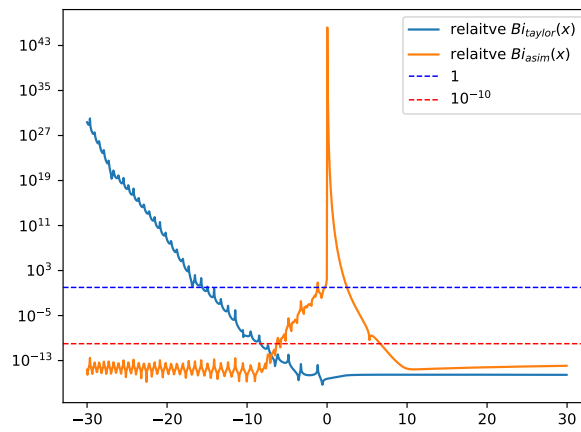
(b) Relativna napaka

Slika 4: Funkcija $Ai(x)$ absolutna in relativna napaka

Kar zadošča nalogi na intervalu $x \in [-\infty, 8]$. Pogledjmo si še za funkcijo $Bi(x)$.



(a) Absolutna napaka



(b) Relativna napaka

Slika 5: Funkcija $Bi(x)$ absolutna in relativna napaka