

MATEMATIČNO-FIZIKALNI PRAKTIKUM 2024/25

6. naloga: Enačbe hoda

Tadej Tomažič

27. november 2024

Kazalo

1	Navodila	2
2	Rešitev + Dodatna naloga	4

Slike

1	Točno integrirane rešitve diferencialne enačbe, s parametrom $k = 0.1$, $T_{zun} = 0$ in $A = 10$	4
2	Časovna odvisnost algoritmov	4
3	Rešiteve diferencialne enačbe $T'(t) = -k(T - T_{zun})$, če spremojamo k	5
4	Rešiteve diferencialne enačbe $T'(t) = -k(T - T_{zun}) + A \sin(2\pi t)$, če spremojamo k . .	5
5	Rezultati različnih algoritmov z istimi parametri, brez nastavljanja tolerance	6
6	Točna rešitev, z zelo nizko toleranco	7

1 Navodila

Za opis najpreprostejših fizikalnih procesov uporabljamo navadne diferencialne enačbe, ki povezujejo vrednosti spremenljivk sistema z njihovimi časovnimi spremembami. Tak primer je na primer enačba za časovno odvisnost temperature v stanovanju, ki je obdano s stenami z neko topotno prevodnostjo in določeno zunanjim temperaturo. V najpreprostejšem primeru ima enačba obliko

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{zun}}) \quad (1)$$

z analitično rešitvijo

$$T(t) = T_{\text{zun}} + e^{-kt} (T(0) - T_{\text{zun}}).$$

Enačbam, ki opisujejo razvoj spremenljivk sistema y po času ali drugi neodvisni spremenljivki x , pravimo *enačbe hoda*. Pri tej nalogi bomo proučili uporabnost različnih numeričnih metod za reševanje enačbe hoda oblike $dy/dx = f(x, y)$, kot na primer (1). Najbolj groba prva inačica, tako imenovana osnovna Eulerjeva metoda, je le prepisana aproksimacija za prvi odvod $y' \approx (y(x+h) - y(x))/h$, torej

$$y(x+h) = y(x) + h \left. \frac{dy}{dx} \right|_x. \quad (2)$$

Diferencialno enačbo smo prepisali v diferenčno: sistem spremljamo v ekvidistantnih korakih dolžine h . Metoda je večinoma stabilna, le groba: za večjo natančnost moramo ustreznno zmanjšati korak. Za red boljša ($\mathcal{O}(h^3)$, t.j. lokalna natančnost drugega reda) je simetrizirana Eulerjeva (ali sredinska) formula, ki sledi iz simetriziranega približka za prvi odvod, $y' \approx (y(x+h) - y(x-h))/2h$. Računamo po shemi

$$y(x+h) = y(x-h) + 2h \left. \frac{dy}{dx} \right|_x, \quad (3)$$

ki pa je praviloma nestabilna. Želeli bi si pravzaprav nekaj takega

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2} \left[\left. \frac{dy}{dx} \right|_x + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x+h} \right], \quad (4)$$

le da to pot ne poznamo odvoda v končni točki intervala (shema je implicitna). Pomagamo si lahko z iteracijo. Zapišimo odvod kot:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_x = f(x, y)$$

ter

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_n = y(x_n)$$

Heunova metoda ($\mathcal{O}(h^3)$ lokalno) je približek idealne formule z:

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad (5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})] \quad (6)$$

Izvedenka tega je nato Midpoint metoda (tudi $\mathcal{O}(h^3)$ lokalno):

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (7)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h k_1) \quad (8)$$

$$y_{n+1} = y_n + h k_2 \quad (9)$$

Le-to lahko potem izboljšamo kot modificirano Midpoint metodo itd...

V praksi zahtevamo natančnost in numerično učinkovitost, ki sta neprimerno boljši kot pri opisanih preprostih metodah. Uporabimo metode, zasnovane na algoritmih prediktor-korektor, metode višjih

redov iz družine Runge-Kutta (z adaptivnimi koraki), ali ekstrapolacijske metode. Brez dvoma ena najbolj priljubljenih je metoda RK4,

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x, y(x)) , \\
 k_2 &= f\left(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{h}{2}k_1\right) , \\
 k_3 &= f\left(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{h}{2}k_2\right) , \\
 k_4 &= f(x + h, y(x) + hk_3) , \\
 y(x + h) &= y(x) + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \mathcal{O}(h^5) .
 \end{aligned} \tag{10}$$

Naloga: preizkusi preprosto Eulerjevo metodo ter nato še čim več naprednejših metod(Midpoint, Runge-Kutto 4. reda, Adams-Bashfort-Moultonov prediktor-korektor ...) na primeru z začetnima temperaturama $y(0) = 21$ ali $y(0) = -15$, zunanjega temperaturo $y_{zun} = -5$ in parametrom $k = 0.1$. Kako velik (ali majhen) korak h je potreben? Izberi metodo (in korak) za izračun družine rešitev pri različnih vrednostih parametra k .

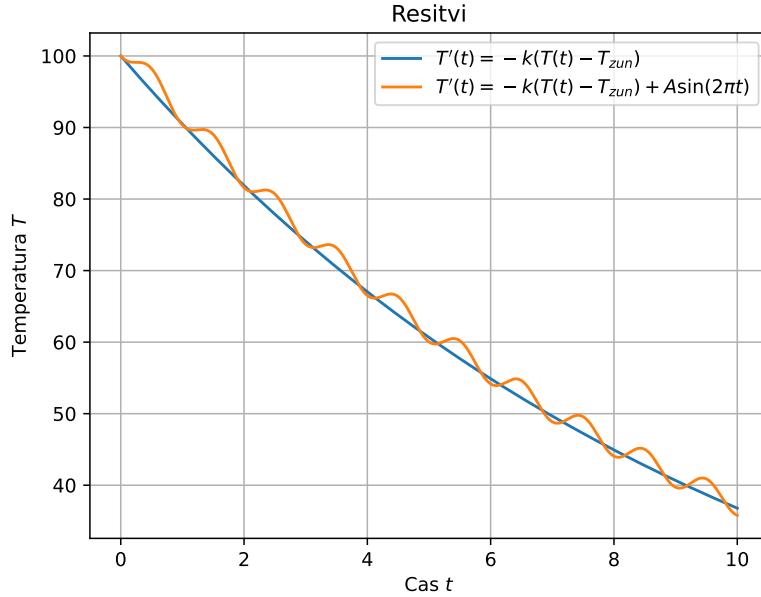
Dodatna naloga: temperatura prostora se lahko še dodatno spreminja zaradi denimo sončevega segrevanja skozi okna, s 24-urno periodo in nekim faznim zamikom δ , kar opišemo z dva- ali triparametrično enačbo

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{zun}) + A \sin\left(\frac{2\pi}{24}(t - \delta)\right). \tag{11}$$

Poišči še družino rešitev te enačbe pri $k = 0.1$ in $\delta = 10!$ Začni z $A = 1$, kasneje spreminjaš tudi to vrednost. V premislek: kakšno metodo bi uporabil, če bi posebej natančno želel določiti maksimalne temperature in trenutke, ko nastopijo?

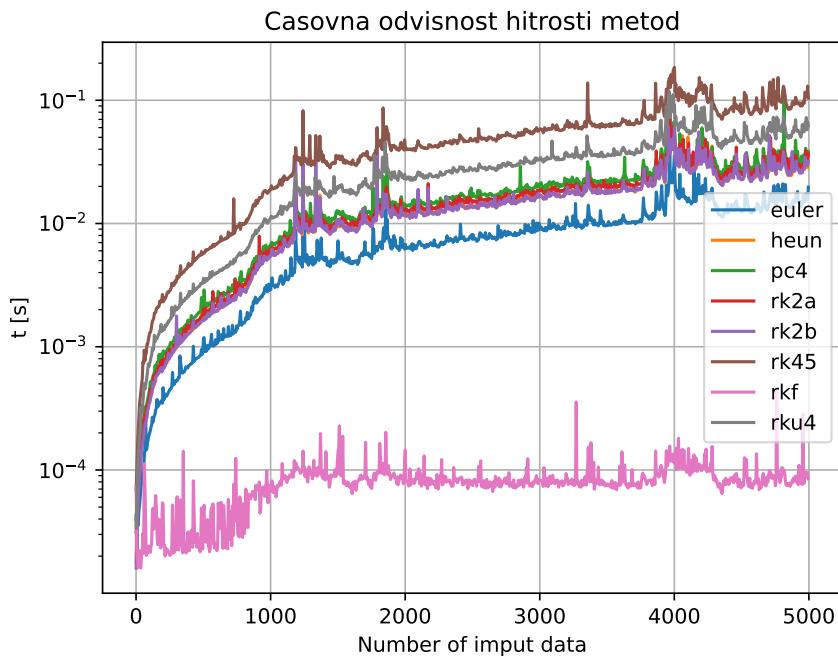
2 Rešitev + Dodatna naloga

Poglejmo si najprej točno integrirani rešitvi za oba primera



Slika 1: Točno integrirane rešitve diferencialne enačbe, s parametrom $k = 0.1$, $T_{zun} = 0$ in $A = 10$

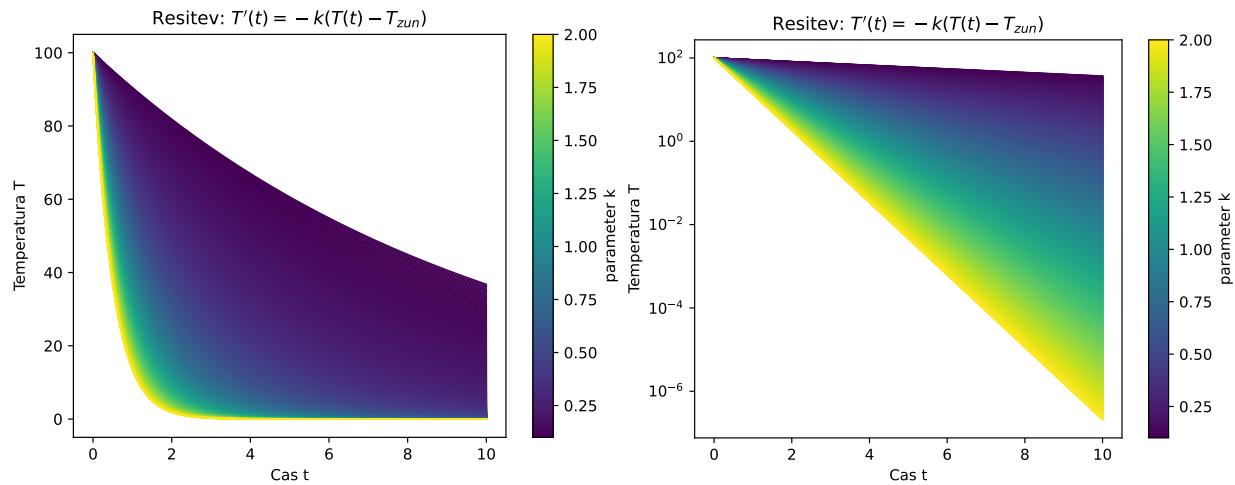
Potem si še poglejmo hitrost različnih algoritmov. Vidimo, da se algoritem `rkf` vede konstantno. In



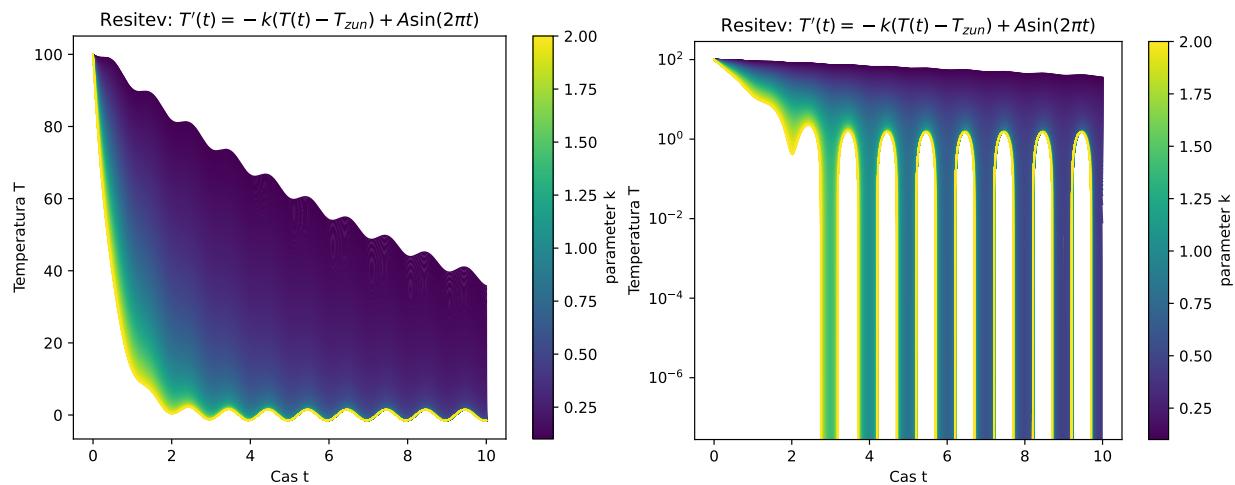
Slika 2: Časovna odvisnost algoritmov

tudi se, ker ni vezan na evaluacijo danih točk, le dolžino intervala in tolerance.

Sedaj si poglejmo, kako se algoritmi za prvo diferencialno enačbo vedejo, če spremojamo parametre. Poglejmo si še kaj se dogaja pri drugi diferencialni enačbi.

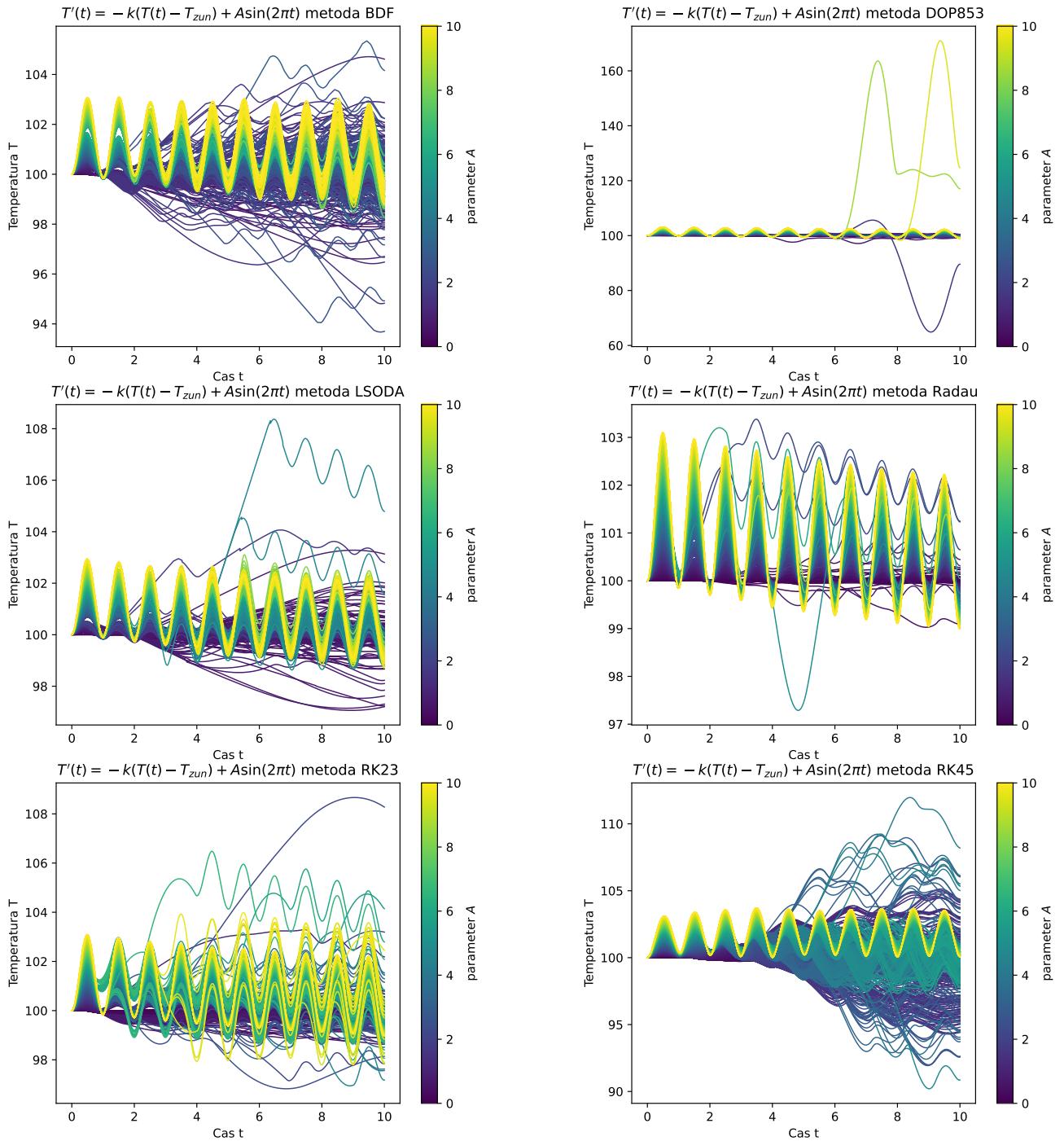


Slika 3: Rešiteve diferencialne enačbe $T'(t) = -k(T - T_{zun})$, če spremojamo k

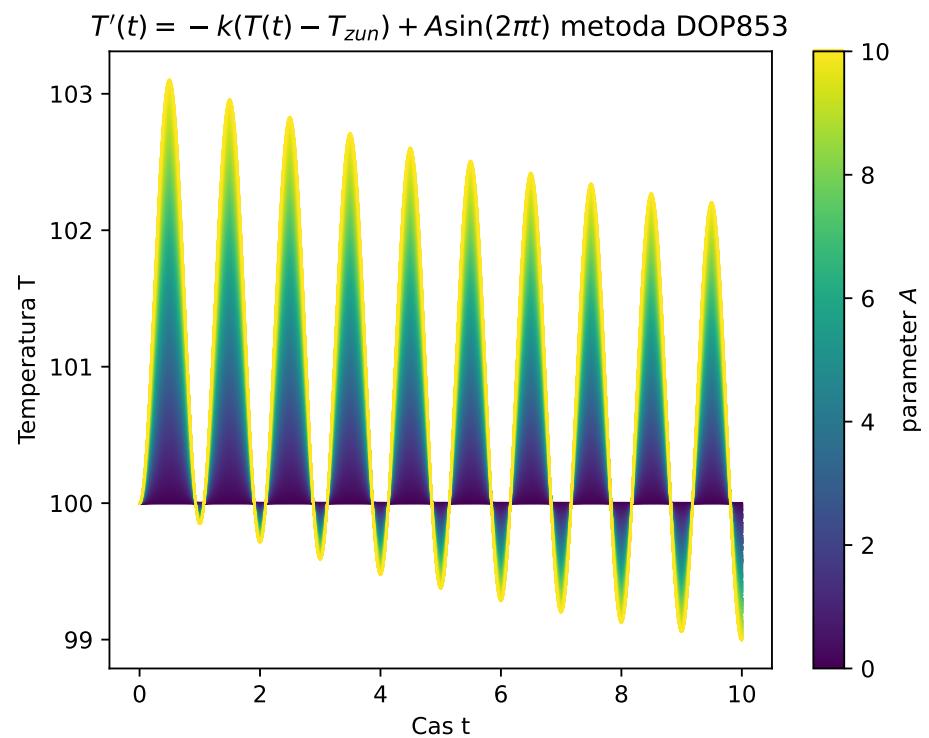


Slika 4: Rešiteve diferencialne enačbe $T'(t) = -k(T - T_{zun}) + A \sin(2\pi t)$, če spremojamo k

Poglejmo si še kaj se dogaja z algoritmomi knjižnjice `scipy.solve_ivp()`, če se ne dotikamo ne absolutne ne relativne tolerance.



Slika 5: Rezultati različnih algoritmov z istimi parametri, brez nastavljanja tolerance



Slika 6: Točna rešitev, z zelo nizko toleranco