Matematično-fizikalni praktikum 2024/25

4. naloga: Fourierova analiza

Tadej Tomažič

11. november 2024

Kazalo

Slike

1 Naloga

Pri numeričnem izračunavanju Fourierove transformacije

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(2\pi \mathrm{i} f t)\, \mathrm{d}t \tag{1}$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(-2\pi \mathrm{i} f t)\, \mathrm{d}f \tag{2}$$

je funkcija $h(t)$ običajno predstavljena s tablico diskretnih vrednosti

$$h_k = h(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots N-1. \tag{3}$$

Pravimo, da smo funkcijo vzorčili z vzorčno gostoto (frekvenco) $f = 1/\Delta$. Za tako definiran vzorec obstaja naravna meja frekvenčnega spektra, ki se imenuje *Nyquistova frekvenca*, $f_c = 1/(2\Delta)$: harmonični val s to frekvenco ima v vzorčni gostoti ravno dva vzorca v periodi. če ima funkcija $h(t)$ frekvenčni spekter omejen na interval $[-f_c, f_c]$, potem ji z vzorčenjem nismo odvzeli nič informacije, kadar pa se spekter razteza izven intervala, pride do *potujitve* (*aliasing*), ko se zunanji del spektra preslika v interval.

Frekvenčni spekter vzorčene funkcije (3) računamo samo v N točkah, če hočemo, da se ohrani količina informacije. Vpeljemo vsoto

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \exp(2\pi \mathrm{i} k n / N), \qquad n = -\tfrac{N}{2}, \ldots, \tfrac{N}{2}, \tag{4}$$

ki jo imenujemo diskretna Fourierova transformacija in je povezana s funkcijo v (1) takole:

$$H(\tfrac{n}{N\Delta}) \approx \Delta \cdot H_n.$$

Zaradi potujitve, po kateri je $H_{-n} = H_{N-n}$, lahko pustimo indeks n v enačbi (4) teči tudi od 0 do N. Spodnja polovica tako definiranega spektra ($1 \le n \le \frac{N}{2} - 1$) ustreza pozitivnim frekvencam $0 < f < f_c$, gornja polovica ($\frac{N}{2} + 1 \le N - 1$) pa negativnim, $-f_c < f < 0$. Posebna vrednost pri $n = 0$ ustreza frekvenci nič ("istosmerna komponenta"), vrednost pri $n = N/2$ pa ustreza tako f_c kot $-f_c$.

Količine h in H so v splošnem kompleksne, simetrija v enih povzroči tudi simetrijo v drugih. Posebej zanimivi so trije primeri:

če je	h_k realna	tedaj je	$H_{N-n} = H_n^*$
	h_k realna in soda		H_n realna in soda
	h_k realna in liha		H_n imaginarna in liha

(ostalih ni težko izpeljati). V tesni zvezi s frekvenčnim spektrom je tudi moč. *Celotna moč* nekega signala je neodvisna od reprezentacije, Parsevalova enačba pove

$$\sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2$$

(lahko preveriš). Pogosto pa nas bolj zanima, koliko moči je vsebovane v frekvenčni komponenti med f in $f + \mathrm{d}f$, zato definiramo enostransko spektralno gostoto moči (*one-sided power spectral density*, PSD)

$$P_n = |H_n|^2 + |H_{N-n}|^2\,.$$

Pozor: s takšno definicijo v isti koš mečemo negativne in pozitivne frekvence, vendar sta pri realnih signalih h_k prispevka enaka, tako da je $P_n = 2\,|H_n|^2$.
Z obratno transformacijo lahko tudi rekonstruiramo h_k iz H_n

$$h_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} H_n \exp(-2\pi \mathrm{i} kn/N) \tag{5}$$

(razlika glede na enačbo (4) je le predznak v argumentu eksponenta in utež $1/N$).

Naloga:

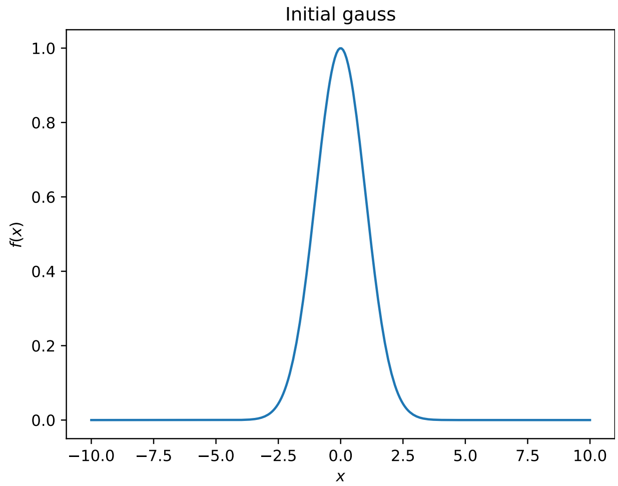
1. Izračunaj Fourierov obrat Gaussove porazdelitve in nekaj enostavnih vzorcev, npr. mešanic izbranih frekvenc. Za slednje primerjaj rezultate, ko je vzorec v intervalu periodičen (izbrane frekvence so mnogokratniki osnovne frekvence), z rezultati, ko vzorec ni periodičen (kako naredimo Gaussovo porazdelitev 'periodično' za FT?). Opazuj pojav potujitve na vzorcu, ki vsebuje frekvence nad Nyquistovo frekvenco. Napravi še obratno transformacijo (5) in preveri natančnost metode. Poglej, kaj se dogaja z časom računanja - kako je odvisen od števila vzorčenj?

2. Po Fourieru analiziraj 2.3 s dolge zapise začetka Bachove partite za violino solo, ki jih najdeš na spletni strani Matematičnofizikalnega praktikuma. Signal iz začetnih taktov partite je bil vzorčen pri 44 100 Hz, 11 025 Hz, 5512 Hz, 2756 Hz, 1378 Hz in 882 Hz. S poslušanjem zapisov v formatu `.mp3` ugotovi, kaj se dogaja, ko se znižuje frekvenca vzorčenja, nato pa s Fourierovo analizo zapisov v formatu `.txt` to tudi prikaži.

3. **Dodatno:** Napravi Fourierovo analizo signalov, ki jih dobiš pri vaji *Akustični resonator* pri Fizikalnem praktikumu II. Posnetke treh različnih signalov prav tako najdeš na spletni strani.

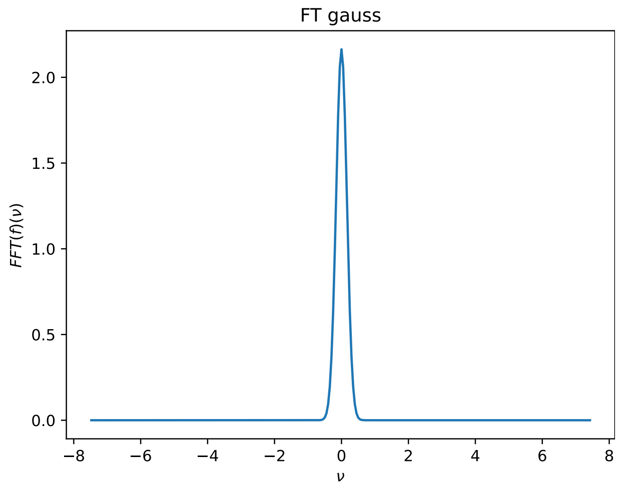
2 Rešitev

Najprej poglejmo, če znamo sami sploh to FT čudo sprogramirat. Najprej narišemo gausovko. Nato jo tranformiramo s pomočjo Furjerjeve transformacije, z mojo lastno implementacijo.



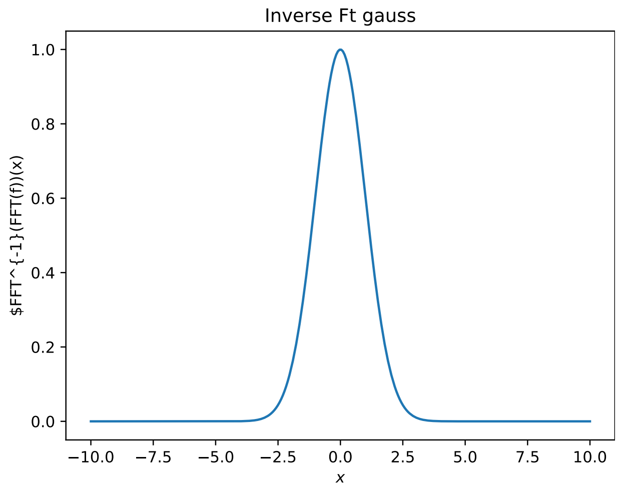
Slika 1: Navadna gausova funkcija

Po pričakovanjih dobimo spet gaussovko, le malo drugačne oblike. Naredimo še inverzno



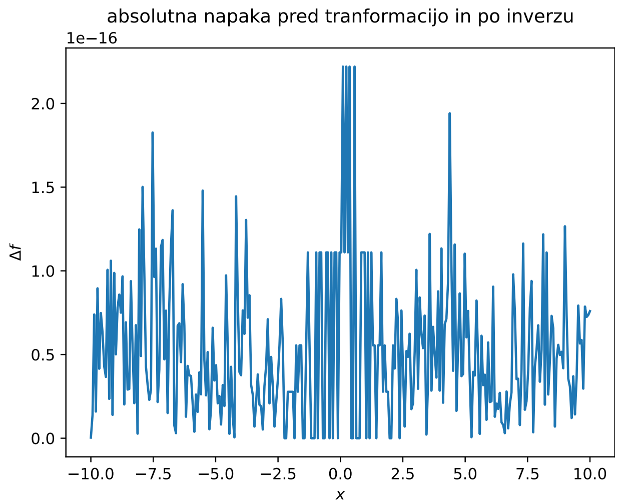
Slika 2: Furjerjeva transformacija navadne gaussove funkcije

tranformacijo, da vidimo, če dobimo spet prvo sliko.



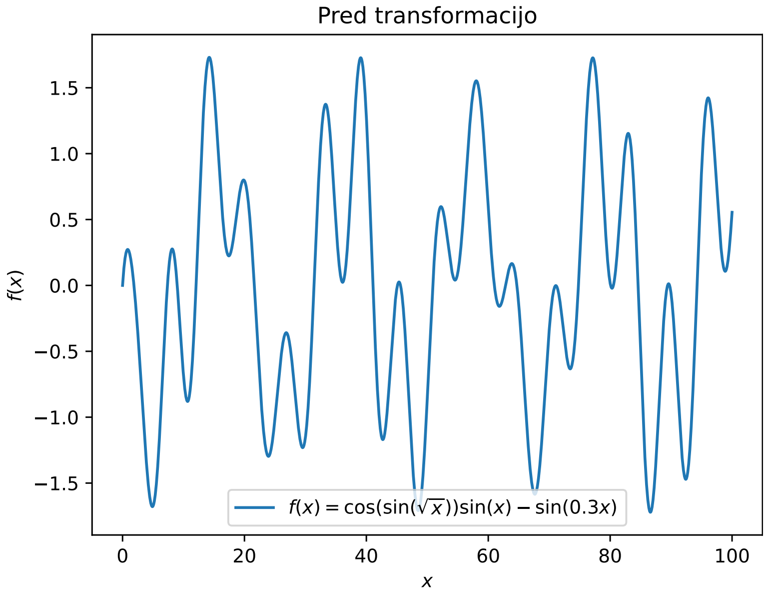
Slika 3: Inverz furjerjeve transformacije na gaussovko

Poglejmo si še absolutno napako med prvotno sliko in zadnjo, saj iz grafov ne moremo razbrati dejanske razlike. Vidimo, da napaka je zanemarljiva, ker je reda 10^{-16}.

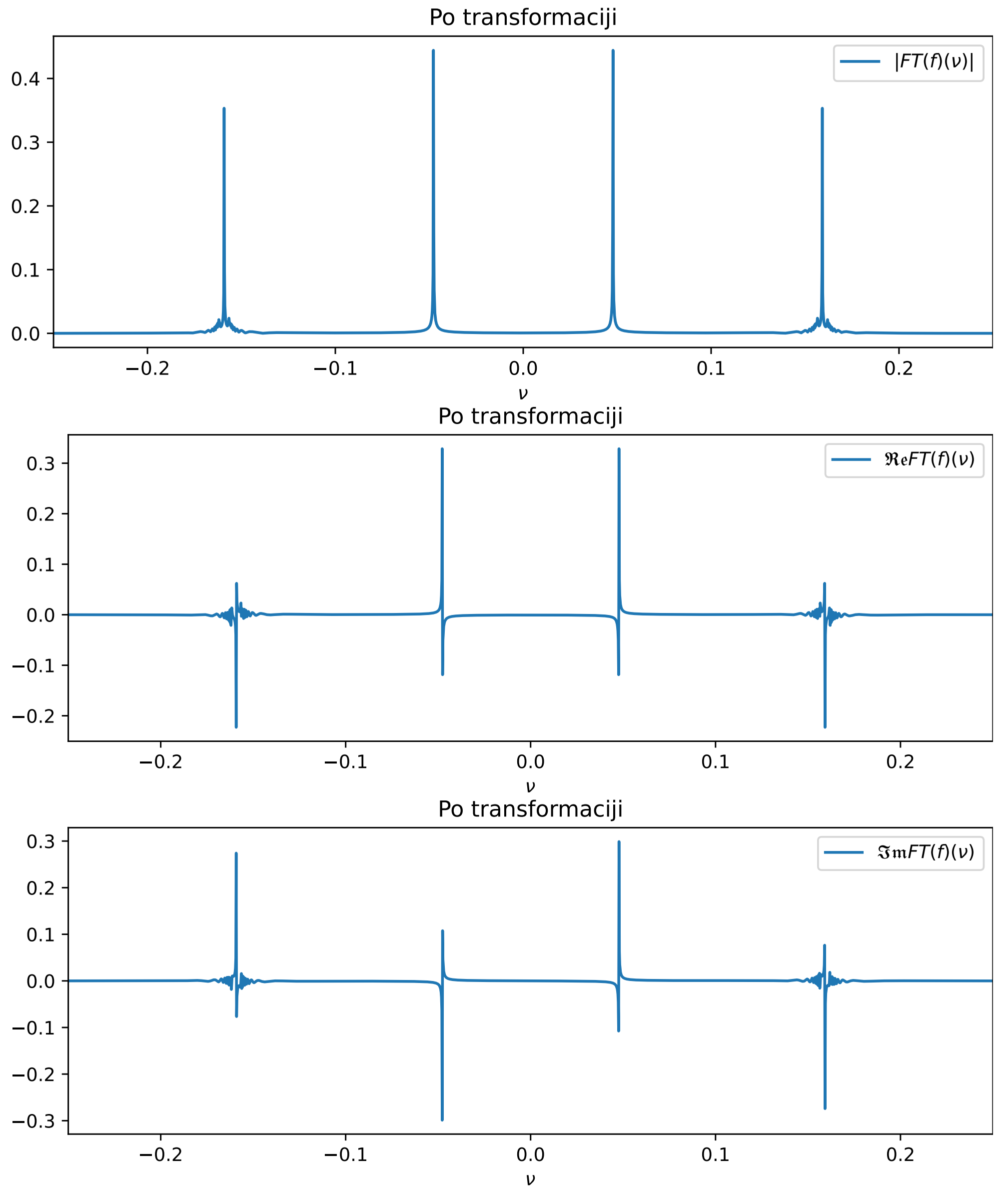


Slika 4: Absolutna napaka po furjerjevi tranformaciji in njenemu inverzu

Ker je gaussova funkcija zelo dolgčasna si poglejmo tako funkcijo pri kateri ne zehamo.

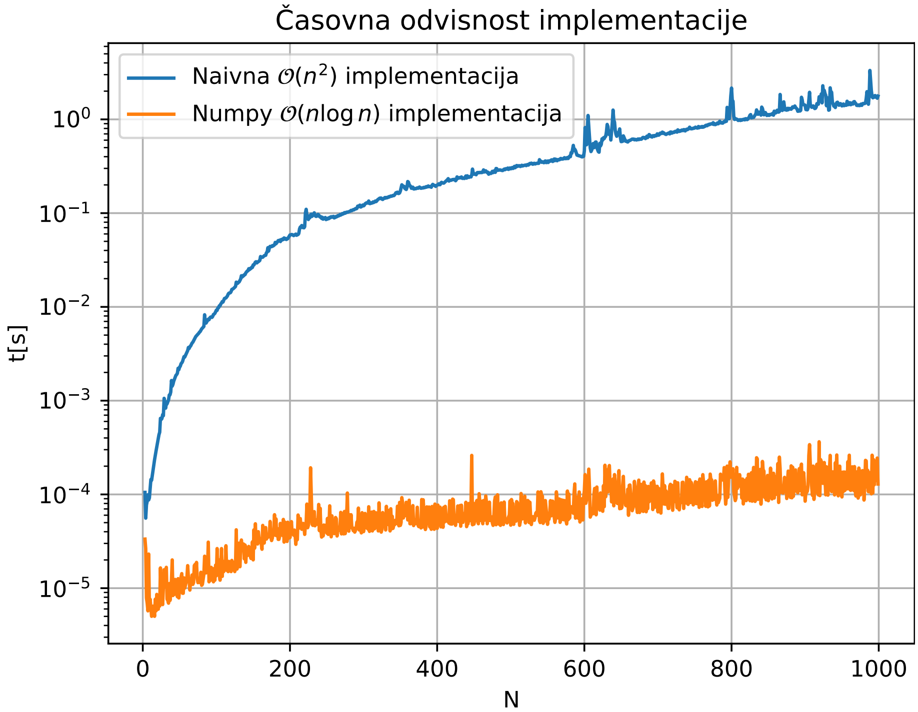


Slika 5: Graf funckije $f(x) = \sin(\cos(\sqrt{x})) - \sin(0.3x)$



Slika 6: Furjerjeva transformacija funckije $f(x) = \sin(\cos(\sqrt{x})) - \sin(0.3x)$

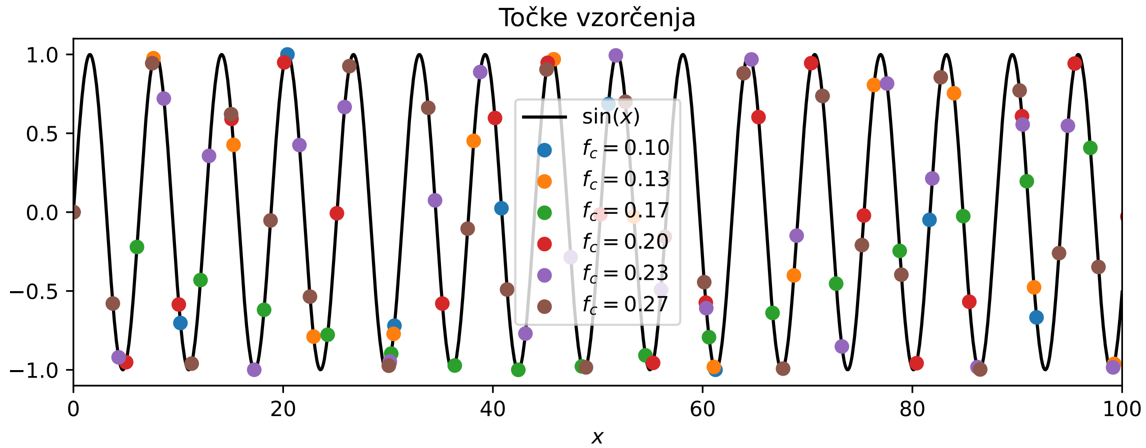
Ker imamo dva algoritma enega počasnega enega hitrega, si poglejmo njuno efektivnost, t.p. časovno odvisnost od velikosti vhoda. Moj algoritem deluje v $\mathcal{O}(n^2)$ in je implementiran po



Slika 7: Časovna odvisnost med algoritmoma

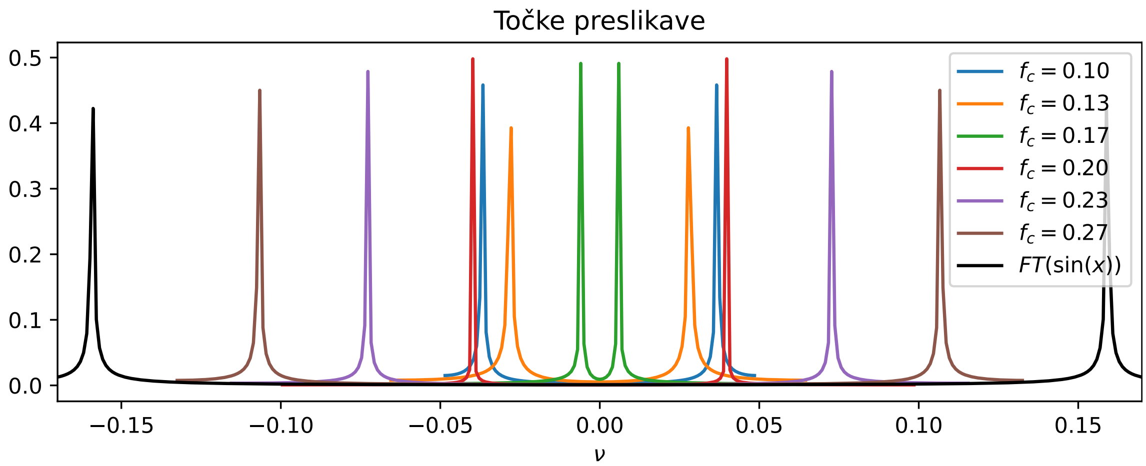
definiciji iz navodil, med tem pa že implementiran `numpy.fft.fft()` deluje $\mathcal{O}(n \log n)$ z malo bolj zvitimi metodami.

Poglejmo si še kaj se dogaja pri FT, če imamo vzorčenje blizu nyquistove frekvence. Vsaka



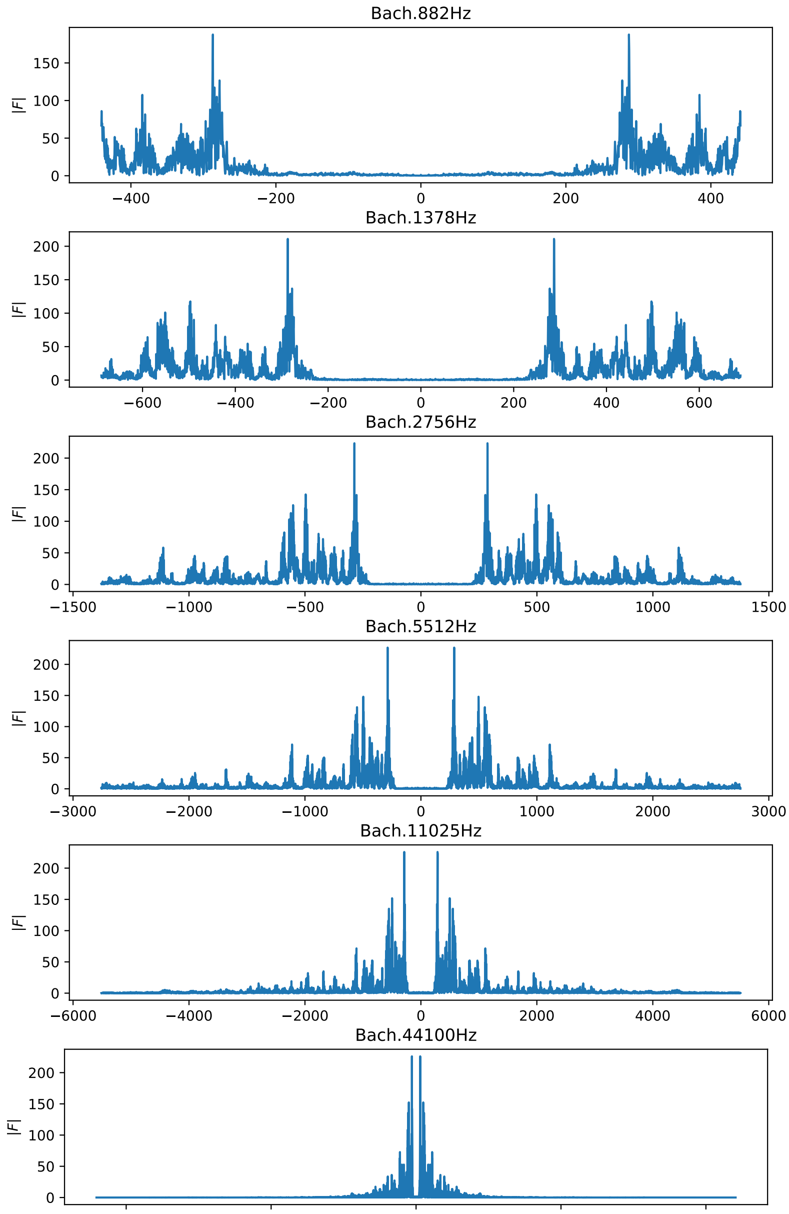
Slika 8: Vzorčenje točk sinusa

točka se preslika v svojo krivuljo, kateri ustreza barva. Kot vidimo iz slike se špice premikajo navznozer, ker so simetrične se pa potem povozijo čez in nato odpotujejo spet malo ven.

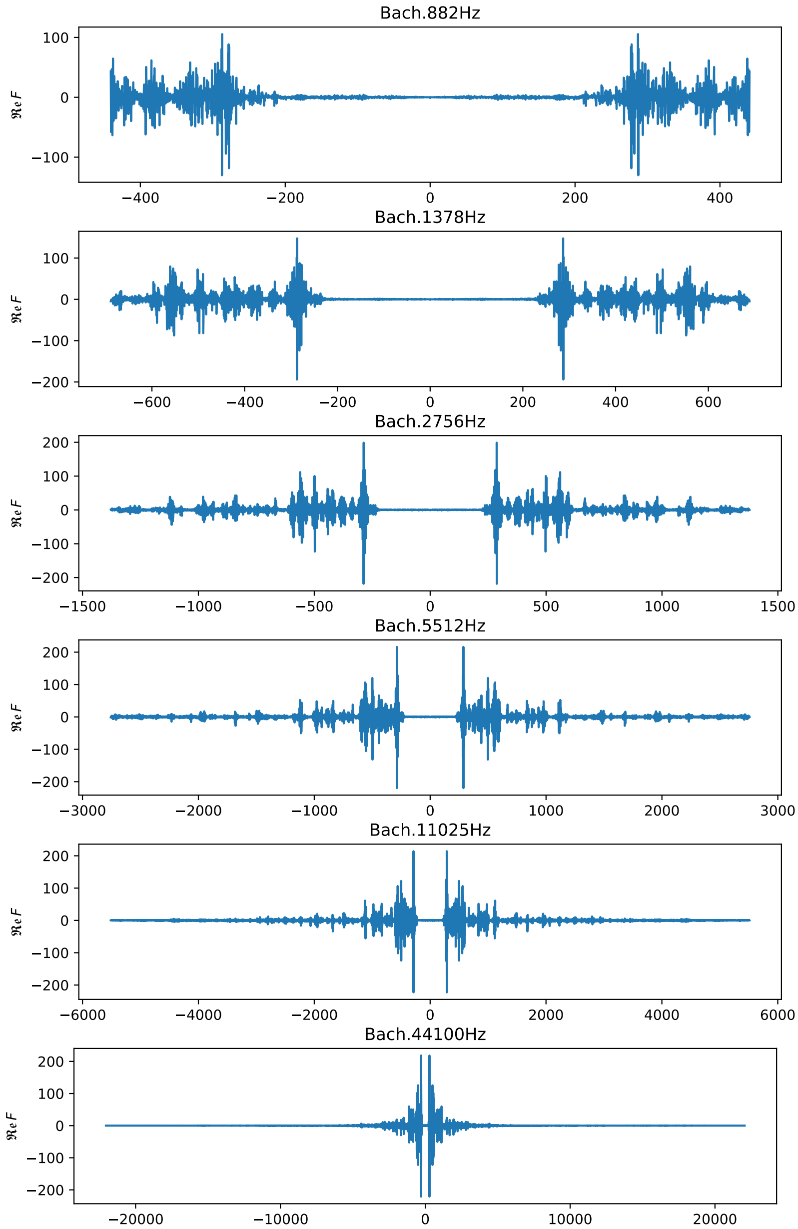


Slika 9: Furjerjeva transformacija vzorčenih točk sinusa

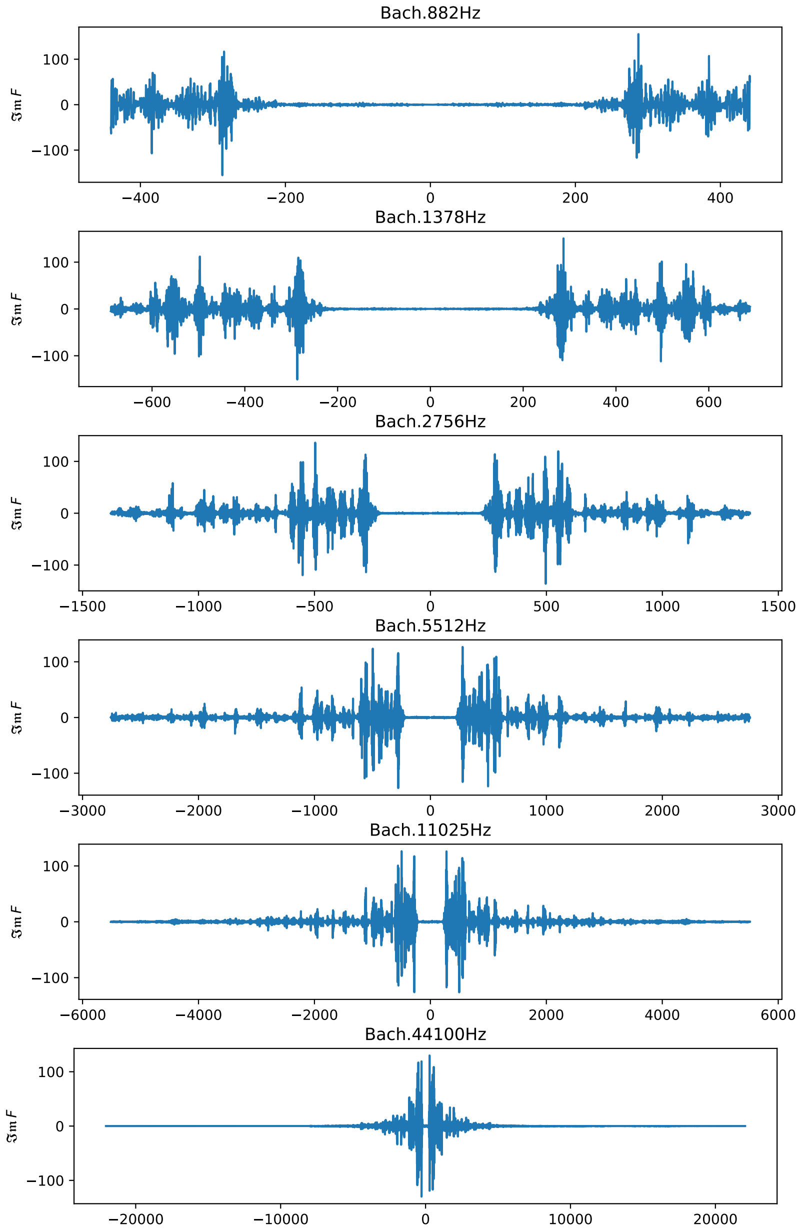
Poglejmo si še našega Baha, pri različni gostoti vzorčenja (sample-ratih).



Slika 10: Absolutna velikost furjerjeve transformacije Bachove skladbe

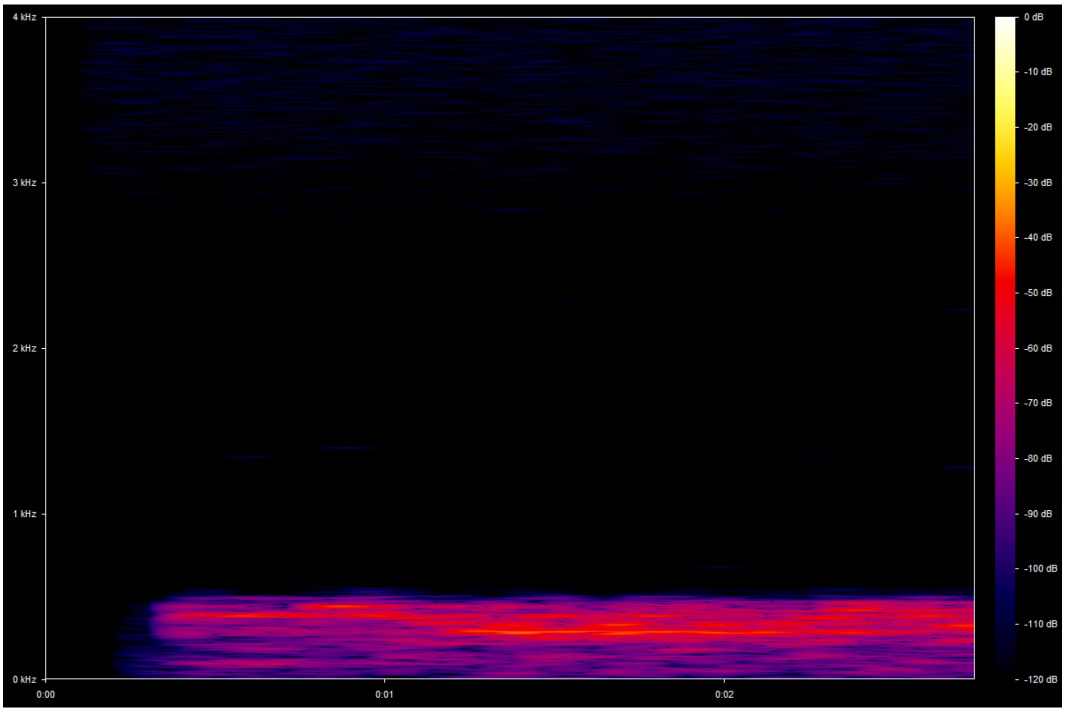


Slika 11: Realna komponenta furjerjeve transformacije Bachove skladbe

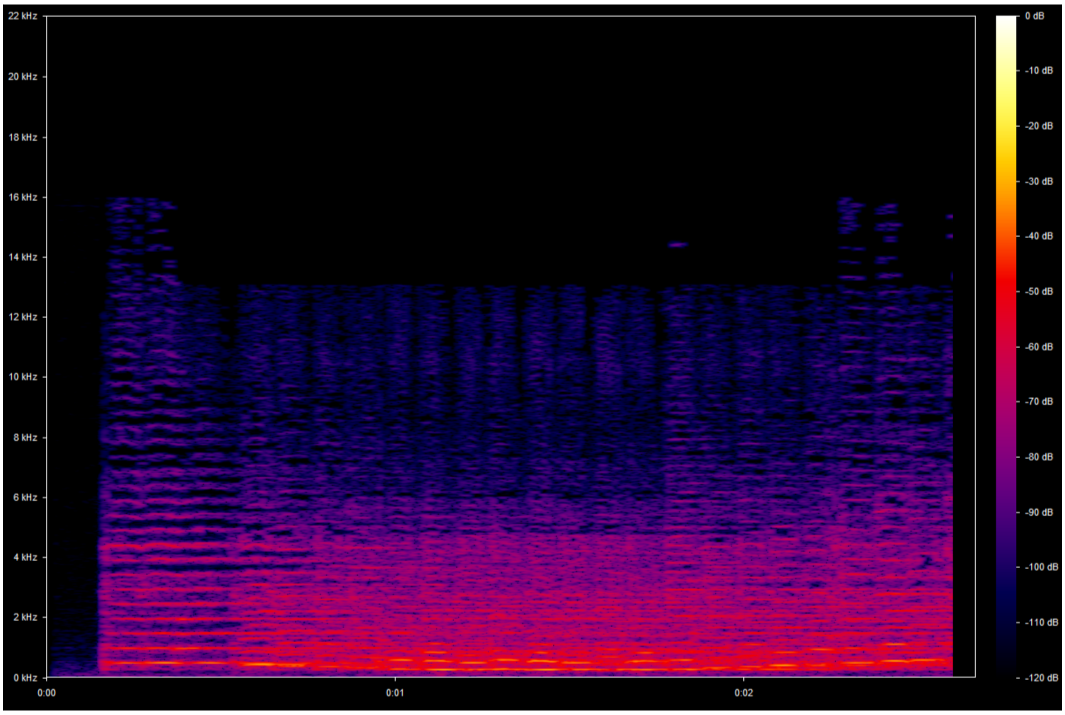


Slika 12: Imaginarna komponenta furjerjeve transformacije Bachove skladbe

Kaj pa se dogaja z visokimi frekvencami, ki jih ni slišati zaradi odtujitve. Poglejmo si spektometer.



Slika 13: Spekter za gostoto vzorčenja 882Hz



Slika 14: Spekter za gostoto vzorčenja 44100Hz

Vidimo, da nad polovično frekvenco vzorčenja, ni signala.