Matematično-fizikalni praktikum

1. naloga: Airyjevi funkciji

Tadej Tomažič

8. oktober 2024

Kazalo

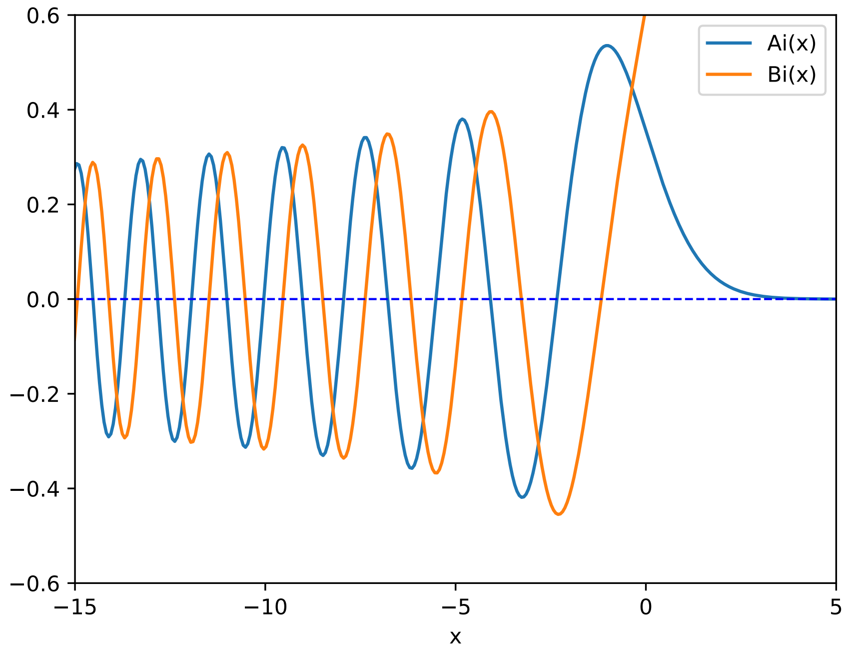
Slike

1 Naloga

Z uporabo kombinacije Maclaurinove vrste in asimptotskega razvoja poišči čim učinkovitejši postopek za izračun vrednosti Airyjevih funkcij Ai in Bi na vsej realni osi z **absolutno** napako, manjšo od 10^{-10}. Enako naredi tudi z **relativno** napako in ugotovi, ali je tudi pri le-tej dosegljiva natančnost, manjša od 10^{-10}. Pri oceni napak si pomagaj s programi, ki znajo računati s poljubno natančnostjo, na primer z MATHEMATICO in/ali paketi MPMATH in DECIMAL v programskem jeziku PYTHON.

2 Reštiev

Najprej narišemo funkciji Ai in Bi z uporabo builtin funkcij v knjižnjici `mpmath` in `matplotlib`.



Slika 1: Funkciji Ai(x) in Bi(x)

Nato sem risal za majhne x s pomočjo razvojem Ai ter Bi v Maclaurinovo vrsto.

$$\mathrm{Ai}(x) = \alpha f(x) - \beta g(x)\,, \qquad \mathrm{Bi}(x) = \sqrt{3}\left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right]\,, \tag{1}$$

kjer v $x = 0$ veljata zvezi $\alpha = \mathrm{Ai}(0) = \mathrm{Bi}(0)/\sqrt{3} \approx 0.355028053887817239$ in $\beta = -\mathrm{Ai}'(0) = \mathrm{Bi}'(0)/\sqrt{3} \approx 0.258819403792806798$. Vrsti za f in g sta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)_k \frac{3^k x^{3k}}{(3k)!}\,, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)_k \frac{3^k x^{3k+1}}{(3k+1)!}\,, \tag{2}$$

kjer je

$$(z)_k = \Gamma(z+k)/\Gamma(z)\,, \qquad (z)_0 = 1\,. \tag{3}$$

Enačbo (3) lahko še naprej razpišemo.

$$\Gamma(z+k)/\Gamma(z) = \frac{(z+k-1)!}{(z-1)!} \tag{4}$$

Fakulteta za necela števila za večja od 1, velja isto rekurzivno pravilo kot za cela števila. Za števila med 0 in 1 se fakulteto izračuna numerično. Tako potreubujemo vrednosti:

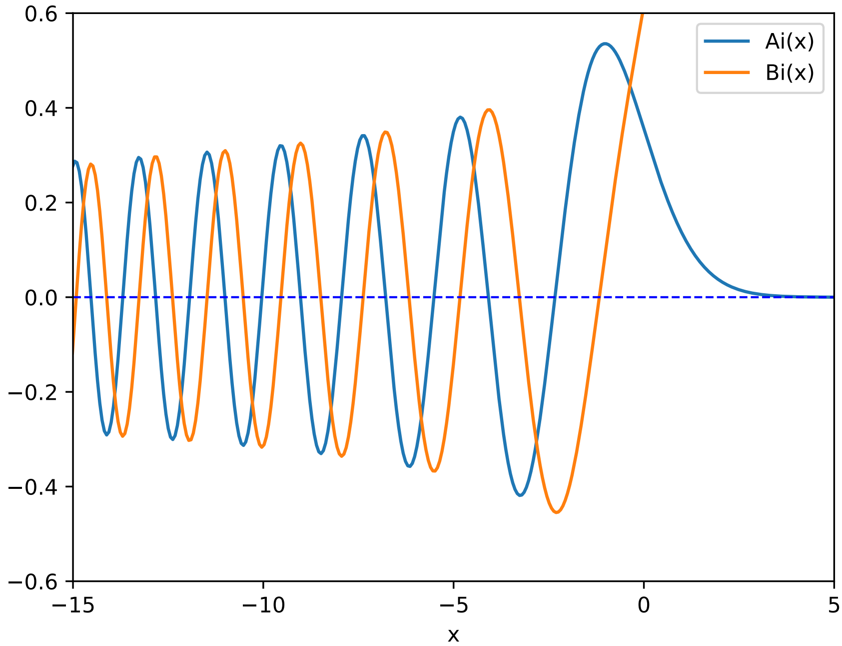
$$\left(\frac{1}{3}\right)! = \Gamma(4/3) = 0.89297951156924921 \tag{5}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)! = \Gamma(5/3) = 0.90274529295093361 \tag{6}$$

Vstavimo dobljeno (4) v sumand (2).

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{(\frac{1}{3}+k-1)!}{(\frac{1}{3})!} \frac{3^k x^{3k}}{(3k)!} = 1 + \frac{1}{3\,(\frac{1}{3})!} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{3}+k-1)! \frac{3^k x^{3k}}{(3k)!} \tag{7}$$

Na zvit način se pa jih znebimo, če še naračunamo do $k = 1$, namreč $\left(\frac{1}{3}\right)!$ se pokrajša. Podobno naredimo za funkcijo $g(x)$. Graf funkcije dobimo in izgleda takole:



Slika 2: Funkciji Ai(x) in Bi(x) razviti po taylorju

Za velike vrednosti $|x|$ Airyjevi funkciji aproksimiramo z njunima asimptotskima razvojema. Z novo spremenljivko $\xi = \frac{2}{3}|x|^{3/2}$ in asimptotskimi vrstami

$$L(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s}{z^s}\,, \qquad P(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_{2s}}{z^{2s}}\,, \qquad Q(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_{2s+1}}{z^{2s+1}}\,, \tag{8}$$

s koeficienti

$$u_s = \frac{\Gamma(3s+\frac{1}{2})}{54^s s!\,\Gamma(s+\frac{1}{2})} \tag{9}$$

za velike pozitivne x izrazimo

$$\mathrm{Ai}(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}\,L(-\xi)\,, \qquad \mathrm{Bi}(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{\sqrt{\pi}x^{1/4}}\,L(\xi)\,, \tag{10}$$

za po absolutni vrednosti velike negativne x pa

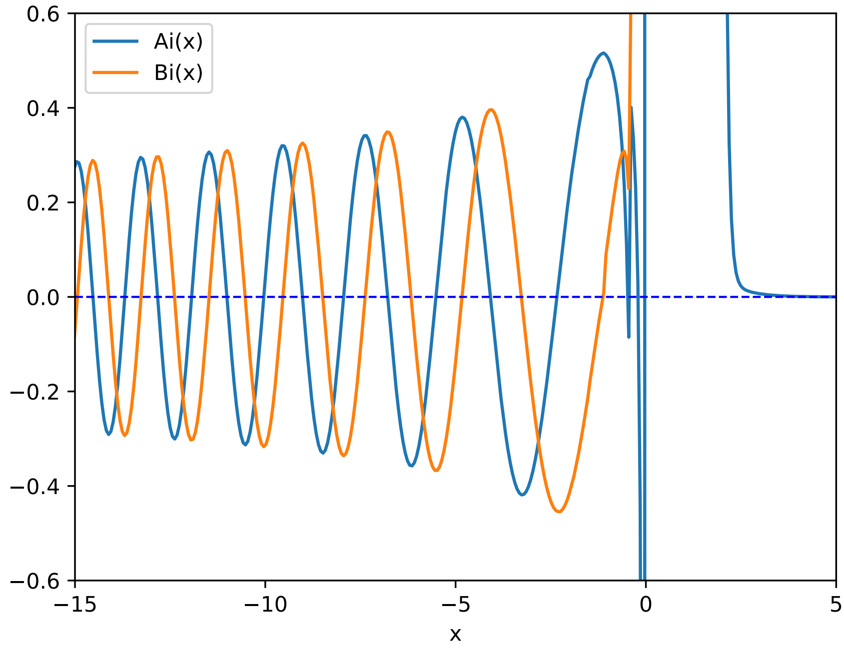
$$\mathrm{Ai}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}}\Big[\quad\sin(\xi-\pi/4)\,Q(\xi)+\cos(\xi-\pi/4)\,P(\xi)\Big]\,, \tag{11}$$

$$\mathrm{Bi}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}}\Big[-\sin(\xi-\pi/4)\,P(\xi)+\cos(\xi-\pi/4)\,Q(\xi)\Big]\,. \tag{12}$$

Koeficiente (9) lahko izrazimo:

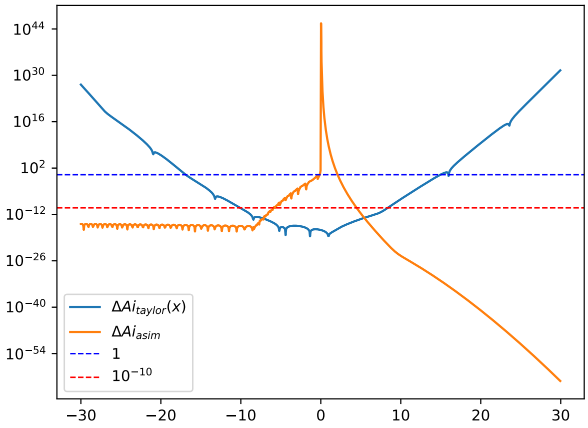
$$\frac{\Gamma(3s+\frac{1}{2})}{\Gamma(s+\frac{1}{2})} = \frac{(3s-\frac{1}{2})!}{(s-\frac{1}{2})!} \tag{13}$$

Dobimo naslednjo sliko za asimptotski približek funkciji.

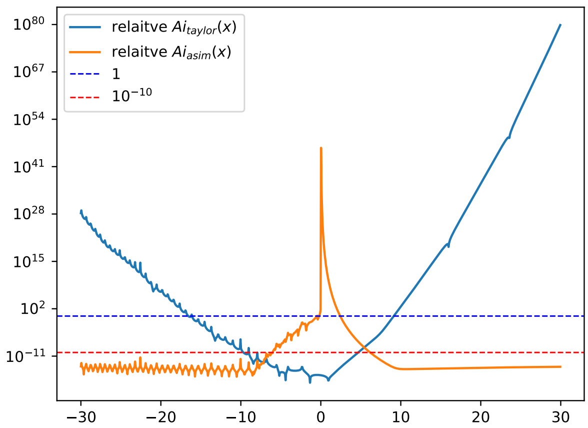


Slika 3: Funkciji $\mathrm{Ai}(x)$ in $\mathrm{Bi}(x)$ asimptotsko razvit

Iz samega grafa ne vidimo odstopanja od prave vrednosti, zato si poglejmo absolutno napako in relativno.



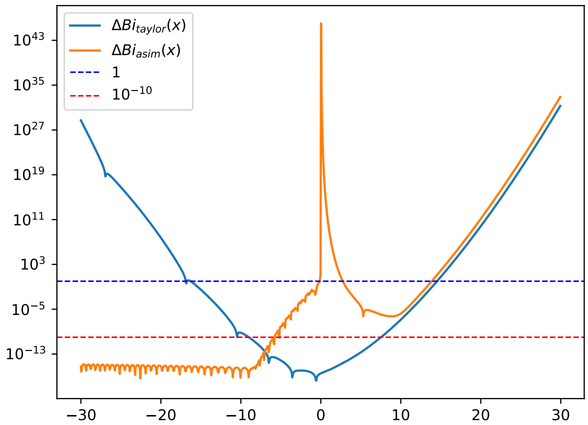
(a) Absolutna napaka



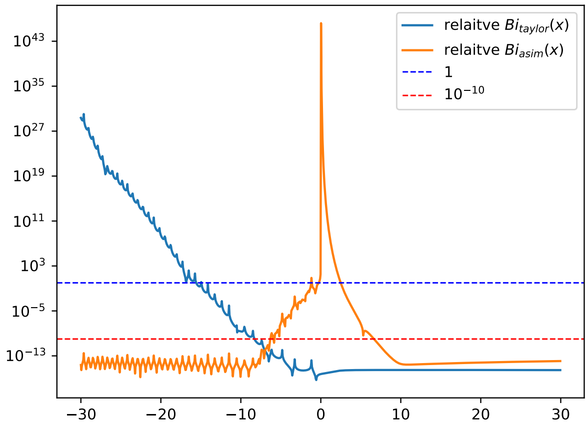
(b) Relativna napaka

Slika 4: Funkcija $\mathrm{Ai}(x)$ absolutna in relativna napaka

Kar zadošča nalogi na intervalu $x \in [-\infty,\ 8]$. Poglejmo si še za funckijo $\mathrm{Bi}(x)$.



(a) Absolutna napaka



(b) Relativna napaka

Slika 5: Funkcija $\mathrm{Bi}(x)$ absolutna in relativna napaka