2024 数分三期中

1、压缩映射原理

设 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上 且满足：i) $f([a,b])\subset[a,b]$

ii) $\exists q\in(0,1)$ s.t. 对 $\forall x,y\in[a,b]$ 有 $|f(x)-f(y)|\le q|x-y|$.

则 $\exists$ 唯一的 $c\in[a,b]$ 使 $f(c)=c$.

证明：$\{x_n\}\stackrel{def}{=}x_{n+1}=f(x_n)\ (n=0,1,2\cdots)$ $x_0\in[a,b]$

由条件 i $\forall n$ $x_n\in[a,b]$

$$|x_m-x_n|\le|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|.$$

$$\le q^n|x_1-x_0|\frac{1-q^{m-n}}{1-q}\le\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|.$$

由 $q\in(0,1)$ 当 n 充分大 $\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|<\varepsilon$.

故 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列 故 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

由条件 ii 知 $f(x)$ 连续. $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)=f(c)=c$.

故 c 是 $x=f(x)$ 的一个解

下面证明存在性

若不然 则至少有 2个不同解 设为 c_1、c_2 $(c_1\neq c_2)$.

$$|c_1-c_2|=|f(c_1)-f(c_2)|\le q|c_1-c_2|.$$

故 $c_1=c_2$ 矛盾.

综上，结论成立.

2. 证明 有界闭集是紧集.

见课本 P_{10} 定理13.5

3.

$2x^2+y^2-2x-2y+2xy+z^2-4z+4=0$

$z=z(x,y)$ 求 $z(x,y)$ 无条件极值.

$-(z-2)^2=2x^2+y^2-2x-2y+2xy=f(x,y)$

由极值必要条件 $f_x=0$ $f_y=0$ $\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1.\end{cases}$

$z=2\pm\sqrt{-f(x,y)}$ 由 Hesse 矩阵知 $\begin{vmatrix}4&2\\2&2\end{vmatrix}>0$.

故 $f(x,y)$ 取极小值.

$f(0,1)=-1$.

则 $z(x,y)$ 极小值为 1

极大值为 3.

1. [illegible] 18.7.4

4、$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2>0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

证：

① $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的连续性.

② $f_x(x,y)$ $f_y(x,y)$ 的有界性

③ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微. → 见课本 P_{29}. 下半部分

5、$f(x)\in C(0,\frac{\pi}{2})$ 延拓成 $g(x)$ $x\in(-\pi,\pi)$.

使 $g(x)$ Fourier级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x$.

先·关于 $(\frac{\pi}{2},0)$ 奇延拓 再关于 y 轴偶延拓

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & x\in(0,\frac{\pi}{2})\\ -f(\pi-x) & x\in(\frac{\pi}{2},\pi)\\ 0 & x=0,\frac{\pi}{2}\\ f(-x) & x\in(-\pi,0)\end{cases}$$

6、$f(x)$ 为周期 2π 连续函数. $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

定义 $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt$ 求 $F(x)$ 的 Fourier 级数.

由逐项积分定理.

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n(x+t)+b_n\sin n(x+t)]\right\}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(\cos nx\cos nt-\sin nx\sin nt)+b_n(\sin nx\cos nt+\cos nx\sin nt)]\right\}dt$$

$$=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx$$

7、f''_{yx}, f'_x, f'_y 在 (x_0,y_0) 某邻域内存在 f''_{xy} 在 (x_0,y_0) 存在.

证明：$f''_{yx}(x_0,y_0)=f''_{xy}(x_0,y_0)$

设 $\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$

则 $\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)]-[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]$

对 $\varphi(x)$ 关于 x 应用 lagrange 中值定理 $\exists\,\theta_1\in(0,1)$

$\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\cdot\Delta x$ 对 $\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)$ 关于 y 应用 lagrange 中值定理

$\exists\,\theta_2\in(0,1)$ $\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=\cancel{\varphi}\,f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta x\cdot\Delta y$

同理 引设 $\psi(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)$ 有 $\theta_3,\theta_4\in(0,1)$ $\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)=f''_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,y_0+\theta_4\Delta y)\,\Delta x\Delta y$

故 $f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta x)=f''_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,y_0+\theta_4\Delta x)$

由于 f''_{yx} 在 (x_0,y_0) 某邻域存在. f''_{xy} 在 (x_0,y_0) 存在

当 $\Delta x,\Delta y\to0$ $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$

1. 令 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续 [illegible] 19.3.9

[illegible]

3. $|f(\ldots) - f(x_0,y_0,z_0)|$

8. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 换成极坐标形式

设 $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

则 $\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$

$= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$

$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cdot\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta \quad \cdots ①$

$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot(r\cos\theta)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(r^2\sin^2\theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(-r^2\sin\theta\cos\theta) + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-r\cos\theta)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(r^2\cos^2\theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(-r^2\sin\theta\cos\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(-r\sin\theta) \quad \cdots ②$

$① + ② \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cancel{+} - \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{1}{r} = -\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}$

故 $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{1}{r} = 0$

$\cancel{\frac{\partial}{r\partial}}\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = 0$

9.（$\mathbb{R}^n$ 正规性）设 S_1、S_2 为 $\mathbb{R}^n$ 中互不相交的闭集. 证明：存在开集 O_1、O_2. s.t. $S_i \subset O_i$ $i=1,2$ 且 $O_1 \cap O_2 \neq \phi$.

证明：引理1：设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中点集. $x \in \mathbb{R}^n$ $d(x,E) := \inf\limits_{y\in E} d(x,y)$

则 $d(x,E)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续

任取 $y \in \mathbb{R}^n$ $z \in E$ 则 $d(x,E) \le d(x,y) + d(y,z)$

对 z 取下确界

$d(x,E) \le d(x,y) + d(y,E)$.

同理 $d(y,E) \le d(x,y) + d(x,E)$

$|d(x,E) - d(y,E)| \le |x-y|$. 取 $|x-y|<\delta$ 中 $\delta=\varepsilon$ 即可

引理2：$f(x)$ 连续. f 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上. 则 任何开集的原象是开集

设 A 为 $\mathbb{R}$ 上一开集. ① $f^{-1}(A)=\phi$ 结论成立.

② $f^{-1}(A) \neq \phi$ 则 $\exists\, x_0 \in f^{-1}(A)$ s.t. $f(x_0)\in A$ 又 A 为开集 $\exists\, \varepsilon>0$ $(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon) \subset A$

由 $f(x)$ 在 x_0 连续 $\exists\, \delta>0$ $|x-x_0|<\delta$ $f(x)\in(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$

故 $O_\delta(x_0) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid |x-x_0|<\delta\} \subset f^{-1}(A)$ 从而 $f^{-1}(A)$ 为开集.

记 $\rho(x)=\dfrac{d(x,S_1)}{d(x,S_1)+d(x,S_2)}$.

$O_1=\{x\in\mathbb{R}^n;\ \rho(x)<\frac{1}{2}\}=\rho^{-1}((-\infty,\frac{1}{2}))$

$O_2=\{x\in\mathbb{R}^n;\ \rho(x)>\frac{1}{2}\}=\rho^{-1}((\frac{1}{2},+\infty))$

则 $d(x,S_1)$ $d(x,S_2)$ 一致连续(引理1)

则 $\rho(x)$ 连续 则 O_1、O_2 为开集(引理2)

对 $\forall x\in S_1$. $\cancel{\rho(x)<\frac{1}{2}}$ $d(x,S_1)<d(x,S_2)$ $\rho(x)<\frac{1}{2}$ $x\in O_1$

同理 $S_2\subset O_2$.

又 $O_1\cap O_2=\emptyset$

则结论成立.

10. 第九题引理1