Grammaires de descriptions d'objets

Florent Hivert

Mél : Florent.Hivert@lri.fr
Adresse universelle : http://www.lri.fr/~hivert

Objectifs : algorithmes génériques

- **Identifier les composants de base :**

  $\Longrightarrow$ Singleton, union, produit cartésien, ensemble et multiensemble...

- Comprendre comment composer les briques de base

  $\Longrightarrow$ grammaire de description, classe combinatoire

- $\Longrightarrow$ Algorithmes génériques

Objectifs : algorithmes génériques

- **Identifier les composants de base :**

  $\Longrightarrow$ Singleton, union, produit cartésien, ensemble et multiensemble...

- Comprendre comment composer les briques de base

  $\Longrightarrow$ grammaire de description, classe combinatoire

- $\Longrightarrow$ Algorithmes génériques

Union disjointe

Definition

On écrit $C = A \sqcup B$ et on dit que C est l'**union disjointe** de A et B si $C = A \sqcup B$ et $A \cap B = \emptyset$.

Alors :

- $\text{count}(C) = \text{count}(A) + \text{count}(B)$
- On peut prendre : $\text{list}(C) = \text{concat}(\text{list}(A), \text{list}(B))$

Union disjointe

Definition

On écrit $C = A \sqcup B$ et on dit que C est l'**union disjointe** de A et B si $C = A \sqcup B$ et $A \cap B = \emptyset$.

Alors :

- $\text{count}(C) = \text{count}(A) + \text{count}(B)$
- On peut prendre : $\text{list}(C) = \text{concat}(\text{list}(A), \text{list}(B))$

Itération sur une union disjointe

On fixe l'ordre d'énumération tel que

$$\text{list}(A \sqcup B) := \text{concat}(\text{list}(A), \text{list}(B))$$

Itération en Python :

```
1        def iterunion(A, B):
2            for a in A:
3                yield a
4            for b in B:
5                yield b
```

first, next sur une union disjointe

$$\text{list}(A \sqcup B) := \text{concat}(\text{list}(A), \text{list}(B))$$

```
1   def first_union(A, B):
2       return A.first()
3
4   def next_union(A, B, x):
5       if x in A:
6           try:
7               return A.next(x)
8           except StopIteration:
9               return B.first()
10      else:
11          return B.next(x)
```

rank sur une union disjointe

$$\mathsf{list}(A \sqcup B) := \mathsf{concat}(\mathsf{list}(A), \mathsf{list}(B))$$

```
1   def rank_union(A, B, x):
2       if x in A:
3           return A.rank(x)
4       else:
5           return A.count() + B.rank(x)
6
7   def unrank_union(A, B, i):
8       if i < A.count():
9           return A.unrank(i)
10      else:
11          return B.unrank(i - A.count())
```

Le principe de l'idée récursive

Quand on a un'bonne idée,
on l'appliqu'récursivement :
on obtient le plus souvent
une bien meilleure idée !

- Unions disjointes récursives

Le principe de l'idée récursive

Quand on a un'bonne idée,
on l'appliqu'récursivement :
on obtient le plus souvent
une bien meilleure idée !

- Unions disjointes récursives

Les chaînes de n-bits ayant k-bits à 1

Une chaîne de bit non vide commence soit par un 0, soit par un 1 :

$$\text{BitString}(n,k) = 0 \cdot \text{BitString}(n-1,k) \sqcup 1 \cdot \text{BitString}(n-1,k-1)$$

Idem triangle de pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- $\text{BitString}(n,k).\text{count}() = \binom{n}{k}$

rank, unrank pour les chaînes de n-bits ayant k-bits à 1

```
 1  def rank_BSnk(x):
 2      if not x:          # liste vide
 3          return 0
 4      if x[0] == 0:
 5          return rank_BSnk(x[1:])
 6      else:
 7          return binom(len(x)-1, sum(x)-1) + rank_BSnk(x[1:])
 8
 9  def unrank_BSnk(n, k, i):
10      if n == 0:
11          return []
12      bn1k = binom(n-1, k)
13      if i < bn1k:
14          return [0]+unrank_BSnk(n-1, k, i)
15      else:
16          return [1]+unrank_BSnk(n-1, k-1, i-bn1k)
```

Le problème du calcul de la cardinalité

Problème

Le calcul récursif des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ n'est pas efficace car on recalcule plusieurs fois la même chose.

Plus généralement, le calcul récursif des cardinalités sera très inefficace pour la même raison.

Parenthèse : mémoization et programmation dynamique

Retenir

- ***Mémoisation :*** *on mémorise tous les calculs pendant la récursion au momment où on les fait*
- ***Programmation Dynamique :*** *résoud les sous-problèmes, des plus petits aux plus grands en stockant les résultats intermédiaires.*

En général, la programmation dynamique est plus efficace mais plus longue à mettre en oeuvre : il faut avoir planifié l'utilisation de la mémoire.

Parenthèse : mémoization et programmation dynamique

Retenir

- ***Mémoisation :*** *on mémorise tous les calculs pendant la récursion au momment où on les fait*
- ***Programmation Dynamique :*** *résoud les sous-problèmes, des plus petits aux plus grands en stockant les résultats intermédiaires.*

En général, la programmation dynamique est plus efficace mais plus longue à mettre en oeuvre : il faut avoir planifié l'utilisation de la mémoire.

Parenthèse : mémoization et programmation dynamique

Retenir

- ***Mémoisation :*** *on mémorise tous les calculs pendant la récursion au momment où on les fait*
- ***Programmation Dynamique :*** *résoud les sous-problèmes, des plus petits aux plus grands en stockant les résultats intermédiaires.*

En général, la programmation dynamique est plus efficace mais plus longue à mettre en oeuvre : il faut avoir planifié l'utilisation de la mémoire.

Autre exemple : les permutations

Les permutés d'un ensemble $X := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$:

$$\mathrm{Perm}\{1,2,3\} = 1 \cdot \mathrm{Perm}\{2,3\} \sqcup 2 \cdot \mathrm{Perm}\{1,3\} \sqcup 3 \cdot \mathrm{Perm}\{1,2\}$$

Plus généralement :

Retenir

Énumération lexicographique des permutations :

$$\mathrm{Perm}(X) = \bigsqcup_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathrm{Perm}(X/\{x_i\})$$

- $\mathrm{Perm}(X).\mathrm{count}() = |X|!$

Généralisation : permuté d'un multiensemble

$$\mathrm{Perm}\{1,1,2,3\} = 1{\cdot}\mathrm{Perm}\{1,2,3\} \sqcup 2{\cdot}\mathrm{Perm}\{1,1,3\} \sqcup 3{\cdot}\mathrm{Perm}\{1,1,2\}$$

Notation : $\{1,1,2,3\} = 1^2 2^1 3^1$

$$\mathrm{Perm}(1^2 2^3 3^1) = 1{\cdot}\mathrm{Perm}(1^1 2^3 3^1) \sqcup 2{\cdot}\mathrm{Perm}(1^2 2^2 3^1) \sqcup 3{\cdot}\mathrm{Perm}(1^2 2^3)$$

Retenir

Énumération lexicographique des multi-permutations :

$$\mathrm{Perm}(X) = \bigsqcup_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathrm{Perm}(X/\{x_i\})$$

Coefficient multinomiaux :

L'union disjointe précédente nous donne l'égalité de cardinaux :

$$\binom{|I|}{i_1, i_2, \ldots, i_k} = \binom{|I|-1}{i_1 - 1, i_2, \ldots, i_k} + \binom{|I|-1}{i_1, i_2 - 1, \ldots, i_k} + \cdots + \binom{|I|-1}{i_1, i_2, \ldots, i_k - 1}$$

On montre alors :

$$\mathrm{Perm}(x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}).\mathrm{count}() = \frac{(i_1 + i_2 + \cdots + i_k)!}{i_1! i_2! \ldots i_k!} = \binom{|I|}{i_1, i_2, \ldots, i_k}$$

Coefficient multinomiaux :

L'union disjointe précédente nous donne l'égalité de cardinaux :

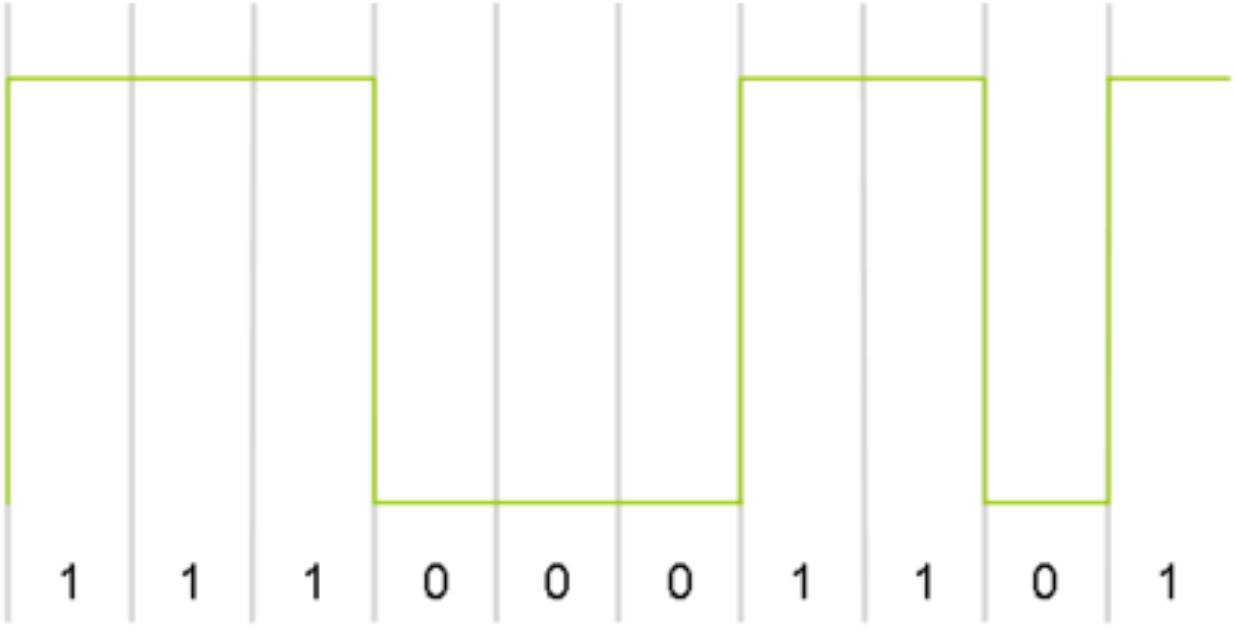
$$\binom{|I|}{i_1, i_2, \ldots, i_k} = \binom{|I|-1}{i_1 - 1, i_2, \ldots, i_k} + \binom{|I|-1}{i_1, i_2 - 1, \ldots, i_k} + \cdots + \binom{|I|-1}{i_1, i_2, \ldots, i_k - 1}$$

On montre alors :

$$\mathrm{Perm}(x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}).\mathrm{count}() = \frac{(i_1 + i_2 + \cdots + i_k)!}{i_1! i_2! \ldots i_k!} = \binom{|I|}{i_1, i_2, \ldots, i_k}$$

Autre application : transmission en codage NRZ

Non Return to Zero, Manière très élémentaire pour transmettre de l'information sur un ligne : 0 : -V, 1 : +V



Source : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Non_Return_to_Zero`

Perte de synchronisation en codage NRZ

S'il on envoie une suite trop longue de bits identiques, le récepteur ne peut plus se basé sur les transistions pour se synchroniser. Il risque de perdre la synchronisation avec l'émetteur.

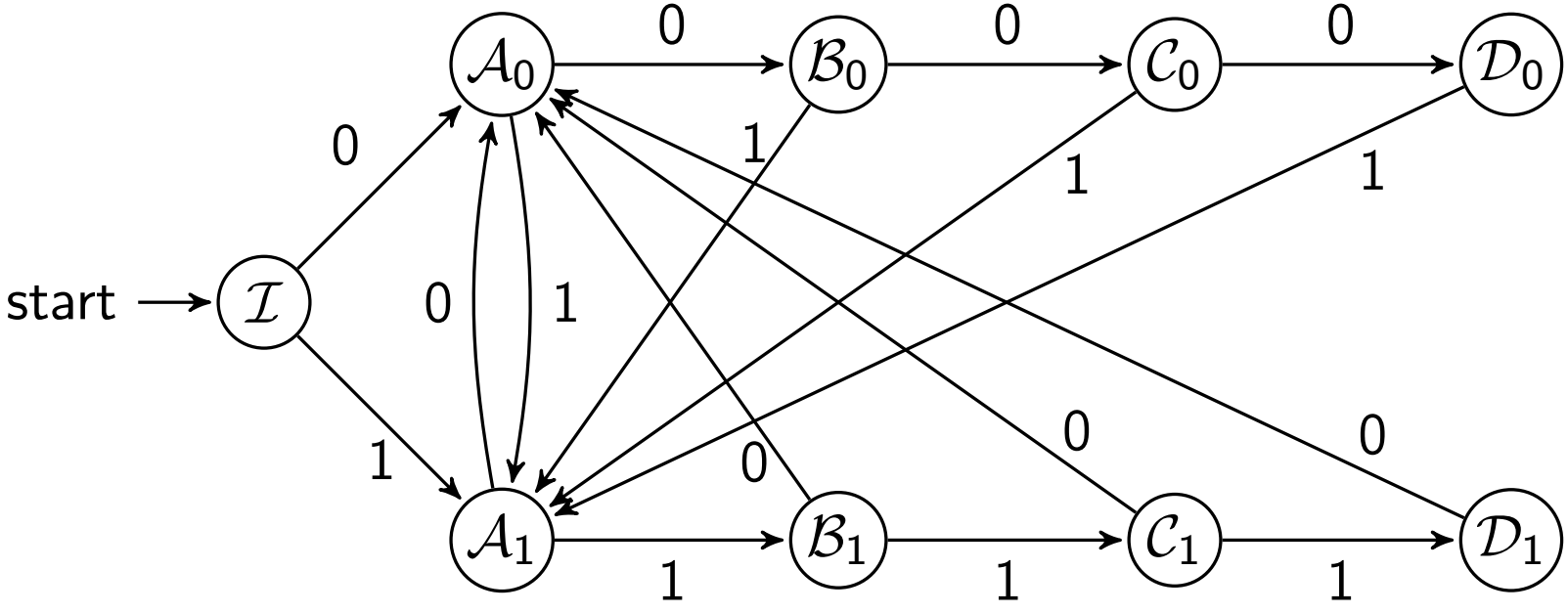
Definition

Une séquence de longueur n est dite non-repétitive d'ordre k (abréviation $NR(k, n)$) si elle ne contient pas se séquence de plus de k bits identiques consécutifs.

Notation : $NR(k, n, c, i)$ les suites qui commencent par au plus c i :

- $NR(k, n, 0, 0) = 1 \cdot NR(k, n-1, k-1, 1)$
- $NR(k, n, c, 0) = 0 \cdot NR(k, n-1, c-1, 0) \sqcup 1 \cdot NR(k, n-1, k-1, 1)$
- Idem en échangeant les rôles de 0 et 1.

C'est un automate fini !



Tous les états sont acceptants.

Union récursive et automates finis

Retenir

La méthode précédente fonctionne pour touts les automates finis déterministes. Soit $\mathrm{Lang}_n(E)$ *l'ensemble des mots de longueur n acceptés à partir de l'état E, alors on a la définition récursive :*

- *Cas de base, pour un état E :*

$$\mathrm{Lang}_0(E) = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si } E \text{ est terminal} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

- *Étape de la récursion :*

$$\mathrm{Lang}_n(E) = \bigsqcup_{E \to_a E'} a \cdot \mathrm{Lang}_{n-1}(E')$$

Le produit cartésien

Definition

On appelle **produit cartesien** de A et B l'ensemble C noté $C := A \times B$ défini par

$$C := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B)\}.$$

Alors :

- $\text{count}(C) = \text{count}(A) \cdot \text{count}(B)$
- On peut prendre la liste dans l'ordre lexicographique :

$$\begin{aligned}\text{list}(C) = [&(a_0, b_0), (a_0, b_1), (a_0, b_2), \ldots, (a_0, b_l),\\ &(a_1, b_0), (a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_l),\\ &(a_2, b_0), (a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_l),\\ &\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad].\end{aligned}$$

Le produit cartésien

Definition

On appelle **produit cartesien** de A et B l'ensemble C noté $C := A \times B$ défini par

$$C := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B)\}.$$

Alors :

- $\text{count}(C) = \text{count}(A) \cdot \text{count}(B)$
- On peut prendre la liste dans l'ordre lexicographique :

$$\begin{aligned}\text{list}(C) = [&(a_0, b_0), (a_0, b_1), (a_0, b_2), \ldots, (a_0, b_l),\\ &(a_1, b_0), (a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_l),\\ &(a_2, b_0), (a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_l),\\ &\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad].\end{aligned}$$

Itération sur un produit cartésien

Ordre lexicographique :

Itération en Python :

```
1       def iter_cartprod(A, B):
2           for a in A:
3               for b in B:
4                   yield (a, b)
```

first, next sur un produit cartésien

Ordre lexicographique :

```
1        def first_cartprod(A, B):
2            return (A.first(), B.first())
3
4        def next_cartprod(A, B, x):
5            (a , b) = x       # pattern matching
6            try:
7               return (a, B.next(b))
8            except StopIteration:
9               return (A.next(a), B.first())
```

rank sur un produit cartésien

Ordre lexicographique :

```
1       def rank_cartprod(A, B, x):
2           (a , b) = x       # pattern matching
3           A.rank(a)*B.count() + B.rank(b)
4
5       def unrank_cartprod(A, B, i):
6           c = B.count()
7           return (A.unrank(i // c), B.unrank(i % c))
```

Notion de classe combinatoire

Définition (Classe combinatoire)

*On appelle **classe combinatoire** un ensemble $\mathcal{C}$ dont les éléments e ont une taille (nommée aussi degrée) noté $|e|$ et tels que l'ensemble $\mathcal{C}_n$ des éléments de taille n est fini :*

$$\text{count}(\{e \in \mathcal{C} \mid |e| = n\}) < \infty$$

Exemple :

- Les mots sur un alphabet où la taille est la longueur
- Les permutations de $\{1, \dots n\}$ (taille $= n$)
- Les arbres binaires où la taille est le nombre de noeuds

L'union disjointe graduée

Si $\mathcal{C} = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$, les élements de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ gardent leur taille dans l'union disjointe graduée :

$$\mathcal{C}_n := \mathcal{A}_n \sqcup \mathcal{B}_n$$

Alors :

- $\mathcal{C}.\,\mathrm{count}(n) = \mathcal{A}.\,\mathrm{count}(n) + \mathcal{B}.\,\mathrm{count}(n)$
- On peut prendre : $\mathcal{C}.\,\mathrm{list}(n) = \mathrm{concat}(\mathcal{A}.\,\mathrm{list}(b), \mathcal{B}.\,\mathrm{list}(n))$

$\Longrightarrow$ On peut réutiliser tout ce que l'on a vu sur les unions disjointes.

L'union disjointe graduée

Si $\mathcal{C} = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$, les élements de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ gardent leur taille dans l'union disjointe graduée :

$$\mathcal{C}_n := \mathcal{A}_n \sqcup \mathcal{B}_n$$

Alors :

- $\mathcal{C}.\,\mathrm{count}(n) = \mathcal{A}.\,\mathrm{count}(n) + \mathcal{B}.\,\mathrm{count}(n)$
- On peut prendre : $\mathcal{C}.\,\mathrm{list}(n) = \mathrm{concat}(\mathcal{A}.\,\mathrm{list}(b), \mathcal{B}.\,\mathrm{list}(n))$

$\Longrightarrow$ On peut réutiliser tout ce que l'on a vu sur les unions disjointes.

Le produit cartesien gradué

Idée : les tailles (complexité, coût, nbr d'emplacements mémoires) s'ajoutent.

Definition

La taille de la paire $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est la somme des tailles :

$$|(a, b)|_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}} := |a|_{\mathcal{A}} + |b|_{\mathcal{B}}$$

Le produit cartesien gradué

Retenir

Si $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *alors*

$$\mathcal{C}_n = \bigsqcup_{i+j=n} \mathcal{A}_i \times \mathcal{B}_j$$

Calcul de la cardinalité :

$$|\mathcal{C}_n| = \sum_{i+j=n} |\mathcal{A}_i| \times |\mathcal{B}_j| = \sum_{i=0}^{n} |\mathcal{A}_i| \times |\mathcal{B}_{n-i}|$$

On peut alors prendre l'ordre union/lexicographique suivant :

$\mathcal{A}_0 \times \mathcal{B}_n$	$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{B}_{n-1}$	$\mathcal{A}_2 \times \mathcal{B}_{n-2}$	$\dots$	$\mathcal{A}_n \times \mathcal{B}_0$

Le produit cartesien gradué

Retenir

Si $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *alors*

$$\mathcal{C}_n = \bigsqcup_{i+j=n} \mathcal{A}_i \times \mathcal{B}_j$$

Calcul de la cardinalité :

$$|\mathcal{C}_n| = \sum_{i+j=n} |\mathcal{A}_i| \times |\mathcal{B}_j| = \sum_{i=0}^{n} |\mathcal{A}_i| \times |\mathcal{B}_{n-i}|$$

On peut alors prendre l'ordre union/lexicographique suivant :

$\mathcal{A}_0 \times \mathcal{B}_n$	$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{B}_{n-1}$	$\mathcal{A}_2 \times \mathcal{B}_{n-2}$	$\dots$	$\mathcal{A}_n \times \mathcal{B}_0$

Application les arbres binaires

Spécification récursive :

$$\mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree} \quad = \quad \text{Leaf} \quad \sqcup \quad \text{Node}(\mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree} \times \mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree})$$

Deux manières de compter les tailles :

1. Nombre de feuille :

$$\mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree} \quad = \quad \text{Leaf}_1 \quad \sqcup \quad \mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree} \times \mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree}$$

2. Nombre de Noeuds :

$$\mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree} \quad = \quad \text{Leaf}_0 \quad \sqcup \quad \text{Node}_1 \times \mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree} \times \mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree}$$

Application les arbres binaires

Spécification récursive :

$$\mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree} \quad = \quad \text{Leaf} \quad \sqcup \quad \text{Node}(\mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree} \times \mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree})$$

Deux manières de compter les tailles :

1. Nombre de feuille :

$$\mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree} \quad = \quad \text{Leaf}_1 \quad \sqcup \quad \mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree} \times \mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree}$$

2. Nombre de Noeuds :

$$\mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree} \quad = \quad \text{Leaf}_0 \quad \sqcup \quad \text{Node}_1 \times \mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree} \times \mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree}$$

Liste de tous les arbres à n Nœuds

Algorithme

- ***Entrée :*** *un entier positif ou nul* n
- ***Sortie :*** *une liste d'arbres*

```
if n == 0:
    yield arbreVide()
for i in range(n):
    for g in BinTree(i):
        for d in BinTree(n-1-i):
            yield Noeud(g,d)
```

Nombre de Catalan

Proposition

Le nombre d'arbres binaires à n nœuds est appelé n-ième nombre de Catalan noté C_n. Les nombre de Catalan vérifient la récurrence :

$$C_0 = 1 \qquad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} \,.$$

On peut trouver une formule close :

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \,.$$

Voici les premières valeurs :

$$C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ C_5 = 42,\ c_6 = 132\,.$$

Specification d'une classe combinatoire

But : on veut décrire une **classe combinatoire** de manière à pouvoir appliquer automatiquement les algorithmes de comptage, itération, génération,. . ..

Pour ceci, on va utiliser une **grammaire** qui code comment appliquer récursivement les constructions précédentes.

Specification d'une classe combinatoire

Retenir (Grammaire de description d'objets)

Constructeurs terminaux :

- $\mathcal{E}(o)$ *: la classe qui contient un seul objet* o *de taille* 0
- $\mathcal{Z}(o)$ *: la classe qui contient un seul objet* o *de taille* 1

Constructeurs binaires :

- $\mathcal{C} = \text{Union}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *: union disjointe graduée :*

$$|a|_{\mathcal{C}} = |a|_{\mathcal{A}} \text{ si } a \in \mathcal{A} \qquad |a|_{\mathcal{C}} = |b|_{\mathcal{B}} \text{ si } b \in \mathcal{B}$$

- $\mathcal{C} = \text{Prod}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *: produit cartésien graduée :*

$$|(a, b)|_{\mathcal{C}} = |a|_{\mathcal{A}} + |b|_{\mathcal{B}} \text{ si } a \in \mathcal{A} \text{ et } b \in \mathcal{B}$$

Exemples :

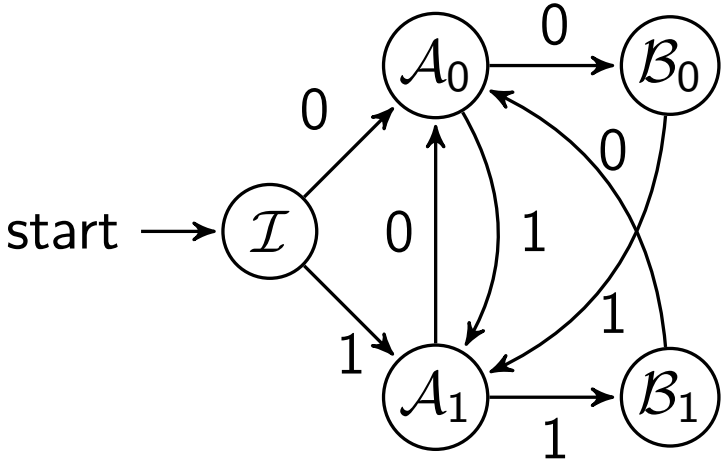
- Les arbres binaires, la taille est le nombres de **Noeuds**

$$\mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree} = \text{Union}(\mathcal{E}(\perp), \text{Prod}(\mathcal{Z}(\circ), \text{Prod}(\mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree}, \mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree}))$$

- Les arbres binaires, la taille est le nombres de **Feuilles**

$$\mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree} = \text{Union}(\mathcal{Z}(\perp), \text{Prod}(\mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree}, \mathcal{B}\text{in}\mathcal{T}\text{ree}))$$

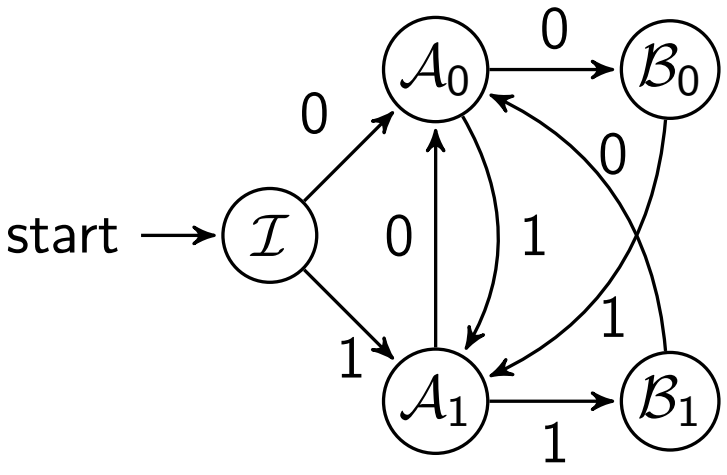
Exemples : Codage d'un automate fini



Les mots binaires qui n'ont pas plus de deux lettres identiques consécutives :

$$\mathcal{I} = \mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup (\mathcal{Z}(\text{"0"}) \times \mathcal{A}_0) \sqcup (\mathcal{Z}(\text{"1"}) \times \mathcal{A}_1)$$
$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup (\mathcal{Z}(\text{"0"}) \times \mathcal{B}_0) \sqcup (\mathcal{Z}(\text{"1"}) \times \mathcal{A}_1)$$
$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup (\mathcal{Z}(\text{"1"}) \times \mathcal{A}_1)$$
$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup (\mathcal{Z}(\text{"0"}) \times \mathcal{A}_0) \sqcup (\mathcal{Z}(\text{"1"}) \times \mathcal{B}_1)$$
$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup (\mathcal{Z}(\text{"0"}) \times \mathcal{A}_0)$$

Exemples : Codage d'un automate fini



Dans cet exemple : plus simple, on inclut la lettre dans l'état :

$$\mathcal{I} = \mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup \mathcal{A}_0 \sqcup \mathcal{A}_1$$
$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{Z}(\text{"0"}) \times (\mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup \mathcal{B}_0 \sqcup \mathcal{A}_1)$$
$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{Z}(\text{"0"}) \times (\mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup \mathcal{A}_1)$$
$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{Z}(\text{"1"}) \times (\mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{A}_0)$$
$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{Z}(\text{"1"}) \times (\mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup \mathcal{A}_0)$$