

Grammaires de descriptions d'objets

Florent Hivert

Mél : Florent.Hivert@lri.fr

Adresse universelle : <http://www.lri.fr/~hivert>

Résumé des épisodes précédents

On a vu sur des exemples (mots binaires, permutations) plusieurs technique pour résoudre les questions classiques de la génération combinatoire :

- Énumération lexicographique ;
- Décomposition récursive ;
- itération vs listage pour gagner en complexité.

Solution ad hoc \implies solution générique

Résumé des épisodes précédents

On a vu sur des exemples (mots binaires, permutations) plusieurs technique pour résoudre les questions classiques de la génération combinatoire :

- Énumération lexicographique ;
- Décomposition récursive ;
- itération vs listage pour gagner en complexité.

Solution *ad hoc* \implies solution générique

Objectifs : algorithmes génériques

- Identifier les **composants de base** :
 - ⇒ Singleton, union, produit cartésien, ensemble et multiensemble. . .
- Comprendre comment **composer** les briques de base :
 - ⇒ grammaire de description, classe combinatoire
- ⇒ **Algorithmes génériques !**

Objectifs : algorithmes génériques

- Identifier les **composants de base** :
 - ⇒ Singleton, union, produit cartésien, ensemble et multiensemble. . .
- Comprendre comment **composer** les briques de base :
 - ⇒ grammaire de description, classe combinatoire
- ⇒ **Algorithmes génériques !**

Union disjointe

Definition

On écrit $C = A \sqcup B$ et on dit que C est l'**union disjointe** de A et B si $C = A \sqcup B$ et $A \cap B = \emptyset$.

Alors :

- $\text{count}(C) = \text{count}(A) + \text{count}(B)$
- On peut prendre : $\text{list}(C) = \text{concat}(\text{list}(A), \text{list}(B))$

Union disjointe

Definition

On écrit $C = A \sqcup B$ et on dit que C est l'**union disjointe** de A et B si $C = A \sqcup B$ et $A \cap B = \emptyset$.

Alors :

- $\text{count}(C) = \text{count}(A) + \text{count}(B)$
- On peut prendre : $\text{list}(C) = \text{concat}(\text{list}(A), \text{list}(B))$

Itération sur une union disjointe

On fixe l'ordre d'énumération tel que

$$\text{list}(A \sqcup B) := \text{concat}(\text{list}(A), \text{list}(B))$$

Itération en Python :

```
1      def iterunion(A, B):
2          for a in A:
3              yield a
4          for b in B:
5              yield b
```


first, next sur une union disjointe

$$\text{list}(A \sqcup B) := \text{concat}(\text{list}(A), \text{list}(B))$$

```
1      def first_union(A, B):
2          return A.first()
3
4      def next_union(A, B, x):
5          if x in A:
6              try:
7                  return A.next(x)
8              except StopIteration:
9                  return B.first()
10         else:
11             return B.next(x)
```

rank sur une union disjointe

$$\text{list}(A \sqcup B) := \text{concat}(\text{list}(A), \text{list}(B))$$

```
1      def rank_union(A, B, x):
2          if x in A:
3              return A.rank(x)
4          else:
5              return A.count() + B.rank(x)
6
7      def unrank_union(A, B, i):
8          if i < A.count():
9              return A.unrank(i)
10         else:
11             return B.unrank(i - A.count())
```

Le principe de l'idée réursive

Quand on a un'bonne idée,
on l'appliqu'récursivement :
on obtient le plus souvent
une bien meilleure idée !

Unions disjointes récursives

Le principe de l'idée réursive

Quand on a un'bonne idée,
on l'appliqu'récursivement :
on obtient le plus souvent
une bien meilleure idée !

Unions disjointes récursives

Les chaînes de n -bits ayant k -bits à 1

Une chaîne de bit non vide commence soit par un 0, soit par un 1 :

$$\text{BitString}(n, k) = 0 \cdot \text{BitString}(n-1, k) \sqcup 1 \cdot \text{BitString}(n-1, k-1)$$

Idem triangle de pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

■ $\text{BitString}(n, k). \text{count}() = \binom{n}{k}$

rank, unrank pour les chaînes de n -bits ayant k -bits à 1

```
1  def rank_BSnk(x):
2      if not x:          # liste vide
3          return 0
4      if x[0] == 0:
5          return rank_BSnk(x[1:])
6      else:
7          return binom(len(x)-1, sum(x)-1) + rank_BSnk(x[1:])
8
9  def unrank_BSnk(n, k, i):
10     if n == 0:
11         return []
12     bn1k = binom(n-1, k)
13     if i < bn1k:
14         return [0]+unrank_BSnk(n-1, k, i)
15     else:
16         return [1]+unrank_BSnk(n-1, k-1, i-bn1k)
```

Le problème du calcul de la cardinalité

Problème

Le calcul récursif des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ n'est pas efficace car on recalcule plusieurs fois la même chose.

Plus généralement, le calcul récursif des cardinalités sera très inefficace pour la même raison.

Parenthèse : mémoization et programmation dynamique

Retenir

- **Mémoisation** : on mémorise tous les calculs pendant la récursion au moment où on les fait
- **Programmation Dynamique** : résoud les sous-problèmes, des plus petits aux plus grands en stockant les résultats intermédiaires.

En général, la programmation dynamique est plus efficace mais plus longue à mettre en oeuvre : il faut avoir planifié l'utilisation de la mémoire.

Parenthèse : mémoization et programmation dynamique

Retenir

- **Mémoisation** : on mémorise tous les calculs pendant la récursion au moment où on les fait
- **Programmation Dynamique** : résoud les sous-problèmes, des plus petits aux plus grands en stockant les résultats intermédiaires.

En général, la programmation dynamique est plus efficace mais plus longue à mettre en oeuvre : il faut avoir planifié l'utilisation de la mémoire.

Parenthèse : mémoization et programmation dynamique

Retenir

- **Mémoisation** : on mémorise tous les calculs pendant la récursion au moment où on les fait
- **Programmation Dynamique** : résoud les sous-problèmes, des plus petits aux plus grands en stockant les résultats intermédiaires.

En général, la programmation dynamique est plus efficace mais plus longue à mettre en oeuvre : il faut avoir planifié l'utilisation de la mémoire.

Autre exemple : les permutations

Les permutés d'un ensemble $X := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$:

$$\text{Perm}\{1, 2, 3\} = 1 \cdot \text{Perm}\{2, 3\} \sqcup 2 \cdot \text{Perm}\{1, 3\} \sqcup 3 \cdot \text{Perm}\{1, 2\}$$

Plus généralement :

Retenir

Énumération lexicographique des permutations :

$$\text{Perm}(X) = \bigsqcup_{i=1}^n x_i \cdot \text{Perm}(X/\{x_i\})$$

■ $\text{Perm}(X).\text{count}() = |X|!$

Généralisation : permuté d'un multiensemble

$$\text{Perm}\{1, 1, 2, 3\} = 1 \cdot \text{Perm}\{1, 2, 3\} \sqcup 2 \cdot \text{Perm}\{1, 1, 3\} \sqcup 3 \cdot \text{Perm}\{1, 1, 2\}$$

$$\text{Notation : } \{1, 1, 2, 3\} = 1^2 2^1 3^1$$

$$\text{Perm}(1^2 2^3 3^1) = 1 \cdot \text{Perm}(1^1 2^3 3^1) \sqcup 2 \cdot \text{Perm}(1^2 2^2 3^1) \sqcup 3 \cdot \text{Perm}(1^2 2^3)$$

Retenir

Énumération lexicographique des multi-permutations :

$$\text{Perm}(X) = \bigsqcup_{i=1}^n x_i \cdot \text{Perm}(X / \{x_i\})$$

Coefficient multinomiaux :

L'union disjointe précédente nous donne l'égalité de cardinaux :

$$\binom{|I|}{i_1, i_2, \dots, i_k} = \binom{|I| - 1}{i_1 - 1, i_2, \dots, i_k} + \binom{|I| - 1}{i_1, i_2 - 1, \dots, i_k} + \dots + \binom{|I| - 1}{i_1, i_2, \dots, i_k - 1}$$

On montre alors :

$$\text{Perm}(x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}).\text{count}() = \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_k)!}{i_1! i_2! \dots i_k!} = \binom{|I|}{i_1, i_2, \dots, i_k}$$

Coefficient multinomiaux :

L'union disjointe précédente nous donne l'égalité de cardinaux :

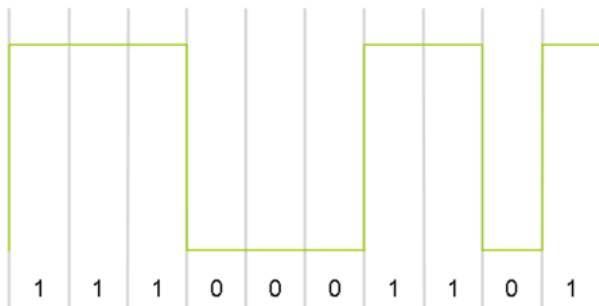
$$\binom{|I|}{i_1, i_2, \dots, i_k} = \binom{|I| - 1}{i_1 - 1, i_2, \dots, i_k} + \binom{|I| - 1}{i_1, i_2 - 1, \dots, i_k} + \dots + \binom{|I| - 1}{i_1, i_2, \dots, i_k - 1}$$

On montre alors :

$$\text{Perm}(x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}).\text{count}() = \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_k)!}{i_1! i_2! \dots i_k!} = \binom{|I|}{i_1, i_2, \dots, i_k}$$

Autre application : transmission en codage NRZ

Non Return to Zero, Manière très élémentaire pour transmettre de l'information sur un ligne : 0 : -V, 1 : +V



Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Non_Return_to_Zero

Perte de synchronisation en codage NRZ

Si on envoie une suite trop longue de bits identiques, le récepteur ne voit un signal constant. Il ne peut plus se baser sur les transitions pour se synchroniser et risque de perdre la synchronisation avec l'émetteur.

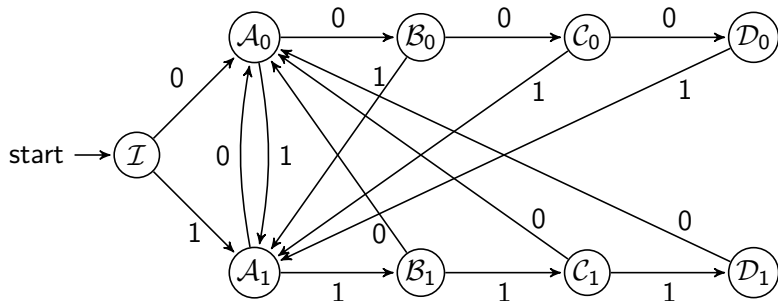
Definition

Une séquence de longueur n est dite **non-répétitive d'ordre k** (abréviation $NR_k(n)$) si elle ne contient pas de séquence de plus de k bits identiques consécutifs.

On note $NR_k(n, c, i)$ les suites qui commencent par au plus c i :

- $NR_k(n, 0, 0) = 1 \cdot NR_k(n-1, k-1, 1)$
- $NR_k(n, c, 0) = 0 \cdot NR_k(n-1, c-1, 0) \sqcup 1 \cdot NR_k(n-1, k-1, 1)$
- Idem en échangeant les rôles de 0 et 1.

C'est un automate fini !



Tous les états sont acceptants.

Union récursive et automates finis

Retenir

La méthode précédente fonctionne pour tous les **automates finis déterministes**. Soit $\text{Lang}_n(E)$ l'ensemble des mots de longueur n acceptés à partir de l'état E , alors on a la définition récursive :

- Cas de base, pour un état E :

$$\text{Lang}_0(E) = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si } E \text{ est terminal} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

- Étape de la récursion :

$$\text{Lang}_n(E) = \bigsqcup_{E \rightarrow_a E'} a \cdot \text{Lang}_{n-1}(E')$$

Le produit cartésien

Definition

On appelle **produit cartésien** de A et B l'ensemble C noté $C := A \times B$ défini par

$$C := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

- $\text{count}(C) = \text{count}(A) \cdot \text{count}(B) = k \cdot \ell$
- On peut prendre la liste dans l'ordre lexicographique :

$$\text{list}(C) = \begin{bmatrix} (a_0, b_0) & (a_0, b_1) & (a_0, b_2) & \cdots & (a_0, b_{\ell-1}) \\ (a_1, b_0) & (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \cdots & (a_1, b_{\ell-1}) \\ (a_2, b_0) & (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \cdots & (a_2, b_{\ell-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

Le produit cartésien

Definition

On appelle **produit cartésien** de A et B l'ensemble C noté $C := A \times B$ défini par

$$C := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

- $\text{count}(C) = \text{count}(A) \cdot \text{count}(B) = k \cdot \ell$
- On peut prendre la liste dans l'ordre lexicographique :

$$\text{list}(C) = \begin{bmatrix} (a_0, b_0) & (a_0, b_1) & (a_0, b_2) & \cdots & (a_0, b_{\ell-1}) \\ (a_1, b_0) & (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \cdots & (a_1, b_{\ell-1}) \\ (a_2, b_0) & (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \cdots & (a_2, b_{\ell-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

Itération sur un produit cartésien

Ordre lexicographique :

$$\begin{array}{ccccc}(a_0, b_0) & (a_0, b_1) & (a_0, b_2) & \cdots & (a_0, b_{\ell-1}) \\ (a_1, b_0) & (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \cdots & (a_1, b_{\ell-1}) \\ (a_2, b_0) & (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \cdots & (a_2, b_{\ell-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{k-1}, b_0) & (a_{k-1}, b_1) & (a_{k-1}, b_2) & \cdots & (a_{k-1}, b_{\ell-1})\end{array}$$

Itération en Python :

```
1      def iter_cartprod(A, B):
2          for a in A:
3              for b in B:
4                  yield (a, b)
```

first, next sur un produit cartésien

```
1      def first_cartprod(A, B):
2          return (A.first(), B.first())
3
4      def next_cartprod(A, B, x):
5          (a , b) = x          # pattern matching
6          try:
7              return (a, B.next(b))
8          except StopIteration:
9              return (A.next(a), B.first())
```

rank sur un produit cartésien

```
1      def rank_cartprod(A, B, x):
2          (a , b) = x          # pattern matching
3          A.rank(a)*B.count() + B.rank(b)
4
5      def unrank_cartprod(A, B, i):
6          c = B.count()
7          return (A.unrank(i // c), B.unrank(i % c))
```

Notion de classe combinatoire

Définition (Classe combinatoire)

On appelle **classe combinatoire** un ensemble \mathcal{C} dont les éléments e ont une taille (nommée aussi degré) noté $|e|$ et tels que l'ensemble \mathcal{C}_n des éléments de taille n est fini :

$$\text{count}(\{e \in \mathcal{C} \mid |e| = n\}) < \infty$$

Exemple :

- Les mots sur un alphabet où la taille est la longueur
- Les permutations de $\{1, \dots, n\}$ (taille = n)
- Les arbres binaires où la taille est le nombre de noeuds

L'union disjointe graduée

Si $\mathcal{C} = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$, les éléments de \mathcal{A} et \mathcal{B} gardent leur taille dans l'union disjointe graduée :

$$\mathcal{C}_n := \mathcal{A}_n \sqcup \mathcal{B}_n$$

Alors :

- $\mathcal{C}.\text{count}(n) = \mathcal{A}.\text{count}(n) + \mathcal{B}.\text{count}(n)$
- On peut prendre : $\mathcal{C}.\text{list}(n) = \text{concat}(\mathcal{A}.\text{list}(n), \mathcal{B}.\text{list}(n))$

\implies On peut réutiliser tout ce que l'on a vu sur les unions disjointes.

L'union disjointe graduée

Si $\mathcal{C} = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$, les éléments de \mathcal{A} et \mathcal{B} gardent leur taille dans l'union disjointe graduée :

$$\mathcal{C}_n := \mathcal{A}_n \sqcup \mathcal{B}_n$$

Alors :

- $\mathcal{C}.count(n) = \mathcal{A}.count(n) + \mathcal{B}.count(n)$
- On peut prendre : $\mathcal{C}.list(n) = \text{concat}(\mathcal{A}.list(n), \mathcal{B}.list(n))$

\implies On peut réutiliser tout ce que l'on a vu sur les unions disjointes.

Le produit cartésien gradué

Idée : les tailles (complexité, coût, nbr d'emplacements mémoires) s'ajoutent.

Definition

La taille de la paire $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est la somme des tailles :

$$|(a, b)|_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} := |a|_{\mathcal{A}} + |b|_{\mathcal{B}}$$

Le produit cartésien gradué

Retenir

Si $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ alors

$$\mathcal{C}_n = \bigsqcup_{i+j=n} \mathcal{A}_i \times \mathcal{B}_j$$

Calcul de la cardinalité :

$$|\mathcal{C}_n| = \sum_{i+j=n} |\mathcal{A}_i| \times |\mathcal{B}_j| = \sum_{i=0}^n |\mathcal{A}_i| \times |\mathcal{B}_{n-i}|$$

On peut alors prendre l'ordre union/lexicographique suivant :

$\mathcal{A}_0 \times \mathcal{B}_n$	$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{B}_{n-1}$	$\mathcal{A}_2 \times \mathcal{B}_{n-2}$	\dots	$\mathcal{A}_n \times \mathcal{B}_0$
--------------------------------------	--	--	---------	--------------------------------------

Le produit cartésien gradué

Retenir

Si $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ alors

$$\mathcal{C}_n = \bigsqcup_{i+j=n} \mathcal{A}_i \times \mathcal{B}_j$$

Calcul de la cardinalité :

$$|\mathcal{C}_n| = \sum_{i+j=n} |\mathcal{A}_i| \times |\mathcal{B}_j| = \sum_{i=0}^n |\mathcal{A}_i| \times |\mathcal{B}_{n-i}|$$

On peut alors prendre l'ordre union/lexicographique suivant :

$\mathcal{A}_0 \times \mathcal{B}_n$	$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{B}_{n-1}$	$\mathcal{A}_2 \times \mathcal{B}_{n-2}$	\dots	$\mathcal{A}_n \times \mathcal{B}_0$
--------------------------------------	--	--	---------	--------------------------------------

Application les arbres binaires

Spécification récursive :

$$\mathcal{BinTree} = \text{Leaf} \sqcup \text{Node}(\mathcal{BinTree} \times \mathcal{BinTree})$$

Deux manières de compter les tailles :

1 Nombre de feuille :

$$\mathcal{BinTree} = \text{Leaf}_1 \sqcup \mathcal{BinTree} \times \mathcal{BinTree}$$

2 Nombre de Noeuds :

$$\mathcal{BinTree} = \text{Leaf}_0 \sqcup \text{Node}_1 \times \mathcal{BinTree} \times \mathcal{BinTree}$$

Application les arbres binaires

Spécification récursive :

$$\mathcal{BinTree} = \text{Leaf} \sqcup \text{Node}(\mathcal{BinTree} \times \mathcal{BinTree})$$

Deux manières de compter les tailles :

1 Nombre de feuille :

$$\mathcal{BinTree} = \text{Leaf}_1 \sqcup \mathcal{BinTree} \times \mathcal{BinTree}$$

2 Nombre de Noeuds :

$$\mathcal{BinTree} = \text{Leaf}_0 \sqcup \text{Node}_1 \times \mathcal{BinTree} \times \mathcal{BinTree}$$

Liste de tous les arbres à n Nœuds

Algorithme

- **Entrée** : un entier positif ou nul n
- **Sortie** : une liste d'arbres

```
if n == 0:  
    yield arbreVide()  
for i in range(n):  
    for g in BinTree(i):  
        for d in BinTree(n-1-i):  
            yield Noeud(g,d)
```


Nombre de Catalan

Proposition

Le nombre d'arbres binaires à n nœuds est appelé n -ième nombre de Catalan noté C_n . Les nombre de Catalan vérifient la récurrence :

$$C_0 = 1 \quad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} .$$

On peut trouver une formule close :

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} .$$

Voici les premières valeurs :

$$C_0 = 1, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5, \quad C_4 = 14, \quad C_5 = 42, \quad C_6 = 132 .$$

Specification d'une classe combinatoire

But : on veut décrire une **classe combinatoire** de manière à pouvoir appliquer automatiquement les algorithmes de comptage, itération, génération, . . .

Pour ceci, on va utiliser une **grammaire** qui code comment appliquer récursivement les constructions précédentes.

Specification d'une classe combinatoire

Retenir (Grammaire de description d'objets)

Constructeurs terminaux :

- $\mathcal{E}(o)$: la classe qui contient un seul objet o de taille 0
- $\mathcal{Z}(o)$: la classe qui contient un seul objet o de taille 1

Constructeurs binaires :

- $\mathcal{C} = \text{Union}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: union disjointe graduée :

$$|a|_{\mathcal{C}} = |a|_{\mathcal{A}} \text{ si } a \in \mathcal{A} \quad |a|_{\mathcal{C}} = |b|_{\mathcal{B}} \text{ si } b \in \mathcal{B}$$

- $\mathcal{C} = \text{Prod}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: produit cartésien graduée :

$$|(a, b)|_{\mathcal{C}} = |a|_{\mathcal{A}} + |b|_{\mathcal{B}} \text{ si } a \in \mathcal{A} \text{ et } b \in \mathcal{B}$$

Exemples :

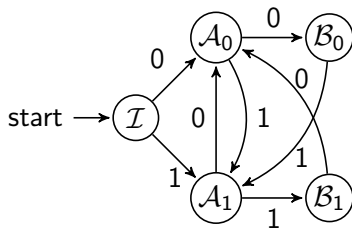
- Les arbres binaires, la taille est le nombres de **Noeuds**

$$\mathcal{B}inTree = \text{Union}(\mathcal{E}(\perp), \text{Prod}(\mathcal{Z}(\circ), \text{Prod}(\mathcal{B}inTree, \mathcal{B}inTree)))$$

- Les arbres binaires, la taille est le nombres de **Feuilles**

$$\mathcal{B}inTree = \text{Union}(\mathcal{Z}(\perp), \text{Prod}(\mathcal{B}inTree, \mathcal{B}inTree))$$

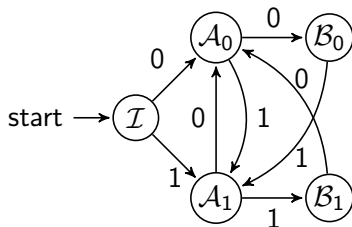
Exemples : Codage d'un automate fini



Les mots binaires qui n'ont pas plus de deux lettres identiques consécutives :

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup (\mathcal{Z}("0") \times \mathcal{A}_0) \sqcup (\mathcal{Z}("1") \times \mathcal{A}_1) \\ \mathcal{A}_0 &= \mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup (\mathcal{Z}("0") \times \mathcal{B}_0) \sqcup (\mathcal{Z}("1") \times \mathcal{A}_1) \\ \mathcal{B}_0 &= \mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup (\mathcal{Z}("1") \times \mathcal{A}_1) \\ \mathcal{A}_1 &= \mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup (\mathcal{Z}("0") \times \mathcal{A}_0) \sqcup (\mathcal{Z}("1") \times \mathcal{B}_1) \\ \mathcal{B}_1 &= \mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup (\mathcal{Z}("0") \times \mathcal{A}_0)\end{aligned}$$

Exemples : Codage d'un automate fini



Dans cet exemple : plus simple, on inclut la lettre dans l'état :

$$\mathcal{I} = \mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup \mathcal{A}_0 \sqcup \mathcal{A}_1$$

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{Z}("0") \times (\mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup \mathcal{B}_0 \sqcup \mathcal{A}_1)$$

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{Z}("0") \times (\mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup \mathcal{A}_1)$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{Z}("1") \times (\mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{A}_0)$$

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{Z}("1") \times (\mathcal{E}(\varepsilon) \sqcup \mathcal{A}_0)$$