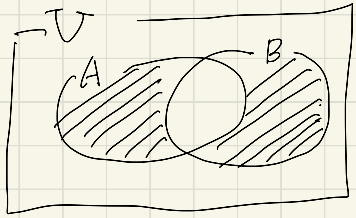
第1章 確率



問1

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
$$= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$
$$= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

また、

$$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$$
$$= (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$$
$$= (A^c \setminus B^c) \cup (B^c \setminus A^c) = A^c \triangle B^c$$

$$P(A \triangle B) = P((A \cup B) \setminus (A \cap B))$$
$$= P(A \cup B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \quad (\because P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

問2

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P((A_1 \cup A_2) \cup A_3)$$
$$= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$- P(A_1 \cap A_2) - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3))$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2)$$
$$- P(A_2 \cap A_3) - P(A_3 \cap A_1) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

問3

$$P((A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n)$$
$$= P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$
$$= P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) P(A_{n-1} \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-2}) P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-2})$$

以上を繰り返すことにより題意の式が得られる。 □

問4

$P(A|B^c) = 1 - P(A|B)$

サイコロを1回ふる状況を考える。

$P(A|B)$

(1) A：6が出る事象
B：3の倍数が出る事象 とすると。

$P(A|B^c) = 0$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$ $\therefore P(A|B^c) \neq 1 - P(A|B)$

(2) A：偶数が出る事象
B：奇数が出る事象
C：1が出る事象

$\frac{P(B \cap C)}{P(B)}$

$P(C|A \cup B) = \frac{1}{6}$, $P(C|A) = 0$, $P(C|B) = \frac{1}{3}$, $A \cap B = \phi$

$\therefore P(C|A \cup B) \neq P(C|A) + P(C|B)$

問5

(1) (0を受信する確率) = (0が送信され, 正しく受信) + (1が送信され, 誤って受信)

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}$$

$$= \frac{11}{30}$$

(2)

$$\frac{\frac{1}{15}}{\frac{11}{30}} = \frac{2}{11} \qquad \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}} = \frac{1}{19}$$

問6

事象A, Bを

A: 陽性が出る

B: 病気にかかっている

とすると, 題意より $P(B) = \frac{1}{10}$, $P(A|B^c) = \frac{1}{5}$, $P(A^c|B) = \frac{1}{10}$

Bayesの定理から,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B^c)P(B^c)}$$

$$= \frac{\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{10}} = \frac{1}{3}$$

問7

(1) 事象(A_1, A_2)と(B_1, B_2)が独立のとき,

	B_1	B_2	計
A_1	a	$1/9$	c
A_2	$4/9$	d	$1-c$
計	b	$1-b$	1

$$P(A_1\cap B_1) = P(A_1)P(B_1) \iff a = bc$$

$$\begin{cases} a + \frac{1}{9} = c \\ a + \frac{4}{9} = b \\ a = bc \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{2}{9},\ b = \frac{2}{3},\ c = \frac{1}{3}$$

(2)

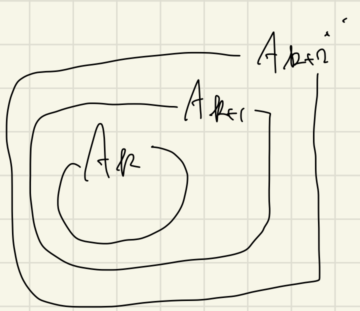
$$\begin{cases} a + \frac{1}{9} = c \\ a + \frac{4}{9} = b \\ \frac{4}{9} + d = 1 - c \end{cases} \qquad \therefore\ c = \frac{5}{9} - d,\quad a = \frac{4}{9} - d,\quad b = \frac{8}{9} - d$$

問8

事象 $A_k\ (k=1,2,\dots)$ について $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ であるから、

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= 1 - P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right) \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k^c) \qquad \square \end{aligned}$$

問9



$A_k\ (k=1,2,\dots)$ が単調増大列のとき、

$$\begin{cases} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \\ \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k = A_m \end{cases} \quad (\text{for all } m \geq 1)$$

よって

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

単調減少列のときは

$$\begin{cases} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k = A_m \\ \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \end{cases} \quad (\text{for all } m \geq 1)$$

であるから同様にして $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ $\square$

問10

単調減少列 A_k $(k=1,2,\cdots)$ について A_k^c は単調増大列なので

$$\lim_{k\to\infty} P(A_k^c) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right) \qquad (\because \text{命題} 1.10)$$

$$= P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c\right)$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

$$\lim_{k\to\infty} P(A_k^c) = 1 - \lim_{k\to\infty} P(A_k) \qquad \therefore P\left(\lim_{k\to\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} P(A_k)$$

□

問11

(1) $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ は単調減少列であるから,

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(B_n) \qquad (\because \text{問}10)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$$

$$= 0 \qquad \left(\because \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty\right)$$

$$\therefore \underline{P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0}$$

□

(2) $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1 \iff P(\liminf_{n\to\infty} A_n^c) = 0$

$\iff P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = 0$ である.

$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c$ は単調増大列なので,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c$$

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) &= \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} P(A_k^c) && (\because 独立性) \\
&= \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} \{1 - P(A_k)\} \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} \exp\{-P(A_k)\} && (\because 1 - P(A_k) \leq \exp(-P(A_k))) \\
&= \lim_{m\to\infty} \exp\left\{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)\right\} \\
&= 0 && \left(\because \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = 0$$

□