



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DELL'AQUILA



Agenzia
Spaziale
Italiana

Note Tecniche Estese su integrazione INS/GNSS

**Note tecniche estese da utilizzare
nei Rapporti Tecnici**

Costanzo Manes

XX YYY 2023

Indice

1	Introduzione	3
2	INS/GNSS coupling	3
3	IMU integration	4
3.1	Stimatore dell'assetto separato dal calcolo della posizione	4
3.2	Approccio Eagleye	4
4	Matlab	5
A	Tempi e formati temporali	6
B	Determinazione della posizione dei satelliti	7
B.1	Parametri orbitali	7
C	Le correzioni degli errori sugli pseudorange	8
C.1	Correzioni sull'orbita	8
C.2	Correzioni sul clock	8
D	Modelli cinematici del veicolo a quattro ruote	9
D.1	Cinematica angolare di un veicolo (corpo rigido)	9
D.2	Integrazione con le misure di odometria e dell'angolo di sterzata	13
E	Integrazione tra IMU/odometria/SAS	14
E.1	Modelli per l' odometria e sensore dell'angolo di sterzo	14
E.1.1	Le equazioni dell'odometria e dell'angolo di sterzata	19
E.2	Un metodo per la generazione di traiettorie di test	23
F	Modellistica delle IMU e caratterizzazione degli errori	28
F.1	La densità spettrale del rumore e la Allan Variance	30
F.2	Generalità su rumore bianco, processi di Wiener e random walk	31
F.2.1	Processi aleatori a tempo discreto	31
F.2.2	Processi aleatori a tempo continuo	33
F.3	Rumore bianco e processo di Wiener nei sensori inerziali	40
F.4	Giroscopi	46
F.5	Accelerometri	49
F.6	Esempi	49
F.6.1	Testi e Riferimenti	49
F.7	Sistemi di riferimento e IMU	50
F.8	Materiale di riferimento sull'argomento	52

G	La derivazione delle equazioni di navigazione	52
G.1	Legame tra posizione e velocità in coordinate non inerziali	52
G.2	Equazioni di Navigazione in coordinate ECEF	57
G.3	Note sui riferimenti della sezione	60
H	Trasformazioni tra sistemi di Coordinate	60
I	Gravitazione e Gravità	62
J	Formule ulteriori...	62
J.1	Alcuni sviluppi in serie....forse utili?	62
	Riferimenti bibliografici	64

1 Introduzione

Link al report [Report_RAV1_28-07-2022](#)

Link al report su overleaf [Report_RAV2_14-12-2022](#)

Questo documento, denominato *ASI_note_tecniche_estese*, contiene materiale da esporre nella redazione dei rapporti tecnici ASI del progetto ASI: *Ricerca e Sviluppo di soluzioni basate sull'integrazione sinergica di tecnologie RAIL & ROAD* (CUP F15F21002290005).

2 INS/GNSS coupling

Figure da utilizzare per le generalità su accoppiamento lasco (Loose) e stretto (tight) tra INS e GNSS.

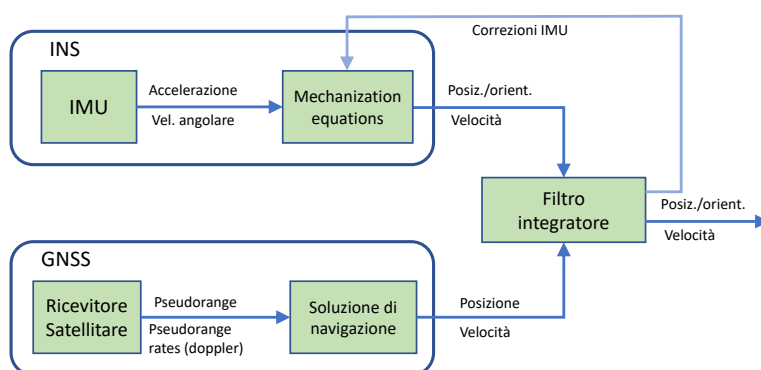


Figure 1: Struttura di un filtro con integrazione lasca (Loosely Coupled) INS/GNSS.

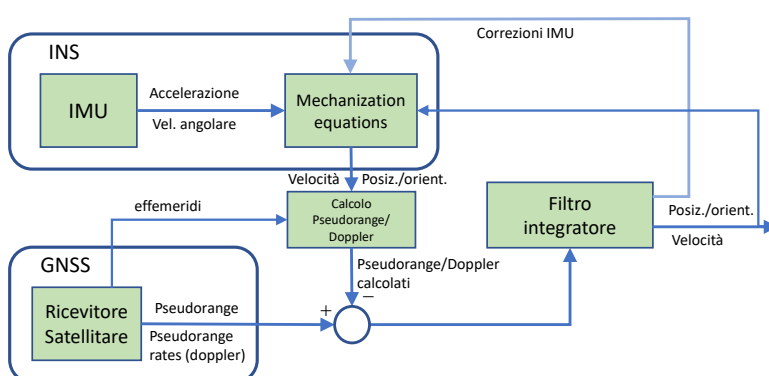


Figure 2: Struttura di un filtro con integrazione stretta (Tightly Coupled) INS/GNSS.

Vedere anche le figure su [Report_RAV2_14-12-2022](#)

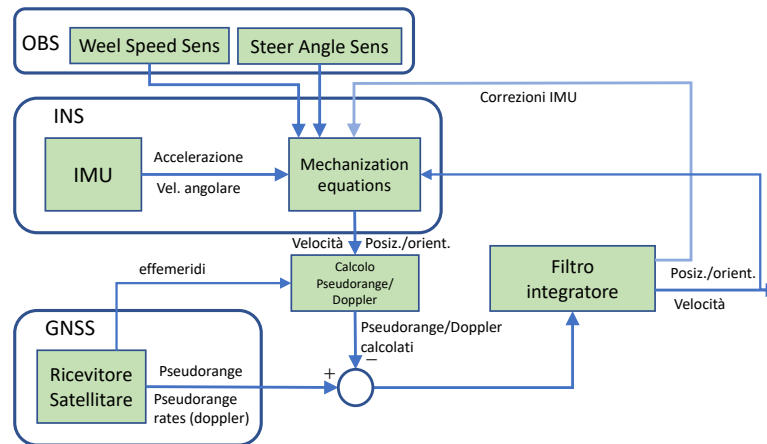


Figure 3: Struttura di un filtro con integrazione stretta (Tightly Coupled) INS/GNSS/Odometria.

3 IMU integration

Diverse possibilità.

3.1 Stimatore dell'assetto separato dal calcolo della posizione

Approccio in cui l'assetto viene stimato preliminarmente alla fusione con i dati da GNSS.

3.2 Approccio Eagleye

Articoli riguardanti l'approccio Eagleye: Meguro, Kojima et al. [2012](#); Meguro, Arakawa et al. [2018](#); Takanose, Takikawa et al. [2020](#); Takikawa et al. [2021](#); Takanose, Kitsukawa et al. [2021](#).

Approccio che accumula dati per decine di secondi per avere prestazioni migliori rispetto alle diverse varianti del filtro di Kalman, che seguono un approccio sequenziale. Accumulando dati si gestisce meglio il multipath urbano.

Invece di stima simultanea della posizione, orientamento e velocità del veicolo, viene eseguita l'integrazione separate e vengono fornite stime compatibili (da verificare).

La velocità del veicolo alla ruota viene calcolata moltiplicando la velocità di rotazione per il raggio nominale della ruota. Il toolbox Eagleye corregge la velocità con un fattore di scala SF , imputabile al consumo della gomma e alla pressione di gonfiaggio.

I calcoli riportati nell'articolo Takanose, Kitsukawa et al. [2021](#) sono abbastanza approssimati e fanno leva su diverse ipotesi semplificative. Tra queste, l'ipotesi che durante il moto del veicolo il piano $x-y$ del body-frame coincida con il piano $x-y$ del navigation frame, e pertanto la sola velocità angolare misurabile dalla IMU sia la rotazione attorno all'asse z (UP, nel sistema di navigazione ENU). Pertanto, la velocità di yaw della IMU può essere integrata per fornire l'angolo di yaw Ψ_{gyro} a partire da un angolo Ψ_{init} noto, o ricostruibile sulla base della sequenza degli angoli di heading forniti dal GNSS.

Non viene fatta una buona analisi degli errori commessi. Spiegazioni generiche.

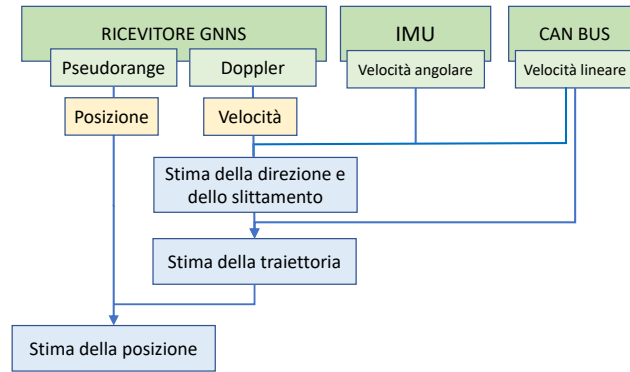


Figure 4: Struttura dello stimatore utilizzato nel framework Eagleye.

Anche la stima del bias del giroscopio (solo yaw) non è chiara.

Sideslip angle: angolo di slittamento laterale è l'angolo tra la direzione del veicolo e la direzione della ruota.

Nota: in realtà ci sono 4 sideslip angles, uno per ruota.

L'algoritmo Eagleye utilizza il modello a due ruote (bicicletta). Viene riportata una formula generica che mette in relazione l'angolo di slittamento, in cui non solo appaiono parametri geometrici (distanza tra asse anteriore e posteriore del veicolo), ma anche parametri dinamici, come la massa del veicolo, la posizione del centro di massa e il coefficiente della forza laterale della ruota posteriore (cornering power).

Va osservato che la differenza tra l'angolo di direzione del veicolo (heading angle o yaw) fornito dal GNSS e quello fornito dall'integrazione della IMU dipende anche dallo sideslip angle. Se le due misure fossero corrette lo sideslip angle sarebbe esattamente la differenza tra le due.

Formula semplice: accelerazione centrifuga $v^2/r = \omega^2 r = v\omega$. Si ipotizza che l'angolo di sideslip sia proporzionale all'accelerazione centrifuga:

$$\beta = -K\dot{\Psi}v.$$

La stima dell'angolo di sideslip β e della direzione del veicolo Ψ_h (rispetto al nord), insieme alla velocità misurata alla ruota v_w corretta con il fattore di scala s_f , consentono il calcolo numerico della traiettoria nel piano East-North con integrazione approssimata da sommatoria.

$$p_e(t_k) = p_e(t_0) + \sum_{i=0}^{k-1} s_f \cdot v_w(t_i) \sin(\Psi_h(t_i) + \beta(t_i))(t_{i+1} - t_i),$$

$$p_n(t_k) = p_n(t_0) + \sum_{i=0}^{k-1} s_f \cdot v_w(t_i) \cos(\Psi_h(t_i) + \beta(t_i))(t_{i+1} - t_i),$$

4 Matlab

[ground-vehicle-pose-estimation-for-tightly-coupled-imu-gnss.html](https://github.com/cmanes/ground-vehicle-pose-estimation-for-tightly-coupled-imu-gnss.html)

A Tempi e formati temporali

UTC (Coordinated Universal Time/Temps Universel Coordonné) conosciuto anche come GMT (Greenwich Mean Time), o Zulu time (Zulu: codice fonetico per Z), è il tempo del fuso orario di riferimento. Il *Local time* differisce da UTC per un numero di ore che dipende dal fuso orario di della zona considerata.

GPS time è un tempo che dipende dagli orologi atomici presenti nel segmento di controllo di terra del sistema GPS.

Il tempo GPS viene contato a partire dalle ore 0 del 6 gennaio 1980, e poiché non viene modificato con i secondi addizionali (o di salto, leap seconds) il tempo GPS adesso è 18 secondi avanti rispetto al tempo UTC.

TAI (Temps Atomique International/International Atomic Standard) è la scala di tempi internazionale basata sul conteggio dei secondi SI (International System of Units), ed è generata dalla media di oltre 200 standard atomici, appartenenti ad altre 50 laboratori. Lo standard Atomico al Cesio assicura una accuratezza di $\pm 1 \cdot 10^{-11}$ (ovvero, ± 1 secondo ogni 3.171 anni). TAI è stato poi sincronizzato ad UTC, ma nel frattempo ha accumulato 37 secondi di anticipo.

Il *Leap Second* (secondo intercalare) è il salto di 1 secondo che viene aggiunto di tanto in tanto a UTC per tenere conto del rallentamento della rotazione terrestre al fine di mantenere UTC sincrono con il tempo dettato dalla rotazione terrestre UT (Universal Time, nelle versioni UT1 e UT2). L'inserzione del Leap Second nel tempo UTC viene annunciata con 6 mesi d'anticipo da IERS (International Rotation and Reference System Service). Il Leap second è stato introdotto nel 1972 e da allora è stato applicato 27 volte.

Il tempo UT (Universal Time, detto anche UT1 o *Earth Rotation Time*), tempo universale, è una scala dei tempi basata sulla rotazione della Terra. Deriva dal Greenwich Mean Time (GMT), cioè dal giorno solare medio sopra il meridiano di Greenwich (meridiano zero). È calcolato come una misura dell'angolo di rotazione terrestre ERA (Earth Rotation Angle) rispetto a ICRF (International Celestial Reference Frame). È il moderno sostituto del GMST (Greenwich Mean Sidereal Time).

Formati:

Il tempo GPS viene contato in settimane (week), specificando i secondi dall'inizio della settimana (SOW: second-of-week). La settimana comincia alla mezzanotte tra sabato e domenica (giorno 0 della settimana). La week 0 è stata la prima settimana del tempo GPS, dal 6 gennaio 1980 (era una domenica, quindi giorno 0). I secondi in una settimana sono 604.800 ($60 \times 60 \times 24 \times 7$). A volte i SOW sono divisi in DOW (Day of Week), tra 0 (domenica) e 6 (sabato), e SOD (Second of Day), numero tra 0 e 86400 ($24 \times 60 \times 60$).

Alcune codifiche del tempo GPS:

- WWWWD: 4 cifre per il Week Number, e una cifra per il giorno, da 0 a 6. Esempio: 16671
- lunedì della settimana numero 1667;
- YYDDD: 2 cifre per l'anno e 3 per il giorno. Esempio: 19101 = giorno 101 dell'anno 2019;

Nel messaggio GPS il numero di settimane è codificato in un campo a 10 bit, che quindi può conteggiare 1024 settimane, circa 19 anni e mezzo. Superate le 1024 settimane si ha l'azzeramento del campo (week rollover). Il primo rollover è avvenuto il 26 agosto 1999 (19 anni e mezzo dal 6.01.1980). Il secondo rollover è avvenuto il 6 aprile 2019.

POSIX timestamp (Unix Epoch Time): conteggio di secondi a partire dal 1 Gennaio 1970 alle ore 00:00:00 UTC (formato POSIX: Portable Operating System Interface for Unix). Il tempo Unix ha superato il 1.000.000.000 il 9 settembre 2001, ed aumenta di esattamente 86400 s al giorno ($24 \times 60 \times 60$) (giorno UTC). Il tempo UNIX viene aggiornato con i *leap second*, ed è quindi allineato con UTC (operativamente, i leap second positivi vengono sottratti al tempo Unix e al tempo UTC, mentre il GPS time va avanti regolarmente).

L'ultimo Leap Second è stato aggiunto al tempo UTC alla mezzanotte del 31 dicembre 2016, data in cui il tempo GPS si è portato avanti di 18 secondi rispetto a UTC. Precedentemente i Leap Second sono stati aggiunti alla mezzanotte dei seguenti giorni: 30/06/2015, 30/06/2012, 31/12/2008, 31/12/2005. È importante quindi sapere che la trasformazione dal tempo UTC al tempo GPS si fa aggiungendo un numero di secondi diverso a seconda del periodo (18 secondi a partire dal 01/01/2017 0h; 17 secondi tra il 01/07/2015 e il 01/01/2017; 16 secondi tra il 01/01/2009 e il 30/06/2012, e così via).

Da 01 Gennaio 2017 0h: TAI-UTC = 37 sec, GPS-UTC = 18 sec.

Altri timestamp usati sono il JD (Julian Date), il MJD (Modified Julian Date) e il TJD (Truncated Julian Date), un conteggio del numero dei giorni, con frazione, a partire da una certa data. Il Julian Date conta i giorni da mezzogiorno del 1 gennaio 4.173 a.C. (ogni secolo sono circa 36.525 giorni). Poiché alle ore 00:00:00 del 17 nov. 1858 sono passati 2.400.000.5 giorni, e solo nel 1 sett. 2132 si arriverà a 2.500.000.5 giorni, il MJD si ottiene dal JD semplicemente sottraendo il numero 2.400.000.5. In sostanza, il MJD è il conteggio dei giorni a partire dalla mezzanotte del 17 nov. 1858. Il TJD sottrae ulteriori 40.000 giorni al JD, e pertanto conta i giorni a partire dalla mezzanotte del 24 maggio 1968.

<http://www.csqnetwork.com/julianmodifdateconv.html>

B Determinazione della posizione dei satelliti

In questa sezione sono riportate le formule e le procedure che permettono di ricostruire la posizione dei satelliti, in particolare della costellazione NAVSTAR GPS.

B.1 Parametri orbitali

Vedi FAA documento: [Describing Orbits](#)
oppure [Corso: Introduction to Orbital Elements](#)

I 6 parametri *Kepleriani* che definiscono l'orbita ellittica di un satellite sono:

- il semiasse maggiore a (definisce la grandezza dell'orbita);
- l'eccentricità e (definisce la forma dell'orbita);
- l'orientamento dell'orbita rispetto alla terra è descritto da:

- inclinazione i del piano orbitale rispetto al piano equatoriale;
 - l'ascensione retta del nodo ascendente Ω rispetto al punto γ definisce la posizione del piano orbitale;
 - l'argomento del perigeo ω (angolo dal punto Ω al perigeo) definisce l'orientamento dell'orbita nel piano orbitale;
- l'anomalia vera $v(t)$ è l'angolo che dal perigeo fornisce la posizione del satellite sull'ellisse.

L'ascensione retta del nodo ascendente (Right Ascension of the Ascending Node, RAAN) è l'angolo misurato sul piano equatoriale compreso tra la direzione del *punto d'Ariete* (punto γ o equinozio vernale) e il nodo ascendente dell'orbita. L'angolo *anomalia vera* (true anomaly) $v(t)$ è l'angolo tra la posizione del satellite e il perigeo, visto dal fuoco principale (centro della terra).

Poiché l'orbita dei satelliti per la navigazione è quasi circolare, l'argomento del perigeo ω non è ben definito, e per questo motivo spesso si usano altre parametrizzazioni dell'orbita.

Poiché a causa di numerose cause le traiettorie dei satelliti non sono ellissi perfette, sono necessari ulteriori parametri correttivi per calcolare la posizione esatta dei satelliti. I parametri correttivi sono calcolati dal segmento di controllo e aggiornati con cadenza oraria.

C Le correzioni degli errori sugli pseudorange

I ricevitori GNSS forniscono ad istanti di tempo regolari, chiamati *epoche*, gli pseudorange relativi ai satelliti in visibilità *agganciati*. Tipicamente la frequenza delle epoche è di 1 Hz, ma nei ricevitori più avanzati c'è la possibilità di impostare frequenze superiori, come 10 o 20 Hz). Come è noto, lo pseudorange è la distanza *nominale*, misurata in metri, percorsa dal segnale prima di arrivare al ricevitore. È quindi la distanza nominale tra la posizione del satellite (all'istante di trasmissione del segnale) e il ricevitore (all'istante di ricezione del segnale). Si parla di distanza nominale in quanto ci sono diverse fonti di errore che fanno sì che non sia la distanza reale. E infatti i ricevitori multifrequenza forniscono uno pseudorange diverso per ogni frequenza. Lo pseudorange $P_{r,i}^s$ tra satellite s e ricevitore nella banda L_i fornito dal ricevitore è calcolato com

$$P_{r,i}^s = c \cdot (t_r - t_s), \quad (1)$$

dove t_r è il tempo ricevitore (epoca) affetto da errore, e t_s è il tempo satellite (anch'esso affetto da errore) che il ricevitore ha ricostruito sulla base del tempo di trasmissione contenuto nel messaggio di navigazione e l'avanzamento del messaggio stesso al tempo t_r . c è la velocità della luce nel vuoto.

C.1 Correzioni sull'orbita

....

C.2 Correzioni sul clock

Gli errori di clock del satellite sono trasmessi nel messaggio di navigazione in forma di coefficienti di un polinomio.

....
....

D Modelli cinematici del veicolo a quattro ruote

In questa appendice vengono riportati alcuni modelli per la descrizione del moto del veicolo, basati solo sulla conoscenza dei parametri cinematici. Questi modelli sono utili sia in fase di progetto del filtro che nella fase di simulazione. Vengono esclusi i modelli di tipo dinamico, in quanto estremamente più complessi, caratterizzati da un elevato numero di parametri, che per lo più sono incerti o soggetti a variazioni durante l'utilizzo del veicolo (ad esempio i parametri sulla massa e sulla distribuzione della massa nel veicolo, che dipendono dal numero e dalla disposizione dei passeggeri, i parametri relativi alle forze di interazione tra pneumatici e strada, che dipendono dal consumo del battistrada e dalle caratteristiche del fondo stradale, i parametri relativi alle sospensioni, e così via). Inoltre, l'utilizzo dei modelli dinamici richiede anche una conoscenza completa di tutte le forze agenti sul veicolo. Queste osservazioni sono confermate dalla letteratura scientifica sull'integrazione del GNSS con sistemi di navigazione inerziale.

D.1 Cinematica angolare di un veicolo (corpo rigido)

Una parametrizzazione molto diffusa dell'orientamento di un veicolo è quella che utilizza gli angoli di Roll-Pitch-Yaw (RPY, in breve), che indicheremo con $\Theta = (\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z)$. Essi definiscono l'orientamento del *Body Frame* bS (o *Vehicle Frame*) rispetto al *Navigation Frame* nS (ENU o NED). La matrice nR_b è interpretabile sia come matrice che opera la rotazione di nS in bS , sia come matrice che cambia le coordinate da bS in nS :

$${}^nR_b = R(\Theta) = R_z(\vartheta_z)R_y(\vartheta_y)R_x(\vartheta_x), \quad (2)$$

in cui R_x , R_y e R_z sono le matrici che rappresentano le rotazioni elementari attorno agli assi coordinati. Indicando, per brevità, $\sin(\vartheta)$ con $s\vartheta$ e $\cos(\vartheta)$ con $c\vartheta$, il prodotto tra le tre matrici R_x , R_y e R_z ha la seguente espressione:

$$R(\Theta) = \begin{bmatrix} c\vartheta_z & -s\vartheta_z & 0 \\ s\vartheta_z & c\vartheta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\vartheta_y & 0 & s\vartheta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\vartheta_y & 0 & c\vartheta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\vartheta_x & -s\vartheta_x \\ 0 & s\vartheta_x & c\vartheta_x \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Svolgendo il prodotto tra le tre matrici si ha

$$R(\Theta) = \begin{bmatrix} c\vartheta_z c\vartheta_y & c\vartheta_z s\vartheta_y s\vartheta_x - s\vartheta_z c\vartheta_x & c\vartheta_z s\vartheta_y c\vartheta_x + s\vartheta_z s\vartheta_x \\ s\vartheta_z c\vartheta_y & s\vartheta_z s\vartheta_y s\vartheta_x + c\vartheta_z c\vartheta_x & s\vartheta_z s\vartheta_y c\vartheta_x - c\vartheta_z s\vartheta_x \\ -s\vartheta_y & c\vartheta_y s\vartheta_x & c\vartheta_y c\vartheta_x \end{bmatrix} \quad (4)$$

Nota: per un utilizzo corretto degli angoli RPY nella rappresentazione dell'orientamento è molto importante stabilire la regola con cui vengono eseguite le tre rotazioni. Le rotazioni eseguite nei calcoli riportati sono attorno ad assi fissi (gli assi di nS) nella sequenza: 1) Roll

ϑ_x , 2) Pitch ϑ_y , 3) Yaw ϑ_z , ovvero

- 1: rotazione di ϑ_x attorno a \mathbf{x}_n (nota: $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_b$);
- 2: rotazione di ϑ_y attorno a \mathbf{y}_n ;
- 3: rotazione di ϑ_z attorno a \mathbf{z}_n .

La stessa matrice ${}^nR_b = R(\Theta)$ data dalla (4) si ottiene se si considera la sequenza di rotazioni in ordine inverso, ovvero 1) Yaw, 2) Pitch, 3) Roll, ma rispetto agli assi del sistema di riferimento ruotato bS :

- 1: rotazione di ϑ_z attorno a \mathbf{z}_b (nota: $\mathbf{z}_b = \mathbf{z}_n$);
- 2: rotazione di ϑ_y attorno a \mathbf{y}_b ;
- 3: rotazione di ϑ_x attorno a \mathbf{x}_b .

In molti testi gli angoli RPY vengono indicati con i simboli (ϕ, θ, ψ) . Spesso l'angolo di yaw viene indicato con la maiuscola Ψ , Inoltre, a volte viene considerata una sequenza di rotazioni inversa rispetto a quella considerata.

Purtroppo, molto spesso nei manuali dei dispositivi di navigazione inerziale o negli articoli scientifici riguardanti la navigazione inerziale, non c'è molta chiarezza sulla rappresentazione dell'orientamento, e spesso vengono seguite regole non standard. Ad esempio, nel manuale del software *Waypoint* della Novatel, con riferimento ad una IMU Novatel, viene detto che la rappresentazione angolare utilizzata è roll-pitch-yoaw, ed è scritto che: "The order of rotations employed is Rz, then Rx, followed by Ry, in decimal degree units". A parte il fatto che la sequenza yaw-roll-pitch non è comunemente utilizzata in letteratura, on viene chiarito se le rotazioni sono effettuate attorno ad assi coordinati fissi o attorno agli assi ruotati, solidali con il veicolo.

Tra l'altro, la Novatel suggerisce una scelta particolare del riferimento sul veicolo, ovvero con asse y_b diretto in avanti, l'asse z_b diretto verso l'alto, e l'asse x_b che punta sul lato destro del veicolo. Nel manuale del software *Waypoint* è riportata la figura 5, in cui si capiscono le coordinate da considerare per definire il *lever arm* che definisce la posizione dell'antenna GNSS rispetto alla posizione della IMU

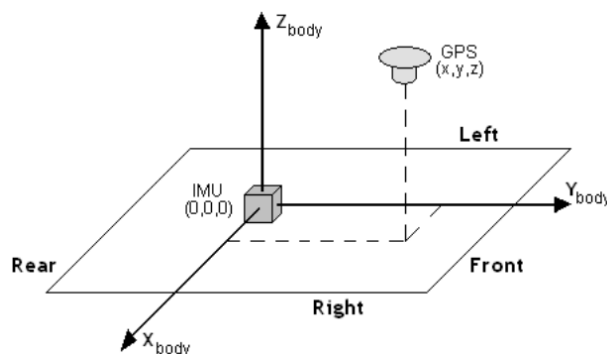


Figure 5: Il body-frame secondo Novatel e definizione del lever arm dell'antenna.

Se utilizziamo Roll-Pitch-Yaw con la convenzione precedentemente descritta, i legami tra la velocità angolare nelle coordinate del navigation frame ${}^N\mathcal{S}$ e le derivate degli angoli RPY sono i seguenti:

$${}^N\boldsymbol{\omega}_{nb} = {}^NG(\Theta)\dot{\Theta}, \quad \dot{\Theta} = {}^NG^{-1}(\Theta) {}^N\boldsymbol{\omega}_{nb}, \quad (5)$$

dove

$${}^NG(\Theta) = \begin{bmatrix} c\vartheta_y c\vartheta_z & -s\vartheta_z & 0 \\ c\vartheta_y s\vartheta_z & c\vartheta_z & 0 \\ -s\vartheta_y & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^NG^{-1}(\Theta) = \begin{bmatrix} \frac{c\vartheta_z}{c\vartheta_y} & \frac{s\vartheta_z}{c\vartheta_y} & 0 \\ -s\vartheta_z & c\vartheta_z & 0 \\ \frac{s\vartheta_y}{c\vartheta_y} c\vartheta_z & \frac{s\vartheta_y}{c\vartheta_y} s\vartheta_z & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Nota: l'inversa ${}^NG^{-1}$ esiste fintanto che $|{}^NG(\Theta)| = c\vartheta_y \neq 0$, ovvero $c\vartheta_y \in (-\pi/2, \pi/2)$, condizione sempre verificata in campo automobilistico.

Nell'integrazione delle misure provenienti dai giroscopi per ottenere gli angoli RPY si usa la relazione che lega ${}^b\boldsymbol{\omega}_{nb}$ a $\dot{\Theta}$:

$$\dot{\Theta} = {}^bG^{-1}(\Theta) {}^b\boldsymbol{\omega}_{nb}, \quad \text{con} \quad {}^bG^{-1}(\Theta) = {}^NG^{-1}(\Theta) {}^NR_b(\Theta) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{s\vartheta_y}{c\vartheta_y} s\vartheta_x & \frac{s\vartheta_y}{c\vartheta_y} c\vartheta_x \\ 0 & c\vartheta_x & -s\vartheta_x \\ 0 & \frac{s\vartheta_x}{c\vartheta_y} & \frac{c\vartheta_x}{c\vartheta_y} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Per completezza, riportiamo le formule nel caso di angoli RPY calcolati sempre nell'ordine x - y - z , ma stavolta attorno agli assi del corpo (assi ruotati). In questo caso indicheremo gli angoli con una barra sopra $\bar{\Theta} = (\bar{\vartheta}_x, \bar{\vartheta}_y, \bar{\vartheta}_z)$. Svolgendo il prodotto $\bar{R}(\bar{\Theta}) = R_x(\bar{\vartheta}_x)R_z(\bar{\vartheta}_y)R_z(\bar{\vartheta}_z)$ si ha

$$\bar{R}(\bar{\Theta}) = \begin{bmatrix} c\bar{\vartheta}_y c\bar{\vartheta}_z & -c\bar{\vartheta}_y s\bar{\vartheta}_z & s\bar{\vartheta}_y \\ c\bar{\vartheta}_x s\bar{\vartheta}_z + c\bar{\vartheta}_z s\bar{\vartheta}_x s\bar{\vartheta}_y & c\bar{\vartheta}_x c\bar{\vartheta}_z - s\bar{\vartheta}_x s\bar{\vartheta}_y s\bar{\vartheta}_z & -c\bar{\vartheta}_y s\bar{\vartheta}_x \\ s\bar{\vartheta}_x s\bar{\vartheta}_z - c\bar{\vartheta}_x c\bar{\vartheta}_z s\bar{\vartheta}_y & c\bar{\vartheta}_z s\bar{\vartheta}_x + c\bar{\vartheta}_x s\bar{\vartheta}_y s\bar{\vartheta}_z & c\bar{\vartheta}_x c\bar{\vartheta}_y \end{bmatrix} \quad (8)$$

Il legame tra le derivate degli angoli RPY e la velocità angolare del veicolo nel sistema ${}^N\mathcal{S}$ adesso è il seguente

$${}^N\boldsymbol{\omega}_{Nb} = {}^N\bar{G}(\bar{\Theta})\dot{\bar{\Theta}}, \quad \text{con} \quad {}^N\bar{G}(\bar{\Theta}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s\bar{\vartheta}_y \\ 0 & c\bar{\vartheta}_x & -c\bar{\vartheta}_y s\bar{\vartheta}_x \\ 0 & s\bar{\vartheta}_x & c\bar{\vartheta}_y c\bar{\vartheta}_x \end{bmatrix}, \quad |{}^N\bar{G}(\bar{\Theta})| = c\vartheta_y, \quad (9)$$

$$\dot{\bar{\Theta}} = {}^N\bar{G}^{-1}(\bar{\Theta}) {}^N\boldsymbol{\omega}_{Nb}, \quad \text{con} \quad {}^N\bar{G}^{-1}(\bar{\Theta}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{s\bar{\vartheta}_y}{c\bar{\vartheta}_y} s\bar{\vartheta}_x & -\frac{s\bar{\vartheta}_y}{c\bar{\vartheta}_y} c\bar{\vartheta}_x \\ 0 & c\bar{\vartheta}_x & s\bar{\vartheta}_x \\ 0 & -\frac{s\bar{\vartheta}_x}{c\bar{\vartheta}_y} & \frac{c\bar{\vartheta}_x}{c\bar{\vartheta}_y} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

La relazione tra ${}^b\boldsymbol{\omega}_{Nb}$ a $\dot{\bar{\Theta}}$ è:

$$\dot{\bar{\Theta}} = {}^b\bar{G}^{-1}(\bar{\Theta}) {}^b\boldsymbol{\omega}_{Nb}, \quad \text{con} \quad {}^b\bar{G}^{-1}(\bar{\Theta}) = {}^N\bar{G}^{-1}(\bar{\Theta}) {}^NR_b(\bar{\Theta}) = \begin{bmatrix} \frac{c\bar{\vartheta}_z}{c\bar{\vartheta}_y} & -\frac{s\bar{\vartheta}_z}{c\bar{\vartheta}_y} & 0 \\ s\bar{\vartheta}_z & c\bar{\vartheta}_z & 0 \\ -\frac{s\bar{\vartheta}_y}{c\bar{\vartheta}_y} c\bar{\vartheta}_z & \frac{s\bar{\vartheta}_y}{c\bar{\vartheta}_y} s\bar{\vartheta}_z & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Ricordando che ${}^NR_b = [{}^n\mathbf{x}_b \ {}^n\mathbf{y}_b \ {}^n\mathbf{z}_b]$ and ${}^bR_n = {}^nR_b^\top = [{}^b\mathbf{x}_n \ {}^b\mathbf{y}_n \ {}^b\mathbf{z}_n]$, nel caso in cui si consideri il riferimento ENU, le coordinate del versore up (\mathbf{z}_n) nel Body Frame sono

$${}^b\mathbf{z}_n = \begin{bmatrix} -s\vartheta_y \\ c\vartheta_y s\vartheta_x \\ c\vartheta_y c\vartheta_x \end{bmatrix}, \quad (12)$$

Come si vede, le tre coordinate non dipendono dall'angolo di yaw ϑ_z . Un accelerometro con i tre assi perfettamente allineati al body frame, supponendo che l'accelerazione di gravità sia esattamente nella direzione dell'asse \mathbf{z}_n , in assenza di bias, e nell'ipotesi di veicolo fermo o a velocità costante fornirebbe le tre misure:

$$\mathbf{a}_s = \begin{bmatrix} a_{s,x} \\ a_{s,y} \\ a_{s,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g s\vartheta_y \\ g c\vartheta_y s\vartheta_x \\ g c\vartheta_y c\vartheta_x \end{bmatrix} = -{}^b\mathbf{g}. \quad (13)$$

Secondo queste ipotesi, tenendo conto che in ambito automobilistico l'angolo di pitch (inclinazione del veicolo rispetto al piano $\mathbf{x}_n\text{-}\mathbf{y}_n$) è contenuta entro poche decine di gradi, e quindi sicuramente $\theta_y \in (-\pi/2, \pi/2)$, si ha sempre $\sqrt{a_{s,y}^2 + a_{s,z}^2} = g c\vartheta_y \geq 0$. Pertanto, dalla misura dell'accelerometro si possono ottenere immediatamente gli angoli di Roll e Pitch:

$$\begin{aligned} s\vartheta_x &= \text{atan2}(a_{s,y}, a_{s,z}), \\ s\vartheta_y &= \text{atan2}\left(-a_{s,x}, \sqrt{a_{s,y}^2 + a_{s,z}^2}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Nell'articolo Rehinder e Hu 2004 queste proprietà vengono utilizzate per la stima parziale dell'assetto nelle applicazioni in cui è più importante determinare l'inclinazione di un oggetto rispetto al piano orizzontale (angoli di Roll e Pitch) piuttosto che l'orientamento rispetto al nord (angolo di Yaw), come ad esempio nei robot walking robots e negli UAV a elica, per i quali è molto importante la stima del piano orizzontale.

Nel caso di corpi accelerati la misura fornita dall'accelerometro (in assenza di bias) è

$$\mathbf{a}_s = {}^nR_b^\top ({}^n\ddot{\mathbf{r}}_{nb} + g {}^n\mathbf{z}_n) = {}^bR_n {}^n\ddot{\mathbf{r}}_{nb} + g {}^b\mathbf{z}_n. \quad (15)$$

L'equazione che fornisce la dinamica della matrice di rotazione ${}^bR_n(t)$ in funzione della velocità angolare misurate dal giroscopio nel body frame, indicata con ${}^b\boldsymbol{\omega}_{nb}$, è:

$${}^b\dot{R}_n = -[{}^b\boldsymbol{\omega}_{nb} \times] {}^bR_n. \quad (16)$$

Da questa si può estrarre la dinamica del vettore ${}^b\mathbf{z}_n(t)$ (la terza colonna della matrice ${}^bR_n(t)$), che scritta insieme all'equazione di misura diventa

$$\dot{{}^b\mathbf{z}}_n(t) = -[{}^b\boldsymbol{\omega}_{nb}(t) \times] {}^b\mathbf{z}_n(t), \quad (17)$$

$$\mathbf{a}_s(t) = g {}^b\mathbf{z}_n(t) + w(t), \quad \text{con } w(t) = {}^bR_n(t) {}^n\ddot{\mathbf{r}}_{nb}(t). \quad (18)$$

Il termine additivo $w(t) = {}^bR_n(t) {}^n\ddot{\mathbf{r}}_{nb}(t)$ sulla misura fornita dagli accelerometri nei veicoli a bassa accelerazione è considerato un disturbo. L'idea sviluppata in Rehinder e Hu 2004 è di considerare inaffidabile la misura quando la norma della misura $\|\mathbf{a}_s(t)\|$ fornita dall'accelerometro è sostanzialmente diversa da g . Nella sostanza, solo quando $\|\mathbf{a}_s(t)\| \approx g$ per un tempo sufficientemente lungo, allora la misura \mathbf{a}_s viene impiegata in un filtro di Kalman esteso per aggiornare la stima del versore ${}^b\mathbf{z}_n(t)$. Nella discretizzazione dell'equazione (17) viene utilizzata la formula di Rodrigues: data una velocità angolare $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ e un passo di campionamento T , nell'ipotesi che la velocità angolare sia costante durante tutto l'intervallo di campionamento si ha:

$$\begin{aligned} e^{[\boldsymbol{\omega} \times]T} &= \frac{\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}^\top}{\boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{\omega}} + \left(I_3 - \frac{\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}^\top}{\boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{\omega}} \right) \cos(\|\boldsymbol{\omega}\|T) + \frac{1}{\|\boldsymbol{\omega}\|} [\boldsymbol{\omega} \times] \sin(\|\boldsymbol{\omega}\|T) \\ &= I_3 \cos(\|\boldsymbol{\omega}\|T) + \left(1 - \cos(\|\boldsymbol{\omega}\|T) \right) \frac{\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}^\top}{\boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{\omega}} + \frac{1}{\|\boldsymbol{\omega}\|} [\boldsymbol{\omega} \times] \sin(\|\boldsymbol{\omega}\|T). \end{aligned} \quad (19)$$

In molti testi il legame tra letture dell'accelerometro e accelerazione viene riportato utilizzando le notazioni nautiche per la velocità di traslazione e di rotazione del body-frame:

$${}^b\dot{\mathbf{r}} = {}^nR_b^\top {}^n\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}, \quad {}^b\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Occorre fare attenzione al fatto che, con queste notazioni, la derivata rispetto al tempo del vettore ${}^b\dot{\mathbf{r}}$, che indicheremo ${}^b\dot{\mathbf{r}}' = [\dot{U} \ \dot{V} \ \dot{W}]^\top$, non è la rappresentazione dell'accelerazione $\ddot{\mathbf{r}}$ nel body-frame, che invece indichiamo con ${}^b\ddot{\mathbf{r}} = {}^nR_b^\top \ddot{\mathbf{r}}$.

Si ha infatti

$${}^b\ddot{\mathbf{r}} = {}^b\dot{\mathbf{r}}' + [{}^b\boldsymbol{\omega} \times] {}^b\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}. \quad (21)$$

D.2 Integrazione con le misure di odometria e dell'angolo di sterzata

Modelli della cinematica del veicolo (motion models).

Posizione e velocità in coordinate ECEF (in Petovello 2003; Zhang e Gao 2008

....

Scelta dei riferimenti come in figura 6

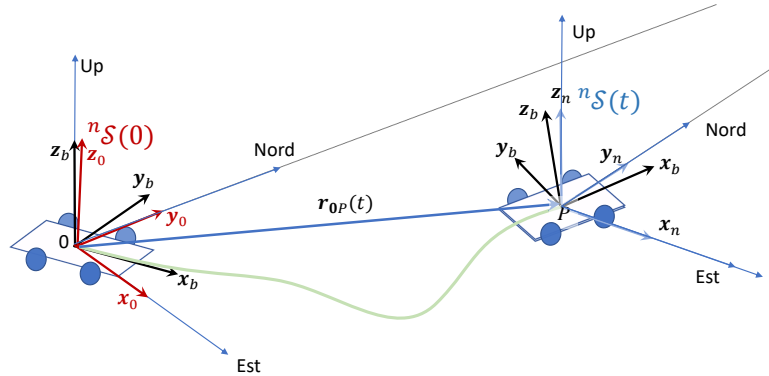


Figure 6: Posizione del punto P del veicolo (posizione IMU, origine del body-frame e del navigation frame) definita come spostamento rispetto alla posizione che il veicolo aveva all'istante 0 (sistema di riferimento di navigazione ${}^nS(t)$, per $t = 0$).

Riportiamo di seguito un modello standard di meccanizzazione delle misure di accelerazione e velocità angolare acquisite con un'Unità di Misura Inerziale (IMU) low-cost. Il modello descrive il moto del punto P del veicolo dove è collocato l'accelerometro. L'equazione (15) descrive la misura dell'accelerometro in assenza di bias e di rumore di misura. L'inclusione di questi due elementi nel modello porta ad una più realistica equazione di misura;

$$\mathbf{a}_s(t) = {}^nR_b^\top(t) \left({}^n\ddot{\mathbf{r}}_{nb}(t) + g {}^n\mathbf{z}_n \right) + b_a(t) + \tilde{\nu}_a(t), \quad (22)$$

in cui $b_a(t)$ indica il bias dell'accelerometro e $\tilde{\nu}_a(t)$ il rumore di misura a media nulla. Dalla (22) si ricava l'accelerazione del punto P nelle coordinate del navigation-frame in funzione

della matrice di rotazione, del bias dell'accelerometro e del rumore di misura:

$${}^n\ddot{\mathbf{r}}_{nb}(t) = {}^nR_b(t)(\mathbf{a}_s(t) - b_a) - g {}^n\mathbf{z}_n + \nu_a(t), \quad (23)$$

dove $\nu_a(t) = -{}^nR_b(t)\tilde{\nu}_a$ è il rumore di forzamento del motion model utilizzato (se le tre componenti del rumore $\tilde{\nu}_a(t)$ sono i.i.s., ovvero indipendenti e con la stessa varianza, allora $\nu_a(t)$ ha la stessa distribuzione di $\tilde{\nu}_a(t)$ grazie al fatto che la matrice a moltiplicare è ortonormale). Nella pratica, per ricavare le accelerazioni da integrare si userà una stima della matrice di rotazione e del bias, ponendo inevitabilmente a zero il rumore bianco di misura $\nu_a(t)$.

Per l'orientamento del veicolo si considera il seguente modello, che utilizza la rappresentazione RPY:

....

Questo modello non considera le velocità angolari ω_{ie} (rotazione di ECEF rispetto a ECI) e ω_{en} (rotazione del navigation frame rispetto a ECEF), in quanto troppo piccole per essere catturate dai giroscopi consumer-grade.

....

E Integrazione tra IMU/odometria/SAS

L'integrazione tra le misure fornite dalla IMU con quelle fornite dall'odometria, ed eventualmente con quelle fornite dal sensore dell'angolo di sterzo (SAS), deve essere fatta con l'obiettivo di rispettare per quanto possibile i vincoli imposti dal modello cinematico del veicolo.

Sono possibili numerose alternative, sia in base al modello che viene scelto per la cinematica del veicolo, sia ai modelli utilizzati per i sensori e sia in base alle misure che sono effettivamente disponibili.

A proposito di questo ultimo aspetto, considereremo le seguenti situazioni:

- disponibili solo le misure della IMU
- disponibili le misure della IMU e l'odometria delle ruote posteriori
- disponibili le misure della IMU e l'odometria di tutte le 4 ruote del veicolo
- disponibili le misure della IMU, l'odometria di tutte le ruote, e l'angolo di sterzo

E.1 Modelli per l' odometria e sensore dell'angolo di sterzo

(Questa parte è stata riportata nel Report RAV2: [Report_RAV2_14-12-2022](#))

Sono state aggiunte alcune precisazioni...

Nei moderni autoveicoli sono disponibili le misure delle velocità di tutte e quattro le ruote, in quanto queste sono misure necessarie per il sistema ABS (Anti-lock braking System). I sensori, montati sul mozzo o sull'asse delle ruote, ne misurano le velocità di rotazione, e vengono chiamati WSS (Wheel Speed Sensor), e sono in genere degli encoder magnetici, costituiti in generale da una ruota dentata o da una ruota magnetica e da un pick-up che rileva le variazioni di campo magnetico. La conoscenza del raggio della ruota permette il calcolo della velocità di traslazione del centro della ruota.

Nella discussione che verrà fatta, si considera un veicolo con le sole ruote anteriori sterzanti.

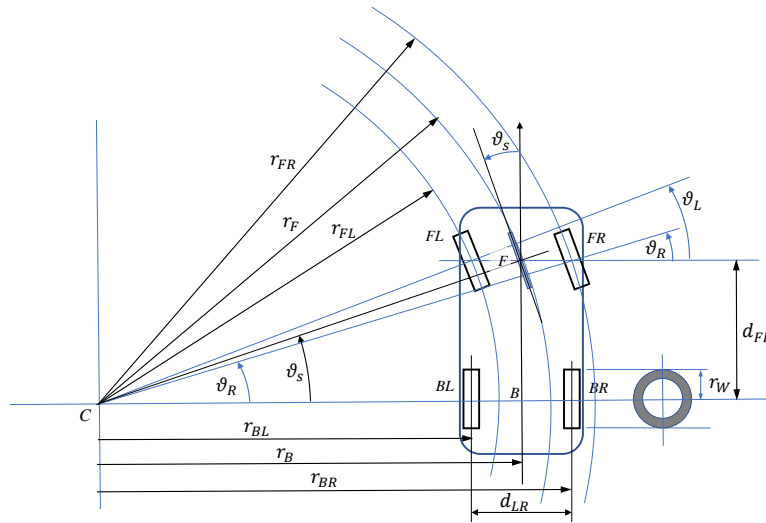


Figure 7: Quantità utili nel modello dell'auto sterzante.

Codice dei pedici utilizzati nelle formule e nelle figure:

FL: Front Left; FR: Front Right;

BL: Back Left; BR: Back Right.

Lista delle variabili:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega_v : & \text{Velocità angolare del veicolo (componente di yaw);} \\ v_{FL}, v_{FR} : & \text{Velocità di traslazione dei centri delle ruote anteriori (Front);} \\ v_{BL}, v_{BR} : & \text{Velocità di traslazione dei centri delle ruote posteriori (Back);} \\ d_{LR} : & \text{distanza tra i centri delle ruote sullo stesso asse (larghezza dell'asse);} \\ d_{FB} : & \text{distanza tra l'asse anteriore e l'asse posteriore (passo o interasse);} \end{array} \right. \quad (24)$$

Le velocità dei centri delle ruote si calcolano, ipotizzando assenza di slittamento, tramite il prodotto della velocità di rotazione della ruota (misurata dal WSS) per il raggio della ruota.

Il rapporto tra la velocità di traslazione di un punto del veicolo e il raggio di curvatura della traiettoria è pari alla velocità angolare del veicolo. Applicando questo concetto ai centri delle quattro ruote si hanno le seguenti relazioni:

$$\omega_v = \frac{v_{BL}}{r_{BL}} = \frac{v_{BR}}{r_{BR}} = \frac{v_{FL}}{r_{FL}} = \frac{v_{FR}}{r_{FR}}. \quad (25)$$

Nota: le notazioni utilizzate in questa sezione per i quattro raggi di curvatura ($r_{FR}, r_{FL}, r_{BR}, r_{BL}$) non vanno confuse con le notazioni utilizzate nelle sezioni precedenti per indicare spostamenti tra due punti. Le velocità delle quattro ruote si ottengono dai sensori WSS, moltiplicando la misura della velocità di rotazione di ogni ruota per il raggio della ruota stessa. Sono invece incognite le distanze delle ruote dal centro di rotazione (raggi di curvatura delle traiettorie). Va osservato che la velocità angolare del veicolo ω_v è positiva se il veicolo ruota in senso antiorario, e negativa se ruota in senso orario. Analogamente i raggi di curvatura possono essere positivi o negativi, a seconda se il centro di curvatura si trova a sinistra della ruota (raggio positivo) o a destra (raggio negativo).

La conoscenza delle velocità delle ruote posteriori v_{BR} e v_{BL} è sufficiente per calcolare la velocità angolare del veicolo, Dalla differenza tra le velocità delle due ruote posteriori si ha:

$$v_{BR} - v_{BL} = \omega_v r_{BR} - \omega_v r_{BL}, \Rightarrow \omega_v = \frac{v_{BR} - v_{BL}}{r_{BR} - r_{BL}} \quad (26)$$

Si osservi che il la differenza $r_{BR} - r_{BL}$ è sempre positiva ed è pari alla distanza d_{LR} tra le ruote posteriori, ovvero $r_{BR} - r_{BL} = d_{LR}$. Si ha pertanto

$$\omega_v = \frac{v_{BR} - v_{BL}}{d_{LR}}, \quad (27)$$

A questo punto è anche possibile calcolare i raggi di curvatura r_{BL} e r_{BR} :

$$\begin{aligned} r_{BL} &= \frac{v_{BL}}{\omega_v} = d_{LR} \frac{v_{BL}}{v_{BR} - v_{BL}}, \\ r_{BR} &= \frac{v_{BR}}{\omega_v} = d_{LR} \frac{v_{BR}}{v_{BR} - v_{BL}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Si osservi che nel caso $v_{BR} = v_{BL}$ i raggi di curvatura sono infiniti, ed è per questo che è preferibile sempre utilizzare nei calcoli l'inverso del raggio di curvatura.

La velocità v_B di traslazione del punto B , centro dell'asse delle ruote posteriori è data dal valore medio tra le velocità v_{BL} e v_{BR} . Il raggio di curvatura istantaneo del percorso del punto B , che chiameremo r_B , può essere calcolato sapendo che v_B è anche data dal prodotto di $\omega_v r_B$:

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{v_{BL} + v_{BR}}{2} \Rightarrow r_B = \frac{v_B}{\omega_v} = \frac{d_{LR} (v_{BL} + v_{BR})}{2 (v_{BR} - v_{BL})}, \\ v_B &= \omega_v r_B \end{aligned} \quad (29)$$

Per quanto riguarda i raggi di curvatura delle traiettorie delle ruote anteriori si hanno le seguenti relazioni:

$$r_{FL} \cos(\vartheta_L) = r_{BL}, \quad r_{BR} \cos(\vartheta_R) = r_{BR}. \quad (30)$$

L'angolo ϑ_S indicato nelle figure 7 e 8 è l'angolo associato ad una terza ruota sterzante *virtuale*. La compatibilità dei tre angoli $\vartheta_L, \vartheta_S, \vartheta_R$ con un unico centro istantaneo di rotazione del veicolo si ottiene analizzando i tre triangoli rettangoli evidenziati nella figura 8. Dalle proprietà trigonometriche dei triangoli rettangoli si hanno le tre relazioni

$$\frac{d_{FB}}{r_{BL}} = \tan(\vartheta_L), \quad \frac{d_{FB}}{r_B} = \tan(\vartheta_S), \quad \frac{d_{FB}}{r_{BR}} = \tan(\vartheta_R). \quad (31)$$

Si definisce come angolo di sterzata del veicolo l'angolo ϑ_S che avrebbe una ruota virtuale posizionata al centro dell'asse anteriore, compatibile con la curvatura imposta dalla coppia di angoli ϑ_L, ϑ_R , e si calcola quindi come

$$\vartheta_S = \arctan\left(\frac{d_{FB}}{r_B}\right) = \arctan\left(2 \frac{d_{FB}}{d_{LR}} \frac{(v_{BR} - v_{BL})}{(v_{BR} + v_{BL})}\right). \quad (32)$$

Il Sensore dell'Angolo di Sterzata (SAS: Steering Angle Sensor) è un sensore che misura fisicamente la rotazione angolare del piantone dello sterzo, e che, se opportunamente calibrato, restituisce l'angolo di sterzata ϑ_S della ruota virtuale posta al centro dell'asse anteriore.

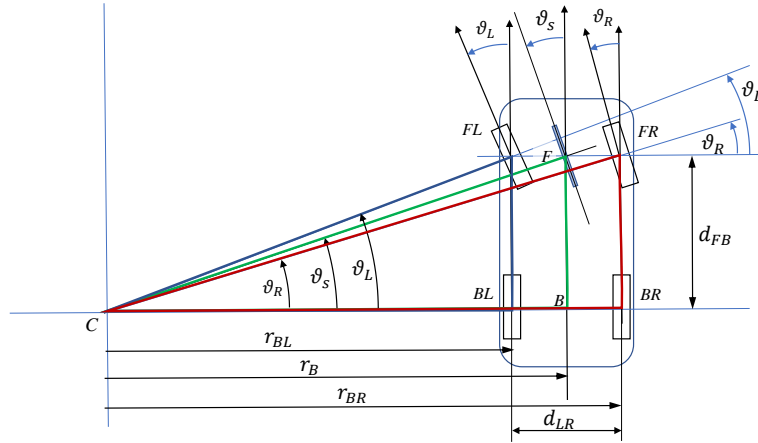


Figure 8: Nella figura sono evidenziati tre triangoli rettangoli, utili per ricavare le relazioni tra i tre angoli $\vartheta_L, \vartheta_S, \vartheta_R$.

Tuttavia, come si vede dall'equazione (32), l'angolo di sterzata ϑ_S può essere efficacemente calcolato a partire dalle velocità delle ruote posteriori e dalla conoscenza della larghezza dell'asse d_{LR} e dalla distanza d_{FB} tra asse anteriore e posteriore. Queste informazioni in realtà forniscono immediatamente anche la velocità angolare del veicolo ω_v , mediante la formula (27).

In sostanza si ha che le informazioni sulle velocità delle quattro ruote del veicolo e dell'angolo di sterzata appaiono ridondanti. Considerato che sono misure, e in quanto tali affette da rumore, in teoria potrebbero essere utilizzate per ridurre l'incertezza sulla stima della velocità angolare (componente di yaw). Purtroppo però i legami tra le varie grandezze sono nonlineari, e non è evidente ricavare una procedura per ridurre l'errore sulla variabile stimata. Occorre inoltre osservare che nel caso di veicoli a trazione anteriore, la stima delle velocità dei centri delle ruote anteriori sulla base della velocità di rotazione è meno affidabile rispetto all'analogica stima fatta per le ruote posteriori, semplicemente perché le ruote motrici sono le più soggette allo slittamento, e in questo caso il calcolo della velocità di traslazione a partire da quella di rotazione non è attendibile. Le ruote posteriori invece, essendo passive, offrono un legame più attendibile tra le velocità di rotazione e traslazione.

Se si volesse usare l'informazione del sensore SAS, occorre considerare le formule che a partire dall'angolo ϑ_S restituiscono gli angoli di sterzata delle ruote destra e sinistra. Le formule si ricavano a partire dai tre rapporti (31), tenendo conto che

$$r_{BL} = r_B - \frac{d_{LR}}{2}, \quad r_{BR} = r_B + \frac{d_{LR}}{2}, \quad r_B = \frac{d_{FB}}{\tan(\vartheta_S)}. \quad (33)$$

Sostituendo le espressioni precedenti nelle (31) si ha

$$\begin{aligned} \tan(\vartheta_L) &= \frac{d_{FB}}{\frac{d_{FB}}{\tan(\vartheta_S)} - \frac{d_{LR}}{2}} = \tan(\vartheta_S) \frac{d_{FB}}{d_{FB} - \frac{d_{LR}}{2} \tan(\vartheta_S)} \\ \tan(\vartheta_R) &= \frac{d_{FB}}{\frac{d_{FB}}{\tan(\vartheta_S)} + \frac{d_{LR}}{2}} = \tan(\vartheta_S) \frac{d_{FB}}{d_{FB} + \frac{d_{LR}}{2} \tan(\vartheta_S)}. \end{aligned} \quad (34)$$

E infine

$$\begin{aligned}\vartheta_L &= \arctan\left(\frac{2d_{FB} \sin(\vartheta_S)}{2d_{FB} \cos(\vartheta_S) - d_{LR} \sin(\vartheta_S)}\right) \\ \vartheta_R &= \arctan\left(\frac{2d_{FB} \sin(\vartheta_S)}{2d_{FB} \cos(\vartheta_S) + d_{LR} \sin(\vartheta_S)}\right).\end{aligned}\quad (35)$$

A partire dagli angoli ϑ_L e ϑ_R calcolati con le formule (35) è possibile calcolare i versori del piano x - y del veicolo (body frame) che danno le direzioni delle velocità delle ruote. Si riportano di seguito le rappresentazioni nelle coordinate del b -frame dei versori delle velocità delle quattro ruote di un veicolo nel caso in cui il body frame venga scelto secondo la convenzione che vede l'asse x_b nella direzione di marcia del veicolo, l'asse y_b lateralmente sulla sinistra e l'asse z_b verso l'alto (allineato con ENU quando il veicolo procede verso EST):

$${}^b n_{FL}(\vartheta_L) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_L \\ \sin \vartheta_L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^b n_{FR}(\vartheta_R) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_R \\ \sin \vartheta_R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^b n_{BL} = {}^b n_{BR} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

I vettori velocità nel body frame sono quindi

$$\begin{aligned}{}^b v_{FL} &= v_{FL} {}^b n_{FL}, & {}^b v_{FR} &= v_{FR} {}^b n_{FR}, \\ {}^b v_{BL} &= v_{BL} {}^b n_{BL}, & {}^b v_{BR} &= v_{BR} {}^b n_{BR}.\end{aligned}\quad (37)$$

Le quattro velocità (37) sono calcolabili a partire dalle misure dell'odometria e dell'angolo di sterzata, e possono costituire le equazioni di misura da associare al modello di navigazione utilizzato, contribuendo così al miglioramento della stima della velocità del veicolo, sia lineare v_V che angolare ω_v (e quindi anche della posizione). Va considerato però che durante la guida spesso c'è differenza tra la traiettoria impostata mediante l'angolo di sterzo, e la traiettoria effettivamente eseguita. Le cause di questa differenza sono svariate. Le principali sono a la forza centrifuga in curva, le forze generate dalla trazione, le forze che si creano durante una frenata, l'inclinazione del piano stradale. Sotto queste azioni la gomma si deforma, cambiando la superficie di contatto con la strada, e può slittare. L'angolo formato tra la direzione del movimento dettata dall'orientamento della ruota (quella che si avrebbe in assenza di slittamento e deformazione) e la reale direzione di movimento della ruota, prende il nome di *angolo di deriva*, detto anche di slittamento (Slip Angle, in inglese). Nella figura 9 sono rappresentati gli angoli di deriva delle quattro ruote reali e di quella virtuale, indicati con la lettera α , e disegnati in rosso. La stima degli angoli di deriva è stata, ed è tuttora, un tema molto studiato in ambito automotive (alcuni lavori recenti: Milanese et al. 2014; Canale et al. 2014; Chindamo et al. 2018; Liu et al. 2020; Park 2022). Per ottenerla in modo affidabile in generale occorre utilizzare il modello dinamico del veicolo, il modello elastico delle ruote e le caratteristiche del fondo stradale. Quindi, oltre alla conoscenza dei parametri geometrico-cinematici del veicolo, occorre conoscerne anche i parametri dinamici, come la massa, la posizione del centro di massa, la matrice di inerzia, nonché le caratteristiche delle gomme e del fondo stradale. Per poter utilizzare le misure dell'angolo di sterzata e delle velocità delle ruote in un algoritmo di stima di posizione e velocità del veicolo basato su parametri unicamente geometrico-cinematici, viene in genere ipotizzato che gli angoli di deriva, o le cause degli angoli di deriva, siano dei disturbi stocastici.

Qui termina la parte riportata nel Report RAV2: [Report_RAV2_14-12-2022](#)

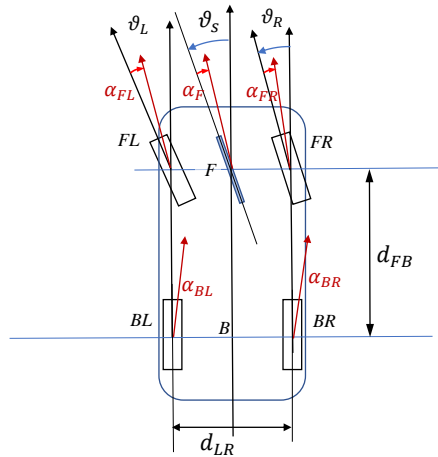


Figure 9: In rosso, con la lettera α , sono rappresentati gli angoli di deriva delle ruote di un veicolo, compresa la ruota *virtuale* tra le due ruote sterzanti.

E.1.1 Le equazioni dell'odometria e dell'angolo di sterzata

[Questa parte è nuova, da inserire nel RAV 3]

In questa sezione viene sviluppato un modello che descrive il legame matematico tra il moto del veicolo e le misure odometriche sulle ruote, provenienti dai quattro WSP (Wheel Speed Sensors) e la misura dell'angolo di sterzata¹. Di seguito riportiamo il legame tra steer angle ϑ_S e gli angoli di sterzo della ruota sinistra ϑ_L e destra ϑ_R ricavati nello studio preliminare relazionato sul Report RA2_14-12-1022. Dalle formule (88) e (89) del Report RA2_14-12-1022, si ha

$$\begin{aligned}\tan \vartheta_L &= \frac{2d_{FB} \sin(\vartheta_S)}{2d_{FB} \cos(\vartheta_S) - d_{LR} \sin(\vartheta_S)} \\ \tan \vartheta_R &= \frac{2d_{FB} \sin(\vartheta_S)}{2d_{FB} \cos(\vartheta_S) + d_{LR} \sin(\vartheta_S)}.\end{aligned}\quad (38)$$

Definiamo le funzioni $f_L(\vartheta_S)$ e $f_R(\vartheta_S)$ come segue

$$\begin{aligned}f_L(\vartheta_S) &= \tan(\vartheta_L(\vartheta_S)) = \frac{\sin \vartheta_S}{\cos \vartheta_S - k_v \sin \vartheta_S}, \\ f_R(\vartheta_S) &= \tan(\vartheta_R(\vartheta_S)) = \frac{\sin \vartheta_S}{\cos \vartheta_S + k_v \sin \vartheta_S},\end{aligned}\quad \text{con } k_v = \frac{d_{LR}}{2d_{FB}}, \quad (39)$$

dove d_{LR} è la distanza tra ruota destra e sinistra (track width) e d_{FB} è la distanza tra gli assi anteriori e posteriori (wheelbase).

Nella sezione J.1 sono riportati gli sviluppi in serie delle funzioni $f_L(\vartheta_S)$ e $f_R(\vartheta_S)$, e anche di $\cos(\vartheta_L(\vartheta_S))$, $\cos(\vartheta_R(\vartheta_S))$, $\sin(\vartheta_L(\vartheta_S))$, $\sin(\vartheta_R(\vartheta_S))$... potrebbero servire?

¹Google nel 2011 ha brevettato un metodo basato sul feedback da mappe stradali per correggere la posizione ottenuta con accoppiamento stretto tra GPS e IMU (Road Map Feedback Corrections in Tightly Coupled GPS and Dead Reckoning Vehicle Navigation) <https://patents.google.com/patent/US20110208424>.

Come vedremo di seguito, nell'applicazione relativa all'integrazione delle misure di odometria con quelle della IMU sono richiesti il seno e il coseno degli angoli ϑ_L e ϑ_R , che possono essere calcolati in funzione dell'angolo ϑ_S . Dalle formule (39) si ricava

$$\begin{aligned}\sin \vartheta_L &= \sin(\vartheta_L(\vartheta_S)) = \frac{\sin(\vartheta_S)}{\text{den}_L(\vartheta_S)}, \\ \sin \vartheta_R &= \sin(\vartheta_R(\vartheta_S)) = \frac{\sin(\vartheta_S)}{\text{den}_R(\vartheta_S)}\end{aligned}\quad (40)$$

dove

$$\begin{aligned}\text{den}_L^2(\vartheta_S) &= (\cos \vartheta_S - k_v \sin \vartheta_S)^2 + \sin^2 \vartheta_S \\ &= 1 - 2k_v \sin \vartheta_S \cos \vartheta_S + k_v^2 \sin^2 \vartheta_S \\ &= 1 - k_v \sin(2\vartheta_S) + k_v^2 \sin^2 \vartheta_S \\ \text{den}_R^2(\vartheta_S) &= (\cos \vartheta_S + k_v \sin \vartheta_S)^2 + \sin^2 \vartheta_S \\ &= 1 + 2k_v \sin \vartheta_S \cos \vartheta_S + k_v^2 \sin^2 \vartheta_S \\ &= 1 + k_v \sin(2\vartheta_S) + k_v^2 \sin^2 \vartheta_S\end{aligned}\quad (41)$$

Possiamo adesso a ricavare le equazioni di misura relative alle velocità di ogni singola ruota. Come già fatto nel Report RA2, utilizzeremo i pedici *FL* e *FR* per indicare le quantità legate alle ruote Front Left e Front Right (anteriori sinistra e destra), ed i pedici *BL* e *BR* per indicare le quantità relative alle ruote Back Left e Back Right (posteriori sinistra e destra)².

Pertanto, indicheremo con:

- *P*: il punto del veicolo rispetto a cui si calcolano posizione e velocità;
- v_{FL}, v_{FR} : ampiezza delle velocità misurate alle ruote Front Left e Front Right;
- v_{BL}, v_{BR} : ampiezza delle velocità misurate alle ruote Back Left e Back Right;
- ${}^b\mathbf{r}_{P,FL}, {}^b\mathbf{r}_{P,FR}$: le posizioni dei centri ruota FL e FR rispetto al punto *P* nel body-frame;
- ${}^b\mathbf{r}_{P,BL}, {}^b\mathbf{r}_{P,BR}$: le posizioni dei centri ruota BL e BR rispetto al punto *P* nel body-frame;
- ${}^b\mathbf{u}_{FL}, {}^b\mathbf{u}_{FR}$: i versori delle direzioni di marcia delle ruote FL e FR nel body-frame;
- ${}^b\mathbf{u}_{BL}, {}^b\mathbf{u}_{BR}$: i versori delle direzioni di marcia delle ruote BL e BR nel body-frame;
- ${}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,FL}, {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,FR}$: le velocità dei centri delle ruote *FL* e *FR* rispetto al riferimento fisso 0S ;
- ${}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,BL}, {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,BR}$: le velocità dei centri delle ruote *BL* e *BR* rispetto al riferimento fisso 0S .

In questa trattazione 0S è un *local frame*, solidale con la terra (con ECEF, quindi), con l'asse z_0 orientato secondo la normale all'ellissoide WGS84 passante per l'origine di 0S (direzione approssimata della forza di gravità) e sufficientemente vicino alla posizione del veicolo da poter trascurare le variazioni di quota, rispetto all'ellissoide, del veicolo che si muova sul piano x_0 - y_0 . Essendo solidale con la terra, 0S è soggetto alla rotazione terrestre. Poiché questa rotazione non è rilevabile dalle IMU da tactical a consumer grade, nella derivazione del modello cinematico del veicolo e delle equazioni di misura, il riferimento 0S viene considerato fisso (riferimento inerziale).

Le quantità misurate sulle ruote sono i conteggi degli impulsi (tick) generati dalle *ruote foniche* (tone wheels). Conoscendo il numero di denti della ruota è facile risalire dalla frequenza

²Nella letteratura scientifica spesso si usa il termine *Rear* invece di *Back* per indicare le quantità relative alle quote posteriori. Per evitare confusione con la *R* di *Right*, preferiamo qui usare il termine *Back*.

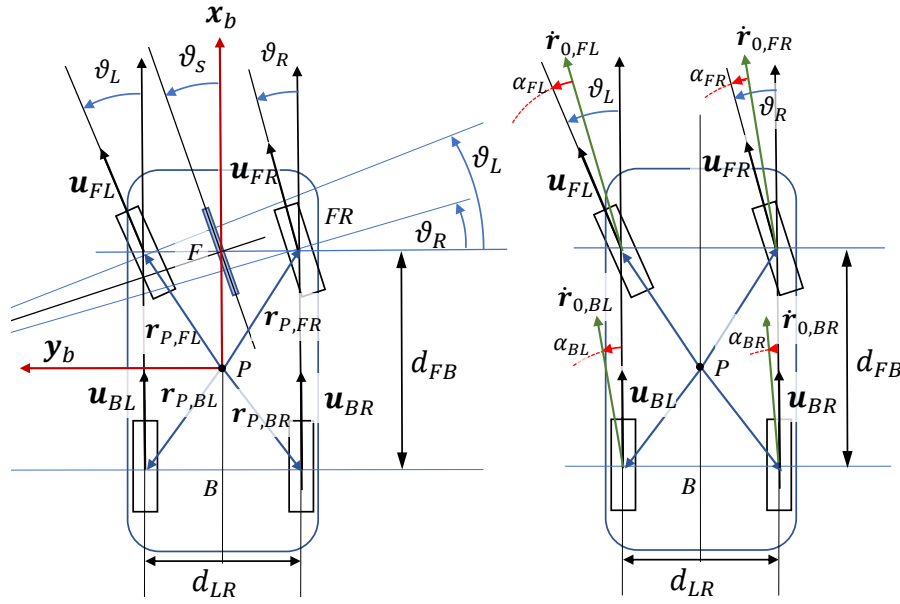


Figure 10: Definizione delle variabili reattive all'odometria del veicolo.

del conteggio alla velocità di rotazione. Da questa, conoscendo il diametro della ruota, si risale all'ampiezza della velocità del mozzo della ruota, in ipotesi di non slittamento. Indicheremo pertanto con la notazione v_{FL} , v_{FR} , v_{BL} , v_{BR} le velocità (scalari) misurate sulle quattro ruote. I vettori velocità dei centro ruote, rispetto al riferimento esterno 0S , indicati con $\dot{\mathbf{r}}_{0,FL}$, $\dot{\mathbf{r}}_{0,FR}$, $\dot{\mathbf{r}}_{0,BL}$, $\dot{\mathbf{r}}_{0,BR}$, sono calcolati nelle coordinate di bS nel modo seguente:

$$\begin{aligned} {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,FL} &= {}^0R_b^\top {}^0\dot{\mathbf{r}}_{0P} + [{}^b\boldsymbol{\omega}_{0b} \times] {}^b\mathbf{r}_{P,FL} = {}^0R_b^\top {}^0\dot{\mathbf{r}}_{0P} - [{}^b\mathbf{r}_{P,FL} \times] {}^b\boldsymbol{\omega}_{0b}, \\ {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,FR} &= {}^0R_b^\top {}^0\dot{\mathbf{r}}_{0P} + [{}^b\boldsymbol{\omega}_{0b} \times] {}^b\mathbf{r}_{P,FR} = {}^0R_b^\top {}^0\dot{\mathbf{r}}_{0P} - [{}^b\mathbf{r}_{P,FR} \times] {}^b\boldsymbol{\omega}_{0b}, \\ {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,BL} &= {}^0R_b^\top {}^0\dot{\mathbf{r}}_{0P} + [{}^b\boldsymbol{\omega}_{0b} \times] {}^b\mathbf{r}_{P,BL} = {}^0R_b^\top {}^0\dot{\mathbf{r}}_{0P} - [{}^b\mathbf{r}_{P,BL} \times] {}^b\boldsymbol{\omega}_{0b}, \\ {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,BR} &= {}^0R_b^\top {}^0\dot{\mathbf{r}}_{0P} + [{}^b\boldsymbol{\omega}_{0b} \times] {}^b\mathbf{r}_{P,BR} = {}^0R_b^\top {}^0\dot{\mathbf{r}}_{0P} - [{}^b\mathbf{r}_{P,BR} \times] {}^b\boldsymbol{\omega}_{0b}. \end{aligned} \quad (42)$$

Le equazioni di misura delle velocità delle ruote tengono conto del fatto che in genere è presente un *angolo di slittamento* (slip angle) tra la ruota e la superficie stradale, definito come l'angolo tra la direttrice della ruota (la direzione che avrebbe la velocità della ruota in assenza di slittamento), e la velocità effettiva del veicolo misurata al centro ruota (si veda la Figura 10).

Ad esempio, della velocità di traslazione ${}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,FL}$ del centro ruota FL, solo la componente lungo la direzione ${}^b\mathbf{u}_{FL}$ sarà legata alla velocità di rotazione della ruota, mentre la componente ortogonale sarà dovuta allo slittamento. Il sensore sulla ruota pertanto misurerà la sola componente di ${}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,FL}$ lungo ${}^b\mathbf{u}_{FL}$, ottenibile come prodotto scalare: ${}^b\mathbf{u}_{FL}^\top {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,FL}$ (il calcolo per le ruote FR, BL e BR è analogo). Pertanto, le equazioni di misura che legano la velocità misurata su ciascuna ruota con le velocità lineare e angolare del veicolo al punto P sono le

seguenti:

$$\begin{aligned}
 v_{FL} &= {}^b\mathbf{u}_{FL}^\top(\vartheta_S) {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,FL} + \nu_{FL} = {}^b\mathbf{u}_{FL}^\top(\vartheta_S) \left({}^0R_b^\top {}^0\dot{\mathbf{r}}_{0P} - [{}^b\mathbf{r}_{P,FL} \times] {}^b\boldsymbol{\omega}_{0b} \right) + \nu_{FL}, \\
 v_{FR} &= {}^b\mathbf{u}_{FR}^\top(\vartheta_S) {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,FR} + \nu_{FR} = {}^b\mathbf{u}_{FR}^\top(\vartheta_S) \left({}^0R_b^\top {}^0\dot{\mathbf{r}}_{0P} - [{}^b\mathbf{r}_{P,FR} \times] {}^b\boldsymbol{\omega}_{0b} \right) + \nu_{FR}, \\
 v_{BL} &= {}^b\mathbf{u}_{BL}^\top {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,BL} + \nu_{BL} = {}^b\mathbf{u}_{BL}^\top \left({}^0R_b^\top {}^0\dot{\mathbf{r}}_{0P} - [{}^b\mathbf{r}_{P,BL} \times] {}^b\boldsymbol{\omega}_{0b} \right) + \nu_{BL}, \\
 v_{BR} &= {}^b\mathbf{u}_{BR}^\top {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,BR} + \nu_{BR} = {}^b\mathbf{u}_{BR}^\top \left({}^0R_b^\top {}^0\dot{\mathbf{r}}_{0P} - [{}^b\mathbf{r}_{P,BR} \times] {}^b\boldsymbol{\omega}_{0b} \right) + \nu_{BR},
 \end{aligned} \tag{43}$$

dove con ν_{FL} , ν_{FR} , ν_{BL} e ν_{BR} si sono indicati generici rumori di misura³.

Di seguito riportiamo le espressioni dei versori ${}^b\mathbf{u}_{FL}(\vartheta_S)$, ${}^b\mathbf{u}_{FR}(\vartheta_S)$, in funzione dell'angolo di sterzo ϑ_S , e dei versori ${}^b\mathbf{u}_{BL}$ e ${}^b\mathbf{u}_{BR}$:

$${}^b\mathbf{u}_{FL}(\vartheta_S) = \begin{bmatrix} \cos(\tilde{\delta}_L(\vartheta_S)) \\ \sin(\tilde{\delta}_L(\vartheta_S)) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^b\mathbf{u}_{FR}(\vartheta_S) = \begin{bmatrix} \cos(\tilde{\delta}_R(\vartheta_S)) \\ \sin(\tilde{\delta}_R(\vartheta_S)) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^b\mathbf{u}_{BL} = {}^b\mathbf{u}_{BR} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Le funzioni $\tilde{\delta}_L(\vartheta_S)$ e $\tilde{\delta}_R(\vartheta_S)$ che forniscono le inclinazioni delle ruote anteriori in funzione degli angoli di sterzo sono quelle riportate in (192) (risultano essere sufficientemente accurate anche considerando i polinomi solo fino al terzo ordine).

Si osservi che le misure v_{FL} , v_{FR} , v_{BL} e v_{BR} provenienti dai quattro sensori WSS (Wheel Speed Sensors) sulle ruote sono funzioni lineari della velocità di traslazione ${}^0\dot{\mathbf{r}}_{0P}$ del veicolo (nelle coordinate di 0S) e della sua velocità angolare ${}^b\boldsymbol{\omega}_{0b}$, nelle coordinate del body frame bS . Sono invece funzioni non lineari degli angoli di Roll-Pitch-Yaw, utilizzati per costruire la matrice di rotazione 0R_b .

Risultato aggiuntivo: Una buona stima della velocità del veicolo (${}^0\dot{\mathbf{r}}_{0P}$, ${}^b\boldsymbol{\omega}_{0b}$) consente di stimare gli angoli di slittamento di ciascuna ruota. I calcoli da fare sono basati sulla seguente formula, che, dati due vettori $a, b \in \mathbb{R}^2$, consentono di calcolare l'angolo α di cui va ruotato a per sovrapporlo a b :

$$\alpha = \text{atan2}(a \times b, a^\top b) = \text{atan2}(a_x b_y - a_y b_x, a_x b_x + a_y b_y), \tag{45}$$

che deriva dalle seguenti formule che coinvolgono il prodotto scalare e il prodotto vettoriale tra a e b :

$$\cos(\alpha) = a^\top b = a_x b_x + a_y b_y, \quad \sin(\alpha) = a \times b = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x. \tag{46}$$

Definendo i seguenti vettori in \mathbb{R}^2

$$k_{FL} = \begin{bmatrix} {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,FL,x} \\ {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,FL,y} \end{bmatrix}, \quad k_{FR} = \begin{bmatrix} {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,FR,x} \\ {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,FR,y} \end{bmatrix}, \quad k_{BL} = \begin{bmatrix} {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,BL,x} \\ {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,BL,y} \end{bmatrix}, \quad k_{BR} = \begin{bmatrix} {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,BR,x} \\ {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0,BR,y} \end{bmatrix} \tag{47}$$

³Ad essere precisi, i sensori sulle ruote forniscono la frequenza degli impulsi (tick) rilevati dalla ruota fonica. Da questa, conoscendo la spaziatura angolare tra i denti della ruota ($\gamma = 2\pi/N$ rad, dove N è il numero di denti della ruota fonica) e il raggio esterno dello pneumatico (R_P) è possibile calcolare la velocità di traslazione del centro ruota con la formula: $v = \gamma R_P f_T / 60$ m/s (f_T è il numero di tick al minuto). Il parametro più incerto in questa formula è il raggio R_P , che può variare sia in funzione del consumo che della pressione di gonfiaggio. Se si volesse tenere conto di questa fonte di incertezza, si dovrebbero inserire i raggi dei quattro pneumatici tra i parametri da stimare.

ed i versori

$$v_{FL}(\vartheta_S) = \begin{bmatrix} \cos(\tilde{\delta}_L(\vartheta_S)) \\ \sin(\tilde{\delta}_L(\vartheta_S)) \end{bmatrix}, \quad v_{FR}(\vartheta_S) = \begin{bmatrix} \cos(\tilde{\delta}_R(\vartheta_S)) \\ \sin(\tilde{\delta}_R(\vartheta_S)) \end{bmatrix}, \quad v_{BL} = v_{BR} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

i quattro angoli di slittamento si calcolano facilmente

$$\begin{aligned} \alpha_{FL} &= \text{atan2}(v_{FL}(\vartheta_S) \times k_{FL}, v_{FL}(\vartheta_S)^\top k_{FL}), & \alpha_{FR} &= \text{atan2}(v_{FR}(\vartheta_S) \times k_{FR}, v_{FR}(\vartheta_S)^\top k_{FR}), \\ \alpha_{BL} &= \text{atan2}(v_{BL} \times k_{FL}, v_{BL}^\top k_{BL}), & \alpha_{BR} &= \text{atan2}(v_{BR} \times k_{BR}, v_{BR}^\top k_{BR}). \end{aligned} \quad (49)$$

Tenendo conto della semplice struttura di v_{BL} e v_{BR} , gli angoli α_{BL} e α_{BR} si calcolano semplicemente con

$$\alpha_{BL} = \text{atan2}(\dot{b}_{0,BL,y}, \dot{b}_{0,BL,x}), \quad \alpha_{BR} = \text{atan2}(\dot{b}_{0,BR,y}, \dot{b}_{0,BR,x}). \quad (50)$$

Le formule (43) costituiscono alcune delle equazioni di misura del modello del veicolo. L'informazione data dalla conoscenza dell'angolo di sterzo ϑ_S è utilizzata in due delle equazioni di misura (43). Le altre misure effettuate sul veicolo sono quelle della IMU. Chiameremo $\mathbf{a}_s \in \mathbb{R}^3$ la lettura dell'accelerometro e $\boldsymbol{\omega}_s \in \mathbb{R}^3$ la lettura del giroscopio. Le relazioni che legano le due letture con la vera accelerazione e la vera velocità angolare del veicolo nel punto P in cui è collocata la IMU sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_s &= {}^0R_b^\top ({}^0\ddot{\mathbf{r}}_{0P} + g^0 \mathbf{z}_0) + b_a + \nu_a, \\ \boldsymbol{\omega}_s &= {}^b\boldsymbol{\omega}_{0b} + b_\omega + \nu_\omega, \end{aligned} \quad (51)$$

in cui $b_a \in \mathbb{R}^3$ e $b_\omega \in \mathbb{R}^3$ sono i bias dell'accelerometro e del giroscopio, rispettivamente, e ν_a e ν_b generici rumori di misura.

Poiché la velocità angolare ${}^b\boldsymbol{\omega}_{0b}$ appare anche nelle equazioni (43) relative alle misure di velocità sulle ruote, ${}^b\boldsymbol{\omega}_{0b}$ deve essere necessariamente incluso tra le variabili di stato del modello. Anche i bias b_a e b_ω devono essere inclusi tra le variabili di stato. La lettura dell'accelerometro è invece legata all'accelerazione del veicolo, che non è una variabile di stato, e pertanto sarà utilizzata nel *vehicle motion model* per calcolare la predizione della posizione del veicolo (Dead Reckoning).

Le equazioni del *vehicle motion model* saranno di seguito scritte rispetto ad un sistema di navigazione ENU agganciato ad una posizione fissa, assimilandolo ad un sistema inerziale, ovvero ignorando, per semplicità, effetti del secondo ordine come la rotazione terrestre. Per la rappresentazione angolare saranno utilizzati gli angoli di Roll-Pitch-Yaw. Pertanto, le equazioni considerate sono ...

....

E.2 Un metodo per la generazione di traiettorie di test

Per poter calibrare e verificare il funzionamento degli algoritmi di navigazione su dati noti e con diversi valori delle incertezze ed errori di misura, è stato messo a punto un programma di generazione di traiettorie di veicoli in MATLAB. Il programma sviluppato, pur essendo

relativamente semplice, riesce a produrre traiettorie e misure con un livello adeguato di verosimiglianza a situazioni reali da renderlo appunto utilizzabile per mettere alla prova algoritmi di navigazione.

La traiettoria del veicolo è generata mediante equazioni differenziali che utilizzano il modello del triciclo, ovvero il modello in cui alle due ruote anteriori sterzanti del veicolo a quattro ruote viene sostituita un'unica ruota centrale, motrice e sterzante (figura 11).

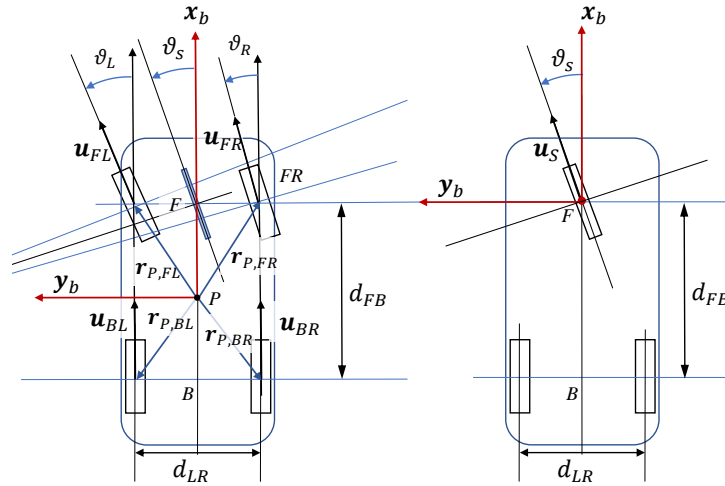


Figure 11: Dal modello del veicolo a quattro ruote al modello del triciclo.

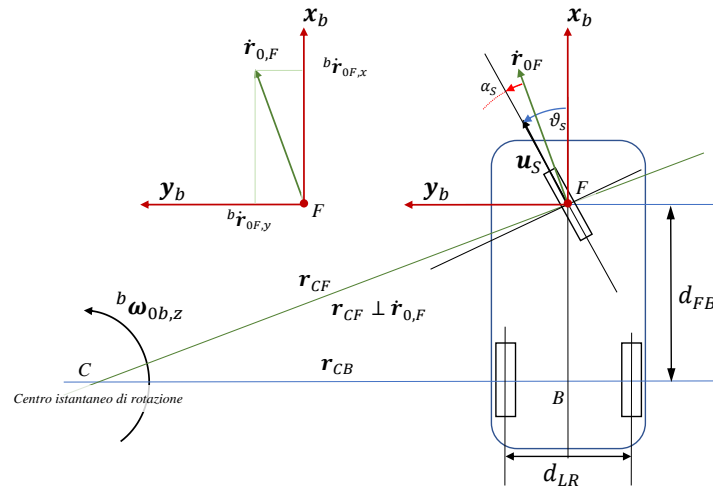


Figure 12: Il centro istantaneo di rotazione del veicolo, l'angolo di slittamento α_S e le componenti longitudinale ($\dot{r}_{0F,x}$) e laterale ($\dot{r}_{0F,y}$) della velocità.

Di seguito la derivazione delle equazioni differenziali per la generazione di una traiettoria. La traiettoria viene inizialmente calcolata con riferimento al punto F indicato nella figura 11 (centro dell'asse delle ruote anteriori - Front), e successivamente vengono calcolate tutte le grandezze (posizione, velocità e accelerazione) riferite al punto P dove è collocata la IMU.

La traiettoria viene specificata fornendo una sequenza di valori di riferimento $\bar{v}_{S,k}$, costanti, per la velocità del punto F nella direzione u_S della ruota sterzante, ed una sequenza di valori

di riferimento $\bar{\theta}_{S,k}$, costanti, per l'angolo dello sterzo, con $k = 1, \dots, n_r$, ed una sequenza crescente di istanti di tempo \bar{t}_k , a partire da $\bar{t}_0 = 0$ tali che

$$\bar{v}_S(t) = \bar{v}_{S,k}, \quad \bar{\theta}_S(t) = \bar{\theta}_{S,k}, \quad \forall t \in [\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}]. \quad (52)$$

Pertanto, le funzioni $\bar{v}_S(t)$ e $\bar{\theta}_S(t)$ risultano essere discontinue del tempo (costanti a tratti). La velocità $v_S(t)$ e l'angolo di sterzo $\theta_S(t)$ realmente applicati al veicolo sono invece funzioni continue e derivabili ottenute utilizzando le funzioni $\bar{v}_S(t)$ e $\bar{\theta}_S(t)$ come forzamento delle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \dot{v}_S(t) &= \gamma_{v_S} (\bar{v}_S(t) - v_S(t)) & v_S(0) &= 0, \\ \dot{\theta}_S(t) &= \gamma_{\theta_S} (\bar{\theta}_S(t) - \theta_S(t)), & \theta_S(0) &= 0. \end{aligned} \quad (53)$$

I parametri γ_{v_S} e γ_{θ_S} modulano la rapidità con cui le funzioni $v_S(t)$ e $\theta_S(t)$ seguono i valori di riferimento $\bar{v}_S(t)$ e $\bar{\theta}_S(t)$ (i reciproci $\gamma_{v_S}^{-1}$ e $\gamma_{\theta_S}^{-1}$ sono le costanti di tempo).

La posizione e la velocità del punto F saranno calcolate rispetto ad un punto fisso O , che per comodità sarà la posizione assunta dal punto F al tempo $t = 0$. In questo modello semplificato, il sistema di navigazione mantiene un orientamento costante.

Di seguito scriviamo le equazioni differenziali che forniscono le traiettorie di posizione $\mathbf{r}_{0F}(t)$ e di velocità $\dot{\mathbf{r}}_{0F}(t)$ del punto F del veicolo, nonché l'orientamento del body-frame (parametrizzato con la matrice di rotazione ${}^nR_b(t)$ o con gli angoli RPY $\Theta(t)$) e la sua velocità angolare (${}^n\omega_{ob}(t)$) rispetto al sistema di navigazione fisso nel punto O . Si noti che con le ipotesi fatte $\dot{\mathbf{r}}_{0F}(t) = \dot{\mathbf{r}}_{NF}(t)$ e $\omega_{ob}(t) = \omega_{nb}(t)$.

In assenza di slittamento α_S la velocità del punto F sarebbe semplicemente $\dot{\mathbf{r}}_{0F} = \mathbf{u}_S v_S$. Possiamo interpretare lo slittamento come effetto della resistenza che il veicolo oppone al cambiamento della sua velocità di traslazione che viene imposto dall'angolo di sterzo. Per modellare questa inerzia al cambiamento della velocità senza mettere in campo le complicate equazioni della dinamica del veicolo, definiamo una variabile che costituisce la *memoria* dei valori passati della velocità. Tale variabile sarà indicata con il simbolo con ${}^n\mathbf{h}_{0F}$, e sarà costituita da una versione filtrata (passa basso) della velocità passata nelle coordinate di ${}^n\mathcal{S}$, ottenuta come segue

$${}^n\dot{\mathbf{h}}_{0F}(t) = \gamma_h ({}^n\dot{\mathbf{r}}_{0F}(t) - {}^n\mathbf{h}_{0F}(t)). \quad (54)$$

Ovviamente, quando la velocità ${}^n\dot{\mathbf{r}}_{0F}$ è costante, la memoria ${}^n\mathbf{h}_{0F}(t)$ converge al valore ${}^n\dot{\mathbf{r}}_{0F}$ con costante di tempo γ_h^{-1} . Tenendo conto di questa *memoria* della velocità (o *inerzia*) la velocità all'istante corrente t si calcola nel modo seguente

$$\begin{aligned} {}^n\dot{\mathbf{r}}_{0F} &= \bar{\Pi}_{xy} ({}^n\mathbf{u}_S v_S + c_m ({}^n\mathbf{h}_{0F} - {}^n\mathbf{u}_S v_S)) \\ &= (1 - c_m) \bar{\Pi}_{xy} {}^nR_b {}^b\mathbf{u}_S(\theta_S) v_S + c_m \bar{\Pi}_{xy} {}^n\mathbf{h}_{0F}. \end{aligned} \quad (55)$$

dove

$$\bar{\Pi}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^nR_b = R_{RPY}(\Theta), \quad {}^b\mathbf{u}_S(\theta_S) = \begin{bmatrix} c\theta_S \\ s\theta_S \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

e $c_m \in [0, 1)$ è il coefficiente che quantifica la tendenza del punto F a mantenere il moto rettilineo nonostante un angolo di sterzo $\theta_S \neq 0$ (se $c_m = 0$ non c'è slittamento, e $\alpha_S = 0$).

$\overline{\Pi}_{xy}$ è una matrice che proietta un vettore nel piano x - y ed è necessaria far sì che ${}^n\dot{\mathbf{r}}_{0F}$ giaccia nel piano \mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n , e quindi per mantenere il moto del veicolo nel piano stradale. ${}^b\mathbf{u}_S$ è il versore che fornisce la direzione del moto del punto F in assenza di angolo di slittamento nel piano \mathbf{x}_b - \mathbf{y}_b ⁴.

Le equazioni (55) del moto del veicolo impongono che la velocità ${}^n\dot{\mathbf{r}}_{0F}$ sia sempre nel piano \mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n , e quindi che la componente verticale sia nulla. Per simulare il rollio e il beccheggio (Roll e Pitch) del veicolo durante il moto, abbiamo definito un modello semplificato che calcola separatamente le componenti di rotazione attorno all'asse \mathbf{z}_n (ovvero ${}^n\omega_{0b,z}$) e la componente ortogonale, nel piano \mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n , che sarà indicata con ${}^n\bar{\omega}_{0b}$, in modo da avere

$${}^n\omega_{0b} = {}^n\mathbf{z}_n {}^n\omega_{0b,z} + {}^n\bar{\omega}_{0b}.$$

La velocità di rotazione attorno a \mathbf{z}_n , nell'ipotesi di trascurare lo slittamento delle ruote posteriori, è pari al rapporto tra la componente laterale della velocità del punto F e la distanza interasse d_{FB} , e quindi ${}^n\omega_{0b,z} = {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0F,y}/d_{FB}$ ⁵. La componente ortogonale ${}^n\bar{\omega}_{0b}$ viene invece calcolata come soluzione di un'equazione differenziale che tiene conto del fatto che la componente laterale della velocità del veicolo ${}^b\dot{\mathbf{r}}_{0F,y}$ tende a ruotare il veicolo, forzando uno scostamento dell'asse \mathbf{z}_b del veicolo dall'asse \mathbf{z}_n del navigation frame, causando rollio e beccheggio, mentre le sospensioni del veicolo tendono a riportare l'asse \mathbf{z}_b ad allinearsi con \mathbf{z}_n . Complessivamente, le equazioni che forniscono la velocità angolare del veicolo sono le seguenti

$$\begin{aligned} {}^n\dot{\bar{\omega}}_{0b} &= -\gamma_\omega [{}^n\mathbf{z}_n \times] {}^n\mathbf{z}_b - \gamma_c [{}^n\mathbf{z}_n \times] \frac{{}^n\dot{\mathbf{r}}_{0F}}{\|{}^n\dot{\mathbf{r}}_{0F}\|} {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0F,y} \\ {}^n\omega_{0b} &= {}^n\mathbf{z}_n \frac{{}^n\dot{\mathbf{r}}_{0F,y}}{d_{BF}} + {}^n\bar{\omega}_{0b}. \end{aligned} \quad (57)$$

Nella prima delle (57), il termine $-\gamma_\omega [{}^n\mathbf{z}_n \times] {}^n\mathbf{z}_b$ è la componente che tende a riallineare gli assi \mathbf{z}_n e \mathbf{z}_b , mentre il secondo termine, ortogonale a \mathbf{z}_n e alla velocità $\dot{\mathbf{r}}_{0F}$ del punto F , e proporzionale alla velocità laterale ${}^b\dot{\mathbf{r}}_{0F,y}$, è il termine che tende a ruotare il veicolo a causa della forza centrifuga, in funzione del fatto che il centro di massa del veicolo non giace sul piano stradale.

Gli angoli di Roll-Pitch-Yaw si ottengono a partire dalla velocità angolare integrando la seguente equazione a partire da un valore iniziale noto

$$\dot{\Theta} = {}^nG^{-1}(\Theta) {}^n\omega_{0b}, \quad \text{con} \quad {}^nG^{-1}(\Theta) = \begin{bmatrix} \frac{c\vartheta_z}{c\vartheta_y} & \frac{s\vartheta_z}{c\vartheta_y} & 0 \\ -s\vartheta_z & c\vartheta_z & 0 \\ \frac{s\vartheta_y}{c\vartheta_y} c\vartheta_z & \frac{s\vartheta_y}{c\vartheta_y} s\vartheta_z & 1 \end{bmatrix}. \quad (58)$$

La traiettoria del veicolo, riferita al punto F , è rappresentata indifferentemente dalla coppia $({}^n\mathbf{r}_{0,F}(t), {}^nR_b(t))$ o dalla coppia $({}^n\mathbf{r}_{0,F}(t), \Theta(t))$. Il modello utilizzato per la simulazione fornisce anche le velocità $({}^n\dot{\mathbf{r}}_{0,F}(t), {}^n\omega_{0b}(t))$.

⁴In realtà il versore ${}^n\mathbf{u}_S$ andrebbe ruotato nel piano \mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n , e non proiettato, per mantenere il modulo unitario. Poiché però l'errore che si commette è piccolo, per non complicare inutilmente i calcoli si preferisce eseguire la proiezione. Si noti anche che nella (55) è possibile sostituire $Pib_{xy} {}^n\mathbf{h}_{0F} = {}^n\mathbf{h}_{0F}$, in quanto per costruzione \mathbf{h}_{0F} è nel piano \mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n .

⁵In presenza di slittamento delle ruote posteriori, indicando con α_B lo slittamento misurato al centro dell'asse, si ha ${}^n\omega_{0b,z} = ({}^b\dot{\mathbf{r}}_{0F,y} - {}^b\dot{\mathbf{r}}_{0F,x} \tan \alpha_B)/d_{FB}$.

A questo punto occorre simulare le letture degli accelerometri e dei giroscopi della IMU. Considerando che la velocità angolare è unica per il veicolo (la lettura dei giroscopi non dipende dalla collocazione della IMU nel veicolo), per simulare la lettura dei giroscopi, che indicheremo con ω_s , è sufficiente la conoscenza della velocità angolare ${}^n\omega_{0,b}(t)$ e della matrice di rotazione ${}^nR_b(t)$, in quanto i giroscopi misurano le componenti della velocità angolare lungo gli assi del body-frame. Si ha quindi

$$\omega_s(t) = {}^nR_b^\top(t) {}^n\omega_{0,b}(t) + b_\omega(t) + \nu_\omega(t), \quad (59)$$

in cui $b_\omega(t)$ rappresenta il bias dei giroscopi, ed è una funzione del tempo a basso contenuto in frequenza, mentre $\nu_\omega(t)$ è un rumore bianco (in accordo con la (51)).

Il calcolo della lettura degli accelerometri è più complicata, in quanto la posizione P della IMU non coincide, in generale, con il punto F (centro dell'asse delle ruote anteriori), rispetto al quale abbiamo calcolato la traiettoria. Per calcolare l'accelerazione del punto P occorre conoscere la posizione di P rispetto a F , ossia il vettore \mathbf{r}_{FP} (*lever arm*), che ha coordinate costanti nel body-frame, ed utilizzare le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{0P} &= \mathbf{r}_{0F} + \mathbf{r}_{FP}, \\ \dot{\mathbf{r}}_{0P} &= \dot{\mathbf{r}}_{0F} + \omega_{0b} \times \mathbf{r}_{FP}, \quad (\text{da } \dot{\mathbf{r}}_{FP} = \omega_{0b} \times \mathbf{r}_{FP}), \\ \ddot{\mathbf{r}}_{0P} &= \ddot{\mathbf{r}}_{0F} + \dot{\omega}_{0b} \times \mathbf{r}_{FP} + \omega_{0b} \times \dot{\mathbf{r}}_{FP}, \end{aligned} \quad (60)$$

che nelle coordinate del navigation frame sono scritte come segue

$$\begin{aligned} {}^n\mathbf{r}_{0P} &= {}^n\mathbf{r}_{0F} + {}^n\mathbf{r}_{FP}, \\ {}^n\dot{\mathbf{r}}_{0P} &= {}^n\dot{\mathbf{r}}_{0F} + [{}^n\omega_{0b} \times] {}^n\mathbf{r}_{FP}, \quad (\text{nota } {}^n\dot{\mathbf{r}}_{FP} = {}^n\dot{R}_b {}^b\mathbf{r}_{FP}), \\ {}^n\ddot{\mathbf{r}}_{0P} &= {}^n\ddot{\mathbf{r}}_{0F} + [{}^n\omega_{0b} \times]^2 {}^n\mathbf{r}_{FP} + [{}^n\dot{\omega}_{0b} \times] {}^n\mathbf{r}_{FP}. \end{aligned} \quad (61)$$

Come si vede, per calcolare l'accelerazione nel punto P nel navigation frame (ultima equazione) non solo occorre conoscere l'accelerazione del punto F , ma anche l'accelerazione angolare ${}^n\dot{\omega}_{0b}$ (in alternativa, una volta calcolata la velocità ${}^n\dot{\mathbf{r}}_{0P}(t)$, si può procedere con una derivazione numerica). L'accelerazione ${}^n\ddot{\mathbf{r}}_{0F}$ si calcola derivando la (55)

$${}^n\ddot{\mathbf{r}}_{0F} = (1 - c_m) \bar{\Pi}_{xy} \left({}^n\dot{R}_b {}^b\mathbf{u}_S(\theta_S) v_S + {}^nR_b {}^b\dot{\mathbf{u}}_S(\theta_S) v_S + {}^nR_b {}^b\mathbf{u}_S(\theta_S) \dot{v}_S \right) + c_m \bar{\Pi}_{xy} {}^n\dot{\mathbf{h}}_{0F}, \quad (62)$$

in cui \dot{v}_S e $\dot{\mathbf{h}}_{0F}$ sono noti in quanto già calcolati nel modello (equazioni (53) e (54)) e

$${}^b\dot{\mathbf{u}}_S = \begin{bmatrix} -s\theta_S \\ c\theta_S \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_S, \quad {}^n\dot{R}_b = [{}^n\omega_{0b} \times] {}^nR_b. \quad (63)$$

Il calcolo dell'accelerazione angolare ${}^n\dot{\omega}_{0b}$ necessaria in (61) si fa derivando la seconda delle (57), ottenendo

$${}^n\dot{\omega}_{0b} = {}^nz_n \frac{{}^n\dot{\mathbf{r}}'_{0F,y}}{d_{BF}} + {}^n\dot{\omega}_{0b}. \quad (64)$$

dove

$${}^n\dot{\mathbf{r}}'_{0F,y} = {}^bz_b^\top \frac{d}{dt} \left({}^nR_b^\top {}^n\dot{\mathbf{r}}_{0F} \right) = {}^bz_b^\top \left({}^n\dot{R}_b^\top {}^n\dot{\mathbf{r}}_{0F} + {}^nR_b^\top {}^n\ddot{\mathbf{r}}_{0F} \right). \quad (65)$$

(Nota: ${}^n\dot{\mathbf{r}}'_{0F,y} \neq {}^n\ddot{\mathbf{r}}_{0F,y}$).

Una volta calcolata l'accelerazione ${}^n\ddot{\mathbf{r}}_{0P}$ del punto P (61), possiamo simulare la lettura dell'accelerometro, indicata con \mathbf{a}_s , con la seguente

$$\mathbf{a}_s(t) = {}^nR_b^\top(t) {}^n\ddot{\mathbf{r}}_{0P}(t) + b_a(t) + \nu_a(t), \quad (66)$$

(in accordo con la (51)).

Diversi modelli possono essere utilizzati per la generazione dei bias $b_a(t)$ e $b_\omega(t)$ (esempio: funzioni sinusoidali).

Disegni su [Link Google_Presentations ASI](#)

F Modellistica delle IMU e caratterizzazione degli errori

Ho riportato qui ed esteso quanto avevo scritto su [overleaf: ASI_note_Errori_su_IMU](#)

Un aspetto che bisogna affrontare al momento di utilizzare le misure ottenute con unità di misura inerziali (IMU) in algoritmi di navigazione è quello di interpretare le caratteristiche fornite dai costruttori di IMU nei datasheet, per poi utilizzarle in modo corretto negli algoritmi di filtraggio e navigazione. A questo proposito, va osservato che sul mercato è presente una grande varietà di IMU, che differiscono tra loro sia come prestazioni che come prezzo. In genere i sensori inerziali vengono grossolanamente suddivisi in:

- Navigation Grade ($\sim 100.000 \$$, navigazione autonoma per qualche ora)
- Tactical Grade ($5.000 \$ \sim 25.000 \$$, navigazione autonoma fino a 10 minuti)
- Industrial Grade ($100 \$ \sim 1.000 \$$, navigazione autonoma fino ad 1 minuto)
- Consumer Grade ($10 \$ \sim 100 \$$, solo navigazione assistita)

Altri testi utilizzano una classificazione più sottile, in sei livelli: 1) strategic grade; 2) navigation grade; 3) high-end tactical grade; 4) tactical grade; 5) industrial/low-end tactical grade; 6) consumer grade.

In ambito automobilistico sono utilizzate le IMU consumer grade.

Dall'analisi della letteratura abbiamo riscontrato che i confini tra le diverse classi tuttavia risultano abbastanza sfumati, e che le case produttrici di IMU non sempre utilizzano parametri omogenei per caratterizzare le prestazioni di una unità inerziale. Inoltre, la letteratura non è sempre concorde nel dare indicazioni su come utilizzare le specifiche su accelerometri e giroscopi riportate sui datasheet nell'implementazione di un modello della IMU mediante lo spazio di stato, che è il tipo di modello correntemente utilizzato nel progetto di filtri e algoritmi

di navigazione, in quanto consente di estrarre in modo efficiente le informazioni dalle misure rumorose.

Lo standard delle specifiche e delle modalità di test nel caso specifico di giroscopi a di tipo interferometrico a fibra ottica (IFOG: Interferometric Fiber Optic Gyros) è riportato nel documento IEEE [IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros, IEEE Standard 952-2020 2022](#). Nonostante il documento sia specifico per i giroscopi IFOG, che sono di livello elevato (generalmente tactical-grade), parte delle specifiche riportate possono essere utilizzate anche per giroscopi e accelerometri consumer grade, tipicamente di tipo MEMS (Micro-Electro-Mechanical-Systems).

Come dicevamo, i costruttori non sono uniformi nel fornire le specifiche sulle IMU, sia nella nomenclatura dei parametri, sia nelle unità di misura.

Alcuni costruttori forniscono dati in forma molto sintetica, come il RMS (Root Mean Square) totale del rumore e una stima della Spectral Density. Ad esempio, per i giroscopi nella InvenSense IMU-3000, viene indicato un *total RMS noise* di 0.1 deg/s e una *Rate Noise Spectral Density* di $0.01 (\text{deg/s})/\sqrt{\text{Hz}}$. Non vengono date indicazioni sulla polarizzazione (bias) delle misure e sulla sua deriva (bias drift), che invece sono fornite da molte altre case produttrici.

Per dare un'idea della varietà della nomenclatura utilizzata, riportiamo di seguito le denominazioni di alcuni parametri che vengono riportati dai costruttori nei datasheet per caratterizzare gli errori di misura nelle unità inerziali:

SFR: Scale Factor Repeatability; scale factor sensitivity; scale factor linearity; nonlinearity; sensitivity repeatability; bias repeatability; bias run-to-run stability; bias turn-on stability; bias instability; ZRO: Zero Rate Offset; output noise; ARW: Angular Random Walk; VRW: Velocity Random Walk; RRW: Rate Random Walk; NSD: Noise Spectral Density; Rate Noise Spectral Density; ASD: Amplitude Spectral Density; Delta Angle Output noise; Angular Rate Output noise; Acceleration Output Noise; total RMS; precision; alignment error; Misalignment; cross-axis sensitivity non orthogonality error.

La maggior parte dei parametri sopra elencati sono di tipo stocastico, e generalmente vengono specificati in termini di varianza o di deviazione standard della variabile misurata (velocità angolare per i giroscopi, accelerazione per gli accelerometri), e a volte anche come RMS (Rooted Mean Square). È opportuno osservare che molte delle denominazioni sopra elencate in realtà si riferiscono allo stesso parametro, e pertanto i costruttori delle IMU possono utilizzare denominazioni apparentemente diverse nei datasheet.

Completano la caratterizzazione delle IMU alcuni parametri di tipo non stocastico come: OR: operating range, o FSR: Full Scale Range; BW: Bandwidth; ODR: Output Data Rate; Sensitivity o Resolution (LSB), oltre ovviamente alla tensione di alimentazione e intervallo di temperature di esercizio. In molti modelli di IMU i parametri OR, BW, ODR possono essere impostati su diversi valori via hardware o software.

Vedremo di seguito che di tutti i parametri sopraelencati, i più importanti per il loro utilizzo negli algoritmi di filtraggio e integrazione sensoriale sono quelli che descrivono i rumori di tipo additivo sulla lettura dei sensori: la *run-to-run bias stability* (chiamata anche *turn-on bias stability* o *bias repeatability*), la *in-run bias stability* (chiamata anche *bias instability*), l'Angular Random Walk e l'Angular Rate Random Walk (nei giroscopi), la Velocity Random Walk e l'Acceleration Random Walk (negli accelerometri).

Come vedremo di seguito, questi parametri, ad eccezione della run-to-run bias stability, si possono ricavare dalla Allan Variance.

F.1 La densità spettrale del rumore e la Allan Variance

È noto che mediare le misure su brevi intervalli di tempo riduce alcuni effetti del rumore additivo sulle misure (in particolare, ne riduce la varianza), riducendo, allo stesso tempo, la banda del sensore. Per questo motivo, nell'utilizzo dei sensori nelle applicazioni, spesso si ricorre al *downsampling* o *decimazione* delle misure, ovvero alla loro conversione ad una frequenza di campionamento inferiore rispetto al massimo Output Data Rate (ODR) del dispositivo. Molte IMU offrono la possibilità di impostare l'ODR del dispositivo, ma in ogni caso il downsampling può essere fatto via software semplicemente mediando le misure nell'intervallo di tempo desiderato, eventualmente utilizzando dei pesi nell'operazione dei media.

Da quanto detto, è chiaro che non è sufficiente specificare un singolo parametro (la Noise Standard Deviation del rumore additivo) per caratterizzare la rumorosità intrinseca di un sensore.

Un parametro che consente di calcolare la Noise Standard Deviation per ogni frequenza di downsampling utilizzata è la *Noise Density* (spesso chiamata *Noise Spectral Density* o *Amplitude Spectral Density* (ASD), o semplicemente *Spectral Density*). A volte viene utilizzata la PSD (*Power Spectral Density*), che è il quadrato della ASD. Per i giroscopi la noise density ASD è espressa in $\text{deg/s}/\sqrt{\text{Hz}}$ o in $\text{deg/hr}\sqrt{\text{Hz}}$, mentre per gli accelerometri è espressa in $(\text{m/s}^2)/\sqrt{\text{Hz}}$ o in $\text{mg}/\sqrt{\text{Hz}}$ o $\mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$.

Nota: l'abbreviazione NSD per indicare la Noise Spectral Density non dovrebbe essere usata, in quanto può confondersi con la Noise Standard Deviation.

La ASD è una caratterizzazione della rumorosità del dispositivo indipendentemente dalla frequenza di campionamento utilizzata, ed in qualche modo descrive la rumorosità intrinseca del sensore a tempo continuo. Il costruttore può fornire quindi una descrizione accurata del rumore additivo mediante il grafico della ASD (o della PSD) in funzione della frequenza f su scala logaritmica. Purtroppo però la valutazione della ASD, in particolare alle bassissime frequenze, è piuttosto problematica. Infatti, dato uno stream di misure, è difficile distinguere un bias costante da una fluttuazione a bassissima frequenza (le bassissime frequenze sono quelle il cui periodo è paragonabile alla finestra temporale di acquisizione delle misure).

E infatti nella maggior parte dei dispositivi consumer grade la ASD viene fornita con un solo numero, che in realtà è la media della ASD nell'intervallo di frequenze utili, escludendo un'eventuale componente costante o a bassissima frequenza nel rumore (bias), la cui caratterizzazione è fornita a parte.

Avendo a disposizione la ASD media del rumore nell'intervallo di frequenze utili, si può calcolare una stima della deviazione standard del rumore (NSD) alle diverse frequenze di campionamento. La stima della NSD si ottiene semplicemente moltiplicando la ASD per la radice quadrata della frequenza di campionamento utilizzata (equivalente a dividere la ASD per la radice dell'intervallo di campionamento utilizzato).

Ad esempio, un accelerometro che abbia una ASD pari a $0.2 \text{ mg}/\sqrt{\text{Hz}}$ (ricordiamo che $1 \text{ mg} \approx 10^{-2} \text{ m/s}^2$), se campionato a 100 Hz avrà una deviazione standard di rumore di circa $0.2 \cdot 10^{-2} \sqrt{100} \text{ m/s}^2 = 0.02 \text{ m/s}^2$, mentre se campionato a 25 Hz (un quarto di 100 Hz) la deviazione standard si riduce alla metà: $2 \cdot 10^{-2} \sqrt{25} \text{ m/s}^2 = 0.01 \text{ m/s}^2$.

In genere, quando viene specificato il livello di rumore come *Total RMS* o *in-band RMS*, si intende la radice quadrata dell'integrale della PSD sulla banda di frequenza utile del sensore. Chiamando con $N_P(f)$ unit^2/Hz la PSD, se l'intervallo di frequenze utile è $[f_{\min}, f_{\max}]$ (frequenze positive), il total RMS si calcola come

$$RMS = \sqrt{\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} N_P(f) df} \text{ unit.} \quad (67)$$

Chiaramente, nella (67) $N_P(f)$ è la densità di potenza unilatera. Se fosse una densità bilatera occorrerebbe moltiplicare l'integrale per 2. Se invece si ha la specifica della *Amplitude Spectral Density* $N_A(f)$ $\text{unit}/\sqrt{\text{Hz}}$, occorre utilizzare la formula (67) ricordando che $N_P(f) = N_A^2(f)$.

Nella maggior parte delle IMU MEMS consumer grade viene fornita la PSD (o la ASD) e la banda a 3 dB del dispositivo, senza specificare il valore della densità di rumore alle diverse frequenze, salvo alcune eccezioni (ad esempio, l'accelerometro SkyMEMS MA1002, che riporta i valori della ASD alle frequenze di 0.1, 1, 10 e 100 Hz, ed anche l'RMS totale, che corrisponde all'integrale (67)).

Per fare un po' di chiarezza sul significato dei parametri delle IMU che interessano l'implementazione di filtri integratori, è opportuno fare dei brevi richiami sul rumore bianco, sui processi di Wiener e sui processi *random walk*.

F.2 Generalità su rumore bianco, processi di Wiener e random walk

F.2.1 Processi aleatori a tempo discreto

Qualunque misura, effettuata con qualunque tipo di sensore, è affetta da errori o disturbi di diversa natura, con una componente aleatoria che può essere descritta in modo probabilistico/statistico. Nel caso dei disturbi su misure a tempo discreto (misure campionate), la descrizione probabilistica non desta particolari difficoltà matematiche. La descrizione dei fenomeni aleatori a tempo continuo invece è più delicata. Ad esempio, non ci sono difficoltà matematiche nel definire il rumore bianco a tempo discreto, mentre la definizione del rumore bianco a tempo continuo richiede una formulazione matematicamente più complessa. Va osservato che nell'ingegneria viene utilizzata una definizione semplificata del rumore bianco a tempo-continuo, per mezzo dell'impulso di Dirac, indicato con $\delta(t)$. L'utilizzo di questa formulazione ingegneristica, pur non essendo matematicamente rigorosa, fornisce risultati corretti nell'analisi dei sistemi lineari.

A tempo discreto, una sequenza $\{v(k)\}$ di variabili aleatorie si dice essere bianca se è a media nulla e i campioni riferiti ad istanti di tempo distinti sono scorrelati. In formule:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad E\{v(k)\} = 0, \quad \text{e} \quad E\{v(k)v(h)\} = 0, \quad \forall k \neq h. \quad (68)$$

In molte applicazioni l'unico parametro richiesto per l'analisi è la varianza $\sigma_v^2 = E\{v^2(k)\}$. La sequenza è detta *bianca-standard* se $\sigma_v^2 = 1$. Se i campioni seguono una distribuzione gaussiana, la sequenza è detta *gaussiana-bianca* (*gaussiana-bianca-standard* se $\sigma_v^2 = 1$).

La sequenza ottenuta sommando, a partire da un istante iniziale fissato (ad esempio, dall'istante 0), le variabili aleatorie che costituiscono una sequenza standard, è una sequenza chiamata *Random Walk* (standard, se $\sigma_v^2 = 1$):

$$w(k) = w(0) + \sum_{j=0}^{k-1} v(j), \quad \text{o} \quad w(k+1) = w(k) + v(k). \quad (69)$$

Il valore iniziale $w(0)$ in genere è 0, ma può anche essere una variabile aleatoria, ad esempio gaussiana a media nulla $w(0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{w_0}^2)$. Le proprietà principali di una random walk sono tre, tutte definite sugli incrementi $w(k) - w(h)$:

- Gli incrementi hanno media nulla:

$$E\{w(k) - w(h)\} = 0, \quad \forall h < k, \quad (70)$$

- Gli incrementi sono indipendenti su intervalli disgiunti:

$$E\{(w(k_1) - w(k_2))(w(h_1) - w(h_2))\} = 0, \quad \text{se } h_2 < h_1 \leq k_2 < k_1 \quad (71)$$

- La varianza dell'incremento in un dato intervallo di tempo di lunghezza T è pari a $\sigma_v^2 T$:

$$E\{(w(k+T) - w(k))^2\} = \sigma_v^2 T \quad (72)$$

L'ultima proprietà si dimostra facilmente ricordando che la varianza della somma di variabili aleatorie indipendenti è pari alla somma delle loro varianze, e riscrivendo l'incremento $w(k+T) - w(k)$ come somma di T campioni di un processo bianco di varianza σ_v^2 , si ha:

$$w(k+T) - w(k) = \sum_{j=k}^{k+T-1} v(j) \Rightarrow E\{(w(k+T) - w(k))^2\} = \sum_{j=k}^{k+T-1} E\{v^2(j)\} = \sigma_v^2 T. \quad (73)$$

Si consideri ora un segnale $s(k)$, a tempo discreto, la cui misura $y(k)$ è affetta da rumore bianco additivo:

$$y(k) = s(k) + v(k). \quad (74)$$

Se il livello di rumore σ_v^2 è considerato troppo alto rispetto al segnale, è possibile utilizzare le proprietà del rumore bianco e della random walk per mitigarne l'effetto in un dato intervallo di tempo. L'effetto del rumore viene mitigato semplicemente mediando le misure disponibili nell'intervallo temporale dato. Ad esempio, considerando la media delle m misure più recenti, indicata con $\bar{y}_m(k)$, si ha

$$\bar{y}_m(k) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} y(k-j) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} s(k-j) + \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} v(k-j).$$

Si ha quindi

$$\bar{y}_m(k) = \bar{s}_m(k) + \bar{v}_m(k), \quad \text{dove } \bar{v}_m(k) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} v(k-j) = \frac{w(k+1) - w(k-m+1)}{m}, \quad (75)$$

ed $\bar{s}_m(k)$ è la media del segnale nell'intervallo $[k-m+1, k]$. Il calcolo della varianza del rumore $\bar{v}_m(k)$, grazie alla (73) fornisce il seguente risultato

$$\sigma_{\bar{v}_m}^2 = \frac{1}{m^2} E\left\{\left(w(k+1) - w(k-m+1)\right)^2\right\} = \frac{\sigma_v^2 m}{m^2} = \frac{\sigma_v^2}{m}. \quad (76)$$

Come si vede la varianza dell'errore di misura è inversamente proporzionale al numero di campioni utilizzato per effettuare la media. Corrispondentemente, la deviazione standard del rumore di misura diminuisce come l'inverso della radice del numero di campioni mediati:

$$\sigma_{\bar{v}_m} = \frac{\sigma_v}{\sqrt{m}}. \quad (77)$$

Quindi, nel caso di rumore bianco, risulta conveniente, dal punto di vista della varianza del rumore, mediare le misure $y(k)$ su intervalli lunghi, a patto però che per l'applicazione considerata siamo disposti ad avere una misura del valor medio del segnale utile, $\bar{s}_m(k)$, invece che del segnale non mediato $s(k)$. In sostanza, l'operazione di media oltre a ridurre l'effetto del rumore bianco, ha anche l'effetto di ridurre la banda del sensore.

In ogni caso, anche ignorando l'effetto dell'operazione di media sul segnale utile, qualora siano presenti componenti di rumore che non sono bianche, può non essere conveniente, dal punto di vista della varianza dell'errore, fare la media su intervalli di tempo troppo lunghi. Questo argomento sarà analizzato più avanti quando parleremo della Allan Variance.

F.2.2 Processi aleatori a tempo continuo

La formalizzazione matematica a tempo continuo del rumore bianco non è semplice come a tempo discreto. Una definizione di rumore bianco analoga a quella data a tempo discreto porta a dover utilizzare l'impulso di Dirac $\delta(t)$, che non è una funzione propriamente detta, ma una distribuzione. In ingegneria si fa largo uso dell'impulso di Dirac, in quanto il suo utilizzo come una funzione ordinaria in problemi lineari è semplice e porta a risultati corretti. Occorre però tenere conto che il suo utilizzo in problemi non lineari può portare ad errori grossolani.

È noto che la caratterizzazione più completa di un processo aleatorio $s(t)$ a tempo continuo è data dalla conoscenza della densità di probabilità congiunta dei valori assunti dal processo in ogni possibile n -upla di tempi, indicata con $p(s(t_1), \dots, s(t_n))$, dove $\{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{R}$. Tuttavia, nelle maggior parte delle applicazioni ingegneristiche reali, è estremamente difficile disporre di questa probabilità congiunta, o identificarla a partire da misure, a meno di ricorrere ad ipotesi semplificative e ad approssimazioni grossolane. In effetti, in genere nelle applicazioni è sufficiente disporre della densità congiunta su due soli istanti di tempo.

Una caratterizzazione parziale, ma molto utile ed utilizzata, di un processo aleatorio è data dal valor medio \bar{v} e dall'autocorrelazione R_s (proprietà del primo e del secondo ordine):

$$\begin{aligned} \bar{s}(t) &= E\{s(t)\}, \\ R_s(t_1, t_2) &= E\{s(t_1)s(t_2)\}. \end{aligned} \quad (78)$$

che nel caso di processi stazionari *wide-sense* (in senso lato) diventano

$$\begin{aligned} \bar{s} &= E\{s(t)\}, \\ R_s(\tau) &= E\{s(t)s(t+\tau)\}. \end{aligned} \quad (79)$$

Conoscendo il valor medio e l'autocorrelazione si calcola l'autocovarianza K_s , che nel caso non stazionario è

$$K_s(t_1, t_2) = E\{(s(t_1) - \bar{s}(t_1))(s(t_2) - \bar{s}(t_2))\} = R_s(t_1, t_2) - \bar{s}(t_1)\bar{s}(t_2) \quad (80)$$

mentre nel caso stazionario (wide-sense)

$$K_s(\tau) = E\left\{\left(s(t+\tau) - \bar{s}\right)\left(s(t) - \bar{s}\right)\right\} = R_s(\tau) - \bar{s}^2. \quad (81)$$

Chiaramente, nel caso di processi a media nulla, autocorrelazione e autocovarianza coincidono.

Spesso per l'autocorrelazione di processi non stazionari si preferisce la forma simmetrica

$$R_s(t, \tau) = E\left\{v\left(t - \frac{\tau}{2}\right)v\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right\}. \quad (82)$$

Poiché l'identificazione dell'autocorrelazione di processi non stazionari è molto complicata da eseguire in modo accurato, in genere si preferisce eliminare dalle misure del processo $s(t)$ le componenti non stazionarie (trend) e identificare l'autocorrelazione della componente stazionaria.

Nei processi stazionari ed ergodici, l'autocorrelazione per $\tau = 0$ è anche la potenza del processo, nonché la sua varianza: $\sigma_s^2 = R_s(0)$. Infatti, dall'ergodicità si ha

$$\sigma_s^2 = E\{s^2(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t) dt, \quad (83)$$

dove il termine a destra è proprio la potenza del processo $s(t)$.

Per i processi stazionari si può definire il *tempo di correlazione* τ_c nel modo seguente:

$$\tau_c = \frac{1}{R_s(0)} \int_0^\infty R_s(\tau) d\tau. \quad (84)$$

Un processo molto utilizzato in ingegneria è il processo con autocorrelazione con decadimento esponenziale, chiamato anche processo di Gauss-Markov, che ha valor medio nullo e autocorrelazione:

$$R_s(\tau) = \sigma_s^2 e^{-\frac{|\tau|}{\tau_s}}, \quad \text{o} \quad R_s(\tau) = \sigma_s^2 e^{-\beta|\tau|}, \quad \text{con } \beta = \frac{1}{\tau_s}. \quad (85)$$

È facile verificare che per questo processo il parametro τ_s coincide con il tempo di correlazione.

Ricordiamo che la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione è la *densità spettrale di potenza* (PSD: Power Spectral Density) del processo (Teorema di Wiener-Khintchine):

$$S_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (86)$$

Veniamo adesso ai processi aleatori *bianchi* a tempo-continuo. La caratteristica di *bianchezza* di un processo $v(t)$ consiste delle seguenti due proprietà:

1. il processo ha un valor medio nullo in ogni istante di tempo;
2. i valori assunti dal processo in due istanti di tempo, comunque vicini, ma non coincidenti, sono scorrelati.

Nell'ingegneria, queste due proprietà si esprimono matematicamente come segue:

$$\begin{aligned} E\{v(t)\} &= 0, \\ E\{v(t_1)v(t_2)\} &= \sigma_v^2 \delta(t_1 - t_2) \quad \text{o} \quad R_s(\tau) = \sigma_v^2 \delta(\tau). \end{aligned} \quad (87)$$

Il rumore bianco si dice standard se $\sigma_v^2 = 1$.

Dal punto di vista matematico la definizione del rumore bianco tramite la (87) non è rigorosa, in primo luogo perché fa uso di una funzione *limite*, la Dirac $\delta(t)$, che, come già detto, non è propriamente una funzione. Inoltre, si dimostra che le realizzazioni di un processo aleatorio che soddisfi alle proprietà (87) non risultano integrabili secondo Riemann (le realizzazioni hanno una variazione illimitata su ogni intervallo finito). Quindi, tecnicamente, non è corretto calcolare l'integrale di Riemann di $v(t)$, cosa che invece gli ingegneri regolarmente fanno. Inoltre, poiché la trasformata di Fourier dell'impulso di Dirac è costante, pari a 1, per tutte le frequenze, si ha che la PSD del rumore bianco è costante e pari a $S_v(j\omega) = \sigma_v^2$, $\omega \in (-\infty, \infty)$:

$$S_v(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_v(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_v^2 \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \sigma_v^2. \quad (88)$$

Pertanto, applicando il teorema di Parseval, che fornisce la potenza di un segnale aleatorio mediante l'integrale della PSD in $\omega \in (-\infty, \infty)$, si vede che la potenza del rumore bianco, che, ricordiamo, ne è anche la varianza, così come è stato definito, è infinita.

Il rumore bianco $v(t)$ può essere pensato come il limite di un processo di Gauss-Markov $s(t)$, quando il tempo di correlazione τ_s tende a 0. A tale scopo, si consideri l'autocorrelazione di un processo GM nella forma (85). Ricordiamo che un modo di interpretare l'impulso di Dirac è di pensarlo come il seguente limite

$$\delta(t) = \lim_{\tau_s \rightarrow 0} \frac{1}{2\tau_s} e^{-\frac{|t|}{\tau_s}} \quad \left(\text{nota: } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|t|}{\tau_s}} d\tau = 2\tau_s \right). \quad (89)$$

Quindi, per pensare al rumore bianco come limite per $\tau_s \rightarrow 0$ di un processo GM, possiamo scrivere, informalmente,

$$R_v(\tau) = \lim_{\tau_s \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma_v^2}{2\tau_s} \right) e^{-\frac{|\tau|}{\tau_s}}, \quad (90)$$

da cui si vede che $R_v(0) = \infty$ e $R_v(\tau) = 0$ per $\tau \neq 0$.

Si osservi che per ogni τ_s finito ($\tau_s > 0$) la potenza/varianza del processo $v(t)$ è pari a $E\{v^2(t)\} = \sigma_v^2/2\tau_s$. Poiché la varianza è espressa in u^2 , dove u è l'unità di misura del processo $v(t)$, si vede che la quantità σ_v^2 è espressa in $u^2 s$ (se il tempo è in secondi), che è equivalente a u^2/Hz , ricordando che $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$). Abbiamo quindi la conferma che la quantità σ_v^2 che caratterizza un rumore bianco è una *densità* di potenza rispetto alla frequenza (densità spettrale, PSD).

Occorre quindi fare attenzione al fatto che normalmente, per un processo *non bianco* $s(t)$, con unità di misura u , il simbolo σ_s^2 indica la varianza/potenza, ed ha unità di misura u^2 , mentre per un rumore bianco $v(t)$ il simbolo σ_v^2 indica la PSD, ed ha unità di misura u^2/Hz .

Nella matematica dei processi aleatori, in effetti, non potendo definire rigorosamente il rumore bianco, si preferisce definire un processo che può essere pensato come l'integrale del rumore bianco: il processo di Wiener, spesso indicato con $w(t)$.

Va osservato che nella letteratura non c'è uniformità nelle notazioni utilizzate per il rumore bianco e per il processo di Wiener. In particolare, il simbolo w è spesso utilizzato sia per indicare il White noise, sia per indicare il processo di Wiener, ma anche per indicare una Random Walk.

Il processo di Wiener è definito mediante delle proprietà analoghe a quelle della Random Walk discreta:

- gli incrementi hanno media nulla:

$$E\{w(t_2) - w(t_1)\} = 0, \quad \forall t_1 < t_2; \quad (91)$$

- gli incrementi sono indipendenti su intervalli disgiunti:

$$E\{(w(t_2) - w(t_1))(w(t_4) - w(t_3))\} = 0, \quad \text{se } t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4; \quad (92)$$

- la varianza dell'incremento in un dato intervallo di tempo di lunghezza T è proporzionale a T :

$$E\{(w(t+T) - w(t))^2\} = qT, \quad \forall T > 0, \quad q > 0. \quad (93)$$

In più, le realizzazioni di un processo di Wiener sono funzioni continue (quasi certamente).

Una conseguenza del fatto che gli incrementi sono indipendenti, qualunque sia l'ampiezza degli intervalli, è che gli incrementi del processo di Wiener seguono una distribuzione Gaussiana:

$$w(t_2) - w(t_1) \sim \mathcal{N}(0, q(t_2 - t_1)). \quad (94)$$

Il processo di Wiener si dice standard se $q = 1$. In genere, se non viene specificato, è sottinteso che il processo di Wiener sia standard.

Tipicamente si considera il processo di Wiener a partire da un istante iniziale t_0 , di regola $t_0 = 0$, e come valore iniziale viene preso $W(0) = 0$. In questo caso, l'autocorrelazione del processo di Wiener è

$$R_w(t_1, t_2) = E\{w(t_1)w(t_2)\} = q \min(t_1, t_2). \quad (95)$$

Si noti quindi che il processo di Wiener non è un processo stazionario (autocorrelazione a due tempi).

In alcune applicazioni, come nell'analisi dei rumori nei sensori inerziali, è utile considerare processi di Wiener il cui valore iniziale è una variabile aleatoria Gaussiana $w(0) \sim \mathcal{N}(w_0, \sigma_0^2)$. In questo caso, il processo di Wiener in ogni istante t è una v.a. Gaussiana, e si ha

$$w(0) \sim \mathcal{N}(w_0, \sigma_0^2) \quad \Rightarrow \quad w(t) \sim \mathcal{N}(w_0, \sigma_0^2 + qt). \quad (96)$$

Come vedremo il processo di Wiener sarà utile nella modellistica del bias nei sensori inerziali. È anche facile vedere che un processo di Wiener campionato a intervalli regolari è una Random Walk.

Nelle applicazioni dell'ingegneria è spesso necessario ricorrere al processo di Wiener vettoriale, e quindi $w(t) \in \mathbb{R}^p$:

$$\begin{aligned} E\{w(t_2) - w(t_1)\} &= 0_p, \\ E\left\{\left(w(t_2) - w(t_1)\right)\left(w(t_4) - w(t_2)\right)^\top\right\} &= 0_{p \times p}, \quad t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4; \\ E\left\{\left(w(t_2) - w(t_1)\right)\left(w(t_2) - w(t_1)\right)^\top\right\} &= Q\delta(t_2 - t_1) \quad t_1 < t_2, \end{aligned} \quad (97)$$

dove Q è una matrice simmetrica e definita positiva. Un processo di Wiener vettoriale standard è un processo le cui componenti sono processi di Wiener standard indipendenti tra loro, e pertanto $Q = I_p$.

Il processo di Wiener vettoriale viene utilizzato per descrivere la dinamica di sistemi lineari stocastici, che sono descritti in modo rigoroso da equazioni differenziali stocatiche (SDE: Stochastic Differential Equation) del tipo

$$dx(t) = Ax(t)dt + Bu(t)dt + Fdw(t), \quad x(0) \sim \mathcal{N}(x_0, \Psi_{x_0}). \quad (98)$$

Il termine $dw(t)$ è il differenziale stocastico del processo di Wiener, e l'integrazione del sistema va fatta utilizzando l'integrale stocastico di Ito, e non l'integrale di Riemann, come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie (ODE: Ordinary Differential Equations). Si può dimostrare che la soluzione $x(t)$ è un processo aleatorio Gaussiano, $x(t) \sim \mathcal{N}(\bar{x}(t), \Psi_{\bar{x}}(t))$, dove il valor medio $\bar{x}(t)$ è la soluzione della ODE

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \quad \bar{x}(0) = x_0, \quad (99)$$

e la covarianza $\Psi_{\bar{x}}(t)$ è la soluzione della seguente ODE matriciale

$$\dot{\Psi}_x(t) = A\Psi_x(t) + \Psi_x(t)A^\top + FQF^\top, \quad \Psi_x(0) = \Psi_{x_0}. \quad (100)$$

Spesso la variabile di interesse nelle applicazioni è una funzione lineare dello stato $x(t)$, indicata con $y(t) = Cx(t)$, i cui valor medio e covarianza si calcolano come di seguito:

$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t), \quad \text{e} \quad \Psi_y(t) = C\Psi_x(t)C^\top. \quad (101)$$

I processi $x(t)$ e $y(t)$ non sono stazionari, ma nel caso di matrice A asintoticamente stabile (autovalori a parte reale negativa) per $t \rightarrow \infty$ tendono ad essere stazionari. Le covarianze di regime $\bar{\Psi}_x$ e $\bar{\Psi}_y$ si calcolano annullando la derivata di $\Psi_x(t)$ nell'equazione (100), risolvendo quindi l'equazione stazionaria:

$$A\bar{\Psi}_x(t) + \bar{\Psi}_x(t)A^\top + FQF^\top = 0. \quad (102)$$

Va anche osservato che se $\bar{\Psi}_x = \Psi_{x_0}$ il processo $x(t)$ (e di conseguenza anche $y(t)$) è stazionario.

Va detto che nell'ingegneria la formalizzazione dei sistemi stocastici mediante SDE del tipo (98), forzata da un processo di Wiener, definita con l'integrale di Ito, non è molto diffusa. È invece comune modellare un sistema stocastico come una ODE, definita con l'integrale di Riemann, forzata da rumore bianco. In particolare, il rumore bianco è pensato come la derivata di un processo di Wiener, anche se in realtà è noto che le traiettorie di un processo di Wiener

non sono derivabili (quasi certamente). Pertanto, in modo puramente formale, definendo il rumore bianco $\nu(t)$ come

$$\nu(t) = \frac{dw(t)}{dt}, \quad (103)$$

da cui $E\{\nu(t_1)\nu^\top(t_2)\} = Q\delta(t_2 - t_1)$, e pertanto si vede che la matrice Q è la PSD del rumore bianco, ovvero $Q = \Psi_v$. Dividendo la (98) per dt si ricava

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F\nu(t), \quad x(0) \sim \mathcal{N}(x_0, \Psi_{x_0}). \quad (104)$$

Utilizzando il formalismo dell'impulso di Dirac, anche dalla (104) si possono ugualmente dimostrare le (99) e (100), con dei passaggi non rigorosi da un punto di vista matematico, ma comunemente utilizzati nei testi di analisi dei segnali nell'ingegneria.

Nel caso in cui il processo $\nu(t)$ nel sistema (104) non sia bianco, ma sia caratterizzato da una PSD $S_\nu(j\omega)$ non costante, è possibile calcolare la PSD di un segnale $y(t) = Cx(t)$ facendo uso della funzione di trasferimento del sistema. In particolare, ricordando che nel caso di $\nu(t)$ vettoriale la $S_\nu(j\omega)$ è una matrice simmetrica, si ha

$$S_y(j\omega) = H(j\omega)S_\nu(j\omega)H^*(j\omega), \quad (105)$$

(nota: $H^*(j\omega) = H(-j\omega)$) dove

$$H(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}F. \quad (106)$$

Nel caso in cui $\nu(t)$ sia un rumore bianco, e quindi con PSD costante $S_\nu(j\omega) = \Psi_\nu$, la PSD del processo $x(T)$ è pari a $H(j\omega)\Psi_\nu H^*(j\omega)$. Nel caso in cui $\nu(t)$ e $y(t)$ siano processi scalari, si ha semplicemente:

$$S_y(j\omega) = |H(j\omega)|^2 S_\nu(j\omega). \quad (107)$$

Dalla (107) si vede che sistemi lineari Gauss-Markov forzati da rumore bianco (S_ν costante) hanno una PSD formata da rapporti di polinomi della frequenza in cui compaiono esclusivamente potenze pari della frequenza. Dalla (105) si vede che la stessa proprietà si ha sulle componenti della matrice di PSD nel caso di processi vettoriali.

La proprietà (105), o la (107) nel caso di processi scalari, è molto utile per ricavare un modello di generazione di un processo aleatorio con lo spazio di stato, a partire dal rumore bianco, purché nella PSD $S_x(j\omega)$ del processo compaiano solo polinomi di potenze pari, e quindi sia fattorizzabile come $S_x(j\omega) = H(j\omega)H^*(j\omega)$.

Ad esempio, un possibile modello di generazione del processo con autocorrelazione esponenziale (85) (Gauss-Markov) è il seguente:

$$\dot{x}(t) = -\beta x(t) + \beta \nu(t), \quad x(0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2), \quad \beta > 0, \quad (108)$$

dove $\nu(t)$ è rumore bianco con PSD σ_ν^2 . $\tau_d = 1/\beta$ è la costante di tempo del sistema. Lo stato $x(t)$ è processo non è stazionario, che però risulta stazionario a regime. Infatti, esiste il limite stazionario della autocorrelazione $R_x(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} R_x(t, \tau)$ che può essere calcolato antitrasformando la PSD $S_x(j\omega)$ calcolata con la (107). La funzione di trasferimento del sistema (108) è

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\beta}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_d}, \quad (109)$$

da cui la PSD del processo è

$$S_x(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \sigma_\nu^2 = \frac{\sigma_\nu^2}{1 + (\frac{\omega}{\beta})^2}. \quad (110)$$

La potenza del processo stazionario $x(t)$, che è anche la varianza a regime σ_x^2 , si può calcolare, grazie al teorema di Parseval, integrando la (110) tra $(-\infty, \infty)$:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_\nu^2}{1 + (\frac{\omega}{\beta})^2} d\omega = \frac{\beta \sigma_\nu^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\beta})^2} d\left(\frac{\omega}{\beta}\right) \\ &= \frac{\beta \sigma_\nu^2}{2\pi} \left[\text{atan}\left(\frac{\omega}{\beta}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\beta \sigma_\nu^2}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\beta}{2} \sigma_\nu^2. \end{aligned} \quad (111)$$

Un calcolo alternativo della varianza a regime σ_x^2 si può fare utilizzando l'equazione (102), ponendo $A = A^\top = -\beta$ e $F = \beta$:

$$-2\beta \sigma_x^2 + \beta^2 \sigma_\nu^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x^2 = \frac{\beta}{2} \sigma_\nu^2. \quad (112)$$

Antitrasformando la (110) si ottiene la autocorrelazione:

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sigma_\nu^2}{1 + (\frac{\omega}{\beta})^2}\right) = \frac{\beta}{2} \sigma_\nu^2 e^{-\beta|\tau|} \quad (113)$$

A volte si preferisce scrivere il modello di generazione di un processo di Gauss-Markov nella forma equivalente

$$\dot{x}(t) = -\beta x(t) + \nu(t), \quad x(0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2), \quad \beta > 0. \quad (114)$$

In questo caso la funzione di trasferimento del sistema e la PSD del processo sono:

$$H(j\omega) = \frac{1}{\beta + j\omega} = \left(\frac{1}{\beta}\right) \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\beta}\right)}, \quad S_x(j\omega) = \left(\frac{\sigma_\nu^2}{\beta}\right) \frac{1}{\left(1 + (\frac{\omega}{\beta})^2\right)}, \quad (115)$$

e la potenza (o varianza) σ_x^2 del processo si calcola risolvendo l'equazione (102) in cui stavolta $A = A^\top = -\beta$ e $F = 1$:

$$-2\beta \sigma_x^2 + \sigma_\nu^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{2\beta} \sigma_\nu^2. \quad (116)$$

Utilizzando questo modello, l'autocorrelazione $R_x(\tau)$ e la PSD $S_x(j\omega)$ del processo si scrivono come segue:

$$R_x(\tau) = \frac{\sigma_\nu^2}{2\beta} e^{-\beta|\tau|}, \quad S_x(j\omega) = \frac{\sigma_\nu^2}{\omega^2 + \beta^2}. \quad (117)$$

Consideriamo ora il problema di calcolare la PSD di un processo di Wiener. A tale scopo si potrebbe pensare di applicare il teorema di Wiener-Khintchine, e quindi di calcolare la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione. C'è però un problema: il processo di Wiener non è stazionario, e ciò pone un problema nell'applicazione del teorema. Nel caso dei processi non

stazionari definiti a partire da $t = 0$, è opportuno definire l'autocorrelazione a due tempi in questo modo

$$R_w(t, \tau) = E\left\{w\left(t - \frac{\tau}{2}\right)w\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right\}, \quad \tau \leq t. \quad (118)$$

In questo modo è possibile definire la PSD limite per $t \rightarrow \infty$, se esiste, ma il calcolo non è agevole.

Alternativamente, possiamo utilizzando la definizione formale (103) del rumore bianco, in modo da pensare il processo di Wiener generato da un modello lineare Gauss-Markov del tipo (114), con $\beta = 0$ e $F = 1$:

$$\dot{w}(t) = \nu(t), \quad w(0) \sim \mathcal{N}(w_0, \sigma_0^2). \quad (119)$$

Possiamo quindi considerare il processo di Wiener un processo di Gauss-Markov con il tempo di correlazione $1/\beta$ che tende all'infinito. Pertanto, dal punto di vista teorico, il processo di Wiener non tende ad essere stazionario e non ammette un'autocorrelazione di regime. Tuttavia, nell'ingegneria si considera ugualmente il limite delle (117) per $\beta \rightarrow 0$, e si ha

$$R_w(\tau) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sigma_\nu^2}{2\beta} e^{-\beta|\tau|}, \quad S_w(j\omega) = \frac{\sigma_\nu^2}{\omega^2}. \quad (120)$$

Pertanto, al processo di Wiener viene comunemente attribuita una PSD inversamente proporzionale al quadrato della frequenza.

F.3 Rumore bianco e processo di Wiener nei sensori inerziali

Anche se tutti i sensori inerziali commerciali, accelerometri e giroscopi, forniscono una misura campionata della grandezza fisica, con intervallo di campionamento fisso o impostabile via software (parametro di ODR: Output Data Rate), molti di parametri che caratterizzano il rumore di misura vengono forniti facendo riferimento al modello sottostante a tempo continuo.

In questa sezione si farà riferimento ad un sensore generico che misura una quantità fisica (il segnale utile) a tempo-continuo, indicata con $s^c(t)$, affetta da rumore additivo $\nu^c(t)$, modellato come un processo stocastico a media nulla, e da una polarizzazione (bias) costante b . La misura a tempo continuo fornita dal sensore sarà indicata con $y^c(t)$:

$$y^c(t) = s^c(t) + \nu^c(t) + b. \quad (121)$$

Il sensore fornisce una misura a tempo discreto della quantità $y^c(t)$, con un passo di campionamento τ_s (sampling interval), e quindi con un ODR (Output Data Rate) di $1/\tau_s$ Hz (sampling frequency). La quantità fornita dal sensore negli istanti di campionamento $k\tau_s$, multipli interi dell'intervallo di campionamento τ_s , e che indicheremo con y_k^d , non è il valore di $y^c(t)$ per $t = k\tau_s$, ma è la media di $y^c(t)$ nell'intervallo di campionamento precedente $[(k-1)\tau_s, k\tau_s)$. Per un più agevole utilizzo delle notazioni, in questo rapporto definiamo y_k^d come la media di $y^c(t)$ nell'intervallo $[k\tau_s, (k+1)\tau_s)$

$$y_k^d = \frac{1}{\tau_s} \int_{(k-1)\tau_s}^{k\tau_s} y^c(\theta) d\theta = \frac{1}{\tau_s} \int_0^{\tau_s} y^c(k\tau_s + t') dt' \quad (122)$$

Definendo

$$s_k^d = \frac{1}{\tau_s} \int_0^{\tau_s} s^c(k\tau_s + t') dt', \quad \nu_k^d = \frac{1}{\tau_s} \int_0^{\tau_s} \nu^c(k\tau_s + t') dt' \quad (123)$$

le misure fornite con frequenza $1/\tau_s$ si possono scrivere come

$$y_k^d = s_k^d + \nu_k^d + b. \quad (124)$$

Abbiamo visto nella sezione F.2.1 che se il rumore è bianco, effettuare la media delle misure su un intervallo finito riduce la varianza del rumore in modo inversamente proporzionale alla lunghezza dell'intervallo di misura. Questo effetto vantaggioso si ottiene anche per rumori con PSD non costante, non bianchi quindi, per intervalli di media non troppo elevati. Per questo motivo, come già detto nella sezione F.2.1, è prassi comune effettuare il downsampling o decimazione delle misure, riducendo così l'ODR del sensore. Indicheremo con $\bar{y}_{k,m}^d$ la media delle misure y_k^d effettuata sull'intervallo discreto $[k, k+m)$:

$$\bar{y}_{k,m}^d = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} y_{k+j}^d = \frac{1}{m\tau_s} \int_0^{m\tau_s} \nu^c(k\tau_s + t') dt'. \quad (125)$$

Definendo

$$\bar{s}_{k,m}^d = \frac{1}{m\tau_s} \int_0^{m\tau_s} s^c(k\tau_s + t') dt', \quad \bar{\nu}_{k,m}^d = \frac{1}{m\tau_s} \int_0^{m\tau_s} \nu^c(k\tau_s + t') dt', \quad (126)$$

le misure fornite con frequenza $1/m\tau_s$ (coefficiente di decimazione m) si possono scrivere come

$$\bar{y}_{k,m}^d = \bar{s}_{k,m}^d + \bar{\nu}_{k,m}^d + b, \quad \text{con } k = 0, m, 2m, \dots \quad (127)$$

Va osservato che il downsampling delle misure non ha alcun effetto sul bias costante b .

Come già detto, la PSD (Power Spectral Density) del processo a tempo continuo $\nu^c(t)$, che indicheremo con $S_\nu(j\omega)$ o $S_\nu(j2\pi f)$, e la conoscenza del bias b costituiscono una caratterizzazione completa del rumore del sensore.

In letteratura si è osservato che le componenti più significative di un sensore inerziale sono tre, e ciascuna corrisponde ad un preciso andamento della PSD (Farrell et al. 2022). In pratica, considerando uno sviluppo della PSD in serie di potenze, positive e negative, della frequenza f , i termini più significativi della PSD sono

$$S_\nu(j2\pi f) = \dots + N^2 + \frac{B^2}{2\pi f} + \frac{K^2}{(2\pi f)^2} + \dots \quad (128)$$

Questa PSD corrisponde a tre termini additivi indipendenti di rumore (tutti a media nulla):

$$\nu^c(t) = \dots + \nu_N(t) + \nu_B(t) + \nu_K(t) + \dots \quad (129)$$

In figura 13 è riportato il grafico ideale di una PSD relativa al rumore su un generico giroscopio, estratto da *IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros, IEEE Standard 952-2020 2022*. Oltre ad essere evidenziati i tre termini indicati nella (128), identificabili dalle tre pendenze diverse, è evidenziato un quarto termine proporzionale al quadrato della frequenza, relativo all'errore di quantizzazione, che nei moderni sensori è trascurabile alle frequenze di interesse, in quanto tutte le IMU commerciali hanno una risoluzione molto elevata.

Da quanto precedentemente discusso, sappiamo il termine costante nella PSD, indicato con N^2 , corrisponde a rumore bianco, mentre il termine inversamente proporzionale al quadrato

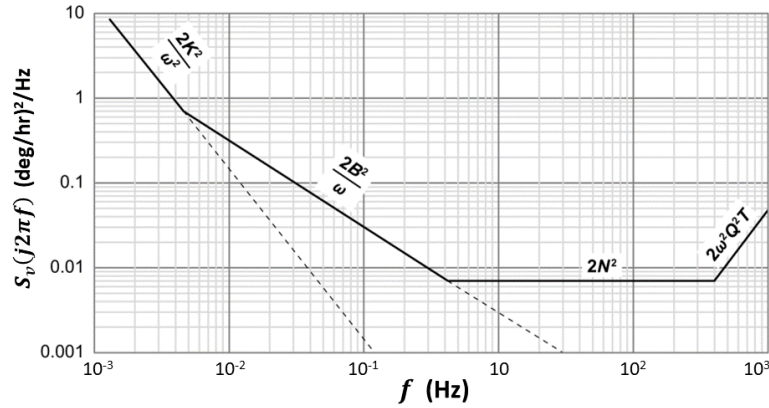


Figure 13: Rappresentazione schematica su scala logaritmica della PSD di un ipotetico giroscopio. Il coefficiente 2 è dovuto al fatto che viene rappresentata la PSD unilatera (solo frequenze positive).

della frequenza, $\frac{K^2}{(2\pi f)^2}$, corrisponde ad un processo di Wiener, che campionato diventa una Random Walk.

Il termine $\frac{B^2}{2\pi f}$, inversamente proporzionale alla frequenza, è un po' più problematico, in quanto non può essere generato mediante una rappresentazione con lo spazio di stato, ovvero tramite un processo di Gauss-Markov del tipo (114). Infatti, come discusso nella sezione corrispondente, solo i processi la cui PSD è un rapporto strettamente proprio di polinomi con sole potenze pari della frequenza possono essere rappresentati con lo spazio di stato mediante un processo di Gauss-Markov (equivalentemente, solo PSD fattorizzabili nella forma $H(j\omega)H^*(j\omega)$, con $H(j\omega)$ rapporto strettamente proprio di polinomi in ω).

La componente di rumore bianco nei giroscopi è indicata come *Angle Random Walk* (ARW) e negli accelerometri come *Velocity Random Walk* (VRW). È opportuno spiegare il motivo di queste denominazioni, cominciando dai giroscopi. Un giroscopio fornisce una misura della velocità di rotazione del corpo a cui è solidale, attorno ad uno specifico asse (asse di misura). La velocità angolare, comunemente espressa in deg/s o in deg/hr , in questa sezione sarà indicata con il simbolo $\Omega(t)$, per distinguerla dalla pulsazione $\omega = 2\pi f$. Se la misura fornita dal giroscopio fosse esente da rumore e l'asse di misura rimanesse costante durante tutto l'intervallo di misura, l'integrale delle misure fornirebbe l'angolo di cui è ruotato il corpo nell'intervallo:

$$\theta(n_2\tau_s) - \theta(n_1\tau_s) = \int_{n_1\tau_s}^{n_2\tau_s} \Omega(t')dt' = \sum_{k=n_1}^{n_2-1} \bar{\Omega}_k^d \tau_s, \quad (130)$$

dove $\bar{\Omega}_k^d$ è la media della velocità angolare nell'intervallo $[k\tau_s, (k+1)\tau_s)$, e pertanto $\bar{\Omega}_k^d \tau_s = \theta((k+1)\tau_s) - \theta(k\tau_s)$.

In presenza di un rumore di misura bianco $\nu_N(t)$ l'integrale fornisce un incremento angolare affetto da un errore. Indicando con $y^c(t)$ la misura (a tempo continuo) fornita dal sensore, nell'ipotesi di solo rumore bianco $\nu_N(t)$, il suo integrale nell'intervallo $[n_1\tau_s, n_2\tau_s)$ fornisce:

$$\int_{n_1\tau_s}^{n_2\tau_s} y^c(t')dt' = \sum_{k=n_1}^{n_2-1} \bar{y}_k^d \tau_s = \theta(n_2\tau_s) - \theta(n_1\tau_s) + \int_{n_1\tau_s}^{n_2\tau_s} \nu_N(t')dt'. \quad (131)$$

Come si vede, l'errore commesso sulla rotazione effettuata nell'intervallo $[n_1\tau_s, n_2\tau_s)$ è pari all'integrale del rumore bianco nell'intervallo, ed è quindi pari all'incremento di una Random Walk:

$$\sum_{k=n_1}^{n_2-1} \bar{y}_k^d \tau_s = \underbrace{\theta(n_2\tau_s) - \theta(n_1\tau_s)}_{\text{incremento angolare effettivo}} + \underbrace{w_N(n_2\tau_s) - w_N(n_1\tau_s)}_{\substack{\text{errore dovuto} \\ \text{all'integrazione del rumore bianco}}} . \quad (132)$$

Ecco spiegato perché nelle specifiche sui giroscopi la caratterizzazione del rumore bianco è fatta tramite un parametro chiamato ARW (Angle Random Walk), che ne quantifica l'effetto sul calcolo dell'angolo di rotazione.

Per capire esattamente come è definita la quantità che i costruttori chiamano ARW, si consideri che la varianza dell'errore angolare dovuto all'integrale del rumore bianco, caratterizzato da una PSD indicata in letteratura come N^2 (espressa in $(\text{deg}/s)^2/\text{Hz}$), è pari a $N^2 T$, dove T è l'ampiezza dell'intervallo di integrazione ($T = (n_2 - n_1)\tau_s$ nella (132)) espresso in secondi, in modo che la varianza dell'errore angolare risulta espressa in deg^2 .

Possiamo dire, quindi, che il valore N^2 della PSD del rumore bianco rappresenta la velocità di crescita della varianza dell'errore commesso nel calcolo dell'angolo di rotazione, calcolato integrando le misure del giroscopio, per la sola componente attribuibile al rumore bianco. Quindi, N^2 è espressa in deg^2/s , che è equivalente a $(\text{deg}/s)^2/\text{Hz}$ (si ricordi che N^2 è la densità della potenza del rumore rispetto alla frequenza, e che $1 \text{ Hz} = s^{-1}$).

Nelle specifiche dei giroscopi i costruttori preferiscono indicare l'effetto del rumore bianco sull'errore angolare in termini di *deviazione standard* (SD: Standard Deviation) invece che di *varianza*, e utilizzando le ore per definire l'intervallo temporale, invece dei secondi. Pertanto, per ricavare il parametro ARW occorre prima esprimere la PSD (coefficiente di crescita della varianza) in deg^2/hr , e poi farne la radice quadrata per ottenere la deviazione standard. Quindi

$$\begin{aligned} &\text{indicata con } N^2 \text{ la PSD in } \frac{(\text{deg}/s)^2}{\text{Hz}}, \text{ equivalente a } \frac{\text{deg}^2}{s} \\ &\text{la PSD in } \frac{\text{deg}^2}{\text{hr}} \text{ è } 3.600 \times (N^2) \frac{\text{deg}^2}{s} \\ &\text{da cui } (ARW) \frac{\text{deg}}{\sqrt{\text{hr}}} = 60 \times (N) \frac{(\text{deg}/s)}{\sqrt{\text{Hz}}} . \end{aligned} \quad (133)$$

Ecco quindi spiegato il significato della ARW e la sua unità di misura $\text{deg}/\sqrt{\text{hr}}$.

Ad esempio, nelle specifiche della IMU ADIS16485 della Analog Devices viene data una ARW pari a $0.3 \text{ deg}/\sqrt{\text{hr}}$. Questo significa che se si integrano le misure di velocità angolare, l'errore dovuto alla componente bianca del rumore dopo un ora avrà una deviazione standard di 0.3 deg . Va osservato che per calcolare la SD dell'errore commesso con una integrazione della durata di T ore, il coefficiente ARW va moltiplicato per \sqrt{T} . Ad esempio, per calcolare la SD dell'errore angolare dopo 4 ore di integrazione, occorre moltiplicare il parametro ARW espresso in $\text{deg}/\sqrt{\text{hr}}$ per $\sqrt{4} = 2 \text{ hr}$ (SD pari a 0.6 deg per la IMU ADIS16485).

Nell'implementazione dei filtri integratori occorre disporre del parametro N^2 o di N , e non della ARW nella forma fornita dai costruttori nei datasheet. Il calcolo di N^2 e N , a partire dalla ARW in $\text{deg}/\sqrt{\text{hr}}$, è il seguente

$$(N^2) \frac{(\text{deg}/s)^2}{\text{Hz}} = \frac{1}{3.600} (ARW^2) \frac{\text{deg}^2}{\text{hr}}, \quad (N) \frac{(\text{deg}/s)}{\sqrt{\text{Hz}}} = \frac{1}{60} (ARW) \frac{\text{deg}}{\sqrt{\text{hr}}} . \quad (134)$$

Calcoli analoghi possono essere svolti per ricavare il parametro chiamato Velocity Random Walk (VRW) negli accelerometri. In questo caso, integrando la misura dell'accelerazione lungo l'asse di misura, nell'ipotesi in cui la sua direzione rimanga costante nel tempo, si ha l'incremento della velocità del corpo a cui è solidale l'accelerometro. Si arriva così ad una formula che è l'equivalente della (132) per i giroscopi, dove però le \bar{y}_k^d sono le misure ottenute dall'accelerometro negli istanti $k\tau_s$, nell'ipotesi in cui vi sia solo rumore bianco:

$$\sum_{k=n_1}^{n_2-1} \bar{y}_k^d \tau_s = \underbrace{v(n_2\tau_s) - v(n_1\tau_s)}_{\text{incremento effettivo della velocità}} + \underbrace{w_N(n_2\tau_s) - w_N(n_1\tau_s)}_{\text{errore dovuto all'integrazione del rumore bianco}}. \quad (135)$$

Nella (135) $v(t)$ indica la velocità del corpo (integrale dell'accelerazione). Ecco spiegato perché il parametro che caratterizza il rumore bianco negli accelerometri è chiamato VRW (Velocity Random Walk). Quindi, negli accelerometri, N^2 è il coefficiente che fornisce l'incremento della varianza dell'errore commesso nel calcolo della velocità, che cresce linearmente con il tempo, e può essere espresso in $(m/s)^2/s$, unità di misura equivalente a $(m/s^2)^2/Hz$. Va osservato che, spesso, come misura dell'accelerazione si utilizzano le frazioni dell'accelerazione di gravità g (mg : milli-g, o μg : micro-g) invece di m/s^2 ($g \approx 10 m/s^2$). Ad esempio, utilizzando il milli-g la PSD N^2 viene espressa $(mg)^2/Hz$ (Nota: occorre fare attenzione alla m , che se posta accanto al simbolo g sta a indicare i milli-g, ma in ogni altro contesto indica il metro, come ad esempio in m/s^2).

Analogamente al parametro ARW nei giroscopi, il parametro VRW negli accelerometri di regola viene fornito dai costruttori utilizzando le ore come unità di tempo invece dei secondi, e in modo da indicare la crescita nel tempo della deviazione standard SD dell'errore di velocità, invece che della varianza. Si ha quindi

$$\begin{aligned} &\text{indicata con } N^2 \text{ la PSD in } \frac{(m/s^2)^2}{Hz}, \text{ equivalente a } \frac{(m/s)^2}{s} \\ &\text{la PSD in } \frac{(m/s)^2}{hr} \text{ è } 3.600 \times (N^2)_{\frac{(m/s^2)^2}{Hz}} \\ &\text{da cui } (VRW)_{\frac{(m/s)}{\sqrt{hr}}} = 60 \times (N)_{\frac{(m/s^2)}{\sqrt{Hz}}}. \end{aligned} \quad (136)$$

Nel caso in cui la PSD N^2 sia espressa in $(mg)^2/Hz$, occorre preliminarmente trasformare le unità di misura in $(m/s^2)^2/Hz$. Ricordando che $1 mg = 10^{-2} m/s^2$, e quindi $1 m/s^2 = 100 mg$, si ha

$$(N^2)_{\frac{(m/s^2)^2}{Hz}} = 10^{-4} \times (N^2)_{\frac{(mg)^2}{Hz}}. \quad (137)$$

Il calcolo di N^2 e N a partire dalla VRW espressa in $\frac{(m/s)}{\sqrt{hr}}$ è il seguente

$$(N^2)_{\frac{(m/s^2)^2}{Hz}} = \frac{1}{3.600} (VRW^2)_{\frac{(m/s)^2}{hr}}, \quad (N)_{\frac{(m/s^2)}{\sqrt{Hz}}} = \frac{1}{60} (VRW)_{\frac{(m/s)}{\sqrt{hr}}}. \quad (138)$$

In generale, nelle IMU l'errore dovuto al rumore bianco non è la componente principale dell'errore commesso nell'integrazione delle misure. Infatti, accelerometri e giroscopi presentano una polarizzazione (bias) caratterizzata da un termine costante e da componenti stocastiche

che variano nel tempo con andamenti a bassa e a bassissima frequenza, ma con un ampiezza in genere molto più significativa rispetto al rumore bianco. A differenza del rumore bianco, però, proprio in virtù della loro bassa frequenza, queste componenti possono essere stimate e compensate.

La componente costante del bias, la b nelle (121) e (124), viene in genere identificata e compensata dal costruttore, e non è riportata nei datasheet. La caratterizzazione della parte stocastica del bias in genere è divisa in tre componenti, ciascuna caratterizzata da un parametro:

- *turn-on* bias stability (o “*run-to-run* bias stability” o “repeatability” o “initial bias error”);
- “*in-run* bias stability” o “bias instability” (componente $\nu_B(t)$ nella (129));
- Rate Random Walk (nei giroscopi) / Acceleration Random Walk (negli accelerometri), (componente $\nu_K(t)$ nella (129));

Le componenti $\nu_B(t)$ e $\nu_K(t)$ sono caratterizzate, rispettivamente, dalle seguenti PSD

$$S_B(j2\pi f) = B^2/(2\pi f), \quad \text{in-run bias stability (Flicker noise)} \quad (139)$$

$$S_K(j2\pi f) = K^2/(2\pi f)^2, \quad \text{Rate/Acceleration Random Walk.} \quad (140)$$

Da quanto discusso precedentemente, solo processi aleatori con PSD costituite da rapporti di polinomi propri con sole potenze pari della frequenza ammettono rappresentazioni con lo spazio di stato (equazioni differenziali), utili per l'implementazione di filtri integratori. Pertanto, sulla base delle PSD (139) e (140), delle due componenti $\nu_B(t)$ e $\nu_K(t)$, solo la $\nu_K(t)$ ammette una rappresentazione con lo spazio di stato, in quanto caratterizzata da una PSD inversamente proporzionale al quadrato della frequenza.

La componente indicata con *turn-on* bias stability non è caratterizzata da una PSD, in quanto è un bias iniziale del dispositivo, diverso ad ogni avvio del sensore ma che poi rimane costante nel tempo (frequenza zero) durante il funzionamento del dispositivo. Può quindi essere modellato come una variabile aleatoria, il cui valore medio è il bias costante compensato dal costruttore. Il parametro fornito dal costruttore nei datasheet è la deviazione standard del bias all'avvio del dispositivo.

Per i giroscopi, il parametro *turn-on* bias stability può essere espresso in deg/s o deg/hr , mentre negli accelerometri è espresso in m/s^2 o mg (o anche μg , nei sensori più accurati). (di nuovo, si faccia attenzione alla m in mg , che sta per *milli-g*, mentre la m in m/s^2 sta per *metri*).

Esaminando la (140) si capisce che la componente $\nu_K(t)$ ha la stessa PSD di un processo di Wiener (o Random Walk, nella versione a tempo discreto). Infatti, confrontando la PSD (140) con quella di un processo di Wiener, data dalla in (120), e ricordando che $\omega = 2\pi f$, si vede che le due PSD coincidono, con $K = \sigma_w^2$.

dddd

Per analizzare le caratteristiche di rumore di un sensore inerziale, lo si mette in condizione di fornire una misura costante (tipicamente lo si rende solidale con la terra, ancorandolo al suolo) e si acquisiscono misure in un intervallo di tempo molto lungo (anche diversi giorni). Dalle misure acquisite viene sottratto il valor medio, eliminando così sia il segnale utile costante s^c che il bias b .

Indicheremo con L il numero di misure discrete acquisite, indicate con ν_k^d , $k = 0, \dots, L-1$.

ldddd

DA CONTINUARE...

ddd

Una strategia per ridurre il rumore sulla misura di un sensore è quella di mediarla su un intervallo di tempo scelto opportunamente. Se il sensore effettua la misura con una frequenza propria di campionamento T_s , si può mediarla su un tempo T_d multiplo di T_s , e quindi fornire la misura ad una frequenza di campionamento più bassa (downsampling).. La Noise Density (ND), o il suo quadrato (PSD: Power Spectral Density) è un valore ideale che suppone la possibilità di acquisire la misura a qualunque frequenza. ND è uno dei parametri che caratterizza i sensori Inerciali. In alternativa, può essere specificata la deviazione standard del rumore ad una specificata frequenza di campionamento.

In Matlab: [Matlab: inertial-sensor-noise-analysis-using-allan-variance](#)

Nice discussion [Stack-exchange: how-to-reconcile-units-in-accelerometer-noise-density](#)

Comparative Data of InvenSense IMUs

Zero Rate Level or Zero Rate Offset.

ZRO: Zero Rate Offset [Ericco: What Are Zero Offset And Zero Drift?](#)

Zero drift is zero offset stability, which represents the degree of dispersion of gyroscope output around its zero offset mean value when the input angular rate is zero, and is represented by the equivalent input angular rate corresponding to the standard deviation of the output in the specified time. Zero drift is the most important and basic index to measure the precision of FOG.

Introduction to MEMS gyroscopes and Gyros

Documento interessante: [Everything about STMicroelectronics' 3-axis digital MEMS gyroscopes_STM_Rep11](#)

In questo documento, a pagina 10, c'è scritto esplicitamente che nei giroscopi:

"the Rate Noise Density $((deg/s)/\sqrt{Hz})$ is also equivalent to an Angular Random Walk in deg/\sqrt{hour} ".

Inoltre, in questo documento, nella sezione 3.1 viene spiegato bene come ricavare il Noise Density Level dalla Allan Variance.

Nei giroscopi la ND è misurata in $deg/(s\sqrt{Hz})$ o $rad/(s\sqrt{Hz})$, o anche $deg/(h\sqrt{Hz})$. Moltiplicando la ND per la radice quadrata del sampling rate (SR) si ha la deviazione standard del rumore sul sensore se utilizzato a quel sampling rate ($\sigma_\omega = ND\sqrt{SR}$, ovvero $\sigma_\omega = ND/\sqrt{T_d}$).

F.4 Giroscopi

Parametri:

Angle Random Walk (ARW), espresso in deg/\sqrt{s} o deg/\sqrt{h}
Bias Instability espresso in deg/h (o, raramente, deg/s)

ODR: Output Data Rate (in genere impostabile, da un massimo ad un minimo).
AVAR parameters (Allan Variance Parameters)
DPS: Degree Per Second (mdps: milli-degree per second)

ARW: short term variation dell'uscita angolare.

L'ARW moltiplicato per la radice quadrata di un intervallo di tempo fornisce la deviazione standard dell'errore angolare che si ottiene integrando la misura del giroscopio in quell'intervallo di tempo, depurato dell'errore dovuto al bias (una random walk è forzata da un rumore a media nulla). Si tratta quindi della componente di drift dovuta alla componente di rumore senza memoria (bianco) e a media nulla.

La bias instability del giroscopio è una misura di come la polarizzazione della misura può cambiare nel tempo (drift). **come si usa?**

Nel modello

$$\begin{aligned}b_{\omega}(k+1) &= b_{\omega}(k) + \nu_{b,\omega}(k) \\ \omega_m(k) &= \omega(k) + b_{\omega}(k) + \nu_{\omega}(k)\end{aligned}$$

la varianza σ_{ω}^2 del rumore di misura $\nu_{\omega}(k)$ è pari al quadrato dell'ARW moltiplicata per il tempo di campionamento.

Il quadrato dell'ARW è la PSD (power spectral density) del rumore sul giroscopio (ARW in deg/\sqrt{s} , Noise Density in $\text{deg}/(\sqrt{s}\sqrt{\text{Hz}})$).

La ARW si può anche trovare nei diagrammi di Allan: nel caso della *Allan Deviation* $\sigma(\tau)$ è il valore assunto dal segmento a pendenza $\tau^{-1/2}$ per $\tau = 1$ s, nel caso della *Allan Variance* $\sigma^2(\tau)$ è il valore assunto dal segmento a pendenza τ^{-1} per $\tau = 1$ s.

Per passare dalla specifica di ARW in deg/\sqrt{s} a deg/\sqrt{h} occorre moltiplicare per $60 = \sqrt{3.600}$.

Bias instability: rumore a bassa frequenza. Densità spettrale inversamente proporzionale alla frequenza. Se B è la bias instability ed f_0 la frequenza di cut-off, la PSD $S_B(f)$ è

$$S_B(f) = \begin{cases} \frac{B^2}{2\pi f}, & f \leq f_0 \\ 0 & f > f_0. \end{cases} \quad (141)$$

come usare la bias instability per il calcolo della varianza del rumore $\nu_{b,\omega}(k)$?

Nella pagina di ADI-Engineering Zone: [FAQ: Gyroscope-in-run-bias-stability](#) c'è una spiegazione con esempio su IMU ADIS16485.

Viene detto che *The "in-run bias stability" typically references the minima of the Allan Variance curve.*

Alcuni parametri per il bias: in-run bias stability, turn-on bias stability (ripetibilità), e bias over temperature.

Vedere **Inertial Navigation Primer_VectorNav2020.pdf**.

[Inertial Navigation Primer \(con login\)](#)

Appendice A2: noise calculation.

(from Noise Density to Standard Deviation, from ARW to Standard Deviation).

In questa pagina ([Michael Wrona's Blog](#)) si fa vedere come dalla Allen Variance si possono calcolare l'ARW e la bias instability.

ARW e Rate Noise Density indicano la stessa tipologia di errore di misura: rumore bianco additivo sulle misure di velocità angolare. Si chiama Angle Random Walk perché integrando le misure del giroscopio, che sono velocità angolari, il suo contributo ha la statistica di una random walk, in quanto integrale di rumore bianco.

L'ARW viene quantificato in termini di densità di potenza nel dominio della frequenza (PSD: Power Spectrum Density). In molti testi viene utilizzato genericamente il simbolo N per indicare la PSD dell'ARW.

Unità di misura per indicare l'ARW:

nel giroscopio ADXRS610 della Analog Device viene indicata una Rate Noise Density di $0.05 \text{ deg/s}/\sqrt{\text{Hz}}$. Questa quantità corrisponde ad una PSD $N = 0.05^2 (\text{deg/s})^2 / \text{Hz}$ Poiché $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$, la PSD può anche essere espressa in deg^2/s , mentre l'ampiezza in $\text{deg}/\sqrt{\text{s}}$.

l'ampiezza della PSD

ARW: deg/\sqrt{h} ,

Cepire le unità di misura per la Bias instability (flicker noise) deg/h .

Paper: [MEMS GYROSCOPE PERFORMANCE COMPARISON USING ALLAN VARIANCE METHOD \(M. Vagner\)](#)

Parla di angle random walk, bias instability, rate random walk or drift ramp, and rate ramp

For the analysis of stochastic processes in a conjunction with gyroscopes, two methods are mainly: the first and more complex one is the power spectral density (PSD); the latter method is the Allan variance (AV). PSD is the transformation of time data series to the frequency domain...

Nella pagina web [ST: What is the bias in-run stability and instability of the LSM6DSR](#) si dice che il parametro *bias stability* negli accelerometri è la VRW (in $\mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$) e nei giroscopi la ARW (in $\text{mdps}/\sqrt{\text{Hz}}$) (*mdps*: milli-degree-per-second)

e si ricava dal primo tratto della Allan Variance (andamento proporzionale a τ^{-1})

mentre la *bias instability* sembra essere il forzamento della processo di Wiener che forza il bias, e si ricava dall'ultimo tratto della Allan Variance (andamento proporzionale a τ).

Nel documento, la bias-instability per gli accelerometri è in $\text{mg} * \text{s}/h$, mentre per i giroscopi è in deg/h .

F.5 Accelerometri

L'accelerazione può essere espressa in m/s^2 o in frazioni di g , tipicamente mg o μg . Quindi, la Noise Density può essere espressa in mg/\sqrt{Hz} o in $m/s^2/\sqrt{Hz}$. Ricordando che $Hz = s^{-1}$, si ha anche che la Noise Density si esprime in $m/s\sqrt{s}$. Ricordando anche che $1 mg \approx 0.01 m/s^2$, il cambio di unità di misura da ND in $m/s\sqrt{s}$ alla ND in mg/\sqrt{Hz}
Velocity (Rate) Random Walk (VRW)

F.6 Esempi

Le specifiche della IMU HG4930 della Honeywell vengono date dddd

F.6.1 Testi e Riferimenti

Paper interessante sull'analisi del rumore in generale: Kasdin [1995](#)

Questo articolo a pagina 806 chiarisce la discrepanza di un fattore 2 tra diversi modi di calcolare la PSD del processo di Wiener.

Testo Interessante sull'analisi dei segnali aleatori e di IMU e GPS: Grover e Hwang [1992](#)
Buon documento per la descrizione degli errori nella IMU è: Farrell et al. [2022](#)

Ottima tesi, in cui è descritta (non sempre bene) la caratterizzazione degli errori:
[Master thesis: Modeling Inertial Sensors Errors Using Allan Variance](#), H. Hou, 2004
vedi la calibrazione a pag. 32.

Effetti dei bias su accelerometri e giroscopi su errore di posizione, pag. 34.

Materiale di riferimento:

Qui c'è una buona descrizione: [ST: noise analysis and identification in MEMS sensor \(Allan+Hadamard...\)](#)

Qualitative: [VectorNav: IMU Specifications](#)

[FAQ: Gyroscope Angle Random Walk](#)

[Gyro Noise and Allan Deviation + IMU Example](#)

Allan Variance: ben presentata alla pagina: [Into to Allan Variance Analysis](#)

[ST mems-and-sensors - gyroscopes](#)

In questo documento sono spiegate bene un po' di cose:
[Everything about STMicroelectronics' 3-axis digital MEMS gyroscopes_STM_Rep11](#)
In particolare, equivalenza tra Rate Noise Density, ARW e poi Allan Variance.

F.7 Sistemi di riferimento e IMU

Quando si utilizzano gli angoli di Eulero per rappresentare l'orientamento relativo tra due frame, che indicheremo A e B , occorre essere molto precisi nella loro definizione, stabilendo la sequenza temporale delle rotazioni e stabilendo esattamente quali sono gli assi attorno a cui avviene la rotazione. Quindi, indicare solamente la terna o la sequenza di angoli di Roll-Pitch-Yaw (φ_x - φ_y - φ_z) non permette di stabilire l'orientamento relativo tra A e B . Occorre dire se le rotazioni avvengono attorno ad assi fissi o agli assi ruotati. Inoltre, bisogna indicare se è la sequenza che porta A a sovrapporsi a B o viceversa.

In alternativa, potrebbe essere conveniente semplicemente definire la formula di calcolo della matrice di rotazione da A a B , o viceversa. Ad esempio, posso dire che per rappresentare l'orientamento di B rispetto ad A sarà utilizzata la sequenza di angoli φ_x - φ_y - φ_z , da utilizzarsi come segue:

$${}^A R_B = R_z(\varphi_z)R_y(\varphi_y)R_x(\varphi_x). \quad (142)$$

Questa formula può essere interpretata in due modi. Nel primo, la sequenza delle tre rotazioni che portano A a sovrapporsi a B è 1) φ_x , 2) φ_y , 3) φ_z , e le rotazioni sono da intendersi attorno agli assi fissi del sistema A . Nel secondo, la sequenza delle tre rotazioni che portano A a sovrapporsi a B è 1) φ_z , 2) φ_y , 3) φ_x , e le rotazioni sono da intendersi attorno agli assi coordinati ruotati.

Se si vogliono identificare le tre rotazioni che portano B a sovrapporsi ad A , si può fare riferimento alla formula ${}^A R_B = {}^A R_B^\top$, ottenendo

$${}^B R_A = R_x^\top(\varphi_x)R_y^\top(\varphi_y)R_z^\top(\varphi_z) = R_x(-\varphi_x)R_y(-\varphi_y)R_z(-\varphi_z). \quad (143)$$

In genere l'orientamento di un veicolo è riferito rispetto al navigation-frame, ma in alcuni modelli potrebbe essere anche riferito al riferimento *ECEF*. Nel seguito intenderemo come orientamento del veicolo l'orientamento del *body-frame*, solidale con il veicolo, rispetto al *navigation-frame*. La rappresentazione univoca dell'orientamento del body-frame rispetto al navigation-frame è data dalla matrice di rotazione, o matrice DCM, ${}^b R_n$, o dalla sua inversa/trasposta ${}^n R_b$.

È importante stabilire preliminarmente quale sia il navigation-frame considerato e come venga fissato il body-frame sul veicolo.

Il sistema di riferimento del veicolo utilizzato dalla Hexagon Novatel per il suo sensore SPAN CPT è secondo la seguente convenzione: il body-frame è allineato con ENU se diretto verso Nord. Questo vuol dire che l'asse y_b del veicolo è puntato sul davanti, nella direzione di marcia, l'asse x_b punta a destra e l'asse z_b verso l'alto (figura 14).

Pertanto, secondo la convenzione della Novatel l'asse di rollio del veicolo è l'asse y_b mentre l'asse di pitch è l'asse x_b , contrariamente ad altri standard che si trovano frequentemente nella letteratura.

Gli angoli di Eulero calcolati dal sensore SPAN CPT, che vengono registrati nei file di log del sensore, sono quindi gli angoli di Roll (asse y_b), Pitch (asse x_b) e Heading o Azimuth (asse z_b). Quest'ultimo nella convenzione della Novatel equivale all'angolo di Yaw cambiato di segno. L'ordine delle rotazioni è Roll-Pitch-Yaw, e vengono eseguite attorno agli assi del veicolo (intrinseci) e non attorno a quelli del sistema di navigazione. La convenzione dei segni per le rotazioni è che le rotazioni di Roll e Pitch sono positive se viste in senso orario

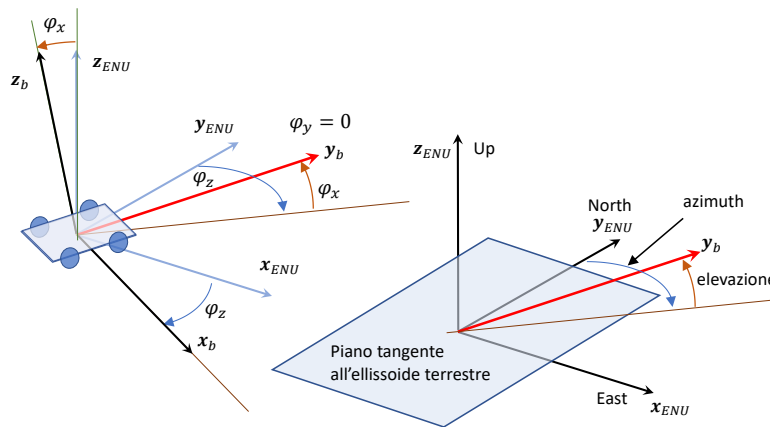


Figure 14: Definizione del body-frame nel dispositivo SPAN CPT della Hexagon-Novatel.

quando si guarda il versore dall'origine del sistema di riferimento (il senso diventa antiorario se l'osservatore è orientato come il versore dell'asse). La convenzione di segno è opposta per l'Heading o Azimuth: l'angolo è positivo se per l'osservatore orientato come l'asse z_b la rotazione avviene in senso orario. In questo modo, l'orientamento dell'asse y_b nel sistema di navigazione NED è definito dall'Azimuth ($-Yaw$) e dall'elevazione (Pitch), con la stessa convenzione utilizzata per il puntamento di strumenti ottici verso la sfera celeste, come si vede dalla figura 14, in cui sono rappresentati gli angoli di Pitch $\varphi_x > 0$ e di Yaw $\varphi_z < 0$, con Roll $\varphi_y = 0$.

Quindi, la matrice che rappresenta l'orientamento del body frame rispetto al local frame, secondo le convenzioni della Novatel per il sensore SPAN-CPT si calcola come segue

$${}^nR_b = R_y(Roll)R_x(Pitch)R_z(-Azimuth). \quad (144)$$

(mi sembrava ragionevole, ma guardando i dati de file log del NOVATEL-SPAN sembra che non sia così...)

Vedere **Inertial Navigation Primer_VectorNav2020.pdf**.

Pagina web con note sui riferimenti utilizzati da Xsens:

[https://mtidocs.xsens.com/mti-system-overview\\$coordinate-systems](https://mtidocs.xsens.com/mti-system-overview$coordinate-systems)

See questions at: https://base.xsens.com/s/?language=en_US

Nel testo Groves 2013 viene usata la convenzione secondo la quale il body-frame del veicolo è allineato al navigation-frame NED quando il veicolo è diretto verso Nord (figura 15)

Quindi, l'asse x_b è nella direzione di marcia del veicolo, y_b è diretto verso la destra del veicolo, mentre z_b è diretto verso il basso, a completare la terna ortogonale destra. Con questa definizione, se l'orientamento del body-frame rispetto al NED viene espresso con angoli RPY, nella sequenza Yaw-Pitch-Roll (φ_z - φ_y - φ_x) attorno agli assi del veicolo, allora l'angolo di Yaw φ_z rappresenta esattamente l'azimuth del versore x_b e l'angolo di Pitch φ_y , cambiato di segno, ne rappresenta l'elevazione (angoli $\varphi_z > 0$ e $\varphi_y < 0$ riportati nella figura 15 nel caso di Roll $\varphi_x = 0$).

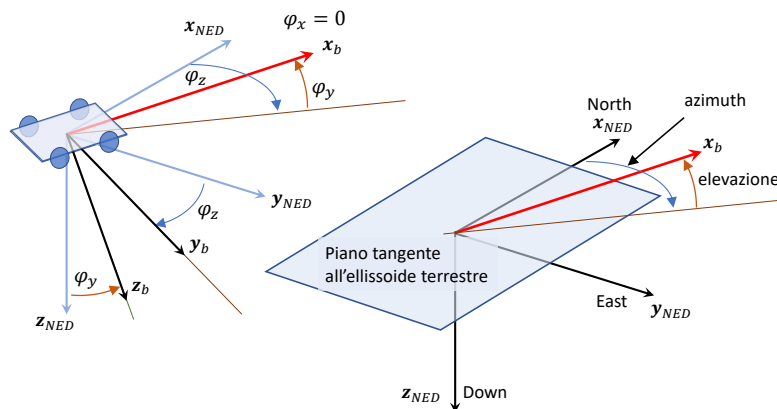


Figure 15: Definizione del body-frame secondo il testo Groves 2013.

Si noti che la sequenza $(\varphi_z - \varphi_y - \varphi_x)$ attorno agli assi del veicolo è equivalente alla sequenza $(\varphi_x - \varphi_y - \varphi_z)$ attorno agli assi NED. A complicare le cose si ha che molto spesso le rotazioni di Roll-Pitch-Yaw sono intese come le rotazioni che portano il Body-frame a sovrapporsi al Navigation-frame, e non il viceversa.

F.8 Materiale di riferimento sull'argomento

Raccogliere qui note sui riferimenti...

G La derivazione delle equazioni di navigazione

Il contenuto di questa sezione è stato già riportato (in parte) nel file:

[ASI_Report_RA2_09-12-2022](#)

G.1 Legame tra posizione e velocità in coordinate non inerziali

Quando si scrive un modello cinematico del moto di un veicolo, la posizione, l'orientamento e le velocità di traslazione e di rotazione andrebbero definite in modo chiaro. Questo purtroppo non accade generalmente nella letteratura scientifica relativa alla navigazione satellitare. Nella maggior parte dei contributi scientifici vengono utilizzati modelli senza spiegarne limitazioni e approssimazioni. Spesso, ma non sempre, sono citate fonti precedenti, a volte molto distanti nel tempo. È importante sottolineare che per molti modelli non è sufficiente citare la fonte, in quanto andrebbero completati con alcune informazioni.

La posizione e la velocità di un veicolo, o di un qualunque corpo rigido, sono quantità relative. È quindi necessario definire punto dello spazio rispetto al quale definire la posizione (spostamento) e la velocità del veicolo. Non solo. È anche necessario indicare uno specifico punto del veicolo del quale descrivere posizione e velocità. Per quanto riguarda l'orientamento, è necessario individuare un sistema di riferimento esterno (*external reference frame*) rispetto a cui descrivere l'orientamento del veicolo, o meglio di un sistema di riferimento solidale con

il veicolo (body-frame). Una volta definiti questi due sistemi, l'orientamento del veicolo è definito come l'orientamento del body-frame rispetto all'external-frame, e la velocità angolare del veicolo è la velocità angolare relativa tra i due sistemi di riferimento. Di regola, il punto di interesse del veicolo, quello di cui si calcola la posizione e la velocità, coincide con l'origine del body-frame utilizzato per la definizione dell'orientamento. Nelle applicazioni GNSS-stand alone, in genere il punto di interesse è il centro di fase dell'antenna satellitare del ricevitore GNSS. Nelle applicazioni di posizionamento ibrido, che prevedono l'integrazione tra GNSS e INS, il punto di interesse potrebbe essere la IMU, in particolare la posizione dell'accelerometro a tre assi, invece dell'antenna.

La definizione di punti e di sistemi di riferimento, esterni al veicolo e solidali al veicolo, non è sufficiente per descrivere matematicamente la posizione, orientamento e velocità del veicolo. A questo scopo è necessario utilizzare delle rappresentazioni matematiche che possano essere utilizzate per eseguire i calcoli. Le rappresentazioni di posizione, orientamento e velocità non sono uniche. Per quanto riguarda la posizione e la velocità del punto di interesse del veicolo occorre indicare il sistema di coordinate utilizzato. Va osservato che le equazioni differenziali che legano posizione, velocità e accelerazione, dipendono molto dal sistema di coordinate scelto, in particolare se si utilizzano sistemi di riferimento non inerziali. Per quanto riguarda l'orientamento e la velocità angolare, sono diverse le rappresentazioni possibili, e non dipendono solo dalla scelta dei sistemi di riferimento, ma anche da alcune regole che vanno stabilite, come ad esempio la sequenza delle rotazioni di roll-pitch-yaw utilizzata. Gli aspetti riguardanti le rotazioni saranno considerati più avanti. Cominciamo ora a mettere in chiaro alcuni aspetti riguardanti la rappresentazione di posizione e velocità di traslazione.

Nel seguito indicheremo con A il punto del veicolo utilizzato per descriverne posizione e velocità (centro antenna, IMU, centro di massa, o altro).

Se consideriamo un sistema inerziale, come ECI, la velocità del punto A rispetto a due punti qualsiasi dello spazio che siano fissi rispetto a ECI è la stessa. Se invece consideriamo due punti, P e Q , solidali con la terra, e quindi con il sistema ECEF, la velocità di A risulterà diversa se riferita a P o a Q (a meno che il segmento \overline{PQ} non sia allineato con l'asse di rotazione terrestre). Partiamo dalla considerazione che la velocità di A rispetto all'origine di ECEF, indicata con C , coincide con la velocità di A rispetto all'origine di ECI, in quanto le due origini coincidono (centro nominale di massa della terra).

La velocità del punto P sulla superficie terrestre, solidale con ECEF, rispetto a C è data da

$$\dot{\mathbf{r}}_{CP} = \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}_{CP}, \quad (145)$$

dove $\boldsymbol{\omega}_{ie}$ è la velocità di rotazione della terra. Andremo adesso ad esprimere la velocità $\dot{\mathbf{r}}_{CP}$ sia nelle coordinate ECI che nelle coordinate ECEF. Nel seguito, dato un vettore \mathbf{r} , indicheremo con ${}^i\mathbf{r}$ le sue coordinate inerziali (ECI) e con ${}^e\mathbf{r}$, le sue coordinate ECEF, non inerziali. Abbiamo quindi la posizione del punto P che dipende dal tempo in coordinate ECI, ed è costante in coordinate ECEF:

$${}^i\mathbf{r}_{CP}(t) = {}^iR_e(t) {}^e\mathbf{r}_{CP}. \quad (146)$$

A questo punto occorre fare attenzione al fatto che la velocità del punto P rispetto a C è diversa da zero, indipendentemente dai sistemi di riferimento, ed è data dall'equazione (145). Occorre osservare che, nonostante la velocità $\dot{\mathbf{r}}_{CP}$ sia diversa da zero, le coordinate ECEF

del vettore \mathbf{r}_{CP} sono costanti. Questo accade perché solo nei sistemi inerziali, come ECI, la derivata delle coordinate di una posizione coincide con la rappresentazione coordinata del vettore velocità. Questo non accade, invece, nei sistemi non inerziali, come ECEF. Per formalizzare queste proprietà, nel seguito la derivata della rappresentazione di un vettore \mathbf{r} in un sistema di coordinate ${}^a S = (O_a, \mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)$, inerziale o no, sarà indicata con la notazione ${}^a \dot{\mathbf{r}}^{(1)}$, per distinguerla dalla rappresentazione della derivata $\dot{\mathbf{r}}$ nelle coordinate di ${}^a S$, indicata con ${}^a \dot{\mathbf{r}}$. Avremo quindi

$${}^a \dot{\mathbf{r}}^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} {}^a \mathbf{r}(t), \quad \text{e} \quad {}^a \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) \\ \mathbf{y}_a(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) \\ \mathbf{z}_a(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) \end{bmatrix}. \quad (147)$$

È importante constatare che ${}^a \dot{\mathbf{r}}(t) = {}^a \dot{\mathbf{r}}^{(1)}(t)$ solo nel caso in cui ${}^a S$ sia un sistema inerziale, ovvero quando i versori $(\mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)$ sono costanti e l'origine O_a viaggia con moto rettilineo uniforme.

Pertanto, nel caso di posizione e velocità del punto P solidale con la terra, nelle coordinate inerziali ECI si ha l'identità

$${}^i \dot{\mathbf{r}}_{CP}(t) = {}^i \dot{\mathbf{r}}_{CP}^{(1)}(t), \quad (148)$$

e quindi, senza possibilità di confusione, possiamo indicare le coordinate ECI della velocità di P rispetto a C anche con la notazione ${}^i \mathbf{v}_{CP}$. Viceversa, nel caso di coordinate ECEF l'identità (148) non sussiste. Considerato un punto P fisso sulla superficie terrestre, le sue coordinate nel sistema ECEF sono costanti, e pertanto si ha

$${}^e \dot{\mathbf{r}}_{CP}(t) \neq \frac{d}{dt} {}^e \mathbf{r}_{CP}(t) \quad \text{in quanto} \quad \begin{cases} {}^e \dot{\mathbf{r}}_{CP}(t) = {}^e R_i(t) {}^i \dot{\mathbf{r}}_{CP}(t), \\ \frac{d}{dt} {}^e \mathbf{r}_{CP} = 0, \quad \left[\text{o anche} \quad {}^e \mathbf{r}_{CP}^{(1)} = 0 \right]. \end{cases} \quad (149)$$

La (146) scritta in coordinate ECI ed ECEF diventa

$${}^i \dot{\mathbf{r}}_{CP}(t) = [{}^i \boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^i \mathbf{r}_{CP}(t), \quad {}^e \dot{\mathbf{r}}_{CP}(t) = [{}^e \boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e \mathbf{r}_{CP}(t). \quad (150)$$

Vediamo ora come esprimere la velocità di un punto A di un veicolo in movimento sulla superficie terrestre.

Innanzitutto, come già detto, la velocità di A è la stessa rispetto a qualunque punto di un sistema inerziale, come ECI, mentre la velocità di A sarà diversa rispetto a diversi della terra, in rotazione con ECEF.

Quindi, per definire correttamente la velocità di A rispetto alla terra occorre specificare un punto di riferimento. Si consideri ad esempio la figura 16, in cui è raffigurato il punto A (il veicolo), e due punti P e Q , sulla superficie terrestre, che possono essere utilizzati come riferimenti rispetto a cui calcolare posizione e velocità di A . Dalle relazioni

$$\mathbf{r}_{PA} = \mathbf{r}_{CA} - \mathbf{r}_{CP}, \quad \mathbf{r}_{QA} = \mathbf{r}_{CA} - \mathbf{r}_{CQ}, \quad (151)$$

dove \mathbf{r}_{CA} è la posizione di A rispetto al centro della terra (C : centro ECEF e ECI), derivando si ha

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{PA} &= \dot{\mathbf{r}}_{CA} - \dot{\mathbf{r}}_{CP}, & \dot{\mathbf{r}}_{QA} &= \dot{\mathbf{r}}_{CA} - \dot{\mathbf{r}}_{CQ}, \\ &= \dot{\mathbf{r}}_{CA} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}_{CP}, & &= \dot{\mathbf{r}}_{CA} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}_{CQ}. \end{aligned} \quad (152)$$

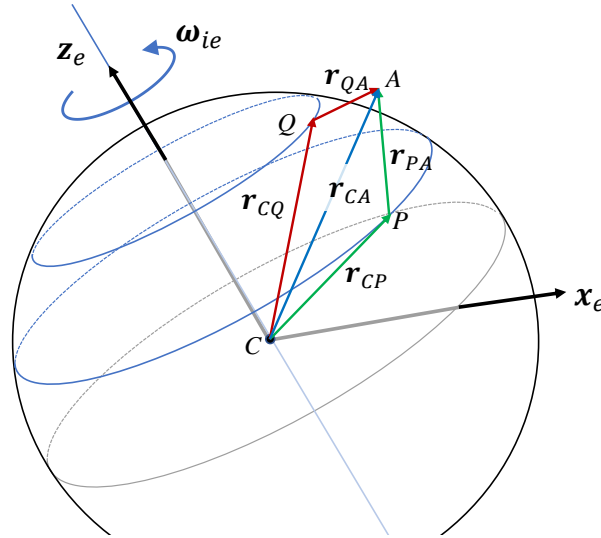


Figure 16: Il veicolo (punto A) e due riferimenti P e Q sulla superficie terrestre.

A meno di casi particolari, se $P \neq Q$ in generale $\omega_{ie} \times \mathbf{r}_{CP} \neq \omega_{ie} \times \mathbf{r}_{CQ}$, e quindi

$$\dot{\mathbf{r}}_{PA} \neq \dot{\mathbf{r}}_{QA}. \quad (153)$$

Le espressioni (152) delle velocità del punto A rispetto a P e rispetto a Q tengono conto del fatto che i punti P e Q si muovono in modo solidale con la terra. La differenza tra $\dot{\mathbf{r}}_{PA}$ e $\dot{\mathbf{r}}_{QA}$ è pari a

$$\dot{\mathbf{r}}_{PA} - \dot{\mathbf{r}}_{QA} = -\omega_{ie} \times (\mathbf{r}_{CP} - \mathbf{r}_{CQ}), \quad (154)$$

che è pari alla velocità di Q rispetto a P : $\dot{\mathbf{r}}_{PQ} = \omega_{ie} \times (\mathbf{r}_{CQ} - \mathbf{r}_{CP})$ (si osservi che nel caso particolare in cui il segmento $\mathbf{r}_{PQ} = \mathbf{r}_{CQ} - \mathbf{r}_{CP}$ fosse allineato con ω_{ie} si avrebbe $\dot{\mathbf{r}}_{PA} = \dot{\mathbf{r}}_{QA}$).

Consideriamo l'espressione in coordinate ECEF della velocità del punto A rispetto al punto P . Dalla prima delle (152) si ha

$${}^e\dot{\mathbf{r}}_{PA}(t) = {}^e\dot{\mathbf{r}}_{CA}(t) - [{}^e\omega_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{CP}. \quad (155)$$

Andiamo ora a calcolare un'espressione per la derivata delle coordinate ECEF della posizione di A rispetto a P , ovvero ${}^e\mathbf{r}_{PA}^{(1)}(t)$. La posizione di A rispetto a P , indicata con \mathbf{r}_{PA} può essere scritta come integrale della velocità (convenzionalmente con istante iniziale $t = 0$):

$$\mathbf{r}_{PA}(t) = \mathbf{r}_{PA}(0) + \int_0^t \dot{\mathbf{r}}_{PA}(\tau) d\tau. \quad (156)$$

Questo integrale può essere correttamente calcolato utilizzando un sistema di coordinate inerziali, come ECI:

$${}^i\mathbf{r}_{PA}(t) = {}^i\mathbf{r}_{PA}(0) + \int_0^t {}^i\dot{\mathbf{r}}_{PA}(\tau) d\tau. \quad (157)$$

Sarebbe invece profondamente scorretto calcolare l'integrale in coordinate non inerziali, come ECEF. Per avere la posizione $\mathbf{r}_{PA}(t)$ in coordinate ECEF occorre trasformare il vettore ${}^i\mathbf{r}_{PA}(t)$ mediante la matrice di rotazione ${}^eR_i(t) = {}^iR_e^\top(t)$:

$${}^e\mathbf{r}_{PA}(t) = {}^eR_i(t) {}^i\mathbf{r}_{PA}(t) = {}^eR_i(t) {}^i\mathbf{r}_{PA}(0) + {}^eR_i(t) \int_0^t {}^i\dot{\mathbf{r}}_{PA}(\tau) d\tau. \quad (158)$$

Andando a calcolare la derivata di questa espressione per ${}^e\mathbf{r}_{PA}(t)$, occorre ricordare che ${}^e\dot{R}_i = [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ei} \times] {}^eR_i$, dove $\boldsymbol{\omega}_{ei}$ è la velocità di rotazione di ECI rispetto a ECEF, che è uguale in modulo ma opposta in segno alla velocità angolare di ECEF rispetto a ECI, ovvero $\boldsymbol{\omega}_{ie} = -\boldsymbol{\omega}_{ei}$. Pertanto⁶ ${}^e\dot{R}_i = -[{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^eR_i$, e quindi ${}^e\dot{R}_i {}^i\mathbf{r} = -[{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}$. Derivando la (158) avremo quindi

$${}^e\mathbf{r}_{PA}^{(1)}(t) = -[{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^eR_i(t) {}^i\mathbf{r}_{PA}(0) - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^eR_i(t) \int_0^t {}^i\dot{\mathbf{r}}_{PA}(\tau) d\tau + {}^eR_i(t) {}^i\dot{\mathbf{r}}_{PA}(t). \quad (159)$$

Sostituendo l'integrale $\int_0^t {}^i\dot{\mathbf{r}}_{PA}(\tau) d\tau = {}^i\mathbf{r}_{PA}(t) - {}^i\mathbf{r}_{PA}(0)$, e semplificando si ha finalmente l'espressione per la derivata delle coordinate ${}^e\mathbf{r}_{PA}(t)$:

$${}^e\mathbf{r}_{PA}^{(1)}(t) = {}^e\dot{\mathbf{r}}_{PA}(t) - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{PA}(t). \quad (160)$$

Da questa espressione si vede che se si confondono le quantità ${}^e\mathbf{r}_{PA}^{(1)}(t)$ e ${}^e\dot{\mathbf{r}}_{PA}(t)$ si commette un errore pari a

$${}^e\mathbf{r}_{PA}^{(1)}(t) - {}^e\dot{\mathbf{r}}_{PA}(t) = -[{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{PA}(t). \quad (161)$$

Per avere un'idea dell'ordine di grandezza che si commette, considerando che $\omega_{ie} = 7.2921 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$, se il veicolo A si muove entro un raggio di 1 Km dal punto P , nel caso peggiore la differenza tra ${}^e\mathbf{r}_{PA}^{(1)}(t)$ e ${}^e\dot{\mathbf{r}}_{PA}(t)$ è pari a $7.2921 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$ (inferiore ad un decimetro al secondo).

Pertanto, nelle equazioni di navigazione scritte nelle coordinate ECEF, la quantità da integrare per ottenere la posizione di A relativa ad un punto P è la (160):

$$\begin{aligned} {}^e\mathbf{r}_{PA}(t) &= {}^e\mathbf{r}_{PA}(0) + \int_0^t {}^e\mathbf{r}_{PA}^{(1)}(\tau) d\tau \\ &= {}^e\mathbf{r}_{PA}(0) + \int_0^t {}^e\dot{\mathbf{r}}_{PA}(\tau) d\tau - \int_0^t [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{PA}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (162)$$

È invece errato scrivere

$${}^e\mathbf{r}_{PA}(t) = {}^e\mathbf{r}_{PA}(0) + \int_0^t {}^e\dot{\mathbf{r}}_{PA}(\tau) d\tau, \quad (163)$$

in quanto viene omissso l'integrale del termine $-[{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{PA}$. Chiaramente, su lunghi percorsi l'errore si accumula e quindi l'integrazione della (163), se non opportunamente corretta, può portare ad errori inaccettabili.

Va inoltre osservato che quando ci si riferisce genericamente alla velocità di un veicolo nel sistema ECEF, bisognerebbe specificare rispetto a quale punto della terra viene definita tale velocità. Infatti, dalle equazioni (152) abbiamo visto che in generale $\dot{\mathbf{r}}_{PA} \neq \dot{\mathbf{r}}_{QA}$.

Se si vuole integrare la velocità di A per ottenere la posizione \mathbf{r}_{CA} nelle coordinate ECEF, basta sostituire il punto P con C nella formula (160). Però è inusuale considerare la velocità $\dot{\mathbf{r}}_{CA}$ di un veicolo rispetto al centro C della terra (un veicolo fermo sulla superficie della terra, ad una latitudine di 42° , avrebbe una componente verso est della velocità pari a circa 350 m/s ,

⁶Ricordiamo che ${}^iR_e(t) = R_z(\omega_{ie}(t - t_0))$ e ${}^eR_i(t) = R_z(-\omega_{ie}(t - t_0))$, dove $R_z(\theta)$ è la matrice che opera la rotazione di un angolo θ attorno all'asse z , ω_{ie} la velocità scalare di rotazione terrestre, e t_0 è un qualsiasi istante di tempo in cui ECEF e ECI risultano allineati.

che equivale a circa 1.250 Km/h). Pertanto normalmente si considera la velocità di un veicolo rispetto a punti a lui vicini.

Per arrivare all'equazione differenziale che lega la velocità $\dot{\mathbf{r}}_{PA}$ di A rispetto ad un punto P (vicino) alla posizione \mathbf{r}_{CA} , riferita quindi all'origine C del sistema ECEF, si parte dalla formula (160), in cui si sostituisce il punto P con C :

$${}^e\mathbf{r}_{CA}^{(1)}(t) = {}^e\dot{\mathbf{r}}_{CA}(t) - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{CA}(t), \quad (164)$$

e si sostituisce ${}^e\dot{\mathbf{r}}_{CA}(t)$ con l'espressione ricavata dalla (155), ottenendo

$${}^e\mathbf{r}_{CA}^{(1)}(t) = {}^e\dot{\mathbf{r}}_{PA}(t) + [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{CP} - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{CA}(t). \quad (165)$$

Considerando che ${}^e\mathbf{r}_{CP} - {}^e\mathbf{r}_{CA} = -{}^e\mathbf{r}_{PA}$, si ha

$${}^e\mathbf{r}_{CA}^{(1)}(t) = {}^e\dot{\mathbf{r}}_{PA}(t) - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{PA}. \quad (166)$$

Si osservi che il termine a destra dell'equazione differenziale (166) coincide con il termine a destra della (160). Questo succede perché le coordinate di \mathbf{r}_{CA} e quelle di \mathbf{r}_{PA} nel sistema ECEF differiscono per una costante ($\mathbf{r}_{PA} - \mathbf{r}_{CA} = \mathbf{r}_{CP}$, con ${}^e\mathbf{r}_{CP}$ costante in quanto P solidale con la terra). Quindi, il risultato che si ottiene integrando (160) o (166) cambia solo per il valore iniziale (${}^e\mathbf{r}_{PA}(0)$ in (160) e ${}^e\mathbf{r}_{CA}(0)$ in (166)).

Nella letteratura sulla navigazione inerziale sono utilizzati modelli che considerano equazioni differenziali per il calcolo della posizione del punto A in funzione della velocità di A che utilizzano diversi sistemi di coordinate. A volte il sistema utilizzato per rappresentare la posizione è diverso dal sistema utilizzato per rappresentare la velocità. In questo documento abbiamo visto (vedremo) ad esempio qual è l'equazione differenziale che lega la velocità di A espressa in coordinate NED con la posizione di A espressa in LLA (Latitudine, Longitudine, Altitudine).

Spesso si vedono modelli in cui la velocità del veicolo viene presentata nelle coordinate di un sistema locale (sistema di navigazione), che può essere NED o ENU, e le velocità vengono integrate per fornire la posizione nel sistema di navigazione, e questo è scorretto, in teoria, anche se nella pratica per percorsi brevi del veicolo, in cui la porzione di ellissoide interessata è assimilabile ad un piano, i risultati dell'integrazione sono praticamente esatti.

G.2 Equazioni di Navigazione in coordinate ECEF

Nelle equazioni di navigazione riferite ad un punto A di un veicolo in movimento, normalmente la velocità del punto A nelle coordinate ECEF viene indicata con il simbolo ${}^e\mathbf{v}_A(t)$ (o, più semplicemente, con ${}^e\mathbf{v}(t)$). In genere, però, non viene chiarito il punto di riferimento rispetto al quale si calcola la velocità.

Torniamo a considerare la velocità del punto A (veicolo) rispetto ad un punto P solidale con ECEF, eq. (152), e la sua espressione in coordinate ECEF, (155):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{PA} &= \dot{\mathbf{r}}_{CA} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}_{CP}, \\ {}^e\dot{\mathbf{r}}_{PA}(t) &= {}^e\dot{\mathbf{r}}_{CA}(t) - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{CP}. \end{aligned} \quad (167)$$

Anche se non viene detto esplicitamente nei testi, il simbolo ${}^e\mathbf{v}_A(t)$ indica la velocità del punto A del veicolo rispetto al punto P solidale con ECEF corrispondente alla posizione

occupata dal punto A all'istante t . In sostanza, ciò equivale a operare la sostituzione a ${}^e\mathbf{r}_{CP} = {}^e\mathbf{r}_{CA}$ nella (167), per ottenere

$${}^e\mathbf{v}_A(t) = {}^e\dot{\mathbf{r}}_{CA}(t) - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{CA}(t). \quad (168)$$

D'altronde, se il punto A è solidale con ECEF (veicolo fermo) si ha

$${}^i\mathbf{r}_{CA}(t) = {}^iR_e(t) {}^e\mathbf{r}_{CA} \Rightarrow {}^i\dot{\mathbf{r}}_{CA}(t) = [{}^i\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^i\mathbf{r}_{CA}(t) \quad (169)$$

(da ${}^i\dot{\mathbf{r}}_{CA}(t) = {}^i\dot{R}_e(t) {}^e\mathbf{r}_{CA}$, ricordando che ${}^i\dot{R}_e(t) = [{}^i\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^iR_e(t)$).

La (169) nelle coordinate ECEF diventa ${}^e\dot{\mathbf{r}}_{CA}(t) = [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{CA}(t)$, e quindi, l'equazione (168) ci dice che a a veicolo fermo (rispetto a ECEF) si ha:

$${}^e\dot{\mathbf{r}}_{CA}(t) = [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{CA}(t), \Rightarrow {}^e\mathbf{v}_A(t) = 0. \quad (170)$$

Quindi possiamo interpretare la formula (168) come la velocità del veicolo (punto A) epurata dalla componente dovuta alla rotazione terrestre. In sostanza, possiamo anche riferirci alla velocità ${}^e\mathbf{v}_A(t)$ come alla velocità del veicolo rispetto al fondo stradale.

Il vettore ${}^e\mathbf{v}_A(t)$ può anche essere definito come la derivata della rappresentazione ${}^e\mathbf{r}_{CA}(t)$ del punto A del veicolo in coordinate ECEF. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} {}^e\mathbf{v}_A(t) &= {}^e\mathbf{r}_{CA}^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} ({}^eR_i(t) {}^i\mathbf{r}_{CA}(t)) = {}^eR_i(t) {}^i\dot{\mathbf{r}}_{CA}(t) + {}^e\dot{R}_e(t) {}^i\mathbf{r}_{CA} \\ &= {}^e\dot{\mathbf{r}}_{CA}(t) - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{CA}(t), \end{aligned} \quad (171)$$

che coincide con la (168).

Le cosiddette equazioni di navigazione sono le equazioni differenziali che consentono di ricavare la posizione del punto A e l'orientamento del veicolo a partire dalle misure di accelerazione e velocità angolare effettuate con la IMU. È fondamentale pertanto ricavare il legame tra le letture dell'accelerometro a tre assi solidale con il veicolo, e localizzato nel punto A , e la derivata del vettore ${}^e\mathbf{v}_A(t)$ (che non è una accelerazione). Per prima cosa però va ricavato il legame tra la accelerazione del punto A , definita in un sistema inerziale, e la derivata temporale di ${}^e\mathbf{v}_A(t)$, che si può indicare come ${}^e\dot{\mathbf{v}}_A(t)$ o come ${}^e\mathbf{v}_A^{(1)}(t)$.

Derivando la (168) (o (171)) e ricordando che ${}^e\dot{R}_i(t) = -[{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^eR_i(t)$ e che ${}^e\mathbf{v}_A(t) = {}^e\mathbf{r}_{CA}^{(1)}(t)$, si ha

$$\begin{aligned} {}^e\mathbf{v}_A^{(1)}(t) &= \frac{d}{dt} ({}^eR_i(t) {}^i\dot{\mathbf{r}}_{CA}(t) - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{CA}(t)) \\ &= {}^eR_i(t) {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{CA}(t) + {}^e\dot{R}_i(t) {}^i\dot{\mathbf{r}}_{CA}(t) - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{CA}^{(1)}(t) \\ &= {}^e\ddot{\mathbf{r}}_{CA}(t) - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\dot{\mathbf{r}}_{CA}(t) - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{v}_A(t). \end{aligned} \quad (172)$$

Sostituendo ${}^e\dot{\mathbf{r}}_{CA}(t) = {}^e\mathbf{v}_A(t) + [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{CA}(t)$ nella (172) si ha

$${}^e\mathbf{v}_A^{(1)}(t) = {}^e\ddot{\mathbf{r}}_{CA}(t) - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] ({}^e\mathbf{v}_A(t) + [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{r}_{CA}(t)) - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{v}_A(t), \quad (173)$$

da cui

$${}^e\mathbf{v}_A^{(1)}(t) = {}^e\ddot{\mathbf{r}}_{CA}(t) - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times]^2 {}^e\mathbf{r}_{CA}(t) - 2[{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{v}_A(t), \quad (174)$$

Questa è la formula che lega l'accelerazione del punto A con la derivata di ${}^e\mathbf{v}_A(t)$. Veniamo ora alla formula che lega ${}^e\mathbf{v}_A^{(1)}(t)$ alla lettura dell'accelerometro triassiale, indicata con $a_m(t)$. Le tre componenti x - y - z del vettore $a_m(t)$ sono le misure delle tre componenti dell'accelerazione nelle coordinate IMU, con l'aggiunta di una polarizzazione $b_a(t)$, un rumore $\nu_a(t)$ più una accelerazione apparente, pari all'accelerazione di gravità cambiata di segno (verso l'alto quindi), sempre nelle coordinate IMU. Se gli assi della IMU sono allineati con gli assi x - y - z del veicolo (body frame, bS), si ha

$$a_m(t) = {}^b\ddot{\mathbf{r}}_{CA}(t) - {}^b\mathbf{g}(t) + b_a(t) + \nu_a(t). \quad (175)$$

Per integrare la misura a_m nell'equazione che fornisce ${}^e\mathbf{v}_A^{(1)}(t)$ occorre utilizzare la matrice di rotazione ${}^eR_b(t)$, che rappresenta l'orientamento del body-frame rispetto a ECEF.

$$\begin{aligned} {}^e\ddot{\mathbf{r}}_{CA}(t) &= {}^eR_b(t) {}^b\ddot{\mathbf{r}}_{CA}(t) = {}^eR_b(t) \left(a_m(t) + {}^b\mathbf{g}(t) - b_a(t) - \nu_a(t) \right) \\ &= {}^eR_b(t) \left(a_m(t) - b_a(t) \right) + {}^e\mathbf{g}(t) - {}^eR_b(t) \nu_a(t). \end{aligned} \quad (176)$$

Sostituendo quest'ultima nella (174) si ha

$${}^e\mathbf{v}_A^{(1)}(t) = {}^eR_b(t) \left(a_m(t) - b_a(t) \right) - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times]^2 {}^e\mathbf{r}_{CA}(t) - 2[{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^e\mathbf{v}_A(t) + {}^e\mathbf{g}(t) - {}^eR_b(t) \nu_a(t). \quad (177)$$

Questa formula spesso viene scritta semplificando le notazioni, ponendo ${}^e\mathbf{v}^{(1)} = {}^e\mathbf{v}_A^{(1)}$, ${}^e\mathbf{r} = {}^e\mathbf{r}_{CA}$, ${}^e\Omega_{ie} = [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times]$:

$${}^e\mathbf{v}^{(1)}(t) = {}^eR_b(t) \left(a_m(t) - b_a(t) \right) - {}^e\Omega_{ie}^2 {}^e\mathbf{r}(t) - 2 {}^e\Omega_{ie} {}^e\mathbf{v}(t) + {}^e\mathbf{g}(t) - {}^eR_b(t) \nu_a(t). \quad (178)$$

Per poter integrare questa equazione è necessario conoscere la matrice ${}^eR_b(t)$, che rappresenta l'orientamento del body-frame rispetto a ECEF. La matrice ${}^eR_b(t)$ si calcola mediante opportuna integrazione delle misure di velocità angolare acquisite dal giroscopio a tre assi integrato nella IMU. Il giroscopio misura la velocità angolare del body-frame rispetto ad un sistema inerziale (ECI, o altro), a cui si aggiunge un bias $b_\omega(t)$ e un rumore di misura $\nu_\omega(t)$. Indicando con ω_m il vettore di misure acquisite dal giroscopio, si ha

$$\omega_m(t) = {}^b\boldsymbol{\omega}_{ib} + b_\omega(t) + \nu_\omega(t). \quad (179)$$

D'altro canto, la derivata della matrice ${}^eR_b(t)$ dipende da ${}^e\boldsymbol{\omega}_{eb}(t) = {}^e\boldsymbol{\omega}_{ei} + {}^e\boldsymbol{\omega}_{ib}(t)$. Ricordando che ${}^e\boldsymbol{\omega}_{ei} = -{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie}$, si ha

$$\begin{aligned} {}^e\dot{R}_b(t) &= [{}^e\boldsymbol{\omega}_{eb}(t) \times] {}^eR_b(t) = [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ib}(t) \times] {}^eR_b(t) + [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ei} \times] {}^eR_b(t) \\ &= [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ib}(t) \times] {}^eR_b(t) - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^eR_b(t) \\ &= {}^eR_b(t) [{}^b\boldsymbol{\omega}_{ib}(t) \times] - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^eR_b(t) \\ &= {}^eR_b(t) [(\omega_m(t) - b_\omega(t)) \times] - [{}^e\boldsymbol{\omega}_{ie} \times] {}^eR_b(t) - {}^eR_b(t) [\nu_\omega(t) \times]. \end{aligned} \quad (180)$$

Complessivamente, tenendo conto del fatto che ${}^e\mathbf{v}(t) = {}^e\mathbf{r}^{(1)}(t)$, le equazioni di navigazione (meccanizzazione della IMU strapdown) nelle coordinate ECEF sono le seguenti

$$\begin{aligned} {}^e\mathbf{r}^{(1)}(t) &= {}^e\mathbf{v}(t) \\ {}^e\mathbf{v}^{(1)}(t) &= {}^eR_b(t) \left(a_m(t) - b_a(t) \right) - {}^e\Omega_{ie}^2 {}^e\mathbf{r}(t) - 2 {}^e\Omega_{ie} {}^e\mathbf{v}(t) + {}^e\mathbf{g}(t) - {}^eR_b(t) \nu_a(t) \\ {}^e\dot{R}_b(t) &= {}^eR_b(t) [(\omega_m(t) - b_\omega(t)) \times] - {}^e\Omega_{ie} {}^eR_b(t) - {}^eR_b(t) [\nu_\omega(t) \times], \end{aligned} \quad (181)$$

alle quali vanno aggiunte le equazioni differenziali per l'evoluzione dei bias $b_a(t)$ e $b_w(t)$.
ddd

G.3 Note sui riferimenti della sezione

Il mio dubbio sulle coordinate locali ENU o NED è chiarito nel capitolo 10, sezione 10.2 (Coordinate Transformations), sottosezione 10.2.3 (Ellipsoidal coordinates and plane coordinates) del libro Hofmann-Wellenhof et al. 2001.

H Trasformazioni tra sistemi di Coordinate

Da LLA (φ, λ, h) (WGS84) a ECEF $(^e x, ^e y, ^e z)$:

$$\begin{aligned} ^e x &= (R_N(\varphi) + h) \cos(\varphi) \cos(\lambda), \\ ^e y &= (R_N(\varphi) + h) \cos(\varphi) \sin(\lambda), \\ ^e z &= (R_N(\varphi)(1 - e^2) + h) \sin(\varphi), \end{aligned} \quad (182)$$

dove R_N è il raggio di curvatura trasversale (misurato nella direzione da ovest a est) dell'ellissoide nel punto $p^{LLA} = (\varphi, \lambda, 0)$, chiamato anche *gran normale* (in inglese: *transverse radius of curvature*, o *normal r.o.c.* or *prime vertical r.o.c.*). È il raggio di curvatura della curva formata dall'intersezione dell'ellissoide con il piano formato dalla normale all'ellissoide nel punto $(\varphi, \lambda, 0)$ e la direzione ovest-est (retta tangente nel punto p^{LLA}) al parallelo passante per il punto p^{LLA} . il raggio di curvatura trasversale può essere calcolato con le seguenti espressioni equivalenti

$$R_N(\varphi) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)}} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (183)$$

Inoltre si ha

$$R_N(\varphi)(1 - e^2) = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)}}. \quad (184)$$

Nota: nel manuale RTKLIB 2.4.2 (Appendice E.2, pag. 134) la formula LLA2ECEF E.2.3 contiene un errore nel calcolo della $^e z$ (manca la h);

Nota: nel libro Groves 2013, a pagina 59, il raggio di curvatura trasversale viene chiamato R_E , in quanto è il raggio di curvatura che interessa il moto verso Est di un corpo sulla superficie dell'ellissoide. Il raggio di curvatura che interessa un veicolo che si muova verso Nord (su un meridiano quindi) viene chiamato *meridian radius of curvature* e indicato con il pedice N , ovvero R_N . In queste note noi chiameremo il raggio di curvatura del meridiano con il simbolo R_M eq. (187).

Attenzione quindi: R_N definito nel testo di Groves è quello che noi indichiamo con R_M , mentre R_E definito nel testo di Groves è quello che noi, insieme ad altri testi, indichiamo con R_N .

Nota: Data un'ellisse con a semiasse maggiore e b semiasse minore, si definiscono Flattening $f \in (0, 1]$ first eccentricity $e \in (0, 1]$ e second eccentricity $e' \geq 0$:

$$\begin{aligned} f &= 1 - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{a}, \\ e^2 &= 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{a^2} = f(2-f), \\ e'^2 &= \frac{a^2}{b^2} - 1 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} e^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \\ b &= a(1-f) = a\sqrt{1-e^2} \end{aligned}$$

Per ottenere la trasformazione inversa, da ECEF a LLA, occorre eseguire una procedura iterativa, riportata nel manuale [RTKLIB 2.4.2](#) (Appendice E.2) (riportata in figura 17)

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi_{r,0} &= 0 \\ \phi_{r,i+1} &= \arctan \left(\frac{z}{r} - \frac{ae^2 \tan \phi_{r,i}}{r\sqrt{1+(1-e^2)\tan^2 \phi_{r,i}}} \right) \\ \phi_r &= \lim_{i \rightarrow \infty} \phi_{r,i} \\ \lambda &= ATAN2(y, x) \\ h &= \frac{r}{\cos \phi_r} - \frac{a}{\sqrt{(1-e^2)\sin^2 \phi_r}} \end{aligned}$$

Figure 17: Procedura iterativa per il calcolo di LLA da ECEF (dal manuale di RTKLIB 2.4.2, appendice E.2).

La procedura iterativa è anche descritta alla pagina: [GNU.org: 6.3 Transformation from spatial to geographical coordinates](#).

Nella stessa pagina è riportata la formula approssimata dovuta a Bowring [1976](#); Bowring [1985](#)

Ecco la formula:

$$\begin{aligned} \varphi &= atan2 \left({}^e z + e^2 \frac{a^2}{b} \sin^3(\zeta), \xi - e^2 a \cos^3(\zeta) \right), \\ \lambda &= atan2({}^e y, {}^e x), \\ h &= \frac{\xi}{\cos \varphi} - R_N(\varphi), \end{aligned} \tag{185}$$

in cui

$$\zeta = atan2(a {}^e z, b \xi), \quad \xi = \sqrt{{}^e x^2 + {}^e y^2}. \tag{186}$$

È anche utile riportare l'espressione del raggio di curvatura meridionale R_M (raggio di curvatura del meridiano) nel punto dell'ellissoide di coordinate (φ, λ) :

$$R_M(\varphi) = \frac{(ab)^2}{\left((a \cos \varphi)^2 + (b \sin \varphi)^2\right)^{3/2}}. \quad (187)$$

Matrice che trasforma coordinate ENU in ECEF

$${}^E R_{ENU} = \begin{bmatrix} e^E & n^E & u^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\lambda) & -\sin(\varphi) \cos(\lambda) & \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ \cos(\lambda) & -\sin(\varphi) \sin(\lambda) & \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (188)$$

Sia ${}^E \mathbf{r}_r$ la posizione del ricevitore in ECEF, e ${}^E \mathbf{r}_p$ la posizione di un punto p prossimo al ricevitore, sempre in ECEF. Lo spostamento da \mathbf{r}_r a \mathbf{r}_p nelle coordinate ENU si calcola come segue

$${}^{ENU} \mathbf{r}_{rp} = {}^E R_{ENU}^\top ({}^E \mathbf{r}_p - {}^E \mathbf{r}_r).$$

I Gravitazione e Gravità

Nota: il Groves distingue tra *gravitational acceleration*, che è l'accelerazione verso il centro della terra dovuta all'attrazione gravitazionale, e *gravity acceleration*, che è l'accelerazione che subisce un corpo solidale con la terra in assenza di forze esterne, tenendo quindi conto della (apparente) forza centrifuga. Sono disponibili modelli, più o meno approssimati, per il calcolo della sola gravitational acceleration, o della gravity acceleration (pagina 70 di Groves [2013](#)).

J Formule ulteriori...

Questa sezione raccoglie formule che non sono state utilizzate, ma potrebbero rivelarsi utili...

J.1 Alcuni sviluppi in serie...forse utili?

In questa sezione sono riportati gli sviluppi in serie delle funzioni $f_L(\delta)$ e $f_R(\delta)$ definite in (39).

Calcolando le prime tre derivate delle funzioni $f_L(\delta)$ e $f_R(\delta)$ in $\delta = 0$ si ha

$$\begin{aligned} f_L(0) &= 0, & f_L^{(1)}(0) &= 1, & f_L^{(2)}(0) &= 2k_v, & f_L^{(3)}(0) &= 6k_v^2 + 2, \\ f_R(0) &= 0, & f_R^{(1)}(0) &= 1, & f_R^{(2)}(0) &= -2k_v, & f_R^{(3)}(0) &= 6k_v^2 + 2, \end{aligned} \quad (189)$$

come si vede sostituendo $\delta = 0$ e $k = k_v$ o $k = -k_v$ nelle formule seguenti

$$\begin{aligned} f(\delta; k) &= \frac{\sin \delta}{\cos \delta - k \sin \delta}, & f^{(1)}(\delta; k) &= \frac{1}{(\cos \delta - k \sin \delta)^2}, & f^{(2)}(\delta; k) &= \frac{2(\sin \delta + k \cos \delta)}{(\cos \delta - k \sin \delta)^3}, \\ f^{(3)}(\delta; k) &= \frac{2 \left(k^2 (2 \cos \delta^2 - 1) - 2 \cos \delta^2 + 2k^2 + 4k \cos \delta \sin \delta + 3 \right)}{(\cos \delta - k \sin \delta)^4}. \end{aligned} \quad (190)$$

Pertanto, lo sviluppo in serie di Taylor fino al terzo ordine attorno a $\vartheta_S = 0$ delle funzioni $f_L(\vartheta_S)$ e $f_R(\vartheta_S)$ restituisce:

$$\begin{aligned}\vartheta_L &\approx \frac{\sin \vartheta_L}{\cos \vartheta_L} \approx \vartheta_S + k_v \vartheta_S^2 + \left(k_v^2 + \frac{1}{3}\right) \delta^3, \\ \vartheta_R &\approx \frac{\sin \vartheta_R}{\cos \vartheta_R} \approx \vartheta_S - k_v \vartheta_S^2 + \left(k_v^2 + \frac{1}{3}\right) \delta^3.\end{aligned}\quad (191)$$

Una accuratezza superiore si ottiene sviluppando direttamente le funzioni $\text{atan}(f_L(\vartheta_S))$ e $\text{atan}(f_R(\vartheta_S))$ fino al quarto ordine attorno a $\vartheta_S = 0$:

$$\begin{aligned}\vartheta_L = \text{atan}(f_L(\vartheta_S)) &\approx \tilde{\delta}_L(\vartheta_S) = \vartheta_S + k_v \vartheta_S^2 + k_v^2 \vartheta_S^3 + \left(k_v^3 - \frac{k_v}{3}\right) \delta^4, \\ \vartheta_R = \text{atan}(f_R(\vartheta_S)) &\approx \tilde{\delta}_R(\vartheta_S) = \vartheta_S - k_v \vartheta_S^2 + k_v^2 \vartheta_S^3 - \left(k_v^3 - \frac{k_v}{3}\right) \delta^4.\end{aligned}\quad (192)$$

Lo sviluppo fino al terzo ordine della $f_L(\vartheta_S)$ o della $f_R(\vartheta_S)$ produce un errore inferiore a 2.5° quando $|\vartheta_S| = 45^\circ$ (con $k_v = 0.25$, ovvero $d_{FB} = 2 * d_{LR}$). L'errore diventa inferiore a 0.8° se viene utilizzato lo sviluppo fino al quarto ordine.

Per il calcolo approssimato di seno e coseno di ϑ_L e ϑ_R in funzione dell'angolo ϑ_S si può anche ricorrere alla seguente formula, che permette di calcolare il seno e il coseno di un angolo (purché compreso nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$) a partire dalla tangente:

$$a = \tan(\gamma) \Rightarrow \sin(\gamma) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}. \quad (193)$$

Possiamo quindi utilizzare i polinomi (191) che approssimano le tangenti di θ_L e θ_R e calcolare il seno e il coseno nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\sin \vartheta_L &\approx \frac{\tilde{T}_L}{\sqrt{1+\tilde{T}_L^2}}, & \text{con } \tilde{T}_L &= \vartheta_S + k_v \vartheta_S^2 + \left(k_v^2 + \frac{1}{3}\right) \delta^3 \approx \tan(\vartheta_L), \\ \cos \vartheta_L &\approx \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{T}_L^2}}, \\ \sin \vartheta_R &\approx \frac{\tilde{T}_R}{\sqrt{1+\tilde{T}_R^2}}, & \text{con } \tilde{T}_R &= \vartheta_S - k_v \vartheta_S^2 + \left(k_v^2 + \frac{1}{3}\right) \delta^3 \approx \tan(\vartheta_R), \\ \cos \vartheta_R &\approx \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{T}_R^2}},\end{aligned}\quad (194)$$

Riferimenti bibliografici

- Bowring, B. R. (1976). «Transformation from spatial to geographical coordinates». In: *Survey Review* 23 (181).
- (1985). «The accuracy of geodetic latitude and height equations». In: *Survey Review* 28 (218).
- Canale, M., L. Fagiano e C. Novara (2014). «A DVS-MHE approach to vehicle side-slip angle estimation». In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 22 (5).
- Chindamo, D., B. Lenzo e M. Gadola (2018). «On the vehicle sideslip angle estimation: A literature review of methods, models, and innovations». In: *Applied Sciences (Switzerland)* 8 (3).
- Farrell, J. A., F. O. Silva, F. Rahman e J. Wendel (2022). «Inertial Measurement Unit Error Modeling Tutorial: Inertial Navigation System State Estimation with Real-Time Sensor Calibration». In: *IEEE Control Systems* 42 (6).
- Grover, B. R. e P. Y. C. Hwang (1992). *Introduction to random signals and applied kalman filtering (second edition)*. Vol. 2. John Wiley.
- Groves, P. (2013). *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, Second Edition*. GNSS/GPS. Artech House.
- Hofmann-Wellenhof, B., H. Lichtenegger e J. Collins (2001). *Global positioning system: theory and practice*. Springer.
- IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros, IEEE Standard 952-2020* (2022).
- Kasdin, N. J. (1995). «Discrete Simulation of Colored Noise and Stochastic Processes and $1/f^\alpha$ Power Law Noise Generation». In: *Proc. of the IEEE* 83 (5).
- Liu, J., Z. Wang, L. Zhang e P. Walker (2020). «Sideslip angle estimation of ground vehicles: A comparative study». In: *IET Control Theory and Applications* 14 (20).
- Meguro, J., Y. Kojima, N. Suzuki e E. Teramoto (2012). «Positioning Technique Based on Vehicle Trajectory Using GPS Raw Data and Low-cost IMU». In: *Int. Journal of Automotive Engineering* 3 (2).
- Meguro, J., T. Arakawa, S. Mizutani e A. Takanose (2018). «Low-cost Lane-level Positioning in Urban Area Using Optimized Long Time Series GNSS and IMU Data». In: *Proc. of the IEEE Conf. on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*. Vol. 2018-November.
- Milanese, M., I. Gerlero e C. Novara (2014). «Effective vehicle sideslip angle estimation using DVS technology». In: *SAE Technical Papers*. Vol. 1.
- Park, G. (2022). «Vehicle Sideslip Angle Estimation Based on Interacting Multiple Model Kalman Filter Using Low-Cost Sensor Fusion». In: *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 71 (6).
- Petovello, M. (2003). *Real-Time Integration of a Tactical-Grade IMU and GPS for High-Accuracy Positioning and Navigation*. PhD thesis, University of Calgary, Alberta, Canada.
- Rehbinder, H. e X. Hu (2004). «Drift-free attitude estimation for accelerated rigid bodies». In: *Automatica* 40 (4).
- Takanose, A., Y. Kitsukawa, J. Meguro, E. Takeuchi, A. Carballo e K. Takeda (2021). «Eagleye: A Lane-Level Localization Using Low-Cost GNSS/IMU». In: *Proc. of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium, Proceedings*.

- Takanose, A., K. Takikawa, T. Arakawa e J. Meguro (2020). «Improvement of RTK-GNSS with Low-Cost Sensors Based on Accurate Vehicle Motion Estimation Using GNSS Doppler». In: *Proc. of IEEE Intelligent Vehicles Symposium*.
- Takikawa, K., Y. Atsumi, A. Takanose e J. Meguro (2021). «Vehicular trajectory estimation utilizing slip angle based on GNSS Doppler/IMU». In: *ROBOMECH Journal* 8 (1).
- Zhang, Y. e Y. Gao (2008). «Integration of INS and un-differenced GPS measurements for precise position and attitude determination». In: *Journal of Navigation* 61 (1).