

Manuela Dalla Mora

Alfredo Germani

Costanzo Manes

**INTRODUZIONE ALLA TEORIA  
DELL'IDENTIFICAZIONE  
DEI SISTEMI**

**1997**

# Indice

<b>Prefazione</b>	9
<b>Introduzione</b>	13
<b>1. Richiami e complementi di calcolo delle probabilità</b>	17
1.1 Richiami di topologia	17
1.2 Spazi di probabilità e variabili aleatorie	21
1.3 Elementi di teoria dell'integrazione	29
1.4 Valore sperato, varianza e funzione di distribuzione	32
1.5 Indipendenza di variabili aleatorie	39
1.6 Distribuzioni notevoli	47
1.6.1 Distribuzione binomiale	47
1.6.2 Distribuzione di Poisson	49
1.6.3 Distribuzione Gaussiana	50
1.6.4 Distribuzione di Cantor	55
1.7 Vettori di variabili aleatorie	57
1.8 Vettori aleatori gaussiani	64

1.9 Momenti di variabile aleatoria - Diseguaglianze notevoli	67
1.10 Convergenza di successioni aleatorie	73
1.11 Lo spazio di Hilbert delle variabili aleatorie	79
1.12 Misure assolutamente continue e teorema di Radon-Nikodym	85
1.13 Valore sperato condizionato	94
1.14 Teorema di Bayes	107
1.15 Condizionamento e proiezione su spazi di Hilbert	112
<b>2. Teoria della Stima</b>	117
2.1 Stima deterministica e stima probabilistica	117
2.2 Stima di Minima Varianza	123
2.3 Stima ottima in un vettore gaussiano	127
2.4 Stima lineare ottima	134
2.5 Stima di massima verosimiglianza	136
2.6 Teorema di Cramer-Rao	142
2.7 Proprietà di una stima	145
2.8 Esempi	148
2.9 Stima di minima varianza: un calcolo alternativo	162
2.10 Stime subottime: stima polinomiale	164
2.11 Stima simultanea di variabili aleatorie e parametri	179
<b>3. Identificazione parametrica dei sistemi lineari</b>	183
3.1 Formulazione del problema	183
3.2 Distinguibilità dell'uscita ed identificabilità	190
3.3 Consistenza della stima di massima verosimiglianza	199
<b>4. Il Filtro di Kalman</b>	215
4.1 Formulazione del problema	216
4.2 Sequenze di innovazione	224
4.3 Le equazioni del filtro	235

4.4	Calcolo della matrice di guadagno . . . . .	239
4.5	Il filtro con l'ingresso deterministico. . . . .	256
4.6	Richiami su sistemi lineari stazionari . . . . .	258
4.7	Filtro di Kalman asintoticamente ottimo . . . . .	269
4.8	Il filtro di Kalman nel caso di rumore di stato e di osservazione correlati . . . . .	294
4.9	Smoothing ottimo . . . . .	302
4.10	Il filtro di Kalman per sistemi tempo-continui con osservazioni discrete . . . . .	314
4.11	Il filtro di Kalman Esteso . . . . .	320
4.12	I minimi quadrati ricorsivi attraverso il filtro di Kalman . . . . .	325
4.13	Rumore non gaussiano: filtraggio quadratico . . . . .	333
<b>5.</b>	<b>Stima di stato e parametri nei sistemi lineari a tempo discreto . . . . .</b>	<b>339</b>
5.1	Impostazione del funzionale di verosimiglianza . . . . .	339
5.2	Stima di stato e parametri con il filtro di Kalman Esteso . . . . .	346
	<b>Indice analitico . . . . .</b>	<b>351</b>

# Prefazione

**Q**UESTE note contengono essenzialmente gli argomenti trattati nel corso di *Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati*, che dal 1990 viene svolto presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università dell'Aquila, per la parte relativa ai sistemi a tempo discreto.

Il testo è, per quanto possibile, autocontenuto. È comunque richiesta una conoscenza della Teoria dei Sistemi al livello dei corsi di base universitari. Nella scelta degli argomenti si sono privilegiati quei temi della teoria che permettono al lettore la comprensione degli articoli specialistici inerenti alla materia e che aprono la strada agli ulteriori approfondimenti. Non sono stati trattati argomenti fondamentali della Teoria dell'Identificazione dei sistemi a tempo discreto, quali le serie temporali, per i quali esistono numerosi testi anche in lingua italiana.

La nascita della Teoria dell'Identificazione può essere individuata nel trentennio che va dal 1930 al 1960, a cavallo della Seconda Guerra Mondiale. Parallelamente a quanto avvenuto in altri settori della scienza e dell'ingegneria, quali la Fisica Nucleare, la Radaristica, l'Elettronica e l'Aeronautica, gli eventi bellici hanno fornito una forte spinta allo sviluppo della Teoria dei Sistemi, del Controllo e dell'Identificazione.

Un contributo fondamentale alla nascita della Teoria dell'Identificazione è stato dato da Norbert Wiener (1894–1964), professore di matematica al Massachusetts Institute of Technology

(MIT) dal 1919 fino alla fine dei suoi giorni. Sin dagli inizi della seconda guerra mondiale Wiener fece parte di un progetto dedicato alla realizzazione di un sistema automatico di puntamento antiaereo che utilizzasse i dati forniti da un radar. Wiener risolse il problema derivando la funzione di trasferimento di un predittore a minima varianza dell'errore di predizione (filtro di Wiener) per sistemi lineari e stazionari a tempo continuo definiti dalla loro funzione di trasferimento. Il filtro di Wiener poteva essere realizzato utilizzando circuiti analogici. Negli stessi anni, l'Accademico russo Andrej Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987) sviluppava una soluzione simile per il problema della predizione ottima nei sistemi a tempo discreto (1941). Il lavoro di Wiener fu reso noto alla fine degli anni '40 in un rapporto dal titolo *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*. Nel 1948 Wiener pubblicò il libro che lo rese famoso, intitolato *Cibernetica*, con il quale fondava una nuova disciplina dedicata allo studio del controllo e della comunicazione negli animali e nelle macchine.

Wiener può essere considerato a pieno titolo il pioniere della teoria del filtraggio. Nei suoi lavori vengono estensivamente impiegati i metodi dell'analisi dei sistemi nei domini di Fourier e Laplace. Questo approccio limitava il campo di applicazione ai soli sistemi lineari e stazionari a regime. Inoltre i risultati ottenuti da Wiener non risultavano immediatamente estendibili al caso di sistemi con più ingressi ed uscite.

Un formidabile impulso allo sviluppo della teoria del filtraggio si è avuto con i lavori di Rudolf Emil Kalman (1930– ) (*A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, 1960, ASME; New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, 1961, ASME*) il secondo dei quali scritto in collaborazione con Richard Bucy. Questi lavori utilizzano per la prima volta tecniche nel dominio del tempo basate sulla rappresentazione dei sistemi con lo spazio di stato. Tali tecniche erano state appena introdotte nella teoria dei controlli automatici dei sistemi deterministici in quanto l'avvento, proprio in quegli anni, dei moderni sistemi di calcolo digitale ne permetteva il pieno utilizzo nelle applicazioni tecnologiche.

Lo stimatore a minima varianza dell'errore, elaborato da Kalman, non venne immediatamente recepito dalla comunità scientifica internazionale. Solo quando la NASA ne fece un impiego estensivo per la determinazione dell'orbita dei satelliti artificiali, quello che poi venne chiamato *Filtro di Kalman* assunse un ruolo primario nell'ingegneria aerospaziale. Fu usato ad esempio nelle missioni spaziali *Ranger*, *Mariner* e *Apollo*, effettuate negli anni '60. In particolare il computer a bordo del modulo lunare dell'Apollo 11 (1969), si serviva di un filtro di Kalman per guidarne la discesa sulla superficie lunare. Contemporaneamente un altro filtro di Kalman (con 21 variabili di stato) girava su di un computer nella base di Houston, con lo scopo di stimare l'assetto del modulo lunare a partire dai dati ricevuti a terra da quattro giganteschi radar ad effetto doppler. L'ingegner William Lear, capo progettista dell'intero sistema, racconta che la verifica finale del sistema avvenne soltanto il giorno precedente alla partenza di Armstrong, Aldrin e Collins. Il programma era congegnato in modo che una discrepanza tra le stime a terra e le misure a bordo relative all'assetto del modulo avrebbe comportato l'interruzione immediata della missione.

Da allora in poi il Filtro di Kalman venne utilizzato in ogni sistema automatico di guida (negli aerei, nelle navi e nei vettori spaziali). Oggi, il Filtro di Kalman trova applicazione nei più diversi campi della scienza e della tecnologia; dalla Sismologia alla Bioingegneria, dall'Automatica all'Economia fino anche all'Ecologia, tanto che Bucy ebbe a dire: "I think sometimes it's overused" (Credo che talvolta se ne abusi).

Kalman, che per il lavoro svolto ha ricevuto il prestigioso premio Kyoto (l'equivalente giapponese del premio Nobel) nel 1985, deve essere considerato come uno dei padri fondatori della moderna teoria matematica dei sistemi e del controllo, e in particolare della teoria dell'identificazione.

La teoria del filtro di Kalman è tuttora oggetto di ricerca metodologica ed applicata con l'intento, da un lato, di aumentare le prestazioni computazionali per consentire l'impiego in tempo reale degli algoritmi di filtraggio, dall'altro di estenderne l'applicabilità a

classi di sistemi di struttura più generale o caratterizzati da rumori non gaussiani, per i quali il filtro di Kalman nella sua versione originaria non risulta ottimo. In queste note viene anche dato un accenno a possibili estensioni del filtro di Kalman a problemi non lineari o non gaussiani.

Si desidera ringraziare tutti quanti hanno reso possibile la stesura di questo testo, e in particolare gli studenti Alessandro, Enrico, Fabrizio, Francesco, Germano, Gianluigi e Roberta, che, grazie al loro affiatamento, hanno creato una *squadra* che è stata per noi un formidabile stimolo al miglioramento della nostra modesta opera, consentendoci in numerose occasioni di *aggiustare il tiro*.

Un ringraziamento particolare lo rivolgiamo all'ormai ingegnere Marco Cipollone per l'entusiasmo, l'interesse e l'abilità che ha dimostrato in questo difficile campo.

L'Aquila, 12 luglio 1997

Gli Autori

# Introduzione

**L**A Teoria dell'Identificazione costituisce quell'importante capitolo della Scienza dei Sistemi che studia il problema di ottenere informazioni quantitative su di un sistema dinamico a partire dalle osservazioni (misure) che si fanno su di esso. In particolare le osservazioni fatte possono essere utilizzate per migliorare la conoscenza del modello matematico che descrive il sistema in oggetto (identificazione parametrica) oppure per la ricostruzione di segnali, non direttamente misurabili, che ne descrivono la dinamica (stima dello stato). Nel primo caso il processo di identificazione parametrica dei sistemi costituisce la naturale conclusione della fase di modellistica per la completa descrizione matematica del sistema in esame. Tale descrizione è necessaria per affrontare rigorosamente sia problemi di previsione che di scelta di strategie di controllo. Per quanto riguarda la stima dello stato, la sua importanza deriva dalle numerose applicazioni nelle tecnologie più avanzate dell'ingegneria moderna, quali il filtraggio dei dati digitali ed il controllo con reazione dallo stato dei sistemi perturbati da disturbi aleatori (controllo stocastico).

Seguendo la terminologia usuale della Teoria dei Sistemi, nel seguito le funzioni *ingresso* e *uscita* relative ad un sistema dinamico, definite su un intervallo di tempo assegnato, verranno indicate con le lettere  $u$  ed  $y$ , rispettivamente. Con  $(u, y)$  si specificherà un ingresso e la sua uscita corrispondente. Spesso, per l'analisi di un sistema è necessaria la conoscenza di una collezione di coppie ingresso-uscita.

A questa collezione viene dato il nome di *esperimento ideale*. Si parla di esperimenti ideali in contrapposizione agli *esperimenti reali* per la presenza in questi ultimi di inevitabili di errori di osservazione. La misura strumentale, e quindi *rumorosa*, della coppia  $(u, y)$ , verrà indicata con  $(z_u, z_y)$ . Nel caso più comune di misure corrotte da rumore di tipo additivo si ha

$$z_u = u + n_u, \quad z_y = y + n_y,$$

dove  $n_u$  ed  $n_y$  sono rispettivamente, gli errori di misura dell'ingresso e dell'uscita.

Gli errori di misura sono per loro natura aleatori e quindi le informazioni che si possono ottenere su di essi sono esclusivamente di natura statistica. Pertanto la conoscenza più completa che si può avere sui rumori consiste dell'intera distribuzione di probabilità o, nel caso di processi, di un loro modello di generazione. Una conoscenza incompleta, ma che può essere sufficiente in molte applicazioni, è invece essere costituita dai soli valori dei momenti del primo e del secondo ordine (valor medio e covarianza) o, eventualmente, anche dai momenti di ordine superiore fino ad un certo grado.

In queste note saranno trattati, con particolare riferimento ai sistemi lineari a tempo discreto, i due problemi principali della Teoria dell'Identificazione, che sono, come si è già detto, l'Identificazione Parametrica dei Sistemi e la Stima dello Stato, a partire da esperimenti reali.

## Identificazione Parametrica

In questo caso la struttura del modello matematico del sistema in esame si suppone nota a meno di un vettore  $\vartheta$  di parametri incogniti. *Identificare il sistema* significa stimare il vettore  $\vartheta$  a partire dai risultati degli esperimenti condotti su di esso.

Si parla di *identificazione deterministica* di  $\vartheta$  quando è possibile trascurare gli eventuali errori di misura, ovvero quando si può assumere che gli esperimenti siano ideali. In caso contrario, e cioè qualora si disponga delle quantità rumorose  $(z_u, z_y)$  — esperimenti

reali — la stima di  $\vartheta$  si ottiene necessariamente per via statistica. Si parla quindi di *identificazione parametrica stocastica*.

Tra i diversi metodi della statistica matematica che possono essere utilizzati nel processo di identificazione parametrica, in questo testo verrà privilegiato il metodo detto della *Massima Verosimiglianza* (Maximum Likelihood). Tale scelta è motivata dalle interessanti proprietà statistiche di tale stimatore quando specializzato ai sistemi dinamici. Data l'importanza della stima di Massima Verosimiglianza, questa verrà introdotta nella sua forma più generale, adeguata anche per la trattazione dei sistemi stocastici a tempo-continuo.

### *Stima dello stato*

La teoria dei Controlli Automatici fornisce potenti metodologie di controllo, quali ad esempio l'assegnazione degli autovalori, qualora il vettore di stato  $x$  del sistema controllato sia direttamente accessibile.

In caso contrario diviene necessario ricorrere a metodologie di *stima dello stato*, che risolvono il problema della sua ricostruzione a partire da un esperimento  $(z_u, z_y)$ . Nei sistemi deterministici ci si riferisce al problema della ricostruzione dello stato col termine di *osservazione dello stato*. Nel caso lineare la soluzione di tale problema è fornita dal ben noto Osservatore di Luenberger.

Per i sistemi stocastici il problema della ricostruzione dello stato prende il nome di *Teoria del Filtraggio*. Il caso lineare, con rumori dotati di statistica gaussiana, è risolto in modo ottimo, cioè con la minima varianza dell'errore di stima, dal famoso *Filtro di Kalman*.

Il problema del filtraggio dei sistemi non lineari è a tutt'oggi oggetto di ricerca, e non può ancora dirsi risolto in maniera ottima. Esistono tuttavia interessanti soluzioni sub-ottime che spesso forniscono risultati soddisfacenti in molte applicazioni.

L'importanza del filtraggio risiede nell'effettiva possibilità di utilizzare ai fini della sintesi della legge di controllo a controreazione dei sistemi dinamici lineari il valore stimato dello stato. La giustificazione teorica di questa metodologia è data dal fondamentale

*Teorema di separazione.* Un esempio notevole è il controllo LQG (lineare, quadratico, gaussiano) di sistemi lineari stocastici. Le connessioni tra la teoria dell'Identificazione e la teoria dei Controlli Automatici, pur così importanti per le applicazioni, non saranno qui trattate perché esulano dagli scopi di questo testo.

Dalle brevi considerazioni fatte si evince che base della teoria dell'identificazione dei sistemi è la conoscenza dei metodi del calcolo delle probabilità e della statistica matematica. Pertanto nel primo capitolo saranno passati in rassegna i principali risultati di calcolo delle probabilità che saranno poi effettivamente utilizzati nel seguito. Nel secondo capitolo verrà introdotto il concetto di stimatore statistico, con particolare riferimento agli stimatori di Minima Varianza e di Massima Verosimiglianza. Nel terzo capitolo si prenderà in esame il problema della identificazione dei parametri nei sistemi lineari e stazionari tempo-continuo con uscite osservate ad intervalli regolari di tempo in presenza di rumore gaussiano. Il quarto capitolo tratterà estensivamente del problema del filtraggio dei sistemi lineari (filtro di Kalman). Nel quinto capitolo viene infine affrontato il problema della stima simultanea di stato e parametri.

# Richiami e complementi di calcolo delle probabilità

**P**ER intraprendere in modo rigoroso lo studio della teoria dell'identificazione è necessaria una conoscenza approfondita della teoria della misura e del calcolo delle probabilità. Pertanto in questo capitolo, senza alcuna pretesa di completezza, vengono richiamati alcuni concetti di topologia, di teoria della misura e di calcolo delle probabilità che si ritengono fondamentali per affrontare con una corretta impostazione gli argomenti sviluppati nel seguito. La lettura di questo capitolo è consigliata anche a coloro che hanno già una discreta conoscenza della teoria della probabilità, allo scopo di acquisire una certa dimestichezza con le notazioni che saranno usate nel testo.

Anche se la presenza di questo capitolo rende il testo sufficientemente autocontenuto, si consiglia il lettore digiuno di calcolo delle probabilità di consultare testi specifici per un'introduzione chiara e completa alla materia.

## 1.1 Richiami di topologia

In questa sezione vengono riportate alcune definizioni che si ritengono necessarie per consentire una trattazione succinta ma rigorosa della teoria della misura. In particolare occorre individuare gli spazi su cui si andrà ad operare. Verranno pertanto richiamati i concetti di spazio metrico, spazio normato, spazio topologico e spazio di Hilbert. Ci

si limiterà a riportare le sole definizioni e qualche riga di commento (per ragioni di spazio!).

**Definizione 1.1.1** – Un insieme  $S$  è detto **spazio metrico** se su di esso è definita una applicazione (**funzione distanza**)

$$\rho : S \times S \mapsto \mathbb{R}$$

tale che per ogni  $x, y$  e  $z \in S$  accade che

- 1)  $\rho(x, y) \geq 0$
- 2)  $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
- 3)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- 4)  $\rho(x, y) + \rho(x, z) \geq \rho(y, z)$   
(disuguaglianza triangolare)

La coppia  $(S, \rho)$  è detta **spazio metrico**. •

**Definizione 1.1.2** – Si definisce **spazio metrico completo** uno spazio metrico tale che, comunque data una successione di Cauchy  $\{x_n\}$  esiste un  $x \in (S, \rho)$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$$

Si ricordi che una successione  $\{x_n\}$  è detta di Cauchy se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \\ \rho(x_{n+p}, x_n) < \epsilon \quad \forall n > n_\epsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

È possibile mostrare che ogni spazio metrico ammette un suo completamento, e pertanto nel seguito saranno sempre considerati spazi metrici completi.

Nel caso in cui lo spazio  $S$  sia dotato della struttura di **spazio lineare** (o **spazio vettoriale**) si possono dare le seguenti definizioni.



**Definizione 1.1.3** – Sia  $X$  uno spazio vettoriale sul corpo dei complessi  $\mathbb{C}$ . Si definisce **norma** di un vettore una funzione  $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}$  tale che

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0 \quad \forall x \in X, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\alpha x\| &= |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

La coppia  $(X, \|\cdot\|)$  è detta **spazio normato**. •

È evidente dalle definizioni date che uno spazio normato è anche uno spazio metrico con metrica  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ . Il concetto di completezza di uno spazio metrico si trasferisce immediatamente al caso di spazi normati. In questo caso si parla di **spazi di Banach**.

**Definizione 1.1.4** – Una funzione bilineare  $\langle x, y \rangle$  definita su uno spazio lineare  $X$  sul corpo dei complessi  $\mathbb{C}$  è detta **prodotto scalare** se:

- 1)  $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- 2)  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$ ;
- 3)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$ ;
- 4)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ .

Una conseguenza immediata degli assiomi è che  $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha^* \langle x, y \rangle$ . Sugli spazi lineari  $H$  sul corpo dei reali  $\mathbb{R}$  valgono le definizioni di norma e di prodotto scalare date nel caso di spazi lineari sui complessi in cui vengano rimosse le operazioni di coniugazione.

È facile verificare che il prodotto scalare induce sullo spazio  $X$  la seguente norma:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Uno spazio lineare dotato della norma indotta dal prodotto scalare e completo è detto **spazio di Hilbert**.

Accanto alle precedenti nozioni di tipo metrico risulterà utile definire il concetto più generale di **spazio topologico** che utilizza

solo assiomi di Teoria degli Insiemi e che permette di definire in modo rigoroso l'idea di continuità di una funzione.

**Definizione 1.1.5** – Dato uno spazio metrico  $(\mathcal{S}, \rho)$ , si definisce **sfera aperta** di raggio  $r$  e centro  $x_0$  l'insieme:

$$S_{x_0}(r) = \{x \in \mathcal{S} : \rho(x, x_0) < r\} \quad (1.1.1)$$

Si definisce **insieme aperto** dello spazio metrico ogni insieme ottenibile come unione di un numero arbitrario, anche non contabile, di sfere aperte. •

**Definizione 1.1.6** – Si definisce **spazio topologico** la coppia  $(\mathcal{S}, \tau)$  dove  $\tau$  è una famiglia di sottoinsiemi di  $\mathcal{S}$  che godono delle proprietà

- 1)  $\emptyset, \mathcal{S} \in \tau$ ,
- 2) se  $A_1 \in \tau$  e  $A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$ ,
- 3)  $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \in \tau$ , con  $\{A_{\alpha}\}$  arbitraria collezione di elementi di  $\tau$

Per induzione finita, l'assioma (2) implica che, data una collezione numerabile  $\{A_n\}$  di elementi di  $\tau$  si ha:

$$\bigcap_{n=1}^N A_n \in \tau \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

La coppia  $(\mathcal{S}, \tau)$  si dice **spazio topologico** e gli elementi della topologia vengono chiamati, per definizione, insiemi **aperti**.

**Teorema 1.1.7** – Uno spazio metrico induce “in modo naturale” una topologia  $\tau_{\rho}$ , i cui insiemi aperti ammettono la rappresentazione:

$$A = \bigcup_{\alpha} S_{x_{\alpha}}(r_{\alpha}), \quad \forall A \in \tau_{\rho}.$$

**Dimostrazione** – È sufficiente dimostrare che la famiglia degli aperti così definita soddisfa gli assiomi della definizione (1.1.6).

La dimostrazione dell'assioma (1) è immediata se si prendono in considerazione le sfere di raggio nullo (insieme vuoto  $\emptyset$ ) e le sfere di raggio infinito ( $\mathcal{S}$ ). Per l'assioma (2), si osservi innanzi tutto che, considerate due sfere aperte  $S(x_1, r_1)$  e  $S(x_2, r_2)$  tali che  $\rho(x_1, x_2) < r_1 + r_2$ , cioè con intersezione non vuota, allora per un qualunque punto  $\bar{x} \in S(x_1, r_1) \cap S(x_2, r_2)$  esiste un  $\bar{r}(\bar{x}) > 0$  tale che  $S(\bar{x}, \bar{r}(\bar{x})) \subset S(x_1, r_1) \cap S(x_2, r_2)$ .

Si può a questo punto verificare facilmente che, comunque si considerino due sfere aperte  $S(x_1, r_1)$  e  $S(x_2, r_2)$ , la loro intersezione è un insieme aperto. Se  $\rho(x_1, x_2) \geq r_1 + r_2$ , l'intersezione delle due sfere è vuota, e quindi è un aperto, altrimenti  $\rho(x_1, x_2) < r_1 + r_2$  e, per quanto detto:

$$S(x_1, r_1) \cap S(x_2, r_2) = \bigcup_{\bar{x} \in S(x_1, r_1) \cap S(x_2, r_2)} S(\bar{x}, \bar{r}(\bar{x}))$$

che di nuovo è un aperto. ■

Chiudiamo questo paragrafo ricordando la nozione di continuità di una funzione:

**Definizione 1.1.8** – Siano  $(X, \tau), (Y, \vartheta)$  due spazi topologici. Data una funzione  $f : (X, \tau) \mapsto (Y, \vartheta)$ ,  $f$  si dice **continua** se, comunque dato  $A \in \vartheta$ , si ha che  $f^{-1}(A) \in \tau$ . •

Pertanto, una funzione  $f$  è continua se le immagini inverse di aperti sono aperti.

Si lascia al lettore verificare come la (1.1.8) diviene l'usuale definizione di continuità di una funzione  $f$  nel caso in cui  $\tau$  e  $\vartheta$  siano indotte da una metrica.

## 1.2 Spazi di probabilità e variabili aleatorie

Oggetto della **teoria della probabilità** è lo studio della terna

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$  dove  $\Omega$  è lo **spazio degli eventi** elementari o dei campioni,  $\mathcal{F}$  è una **collezione di eventi** e  $P$  è una **misura di probabilità**.

La coppia  $(\Omega, \mathcal{F})$  deve soddisfare le seguenti proprietà:

- 1)  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ,
- 2)  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$
- 3)  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$
- 3')  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

Gli assiomi (1) e (2) implicano che anche  $\Omega$ , in quanto complemento di  $\emptyset$ , appartiene ad  $\mathcal{F}$ , e cioè che lo spazio degli eventi è esso stesso un evento (evento certo).

Utilizzando le ben note leggi di De Morgan della teoria degli insiemi, è facile mostrare che le proprietà (2) e (3) implicano la (3'). Lo spazio  $\mathcal{F}$  che gode delle precedenti proprietà è detto **algebra degli eventi**.

**Esempio 1.2.1** – Si consideri il lancio di un dado. L'insieme degli eventi elementari  $\Omega$  è costituito dalle facce del dado. Due possibili collezioni di eventi  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  sono costituite dalle seguenti famiglie di sottoinsiemi di  $\Omega$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \{\emptyset, \{1\}, \dots, \{6\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 6\}, \dots, \{1, 2, \dots, 6\}\} \\ \mathcal{F}_2 &= \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}\end{aligned}$$

Su questi due insiemi è facile verificare le proprietà sopra enunciate.  $\triangle$

Dalla proprietà (3) segue che per induzione finita:

$$3'') \quad A_i \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^N A_i \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Si ha una  **$\sigma$ -algebra di eventi** quando  $N$  può assumere anche il valore infinito, cioè quando è ammissibile l'unione infinita di eventi e, di conseguenza, anche l'intersezione infinita di essi.

La struttura  $(\Omega, \mathcal{F})$  prende il nome di **spazio degli eventi**.

In queste note si preferisce l'uso della terminologia propria del Calcolo delle Probabilità anche se talvolta sarà utilizzato, per esigenze di generalità, il linguaggio della Teoria della Misura.

Nel contesto della teoria della misura, che prescinde dall'idea di evento, una coppia  $(\Omega, \mathcal{F})$  è detta **spazio di misura** e gli elementi di  $\mathcal{F}$  prendono il nome di **insiemi misurabili**.

**Definizione 1.2.2** – Date due  $\sigma$ -algebre su  $\Omega$ ,  $\mathcal{F}_1$  ed  $\mathcal{F}_2$  si dice che  $\mathcal{F}_1$  è **meno ricca** di  $\mathcal{F}_2$  e si scrive

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$$

se

$$\forall A \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow A \in \mathcal{F}_2$$

•

**Definizione 1.2.3** – Si definiscono **atomi** di una  $\sigma$ -algebra gli eventi (o più in generale gli insiemi misurabili) che non sono ottenibili come unione di altri eventi.

•

Si supponga che l'insieme  $\mathcal{F}$ , che compare nella terna di probabilità, sia una  $\sigma$ -algebra di eventi su  $\Omega$ , e quindi verifichi le proprietà:

- i)  $\emptyset \in \mathcal{F}$
- ii)  $A^C \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{F}$
- iii)  $A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

analoghe alle (1), (2) e (3). È noto che uno spazio misurabile nel contesto della teoria della probabilità prende il nome di **spazio degli eventi** e quindi completando l'analogia, diviene naturale introdurre la **misura di probabilità** come misura definita nella  $\sigma$ -algebra degli eventi.

**Definizione 1.2.4** – Considerato lo spazio degli eventi  $(\Omega, \mathcal{F})$ , si dice **misura di probabilità**  $P$  una misura finita, contabilmente additiva, definita su tale spazio, per la quale risulti  $P(\Omega) = 1$ . Il numero  $P(A)$ , con  $A \in \mathcal{F}$ , è la misura di probabilità o, più semplicemente, la **probabilità dell'evento**  $A$ . La terna  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  si dice **spazio di probabilità**. •

La misura di probabilità  $P$  gode delle seguenti proprietà:

- a)  $P(\Omega) = 1$
- b)  $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{F}$
- c) Data  $\{A_i\}$ ,  $A_i \in \mathcal{F}$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \Rightarrow$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

La proprietà (c) equivale a dire che  $P$  è **contabilmente additiva** sulla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$ .

Poiché  $\forall A \in \mathcal{F}$ ,  $A \cup A^C = \Omega$  ed  $A \cap A^C = \emptyset$ , e  $\emptyset$  e  $\Omega \in \mathcal{F}$ , si può calcolare facilmente la probabilità di  $A^C$ :

$$\begin{aligned} 1 = P(A \cup A^C) &= P(A) + P(A^C) \quad \text{da cui} \\ P(A^C) &= 1 - P(A) \quad \forall A \in \mathcal{F} \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

L'evento  $\Omega$ , avendo probabilità 1, prende il nome di **evento certo**, mentre  $\emptyset$ , avendo probabilità 0, prende il nome di **evento impossibile**. Va notato esplicitamente che  $P(A) = 0$  non implica  $A = \emptyset$ , e che gli eventi di probabilità nulla non sono necessariamente impossibili. A tale scopo si osservi per esempio che, assumendo  $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  e  $P\{i\} = P\{j\}$  (**equiprobabilità degli eventi**), allora necessariamente  $P(\{i\}) = 0$ , dovendo essere  $P(\Omega) = 1$ .

Due  $\sigma$ -algebre notevoli sono la  **$\sigma$ -algebra totale**  $\mathcal{F}_{tot}$ , contenente tutti i sottoinsiemi di  $\Omega$  (insieme delle parti di  $\Omega$ ), e la  **$\sigma$ -algebra banale**  $\mathcal{F}_{ban}$  costituita dai soli insiemi  $\emptyset$  e  $\Omega$ .

Data una collezione  $\mathcal{C}$  di sottoinsiemi di  $\Omega$  che non sia una  $\sigma$ -algebra, si pone il problema di trovare, se esiste, una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}(\mathcal{C})$

che contenga  $\mathcal{C}$ . Una  $\sigma$ -algebra che sicuramente soddisfa a questa condizione è  $\mathcal{F}_{tot}$  poiché contenendo tutti i sottoinsiemi di  $\Omega$  contiene anche gli elementi di  $\mathcal{C}$ . Di conseguenza l'insieme di tutte le  $\sigma$ -algebre contenenti  $\mathcal{C}$  è un insieme non vuoto. Si osservi inoltre che

$$\forall \mathcal{F}_\alpha \quad \mathcal{F}_{ban} \subseteq \mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_{tot}.$$

Siano  $\mathcal{F}_1$  ed  $\mathcal{F}_2$  due  $\sigma$ -algebre contenenti  $\mathcal{C}$  e si consideri l'insieme  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ . Tale insieme contiene sicuramente  $\mathcal{C}$ , ed inoltre è esso stesso una  $\sigma$ -algebra. Infatti

$$\emptyset \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$$

$$\Omega \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$$

$$A_i \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow A_i \in \mathcal{F}_1, A_i \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_1, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$$

$$A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow A \in \mathcal{F}_1, A \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^C \in \mathcal{F}_1, A^C \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$$

Quindi se  $\mathcal{F}_1$  ed  $\mathcal{F}_2$  sono due  $\sigma$ -algebre contenenti  $\mathcal{C}$ , la loro intersezione è una  $\sigma$ -algebra contenente  $\mathcal{C}$ . In generale se  $\{\mathcal{F}_\alpha\}$  è una famiglia di  $\sigma$ -algebre tutte contenenti  $\mathcal{C}$ , allora

$$\mathcal{F} = \bigcap_{\alpha} \mathcal{F}_\alpha$$

è una  $\sigma$ -algebra contenente  $\mathcal{C}$ ; inoltre  $\mathcal{F}$  è la minima  $\sigma$ -algebra contenente  $\mathcal{C}$  poiché essa è contenuta in ogni altra avente la stessa proprietà.

**Definizione 1.2.5** – Considerata una collezione  $\mathcal{C}$  di insiemi di un generico spazio astratto  $\Omega$ , si definisce  **$\sigma$ -algebra generata da  $\mathcal{C}$**  la minima  $\sigma$ -algebra che contiene  $\mathcal{C}$ . Essa verrà indicata con la notazione  $\sigma(\mathcal{C})$ . •

**Esempio 1.2.6** – Considerato l'insieme  $\Omega = [0, 1]$  e la collezione di insiemi  $\mathcal{C} = \{[0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1]\}$  è facile verificare che la collezione

$$\bar{\mathcal{C}} = \left\{ [0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1], \emptyset, (\frac{1}{3}, 1], [0, \frac{2}{3}), [0, 1], [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1], (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \right\}$$

contiene  $\mathcal{C}$  ed è una  $\sigma$ -algebra, e qualunque  $\sigma$ -algebra contenente  $\mathcal{C}$  deve contenere  $\bar{\mathcal{C}}$ . Quindi  $\sigma(\mathcal{C}) = \bar{\mathcal{C}}$ .  $\triangle$

Se al posto di un generico spazio astratto  $\Omega$  sul quale sia definita una  $\sigma$ -algebra, si considera uno spazio  $\Omega$  in cui sia definita una topologia, allora la  $\sigma$ -algebra definita su  $\Omega$  generata dalla topologia prende il nome di  **$\sigma$ -algebra di Borel**.

**Definizione 1.2.7** – Si definisce  **$\sigma$ -algebra di Borel associata a  $\mathcal{T}$**  e si indica con la notazione  $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ , la  $\sigma$ -algebra generata da una topologia  $\mathcal{T}$  definita su uno spazio astratto  $\Omega$ ; gli insiemi che la costituiscono si dicono **insiemi di Borel** o **Borelliani**. Nel caso di spazi normati  $n$ -dimensionali col termine  $\sigma$ -algebra di Borel si intende la  $\sigma$ -algebra generata dalla topologia indotta dalla norma. •

Ad esempio nel caso in cui  $\Omega = \mathbb{R}$  la topologia indotta dalla usuale funzione distanza contiene tutti gli intervalli aperti e tutte le loro unioni ed intersezioni. La  $\sigma$ -algebra di Borel  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  conterrà quindi tutti gli aperti e le loro unioni ed intersezioni, i rispettivi complementari, l'unione ed intersezione di intervalli semiaperti e semichiusi, i punti isolati. Nel seguito, con la notazione  $\mathcal{B}^n$  si intenderà la  $\sigma$ -algebra di Borel definita su  $\mathbb{R}^n$  con la topologia degli aperti, e cioè  $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .

**Definizione 1.2.8** – Si definisce **variabile aleatoria** ( $n$ -dimensionale) su uno spazio degli eventi  $(\Omega, \mathcal{F})$  una funzione

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$$

tale che, comunque preso un insieme di Borel  $B \in \mathcal{B}^n$  sia

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

cioè tale che l'immagine inversa di ogni borelliano sia un evento.

•

Diremo anche, utilizzando il linguaggio della teoria della misura, che  $X$  è misurabile secondo  $\mathcal{F}$  o che è  **$\mathcal{F}$ -misurabile**.

Nella topologia  $\mathcal{F}_{ban}$  le variabili aleatorie sono costanti, mentre nella topologia  $\mathcal{F}_{tot}$  ogni funzione  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  è una variabile aleatoria. In generale accade che se  $X$  è una v.a. per  $\mathcal{F}$  lo è anche per ogni altra  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}'$  tale che  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ , ma non è vero il viceversa.

Si può definire  **$\sigma$ -algebra generata da una variabile aleatoria**  $X$  la minima  $\sigma$ -algebra che rende  $X$  misurabile, e verrà indicata con  $\mathcal{F}^X$  o con  $\sigma(X)$ . Essa è costituita dalla collezione di tutte le immagini inverse dei borelliani tramite  $X$ :

$$\mathcal{F}^X = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}.$$

$\mathcal{F}^X$  è una  $\sigma$ -algebra in quanto soddisfa agli assiomi:

- 1)  $B = \emptyset \Rightarrow X^{-1}(B) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}^X$
- 2)  $A \in \mathcal{F}^X \Rightarrow \exists B_A \in \mathcal{B} \quad \text{t.c.} \quad A = X^{-1}(B_A)$   
 $B_A \in \mathcal{B} \Rightarrow B_A^C \in \mathcal{B} \Rightarrow X^{-1}(B_A^C) = A^C \in \mathcal{F}^X$
- 3)  $A_i \in \mathcal{F}^X \Rightarrow \exists B_i \in \mathcal{B} \quad \text{t.c.} \quad A_i = X^{-1}(B_i) \Rightarrow$   
 $\bigcup_i B_i \in \mathcal{B}; \mathcal{F}^X \ni X^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i X^{-1}(B_i) = \bigcup_i A_i$

**Definizione 1.2.9** – Considerata la terna  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , si dice **funzione caratteristica o funzione indicatrice** la funzione così definita

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se } \omega \notin A \Leftrightarrow \omega \in A^C \end{cases}$$

•

Inoltre si può facilmente verificare che se  $A \in \mathcal{F}$  allora  $\chi_A$  è una v.a. Infatti, come si vede nella figura 1.2.1, le immagini inverse di borelliani appartengono a  $\mathcal{F}$ .

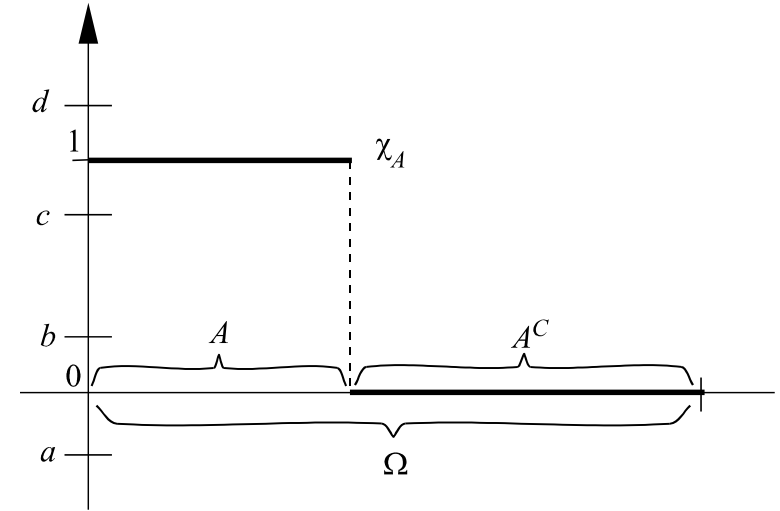


Figura 1.2.1. Immagini inverse di borelliani in  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \chi_A^{-1}([a, d]) &= \Omega & \chi_A^{-1}([c, d]) &= A \\ \chi_A^{-1}([b, c]) &= \emptyset & \chi_A^{-1}([a, b]) &= A^C \end{aligned}$$

La più piccola  $\sigma$ -algebra che rende  $\chi_A(\omega)$  misurabile (cioè una v.a.) è la  $\sigma$ -algebra generata da  $\chi_A(\omega)$ :

$$\mathcal{F}^{\chi_A} = \{\emptyset, A, A^C, \Omega\}$$

Valgono inoltre le seguenti proprietà:

- 1) se  $c \in \mathbb{R}$  è una costante  $\Rightarrow c\chi_A(\omega)$  è una v.a.
- 2)  $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$  e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow c_1\chi_{A_1}(\omega) + c_2\chi_{A_2}(\omega)$  è una v.a.
- 3) se  $A_i \in \mathcal{F}$  e  $c_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \chi^n(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i\chi_{A_i}(\omega)$  è una v.a.

**Definizione 1.2.10** – Una  $\sigma$ -algebra si dice **atomica** se è generata da una famiglia numerabile di insiemi disgiunti.

•

Data la famiglia  $\{A_i\}$  di insiemi disgiunti, la  $\sigma$ -algebra atomica da essa generata si indica con  $\sigma\{A_i\}$ .

### 1.3 Elementi di teoria dell'integrazione

**Definizione 1.3.1** – Si dice **funzione semplice** ogni combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili  $A_i$

$$\psi(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(\omega)$$

con  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

•

Le  $\sigma$ -algebre generate da funzioni semplici sono  $\sigma$ -algebre finite. Non si richiede che gli insiemi  $A_i$  siano disgiunti. Ad ogni modo è facile convincersi che una funzione semplice può essere riscritta come combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili disgiunti. Se gli  $n$  insiemi  $A_i$  sono disgiunti, allora la  $\sigma$ -algebra generata da  $\psi(\omega)$  è costituita da  $2^n$  insiemi.

**Definizione 1.3.2** – Considerato uno spazio misurabile  $(\Omega, \mathcal{F})$  si dice **misura positiva**  $m$  una funzione reale definita su  $\mathcal{F}$  che soddisfa i seguenti assiomi:

$$1) \quad m(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad (1.3.1)$$

$$2) \quad m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \quad (1.3.2)$$

dove  $\{A_i\}$  è una collezione contabile di insiemi disgiunti di  $\mathcal{F}$ . •

La terna  $(\Omega, \mathcal{F}, m)$  si dice **spazio di misura**.

Dagli assiomi (1.3.1) e (1.3.2) seguono le seguenti proprietà:

$$1) \quad m(\emptyset) = 0 \quad (1.3.3)$$

$$2) \quad m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B) \quad (1.3.4)$$

$$3) \quad m(A) = m(B) - m(B \setminus A) \leq m(B) \quad \text{se } A \subset B \quad (1.3.5)$$

**Definizione 1.3.3** – Una misura  $m$  definita sullo spazio  $(\Omega, \mathcal{F})$  si dice **finita** se risulta  $m(\Omega) < +\infty$ ; essa si dice  **$\sigma$ -finita** se esiste una successione  $\{A_i\}$  di elementi di  $\mathcal{F}$  tali che  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$  e tali che  $m(A_i) < \infty$ ,  $i = 1, 2, \dots$  •

La misura di Lebesgue su  $[0, 1]$  è un esempio di misura finita mentre la stessa misura su  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  è un esempio di misura  $\sigma$ -finita ma non finita.

**Definizione 1.3.4** – Considerato uno spazio misurabile  $(\Omega, \mathcal{F})$  si definisce **misura segnata**  $\bar{m}$  una funzione reale definita su  $\mathcal{F}$  che soddisfa i seguenti assiomi:

$$1) \quad \bar{m} \text{ assume al più uno dei due valori } +\infty, -\infty$$

$$2) \quad \bar{m}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{m}(A_i)$$

dove  $\{A_i\}$  è una collezione contabile di insiemi disgiunti di  $\mathcal{F}$ . •

Dai precedenti assiomi è possibile mostrare che per la misura segnata valgono le proprietà (1.3.3) e (1.3.4) relative alla misura positiva.

A questo punto è possibile fornire la definizione di **integrale di una funzione rispetto ad una qualunque misura positiva**, generalizzando in questo modo il ben noto concetto di integrale rispetto alla misura di Lebesgue. Si può partire dalle funzioni semplici non negative:

**Definizione 1.3.5** – Considerato lo spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{F}, m)$  e considerata una funzione semplice non negativa

$$\psi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(\omega) \quad \text{con} \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$

per un qualunque insieme misurabile  $A$ , si definisce **integrale di Lebesgue-Stieltjes** di  $\psi$  su  $A$  rispetto ad  $m$ :

$$\int_A \psi(\omega) dm(\omega) \triangleq \sum_{i=1}^n c_i m(A \cap A_i) \quad (1.3.6)$$

Partendo dalla definizione di integrale di funzioni semplici non negative, è possibile con opportuno passaggio al limite estenderne la definizione al caso di generiche funzioni misurabili  $X(\omega)$ . Si comincerà con il definire l'integrale di funzioni  $X(\omega)$  non negative. In questo caso dividendo l'intervallo  $[0, n]$  del codominio in  $n \cdot 2^n$  intervalli aperti a destra e chiusi a sinistra di ampiezza  $\Delta = \frac{1}{2^n}$ , si definiscono gli insiemi  $A_i$  e  $C_n$  come:

$$A_i = X^{-1} \left( \left[ \frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right) \right) = \left\{ \omega : \frac{i}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{i+1}{2^n} \right\}$$

$$C_n = \{ \omega : X(\omega) \geq n \}$$

Si può approssimare  $X(\omega)$  con la funzione

$$X^n(\omega) = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \chi_{A_i}(\omega) + n \cdot \chi_{C_n}(\omega)$$

che è una v.a. semplice. Di conseguenza il suo integrale è:

$$I^n = \int_{\Omega} X^n(\omega) dm = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} m(A_i) + n \cdot m(C_n) \quad (1.3.7)$$

Per come è definita  $X^n(\omega)$  è evidente che  $X^n(\omega) \leq X^{n+1}(\omega)$ , di conseguenza la successione  $I^n$  è monotona crescente e per  $n \rightarrow \infty$  può convergere ad un valore finito oppure divergere a  $+\infty$ .

Per facilitare la comprensione di quanto esposto, in Fig. (1.2.2) è riportato un esempio in cui  $\Omega = \mathbb{R}$  e  $X(\omega)$  è positiva e monotona non decrescente.

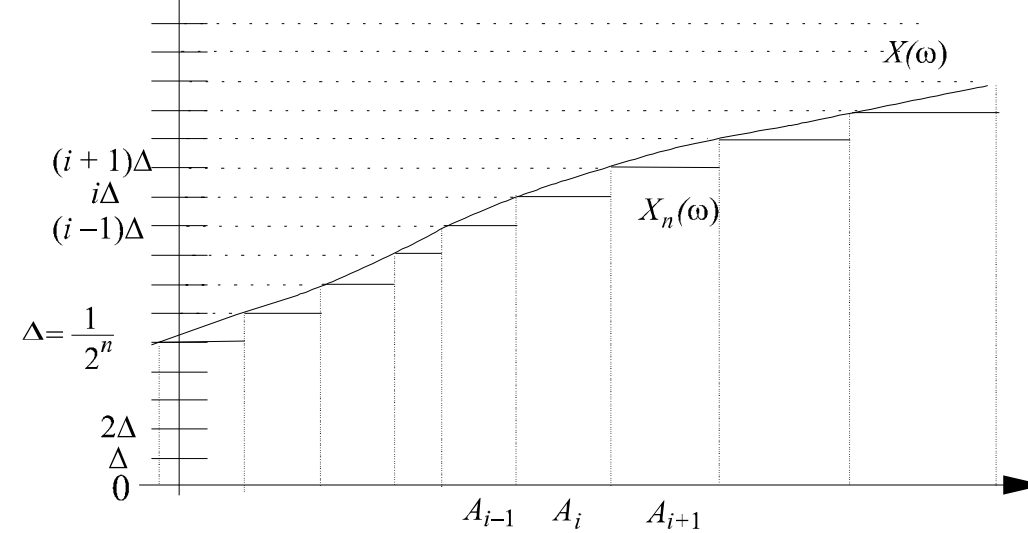


Figura 1.2.2. Funzione positiva monotona non decrescente.

**Definizione 1.3.6** – Si definisce **integrale** di  $X(\omega)$  rispetto alla misura  $m$  la quantità

$$\int_{\Omega} X(\omega) dm \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X^n(\omega) dm$$

se il limite a secondo membro esiste.

Per estendere il concetto di integrale ad una v.a.  $X(\omega)$  qualsiasi, è utile porre

$$X^+(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } X(\omega) \leq 0, \\ X(\omega) & \text{se } X(\omega) > 0, \end{cases} \quad X^-(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } X(\omega) \geq 0, \\ -X(\omega) & \text{se } X(\omega) < 0. \end{cases}$$

In questo modo la v.a. si può ottenere come differenza di due variabili aleatorie positive

$$X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega)$$

e quindi

$$\int_{\Omega} X(\omega) d m \triangleq \int_{\Omega} X^+(\omega) d m - \int_{\Omega} X^-(\omega) d m.$$

## 1.4 Valore sperato, varianza e funzione di distribuzione

Per introdurre il concetto di valore sperato si utilizzerà un semplice esempio:

**Esempio 1.4.1** – Vi recate in una cittadina per la prima volta, ed un vostro amico vi informa che ci sono 20 bar, che possono essere distinti in tre gruppi a seconda del prezzo praticato sul cappuccino

L. 1400 nel gruppo  $A$  (4 bar);

L. 1200 nel gruppo  $B$  (10 bar);

L. 1000 nel gruppo  $C$  (6 bar) ;

Quanto vi aspettate di pagare un cappuccino entrando a caso in uno dei 20 bar della cittadina? Il senso comune suggerisce di fare una media ponderata

$$\bar{c} = \frac{4 \cdot 1400 + 10 \cdot 1200 + 6 \cdot 1000}{20} = 1180 \text{ Lire.}$$

Utilizzando il linguaggio sin qui introdotto, si dirà che l'insieme dei bar costituisce lo spazio  $\Omega$ , in cui  $\mathcal{F}_{tot}$  può essere scelta come  $\sigma$ -algebra. La misura di probabilità di un insieme è data dal rapporto tra la cardinalità dell'insieme stesso e la cardinalità di  $\Omega$ . Il prezzo del cappuccino è una funzione semplice

$$c(\omega) = 1400 \cdot \chi_A(\omega) + 1200 \cdot \chi_B(\omega) + 1000 \cdot \chi_C(\omega)$$

Si vedrà nel seguito che il calcolo del prezzo medio può essere ricondotto al calcolo dell'integrale su  $\Omega$  della funzione  $c(\omega)$ .

△

Seguendo la logica dell'esempio riportato, considerando una generica funzione semplice

$$\psi(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(\omega), \quad A_i \in \mathcal{F}$$

il valore medio può essere definito come

$$E\{\psi(\omega)\} = \sum_{i=1}^n c_i P(A_i) \quad (1.4.1)$$

dove  $P(A_i)$  si ottiene come

$$P(A_i) = \int_{\Omega} \chi_{A_i}(\omega) dP = \int_{A_i \in \mathcal{F}} 1 dP$$

Data la proprietà di linearità dell'operatore integrale è possibile riscrivere la (1.4.1) come

$$\begin{aligned} E\{\psi(\omega)\} &= \sum_{i=1}^n c_i \int_{\Omega} \chi_{A_i}(\omega) dP \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(\omega) dP = \int_{\Omega} \psi(\omega) dP \end{aligned}$$

Di conseguenza, per una generica variabile aleatoria ha senso dare la seguente

**Definizione 1.4.2** – Data una variabile aleatoria  $X(\omega)$  su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , si definisce **valore sperato** di  $X(\omega)$  (o **valore medio** o **valore atteso**) rispetto alla misura di probabilità  $P$ , la quantità

$$E\{X(\omega)\} = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$$

Si consideri ora il seguente esempio.



**Esempio 1.4.3** – Nella stessa cittadina dell'esempio precedente si ha la seguente statistica del prezzo delle brioches:

- L. 1100 nel gruppo  $A$  (4 bar);  
 L. 1500 nel gruppo  $B$  (10 bar);  
 L. 700 nel gruppo  $C$  (6 bar);

che può essere sintetizzato definendo la seguente variabile aleatoria semplice

$$b(\omega) = 1100 \cdot \chi_A(\omega) + 1500 \cdot \chi_B(\omega) + 700 \cdot \chi_C(\omega).$$

Il prezzo che vi aspettate di pagare per una brioche, ancora una volta entrando a caso in uno dei bar, è pari al valore sperato

$$\bar{b} = \frac{4 \cdot 1100 + 10 \cdot 1500 + 6 \cdot 700}{20} = 1180 \text{ Lire.}$$

Come si vede, il valore sperato delle due variabili aleatorie  $c(\omega)$  e  $b(\omega)$  è lo stesso. Però è facile accorgersi di una maggiore variabilità del prezzo della brioche rispetto al prezzo del cappuccino.  $\triangle$

Per dare un indice dell'ampiezza delle oscillazioni di una variabile aleatoria attorno al valor medio si può calcolare il valore sperato della variabile aleatoria  $Y_1 = |X - E\{X\}|$ , o della  $Y_2 = (X - E\{X\})^2$ .

**Definizione 1.4.4** – Data una variabile aleatoria  $X(\omega)$  su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , si definisce **varianza** di  $X(\omega)$  (o **momento centrato del secondo ordine**) rispetto alla misura di probabilità  $P$ , la quantità:

$$\sigma_X^2 \triangleq E\{(X - E\{X\})^2\} = \int_{\Omega} (X(\omega) - E\{X\})^2 dP(\omega)$$

La quantità positiva  $\sigma_X$  è chiamata **deviazione standard**.  $\bullet$

**Esercizio 1.4.5** – La varianza del prezzo della brioche e del cappuccino si calcolano come

$$\sigma_b^2 = \frac{4 \cdot 80^2 + 10 \cdot 320^2 + 6 \cdot 480^2}{20} = 121\,600 \text{ Lire}^2;$$

$$\sigma_c^2 = \frac{4 \cdot 220^2 + 10 \cdot 20^2 + 6 \cdot 180^2}{20} = 19\,600 \text{ Lire}^2.$$

È interessante notare che la varianza è espressa in Lire<sup>2</sup>, una unità di misura non molto usata, in verità. È quindi preferibile divulgare i risultati di un'indagine statistica per mezzo delle deviazioni standard

$$\sigma_c = 140 \text{ Lire}, \quad \sigma_b = 348.7 \text{ Lire.}$$

I risultati mostrano una maggiore oscillazione del prezzo della brioche rispetto al prezzo del cappuccino.  $\triangle$

Il valore sperato e la varianza costituiscono delle informazioni parziali su di una variabile aleatoria. Una caratterizzazione più completa di una variabile aleatoria è fornita dalla funzione di distribuzione:

**Definizione 1.4.6** – Dato lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , si definisce **funzione di distribuzione**  $F_X(x)$  della variabile aleatoria  $X$  la funzione scalare reale non negativa

$$F_X(x) = P\{\omega : X(\omega) \in (-\infty, x]\}$$

Si noti che la funzione di distribuzione gode delle seguenti proprietà:

- i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
- ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$
- iii)  $F_X(x)$  è monotona non decrescente:

$$F_X(x+h) \geq F_X(x) \quad \forall h > 0$$

- iv)  $F_X(x)$  è continua da sinistra
- v)  $F_X(x)$  è sempre positiva

A titolo di esempio dimostriamo la iii)

$$\begin{aligned} F_X(x+h) &= P\{\omega : X(\omega) \leq x+h\} = \\ &= P\{\omega : X(\omega) \leq x\} + P\{\omega : x < X(\omega) \leq x+h\} \\ &= F_X(x) + P\{\omega : x < X(\omega) \leq x+h\} \geq F_X(x) \end{aligned}$$

Si noti che vale la seguente utile relazione

$$P(\{\omega : x < X(\omega) \leq x+h\}) = F_X(x+h) - F_X(x)$$

La proprietà (v) è una immediata conseguenza delle (i) e (iii).

A partire dalla funzione di distribuzione di una variabile aleatoria  $X$  è possibile calcolare il suo valore medio. Si riscriva dapprima la (1.3.7) per la variabile aleatoria semplice  $X^{(n)}$  (positiva)

$$E\{X^{(n)}(\omega)\} = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \left[ F_X\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - F_X\left(\frac{i}{2^n}\right) \right] + n[1 - F_X(n)]$$

È possibile mostrare che per  $n \rightarrow \infty$  si ha  $n[1 - F_X(n)] \rightarrow 0$ . Si ottiene allora

$$E\{X(\omega)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \left[ F_X\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - F_X\left(\frac{i}{2^n}\right) \right] = \int_0^\infty x dF_X(x)$$

Si osservi che il valore medio  $E\{X^{(n)}(\omega)\}$  si può interpretare come l'area della figura sottesa dallo scaloide  $X^{(n)}(\omega)$ , dove la misura dell'intervallo  $A_i$  non è la solita misura di Lebesgue ma è sostituita dalla misura di probabilità  $P(A_i)$ . Quando il limite converge si dirà che  $X(\omega)$  ha **valore medio finito**.

Se  $\Omega = \mathbb{R}^+$  e  $g(x)$  è una funzione monotona crescente, è possibile definire come misura  $m(\cdot)$  di un intervallo  $[a, b]$  la quantità  $m([a, b]) \triangleq g(b) - g(a) \geq 0$ . È possibile definire ora l'integrale di una funzione  $f$  rispetto alla nuova misura.

**Definizione 1.4.7** – Si definisce **integrale di Stieltjes** della funzione  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ , la quantità

$$\int_0^\infty f(x) dg(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n2^n-1} f\left(\frac{i}{2^n}\right) \left[ g\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{i}{2^n}\right) \right] \quad (1.4.2)$$

Si noti che se  $g(x)$  è differenziabile si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n2^n-1} f\left(\frac{i}{2^n}\right) \frac{[g(\frac{i+1}{2^n}) - g(\frac{i}{2^n})] \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} \frac{1}{2^n} = \int_0^\infty f(x) g'(x) dx$$

dove  $dx$  coincide con l'usuale elemento di misura di Lebesgue.

Se si pone  $f(x) = x$  e  $g(x) = F_X(x)$  e se si suppone che  $F_X$  sia derivabile ed assolutamente continua, allora il valore medio di una variabile aleatoria non negativa vale

$$E\{X(\omega)\} = \int_0^\infty x dF_X(x) = \int_0^\infty x \frac{dF_X(x)}{dx} dx$$

Più in generale per variabili aleatorie arbitrarie si ha:

$$E\{X(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x) \quad (1.4.3)$$

**Definizione 1.4.8** – Si definisce **densità di probabilità** della distribuzione di  $X(\omega)$  o più semplicemente **densità di probabilità** di  $X(\omega)$  la quantità

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (1.4.4)$$

In questo caso la (1.4.3) si riscrive:

$$E\{X(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx \quad (1.4.5)$$

Poiché  $F_X(+\infty) = 1$  e  $F_X(-\infty) = 0$ , necessariamente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dF_X(x) = F_X(+\infty) - F_X(-\infty) = 1 \quad (1.4.6)$$

inoltre se  $F_X(x)$  è derivabile, allora esiste la densità di probabilità, che è tale da soddisfare la relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1 \quad (1.4.7)$$

Quest'ultima prende il nome di condizione di normalizzazione per la  $p_X(x)$ .

**Teorema 1.4.9** – Sia  $f(x)$  una funzione tale che

$$\begin{array}{ll} a) & f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ b) & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \\ c) & \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 0 \\ d) & \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 1 \end{array}$$

Allora  $g(x) \triangleq \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$  è la densità di probabilità di una variabile aleatoria con media  $m$  e varianza  $\sigma^2$ . ■

La dimostrazione si ottiene per calcolo diretto, e viene lasciata come esercizio al lettore.

Una variabile aleatoria con media nulla e varianza pari a 1 è detta **normalizzata**.

## 1.5 Indipendenza di variabili aleatorie

Il concetto di indipendenza è di fondamentale importanza nella teoria della probabilità; si ritiene pertanto utile riportare le definizioni relative.

**Definizione 1.5.1** – Considerato lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ed indicato con  $\mathcal{S}$  un sottoinsieme di  $\mathcal{F}$ , si dice che gli elementi

di  $\mathcal{S}$  sono **eventi indipendenti** se per ogni collezione finita  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  di elementi distinti di  $\mathcal{S}$ , risulta

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i) \quad (1.5.1)$$

•

Si noti che l'indipendenza a coppie per tutti gli elementi dell'insieme  $\mathcal{S}$  non implica necessariamente l'indipendenza di tutti gli elementi di  $\mathcal{S}$ , come sarà meglio chiarito dal seguente esempio.

**Esempio 1.5.2** – Sia  $\Omega$  costituito dai quattro punti  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  e sia  $P(A)$  pari ad  $\frac{1}{4}$  del numero dei punti appartenenti ad  $A$ , per ogni  $A \in \mathcal{F}_{tot}$  (con questa posizione si ha per l'appunto  $P(\Omega) = 1$ ). Si consideri la collezione  $\mathcal{S}$  costituita dai tre seguenti eventi:

$$A_1 = \{\omega_1, \omega_4\}$$

$$A_2 = \{\omega_2, \omega_4\}$$

$$A_3 = \{\omega_3, \omega_4\}$$

Evidentemente  $P(A_i) = \frac{1}{2}$ . Inoltre per  $i \neq j$ , si ha

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4} = P(A_i)P(A_j),$$

e perciò gli eventi  $A_i$  sono a coppie indipendenti. Tuttavia risulta

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

e quindi i tre eventi non sono tra loro indipendenti. △

**Esempio 1.5.3** – Si vuole mostrare su di un esempio come la definizione di indipendenza sia una definizione di tipo matematico, e che è possibile che eventi causalmente dipendenti dal punto di vista fisico possano essere probabilisticamente indipendenti.

Sia  $\Omega_n$  l'insieme delle permutazioni con ripetizione di 2 oggetti su  $n$  posti. Si consideri ad esempio una sequenza di  $n$  lanci di una moneta non truccata, ossia tale che  $P(\text{Testa}) = P(\text{Croce}) = \frac{1}{2}$ . Vi sono ovviamente  $2^n$  possibili diverse sequenze di lanci, ma solamente  $n+1$  combinazioni diverse. La probabilità di avere una combinazione con  $k$  Croci è pari a

$$P(k \text{ Croci}) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

Sia  $A$  l'insieme delle combinazioni di risultati di lanci che contengano almeno una Testa ed una Croce, e  $B$  l'insieme delle combinazioni che contengano al massimo una Croce. L'evento  $A \cap B$  è costituito dalle combinazioni con una sola Croce, che sono pari ad  $n$ . Si ha quindi

$$P(A) = 1 - 2 \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}}, \quad P(B) = \frac{n+1}{2^n},$$

$$P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}.$$

È facile verificare che per  $n = 3$  gli eventi  $A$  e  $B$  sono indipendenti, mentre per  $n = 2$  o  $4$  non lo sono.  $\triangle$

**Definizione 1.5.4** – Due  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  su  $\Omega$  si dicono **indipendenti** ( $\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2$ ) se per ogni  $A_1 \in \mathcal{F}_1$  ed  $A_2 \in \mathcal{F}_2$ ,  $A_1$  ed  $A_2$  sono indipendenti.  $\bullet$

È facile convincersi che su due  $\sigma$ -algebre atomiche  $\sigma(\{A_i\})$  e  $\sigma(\{B_i\})$  l'indipendenza può essere verificata sugli atomi, ossia verificando che

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i) \cdot P(B_j) \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Infatti, per ogni insieme  $A$  unione di due atomi di  $\sigma(\{A_i\})$  si verifica che

$$\begin{aligned} P(A \cup B_k) &= P\{(A_i \cup A_j) \cap B_k\} = P\{(A_i \cap B_k) \cup (A_j \cap B_k)\} = \\ &= P(A_i \cap B_k) + P(A_j \cap B_k) = (P(A_i) + P(A_j)) \cdot P(B_k) = \\ &= P(A) \cdot P(B_k) \end{aligned}$$

Lo stesso risultato si verifica per unioni di due atomi di  $\sigma(\{B_i\})$ . Per induzione poi l'indipendenza si verifica su unioni di  $n$  ed  $m$  atomi di  $\sigma(\{A_i\})$  e  $\sigma(\{B_i\})$ , con  $n$  ed  $m$  qualsiasi. Ne consegue che se l'indipendenza è provata sugli atomi essa risulta provata su tutti gli insiemi delle  $\sigma$ -algebre, che quindi risultano indipendenti.

**Definizione 1.5.5** – Due variabili aleatorie  $X_1(\omega)$  ed  $X_2(\omega)$  definite sullo stesso spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  si dicono **indipendenti** se le due  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{F}^{X_1}$  ed  $\mathcal{F}^{X_2}$  da esse rispettivamente generate sono indipendenti, cioè

$$X_1 \perp X_2 \quad \text{se} \quad \mathcal{F}^{X_1} \perp \mathcal{F}^{X_2} \quad (1.5.2)$$

$\bullet$

Una definizione di indipendenza del tutto equivalente, generalizzata però al caso di più di 2 variabili aleatorie, è la seguente

**Definizione 1.5.6** – Considerate  $m$  variabili aleatorie scalari  $\{X_1, \dots, X_m\}$  definite sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e considerata una qualunque  $m$ -pla di borelliani  $\{B_1, \dots, B_m\}$ , con  $B_i \subset \mathbb{R}$ , le **variabili aleatorie** si dicono tra loro **indipendenti** se tali sono gli eventi

$$\{\omega \in \Omega : X_1 \in B_1\}, \{\omega \in \Omega : X_2 \in B_2\}, \dots, \{\omega \in \Omega : X_m \in B_m\}$$

e cioè se risulta:

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_m \in B_m) = \prod_{i=1}^m P(X_i \in B_i) \quad (1.5.3)$$

$$\forall B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}$$

$\bullet$

È facile verificare che se due variabili aleatorie  $X_1$  e  $X_2$  sono indipendenti, presi comunque due insiemi  $A \in \mathcal{F}^{X_1}$  e  $B \in \mathcal{F}^{X_2}$  tali che  $P(A) > 0$  e  $P(B) > 0$ , necessariamente si ha  $A \cap B \neq \emptyset$  (ciò deriva da  $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$ ).

Si vuole ora mostrare che per due variabili aleatorie semplici  $\psi_1$  e  $\psi_2$  indipendenti si ha che

$$E\{\psi_1\psi_2\} = E\{\psi_1\}E\{\psi_2\}.$$

Ciò deriva dal fatto che presi comunque due insiemi  $A \in \mathcal{F}^{\psi_1}$  e  $B \in \mathcal{F}^{\psi_2}$  si ha

$$\begin{aligned} E\{\chi_A\chi_B\} &= \int_{\Omega} \chi_A\chi_B dP = \int_{A \cap B} dP = \\ &= P(A \cap B) = P(A)P(B) = \int_A dP \int_B dP = \\ &= \int_{\Omega} \chi_A dP \int_{\Omega} \chi_B dP = E\{\chi_A\}E\{\chi_B\}. \end{aligned}$$

Riscrivendo quindi le variabili aleatorie semplici

$$\psi_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}, \quad \psi_2 = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j},$$

nella forma

$$\psi_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \chi_{A_i \cap B_j}, \quad \psi_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{A_i \cap B_j},$$

si ha che il prodotto  $\psi_1\psi_2$  può essere scritto

$$\psi_1\psi_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \chi_{A_i \cap B_j},$$

e quindi

$$\begin{aligned} E\{\psi_1\psi_2\} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j P(A_i \cap B_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i P(A_i) \sum_{j=1}^m \beta_j P(B_j) = E\{\psi_1\}E\{\psi_2\} \end{aligned}$$

Il risultato può essere facilmente esteso al caso di più di due variabili aleatorie semplici.

Poiché ogni variabile aleatoria può essere ottenuta come limite di una successione di variabili aleatorie semplici, si ha il seguente teorema:

**Teorema 1.5.7** – Siano  $X_i(\omega)$ ,  $i = 1, \dots, n$  variabili aleatorie scalari indipendenti, tali che esistano i valori sperati  $E\{X_i\}$ . Esiste allora il valore sperato del prodotto e risulta

$$E\left\{\prod_{i=1}^n X_i\right\} = \prod_{i=1}^n E\{X_i\}$$

■

Seguendo la traccia della dimostrazione di questo teorema è facile verificare che date comunque due funzioni  $f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$ , se le variabili aleatorie  $X_1$  e  $X_2$  sono indipendenti si ha

$$E\{f(X_1)g(X_2)\} = E\{f(X_1)\}E\{g(X_2)\}.$$

Ciò discende dal fatto che le nuove variabili aleatorie  $Y_1 = f(X_1)$  e  $Y_2 = g(X_2)$  sono indipendenti, in quanto rispettivamente  $\mathcal{F}^{X_1}$  e  $\mathcal{F}^{X_2}$  misurabili.

**Definizione 1.5.8** – Date due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  si definisce **covarianza** tra  $X$  e  $Y$ , e si indica con  $\sigma_{XY}$ , la quantità

$$\sigma_{XY} \triangleq E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

●

È facile verificare, svolgendo il prodotto in argomento del valore sperato, che

$$\sigma_{XY} = E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\}$$

da cui segue che due variabili aleatorie indipendenti hanno una covarianza pari a zero. La quantità  $E\{XY\}$  viene chiamata **correlazione** tra le variabili aleatorie.

**Teorema 1.5.9** – Siano  $X_i(\omega)$ ,  $i = 1, \dots, n$  variabili aleatorie scalari indipendenti, tali che esistano le varianze  $\sigma_{X_i}^2$ . Esiste allora la varianza della somma e risulta

$$\sigma_{X_1 + \dots + X_n}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2$$

■

**Dimostrazione** – Tenendo presente che dall'indipendenza si ha

$$E\left\{\sum_{i=1}^n X_i\right\} = \sum_{i=1}^n E\{X_i\},$$

$$\sigma_{X_i X_j} = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\} = 0, \quad \forall i \neq j$$

lo svolgimento del calcolo della varianza dà

$$\begin{aligned} \sigma_{X_1 + \dots + X_n}^2 &= E\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n E\{X_i\}\right)^2\right\} = \\ &= E\left\{\left(\sum_{i=1}^n [X_i - E\{X_i\}]\right)^2\right\} = \\ &= E\left\{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [X_i - E\{X_i\}][X_j - E\{X_j\}]\right\} = \\ &= E\left\{\sum_{i=1}^n [X_i - E\{X_i\}]^2\right\} = \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2. \end{aligned}$$

■

Un concetto più debole di quello dell'indipendenza è il concetto di **scorrelazione** tra due variabili aleatorie. Considerate due variabili aleatorie non identicamente nulle si definisce **coefficiente di correlazione** la quantità

$$\varrho_{XY} \triangleq \frac{E\{(X - E\{X\})(Y - E\{Y\})\}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (1.5.4)$$

È facile verificare che  $\varrho_{X_1 X_2}$  è compreso nell'intervallo  $[-1, 1]$ . A tale scopo è sufficiente sviluppare il valore atteso

$$E\{[XE(Y^2) - YE(XY)]^2\} \geq 0 \quad (1.5.5)$$

per ottenere

$$E\{X^2\}E\{Y^2\} - E\{XY\}^2 \geq 0 \Rightarrow \sigma_X \sigma_Y \geq |\sigma_{XY}| \quad (1.5.6)$$

e quindi  $|\varrho_{XY}| \leq 1$ . La disuguaglianza (1.5.6) è detta di Cauchy-Schwarz.

**Definizione 1.5.10** – Due variabili aleatorie  $X_1$  e  $X_2$  si dicono **scorrelate** se risulta  $\varrho_{X_1 X_2} = 0$ . •

**Osservazione 1.5.11** – Si desidera a questo punto mettere in guardia il lettore da tutti coloro che parlano di variabili aleatorie *incorrelate*. Questo termine è una brutta traduzione del termine inglese *uncorrelated* ed è grammaticalmente *scorretto* (incorretto?).

△

È evidente che due variabili aleatorie indipendenti sono scorrelate ma in generale non è vero il viceversa.

**Esercizio 1.5.12** – Il lettore verifichi che quando tra le variabili aleatorie vi è un legame lineare si ha  $|\varrho_{X_1 X_2}| = 1$ . Verifichi inoltre che i teoremi (1.5.9) e (1.5.7) valgono anche per variabili aleatorie scorrelate.

△

**Esercizio 1.5.13** – Sia dato l'insieme degli eventi  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$  con la  $\sigma$ -algebra totale  $\mathcal{F}_{tot}$  su cui sia definita la seguente misura di probabilità

$$P(\omega_1) = \frac{1}{9}, \quad P(\omega_2) = \frac{2}{9}, \quad P(\omega_3) = \frac{2}{9}, \quad P(\omega_4) = \frac{4}{9}.$$

Si mostri che le variabili aleatorie

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in \{\omega_1, \omega_2\} \\ 3 & \text{per } x \in \{\omega_3, \omega_4\} \end{cases} \quad Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in \{\omega_1, \omega_3\} \\ 2 & \text{per } x \in \{\omega_2, \omega_4\} \end{cases}$$

sono indipendenti.

Innanzitutto si osservi che

$$\begin{aligned}\sigma(X) &= \{\emptyset, A, A^C, \Omega\} & \sigma(Y) &= \{\emptyset, B, B^C, \Omega\} \\ A &= \{\omega_1, \omega_2\} & B &= \{\omega_1, \omega_3\} \\ A^C &= \{\omega_3, \omega_4\} & B^C &= \{\omega_2, \omega_4\}\end{aligned}$$

e che le probabilità degli atomi di  $\sigma(X)$  e  $\sigma(Y)$  sono

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(A^C) = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(B^C) = \frac{2}{3}.$$

Le probabilità delle intersezioni sono

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(\omega_1) = \frac{1}{9}, & P(A^C \cap B) &= P(\omega_3) = \frac{2}{9}, \\ P(A \cap B^C) &= P(\omega_2) = \frac{2}{9}, & P(A^C \cap B^C) &= P(\omega_4) = \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

A questo punto è facile verificare l'indipendenza di tutti gli eventi elementari delle  $\sigma$ -algebre (es.  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ), e quindi delle variabili aleatorie  $X$  e  $Y$ .  $\triangle$

## 1.6 Distribuzioni notevoli

In questa sezione saranno brevemente riportate alcune distribuzioni di uso frequente nel calcolo delle probabilità e nella teoria della stima.

### 1.6.1 Distribuzione binomiale

Su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  si considerino  $N$  variabili aleatorie indipendenti  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ciascuna delle quali tale che

$$P\{\omega : X_i(\omega) = 1\} = p, \quad P\{\omega : X_i(\omega) = 0\} = q = 1 - p$$

Si desidera conoscere la distribuzione della variabile aleatoria

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^N X_i(\omega)$$

È evidente che la probabilità che  $X$  assuma un valore superiore a  $N$  è pari a zero. È altrettanto evidente che la probabilità che  $X(\omega)$  sia esattamente uguale a  $N$  è pari a  $p^N$ , mentre la probabilità che sia uguale a zero è pari a  $(1 - p)^N$ .

Il calcolo della probabilità che la variabile aleatoria assuma un valore  $n < N$  si svolge andando a considerare tutte le possibili combinazioni di zeri e uni che danno una somma pari a  $n$ . È facile convincersi che il numero di queste combinazioni è pari al coefficiente binomiale  $\binom{N}{n}$ , ovvero pari al numero di combinazioni di  $N$  oggetti a  $n$  posti. Poiché ciascuna combinazione di zeri e uni ha una probabilità di verificarsi pari al prodotto  $p^n(1 - p)^{N-n}$  si avrà

$$P\{X(\omega) = n\} = \binom{N}{n} p^n (1 - p)^{N-n} = f_{N,p}(n)$$

ed è una funzione dei soli due parametri  $N$  e  $p$ . La funzione di distribuzione sarà allora

$$F_X(n) = P\{X(\omega) \leq n\} = \sum_{k=0}^n \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

Per verificare che accade che  $F_X(N) = 1$ , si osservi che vale la seguente espansione di  $(p + q)^N$  (binomio di Newton)

$$(p + q)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = F_X(N)$$

ed osservando che  $p + q = 1$  la verifica è immediata.

Qui di seguito sono riportati anche il valore sperato e la varianza della variabile aleatoria binomiale, il cui calcolo viene lasciato come esercizio al lettore

$$E\{X(\omega)\} = \sum_{n=0}^N n \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = Np,$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{n=0}^N (n - Np)^2 \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = Npq.$$

### 1.6.2 Distribuzione di Poisson

Nelle applicazioni in cui il numero  $N$  di v.a. è molto grande e la probabilità  $p$  è molto piccola, l'uso della distribuzione binomiale non è agevole, a causa della difficoltà del calcolo del fattoriale per numeri elevati e della scarsa precisione ottenuta nel calcolo di elevate potenze di numeri prossimi a uno o a zero e del prodotto dei risultati  $(0 \cdot \infty)$ . Si pensi ad esempio al decadimento di  $N$  nuclei radioattivi ( $N$  dell'ordine di  $10^{23}$ , ciascuno con una probabilità di decadimento  $p$  in un dato intervallo di tempo ( $p$  dell'ordine di  $10^{-20}$ ). Si provi a calcolare la probabilità di decadimento di  $n$  nuclei nello stesso intervallo di tempo, per esempio con  $n = 10^{22}$ .

È utile in queste situazioni l'utilizzo di formule approssimate che sono valide per  $N$  molto grande e  $p$  molto piccolo. La distribuzione che si ottiene considerando il limite della binomiale per  $N \rightarrow \infty$  e  $p \rightarrow 0$ , in modo che il valore sperato  $Np$  rimanga finito, viene chiamata **distribuzione di Poisson**. Nel seguito si indicherà

$$Np = a$$

e si mostrerà che la distribuzione di Poisson dipende esclusivamente dal parametro  $a$ .

Si osservi che per  $N$  che tende ad infinito si intende che ogni valore finito  $n$  è molto minore rispetto a  $N$ . Allora nella funzione

$f_{N,p}(n)$  del paragrafo precedente è possibile introdurre la seguente semplificazione

$$\frac{N!}{(N-n)!} = N(N-1) \cdots (N-n+1) \approx N^n$$

ottenendo

$$f_{N,p}(n) \approx \frac{(Np)^n}{n!} (1-p)^{N-n} = \frac{(Np)^n}{n!} \frac{(1-p)^N}{(1-p)^n} \quad (1.6.1)$$

Si osservi che essendo  $n$  finito e  $(1-p)$  tendente all'unità, è possibile porre uguale a uno la potenza  $(1-p)^n$ . Eliminando  $N$  dalla (1.6.1) usando la relazione  $Np = a$  si ottiene

$$f_{a,p}(n) = \frac{a^n}{n!} (1-p)^{a/p}$$

e passando al limite per  $p$  tendente a zero si ha la formula di Poisson

$$f_a(n) = \frac{a^n e^{-a}}{n!}$$

che dà la probabilità che la v.a.  $X(\omega)$  assuma il valore  $n$ .

La funzione di distribuzione è data da

$$F_X(n) = \sum_{k=0}^n \frac{a^k e^{-a}}{k!}$$

Se si ha presente l'espansione in serie di MacLaurin dell'esponenziale  $e^a$  è immediato verificare che  $F_X(\infty) = 1$ .

Confrontando la definizione di  $a$  con il valore sperato della v.a. binomiale si ottiene che il valore sperato di  $X(\omega)$  è proprio pari ad  $a$ , come è anche facile verificare con il calcolo diretto. Dall'espressione della varianza della v.a. binomiale, e tenendo presente che per  $p$  che tende a zero si ha  $q \rightarrow 1$ , per la v.a. di Poisson si ha

$$\sigma_X^2 = a$$



### 1.6.3 Distribuzione Gaussiana

È noto dai corsi di analisi che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (1.6.2)$$

Questo risultato si ottiene calcolando il quadrato dell'integrale come un integrale doppio

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Operando una trasformazione in coordinate polari  $(\varrho, \vartheta)$  si ha

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\varrho^2} \varrho d\vartheta d\varrho = \pi.$$

da cui si ottiene  $I = \sqrt{\pi}$ , e cioè il risultato (1.6.2).

Si consideri ora la funzione

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

In base al risultato (1.6.2) è facile verificare che essa soddisfa a tutte le ipotesi del teorema 1.4.9. Ha senso quindi dare la seguente definizione.

**Definizione 1.6.1** – Una variabile aleatoria  $X(\omega)$  si dice **gaussiana** se ha densità di probabilità uguale a

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.6.3)$$

•

Grazie al cambiamento di variabile indicato nel teorema 1.4.9 rimane verificato che  $m$  è il valore medio di  $X(\omega)$

$$m_X = E\{X(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx = m \quad (1.6.4)$$

e che  $\sigma^2$  è la varianza

$$\sigma_X^2 = E\{[X(\omega) - E(X(\omega))]^2\} = \sigma^2 \quad (1.6.5)$$

A scopo di esercizio si riporta qui di seguito la verifica che il valore medio della v.a.  $X(\omega)$  è proprio  $m$ , ottenuta svolgendo l'integrale

$$E\{X(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (1.6.6)$$

A tale scopo è utile scrivere il differenziale

$$d e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = -\frac{2(x-m)}{2\sigma^2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

e riscrivere la (1.6.6) come

$$E\{X(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ -2\sigma^2 \left[ -\frac{(x-m)}{2\sigma^2} \right] + m \right\} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Si ottiene allora

$$E\{X(\omega)\} = -\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + m \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = m.$$

L'importanza della distribuzione gaussiana risiede nel fatto che essa descrive bene la distribuzione di errori casuali in molti tipi di misure. Ciò è dovuto essenzialmente al fatto che molto spesso l'errore

di misura è il risultato della concorrenza di molte cause indipendenti, ciascuna delle quali produce una componente di errore che ha una sua propria distribuzione con varianza finita. Infatti è possibile dimostrare che prendendo  $N$  osservazioni (v.a.) ed effettuandone la media, la distribuzione delle medie al limite per  $N \rightarrow \infty$  tende alla distribuzione Gaussiana, qualunque sia la distribuzione delle singole osservazioni (v.a.), purché abbia varianza finita. Questo risultato è noto come il **Teorema del Limite Centrale**, ed è un teorema fondamentale della statistica matematica. Non verrà qui dimostrato, ma se ne darà una giustificazione euristica mostrando come sia possibile ottenere una v.a. gaussiana a partire dalla somma di infinite v.a. a valori infinitesimi.

Si considerino  $N$  v.a. indipendenti  $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ , ciascuna delle quali può assumere il valore  $+\varepsilon$  o  $-\varepsilon$  e tali che

$$P(X_i = \varepsilon) = \frac{1}{2}, \quad P(X_i = -\varepsilon) = \frac{1}{2}$$

È immediato verificare i seguenti risultati

$$E\{X_i(\omega)\} = 0, \quad E\{X_i(\omega)X_j(\omega)\} = 0 \quad \forall i, j, \quad E\{X_i^2(\omega)\} = \varepsilon^2$$

La somma delle  $N$  v.a. è ancora una v.a. e si ha

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^N X_i(\omega), \quad E\{X(\omega)\} = 0, \quad \sigma_X^2 = E\{X^2(\omega)\} = N \cdot \varepsilon^2$$

Si osservi che  $X(\omega)$  può assumere i seguenti valori

$$-N\varepsilon, (2-N)\varepsilon, \dots, (2k-N)\varepsilon, \dots, +N\varepsilon$$

in cui la differenza  $\Delta$  tra due valori contigui è pari a  $\Delta = 2\varepsilon$ . Tenendo presente la distribuzione binomiale, è facile convincersi che

$$P(X = (2k - N)\varepsilon) = \frac{N!}{(N - k)! k! 2^N} \quad (1.6.7)$$

Ponendo  $2r = 2k - N$  è possibile esprimere la (1.6.7) come

$$P(X = r\Delta) = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} - r\right)! \left(\frac{N}{2} + r\right)! 2^N} = P_X(r\Delta)$$

che riscritta per  $(r + 1)\Delta$  dà

$$P_X((r + 1)\Delta) = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} - r - 1\right)! \left(\frac{N}{2} + r + 1\right)! 2^N}.$$

Aumentando indefinitamente il numero  $N$  di variabili aleatorie che entrano nella somma, e contemporaneamente portando  $\varepsilon$  a zero secondo la legge

$$\varepsilon = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{N}}$$

in modo che la varianza  $\sigma_X^2 = \varepsilon^2 N$  rimanga costante e pari a  $\bar{\sigma}^2$ , si osserva che i valori che possono essere assunti dalla v.a.  $X(\omega)$  formano un insieme sempre più ampio e più fitto, che per  $N \rightarrow \infty$  coincide con tutto l'asse reale. Infatti, la  $X$  assume valori nell'intervallo  $[-\bar{\sigma}\sqrt{N}, \bar{\sigma}\sqrt{N}]$ , crescente con  $N$ , e la distanza  $\Delta = 2\varepsilon$  tra due valori contigui tende a zero al crescere di  $N$ , essendo pari a  $\Delta = 2\bar{\sigma}/\sqrt{N}$ .

Si osservi che per  $N \rightarrow \infty$ , e quindi  $\Delta \rightarrow 0$ , il rapporto  $P_X(r\Delta)/\Delta$  tende alla funzione di distribuzione  $p_X(x)$  della v.a. limite. Per calcolare la  $p_X(x)$  si passerà attraverso il legame con la sua derivata  $Dp_X(x)$ . Si cominci col calcolare

$$\begin{aligned} P_X(r\Delta + \Delta) - P_X(r\Delta) &= \\ &= \left[ \frac{1}{\left(\frac{N}{2} - r - 1\right)! \left(\frac{N}{2} + r + 1\right)!} - \frac{1}{\left(\frac{N}{2} - r\right)! \left(\frac{N}{2} + r\right)!} \right] \frac{N!}{2^N} \\ &= \frac{\frac{N}{2} - r - \left(\frac{N}{2} + r + 1\right)}{\left(\frac{N}{2} - r\right)! \left(\frac{N}{2} + r + 1\right)! 2^N} N! = \frac{-2r - 1}{\left(\frac{N}{2} + r + 1\right)} = P_X(r\Delta) \end{aligned}$$

da cui si ricava, ponendo  $x = r\Delta$ ,

$$\frac{P_X(x + \Delta) - P_X(x)}{P_X(x)} = \frac{-2\frac{x}{\Delta} - 1}{\frac{N}{2} + \frac{x}{\Delta} + 1} \quad (1.6.8)$$

Quando  $\Delta$  è “molto piccolo”, dividendo il numeratore ed il denominatore del primo membro della (1.6.8) per  $\Delta$  possiamo sostituire alle probabilità  $P_X$  divise per  $\Delta$  le densità  $p_X$ . Inoltre, dividendo entrambi i membri per  $\Delta$  si ottiene

$$p_X(x) \frac{p_X(x + \Delta) - p_X(x)}{\Delta} = \frac{-\frac{2x}{\Delta^2} - \frac{1}{\Delta}}{\left(1 + \frac{2x}{\Delta N} + \frac{2}{N}\right) \frac{N}{2}} \quad (1.6.9)$$

Per  $\Delta \rightarrow 0$  il primo membro della (1.6.9) tende al rapporto

$$\frac{p'_X(x)}{p_X(x)}$$

mentre il secondo membro, con la sostituzione  $\Delta = 2\bar{\sigma}/\sqrt{N}$  diventa

$$\frac{-\frac{2x}{4\bar{\sigma}^2}N - \frac{\sqrt{N}}{2\bar{\sigma}}}{\left(1 + \frac{\sqrt{N}}{2\bar{\sigma}}\frac{2x}{N} + \frac{2}{N}\right)\frac{N}{2}} = \frac{-\frac{x}{\bar{\sigma}^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{N}}}{1 + \frac{x}{\bar{\sigma}\sqrt{N}} + \frac{2}{N}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\frac{x}{\bar{\sigma}^2}$$

Si ha quindi che la densità di probabilità per la v.a. limite  $X(\omega)$  soddisfa alla seguente equazione differenziale

$$\frac{p'_X(x)}{p_X(x)} = -\frac{x}{\bar{\sigma}^2}$$

la cui soluzione è

$$p_X(x) = Ae^{-x^2/2\bar{\sigma}^2}$$

Per determinare la costante  $A$  si utilizza la condizione  $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1$ . Poiché

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\bar{\sigma}^2} dx = \sqrt{2\bar{\sigma}^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\bar{\sigma}^2} d\frac{x}{\sqrt{2\bar{\sigma}^2}} = \sqrt{2\pi}\bar{\sigma}$$

ne risulta che deve essere  $A = 1/\sqrt{2\pi}\bar{\sigma}$  e quindi la densità di probabilità diventa

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\bar{\sigma}} e^{-x^2/2\bar{\sigma}^2}$$

Ne consegue che la v.a.  $X(\omega)$  è una v.a. gaussiana a media nulla e a varianza  $\bar{\sigma}^2$ .

### 1.6.4 Distribuzione di Cantor

In questa sezione si desidera riportare una distribuzione un po' particolare, di notevole interesse dal punto di vista teorico ma di nessuna rilevanza per le applicazioni.

Si tratta della distribuzione di probabilità di un numero reale  $X$  in  $[0,1]$ , estratto a sorte utilizzando il seguente meccanismo:

- si assegna al numero la rappresentazione in base 3:

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{3^i} \quad d_i = 0, 1, 2$$

- si estraggono a caso le cifre ternarie  $d_i$ , una dopo l'altra ed indipendentemente tra loro, attribuendo probabilità 0.5 alle cifre 0 e 2, e probabilità 0 all'1.

Poiché seguendo questa procedura di estrazione la variabile  $X$  non assume mai valori nei seguenti intervalli:

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right), \left[\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right), \left[\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}\right), \left[\frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3}\right), \dots$$

la funzione di distribuzione di  $X$  risulta costante a tratti in tali intervalli, nei quali vale rispettivamente  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \dots$

Tale funzione di distribuzione oltre a verificare le proprietà (i-v), è continua in quanto evidentemente se  $|x' - x''| \leq \frac{1}{3^i}$  risulta  $|F_X(x') - F_X(x'')| \leq \frac{1}{2^i}$ , ed è derivabile quasi ovunque con derivata nulla. Infatti essa è derivabile con derivata nulla in tutti i sottointervalli in cui è costante. L'insieme di non derivabilità della  $F_X$ , è costituito da un'infinità non numerabile di punti ed è detto insieme di Cantor.

## 1.7 Vettori di variabili aleatorie

**Definizione 1.7.1** – Data una  $n$ -pla di variabili aleatorie si definisce funzione di **distribuzione congiunta** la quantità

$$F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(\{\omega : X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\}) \quad (1.7.1)$$

Se le variabili aleatorie  $x_1, \dots, x_n$  sono indipendenti allora si ha

$$\begin{aligned} F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n P(\{\omega : X_i(\omega) \leq x_i\}) = \\ &= F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n) \end{aligned}$$

Le quantità  $F_{X_i}(x_i)$  si dicono **funzioni di distribuzione marginale**. •

**Definizione 1.7.2** – Si definisce **vettore aleatorio**  $X = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$  u vettore le cui componenti siano variabili aleatorie e tale che:

$$\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

per ogni borelliano  $B \in \mathcal{B}^n$ . •

Se la funzione di distribuzione congiunta è derivabile rispetto a tutte le variabili il differenziale totale vale:

$$dF_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} dx_1 \dots dx_n$$

che può essere riscritto in forma compatta:

$$dF_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} dx$$

dove  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $F_X = F_{X_1 \dots X_n}$ .

**Definizione 1.7.3** – Si definisce **densità di probabilità congiunta** delle variabili aleatorie  $X_1 \dots X_n$  o densità di probabilità del vettore aleatorio  $X(\omega)$  la quantità

$$p_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$$

Ovviamente se le variabili aleatorie sono indipendenti si ha

$$p_X(x) = p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) \cdots p_{X_n}(x_n),$$

in cui le  $p_{X_i}(x_i)$  sono chiamate **densità marginali**.

È interessante calcolare la probabilità che il valore di un vettore aleatorio dotato di densità di probabilità cada in un intervallo.

In  $\mathbb{R}$  considerando l'intervallo  $[a, b]$  si ha:

$$P(\{\omega : X(\omega) \in [a, b]\}) = \int_a^b p_X(x) dx = \int_a^b dF_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$$

Si osservi che la precedente formula vale anche per intervalli inferiormente e/o superiormente illimitati, ricordando che  $F_X(-\infty) = 0$  e  $F_X(+\infty) = 1$ .

In  $\mathbb{R}^2$ , considerando l'intervallo  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  si ha

$$\begin{aligned} P(\{\omega : X_1(\omega) \in [a_1, b_1], X_2(\omega) \in [a_2, b_2]\}) &= \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} p_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} dx_2 dx_1 = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left( \frac{\partial F_X(x_1, b_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial F_X(x_1, a_2)}{\partial x_1} \right) dx_1 = \\ &= F_X(b_1, b_2) - F_X(b_1, a_2) - F_X(a_1, b_2) + F_X(a_1, a_2). \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

Nella Figura (1.7.3) si dà una interpretazione geometrica della (1.7.2).

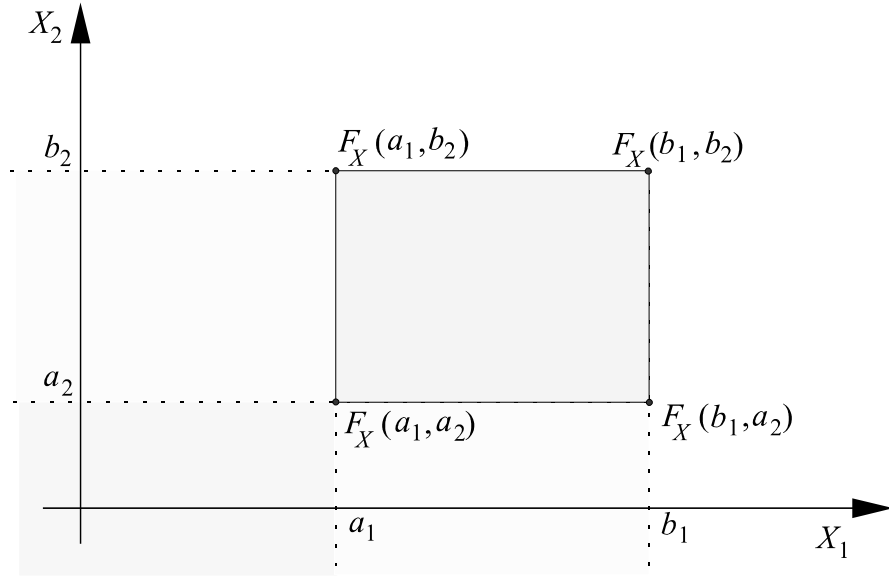


Figura 1.7.3. Calcolo della probabilità di un intervallo in  $\mathbb{R}^2$ .

Il calcolo della probabilità che un vettore aleatorio cada in un intervallo di  $\mathbb{R}^3$  viene lasciato per esercizio al lettore.

In  $\mathbb{R}^n$  la probabilità che il vettore aleatorio  $X$  cada nell'intervallo individuato da due vettori  $a = [a_1, \dots, a_n]$  e  $b = [b_1, \dots, b_n]$  (prodotto cartesiano degli intervalli  $[a_i, b_i]$ ) si calcola come

$$\begin{aligned} P(\{\omega : X_1(\omega) \in [a_1, b_1], X_2(\omega) \in [a_2, b_2], \dots, X_n(\omega) \in [a_n, b_n]\}) &= \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} p_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} dF_{X_1 \dots X_n}. \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

Se si vuole calcolare la probabilità che la  $i$ -esima componente del vettore aleatorio  $X(\omega)$  sia minore od uguale ad un valore prefissato

$b_i$ , occorre porre nella (1.7.3)

$$a = [-\infty, \dots, -\infty], \quad b = [+ \infty, \dots, b_i, \dots, +\infty]$$

per ottenere, dalla stessa definizione di funzione di distribuzione,

$$P(\{\omega : X_i(\omega) \leq b_i\}) = F_X(+\infty, \dots, b_i, \dots, +\infty) \triangleq F_{X_i}(b_i)$$

Questa formula fornisce la definizione di **distribuzione marginale**  $F_{X_i}(X_i)$  nel caso generale in cui le componenti del vettore non siano variabili aleatorie indipendenti. La densità di probabilità marginale è definita come

$$\begin{aligned} p_{X_i}(x_i) &= \frac{dF_{X_i}(x_i)}{dx_i} = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n-1 \text{ volte}} p_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \end{aligned}$$

L'operazione che consente il calcolo della densità di probabilità marginale a partire dalla densità congiunta è detta anche **processo di saturazione**, in quanto la dipendenza dalle  $n-1$  variabili diverse da  $x_i$  viene eliminata 'saturandole' per mezzo dell'integrazione tra  $-\infty$  e  $+\infty$ .

**Definizione 1.7.4** – Si definisce *valore atteso di un vettore aleatorio*  $X(\omega)$  la quantità

$$E\{X(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n)$$

•

**Osservazione 1.7.5** – Il valore atteso di un vettore aleatorio  $X(\omega)$  può essere calcolato utilizzando le distribuzioni marginali

$$E\{X(\omega)\} = \begin{bmatrix} E_1(X(\omega)) \\ \vdots \\ E_n(X(\omega)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 dF_{X_1}(x_1) \\ \vdots \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x_n dF_{X_n}(x_n) \end{bmatrix}$$

La verifica può essere fatta molto semplicemente se le componenti del vettore aleatorio sono tra loro indipendenti. Infatti, calcolando la  $i$ -esima componente di  $E\{X(\omega)\}$  si ha:

$$\begin{aligned} E\{X(\omega)\}_i &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_i d(F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n)) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dF_{X_1}(x_1) \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_i dF_{X_i}(x_i) \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dF_{X_n}(x_n) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_i dF_{X_i}(x_i) \end{aligned}$$

e quindi la tesi.

Nel caso in cui le componenti del vettore aleatorio non sono indipendenti si ha

$$\begin{aligned} E\{X(\omega)\}_i &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_i p_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_i \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_{i-1} dx_{i+1} \cdot \dots \cdot dx_n \right\} dx_i = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_i p_{X_i}(x_i) dx_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i dF_{X_i}(x_i). \end{aligned}$$

△

Definendo il vettore delle medie

$$m_X = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad m_i = E\{X_i(\omega)\} \quad (1.7.4)$$

si può considerare la semplice funzione di variabile aleatoria  $X(\omega) - m_X$ . Questa funzione è essa stessa una variabile aleatoria e se ne può calcolare il valore atteso, che risulta essere nullo. In generale se  $f(\cdot)$  è una funzione di Borel, anche  $f(X(\omega))$  è una variabile aleatoria. È quindi ben definito il valore atteso

$$E\{f(X(\omega))\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_X(x) dx \quad (1.7.5)$$

se  $p_X(x)$  esiste.

**Definizione 1.7.6** – Si definisce **matrice di covarianza (propria) del vettore aleatorio**  $X(\omega) \in \mathbb{R}^n$  la matrice  $\Psi_X$ , quadrata di lato  $n$  il cui generico elemento è:

$$(\Psi_X)_{ij} = E\{(X_i - E\{X_i\})(X_j - E\{X_j\})\}. \quad (1.7.7)$$

Usando la notazione vettoriale si ha

$$\Psi_X = E\{(X - E\{X\})(X - E\{X\})^T\} \quad (1.7.6)$$

Data una coppia di variabili aleatorie vettoriali  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $Y \in \mathbb{R}^m$  si definisce **matrice di covarianza (mutua)** la matrice  $\Psi_{XY} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\Psi_{XY} = E\{(X - E\{X\})(Y - E\{Y\})^T\}. \quad (1.7.8)$$

•

**Esempio 1.7.7** – La (1.7.6) nel caso bidimensionale è data da

$$\begin{aligned} \Psi_X &= E\left\{ \begin{bmatrix} X_1(\omega) - m_1 \\ X_2(\omega) - m_2 \end{bmatrix} \cdot [X_1(\omega) - m_1 \quad X_2(\omega) - m_2] \right\} \\ &= E\left\{ \begin{bmatrix} (X_1(\omega) - m_1)^2 & (X_1(\omega) - m_1)(X_2(\omega) - m_2) \\ (X_1(\omega) - m_1)(X_2(\omega) - m_2) & (X_2(\omega) - m_2)^2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1 X_2} \\ \sigma_{X_1 X_2} & \sigma_{X_2}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si lascia al lettore il compito di verificare che nel caso in cui  $X_1$  e  $X_2$  siano indipendenti la covarianza  $\sigma_{X_1 X_2}$  è pari al prodotto delle deviazioni standard, ovvero

$$\sigma_{X_1 X_2} = \sigma_{X_1} \sigma_{X_2}$$

Si verifichi inoltre che

$$E\{(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)\} = E\{X_1 X_2\} - m_1 m_2$$

△

**Proposizione 1.7.8** – La matrice di covarianza di un vettore aleatorio è simmetrica e semidefinita positiva.

**Dimostrazione** – La simmetria discende direttamente dalla definizione di covarianza (1.7.6), per la quale

$$\Psi_X^T = \Psi_X$$

Per dimostrare che è semidefinita positiva si consideri la forma quadratica

$$z^T \Psi_X z = z^T E[(X - m_X)(X - m_X)^T] z = E[z^T (X - m_X)(X - m_X)^T z]$$

con  $z \neq 0, z \in \mathbb{R}^n$ . Poiché  $z^T (X - m_X)$  è scalare, allora  $z^T (X - m_X) = (X - m_X)^T z$  e quindi

$$z^T \Psi_X z = E\{[z^T (X - m_X)]^2\} \geq 0$$

essendo  $[z^T (X(\omega) - m_X)]^2$  una variabile aleatoria scalare non negativa. ■

**Osservazione 1.7.9** – È facile verificare che se le componenti del vettore aleatorio  $X$  sono linearmente dipendenti, la matrice di covarianza risulta essere singolare. Infatti se le componenti di  $X$  sono dipendenti allora esiste un vettore  $z \in \mathbb{R}^n$ , diverso da zero, tale che  $z^T X \equiv 0$  (cioè  $z^T X(\omega) = 0, \forall \omega \in \Omega$ ). Svolgendo il valore atteso del prodotto  $z^T X$  è facile verificare che vale anche  $z^T m_X = 0$ , e quindi  $z^T (X - m_X) \equiv 0$ . Si ha allora

$$E\{[z^T (X - m_X)]^2\} = 0.$$

Ma si ha anche

$$E\{[z^T (X - m_X)]^2\} = E\{z^T (X - m_X)(X - m_X)^T z\} = z^T \Psi_X z.$$

Poiché per una matrice simmetrica  $S$  vale la seguente implicazione

$$z^T S z = 0 \quad \Rightarrow \quad S z = 0$$

resta dimostrato che la matrice  $\Psi_X$  è singolare. △

Per **varianza** di un vettore aleatorio  $X$  si intende la somma delle varianze delle componenti

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2, \quad (1.7.9)$$

o, il che è lo stesso, il valore atteso del quadrato della norma euclidea di  $X - m_X$

$$\sigma_X^2 = E\{\|X - m_X\|^2\} = E\left\{\sum_{i=1}^n (X_i - m_{X_i})^2\right\}. \quad (1.7.10)$$

È facile verificare che la varianza di un vettore aleatorio è la traccia della matrice di covarianza (la somma dei termini sulla diagonale). in formule

$$\sigma_X^2 = \text{Tr}[\Psi_X]. \quad (1.7.11)$$

## 1.8 Vettori aleatori gaussiani

**Definizione 1.8.1** – Si definisce vettore aleatorio gaussiano un vettore di variabili aleatorie  $X(\omega) = [X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)]^T$  aventi una densità di probabilità del tipo

$$p_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} [\det(\Psi)]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x - m)^T \Psi^{-1}(x - m)}, \quad (1.8.1)$$

in cui la matrice  $\Psi$  è simmetrica e definita positiva. •

La densità gaussiana è dunque univocamente determinata dal vettore  $m$  e dalla matrice  $\Psi$ . È possibile verificare le seguenti proprietà

$$E\{X\} = m, \quad E\{(X - m)(X - m)^T\} = \Psi,$$

e cioè che  $m$  non è altro che il valor medio del vettore aleatorio  $X$  e la matrice  $\Psi$  ne è la covarianza.

La verifica che  $m$  coincide effettivamente con il valor medio del vettore gaussiano si svolge in maniera simile a quanto fatto per la v.a. scalare. Per verificare che la matrice  $\Psi$  è la covarianza occorre effettuare un opportuno cambiamento di variabile  $z = R(x - m)$ , con  $R = \Psi^{-1/2}$  ( $R$ : matrice simmetrica tale che  $R^2 = \Psi^{-1}$ ). Infatti, si consideri il generico elemento  $i, j$  della matrice di covarianza

$$\begin{aligned} (\Psi_X)_{ij} &= \int_{\mathbb{R}^n} (x_i - m_i)(x_j - m_j) p_X(x) d|x| = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} [\det(\Psi)]^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} y_i y_j e^{-\frac{1}{2} y^T \Psi^{-1} y} d|y| \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

in cui si è posto  $x - m = y$ . Ponendo ora  $z = Ry$ , da cui  $y = R^{-1}z$  e  $d|y| = d|z|/\det(R)$ , e ricordando che  $\det(R) = \det(\Psi^{-1/2}) = (\det\{\Psi\})^{-1/2}$  si ha

$$\begin{aligned} (\Psi_X)_{ij} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (R^{-1}z)_i (R^{-1}z)_j e^{-\frac{1}{2} z^T z} d|z| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n (R^{-1})_{ik} (R^{-1})_{jh} \int_{\mathbb{R}^n} z_k z_h e^{-\frac{1}{2} \sum_{r=1}^n z_r^2} d|z| = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n (R^{-1})_{ik} (R^{-1})_{jh} \int_{\mathbb{R}^n} z_k z_h \Pi_{r=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z_r^2} d|z|. \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

Dalla (1.8.3) è facile rendersi conto che le variabili aleatorie  $z_r$  sono gaussiane, a media nulla, a varianza unitaria e indipendenti tra loro

( $E\{z_k z_h\} = \delta_{kh}$ ). Di conseguenza la (1.8.3) può essere riscritta

$$\begin{aligned} (\Psi_X)_{ij} &= \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n (R^{-1})_{ik} (R^{-1})_{jh} E\{z_k z_h\} = \\ &= \sum_{h=1}^n (R^{-1})_{ih} (R^{-1})_{jh} = (R^{-1} R^{-1})_{ij} = (\Psi)_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.8.4)$$

Si osservi che nell'ultimo passaggio si è sfruttata la proprietà di simmetria della matrice  $R^{-1}$ .

Se ne conclude che per un vettore aleatorio gaussiano il valor medio e la matrice di covarianza coincidono rispettivamente col vettore  $m$  e con la matrice  $\Psi$  che ne definiscono la densità di probabilità.

**Osservazione 1.8.2** – Il vettore  $Z = \Psi^{-1/2}(X - m)$  utilizzato nel calcolo precedente non è altro che un vettore aleatorio a media nulla e covarianza pari all'identità. Infatti

$$\begin{aligned} E\{Z\} &= \Psi^{-1/2} E\{(X - m)\} = 0, \\ E\{ZZ^T\} &= \Psi^{-1/2} E\{(X - m)(X - m)^T\} \Psi^{-1/2} = \Psi^{-1/2} \Psi \Psi^{-1/2} = I. \end{aligned}$$

Inoltre è gaussiano in quanto, ricordando che se  $X = f(Z)$  allora  $p_Z(z) = p_X(f(z)) \det(\frac{df}{dz})$ , è facile verificare che la sua densità di probabilità è data da

$$p_Z(z) = p_X(\Psi^{1/2} z + m) \det(\Psi^{1/2}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{1}{2} z^T z}. \quad (1.8.5)$$

Un vettore aleatorio gaussiano dotato della densità di probabilità (1.8.5) si dice **standard**.

Da queste considerazioni si trae la conclusione che un vettore aleatorio gaussiano  $X$  di media  $m_X$  e covarianza  $\Psi_X$  può sempre pensarsi generato da un vettore gaussiano standard  $Z$  per mezzo della trasformazione *affine*

$$X = m_X + \Psi_X^{-1/2} Z.$$



△

**Osservazione 1.8.3** – L'espressione della densità gaussiana mette in evidenza una proprietà unica dei vettori gaussiani, e cioè che vettori gaussiani scorrelati sono indipendenti (si ricordi che è sempre vero che vettori aleatori indipendenti sono scorrelati ma che in generale non è vero il viceversa!). △

I due vettori gaussiani  $X$  e  $Y$ , di dimensione  $n$  ed  $m$  rispettivamente, costituiscono un vettore gaussiano  $Z = [X^T Y^T]^T$  se e solo se la densità di probabilità congiunta  $p_{X,Y}(x,y)$  è anch'essa gaussiana. La densità di  $Z$  è tale che  $p_Z([x^T y^T]^T) = p_{X,Y}(x,y)$  e può essere scritta nella forma

$$p_Z(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+m}{2}} [\det(\Psi_Z)]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(z - m_Z)^T \Psi_Z^{-1} (z - m_Z)},$$

in cui

$$m_Z = \begin{bmatrix} m_X \\ m_Y \end{bmatrix}, \quad \Psi_Z = \begin{bmatrix} \Psi_X & \Psi_{XY} \\ \Psi_{YX} & \Psi_Y \end{bmatrix}.$$

La sottomatrice  $\Psi_{XY}$  costituisce la matrice di covarianza mutua tra i vettori  $X$  e  $Y$  (dalla simmetria della matrice di covarianza si ha che deve essere  $\Psi_{XY} = \Psi_{YX}^T$ ).

Si vuole mostrare che se  $X$  e  $Y$  sono scorrelati, cioè se  $\Psi_{XY} = 0$ , allora  $X$  e  $Y$  sono indipendenti, cioè  $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ . Nell'ipotesi in cui  $\Psi_{XY} = 0$  l'inversa ed il determinante della matrice  $\Psi_Z$  sono pari a

$$\Psi_Z^{-1} = \begin{bmatrix} \Psi_X^{-1} & 0 \\ 0 & \Psi_Y^{-1} \end{bmatrix}, \quad \det(\Psi_Z) = \det(\Psi_X) \det(\Psi_Y).$$

È facile a questo punto verificare che la densità congiunta è fattorizzabile in

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y). \quad (1.8.6)$$

## 1.9 Momenti di variabile aleatoria - Diseguaglianze notevoli

Particolare interesse presentano i valori sperati delle potenze di una variabile aleatoria, attraverso cui si tende a caratterizzare la distribuzione della stessa. Si ha in particolare la seguente definizione:

**Definizione 1.9.1** – Se  $a$  è un numero reale, considerata la variabile aleatoria scalare  $X$ , si definiscono rispettivamente **momento** e **momento assoluto di ordine  $r$  rispetto ad  $a$**  le quantità

$$E\{(X - a)^r\} \quad \text{con } r \text{ intero positivo} \quad (1.9.1)$$

$$E\{|X - a|^r\} \quad \text{con } r > 0 \quad (1.9.2)$$

Si parla semplicemente di **momento** quando si assume  $a = 0$ . •

Poiché  $(X - a)^r$  è integrabile se e solo se lo è  $|X - a|^r$ , se ne deduce che i momenti esistono se e solo se esistono i momenti assoluti.

**Definizione 1.9.2** – Si definisce **momento centrale (o centrato) di ordine  $r$**  per la variabile aleatoria scalare  $X$ , la quantità

$$E\{(X - E\{X\})^r\} \quad (1.9.3)$$

Esso esiste se e solo se esiste il momento di ordine  $r$ . •

**Osservazione 1.9.3** – Si può notare che per quanto riguarda la distribuzione gaussiana, completamente caratterizzata dal valor medio e dalla covarianza, i momenti di qualunque ordine possono essere espressi in funzione dei momenti del primo e del secondo ordine. △

Verranno qui di seguito richiamate alcune disequaglianze notevoli che sussistono per i valori sperati di variabili aleatorie. A tale scopo è utile premettere il seguente:

**Lemma 1.9.4** – Comunque presi  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  reali non negativi si ha:

$$\alpha^{1-\lambda} \beta^\lambda \leq \lambda \beta + (1 - \lambda) \alpha \quad (1.9.4)$$

dove il segno di eguaglianza vale se e solo se  $\alpha = \beta$ .

**Dimostrazione** – Si osservi innanzitutto che per  $\alpha = 0$  essa è banalmente verificata. Per verificare la diseguaglianza nel caso in cui  $\alpha > 0$ , la si divida per  $\alpha$  ottenendo

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\lambda \leq \lambda \frac{\beta}{\alpha} + (1 - \lambda).$$

Ponendo  $t = \beta/\alpha$  si vede che per dimostrare il lemma occorre e basta verificare che per  $t \geq 0$  e  $\lambda \in (0, 1)$  sia

$$t^\lambda \leq \lambda t + 1 - \lambda,$$

ovvero che la funzione definita per  $t \geq 0$

$$\Phi(t) = 1 - \lambda + \lambda t - t^\lambda$$

sia sempre maggiore o uguale a zero per  $\lambda \in (0, 1)$ . Poiché risulta:

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \lambda(1 - t^{\lambda-1}) &\Rightarrow & \Phi' = 0 \text{ per } t = 1, \\ \Phi''(t) &= (1 - \lambda)t^{\lambda-2} &\Rightarrow & \Phi'' \geq 0 \text{ essendo } \lambda \in (0, 1) \end{aligned}$$

si vede che la  $\Phi(t)$  ha in  $t = 1$  un punto di minimo globale, e poiché  $\Phi(1) = 0$  si ha  $\Phi(t) \geq 0 \forall t \geq 0$ , e quindi la tesi. ■

**Teorema 1.9.5 – (Diseguaglianza di Hölder.)** Considerate due variabili aleatorie scalari  $X, Y$  dotate rispettivamente di momenti assoluti di ordine  $p$  e  $q$ , risulta

$$E\{|XY|\} \leq (E\{|X|^p\})^{\frac{1}{p}} (E\{|Y|^q\})^{\frac{1}{q}} \quad (1.9.5)$$

dove  $p$  e  $q$  sono numeri reali maggiori di uno tali che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Dimostrazione** – Qualora  $E\{|X|^p\}$  e/o  $E\{|Y|^q\}$  siano nulli, la diseguaglianza segue banalmente poiché è facile mostrare che se  $E\{|Z|^r\} = 0$  allora  $Z(\omega) \equiv 0$ .

In caso contrario, posto:

$$\alpha = \frac{|X|^p}{E\{|X|^p\}} \quad \beta = \frac{|Y|^q}{E\{|Y|^q\}} \quad \lambda = \frac{1}{q} \quad 1 - \lambda = \frac{1}{p},$$

applicando il lemma precedente si ha

$$\frac{|X|}{E\{|X|^p\}^{1/p}} \frac{|Y|}{E\{|Y|^q\}^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|X|^p}{E\{|X|^p\}} + \frac{1}{q} \frac{|Y|^q}{E\{|Y|^q\}}.$$

Facendo il valore sperato di ambo i membri si ha

$$\frac{E\{|X||Y|\}}{E\{|X|^p\}^{1/p} E\{|Y|^q\}^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

da cui si ottiene facilmente la tesi. ■

Una conseguenza immediata della diseguaglianza di Hölder è che  $E\{|X|\}^p \leq E\{|X|^p\}$ , ottenuta semplicemente ponendo  $Y \equiv 1$  nella (1.9.5).

Nel caso particolare  $p = q = 2$  la precedente diseguaglianza è nota come **diseguaglianza di Cauchy-Schwarz**, e si scrive anche

$$E\{XY\}^2 \leq E\{X^2\}E\{Y^2\}. \quad (1.9.6)$$

(Qualche spiritoso dice che gli insigni matematici Cauchy e Schwarz sono passati alla storia per aver posto  $p = 2$ . In realtà, ovviamente, è il risultato di Cauchy-Schwarz che è stato generalizzato successivamente da Hölder).

**Teorema 1.9.6 – (Diseguaglianza di Minkowski).** Considerate due variabili aleatorie scalari  $X$  e  $Y$  dotate del momento assoluto di ordine  $p \geq 1$ , la variabile aleatoria  $X + Y$  è dotata anch'essa di momento assoluto di ordine  $p$  e risulta:

$$(E\{|X + Y|^p\})^{\frac{1}{p}} \leq (E\{|X|^p\})^{\frac{1}{p}} + (E\{|Y|^p\})^{\frac{1}{p}} \quad (1.9.7)$$

**Dimostrazione** – Il caso  $p = 1$  è banale. Supposto quindi  $1 < p < \infty$ , si ha:

$$|X+Y|^p \leq (2 \max\{|X|, |Y|\})^p = 2^p \max\{|X|^p, |Y|^p\} \leq 2^p(|X|^p + |Y|^p)$$

il che consente di verificare la prima affermazione.

Per verificare la disuguaglianza si cominci con lo scrivere

$$E\{|X+Y|^p\} \leq E\{|X+Y|^{p-1}|X|\} + E\{|X+Y|^{p-1}|Y|\}$$

e si applichi la disuguaglianza di Hölder ad entrambi gli addendi alla destra del segno di minore-uguale

$$E\{|X+Y|^{p-1}|X|\} \leq E\{|X+Y|^{(p-1)q}\}^{1/q} E\{|X|^p\}^{1/p},$$

$$E\{|X+Y|^{p-1}|Y|\} \leq E\{|X+Y|^{(p-1)q}\}^{1/q} E\{|Y|^p\}^{1/p}.$$

Risulta allora

$$E\{|X+Y|^p\} \leq [E\{|X|^p\}^{\frac{1}{p}} + E\{|Y|^p\}^{\frac{1}{p}}] E\{|X+Y|^{(p-1)q}\}^{\frac{1}{q}}$$

e poiché  $(p-1)q = p$ , dividendo entrambi i membri per  $E\{|X+Y|^p\}^{1/q}$  la disuguaglianza di Minkowski risulta dimostrata. ■

**Teorema 1.9.7 – (Disuguaglianza di Jensen)** *Sia  $X$  una variabile aleatoria scalare integrabile e sia  $f$  una funzione convessa su  $\mathbb{R}$  tale che  $f(X)$  sia integrabile, risulta allora:*

$$f(E\{X\}) \leq E\{f(X)\} \quad (1.9.8)$$

**Dimostrazione** – Poiché la convessità di  $f(\cdot)$  implica la sua continuità, ne deriva che  $f(X)$  è una variabile aleatoria. Inoltre, grazie alla continuità, esiste finito il limite

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = k(x)$$

e dalla convessità di  $f(\cdot)$  risulta:

$$f(y) \geq f(x) + k(x)(y - x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Sostituendo nella precedente disuguaglianza  $y = X$  e  $x = E\{X\}$ , si ha

$$f(X) \geq f(E\{X\}) + k(E\{X\})(X - E\{X\})$$

da cui discende immediatamente la tesi effettuando il valore sperato del primo e secondo membro. ■

**Teorema 1.9.8 – (Disuguaglianza di Chebyshev).** *Sia  $X$  una variabile aleatoria scalare e sia  $f$  una funzione di Borel, positiva, pari, non decrescente in  $(0, \infty)$ , tale che  $f(X)$  sia integrabile, allora per ogni  $b > 0$  si ha*

$$P(\{\omega : |X(\omega)| \geq b\}) \leq \frac{E\{f(X(\omega))\}}{f(b)}. \quad (1.9.9)$$

**Dimostrazione** – Evidentemente risulta

$$\begin{aligned} E\{f(X)\} &= \int_{\Omega} f(X) dP \geq \int_{\{\omega : |X(\omega)| \geq b\}} f(X) dP \\ &\geq f(b) \int_{\{\omega : |X(\omega)| \geq b\}} dP = f(b) P(\{\omega : |X(\omega)| \geq b\}) \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

La disuguaglianza di Chebyshev è particolarmente utile quando si considera la funzione  $f(X) = |X|^p$ ,  $p > 0$ , in quanto in questo caso essa fornisce un limite superiore per la probabilità della coda di una distribuzione in funzione di un momento *assoluto*. Si scriverà in questo caso

$$P(\{\omega : |X(\omega)| \geq b\}) \leq \frac{E\{|X(\omega)|^p\}}{b^p}. \quad (1.9.10)$$

Di frequente nelle applicazioni la disuguaglianza di Chebyshev viene utilizzata considerando la variabile aleatoria a media nulla  $X(\omega) - m_X$ , e quindi viene presentata nella forma

$$P(\{\omega : |X(\omega) - m_X| \geq b\}) \leq \frac{E\{f(X(\omega) - m_X)\}}{f(b)} \quad (1.9.11)$$

in cui spesso  $f(X - m_X) = |X - m_X|^p$ , per cui  $E\{f(X - m_X)\}$  non è altro che il momento *centrato* di ordine  $p$  della variabile aleatoria. Ad esempio se si dispone della media  $m_X$  e della varianza  $\sigma_X^2$  di una variabile aleatoria  $X$  è possibile stabilire la seguente maggiorazione della probabilità che  $X(\omega) - m_X$  sia in modulo maggiore di una certa quantità positiva  $b$

$$P(\{\omega : |X(\omega) - m_X| \geq b\}) \leq \frac{\sigma_X^2}{b^2}. \quad (1.9.12)$$

Questa relazione permette di stabilire, ad esempio, che qualunque sia la distribuzione della variabile aleatoria, la probabilità che essa differisca dal valor medio per valori maggiori, in modulo, di  $3\sigma_X$  è inferiore ad  $1/9$ . Si osservi invece che la (1.9.12) non fornisce informazioni utili per  $b \leq \sigma$ .

In alcuni testi la (1.9.12) viene riportata nella forma

$$P\left(\left\{\omega : \left|\frac{X(\omega) - m_X}{\sigma_X}\right| \geq b\right\}\right) \leq \frac{1}{b^2}, \quad (1.9.13)$$

facile da ottenersi osservando che la variabile aleatoria  $(X(\omega) - m_X)/\sigma_X$  è una variabile aleatoria a media nulla e varianza unitaria.

## 1.10 Convergenza di successioni aleatorie

Si consideri una successione  $\{X_n\}$  di variabili aleatorie vettoriali di dimensioni  $m$ , definite sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e si supponga che in  $\mathbb{R}^m$  sia definita una opportuna norma. Si dice che la **successione converge ovunque** in  $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$  se esiste:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \quad \forall \omega \in \mathcal{A}$$

dove  $X$  è una variabile aleatoria a valori finiti su  $\mathcal{A}$ . Questo tipo di convergenza viene anche detto **puntuale**, perché si verifica punto per punto. È tuttavia interessante fornire concetti di convergenza di tipo più debole, che coinvolgono la misura di probabilità definita sullo spazio misurabile considerato. In particolare, si ha:

**Definizione 1.10.1 – (Convergenza quasi certa)** *La successione di variabili aleatorie  $\{X_n\}$  converge quasi certamente (q.c.) alla variabile aleatoria  $X$  se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) < \infty, \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N, \quad (1.10.1)$$

dove  $N \in \mathcal{F}$ , è un insieme di misura  $P$  nulla. •

Si dice anche che la successione  $\{X_n\}$  converge a  $X$  **quasi ovunque** rispetto alla misura  $P$  (e si scrive  $P$ -q.o.) su  $\Omega$ . È possibile dimostrare il seguente teorema di convergenza quasi certa.

**Teorema 1.10.2 –** *La successione  $\{X_n\}$  di variabili aleatorie converge q.c. a  $X$  se e solo se per ogni  $\epsilon > 0$  si ha:*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P\{\|X_n - X\| \leq \epsilon, \forall n \geq r\} = 1 \quad (1.10.2)$$

o equivalentemente se

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P\{\|X_n - X\| > \epsilon, \text{ per qualche } n \geq r\} = 0 \quad (1.10.3)$$

**Dimostrazione** – Si supponga che  $\{X_n\}$  converga q.c. e sia  $\Omega_0 = \Omega \setminus N$  l'insieme in cui si ha convergenza puntuale ( $P(\Omega_0) = 1$ ). Allora, posto

$$\begin{aligned} A_r(\epsilon) &= \{\omega \in \Omega_0 : \|X_n - X\| \leq \epsilon, \forall n \geq r\} \\ &= \bigcap_{n=r}^{\infty} \{\omega \in \Omega_0 : \|X_n - X\| \leq \epsilon\} \end{aligned}$$

si ha che per ogni  $\epsilon$  la  $\{A_r(\epsilon)\}$  è una successione non decrescente di insiemi di  $\mathcal{F}$ . Inoltre per ogni  $\epsilon > 0$  risulta  $\Omega_0 \subset \bigcup_{r=1}^{\infty} A_r(\epsilon)$  poiché infatti

$$\omega \in \Omega_0 \Rightarrow \forall \epsilon \exists n_\epsilon : \|X_n(\omega) - X(\omega)\| \leq \epsilon \quad \forall n > n_\epsilon$$

e quindi

$$\forall \epsilon \exists n_\epsilon : \Omega_0 \subset A_r(\epsilon) \quad \forall r > n_\epsilon.$$

Ne risulta che

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(A_r) = P\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} A_r\right) \geq P(\Omega_0) = 1 \quad (1.10.4)$$

che dimostra la necessità dell'asserto.

Per dimostrare la sufficienza del teorema si mostrerà che nel caso in cui  $\{X_n\}$  non converge q.c. allora la (1.10.3) non è verificata. Infatti in questo caso esiste  $\Lambda \in \mathcal{F}$ , con  $P(\Lambda) > 0$ , tale che  $\{X_n\}$  non converge a  $X$  in  $\Lambda$ . È allora possibile definire la variabile aleatoria (eventualmente a valori infiniti)

$$Z(\omega) = \overline{\lim_{r \rightarrow \infty}} \|X_r(\omega) - X(\omega)\| = \inf_r \sup_{k \geq r} \|X_k(\omega) - X(\omega)\| \quad (1.10.5)$$

e si ha

$$\{\omega \in \Omega : Z(\omega) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : Z(\omega) > \frac{1}{n}\}$$

Poiché per ogni  $\omega_0 \in \Lambda$ ,  $Z(\omega_0) > 0$  si ha che  $\Lambda \subset \{\omega \in \Omega : Z > 0\}$ .

Consequentemente  $P(\cup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : Z > 1/n\}) \geq P(\Lambda) > 0$ . Poiché la successione degli insiemi  $\{\omega \in \Omega : Z > 1/n\}$  è non decrescente al crescere di  $n$  deve dunque esistere  $\bar{n}$  tale che  $P(\{Z > 1/\bar{n}\}) > 0$ . Posto allora  $\epsilon = 1/\bar{n}$ , risulta:

$$P\{Z > \epsilon\} > 0$$

Inoltre  $\{\omega \in \Omega : Z(\omega) > \epsilon\} \subset A_r^C(\epsilon)$  per ogni  $r$ , in quanto dalla definizione di  $Z$  si ha che per ogni  $r$ :

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega : Z(\omega) > \epsilon\} &\subset \{\omega \in \Omega : \sup_{k \geq r} \|X_k(\omega) - X(\omega)\| > \epsilon\} \\ &\subset \{\omega \in \Omega : \|X_n(\omega) - X(\omega)\| > \epsilon, \text{ per qualche } n \geq r\} = A_r^C(\epsilon), \quad \forall r \end{aligned}$$

Pertanto

$$P\{A_r^C(\epsilon)\} \geq P\{Z > \epsilon\} > 0 \quad \forall r,$$

da cui

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P\{A_r^C(\epsilon)\} = \lim_{r \rightarrow \infty} P\{\|X_n(\omega) - X(\omega)\| > \epsilon \text{ per qualche } n \geq r\} > 0.$$

■

Una ulteriore definizione di convergenza è la seguente.

**Definizione 1.10.3 – (Convergenza in probabilità)** La successione  $\{X_n\}$  di variabili aleatorie converge in probabilità a  $X$ , e si indica con la notazione

$$P\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$$

se per ogni  $\epsilon > 0$  risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|X_n - X\| > \epsilon) = 0 \quad (1.10.6)$$

•

Nell'ambito della teoria della misura invece di scrivere  $P\text{-}\lim$  per indicare il **limite in misura** si usa spesso la notazione l.i.m..

Il concetto di convergenza in probabilità è più debole di quello di convergenza q.c. Si ha infatti il seguente risultato:

**Teorema 1.10.4 –** La convergenza q.c. a  $X$  di una successione  $\{X_n\}$  di variabili aleatorie implica la convergenza in probabilità a  $X$  della stessa successione.

**Dimostrazione –** Poiché per ogni  $\epsilon > 0$  risulta:

$$\{\omega \in \Omega : \|X_n - X\| > \epsilon\} \subset \{\omega \in \Omega : \|X_k - X\| > \epsilon \text{ per qualche } k \geq n\}$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|X_n - X\| > \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(\|X_k - X\| > \epsilon \text{ per qualche } k \geq n) = 0$$

**Definizione 1.10.5 – (Convergenza in media di ordine  $p$ )**

Sia  $p > 0$  un numero reale, sia  $\{X_n\}$  una successione di variabili aleatorie tali che  $\|X_n\|^p$  sia integrabile e sia  $X$  una variabile aleatoria tale che  $\|X\|^p$  sia anch'essa integrabile; la successione  $\{X_n\}$  converge in media di ordine  $p$  ad  $X$ , se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{\|X_n - X\|^p\} = 0 \quad p > 0 \quad (1.10.7)$$

Se  $p = 2$  si parla di **convergenza in media quadratica**, se  $p = 1$  semplicemente di **convergenza in media**.

Il concetto di convergenza in probabilità è anche più debole di quello di convergenza in media di ordine  $p$ .

**Teorema 1.10.6** – La convergenza in media di ordine  $p$  a  $X$  di una successione di variabili aleatorie  $\{X_n\}$  implica la convergenza in probabilità a  $X$  della stessa successione.

**Dimostrazione** – Il risultato è immediatamente verificabile utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev. Considerata infatti la variabile aleatoria

$$Y_n = \|X_n - X\|$$

e la funzione positiva, pari, non decrescente

$$f(x) = |x|^p, \quad p > 0$$

si ha

$$\begin{aligned} P(\{\omega : \|X_n - X\| > \epsilon\}) &\leq P(\{\omega : |Y_n| \geq \epsilon\}) \leq \frac{E\{f(Y_n)\}}{f(\epsilon)} \\ &= \frac{E\{Y_n^p\}}{\epsilon^p} = \frac{E\{\|X_n - X\|^p\}}{\epsilon^p} \quad \forall \epsilon > 0 \end{aligned}$$

e passando al limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega : \|X_n - X\| > \epsilon\}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E\{\|X_n - X\|^p\}}{\epsilon^p} \quad \forall \epsilon > 0$$

la tesi è dimostrata.

**Teorema 1.10.7** – La convergenza in probabilità ad  $X$  di una successione  $\{X_n\}$  di variabili aleatorie implica la convergenza in media di ordine  $p$  ad  $X$  se la norma della successione è dominata da una variabile aleatoria  $Y$  dotata del momento di ordine  $p$ .

**Dimostrazione** – Si mostrerà che se per ipotesi

$$Y \geq \|X_n\| \quad \forall n \quad \text{e} \quad Y \geq \|X\|$$

allora

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad E\{\|X_n - X\|^p\} \leq \epsilon \quad \forall n > \bar{n},$$

cioè la tesi. Poiché vale la disuguaglianza

$$\|X_n - X\| \leq \|X_n\| + \|X\| \leq 2Y$$

è evidente che per  $\forall \eta > 0$ :

$$\begin{aligned} E\{\|X_n - X\|^p\} &= \int_{\{\omega : \|X_n - X\| \leq \eta\}} \|X_n - X\|^p dP \\ &\quad + \int_{\{\omega : \|X_n - X\| > \eta\}} \|X_n - X\|^p dP \end{aligned} \quad (1.10.8)$$

e quindi

$$E\{\|X_n - X\|^p\} \leq \eta^p + 2^p \int_{\Omega} \chi_{\{\omega : \|X_n - X\| > \eta\}} Y^p dP$$

Osservando che per ipotesi l'insieme limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\omega : \|X_n - X\| > \eta\}$$

è un insieme di misura  $P$  nulla, la successione  $\{Y^p \chi_{\{\omega : \|X_n - X\| > \eta\}}\}$  tende a zero q.c. su  $\Omega$  e quindi per  $\forall \bar{\epsilon} > 0 \quad \exists \bar{n}$  tale che

$$\int_{\Omega} \chi_{\{\omega : \|X_n - X\| > \eta\}} Y^p dP \leq \bar{\epsilon} \quad \text{per } n > \bar{n}$$

e ponendo  $\eta = \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{1/p}$  e  $\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{2^{p+1}}$  si ha

$$E\{\|X_n - X\|^p\} \leq \epsilon \quad \text{per } n > \bar{n}$$

che dalla definizione di limite dimostra la convergenza in media di ordine  $p$  e quindi la tesi. ■

Un tipo di convergenza più debole dei precedenti può essere definito con riferimento a successioni di misure di probabilità definite su uno stesso spazio degli eventi  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

**Definizione 1.10.8 – (Convergenza debole)** - Una successione  $\{P_k\}$  di misure di probabilità definite su uno spazio degli eventi  $(\Omega, \mathcal{F})$  converge debolmente alla misura di probabilità  $P$  se per ogni variabile aleatoria  $X$  continua e limitata risulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X(\omega) dP_k(\omega) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega). \quad (1.10.9)$$

•

**Teorema 1.10.9 – (Convergenza limitata)** - Sia  $\{X_j\}$  una successione di variabili aleatorie definite su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  tali che  $\lim_{j \rightarrow \infty} X_j = X$  q.c. e sia  $|X_j| \leq a$ ,  $\forall j$ , in tal caso si ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A X_j(\omega) dP(\omega) = \int_A X(\omega) dP(\omega) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

ed in particolare, per  $A = \Omega$ , si ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E\{X_j\} = E\{X\}. \quad (1.10.10)$$

■

## 1.11 Lo spazio di Hilbert delle variabili aleatorie

Agli inizi del capitolo si è detto che uno spazio lineare dotato di prodotto scalare che sia completo rispetto alla norma da esso

indotta è chiamato spazio di Hilbert. Gli spazi di Hilbert hanno proprietà notevoli che sono utili nell'analisi funzionale. Si mostrerà ora brevemente che lo spazio delle variabili aleatorie di quadrato sommabile (ovvero dotate di momento del secondo ordine finito) costituisce uno spazio di Hilbert.

Si osservi innanzi tutto che, data una terna di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , la totalità delle variabili aleatorie (funzioni misurabili) a valori reali costituisce uno spazio lineare sul corpo dei reali poiché combinazioni lineari di variabili aleatorie sono ancora variabili aleatorie (più in generale si potrebbe considerare lo spazio lineare sul corpo dei complessi delle variabili aleatorie a valori complessi, ma la trattazione relativa non verrà presentata per omogeneità con quanto svolto nel resto del capitolo). Nello spazio così definito si consideri ora lo spazio delle variabili aleatorie che hanno un momento assoluto di ordine  $p$  finito, che verrà indicato con  $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , o semplicemente  $L_p$ . La disuguaglianza di Minkowski permette di stabilire che  $L_p$  è uno spazio lineare, in quanto mostra che la combinazione lineare di variabili aleatorie dotate di momento assoluto di ordine  $p$  finito, è ancora una variabile aleatoria con momento assoluto di ordine  $p$  finito, cioè appartiene a  $L_p$ . Nello spazio  $L_p$  è possibile prendere come norma proprio la radice  $p$ -esima del momento assoluto di ordine  $p$ , indicandola con  $\|\cdot\|_p$ . Si ha quindi

$$\|X\|_p \triangleq E\{|X|^p\}^{1/p} = \left( \int_{\mathbb{R}} |x|^p p_X(x) dx \right)^{1/p}. \quad (1.11.1)$$

Ad assicurare che questa definizione di norma sia ben posta è proprio la disuguaglianza di Minkowski, che costituisce in questo caso la disuguaglianza triangolare cui deve soddisfare una norma.

Una successione di variabili aleatorie si dice convergere in  $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se converge in media di ordine  $p$ .

Tra tutti gli spazi  $L_p$  con  $p \geq 1$  di particolare interesse è lo spazio  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . In  $L_2$  la norma di variabili aleatorie a media nulla coincide con la deviazione standard  $\sigma_X$ . L'interesse in tale spazio risiede principalmente nel fatto che la norma in  $L_2$  può pensarsi

indotta dal prodotto scalare definito come

$$\langle X, Y \rangle \triangleq E\{XY\}, \quad (1.11.2)$$

da cui

$$\|X\|_2 \triangleq \sqrt{E\{X^2\}} = \sqrt{\langle X, X \rangle}. \quad (1.11.3)$$

Si osservi che stavolta è la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ad assicurare che il prodotto scalare di due variabili aleatorie in  $L_2$  esista finito

$$\langle X, Y \rangle \leq E\{|XY|\} \leq \sqrt{E\{X^2\}} \sqrt{E\{Y^2\}} = \|X\|_2 \|Y\|_2. \quad (1.11.4)$$

Bisogna notare che in realtà il primo assioma del prodotto scalare (e della norma) non risulta verificato

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle &= 0 \\ \|X\|_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad X \equiv 0, \quad (1.11.5)$$

in quanto, con le definizioni date,  $X$  può differire da zero in un sottoinsieme di  $\Omega$  con misura nulla. Occorre quindi stabilire di considerare equivalenti variabili aleatorie che coincidano quasi ovunque (differiscano su di un insieme di misura nulla), ridefinendo  $L_2$  come l'insieme delle classi di equivalenza di variabili aleatorie dotate di varianza finita.

Un risultato notevole, che non verrà qui dimostrato, è che lo spazio  $L_2$  è completo, ovvero che ogni successione di Cauchy in  $L_2$  converge (nella norma  $\|\cdot\|_2$ , e quindi in media quadratica) ad un elemento di  $L_2$ . La successione di variabili aleatorie converge ad un unico elemento di  $L_2$ , inteso come classe di equivalenza di variabili aleatorie.

Due variabili aleatorie si dicono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo

$$X \perp Y \quad \Leftrightarrow \quad \langle X, Y \rangle = 0, \quad (1.11.6)$$

e cioè se  $E\{XY\} = 0$ . Se le variabili aleatorie hanno media nulla, il concetto di ortogonalità coincide con quello di scorrelazione. Si ha

quindi che  $X$  e  $Y$  sono scorrelate se e solo se  $X - m_X$  e  $Y - m_Y$  sono ortogonali, infatti è facile verificare che

$$\langle X - m_X, Y - m_Y \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E\{XY\} = m_X m_Y. \quad (1.11.7)$$

Il teorema di Pitagora in  $L_2$  afferma che se  $X$  e  $Y$  sono ortogonali si ha

$$E\{(X + Y)^2\} = E\{X^2\} + E\{Y^2\}, \quad (1.11.8)$$

come è facile verificare per calcolo diretto.

Lo spazio  $L_2$  ha dimensione infinita, in quanto non è possibile trovare una base finita, ovvero un insieme finito di variabili aleatorie indipendenti che generi tutto  $L_2$  con combinazioni lineari. Dato un sottospazio  $\mathcal{M}$  di  $L_2$  ed un suo complementare  $\overline{\mathcal{M}}$  (cioè tale che  $L_2 = \mathcal{M} \oplus \overline{\mathcal{M}}$ ), esiste unica la scomposizione di ogni vettore  $X$  come

$$X = X_1 + X_2, \quad \text{con } X_1 \in \mathcal{M} \text{ e } X_2 \in \overline{\mathcal{M}}. \quad (1.11.9)$$

L'unicità può essere dimostrata verificando che l'esistenza di una scomposizione  $X = X'_1 + X'_2$  con  $X'_1 \neq X_1$  o  $X'_2 \neq X_2$ , porterebbe all'assurdo che  $0 = (X_1 - X'_1) + (X_2 - X'_2)$ , e cioè che il vettore nullo è ottenuto da una somma di vettori indipendenti (i vettori di  $\mathcal{M}$  sono indipendenti da quelli di  $\overline{\mathcal{M}}$ ). Il vettore  $X_1$  è detto **proiezione** di  $X$  su  $\mathcal{M}$  secondo  $\overline{\mathcal{M}}$ . Se come spazio complementare di  $\mathcal{M}$  si sceglie  $\mathcal{M}^\perp$ , ovvero l'insieme di tutti i vettori ortogonali a  $\mathcal{M}$ , allora  $X_1$  è definita come la **proiezione ortogonale** di  $X$  su  $\mathcal{M}$ , e verrà indicata con  $X_{\mathcal{M}}$  o con  $\Pi(X|\mathcal{M})$ . Poiché la proiezione ortogonale è unica (sempre nel senso delle classi di equivalenza) è possibile definire, in maniera alternativa, proiezione ortogonale di un vettore  $X$  su  $\mathcal{M}$  il vettore  $X_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$  tale che  $X - X_{\mathcal{M}}$  risulta ortogonale a  $\mathcal{M}$

$$X_{\mathcal{M}} : \quad \langle X - X_{\mathcal{M}}, Y \rangle = 0, \quad \forall Y \in \mathcal{M}. \quad (1.11.10)$$

Se il sottospazio  $\mathcal{M}$  ha dimensione finita  $m$  ed è generato da una base  $\{Y_1, \dots, Y_m\}$  (ovvero  $\mathcal{M}$  è il sottospazio delle combinazioni lineari delle variabili aleatorie  $Y_i$ ) risulta

$$X_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^m c_i Y_i, \quad \text{con } c_i \in \mathbb{R}. \quad (1.11.11)$$



Poiché

$$\langle X - X_{\mathcal{M}}, Y_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle X, Y_j \rangle = \langle X_{\mathcal{M}}, Y_j \rangle, \quad (1.11.12)$$

se la base è ortonormale, ovvero tale che  $\langle Y_i, Y_j \rangle = \delta_{ij}$  si ha

$$\langle X, Y_j \rangle = \sum_{i=1}^m c_i \langle Y_i, Y_j \rangle = c_j. \quad (1.11.13)$$

Riscrivendo i prodotti scalari in termini di valore atteso si ha in definitiva

$$X_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^m E\{XY_i\}Y_i. \quad (1.11.14)$$

Se la base non è ortonormale si ha

$$\begin{bmatrix} \langle X, Y_1 \rangle & \cdots & \langle X, Y_m \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle Y_1, Y_1 \rangle & \cdots & \langle Y_1, Y_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Y_m, Y_1 \rangle & \cdots & \langle Y_m, Y_m \rangle \end{bmatrix}.$$

e quindi, riscrivendo i prodotti scalari come valori attesi, i coefficienti  $c_i$  si ottengono dalla

$$\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle X, Y_1 \rangle & \cdots & \langle X, Y_m \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle Y_1, Y_1 \rangle & \cdots & \langle Y_1, Y_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Y_m, Y_1 \rangle & \cdots & \langle Y_m, Y_m \rangle \end{bmatrix}^{-1}, \quad (1.11.15)$$

pertanto la proiezione di  $X$  sullo spazio generato dalle variabili  $Y_i$  si può scrivere come

$$X_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} \langle X, Y_1 \rangle & \cdots & \langle X, Y_m \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle Y_1, Y_1 \rangle & \cdots & \langle Y_1, Y_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Y_m, Y_1 \rangle & \cdots & \langle Y_m, Y_m \rangle \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix}. \quad (1.11.16)$$

Fin qui si è trattato di variabili aleatorie scalari. Nel caso in cui ci si trova ad operare con variabili aleatorie vettoriali, che assumono valore in  $\mathbb{R}^n$ , il prodotto scalare viene definito come

$$\langle X, Y \rangle = E\{X^T Y\}, \quad X(\omega), Y(\omega) \in \mathbb{R}^n.$$

Ha però scarso interesse considerare l'ortogonalità tra due vettori aleatori, definita come l'annullarsi di questo prodotto scalare. Anche perché in questo modo non potrebbe essere definita l'ortogonalità tra vettori aleatori di dimensioni diverse. Si preferisce quindi stabilire l'ortogonalità tra due vettori aleatori quando sussiste l'ortogonalità tra tutte le componenti dei vettori. In formule

$$\begin{aligned} X \perp Y, \\ X(\omega) \in \mathbb{R}^n, \quad Y(\omega) \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} E\{X_i Y_j\} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ \forall j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Con notazione vettoriale si può scrivere

$$\begin{aligned} X \perp Y, \\ X(\omega) \in \mathbb{R}^n, \quad Y(\omega) \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \Leftrightarrow E\{XY^T\} = 0. \quad (1.11.17)$$

Come conseguenza di questa definizione si ha anche che due vettori aleatori  $X$  e  $Y$  sono scorrelati se e solo se i vettori centrati  $X - m_X$  e  $Y - m_Y$  sono ortogonali. Infatti, ricordando che la matrice di mutua covarianza è data da

$$\Psi_{XY} = E\{(X - m_X)(Y - m_Y)^T\},$$

si ha dalla definizione di ortogonalità

$$\begin{aligned} X - m_X \perp Y - m_Y, \\ X(\omega) \in \mathbb{R}^n, \quad Y(\omega) \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \Leftrightarrow \Psi_{XY} = 0, \quad (1.11.18)$$

che è anche la condizione di scorrelazione tra variabili aleatorie vettoriali.

Si osservi ora che nei passaggi che permettono di arrivare alla (1.11.16) si sarebbero potute riunire le variabili aleatorie  $Y_i$ ,  $i =$

$1, \dots, m$ , in un vettore  $Y$ , con  $Y(\omega) \in \mathbb{R}^m$ . La (1.11.16) potrebbe essere interpretata come la proiezione del vettore  $X$ , con  $X(\omega) \in \mathbb{R}$  nello spazio  $\mathcal{M}$  generato da trasformazioni lineari del vettore  $Y$ . In forma vettoriale la (1.11.16) può allora essere riscritta come

$$X_{\mathcal{M}} = E\{XY^T\}E\{YY^T\}^{-1}Y. \quad (1.11.19)$$

Se  $X(\omega) \in \mathbb{R}^n$ , ciascuna componente  $X_i$  può essere proiettata su  $\mathcal{M}$  allo stesso modo, ottenendo

$$X_{i,\mathcal{M}} = E\{X_i Y^T\}E\{YY^T\}^{-1}Y, \quad i = 1, \dots, n.$$

La proiezione del vettore  $X$  su  $\mathcal{M}$  in forma vettoriale ritorna ad avere la stessa scrittura formale (1.11.19).

## 1.12 Misure assolutamente continue e teorema di Radon-Nikodym

Saranno dati qui di seguito alcuni prerequisiti necessari alla dimostrazione del Teorema di Radon-Nikodym che costituisce la base teorica per impostare il problema dell'identificazione dei parametri di un sistema nel caso generale.

Sia  $(\Omega, \mathcal{F})$  uno spazio misurabile e sia  $\bar{m}$  una misura segnata su di esso definita. Si dice che un insieme  $A \in \mathcal{F}$  è *positivo* rispetto alla misura segnata  $\bar{m}$  se risulta  $\bar{m}(H) \geq 0$  per ogni  $H$  sottoinsieme misurabile di  $A$ . In maniera analoga si definiscono gli insiemi *negativi* rispetto alla misura  $\bar{m}$ .

**Definizione 1.12.1** – Dato uno spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ , si dice che due funzioni  $f$  e  $g$  **coincidono quasi ovunque** in  $\Omega$  se i punti di  $\Omega$  in cui  $f \neq g$  costituiscono un insieme  $N$  di misura nulla,  $m(N) = 0$ , e si scrive  $f \equiv g$  *m-q.o.* •

È facile dimostrare che se  $f$  e  $g$  sono due funzioni misurabili tali che:

$$\int_A f(\omega) dm(\omega) = \int_A g(\omega) dm(\omega) \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad (1.12.1)$$

allora  $f \equiv g$  *m-q.o.*

**Teorema 1.12.2 – (Scomposizione di Hahn)** Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, \bar{m})$  uno spazio di misura, con  $\bar{m}$  una misura segnata. Esistono allora un insieme positivo  $A$  ed un insieme negativo  $B$  tali che  $\Omega = A \cup B$  e tali che  $A \cap B = \emptyset$ .

**Dimostrazione** – Senza perdita di generalità si supponga che  $\bar{m}$  non assuma il valore  $+\infty$  e si indichi con  $\lambda$  l'estremo superiore di  $\bar{m}(H)$  rispetto agli insiemi positivi  $H$  di  $\mathcal{F}$ . Poiché l'insieme vuoto è un insieme positivo, risulta  $\lambda \geq 0$ . Si consideri una successione  $\{A_j\}$  di insiemi positivi tale che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \bar{m}(A_j) = \lambda$$

e sia

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

Poiché si può dimostrare che l'unione di una collezione contabile di insiemi positivi è un insieme positivo, anche  $A$  è un insieme positivo e perciò  $\bar{m}(A) \leq \lambda$ . D'altra parte, poiché  $A \setminus A_j$  è un sottoinsieme di  $A$ , sarà  $\bar{m}(A \setminus A_j) \geq 0$  e perciò

$$\bar{m}(A) = \bar{m}(A \setminus A_j) + \bar{m}(A_j) \geq \bar{m}(A_j) \quad \forall j$$

Ne segue che  $\bar{m}(A) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \bar{m}(A_j) = \lambda$  e quindi deve essere  $\bar{m}(A) = \lambda$ .

Per mostrare che  $B = \Omega \setminus A$  è un insieme negativo, occorre verificare che i soli insiemi di misura positiva contenuti in  $B$  hanno misura nulla.

Si supponga che  $E \subset B$  sia un sottoinsieme di misura positiva. Poiché  $E$  ed  $A$  sono disgiunti ed entrambi con misure positive, la misura di  $E \cup A$  è positiva e tale che

$$\lambda \geq \bar{m}(E \cup A) = \bar{m}(E) + \bar{m}(A) = \bar{m}(E) + \lambda$$

Essendo  $0 \leq \lambda \leq \infty$  ne discende che  $\bar{m}(E) = 0$ . Il teorema è dimostrato osservando che, per costruzione,  $A$  e  $B$  sono disgiunti e tali che  $A \cup B = \Omega$ . ■

**Lemma 1.12.3** – *Dato lo spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{F}, m)$  e assegnato per ogni numero razionale  $\alpha$  un insieme  $B_\alpha \in \mathcal{F}$ , se risulta*

$$m(B_\alpha \setminus B_\beta) = 0 \quad \forall \alpha < \beta \quad (1.12.2)$$

*allora esiste una funzione misurabile  $f$  tale che  $f \leq \alpha$  m-q.o. su  $B_\alpha$  ed  $f \geq \alpha$  m-q.o. su  $B_\alpha^C$ , quale che sia  $\alpha$  razionale.*

**Dimostrazione** – Sia

$$C = \bigcup_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha < \beta}} (B_\alpha \setminus B_\beta)$$

allora risulta

$$m(C) \leq \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha < \beta}} m(B_\alpha \setminus B_\beta) = 0$$

Posto  $B'_\alpha = B_\alpha \cup C$  si ha per  $\alpha < \beta$ :

$$\begin{aligned} B'_\alpha \setminus B'_\beta &= B_\alpha \cup C \setminus B_\beta \cup C = (B_\alpha \cup C) \cap (B_\beta^C \cap C^C) = \\ &= [(B_\alpha \cup C) \cap B_\beta^C] \cap [(B_\alpha \cup C) \cap C^C] = \\ &= [(B_\alpha \cup C) \cap (B_\alpha \cap C^C)] \cap [B_\beta^C \cap (B_\alpha \cap C^C)] \end{aligned}$$

dove si è sfruttata la relazione  $(B_\alpha \cup C) \cap C^C = B_\alpha \cap C^C$ . Considerando che:  $(B_\alpha \cup C) \cap (B_\alpha \cap C^C) = B_\alpha \cap C^C$  si ottiene:

$$B'_\alpha \setminus B'_\beta = B_\alpha \cap B_\beta^C \cap C^C = (B_\alpha \setminus B_\beta) \setminus C = \emptyset$$

Da cui si deduce che  $B'_\alpha \subseteq B'_\beta$  per ogni  $\alpha < \beta$ . Si definisce a questo punto la funzione

$$f(\omega) = \inf\{\alpha : \omega \in B'_\alpha\}$$

con la convenzione che se  $\omega \notin B'_\alpha$  quale che sia  $\alpha$ , si pone  $f(\omega) = \infty$ . Evidentemente risulta

$$f(\omega) \begin{cases} \leq \alpha & \text{se } \omega \in B'_\alpha \\ \geq \alpha & \text{se } \omega \notin B'_\alpha \end{cases}$$

Inoltre se  $f(\omega) < \alpha$ , per la definizione di  $f$  esiste un razionale  $\gamma < \alpha$  tale che  $\omega \in B'_\gamma$  ed inversamente se  $\omega \in B'_\gamma$  per qualche  $\gamma < \alpha$ , deve essere  $f(\omega) \leq \gamma < \alpha$ ; pertanto si può porre per ogni razionale  $\alpha$

$$\{\omega : f(\omega) < \alpha\} = \bigcup_{\gamma < \alpha} B'_\gamma$$

e quindi  $\{\omega : f(\omega) < \alpha\} \in \mathcal{F}$ , poiché ogni  $B'_\gamma \in \mathcal{F}$ . A questo punto, considerato un numero reale  $\bar{\alpha}$ , esiste una successione monotona non crescente di numeri razionali  $\{\alpha_i\}$  che converge a  $\bar{\alpha}$  e risulta:

$$\{\omega : f(\omega) < \bar{\alpha}\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{\omega : f(\omega) < \alpha_i\} \in \mathcal{F}$$

e quindi  $f$  è misurabile. Infine tenuto conto del fatto che  $B_\alpha$  differisce da  $B'_\alpha$  per l'insieme  $C$  che ha misura nulla, il lemma è dimostrato. ■

**Definizione 1.12.4** – *Date due misure  $\nu$  e  $\mu$ , si dice che  $\nu$  è assolutamente continua rispetto a  $\mu$  e si scrive  $\nu \ll \mu$  se  $\forall B \in \mathcal{F} : \mu(B) = 0$  si ha che  $\nu(B) = 0$ .* •

**Teorema 1.12.5 – (Radon-Nikodym)** *Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, m)$  uno spazio di misura con  $m$   $\sigma$ -finita, sia  $\mu$  una misura su  $(\Omega, \mathcal{F})$  assolutamente continua rispetto ad  $m$  ( $\mu \ll m$ ), in tal caso esiste una funzione misurabile non negativa  $f$  tale che risulta*

$$\mu(A) = \int_A f(\omega) dm(\omega) \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad (1.12.3)$$

*Tale funzione è unica nel senso che se  $g$  è un'altra funzione misurabile che soddisfa la precedente relazione risulta  $g \equiv f$ , m-q.o.*

**Dimostrazione** – La dimostrazione verrà sviluppata in primo luogo nel caso in cui  $m$ , e quindi  $\mu$ , siano finite. In tale ipotesi, per ogni numero razionale  $\alpha$ , la funzione di insieme

$$\pi_\alpha(\cdot) = \mu(\cdot) - \alpha m(\cdot)$$

è una misura segnata; sia dunque  $(A_\alpha, B_\alpha)$  una scomposizione di Hahn per  $\Omega$  rispetto ad essa. Si osservi che per  $\alpha = 0$ ,  $A_0 = \Omega$  e  $B_0 = \emptyset$ . Si verifica facilmente che la successione dei  $B_\alpha$  è non decrescente, infatti risulta per ogni  $\beta > \alpha$ :

$$\pi_\beta(C) \leq \pi_\alpha(C) \leq 0 \quad \forall C \in B_\alpha$$

e quindi ogni  $C$  che appartiene a  $B_\alpha$  appartiene anche a  $B_\beta$ ; ovvero  $B_\alpha \subseteq B_\beta$ .

Inoltre osservando che  $B_\alpha \setminus B_\beta = B_\alpha \cap A_\beta$  e che quindi  $B_\alpha \setminus B_\beta$  è un sottoinsieme tanto di  $B_\alpha$  quanto di  $A_\beta$ , risulta:

$$\pi_\alpha(B_\alpha \setminus B_\beta) \leq 0$$

$$\pi_\beta(B_\alpha \setminus B_\beta) \geq 0$$

Se si assume ora  $\beta > \alpha$ , dovendo essere

$$0 \leq \pi_\beta(B_\alpha \setminus B_\beta) \leq \pi_\alpha(B_\alpha \setminus B_\beta) \leq 0$$

deve aversi  $m(B_\alpha \setminus B_\beta) = 0$ . Allora per il precedente lemma, esiste una funzione misurabile  $f$  tale che  $f \leq \alpha$   $m$ -q.o. su  $B_\alpha$  ed  $f \geq \alpha$   $m$ -q.o. su  $A_\alpha$ . Poiché si ha  $A_0 = \Omega$  se ne deduce che  $f$  è non negativa in  $\Omega$ .

Considerato a questo punto un qualunque  $A \in \mathcal{F}$  e posto

$$E_j = A \cap (B_{\frac{j+1}{n}} \setminus B_{\frac{j}{n}})$$

con  $n$  numero intero positivo arbitrario e

$$E^* = A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{\frac{j}{n}}$$

tenuto conto che  $B_{\frac{j}{n}}$  è una successione non decrescente si ha che

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{\frac{j}{n}} \cup E^* = \bigcup_{j=0}^{\infty} (B_{\frac{j+1}{n}} \setminus B_{\frac{j}{n}}) \cup E^*$$

e quindi

$$A = \left( \bigcup_{j=0}^{\infty} (B_{\frac{j+1}{n}} \setminus B_{\frac{j}{n}}) \cup E^* \right) \cap A = \bigcup_{j=0}^{\infty} E_j \cup E^*$$

Poiché gli insiemi a secondo membro sono tutti disgiunti ne segue che

$$\mu(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(E_j) + \mu(E^*) \quad (1.12.4)$$

Ma poiché risulta  $E_j \subseteq B_{\frac{j+1}{n}} \cap B_{\frac{j}{n}}^C = B_{\frac{j+1}{n}} \cap A_{\frac{j}{n}}$  si ha:

$$\frac{j}{n} \leq f(\omega) \leq \frac{j+1}{n} \quad \forall \omega \in E_j$$

e quindi

$$\frac{j}{n} m(E_j) \leq \int_{E_j} f(\omega) dm(\omega) \leq \frac{j+1}{n} m(E_j)$$

D'altra parte, poiché  $E_j$  appartiene tanto ad  $A_{\frac{j}{n}}$  quanto a  $B_{\frac{j+1}{n}}$  si ha anche che

$$\begin{aligned} \pi_\alpha(E_j) = \mu(E_j) - \alpha m(E_j) &\geq 0 && \text{per } \alpha = \frac{j}{n} \\ \pi_\beta(E_j) = \mu(E_j) - \beta m(E_j) &\leq 0 && \text{per } \beta = \frac{j+1}{n} \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{j}{n} m(E_j) \leq \mu(E_j) \leq \frac{j+1}{n} m(E_j) \quad (1.12.5)$$

Dalle precedenti disuguaglianze si deduce che:

$$\begin{aligned} \frac{j}{n}m(E_j) \leq \mu(E_j) &\Rightarrow \frac{1+j}{n}m(E_j) \leq \mu(E_j) + \frac{1}{n}m(E_j) \\ \mu(E_j) \leq \frac{j+1}{n}m(E_j) &\Rightarrow \mu(E_j) - \frac{1}{n}m(E_j) \leq \frac{j}{n}m(E_j) \end{aligned}$$

e quindi

$$\mu(E_j) - \frac{1}{n}m(E_j) \leq \int_{E_j} f(\omega) dm(\omega) \leq \mu(E_j) + \frac{1}{n}m(E_j) \quad (1.12.6)$$

ed anche

$$\begin{aligned} \mu(E_j) - \frac{1}{n}m(E_j) - \frac{1}{n}m(E^*) &\leq \int_{E_j} f(\omega) dm(\omega) \\ &\leq \mu(E_j) + \frac{1}{n}m(E_j) + \frac{1}{n}m(E^*) \end{aligned} \quad (1.12.7)$$

È possibile ora dimostrare il risultato prima per l'insieme  $E^*$  e successivamente per un qualunque  $A \in \mathcal{F}$ . Si osserva infatti che su  $E^*$  deve risultare  $f(\omega) = \infty$   $m$ -q.o. in quanto su  $E^*$  deve essere  $f(\omega) \geq \frac{j}{n}$  per ogni  $j$ . Di conseguenza nel caso in cui  $m(E^*) > 0$  l'integrale della  $f(\omega)$  in  $dm$  su  $E^*$  risulta pari a  $\infty$ . Inoltre se  $m(E^*) > 0$  deve risultare  $\mu(E^*) = \infty$  poiché è  $\pi_\alpha(E^*) \geq 0$  per ogni  $\alpha$  razionale arbitrariamente grande (in quanto  $E^* \subseteq A_\alpha$  per ogni  $\alpha$ ). Si può allora scrivere

$$\mu(E^*) = \int_{E^*} f(\omega) dm(\omega) \quad (1.12.8)$$

La (1.12.8) vale anche nel caso in cui  $m(E^*) = 0$ , poiché in tal caso l'integrale è nullo (nonostante sia  $f(\omega) = \infty$ ) e, dall'ipotesi di assoluta continuità  $\mu \ll m$ , deve risultare anche  $\mu(E^*) = 0$ .

A questo punto, sommando la (1.12.7) rispetto a  $j$ , aggiungendo questa ultima relazione e ricordando che  $A$  è l'unione disgiunta di tutti gli  $E_j$  e di  $E^*$ , si ha:

$$\mu(A) - \frac{1}{n}m(A) \leq \int_A f(\omega) dm(\omega) \leq \mu(A) + \frac{1}{n}m(A)$$

ed infine, poiché  $\mu(A)$  è finito ed  $n$  è arbitrario, passando al limite si ottiene:

$$\mu(A) = \int_A f(\omega) dm(\omega) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Passando al caso in cui  $m$  è una misura  $\sigma$ -finita, si ricordi che è sempre possibile scomporre  $\Omega$  in sottoinsiemi  $\Omega_i \in \mathcal{F}$  tra loro disgiunti e tali che  $m(\Omega_i) < \infty$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Pertanto per un qualunque  $A \in \mathcal{F}$  è possibile considerare gli insiemi  $A_i = A \cap \Omega_i$ , per i quali sicuramente  $m(A_i) < \infty$ . Per tali insiemi, applicando il precedente risultato, si ha che esistono funzioni  $f_i$  tali che

$$\mu(A_i) = \int_{A_i} f_i(\omega) dm(\omega) \quad i = 1, 2, \dots$$

Definendo ora  $f(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(\omega) \chi_{\Omega_i}(\omega)$ , che è certamente misurabile e non negativa, si ha

$$\mu(A_i) = \int_{A_i} f(\omega) dm(\omega) \quad i = 1, 2, \dots$$

e sommando rispetto ad  $i$ , poiché gli  $A_i$  sono disgiunti, si ottiene

$$\mu(A) = \int_A f(\omega) dm(\omega)$$

Per dimostrare l'unicità q.o. è sufficiente ricordare la proprietà (1.12.1). ■

La funzione  $f$ , data dal precedente teorema, è detta **derivata di Radon-Nikodym** della misura  $\mu$  rispetto alla misura  $m$  e si indica con il simbolo:

$$f(\omega) = \frac{d\mu}{dm}(\omega) \quad (1.12.9)$$

È opportuno segnalare che il teorema di Radon-Nikodym può essere esteso al caso di misure segnate.

**Esempio 1.12.6** – In  $\Omega = \mathbb{R}^n$  si definisca come misura dell'intervallo  $[a, b]$  la quantità  $\mu\{[a, b]\} = F(b) - F(a)$ , con  $F(x)$

funzione derivabile in tutto  $\mathbb{R}$ . La misura così definita è segnata se  $F(x)$  non è monotona crescente. Indicando con  $m$  la misura di Lebesgue, si ha che la derivata di Radon-Nikodym della misura  $\mu$  rispetto ad  $m$  coincide con la derivata usuale di  $F(x)$  rispetto a  $x$ , ovvero

$$\frac{d\mu}{dm}(x) = \frac{dF}{dx}(x) \quad (1.12.10)$$

L'elemento di misura  $dm$  nel caso della misura di Lebesgue viene indicato semplicemente con  $dx$ .

Data una terna di probabilità  $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ , un vettore aleatorio  $X(\omega)$  induce una misura su  $\mathbb{R}^n$ , già indicata in precedenza con  $P_X$

$$P_X(A) \triangleq P\{X^{-1}(A)\} \quad \text{con } A \in \mathcal{B}^n$$

Si viene così a creare uno spazio di misura  $\{\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_X\}$ . Ha senso quindi dare la seguente definizione.

**Definizione 1.12.7** – Un vettore aleatorio  $X$  si dice a **distribuzione continua** se la misura  $P_X$  da esso indotta su  $\{\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n\}$  è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue:  $P_X \ll m$ . •

In questo caso il teorema di Radon-Nikodym afferma che esiste una funzione di Borel tale che

$$\forall A \in \mathcal{B}^n \quad P_X(A) = \int_A f(x) dx.$$

La funzione  $f(x)$  coincide  $m$ -q.o. con la densità di probabilità del vettore aleatorio  $X$ , e cioè  $f(x) \equiv p_X(x)$   $m$ -q.o..

Si vuole ora mostrare che la regola di composizione delle derivate ordinarie (se  $f = f(y)$  e  $y = y(x)$  allora  $df/dx = df/dy \cdot dy/dx$ ) vale anche per la derivata di Radon-Nikodym. Siano  $P_1, P_2, P_3$  tre misure sullo stesso spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Sia  $P_1 \ll P_2$  e  $P_2 \ll P_3$ . In base alla definizione è facile verificare che l'assoluta continuità è una relazione transitiva, e quindi si ha  $P_1 \ll P_3$ . Allora esistono le

derivate di Radon-Nikodym di  $P_1$  e  $P_2$  rispetto a  $P_3$  e la derivata di  $P_2$  rispetto a  $P_3$ , che sono funzioni borelliane di  $\omega$  tali che

$$\begin{aligned} P_1(U) &= \int_U dP_1 = \int_U \frac{dP_1}{dP_2}(\omega) dP_2 = \int_U \frac{dP_1}{dP_3}(\omega) dP_3 \\ P_2(U) &= \int_U \frac{dP_2}{dP_3}(\omega) dP_3, \quad \forall U \in \mathcal{F}. \end{aligned} \quad (1.12.11)$$

Poiché  $dP_2 = (dP_2/dP_3)(\omega) dP_3$  si ha

$$\int_U \frac{dP_1}{dP_2}(\omega) dP_2 = \int_U \frac{dP_1}{dP_2}(\omega) \frac{dP_2}{dP_3}(\omega) dP_3, \quad \forall U \in \mathcal{F} \quad (1.12.12)$$

ed uguagliando alla prima delle (1.12.11) si ha

$$\int_U \frac{dP_1}{dP_2}(\omega) \frac{dP_2}{dP_3}(\omega) dP_3 = \int_U \frac{dP_1}{dP_3}(\omega) dP_3, \quad \forall U \in \mathcal{F}$$

e quindi

$$\frac{dP_1}{dP_3}(\omega) \equiv \frac{dP_1}{dP_2}(\omega) \frac{dP_2}{dP_3}(\omega), \quad P_3\text{-q.c.}$$

che è la regola di composizione delle derivate cercata.

## 1.13 Valore sperato condizionato

**Definizione 1.13.1** – Considerato lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e data una sotto  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{G}$  di  $\mathcal{F}$  ( $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ ), se  $X$  è una variabile aleatoria integrabile definita su  $\Omega$ , si definisce **valore sperato di  $X$  condizionato a  $\mathcal{G}$**  la variabile aleatoria  $E\{X|\mathcal{G}\}$ ,  $\mathcal{G}$ -misurabile, tale che

$$\int_A X(\omega) dP = \int_A E\{X|\mathcal{G}\}(\omega) dP \quad \forall A \in \mathcal{G} \quad (1.13.1)$$

**Osservazione 1.13.2** – Poiché la funzione di insieme  $g(A) \triangleq \int_A X dP$ , definita su  $\mathcal{G}$ , è una misura segnata additiva ed

assolutamente continua rispetto a  $P$ , grazie al teorema di Radon-Nikodym esiste la derivata di  $g$  rispetto a  $P$  e tale derivata, che è proprio il valore sperato di  $X$  condizionato a  $\mathcal{G}$ , è una funzione  $\mathcal{G}$ -misurabile unica  $P$ -q.o. in  $\Omega$ . Si osservi inoltre che  $X(\omega)$  in generale non è  $\mathcal{G}$ -misurabile mentre certamente lo è il valore sperato  $E\{X|\mathcal{G}\}(\omega)$ , che pertanto risulta essere una variabile aleatoria definita su  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ , nonché su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , poiché  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ .

Già in precedenza si è detto che una variabile aleatoria  $\mathcal{F}$ -misurabile deve essere necessariamente costante sugli atomi di  $\mathcal{F}$ . Questa proprietà può essere usata per illustrare operativamente il calcolo del valore sperato condizionato in alcuni casi notevoli.  $\triangle$

**Esempio 1.13.3** – Si calcoli il valore sperato condizionato di una variabile aleatoria  $X(\omega)$  rispetto ad una  $\sigma$ -algebra finita  $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^C, \Omega\}$ . Poiché  $E\{X|\mathcal{A}\}(\omega)$  è  $\sigma(\mathcal{A})$ -misurabile, essa deve essere necessariamente costante sugli atomi, e quindi può essere scritta come

$$E\{X|\mathcal{A}\} = \alpha_1 \chi_A(\omega) + \alpha_2 \chi_{A^C}(\omega),$$

in cui  $\chi_A(\omega)$  è la funzione caratteristica dell'insieme  $A$ .

Dalla definizione di valore sperato condizionato si ha

$$\begin{aligned} \int_A E\{X|\mathcal{A}\} dP &= \alpha_1 P(A) = \int_A X dP, \\ \int_{A^C} E\{X|\mathcal{A}\} dP &= \alpha_2 P(A^C) = \int_{A^C} X dP. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$E\{X|\mathcal{A}\}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{P(A)} \int_A X dP & \text{per } \omega \in A \\ \frac{1}{P(A^C)} \int_{A^C} X dP & \text{per } \omega \in A^C \end{cases}$$

Questo calcolo può essere generalizzato al caso di  $\sigma$ -algebre atomiche  $\mathcal{A}$  qualunque, generate da una famiglia numerabile di

sottoinsiemi  $\{A_i\}$ . Si ha in questo caso

$$E\{X|\mathcal{A}\}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X dP \right) \chi_{A_i}(\omega).$$

$\triangle$

**Esempio 1.13.4** – Si consideri la terna di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$  in cui  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\lambda$  è la misura di Lebesgue:  $\lambda([a, b]) = (b - a)$  e  $\mathcal{F}$  è la  $\sigma$ -algebra definita dai seguenti atomi:

$$\emptyset, [0, 1/3), [1/3, 1/2), [1/2, 4/5), [4/5, 1]$$

Come è noto  $\mathcal{F}$  si costruisce aggiungendo agli atomi tutte le possibili unioni degli intervalli da essi definiti. Poiché le variabili aleatorie sono quelle funzioni definite in  $[0, 1]$  che sono  $\mathcal{F}$ -misurabili (ovvero tali che le immagini inverse di borelliani sono insiemi di  $\mathcal{F}$ ), è evidente che le variabili aleatorie sono tutte e sole le funzioni che sono costanti sugli atomi. Considerando la variabile aleatoria

$$X(\omega) = \begin{cases} 5 & \text{per } \omega \in [0, 1/3) \\ 2 & \text{per } \omega \in [1/3, 1/2) \\ 3 & \text{per } \omega \in [1/2, 4/5) \\ 0.5 & \text{per } \omega \in [4/5, 1] \end{cases}$$

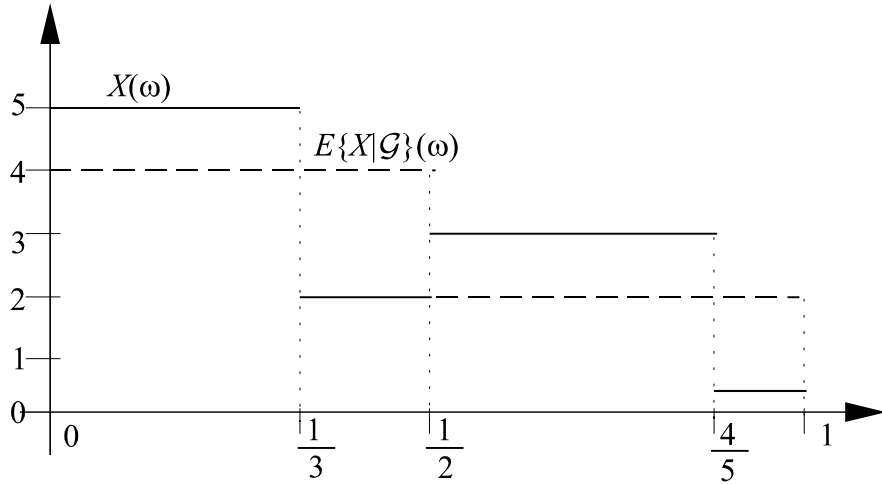
e la sotto  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{G}$  di  $\mathcal{F}$  definita dagli atomi

$$\emptyset, [0, 1/2), [1/2, 1]$$

utilizzando la definizione di valore sperato condizionato è facile verificare che

$$E\{X|\mathcal{G}\}(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{per } \omega \in [0, 1/2) \\ 2 & \text{per } \omega \in [1/2, 1] \end{cases}$$

La figura 1.13.4 mostra graficamente le variabili aleatorie  $X$  e  $E\{X|\mathcal{G}\}$

Figura 1.13.4. Variabile aleatoria  $X$  prima e dopo il condizionamento.

△

**Definizione 1.13.5** – Considerato lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e le variabili aleatorie  $X_1, \dots, X_n$  se  $X$  è una variabile aleatoria integrabile si definisce **valore sperato di  $X$  condizionato a  $X_1, \dots, X_n$**  e si indica con  $E\{X|X_1, \dots, X_n\}$  il valore sperato di  $X$  condizionato alla  $\sigma$ -algebra generata da  $X_1, \dots, X_n$  la quale è certamente contenuta in  $\mathcal{F}$ . •

**Esempio 1.13.6** – Sia  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F}$  sia costituita dagli insiemi di Borel di tale intervallo e  $P$  sia la misura di Lebesgue come nel precedente esempio. Si consideri la variabile aleatoria  $X(\omega) = \omega$ , e le due variabili aleatorie condizionanti

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{per } \omega \in [0, 1/2) \\ 2 & \text{per } \omega \in [1/2, 1] \end{cases} \quad X_2(\omega) = \begin{cases} 3 & \text{per } \omega \in [0, 1/3] \\ 2 & \text{per } \omega \in (1/3, 2/3) \\ 4 & \text{per } \omega \in [2/3, 1] \end{cases}$$

Evidentemente la sotto  $\sigma$ -algebra generata da  $X_1$  e  $X_2$  è la più piccola  $\sigma$ -algebra che contiene gli intervalli  $[0, 1/3]$ ,  $(1/3, 1/2)$ ,  $[1/2, 2/3]$ ,  $[2/3, 1]$ . Poiché  $E\{X|X_1, X_2\}$  è una funzione  $\sigma(X_1, X_2)$ -misurabile, essa è costante sui suddetti intervalli. Il calcolo del valore sperato di  $X(\omega)$  fornisce

$$E\{X|X_1, X_2\}(\omega) = \begin{cases} 1/6 & \text{per } \omega \in [0, 1/3] \\ 5/12 & \text{per } \omega \in (1/3, 1/2) \\ 7/12 & \text{per } \omega \in [1/2, 2/3] \\ 5/6 & \text{per } \omega \in [2/3, 1] \end{cases}$$

△

Alcune proprietà notevoli del valore sperato condizionato che discendono immediatamente dalla sua definizione e dalle proprietà dell'integrale, sono le seguenti:

i) Se  $X$  è una v.a.  $\mathcal{F}$ -misurabile si ha:

$$E\{X|\mathcal{F}\} = X \quad \text{q.c.} \quad (1.13.2)$$

ii) Se  $X$  è una v.a. integrabile e se  $\mathcal{F}_{ban}$  è la  $\sigma$ -algebra banale, si ha:

$$E\{X|\mathcal{F}_{ban}\} = E\{X\} \quad (1.13.3)$$

iii) Se  $X_1$  e  $X_2$  sono v.a. integrabili, se  $\mathcal{G}$  è una sotto  $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{F}$  e se  $a_1$  ed  $a_2$  sono costanti, si ha:

$$E\{a_1 X_1 + a_2 X_2|\mathcal{G}\} = a_1 E\{X_1|\mathcal{G}\} + a_2 E\{X_2|\mathcal{G}\} \quad (1.13.4)$$

iv) Se  $X_1$  e  $X_2$  sono due v.a. integrabili, tali che  $X_1 \leq X_2$  q.c. si ha:

$$E\{X_1|\mathcal{G}\} \leq E\{X_2|\mathcal{G}\} \quad (1.13.5)$$

v) Se  $X$  è una v.a. integrabile si ha per ogni sotto  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{G}$  di  $\mathcal{F}$ :

$$E\{E\{X|\mathcal{G}\}\} = E\{X\} \quad (1.13.6)$$



come si verifica immediatamente ponendo nella (1.13.1)  $A = \Omega$ .

Le diseguaglianze di Hölder, Cauchy, Minkowski e Jensen, già considerate per i valori sperati, si estendono in modo immediato al caso di valori sperati condizionati, come può essere facilmente verificato ripetendo le dimostrazioni date e sostituendo i valori sperati condizionati ai valori sperati.

È possibile enunciare i seguenti teoremi:

**Teorema 1.13.7** – Considerate le variabili aleatorie  $X$  ed  $Y$ , se  $X$  e  $XY$  sono integrabili e se  $Y$  è  $\mathcal{G}$ -misurabile, si ha:

$$E\{XY|\mathcal{G}\} = YE\{X|\mathcal{G}\} \quad \text{q.c.}$$

**Dimostrazione** – Supponendo che  $Y$  sia la funzione caratteristica  $\chi_D$  di un insieme  $D \in \mathcal{G}$ , per ogni  $A \in \mathcal{G}$  si ha

$$\begin{aligned} \int_A YE\{X|\mathcal{G}\}dP &= \int_{A \cap D} E\{X|\mathcal{G}\}dP = \int_{A \cap D} XdP = \\ &= \int_A XYdP = \int_A E\{XY|\mathcal{G}\}dP. \end{aligned}$$

Ne segue la tesi nel caso in cui  $Y$  sia una funzione caratteristica. L'estensione al caso di funzioni  $Y$  semplici è banale. È invece un po' più elaborata l'estensione al caso di variabili aleatorie  $X$  ed  $Y$  non negative, che si ottiene considerando una successione non decrescente  $\{Y_n\}$  di variabili aleatorie semplici non negative che converge a  $Y$  quasi ovunque. Infine l'estensione al caso di variabili aleatorie di segno arbitrario può ottenersi attraverso la scomposizione nelle parti positive ed in quelle negative. ■

**Teorema 1.13.8** – Considerate due  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ , tali che  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$  e supposto che  $X$  sia una v.a. integrabile, si ha:

$$E\{X|\mathcal{G}_1\} = E\{E\{X|\mathcal{G}_1\}|\mathcal{G}_2\} = E\{E\{X|\mathcal{G}_2\}|\mathcal{G}_1\} \quad \text{q.c.} \quad (1.13.7)$$

**Dimostrazione** – La variabile aleatoria  $E\{X|\mathcal{G}_1\}$  è  $\mathcal{G}_1$ -misurabile e quindi anche  $\mathcal{G}_2$ -misurabile. Pertanto, la prima eguaglianza è dimostrata ricorrendo al teorema 1.13.6

$$E\{E\{X|\mathcal{G}_1\}|\mathcal{G}_2\} = E\{X|\mathcal{G}_1\}E\{1|\mathcal{G}_2\} = E\{X|\mathcal{G}_1\}.$$

Per quanto riguarda la seconda eguaglianza, considerato un qualunque  $A \in \mathcal{G}_1$ , poiché è anche  $A \in \mathcal{G}_2$ , si ha

$$\begin{aligned} \int_A E\{E\{X|\mathcal{G}_2\}|\mathcal{G}_1\}dP &= \int_A E\{X|\mathcal{G}_2\}dP = \\ &= \int_A XdP = \int_A E\{X|\mathcal{G}_1\}dP \end{aligned}$$

Essendo queste equazioni valide per qualunque  $A$  in  $\mathcal{G}_1$  segue che

$$E\{E\{X|\mathcal{G}_2\}|\mathcal{G}_1\} = E\{X|\mathcal{G}_1\} \quad \text{q.c.}$$

■

È interessante a questo punto fornire una interpretazione al valore sperato (o atteso) di un vettore aleatorio  $X$  condizionato ad una  $\sigma$ -algebra generata da un vettore aleatorio  $Y$ . Si osservi innanzitutto che, essendo  $\mathcal{F}^Y$ -misurabile per definizione, la variabile aleatoria  $E(X|\mathcal{F}^Y)$  è costante sugli atomi di  $\mathcal{F}^Y$ , ovvero ad ogni atomo di  $\mathcal{F}^Y$  corrisponde **uno ed un solo** valore di  $E(X|\mathcal{F}^Y)$  in  $\mathbb{R}^n$ . Allo stesso modo, essendo  $Y(\omega)$   $\mathcal{F}^Y$ -misurabile, ad ogni valore assunto dalla  $Y$  in  $\mathbb{R}^m$  corrisponde **uno ed un solo** atomo della  $\mathcal{F}^Y$ . Di conseguenza ad ogni valore di  $Y$  in  $\mathbb{R}^m$  corrisponde **uno ed un solo valore** di  $E(X|\mathcal{F}^Y)$  in  $\mathbb{R}^n$ . In altre parole  $E(X|Y)$  è una funzione  $f(Y)$  della variabile aleatoria  $Y$ . Inoltre la  $f(Y)$  è borelliana in quanto, essendo  $Y$  misurabile essa trasforma ogni borelliano di  $\mathbb{R}^m$  in un elemento di  $\mathcal{F}^Y$ , e poiché anche  $E(X|Y)$  è una variabile aleatoria  $\mathcal{F}^Y$ -misurabile, ad ogni elemento di  $\mathcal{F}^Y$  fa corrispondere un borelliano di  $\mathbb{R}^n$ . Allora la  $f(Y)$  trasforma ogni borelliano di  $\mathbb{R}^m$  in un borelliano di  $\mathbb{R}^n$ , e quindi è una funzione borelliana.

L'interpretazione che si può dare della  $f(Y)$  è che essa fornisce il valore atteso della variabile aleatoria  $X$  quando si disponga della conoscenza a posteriori della  $Y$ , e cioè dal risultato assunto in  $\mathbb{R}^m$  dalla variabile aleatoria. In altre parole l'operazione di condizionamento mette in evidenza la correlazione esistente tra due variabili aleatorie. A conferma di ciò nel seguito verrà mostrato che se  $X$  e  $Y$  sono indipendenti si ha  $E(X|Y) = E(X)$ , e quindi la funzione  $f$  è una costante.

Questi risultati, che per ora sono stati enunciati in maniera intuitiva, verranno presentati nel seguito con una formulazione più rigorosa, nel solo caso di variabili aleatorie scalari.

**Lemma 1.13.9** – *Siano  $X$  e  $Y$  variabili aleatorie definite sullo spazio degli eventi  $(\Omega, \mathcal{F})$ , e sia  $\sigma(Y) \subset \mathcal{F}$  la  $\sigma$ -algebra generata da  $Y$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $X$  sia  $\sigma(Y)$ -misurabile è che esista una funzione di Borel  $f$  tale che:*

$$X(\omega) = f(Y(\omega))$$

**Dimostrazione** – La sufficienza è immediata osservando che se esiste  $f(Y)$  borelliana le immagini inverse di borelliani secondo  $f$  sono borelliani ( $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}$ ). Si ha quindi che le immagini inverse di borelliani secondo  $X$  appartengono a  $\sigma(Y)$ . Infatti

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in f^{-1}(B)\} \in \sigma(Y)$$

e quindi  $X$  è  $\sigma(Y)$ -misurabile.

Per dimostrare la necessità verrà provato che ogni funzione  $X$  appartenente all'insieme  $\Phi$  delle funzioni  $\sigma(Y)$ -misurabili appartiene anche all'insieme  $\bar{\Phi}$  delle funzioni  $\sigma(Y)$ -misurabili esprimibili come  $f(Y)$ .

Si consideri in primo luogo il caso in cui  $X(\omega) = \chi_A(\omega)$  con  $A \in \sigma(Y)$ , e pertanto  $X \in \Phi$ . Evidentemente esiste un insieme  $B \in \mathcal{B}$  tale che  $A = Y^{-1}(B) = \{\omega : Y(\omega) \in B\}$ . In tal caso

evidentemente  $X(\omega) = \chi_B(Y(\omega))$  e quindi il risultato è dimostrato in quanto  $\chi_B$  è di Borel e quindi  $X \in \bar{\Phi}$ .

Il risultato si estende immediatamente al caso di variabili aleatorie semplici

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(\omega) \quad \text{con } A_i \in \sigma(Y) \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

Per il caso di variabili aleatorie  $X$  che siano  $\sigma(Y)$ -misurabili è sempre possibile considerare una successione  $\{X_n\}$  di variabili aleatorie semplici  $\sigma(Y)$ -misurabili che converge a  $X$  q.c.. Quindi esiste una successione  $\{f_n\}$  di funzioni di Borel tali che  $X_n(\omega) = f_n(Y(\omega))$ . Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(Y(\omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(Y(\omega)) = X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \quad \text{q.c.}$$

Rimane da verificare che  $f(Y(\omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(Y(\omega))$  è una funzione borelliana. A tale scopo si chiami  $B$  l'insieme degli  $y \in \mathbb{R}$ , tali che  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y)$  esiste, cioè tale che  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(y)$ . Tale insieme  $B$  è di Borel, infatti  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(y)$  e  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(y)$  sono funzioni di Borel e così la loro differenza, che è pari a zero su  $B$ . Pertanto l'insieme  $B$  in cui una funzione di Borel si annulla è di Borel in quanto è l'immagine inversa del borelliano  $\{0\}$ , e ciò dimostra il teorema. ■

**Teorema 1.13.10** – *Considerate le variabili aleatorie  $X$  ed  $Y$  esiste una funzione di Borel  $f(\cdot)$  tale che:*

$$E\{X|Y\} = f(Y).$$

*Inoltre definita la misura segnata  $\sigma$ -finita  $\bar{\mu}$  nello spazio misurabile  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$*

$$\bar{\mu}(B) = \int_{Y^{-1}(B)} X dP$$

ed indicata con  $\mu_Y$  la misura di probabilità indotta da  $Y$  su  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  ( $\mu_Y(B) = P\{Y^{-1}(B)\}$ ) si ha che  $\bar{\mu} \ll \mu_Y$  e che

$$f(Y) = \frac{d\bar{\mu}}{d\mu_Y}(Y).$$

**Dimostrazione** – Poiché  $E\{X|Y\}$  è una v.a. misurabile rispetto a  $\sigma(Y)$ , dal lemma 1.13.9 segue l'esistenza di una funzione di Borel  $f$  tale che  $E\{X|Y\} = f(Y)$ . Per dimostrare la seconda parte del teorema, si definiscano le v.a. non negative  $X^+$  e  $X^-$  in modo da ottenere

$$X = X^+ - X^-.$$

Risulta allora possibile scomporre la misura segnata  $\bar{\mu}$  come differenza tra due misure positive  $\bar{\mu} = \mu^+ - \mu^-$  definite come

$$\mu^+(B) = \int_{Y^{-1}(B)} X^+ dP, \quad \mu^-(B) = \int_{Y^{-1}(B)} X^- dP.$$

Osservando che se  $\mu_Y(B) = P(Y^{-1}(B)) = 0$  risulta anche  $\mu^+(B) = \mu^-(B) = 0$  si ha che  $\mu^+ \ll \mu_Y$  e  $\mu^- \ll \mu_Y$  e quindi  $\bar{\mu} \ll \mu_Y$ . Per il teorema di Radon-Nikodym (esteso al caso di misure segnate) esiste allora la funzione di Borel  $\bar{f}$  tale che

$$\bar{\mu}(B) = \int_B \bar{f}(y) d\mu_Y(y) \quad \text{con} \quad \bar{f}(y) = \frac{d\bar{\mu}}{d\mu_Y}(y).$$

Effettuando il cambiamento di variabile  $y = Y(\omega)$  si ha

$$\bar{\mu}(B) = \int_{Y^{-1}(B)} \bar{f}(Y(\omega)) dP(\omega)$$

poiché, d'altra parte,  $Y^{-1}(B) \in \sigma(Y)$  e

$$\bar{\mu}(B) = \int_{Y^{-1}(B)} X dP = \int_{Y^{-1}(B)} E\{X|Y\} dP$$

essendo  $E\{X|Y\}$  misurabile rispetto a  $\sigma(Y)$  ed essendo  $Y^{-1}(B)$  un qualunque insieme di  $\sigma(Y)$  ne segue che

$$\bar{f}(Y) = E\{X|Y\} = f(Y), \quad P\text{-q.o.}$$

■

Ricordando che una funzione borelliana di una variabile aleatoria è essa stessa una variabile aleatoria, è facile generalizzare il risultato del teorema precedente, asserendo che date due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  ed una funzione di Borel  $g(\cdot)$ , esiste una funzione di Borel  $f(\cdot)$  tale che

$$E\{g(X)|Y\} = f(Y).$$

**Teorema 1.13.11** – Siano  $X$  ed  $Y$  due variabili aleatorie indipendenti e  $Y$  sia integrabile, si ha

$$E\{X|Y\} = E\{X\}.$$

**Dimostrazione** – Se  $A \in \sigma(Y)$  per il lemma 1.13.9  $\chi_A$  è una funzione di Borel di  $Y$ . Inoltre, dalla definizione di variabili aleatorie indipendenti, si può verificare facilmente che,  $\chi_A$  e  $X$  sono indipendenti (nota che  $\sigma(\chi_A) = \{\emptyset, A, A^C, \Omega\}$ ). Conseguentemente

$$\begin{aligned} \int_A E\{X|Y\} dP &= \int_A X dP = \int_\Omega X \chi_A dP = E\{X \chi_A\} = \\ &= E\{X\}E\{\chi_A\} = \int_A E\{X\} dP \quad \forall A \in \sigma(Y) \end{aligned}$$

da cui segue l'asserto essendo  $E\{X\}$  costante e quindi  $\sigma(Y)$ -misurabile. ■

Utilizzando il concetto di valore sperato condizionato si può a questo punto fornire una definizione di probabilità di un evento condizionata ad una  $\sigma$ -algebra o ad una variabile aleatoria.

**Definizione 1.13.12** – Considerato lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e la sotto  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ , si definisce **probabilità dell'evento**  $A \in \mathcal{F}$ , **condizionata** alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{G}$ , la **variabile aleatoria**

$$P(A|\mathcal{G}) = E\{\chi_A|\mathcal{G}\} \quad (1.13.8)$$

Se inoltre  $Y$  è una variabile aleatoria definita su  $(\Omega, \mathcal{F})$  si definisce **probabilità dell'evento**  $A$  **condizionata a**  $Y$  la

$$P(A|Y) = P(A|\sigma(Y)) \quad (1.13.9)$$

•

**Esercizio 1.13.13** – Riprendendo le variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  dell'esercizio 1.5.13, si calcoli  $E(X|Y)$  sia come variabile aleatoria che come funzione  $f(Y)$  della variabile aleatoria  $Y$ .

È facile verificare che

$$\text{per } \omega \in B = \{\omega_1, \omega_3\} \quad E(X|Y) = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP = \frac{7}{3},$$

$$\text{per } \omega \in B^C = \{\omega_2, \omega_4\} \quad E(X|Y) = \frac{1}{P(B^C)} \int_{B^C} X dP = \frac{7}{3},$$

da cui si vede che la funzione  $f(Y)$  è una costante, pari esattamente al valor medio di  $X$ . Ciò risulta dal fatto che, come è stato dimostrato nell'esercizio 1.5.13, le variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  sono indipendenti, e quindi  $E(X|Y)$  non può essere funzione di  $Y$ .

**Esercizio 1.13.14** – Sullo spazio  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_5\}$ , con la  $\sigma$ -algebra totale  $\mathcal{F}_{tot}$  e con la misura di probabilità

$$P(\omega_1) = \frac{1}{2}, \quad P(\omega_2) = \frac{1}{4}, \quad P(\omega_3) = \frac{1}{8}, \quad P(\omega_4) = \frac{1}{16}, \quad P(\omega_5) = \frac{1}{16},$$

date le variabili aleatorie  $X$  e  $Y$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{per } \omega \in \{\omega_1, \omega_5\} \\ 3 & \text{per } \omega \in \{\omega_2, \omega_4\} \\ 2 & \text{per } \omega = \omega_3 \end{cases} \quad Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{per } \omega \in \{\omega_1, \omega_3\} \\ 2 & \text{per } \omega = \omega_2 \\ 0 & \text{per } \omega \in \{\omega_4, \omega_5\} \end{cases}$$

si calcoli  $E(X|Y)$ .

La  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}^Y = \sigma(Y)$  ha per atomi

$$A = \{\omega_1, \omega_3\}, \quad B = \omega_2, \quad C = \{\omega_4, \omega_5\}$$

e quindi

$$P_Y(0) = P(C) = \frac{1}{8}, \quad P_Y(1) = P(A) = \frac{5}{8}, \quad P_Y(2) = P(B) = \frac{1}{4}.$$

Passando al calcolo di  $E(X|Y)$  sugli atomi di  $\mathcal{F}^Y$  si ha

$$\omega \in A \quad \int_A X dP = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad E(X|Y) = \frac{6}{5}$$

$$\omega \in B \quad \int_B X dP = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad E(X|Y) = 3$$

$$\omega \in C \quad \int_C X dP = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad E(X|Y) = 2$$

Esprimendo  $E(X|Y)$  come funzione della variabile aleatoria  $Y$  si ha

$$E(X|Y) = \begin{cases} 2 & \text{per } y = 0 \\ 6/5 & \text{per } y = 1 \\ 3 & \text{per } y = 2 \end{cases}$$

È semplice verificare che in questo caso le variabili aleatorie non sono indipendenti. Ad esempio  $P_X(x = 1) = P(\{\omega_1, \omega_5\}) = 9/16$ ,  $P_Y(y = 1) = P(\{\omega_1, \omega_3\}) = 5/8$  e  $P_{XY}(x = 1 \text{ e } y = 1) = P(\omega_1) = 1/2$ . Poiché risulta che  $P_X(x = 1) \cdot P_Y(y = 1) = 45/128$  è diverso da  $1/2$ , ne consegue che i due eventi  $x = 1$  e  $y = 1$  sono dipendenti e quindi lo sono anche le variabili aleatorie  $X$  e  $Y$ .  $\triangle$

Come si è visto nel teorema 1.13.11 e verificato nei precedenti esercizi, se le variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  sono indipendenti si ha che  $E(X|\mathcal{F}^Y) = E(X)$ . È possibile mostrare tuttavia che in generale non vale l'inverso. Vale invece il risultato che se  $E(X|\mathcal{F}^Y) = E(X)$ ,

allora le variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  sono scorrelate. Infatti, utilizzando i risultati riportati in precedenza, si ha

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E\{[Y - E(Y)][X - E(X)]\} = E(YX) - E(Y)E(X) = \\ &= E\{E(YX|\mathcal{F}^Y)\} - E(Y)E(X) = \\ &= E\{Y E(X|\mathcal{F}^Y)\} - E\{Y E(X)\} = \\ &= E\{Y[E(X|\mathcal{F}^Y) - E(X)]\} = 0. \end{aligned}$$

## 1.14 Teorema di Bayes

Due eventi  $A$  e  $B$  definiti in uno spazio di probabilità  $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$  sono stati definiti indipendenti se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Il concetto di indipendenza è stato poi esteso alle  $\sigma$ -algebre prima, ed alle variabili aleatorie poi. Si è osservato poi che il valore sperato di una variabile aleatoria  $X$  condizionato ad una variabile aleatoria  $Y$  da essa indipendente è una costante, pari al valore atteso ordinario (teorema 1.13.11). Ciò vuol dire che una eventuale conoscenza a posteriori del risultato della  $Y$ , ad esempio  $Y \in A$ , con  $Y^{-1}(A) \in \mathcal{F}^Y$ , non fornisce alcun miglioramento nella conoscenza a priori sul risultato di  $X$ , poiché  $A$  è indipendente da tutti gli eventi possibili per  $X$  (gli insiemi di  $\mathcal{F}^X$ ).

Nel caso di variabili aleatorie dipendenti, si pone allora il problema di sfruttare le conoscenze a posteriori sul risultato di una di esse per avere informazioni a priori sull'altra. La formalizzazione di questo problema passa attraverso la definizione di probabilità condizionate a eventi e la definizione di densità di probabilità condizionata a variabili aleatorie.

Al fine di giustificare la definizione che verrà data di probabilità condizionata, si consideri il seguente esempio.

**Esempio 1.14.1** – Sia  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  uno spazio dei risultati, su cui sia definita la misura di probabilità  $P(\omega_i) = 1/n$  per ogni

$i$  (distribuzione uniforme). Nella  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_{tot}$  si considerino due sottoinsiemi  $A$  e  $B$ , di cardinalità  $a$  e, rispettivamente,  $b$ , tali che l'intersezione  $A \cap B$  contenga  $c$  punti. Si ha quindi

$$P(A) = \frac{a}{n}, \quad P(B) = \frac{b}{n}, \quad P(A \cap B) = \frac{c}{n}.$$

Se è noto che il risultato di un esperimento è in  $B$ , ci si chiede quale è la probabilità che il risultato sia anche in  $A$ , probabilità che sarà indicata con  $P(A|B)$ . Il problema equivale a quello di considerare il sottoinsieme  $B$  come nuovo spazio dei risultati, in cui sia definita una probabilità uniforme, che sarà pari ad  $1/b$  per ogni punto di  $B$ . Si ha allora

$$P(A|B) = \frac{c}{b},$$

da cui dividendo numeratore e denominatore per  $n$  si ha

$$P(A|B) = \frac{c/n}{b/n} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

△

Alla luce del risultato mostrato nell'esempio precedente, ha senso dare la seguente definizione.

**Definizione 1.14.2** – Si definisce **probabilità condizionata** di un evento  $A$  dato un evento  $B$  la quantità

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{con } P(B) \neq 0.$$

Con questa definizione risulta evidente che se  $A$  e  $B$  sono indipendenti si ha

$$P(A|B) = P(A),$$

il che significa che la conoscenza a posteriori che  $B$  si è verificato non è di alcun aiuto per migliorare la conoscenza a priori sul verificarsi di  $A$ .

Dalla definizione di probabilità condizionata è possibile definire, in maniera consistente, il valore atteso di una variabile aleatoria  $X(\omega)$  a partire dalla conoscenza che  $\omega \in B$ , con  $B \in \mathcal{F}$ , come

$$E\{X(\omega)|B\} \triangleq \frac{E\{X(\omega)\chi_B(\omega)\}}{P(B)} \quad P(B) \neq 0.$$

La consistenza risiede nel fatto che se  $X = \chi_A(\omega)$  si ha

$$E\{\chi_A|B\} = P(A|B).$$

Il calcolo del valore atteso della variabile aleatoria  $X$  condizionata alla conoscenza che  $Y \in B$  si calcola come

$$E\{X|Y \in B\} = \frac{E\{X\chi_{Y^{-1}(B)}(\omega)\}}{P(Y^{-1}(B))}.$$

che, usando la notazione introdotta nel teorema 1.13.10 si può anche scrivere

$$E\{X|Y \in B\} = \frac{\bar{\mu}(B)}{\mu_Y(B)}.$$

Disponendo della funzione  $f(Y) = E(X|Y)$  e della densità di probabilità di  $p_Y(y)$ , il calcolo effettivo di  $E\{X|Y \in B\}$  si ottiene svolgendo l'integrale

$$E\{X|Y \in B\} = \int_B f(y)p_Y(y)dy.$$

Si noti che le definizioni date di probabilità condizionata valgono fintanto che l'evento condizionante ha probabilità diversa da zero. Ne consegue che insorgono alcune difficoltà nella definizione di densità di probabilità condizionata.

Si cominci con lo scrivere la probabilità che  $X$  sia in un borelliano  $A \in \mathcal{B}^n$  condizionata al fatto che  $Y$  sia in un borelliano  $B \in \mathcal{B}^m$

$$\begin{aligned} P_{X|Y}(X \in A|Y \in B) &\triangleq P(X^{-1}(A)|Y^{-1}(B)) = \\ &= \frac{P(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B))}{P(Y^{-1}(B))} \\ &= \frac{P_{XY}(X \in A, Y \in B)}{P_Y(B)}. \end{aligned} \quad (1.14.1)$$

Si vuole, con opportuno passaggio al limite, definire la probabilità condizionata anche nel caso in cui  $Y$  sia a distribuzione continua e il sottoinsieme  $B$  coincida con un solo punto  $y \in \mathbb{R}^m$ . In questo caso  $P_Y(B) = 0$ , e per poter definire una probabilità condizionata è necessario che sia allo stesso tempo  $P_{XY}(X \in A, Y \in B) = 0$ . Ma ciò è vero in quanto  $P(Y^{-1}(B)) = 0 \Rightarrow P(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) = 0$ . In realtà è possibile dimostrare che esiste finito il limite del rapporto (1.14.1) per  $B \rightarrow y$ . Esiste di conseguenza una misura di probabilità  $P_{X|Y}(X \in A|Y = y)$  parametrizzata in  $y$  e, nel caso di distribuzione continua della variabile aleatoria  $X$ , esiste anche una densità di probabilità parametrizzata in  $y$ , che verrà indicata con  $p_{X|Y}(x|y)$  e sarà chiamata densità di probabilità del vettore  $x$  condizionata al vettore  $y$ , data dal rapporto tra  $p_{X,Y}(x, y)$  e  $P_Y(y)$ .

Per poter seguire questa strada per la definizione delle densità di probabilità condizionate, occorrerebbe stabilire in che senso viene fatto il limite per  $B \rightarrow \{y\}$ , stabilendo in primo luogo una metrica per lo spazio  $\Omega$ . In alternativa si può dimostrare il fondamentale teorema di Bayes, che scavalca la difficoltà del passaggio al limite utilizzando il risultato di un lemma che, facendo uso del concetto di derivata di Radon-Nikodym, stabilisce che date due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  ed una funzione borelliana  $f(Y)$  esiste unica  $P$ -q.o. una funzione  $h$  di  $x$  e di  $y$ , anch'essa borelliana, tale che

$$E(f(Y)|\mathcal{F}^X)\Big|_{X=x} = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)h(y, x)dy. \quad (1.14.2)$$

Considerando la struttura della (1.14.2) appare naturale denominare la  $h(y, x)$  densità di probabilità condizionata, indicandola con  $p_{Y|X}(y|x)$ . È possibile ora dimostrare il teorema:

**Teorema 1.14.3 – (Teorema di Bayes)** *Siano  $X(\omega) \in \mathbb{R}^n$  e  $Y(\omega) \in \mathbb{R}^m$  due variabili aleatorie di cui sia nota la densità di probabilità congiunta  $p_{X,Y}(x, y)$ . Allora le densità condizionate  $p_{Y|X}(y|x)$  e  $p_{X|Y}(x|y)$  verificano le seguenti relazioni:*

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)} \quad p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)} \quad (1.14.3)$$

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X|Y}(x|y)p_Y(y)}{\int_{\mathbb{R}^m} p_{X|Y}(x|y)p_Y(y)dy} \quad (1.14.4)$$

**Dimostrazione** – Siano  $g(x)$  ed  $f(y)$  due funzioni scalari borelliane arbitrarie.  $g(X(\omega))$  è una v.a.  $\mathcal{F}^X$ -misurabile e  $f(Y(\omega))$  è una v.a.  $\mathcal{F}^Y$ -misurabile. Anche il loro prodotto  $g(X)f(Y)$  è una v.a., il cui valore atteso si scrive

$$E(g(X)f(Y)) = E\{E(g(X)f(Y))|\mathcal{F}^X\} = E\{g(X)E(f(Y)|\mathcal{F}^X)\}, \quad (1.14.5)$$

e utilizzando la (1.14.2) si ha

$$\begin{aligned} E(g(X)f(Y)) &= E\left(g(x) \int_{\mathbb{R}^m} f(y)p_{Y|X}(y|x)dy\right) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \left[ \int_{\mathbb{R}^m} f(y)p_{Y|X}(y|x)dy \right] p_X(x)dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} g(x)f(y)p_{Y|X}(y|x)p_X(x)dx dy. \end{aligned}$$

Poiché è vero anche che:

$$E(g(X)f(Y)) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} g(x)f(y)p_{X,Y}(x,y)dx dy$$

eguagliando le due espressioni per  $E(g(X)f(Y))$  si ha

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} g(x)f(y)[p_{X,Y}(x,y) - p_{Y|X}(y|x)p_X(x)]dx dy = 0$$

Poiché  $f$  e  $g$  sono due funzioni arbitrarie, il lemma di Eulero-Lagrange implica che la quantità in parentesi quadra deve essere identicamente nulla su  $\mathbb{R}^{n+m}$ , e questo dimostra la prima delle (1.14.3). In modo del tutto analogo si dimostra anche la seconda.

Dalle (1.14.3) segue:

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X|Y}(x|y)p_Y(y)}{p_X(x)} \quad (1.14.6)$$

e ricordando che

$$p_X(x) = \int_{\mathbb{R}^m} p_{X,Y}(x,y)dy$$

si ricava

$$p_X(x) = \int_{\mathbb{R}^m} p_{X|Y}(x|y)p_Y(y)dy$$

che sostituita nella (1.14.6) dà la (1.14.4). ■

L'esistenza della funzione densità di probabilità condizionata  $p_{X|Y}(x|y)$  consente operativamente il calcolo del valore atteso di  $X$  condizionato alla conoscenza a posteriori che  $Y = y$ , per mezzo della

$$E(X|Y = y) = \int_{\mathbb{R}^n} x p_{X|Y}(x|y)dx = f(y). \quad (1.14.7)$$

Ovviamente la  $f(y)$  è la stessa funzione borelliana considerata nel teorema 1.13.10.

Nel prossimo capitolo si vedrà che questa funzione costituisce la migliore stima, secondo opportuni criteri, che si può dare della variabile aleatoria  $X$  a partire dalla conoscenza a posteriori della  $Y$ .

## 1.15 Condizionamento e proiezione su spazi di Hilbert

In questo paragrafo si vuole dare una diversa interpretazione del condizionamento di variabili aleatorie a  $\sigma$ -algebre generate da altre variabili aleatorie, sfruttando la teoria degli spazi di Hilbert. In particolare si vuole mostrare che, considerando le variabili aleatorie come elementi (vettori) dello spazio di Hilbert  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , l'operazione di condizionamento equivale ad una proiezione su un opportuno sottospazio.

Data una variabile aleatoria  $Y \in L_2$ , si consideri l'insieme di tutte le variabili aleatorie  $\mathcal{F}^Y$ -misurabili (ovvero, dal teorema

1.13.10, l'insieme di tutte le variabili aleatorie generate da funzioni borelliane di  $Y$ ). È evidente che tale insieme costituisce un sottospazio lineare di  $L_2$ , che verrà qui chiamato  $\mathcal{M}^Y$ , poiché combinazioni lineari di funzioni borelliane di  $Y$  sono ancora funzioni borelliane di  $Y$ , e quindi variabili aleatorie  $\mathcal{F}^Y$ -misurabili. Si vuole mostrare che la proiezione ortogonale di  $X$  su  $\mathcal{M}^Y$ , indicata con  $X_{\mathcal{M}^Y}$  o con  $\Pi(X|\mathcal{M}^Y)$ , coincide con il valore atteso condizionato  $E\{X|\mathcal{F}^Y\}$ . Questo risultato si ottiene sfruttando la proprietà di unicità della scomposizione di  $X$  nei sottospazi  $\mathcal{M}^Y$  e  $(\mathcal{M})^{Y\perp}$ . Ne consegue che è sufficiente mostrare che

$$E\{X|\mathcal{F}^Y\} \in \mathcal{M}^Y \quad \text{e} \quad [X - E\{X|\mathcal{F}^Y\}] \in (\mathcal{M})^{Y\perp} \quad (1.15.1)$$

per stabilire che  $X_{\mathcal{M}^Y} = E\{X|\mathcal{F}^Y\}$ . La prima delle (1.15.1) è dimostrata poiché  $E\{X|\mathcal{F}^Y\}$  è  $\mathcal{F}^Y$ -misurabile per costruzione. Rimane solo da mostrare che  $X - E\{X|\mathcal{F}^Y\}$  è ortogonale a qualsiasi variabile aleatoria  $\mathcal{F}^Y$ -misurabile. Ma ciò è presto fatto sviluppando il calcolo del valore atteso

$$E\{[X - E(X|\mathcal{F}^Y)]Z\} \quad \text{con} \quad Z \in \mathcal{M}^Y. \quad (1.15.2)$$

Infatti, distribuendo il prodotto per  $Z$  e tenendo conto della (1.13.7) e della (1.13.6) si ha

$$\begin{aligned} E\{[X - E(X|\mathcal{F}^Y)]Z\} &= E\{XZ - E(XZ|\mathcal{F}^Y)\} = \\ &= E\{XZ\} - E\{XZ\} = 0. \end{aligned} \quad (1.15.3)$$

La proiezione ortogonale ha una fondamentale proprietà che viene enunciata nel seguente **teorema di Proiezione**.

**Teorema 1.15.1** – Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert ed  $\mathcal{M}$  sia un sottospazio chiuso di  $\mathcal{H}$ . Per ogni vettore  $v \in \mathcal{H}$  esiste unico un vettore  $m_0 \in \mathcal{M}$  tale che

$$\|v - m_0\| \leq \|v - m\| \quad \forall m \in \mathcal{M}. \quad (1.15.4)$$

Inoltre, condizione necessaria e sufficiente affinché  $m_0$  sia l'unico vettore che verifichi la disequazione (1.15.4) è che l'errore  $v - m_0$  sia ortogonale al sottospazio  $\mathcal{M}$ , ovvero

$$\langle v - m_0, m \rangle = 0 \quad \forall m \in \mathcal{M}. \quad (1.15.5)$$

**Osservazione 1.15.2** – Enunciato in modo leggermente diverso, il teorema di proiezione afferma che la soluzione del problema

$$\min_{m \in \mathcal{M}} \|v - m\| \quad (1.15.6)$$

è pari alla proiezione ortogonale di  $v$  su  $\mathcal{M}$ .  $\triangle$

**Dimostrazione** – Prima di entrare nel merito dell'esistenza e dell'unicità è opportuno dimostrare che l'ortogonalità dell'errore  $v - m_0$  al sottospazio  $\mathcal{M}$  è una condizione necessaria e sufficiente di minimo. Per dimostrare la necessità si supponga che esista  $m_0$  tale che

$$\|v - m_0\| \leq \|v - m\| \quad \forall m \in \mathcal{M}. \quad (1.15.7)$$

e che esista  $m$  diverso da zero che non sia ortogonale a  $v - m_0$ , e cioè

$$\exists m \neq 0 : \quad \langle v - m_0, m \rangle \neq 0. \quad (1.15.8)$$

È facile dimostrare che ciò è assurdo. Infatti considerando il vettore

$$m_1 = m_0 + \delta \bar{m}, \quad (1.15.9)$$

$$\text{con} \quad \bar{m} = \frac{m}{\|m\|} \quad \text{e} \quad \delta = \langle v - m_0, m \rangle \neq 0.$$

e osservando che  $\|\bar{m}\| = 1$  si ha

$$\begin{aligned} \|v - m_1\|^2 &= \|v - m_0 - \delta \bar{m}\|^2 = \\ &= \|v - m_0\|^2 - \delta \langle \bar{m}, v - m_0 \rangle - \delta \langle v - m_0, \bar{m} \rangle + \delta^2 \|\bar{m}\|^2 \\ &= \|v - m_0\|^2 - \delta^2. \end{aligned} \quad (1.15.10)$$



Poiché  $\delta \neq 0$  ne consegue che

$$\|v - m_1\| < \|v - m_0\| \quad (1.15.11)$$

contraddicendo l'ipotesi.

Per dimostrare la sufficienza si supponga che esista  $m_0 \in \mathcal{M}$  tale che  $(v - m_0) \perp \mathcal{M}$ . Si ha allora per qualunque  $m \in \mathcal{M}$ , che  $(m - m_0) \in \mathcal{M}$  e quindi  $(v - m_0) \perp (m - m_0)$ . Allora, per il teorema di Pitagora si ha

$$\begin{aligned} \|v - m\|^2 &= \|v - m_0 + m_0 - m\|^2 = \\ &= \|v - m_0\|^2 + \|m - m_0\|^2, \quad \forall m \in \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (1.15.12)$$

Essendo  $\|m - m_0\| \geq 0$  ne consegue che

$$\|v - m_0\| \leq \|v - m\|, \quad \forall m \in \mathcal{M}, \quad (1.15.13)$$

e quindi la tesi, e cioè che l'ortogonalità ad  $\mathcal{M}$  del vettore  $v - m_0$  è una condizione sufficiente per il verificarsi della (1.15.4).

L'unicità della soluzione  $m_0$  è dimostrata dalla (1.15.12), in quanto si vede che se  $m \neq m_0$ , dal primo assioma della norma risulta che deve essere  $\|m - m_0\| > 0$ , e quindi

$$\|v - m_0\|^2 < \|v - m\|^2, \quad \forall m \in \mathcal{M}, \quad m \neq m_0.$$

Senza entrare nel dettaglio, si riportano di seguito le linee generali della dimostrazione dell'esistenza. Si osservi innanzitutto che se  $v \in \mathcal{M}$  allora una soluzione certamente esiste ed è  $m_0 = v$ , ed è unica come conseguenza del primo assioma della norma ( $\|v - m_0\| = 0 \Leftrightarrow v = m_0$ ). Nel caso generale in cui  $v \notin \mathcal{M}$ , definendo

$$\delta = \inf_{m \in \mathcal{M}} \|v - m\|$$

è possibile trovare una sequenza  $\{m_i\}$ , con  $m_i \in \mathcal{M}$ , tale che  $\|v - m_i\| \rightarrow \delta$ . Si dimostra che  $\{m_i\}$  è di Cauchy (dalla regola del parallelogramma si vede che  $\|m_i - m_j\|^2 \rightarrow 0$ ). Poiché  $\mathcal{M}$  è chiuso per ipotesi ne consegue che  $m_i \rightarrow m_0 \in \mathcal{M}$ . ■

## Teoria della Stima

**N** EI sistemi fisici, dinamici e non, accanto a grandezze accessibili per mezzo di strumenti di misura spesso vi sono grandezze che non si può, o che non si vuole, misurare direttamente. Oggetto della Teoria della Stima è lo studio del problema di ottenere, a partire dalle misure delle grandezze accessibili, una valutazione *ragionevole* delle quantità non misurabili. Il problema è complicato dalla presenza di “rumori” di varia natura nelle diverse parti dei sistemi in esame. Per poter correttamente impiegare le misure nel calcolo di una stima occorre sfruttare in qualche modo la *correlazione* esistente tra le grandezze considerate, unitamente ad eventuali informazioni a priori sulle grandezze del sistema e sui rumori che agiscono su di esso. Esistono fondamentalmente due approcci con cui affrontare il problema della stima di grandezze incognite a partire da grandezze note: l'approccio deterministico e l'approccio probabilistico. In queste note verrà trattato estesamente il secondo, ma non si mancherà di fare riferimenti al primo ove lo si ritenga utile.

### 2.1 Stima deterministica e stima probabilistica

A seconda delle ipotesi che vengono fatte sul sistema in esame è possibile eseguire una stima deterministica oppure una stima probabilistica (detta anche stocastica) delle grandezze incognite.

Nella stima deterministica la correlazione tra le grandezze

in gioco è dettata unicamente dal legame funzionale tra di esse, che viene rappresentato tramite un modello matematico di tipo deterministico (in genere un sistema di equazioni algebriche o differenziali). Non viene utilizzata alcuna conoscenza a priori sul rumore presente nel sistema, e sia le grandezze misurate che quelle da stimare sono considerate variabili deterministiche.

La stima stocastica (o Bayesiana) oltre ad utilizzare i legami deterministici tra le grandezze, che comunque vengono considerate variabili aleatorie, sfrutta anche la conoscenza a priori sul rumore, che in generale è rappresentata dalla densità di probabilità.

Al fine di chiarire le differenze tra i due approcci, si consideri il problema di risolvere un sistema *sovradeterminato* di equazioni lineari algebriche (più equazioni che incognite)

$$y = Ax, \quad (2.1.1)$$

$$\text{con } x \in \mathbb{R}^r, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad \text{e } A \in \mathbb{R}^{r \times m}, \quad m > r.$$

I vettori  $x$  e  $y$  sono le grandezze in gioco, e l'equazione (2.1.1) rappresenta il legame funzionale. Il valore del vettore  $y$  è noto in quanto misurato, ed è nota la matrice dei coefficienti  $A$ . Ci si pone il problema di *stimare* il vettore  $x$ .

Nel caso in cui le misure non siano affette da rumore, se il modello impiegato fosse esatto si avrebbe  $y \in \mathcal{R}(A)$ , ed il sistema (2.1.1) ammetterebbe soluzione esatta. Tuttavia, gli inevitabili errori di misura, ed eventuali errori nel modello, fanno sì che in generale  $y \notin \mathcal{R}(A)$ . Come è noto (teorema di Rouché-Capelli) in questo caso non esiste una soluzione esatta al problema, per cui ci si deve accontentare di soluzioni approssimate, ovvero di stime  $\tilde{x}$ . Occorre però stabilire dei criteri oggettivi per valutare la bontà di una stima (funzioni di costo o di merito). In tal modo è possibile impostare il problema della stima come un problema di ricerca di ottimo. Occorre osservare che, sia nel caso deterministico che in quello stocastico, si possono calcolare diverse stime di una stessa quantità, ciascuna ottima rispetto al criterio fissato.

Nell'impostazione deterministica le informazioni a priori sul vettore incognito  $x$  in genere vengono date in termini di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^r$  cui deve appartenere la stima  $\hat{x}$  (insiemi dei valori ammissibili per  $x$ ), e forniscono una valutazione di tipo binario (sì/no) sull'accettabilità di una stima. Una valutazione di tipo continuo della bontà di una stima può essere fatta solo sulla base dell'errore che essa produce, ovvero  $\varepsilon = y - A\tilde{x}$ , in quanto l'errore di stima  $e = x - \tilde{x}$  non è noto. Il criterio più frequentemente usato è quello della norma dell'errore  $\varepsilon$ , che porta a definire come stima ottima la stima che fornisce la minima norma di  $\varepsilon$ . Definendo una norma in  $\mathbb{R}^m$  come

$$\|\varepsilon\| \triangleq \sqrt{\varepsilon^T W \varepsilon}, \quad (2.1.2)$$

in cui la matrice  $W$  è simmetrica e definita positiva, la stima ottima  $\hat{x}$  risolve il problema di ottimizzazione

$$\min_{x \in \mathbb{R}^r} (y - Ax)^T W (y - Ax). \quad (2.1.3)$$

Se la matrice  $A$  ha rango  $r$  la soluzione è unica e si trova eguagliando a zero il gradiente della (2.1.3)

$$-2A^T W (y - Ax) \Big|_{\hat{x}} = 0 \quad (2.1.4)$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{x} &= A_W^\dagger y, \\ \text{con } A_W^\dagger &= (A^T W A)^{-1} A^T W. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

La matrice  $A_W^\dagger$  è la pseudoinversa della matrice  $A$  pesata con la  $W$ , ed è tale che  $A_W^\dagger A = I$ , come è facile verificare. Si noti che quando la matrice  $W$  è pari all'identità il quadrato della norma di  $\varepsilon$  è costituito dalla somma dei quadrati delle componenti

$$\|\varepsilon\| = \sqrt{\sum_{i=1}^r \varepsilon_i^2}, \quad (2.1.6)$$

e la (2.1.6) fornisce la soluzione ai **minimi quadrati** del problema (2.1.1).

Il valore  $\hat{y} = AA_W^\dagger y$  fornisce una versione filtrata della  $y$ . Si osservi che considerando lo spazio di Hilbert  $\mathbb{R}^m$  in cui il prodotto scalare è definito come

$$\langle y_1, y_2 \rangle \triangleq y_1^T W y_2, \quad (2.1.7)$$

e ricordando il Teorema di Proiezione (1.15.4), la soluzione a norma minima può anche essere trovata usando la condizione

$$y - \hat{y} \perp \mathcal{R}(A) \quad (2.1.8)$$

ovvero

$$\langle y - A\hat{x}, A\alpha \rangle = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^r. \quad (2.1.9)$$

Con la definizione data per il prodotto scalare la (2.1.9) si esprime come

$$\alpha^T A^T W (y - A\hat{x}) = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^r,$$

da cui

$$A^T W (y - A\hat{x}) = 0. \quad (2.1.10)$$

Risolvendo quest'ultima per  $\hat{x}$  si ottiene nuovamente la soluzione (2.1.5). Pertanto la matrice  $AA_W^\dagger$  esegue la proiezione ortogonale di  $y$  nel sottospazio  $\mathcal{R}(A)$ .

**Esempio 2.1.1** – Si consideri il problema di misurare la resistenza di un componente facendo misure in continua di tensione e corrente ai suoi capi. Si suppone di non avere informazioni a priori sul rumore di misura. Il legame funzionale è dato dalla legge di Ohm  $v = Ri$  in cui, ovviamente, deve essere  $R > 0$ . Se si esegue un solo esperimento  $(v_1, i_1)$  è chiaro che la stima della resistenza non è altro che la soluzione, esatta, dell'equazione di Ohm, e cioè  $\hat{R} = v_1/i_1$ . Effettuando  $m$  misure, il sistema da risolvere si può scrivere nella forma

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix} R. \quad (2.1.11)$$

Confrontando la (2.1.11) con la (2.1.1) si vede che la matrice  $A$  coincide con il vettore delle correnti misurate, il vettore delle tensioni costituisce il vettore  $y$  di termini noti e la resistenza  $R$  da stimare è l'incognita  $x$ . Se a tutte le misure si attribuisce lo stesso grado di confidenza, ha senso fare la stima ai minimi quadrati, calcolata utilizzando la pseudoinversa (2.1.5) con  $W = I$ . Si ottiene allora

$$\hat{R} = \frac{\sum_{k=1}^m i_k v_k}{\sum_{k=1}^m i_k^2}. \quad (2.1.12)$$

△

Si noti che nell'impostazione deterministica qualunque altro indice di qualità di una stima può essere definito ed impiegato nel suo calcolo tramite procedure numeriche di ottimizzazione. Il vero problema della stima deterministica riguarda proprio l'arbitrarietà nella scelta dell'indice di qualità. Ad esempio, considerando il criterio della minima norma, si osservi che la soluzione ottenuta dalla (2.1.5) è fortemente legata alla scelta della matrice di peso  $W$ , ovvero alla definizione della norma in  $\mathbb{R}^m$ .

Nell'impostazione probabilistica del problema (2.1.1) si considera esplicitamente la presenza del rumore nel sistema lineare. Il vettore  $y$  è considerato come l'osservazione di una variabile aleatoria  $Y$ , legata al vettore  $X$  dalla

$$Y = AX + N, \quad (2.1.13)$$

con  $X \in \mathbb{R}^r$ , e  $Y, N \in \mathbb{R}^m$ ,  $m > r$ .

Il vettore aleatorio  $N$  modella il rumore di osservazione, e di esso si suppone nota la densità di probabilità  $p_N(n)$ . L'incognita  $X$  può essere considerata un vettore deterministico oppure stocastico a seconda del livello di conoscenza a priori di cui si dispone. Nel caso in cui non si abbia alcuna conoscenza a priori il vettore  $X$  deve essere considerato un'incognita deterministica, mentre nel caso

in cui si abbiano delle conoscenze a priori può essere modellato come un vettore aleatorio di cui sia nota la densità di probabilità  $p_X(x)$ . Qualora siano noti solo il valore atteso e la covarianza risulta conveniente assumere  $X$  gaussiano. In entrambi i casi per risolvere il problema occorre calcolare la densità di probabilità del vettore  $Y$ .

Se  $X$  in (2.1.13) è deterministico (vettore in  $\mathbb{R}^r$ ) allora si preferisce indicarlo con una lettera minuscola, cioè con  $x$ . È facile convincersi che la densità di probabilità del vettore  $y$  viene calcolata come

$$p_Y(y|x) = p_N(y - Ax), \quad (2.1.14)$$

in cui  $p_Y(y|x)$  non è una densità condizionata, in quanto  $x$  non è un vettore aleatorio, ma è la densità di probabilità del vettore  $Y$  che è nota a meno del vettore  $x$ , che ha il significato di vettore di parametri. In questo caso, noto  $y$  dalle misure, ha senso porsi il problema di trovare il vettore  $x$  che ne rende massima la probabilità di estrazione. È questo il criterio della massima verosimiglianza, poiché la stima ottima  $\hat{x}$  è quella che rende più probabile (verosimile) il valore misurato  $y$ . L'impostazione formale della Stima di Massima Verosimiglianza sarà svolta più in là nel capitolo.

Se  $x$  è modellata come il risultato di una variabile aleatoria  $X$ , allora è possibile calcolare la densità  $p_Y(y)$  e la densità congiunta  $p_{X,Y}(x, y)$  come

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= p_X(x)p_N(y - Ax), \\ p_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}^r} p_X(x)p_N(y - Ax)dx \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

e la densità di probabilità condizionata

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}. \quad (2.1.16)$$

Con questa impostazione, data una qualunque stima  $\tilde{X} = h(Y)$ , l'errore di stima  $E = X - \tilde{X}$  è una variabile aleatoria di cui è possibile calcolare il valore atteso e la varianza. Un criterio molto diffuso

è quello di considerare ottima la stima che minimizza la varianza dell'errore di stima. L'impostazione formale della Stima di Minima Varianza è riportata nel prossimo paragrafo ma, alla luce anche di quanto riportato negli ultimi paragrafi del capitolo precedente, è possibile asserire che tale stima coincide con il valore atteso di  $X$  condizionato alla  $\sigma$ -algebra delle misure. Il valore che assume il valore atteso in corrispondenza al risultato  $y$  dal vettore aleatorio  $Y$ , indicato con  $E\{X|Y = y\}$  si ottiene svolgendo l'integrale

$$\hat{x} = f(y) = \int_{\mathbb{R}^r} x p_{X|Y}(x|y)dx. \quad (2.1.17)$$

## 2.2 Stima di Minima Varianza

Sia dato uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , e siano dati due vettori aleatori  $X$  e  $Y$  ( $X(\omega) \in \mathbb{R}^n$  e  $Y(\omega) \in \mathbb{R}^m$ ). Si supponga che sia noto il valore  $y$  assunto dal vettore aleatorio  $Y$  al verificarsi di un evento in  $\Omega$  (per tale motivo  $Y$  può essere indicato col nome di vettore delle osservazioni). Dalla conoscenza di  $y$  in generale non è possibile risalire al valore corrispondentemente assunto dal vettore aleatorio  $X$ , poiché l'insieme  $Y^{-1}(y) = \{\omega | y = Y(\omega)\} \subset \Omega$  in generale non è costituito da un solo atomo di  $\mathcal{F}$ , e quindi  $X$  assume diversi valori su di esso. Se, per qualunque  $y \in \mathbb{R}^m$ , il vettore aleatorio  $X$  assumesse su  $Y^{-1}(y)$  un solo valore, esso sarebbe  $\sigma(Y)$ -misurabile e di conseguenza esisterebbe una funzione di Borel  $f(\cdot)$  tale che  $X(\omega) = f(Y(\omega))$   $P$ -q.o.. In questo caso la stima  $\hat{x} = f(y)$  sarebbe esatta, ovvero  $\hat{x} = x$ .

In generale non esiste una funzione di Borel del vettore  $y$  che dia l'esatto valore di  $x$ , e quindi occorre impiegare funzioni che forniscano valori *prossimi* al valore vero secondo opportuni criteri. Nel seguito una stima  $\tilde{x} = h(y)$  sarà considerata come il risultato di una variabile aleatoria  $\tilde{X}(\omega) = h(Y(\omega))$ .

La bontà di stime diverse può essere confrontata per mezzo di indici scalari. Uno degli indici più frequentemente utilizzati nelle

applicazioni è il valore atteso del quadrato della norma dell'errore di stima.

$$J(\tilde{X}) = E\{\|X(\omega) - \tilde{X}(\omega)\|^2\} = E\{\|e(\omega)\|^2\}. \quad (2.2.1)$$

$J(\tilde{X})$  è un funzionale della stima  $\tilde{X}(\omega)$  e permette di definire come **stima ottima** la stima  $\hat{X}(\omega)$  che lo rende minimo

$$\begin{aligned} \hat{X} = f(Y) \text{ è ottima se } \forall h(\cdot) \text{ Borelliana} \\ J(\hat{X}) \leq J(\tilde{X}), \quad \text{con } \tilde{X} = h(Y). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Nel caso di stime centrate, e cioè tali che  $E\{\tilde{X}\} = E\{X\}$ , l'errore di stima risulta essere una variabile aleatoria a media nulla e l'indice  $J(\tilde{X})$  ne è la **varianza**. D'altronde ha senso considerare solo stime centrate nella ricerca del minimo del funzionale  $J(\tilde{X})$ , poiché è facile verificare che data una stima non centrata è sempre possibile costruire, a partire da essa, una stima centrata che produce un valore inferiore del funzionale. Sia  $\tilde{X}$  una stima non centrata. La stima  $\tilde{X}' = \tilde{X} + b$ , con  $b = E\{X - \tilde{X}\}$ , è centrata ed è tale che  $J(\tilde{X}') = J(\tilde{X}) - bb^T$ , e quindi, essendo  $bb^T \geq 0$ ,  $J(\tilde{X}') \leq J(\tilde{X})$ .

Pertanto la stima che minimizza il funzionale  $J(\cdot)$  minimizza anche la varianza dell'errore di stima, che pertanto può essere a pieno titolo definita come **stima di minima varianza**. Per essa vale il seguente fondamentale risultato:

**Teorema 2.2.1** – *La stima di minima varianza  $\hat{X}(\omega)$  è pari al valore sperato di  $X(\omega)$  condizionato alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}^Y$ :*

$$\hat{X}(\omega) = E\{X(\omega)|\mathcal{F}^Y\} = E\{X(\omega)|Y(\omega)\}. \quad (2.2.3)$$

**Dimostrazione** – Riscrivendo il funzionale  $J(\tilde{X})$  come

$$E\{\|X(\omega) - \tilde{X}(\omega)\|^2\} = E\{\|X(\omega) - \hat{X}(\omega) + \hat{X}(\omega) - \tilde{X}(\omega)\|^2\} \quad (2.2.4)$$

e ricordando che  $\hat{X}(\omega)$  è tale che  $X(\omega) - \hat{X}(\omega)$  è ortogonale a qualunque vettore aleatorio  $\mathcal{F}^Y$ -misurabile (vedi il Teorema di

Proiezione 1.15.4), e poiché per il lemma 1.13.9 la differenza  $\hat{X}(\omega) - \tilde{X}(\omega)$  è un vettore aleatorio  $\mathcal{F}^Y$ -misurabile, si ha

$$\begin{aligned} J(\tilde{X}) &= E\{\|X(\omega) - \hat{X}(\omega) + \hat{X}(\omega) - \tilde{X}(\omega)\|^2\} = \\ &= E\{\|X(\omega) - \hat{X}(\omega)\|^2\} + E\{\|\hat{X}(\omega) - \tilde{X}(\omega)\|^2\} \geq \\ &\geq E\{\|X(\omega) - \hat{X}(\omega)\|^2\} = J(\hat{X}) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

e quindi  $J(\hat{X}) \leq J(\tilde{X})$  per ogni  $\tilde{X}$  che sia  $\mathcal{F}^Y$  misurabile. ■

Si vuole ora mostrare che il valore atteso condizionato alle osservazioni minimizza anche la matrice di covarianza dell'errore di stima. A tale proposito è conveniente ricordare che, date due matrici  $A$  e  $B$  quadrate simmetriche definite positive, si dice che  $A$  è maggiore di  $B$ , e si scrive  $A > B$ , se  $A - B > 0$ . Analogamente  $A \geq B$  se  $A - B \geq 0$ .

Si riscriva la covarianza dell'errore di stima come

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &= E\{(X - \tilde{X})(X - \tilde{X})^T\} = \\ &= E\{(X - \hat{X} + \hat{X} - \tilde{X})(X - \hat{X} + \hat{X} - \tilde{X})^T\}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Ponendo

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} &= E\{(X - \hat{X})(X - \hat{X})^T\}, \\ \Psi' &= E\{(\hat{X} - \tilde{X})(\hat{X} - \tilde{X})^T\} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

si ha

$$\tilde{\Psi} = \hat{\Psi} + \Psi' + E\{(X - \hat{X})(\hat{X} - \tilde{X})^T\}. \quad (2.2.8)$$

Non è difficile mostrare che il terzo addendo è pari a zero. Infatti, sviluppando il prodotto ed utilizzando la (1.13.6) si ha

$$\begin{aligned} E\{(X - \hat{X})(\hat{X} - \tilde{X})^T\} &= \\ &= E\{X(\hat{X} - \tilde{X})^T\} - E\{\hat{X}(\hat{X} - \tilde{X})^T\} = \\ &= E\{E[X(\hat{X} - \tilde{X})^T|\mathcal{F}^Y]\} - E\{\hat{X}(\hat{X} - \tilde{X})^T\}. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Osservando che per il lemma (1.13.9)  $\hat{X} - \tilde{X}$  è un vettore aleatorio  $\mathcal{F}^Y$ -misurabile, utilizzando il teorema (1.13.7) si ha:

$$\begin{aligned} E\{(X - \hat{X})(\hat{X} - \tilde{X})^T\} &= \\ &= E\{E[X|\mathcal{F}^Y](\hat{X} - \tilde{X})^T\} - E\{\hat{X}(\hat{X} - \tilde{X})^T\} = \\ &= E\{\hat{X}(\hat{X} - \tilde{X})^T\} - E\{\hat{X}(\hat{X} - \tilde{X})^T\} = 0. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Si ha quindi

$$\tilde{\Psi} = \hat{\Psi} + \Psi', \quad (2.2.11)$$

e poiché ciascun addendo è semidefinito positivo si ha il risultato finale

$$\tilde{\Psi} \geq \hat{\Psi}, \quad (2.2.12)$$

e cioè che la covarianza della stima (2.2.3) è minore della covarianza di qualunque altra stima  $\tilde{X}$ .

Ricordando inoltre che

$$\begin{aligned} E\{\|X(\omega) - \tilde{X}(\omega)\|^2\} &= \\ &= Tr\left[E\{(X(\omega) - \tilde{X}(\omega))(X(\omega) - \tilde{X}(\omega))^T\}\right], \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

ovvero

$$J(\tilde{X}) = Tr[\tilde{\Psi}], \quad (2.2.14)$$

si ha anche

$$Tr[\hat{\Psi}] \leq Tr[\tilde{\Psi}]. \quad (2.2.15)$$

**Osservazione 2.2.2** – Dalla (2.2.3) si comprende che se invece del vettore  $y$  sia noto il risultato  $z$  di un altro vettore aleatorio  $Z(\omega)$ , tale però che  $\mathcal{F}^Z = \mathcal{F}^Y$ , la stima ottima del vettore  $x$  è la stessa. Ciò significa che  $Z(\omega)$  e  $Y(\omega)$  contengono la stessa quantità di informazione. Viceversa se  $\mathcal{F}^Z \subset \mathcal{F}^Y$ , allora  $Y(\omega)$  fornisce più informazioni su  $X(\omega)$  di quante non ne dia  $Z(\omega)$ . Se  $\mathcal{F}_Y \perp \mathcal{F}_X$ , la conoscenza di  $Y(\omega)$  non è di alcun aiuto nella stima di  $X(\omega)$  e la (2.2.3) fornisce  $\hat{X} = E\{X(\omega)\}$ .  $\triangle$

Rimane il problema del calcolo effettivo del secondo membro dell'equazione (2.2.3) che, nel caso generale, costituisce uno dei problemi più complessi della matematica applicata. Nell'ambito della stima dello stato nei sistemi dinamici il problema della stima a minima varianza è stato risolto in modo soddisfacente solo nel caso dei sistemi lineari. Nel prossimo paragrafo si vedrà come viene risolto il problema nel caso di un vettore gaussiano di cui siano note alcune componenti. Più avanti nel capitolo si tratterà del calcolo approssimato della stima ottima (2.2.3). In particolare verranno prese in esame approssimazioni del valore atteso condizionato mediante polinomi in  $Y$ .

**Osservazione 2.2.3** – In assenza di osservazioni  $Y$  la migliore stima di  $X$  è il valore atteso condizionato alla  $\sigma$ -algebra banale  $\mathcal{F}_{ban}$ . In altre parole in assenza di informazioni a posteriori la migliore stima che si può dare di  $X$ , nel senso della minima varianza, è il semplice valore sperato  $E\{X\}$ . Ad esempio nel gioco dei dadi la migliore predizione che si può fare sul risultato del lancio di un dado è il numero 3.5 (valore atteso se il dado non è truccato). Non è tuttavia consigliabile puntare del denaro sul 3.5!  $\triangle$

## 2.3 Stima ottima in un vettore gaussiano

In questa sezione viene dimostrato un importante risultato, e cioè che dato un vettore aleatorio gaussiano e date le osservazioni di alcune delle sue componenti, la stima a minima varianza delle componenti rimanenti è una funzione lineare delle osservazioni.

Si supponga di avere un vettore gaussiano  $Z = [X^T \ Y^T]^T$ , con  $X(\omega) \in \mathbb{R}^n$  ed  $Y(\omega) \in \mathbb{R}^m$ , necessariamente vettori gaussiani anch'essi. Supponiamo che il vettore  $Z$  abbia media nulla (qualora ciò non fosse vero l'analisi svolta qui di seguito sarebbe comunque valida per il vettore gaussiano  $\tilde{Z} = Z - m_Z$ , in cui  $m_Z$  è il valor medio di  $Z$ ). Si ha allora

$$E\{Z\} = E \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 0 \quad (2.3.1)$$

e

$$\Psi_Z = E\left\{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^T & Y^T \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \Psi_X & \Psi_{XY} \\ \Psi_{XY}^T & \Psi_Y \end{bmatrix}, \quad (2.3.2)$$

in cui  $\Psi_Z$  è la matrice di covarianza, simmetrica e definita positiva. Si osservi che le sottomatrici  $\Psi_X$  e  $\Psi_Y$ , anch'esse simmetriche e definite positive, sono le covarianze dei vettori aleatori  $X$  e  $Y$ .

Si vuole determinare, utilizzando il criterio della minima varianza, il valore  $\hat{x}$  assunto dalla stima ottima  $\hat{X}$  della componente  $X$  del vettore, a partire dalla conoscenza del valore  $y$  assunto dalla componente  $Y$ . Si è mostrato in precedenza che la stima ottima  $\hat{X}$  è la variabile aleatoria data da

$$\hat{X} = E\{X|\mathcal{F}^Y\}, \quad (2.3.3)$$

indicata anche con  $E\{X|Y\}$ . Per indicare il valore numerico  $\hat{x}$  si scrive

$$\hat{x} = E\{X|\mathcal{F}^Y\}\Big|_{Y=y} \quad \text{oppure} \quad \hat{x} = E\{X|Y = y\}, \quad (2.3.4)$$

o ancora più semplicemente  $\hat{x} = E\{x|y\}$ .

Ricordando la (1.14.2) si ha:

$$\hat{x} = E\{x|y\} = \int_{\mathbb{R}^n} x p_{X|Y}(x|y) dx = f(y). \quad (2.3.5)$$

La (2.3.5) mette in evidenza il fatto che la stima ottima è una funzione (borelliana) della sola variabile  $y$ . Ciò che si vuole dimostrare è che la funzione  $f(y)$  è lineare, e cioè che esiste una matrice  $K$  tale che:

$$\hat{x} = Ky. \quad (2.3.6)$$

La (2.3.5), grazie al teorema di Bayes, è esprimibile in funzione della densità di probabilità congiunta  $p_{X,Y}(x,y)$ , come

$$\hat{x} = \int_{\mathbb{R}^n} x \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} dx = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x p_{X,Y}(x,y) dx}{p_Y(y)}, \quad (2.3.7)$$

$$\hat{x} = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x p_{X,Y}(x,y) dx}{\int_{\mathbb{R}^n} p_{X,Y}(x,y) dx}. \quad (2.3.8)$$

Poiché  $p_{X,Y}(x,y)$  è completamente individuata dalla matrice di covarianza  $\Psi_Z$

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^{(n+m)/2} |\Psi_Z|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix} \Psi_Z^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\} \quad (2.3.9)$$

è evidente che la matrice  $K$  dovrà dipendere dalla sola covarianza. In particolare, ci si aspetta che se  $\Psi_{XY} = 0$  allora  $K = 0$ , in quanto i vettori aleatori  $x$  e  $y$  risulterebbero incorrelati (ed anche indipendenti).

Al fine di semplificare il calcolo della  $\hat{x}$  risulta vantaggioso riscrivere l'esponente della (2.3.9) in una forma che consenta di fattorizzare opportunamente la  $p_{X,Y}(x,y)$  in modo da permettere alcune semplificazioni tra numeratore e denominatore della (2.3.8) per arrivare ad una formula del tipo

$$\hat{x} = \int_{\mathbb{R}^n} x \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\bar{\Psi}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (x - \bar{m})^T \bar{\Psi}^{-1} (x - \bar{m})\right\} dx \quad (2.3.10)$$

con  $\bar{\Psi}$  e  $\bar{m}$  opportuni, in modo da ottenere facilmente

$$\hat{x} = \bar{m}. \quad (2.3.11)$$

A tale scopo si definisca la seguente partizione in blocchi della  $\Psi_Z^{-1}$

$$\Psi_Z^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_X & \bar{\Psi}_{XY} \\ \bar{\Psi}_{XY}^T & \bar{\Psi}_Y \end{bmatrix} \quad (2.3.12)$$

in cui, evidentemente, le sottomatrici indicate soddisfano alle relazioni

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_X \Psi_X + \bar{\Psi}_{XY} \Psi_{XY}^T &= I_n, & \bar{\Psi}_X \Psi_{XY} + \bar{\Psi}_{XY} \Psi_Y &= 0, \\ \bar{\Psi}_{XY}^T \Psi_X + \bar{\Psi}_Y \Psi_{XY}^T &= 0, & \bar{\Psi}_{XY}^T \Psi_{XY} + \bar{\Psi}_Y \Psi_Y &= I_m. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

L'esponente della (2.3.9) si scrive allora

$$-\frac{1}{2}(x^T \bar{\Psi}_X x + 2x^T \bar{\Psi}_{XY} y + y^T \bar{\Psi}_Y y) \quad (2.3.14)$$

mentre il formato dell'esponente che consente di fattorizzare la densità  $p_{X,Y}(x, y)$  è del tipo

$$-\frac{1}{2}\{(x - My)^T \bar{\Psi}_1^{-1}(x - My) + y^T \bar{\Psi}_2^{-1} y\}, \quad (2.3.15)$$

ovvero è tale da evidenziare che nel cambiamento di variabile

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - My \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & -M \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.3.16)$$

le variabili aleatorie  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  sono indipendenti (la matrice di covarianza è diagonale a blocchi,  $\text{diag}\{\Psi_1, \Psi_2\}$ ). Svolgendo la (2.3.16) ed eguagliandola alla (2.3.14) si ottiene che deve essere

$$\begin{aligned} \Psi_1^{-1} &= \bar{\Psi}_X, \\ \Psi_2^{-1} &= \bar{\Psi}_Y - M^T \bar{\Psi}_X M, \\ M &= -\bar{\Psi}_X^{-1} \bar{\Psi}_{XY}, \quad \Rightarrow \quad \Psi_2^{-1} = \bar{\Psi}_Y - \bar{\Psi}_{XY}^T \bar{\Psi}_X^{-1} \bar{\Psi}_{XY}. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Osservando che la seconda e la quarta delle (2.3.13) possono essere riscritte come

$$\begin{aligned} \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} &= -\bar{\Psi}_X^{-1} \bar{\Psi}_{XY}, \\ \bar{\Psi}_Y - \bar{\Psi}_{XY}^T \bar{\Psi}_X^{-1} \bar{\Psi}_{XY} &= \Psi_Y^{-1}, \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

le (2.3.15) possono risciversi

$$\Psi_1 = \bar{\Psi}_X^{-1}, \quad M = \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1}, \quad \Psi_2 = \Psi_Y. \quad (2.3.19)$$

A questo punto è possibile riscrivere la (2.3.9) nella forma fattorizzata

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^{(n+m)/2} |\Psi_Z|^{1/2}} \cdot \\ &\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - My)^T \bar{\Psi}_X(x - My)\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}y^T \Psi_Y^{-1} y\right\} \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

e quindi la (2.3.8), dopo aver semplificato i termini a moltiplicare che non dipendono da  $x$  e che possono essere portati fuori dal segno di integrale, assume il formato

$$\hat{x} = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - My)^T \bar{\Psi}_X(x - My)\right\} dx}{\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - My)^T \bar{\Psi}_X(x - My)\right\} dx}. \quad (2.3.21)$$

Si moltiplichino ora il numeratore e il denominatore della (2.3.21) per  $1/((2\pi)^{n/2} |\bar{\Psi}_X^{-1}|^{1/2})$ . In questo modo al denominatore si ha l'integrale su  $\mathbb{R}^n$  di una distribuzione gaussiana, che è pari a 1, e al numeratore il valore atteso  $My$ . Si ha quindi  $\hat{x} = My$  che, in base alla (2.3.19), si riscrive

$$\hat{x} = \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} y \quad (2.3.22)$$

che è la relazione lineare cercata. La covarianza dell'errore di stima  $\Psi_{\hat{X}}$  è pari a  $\bar{\Psi}_X^{-1}$ .

Riscrivendo la seconda delle (2.3.13) come  $\bar{\Psi}_{XY} = -\bar{\Psi}_X \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1}$ , e sostituendo il risultato nella prima si ha

$$\bar{\Psi}_X^{-1} = \Psi_X - \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} \Psi_{XY}^T. \quad (2.3.23)$$

La covarianza dell'errore di stima può quindi essere riscritta come

$$\Psi_{\hat{X}} = \Psi_X - \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} \Psi_{XY}^T. \quad (2.3.24)$$

Questa relazione può essere facilmente ottenuta anche con un calcolo diretto della covarianza di  $\hat{X} - X$ .

**Osservazione 2.3.1** – Nel caso in cui i vettori aleatori  $X$  e  $Y$  abbiano valori medi  $m_X$  e  $m_Y$  diversi da zero, la (2.3.22) si scrive

$$\hat{x} = m_X + \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} (y - m_Y) \quad (2.3.25)$$



**Osservazione 2.3.2** – È interessante notare che nel caso in cui i vettori aleatori  $X$  e  $Y$  siano scorrelati, e quindi  $\Psi_{XY} = 0$ , la conoscenza del risultato  $y$  non è di alcun aiuto nella stima del risultato  $x$ . In questo caso, come si vede dalla (2.3.25), la stima ottima di  $x$  è pari al valor medio  $m_X$ , e dalla (2.3.24) risulta che la covarianza dell'errore di stima è pari a  $\Psi_X$ , ovvero coincide con la covarianza stessa del vettore aleatorio  $X$ .

La presenza di una correlazione tra  $x$  e  $y$  consente di fare di meglio, fornendo una stima (2.3.22) che ha una covarianza inferiore a quella del vettore aleatorio  $x$ , in quanto nella (2.3.24) la matrice semidefinita positiva  $\Psi_{XY}\Psi_Y^{-1}\Psi_{XY}^T$  si sottrae alla  $\Psi_X$ .  $\triangle$

Le relazioni (2.3.22) e (2.3.25) si riveleranno preziose nello sviluppo del filtro di Kalman.

Si vuole ora dare una dimostrazione alternativa della (2.3.22), ricordando che un vettore aleatorio gaussiano di media nulla e covarianza assegnata può sempre pensarsi generato da una trasformazione lineare di un vettore gaussiano standard, avente la stessa dimensione. Sia  $V = [V_1^T V_2^T]^T$  un vettore gaussiano standard, in cui  $V_1$  ha la stessa dimensione di  $X$  e  $V_2$  ha la stessa dimensione di  $Y$ . Il vettore  $Z = [X^T Y^T]^T$  si può ottenere mediante una opportuna trasformazione lineare del vettore  $V$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}. \quad (2.3.26)$$

In particolare risulta comodo cercare una trasformazione di tipo triangolare, ovvero tale che  $A_{21} = 0$ . Ciò è facile in quanto è evidente che il sottovettore  $Y$  si può ottenere a partire dal sottovettore  $V_2$  mediante la relazione

$$Y = \Psi_Y^{1/2} V_2. \quad (2.3.27)$$

È immediato dimostrare che, poiché la trasformazione lineare (2.3.27) è invertibile, la  $\sigma$ -algebra generata da  $Y$  coincide con la  $\sigma$ -algebra generata da  $V_2$  (dalla (2.3.27) si dimostra che  $\mathcal{F}^Y \subset \mathcal{F}^{V_2}$ , mentre invertendo la (2.3.27) si dimostra che  $\mathcal{F}^{V_2} \subset \mathcal{F}^Y$ , e quindi  $\mathcal{F}^Y \equiv \mathcal{F}^{V_2}$ ).

Per il calcolo delle matrici  $A_{11}$  e  $A_{12}$  occorre imporre che il sottovettore  $X$  abbia effettivamente covarianza propria pari a  $\Psi_X$  e mutua covarianza con  $Y$  pari a  $\Psi_{XY}$ . Svolgendo i calcoli si ha

$$\begin{aligned} E\{XX^T\} &= \Psi_X = A_{11}A_{11}^T + A_{12}A_{12}^T \\ E\{XY^T\} &= \Psi_{XY} = A_{12}\Psi_Y^{1/2} \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} A_{12} &= \Psi_{XY}\Psi_Y^{-1/2}, \\ A_{11}A_{11}^T &= \Psi_X - \Psi_{XY}\Psi_Y^{-1}\Psi_{YX}. \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

A questo punto è facile calcolare  $\hat{X}$ , tenendo conto che  $\mathcal{F}^Y \equiv \mathcal{F}^{V_2}$  e che  $\mathcal{F}^{V_1} \perp \mathcal{F}^{V_2}$ . Innanzitutto si osservi che la stima ottima di  $V_2$  dato  $Y$ , poiché  $V_2$  è  $Y$ -misurabile, è data da  $V_2$  stesso

$$\hat{V}_2 = E\{V_2|Y\} = E\{V_2|V_2\} = V_2, \quad (2.3.30)$$

La stima ottima di  $X$  è invece data da

$$\begin{aligned} \hat{X} &= E\{X|V_2\} = \\ &= A_{11}E\{V_1|V_2\} + A_{12}E\{V_2|V_2\} = \\ &= A_{11}E\{V_1\} + A_{12}V_2 = A_{12}V_2. \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Ricordando che  $A_{12} = \Psi_{XY}\Psi_Y^{-1/2}$  e che  $V_2 = \Psi_Y^{-1/2}Y$  si ha

$$\hat{X} = \Psi_{XY}\Psi_Y^{-1}Y, \quad (2.3.32)$$

ossia la (2.3.22). Il vettore aleatorio  $A_{11}V_1$  costituisce proprio l'errore di stima, ed ha covarianza  $A_{11}A_{11}^T$ , ovvero esattamente la (2.3.24).

**Osservazione 2.3.3** – Che l'espressione (2.3.22) costituisca la stima ottima si può dimostrare semplicemente mostrando che l'errore di stima risulta ortogonale da qualunque altra funzione di  $Y$ , e quindi indipendente da  $Y$ . Ciò grazie al Teorema di Proiezione, che asserisce che l'unica funzione Borelliana  $f(Y)$  che rende l'errore  $X - f(Y)$

ortogonale a qualunque altra funzione di  $Y$  è il valore atteso di  $X$  condizionato a  $Y$  (la proiezione di  $X$  nel sottospazio di funzioni  $\mathcal{M}^Y$ ).

Dimostrare che l'errore  $X - \Psi_{XY}\Psi_Y^{-1}Y$  è scorrelato da  $Y$  è possibile semplicemente per calcolo diretto

$$E\{(X - \Psi_{XY}\Psi_Y^{-1}Y)Y^T\} = E\{XY^T\} - \Psi_{XY}\Psi_Y^{-1}E\{YY^T\} = 0. \quad (2.3.33)$$

Data la gaussianità dei vettori in gioco, resta dimostrata anche l'indipendenza dell'errore da  $Y$ . Data quindi una qualsiasi funzione  $h \in \mathcal{M}^Y$  si ha

$$E\{(X - \Psi_{XY}\Psi_Y^{-1}Y)h(Y)\} = E\{X - \Psi_{XY}\Psi_Y^{-1}Y\}E\{h(Y)\} = 0, \quad (2.3.34)$$

e cioè l'ortogonalità dell'errore  $X - \Psi_{XY}\Psi_Y^{-1}Y$  al sottospazio  $\mathcal{M}^Y$ , per cui deve essere necessariamente

$$\Psi_{XY}\Psi_Y^{-1}Y = E\{X|Y\}. \quad (2.3.35)$$

△

## 2.4 Stima lineare ottima

Siano  $X$  e  $Y$  due vettori aleatori, con distribuzione non gaussiana. Per il momento si supporrà che i due vettori siano a media nulla. Si vuole stimare il vettore  $X$  a partire dalla conoscenza del vettore  $Y$  senza però ricorrere al valore atteso condizionato, a causa dell'estrema complessità del calcolo nel caso generale. È bene osservare che si sta rinunciando comunque alla stima di minima varianza. Si può però cercare la migliore stima di  $X$  tra tutte le funzioni lineari di  $Y$ . In sostanza, se  $X \in \mathbb{R}^r$  e  $Y \in \mathbb{R}^m$ , si cerca la matrice  $K^* \in \mathbb{R}^{r \times m}$  che fornisce la minima varianza dell'errore di stima tra tutte le stime del tipo

$$\tilde{X} = KY, \quad \forall K \in \mathbb{R}^{r \times m}. \quad (2.4.1)$$

Si è visto nei paragrafi precedenti che la stima di minima varianza minimizza anche la matrice di covarianza dell'errore di stima. Si può pertanto risolvere il problema della migliore stima lineare risolvendo il seguente problema di minimo

$$\min_K J(K) \quad (2.4.2)$$

con  $J(K) = E\{(X - KY)(X - KY)^T\}$

La matrice  $K^*$  che minimizza la funzione  $J(K)$  deve essere un punto di stazionarietà per la funzione stessa. Sviluppando il valore atteso si vede che la funzione  $J(K)$  è quadratica in  $K$ , in cui il coefficiente del termine di secondo grado è definito positivo

$$\begin{aligned} J(K) &= E\{XX^T\} - KE\{YX^T\} - E\{XY^T\}K^T + KE\{YY^T\}K^T = \\ &= \Psi_X - K\Psi_{YX} - \Psi_{XY}K^T + K\Psi_YK^T. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Pertanto la funzione  $J(K)$  è convessa ed il punto di stazionarietà è anche l'unico punto di minimo.

Si può calcolare  $K^*$  imponendo le condizioni di stazionarietà della funzione  $J(K)$  rispetto a scostamenti infinitesimi attorno a  $K^*$ . Per ricavare queste condizioni è opportuno definire la funzione  $\bar{J}(\bar{K}, \Delta)$ , con  $\Delta \in \mathbb{R}^{r \times m}$ , come lo sviluppo in serie troncato al primo ordine di  $J(K)$  attorno al punto  $\bar{K}$ , tale cioè che  $J(\bar{K} + \Delta) \approx \bar{J}(\bar{K}, \Delta)$  per  $\Delta$  sufficientemente *piccolo*. Pertanto, il punto di stazionarietà  $K^*$  è tale che

$$J(K^*) = \bar{J}(K^*, \Delta), \quad \forall \Delta \in \mathbb{R}^{r \times m}.$$

Per ottenere lo sviluppo al primo ordine di  $J(K)$  attorno a  $K^*$  si operi in  $J(K)$  la sostituzione  $K = K^* + \Delta$ , ottenendo

$$\begin{aligned} J(K^* + \Delta) &= \Psi_X - (K^* + \Delta)\Psi_{YX} - \Psi_{XY}(K^* + \Delta)^T + \\ &\quad + (K^* + \Delta)\Psi_Y(K^* + \Delta)^T \\ &= J(K^*) - \Delta\Psi_{YX} - \Psi_{YX}\Delta^T + \Delta\Psi_Y\Delta^T + \\ &\quad + K^*\Psi_Y\Delta^T + \Delta\Psi_YK^{*T}. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Lo sviluppo al primo ordine risulta quindi essere

$$\begin{aligned} \bar{J}(K^*, \Delta) = & J(K^*) + \Delta \left( -\Psi_{YX} + \Psi_Y K^{*T} \right) + \\ & + \left( -\Psi_{XY} + K^* \Psi_Y \right) \Delta^T \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

La condizione di stazionarietà implica quindi che il coefficiente del termine di primo grado deve essere nullo, e cioè

$$-\Psi_{XY} + K^* \Psi_Y = 0, \quad (2.4.6)$$

da cui

$$K^* = \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1}. \quad (2.4.7)$$

Risulta pertanto che la migliore tra le stime lineari è data da

$$\tilde{X} = \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} Y. \quad (2.4.8)$$

Si osservi che questa formula coincide con la (2.3.22) ottenuta nell'ipotesi di gaussianità dei vettori aleatori  $X$  e  $Y$ . In quel caso però la stima ottenuta era la migliore tra *tutte* le stime possibili, mentre in questo caso è la migliore tra le sole stime lineari.

Il valore ottenuto per  $K^*$  è tale da annullare gli ultimi due addendi dell'espressione di  $J(K^*)$ , infatti

$$-\Psi_{XY} K^{*T} + K^* \Psi_Y K^{*T} = (-\Psi_{XY} + K^* \Psi_Y) K^{*T} = 0. \quad (2.4.9)$$

Pertanto il valore minimo della covarianza dell'errore di stima risulta essere pari a

$$J(K^*) = \Psi_X - K^* \Psi_{YX} = \Psi_X - \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} \Psi_{YX}. \quad (2.4.10)$$

**Osservazione 2.4.1** – Essendo  $J(K^*)$  una matrice di covarianza, essa è sicuramente una matrice simmetrica e semidefinita positiva. Resta pertanto stabilito anche il notevole risultato che, date comunque due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  si ha

$$\Psi_X - \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} \Psi_{YX} \geq 0. \quad (2.4.11)$$

△

## 2.5 Stima di massima verosimiglianza

Un altro approccio tra i più utilizzati per la soluzione al problema della stima è quello di individuare tra tutte le distribuzioni di probabilità su uno spazio dei campioni  $\Omega$  quella più adatta (verosimile) a risolvere il problema che si sta considerando. La stima così ottenuta è detta **stima di massima verosimiglianza**.

Sia  $\Omega$  lo spazio dei campioni e  $\mathcal{F}$  una  $\sigma$ -algebra definita su  $\Omega$ . Si indichi con  $\mathcal{P}$  una famiglia di misure di probabilità. La terna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  è detta **terna statistica**, e differisce da una terna di probabilità perché al posto della misura  $P$  è definita una famiglia di misure  $\mathcal{P}$ . Molto spesso nelle applicazioni la famiglia  $\mathcal{P}$  è parametrizzata rispetto ad un vettore di parametri  $\vartheta$  appartenente ad un opportuno insieme  $\Theta$

$$\mathcal{P} = \{P_\vartheta, \vartheta \in \Theta\} \quad (2.5.1)$$

**Definizione 2.5.1** – Dato uno spazio dei campioni  $\Omega$  finito, comunque fissata una  $x_i \in \Omega$  e per ogni  $P \in \mathcal{P}$  la quantità

$$P(\{x_i\}) = \bar{\ell}_{x_i}(P) \quad (2.5.2)$$

è detta **verosimiglianza di  $x_i$  calcolata secondo  $P$** . •

Per ogni  $x_i \in \Omega$  il funzionale  $\bar{\ell}_{x_i} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}$ , definito dalla (2.5.2), misura quanto ogni ipotesi di misura di probabilità  $P \in \mathcal{P}$  è ‘verosimile’ dopo che si è osservato il risultato  $x_i$ . Per questo motivo  $\bar{\ell}_{x_i}$  viene detto **funzionale di verosimiglianza** associato a  $x_i$ .

**Definizione 2.5.2** – Assegnate  $P$  e  $Q$  appartenenti a  $\mathcal{P}$  ed il campione  $x_i$ , si dice che  $P$  è più verosimile di  $Q$  e si scrive  $P \overset{x_i}{>} Q$  se  $\bar{\ell}_{x_i}(P) \geq \bar{\ell}_{x_i}(Q)$  cioè

$$P \overset{x_i}{>} Q \iff \bar{\ell}_{x_i}(P) \geq \bar{\ell}_{x_i}(Q) \quad (2.5.3)$$

In questo modo si introduce una relazione d'ordine nella famiglia  $\mathcal{P}$ . L'ordinamento che si stabilisce tra le misure di probabilità (detto ordinamento di verosimiglianza indotto da  $x_i$ ) non cambia se  $\bar{\ell}_{x_i}$  è moltiplicato per una costante positiva arbitraria. Si definisca ora il funzionale  $\ell_{x_i} : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}^+$  definito come

$$\ell_{x_i}(P, Q) = \begin{cases} \bar{\ell}_{x_i}(P)/\bar{\ell}_{x_i}(Q) & \text{se } \bar{\ell}_{x_i}(Q) > 0 \\ 1 & \text{se } \bar{\ell}_{x_i}(Q) = 0 \end{cases} \quad (2.5.4)$$

in modo che

$$P \succ^{x_i} Q \iff \ell_{x_i}(P, Q) \geq 1 \quad (2.5.5)$$

La quantità  $\ell_{x_i}(P, Q)$  è detta **rapporto di verosimiglianza** tra  $P$  e  $Q$ .

Nel caso più generale in cui  $\Omega$  non è finito e per ogni  $x \in \Omega$  si ha

$$P(\{x\}) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{P} \quad (2.5.6)$$

la (2.5.2) perde di significato. Si può però considerare per ogni  $x$  un intorno  $U(x)$  per il quale accade che  $Q(U(x)) > 0$  per ogni  $Q \in \mathcal{P}$  e perciò se  $P$  e  $Q$  appartengono a  $\mathcal{P}$  si può calcolare il rapporto  $P(U(x))/Q(U(x))$ .

**Definizione 2.5.3** – Si definisce **rapporto di verosimiglianza** tra due misure  $P$  e  $Q$  nel punto  $x$  la quantità

$$\ell_x(P, Q) = \lim_{U_x \downarrow \{x\}} \frac{P(U_x)}{Q(U_x)} \quad (2.5.7)$$

se il limite a secondo membro esiste.

**Definizione 2.5.4** – Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  un modello statistico. Data l'osservazione  $x \in \Omega$ , se esiste un massimo nell'ordinamento di verosimiglianza indotto da  $x$  su  $\mathcal{P}$ , tale massimo è detto **stima di massima verosimiglianza** della misura di probabilità  $P$ . Nel caso in cui la famiglia  $\mathcal{P}$  sia parametrizzata rispetto ad parametro

vettoriale  $\vartheta \in \Theta$ , il valore del parametro corrispondente al massimo nell'ordinamento di verosimiglianza è la stima di massima verosimiglianza di  $\vartheta$ .

Si è visto nel capitolo precedente che se  $P$  è assolutamente continua rispetto a  $Q$  ( $P \ll Q$ ), allora esiste una funzione  $f(x)$  (derivata di Radon-Nikodym) tale che

$$\forall U \in \mathcal{F} \quad \int_U dP = \int_U f(x) dQ, \quad \text{da cui} \quad \frac{dP}{dQ}(x) \triangleq f(x). \quad (2.5.8)$$

Essendo quindi

$$\frac{\int_{U_x} dP}{\int_{U_x} dQ} = \frac{\int_{U_x} f(x) dQ}{\int_{U_x} dQ}, \quad (2.5.9)$$

e poiché

$$\min_{U_x} f(x) \int_{U_x} dQ \leq \int_{U_x} f(x) dQ \leq \max_{U_x} f(x) \int_{U_x} dQ, \quad (2.5.10)$$

si ha

$$\min_{U_x} f(x) \leq \frac{\int_{U_x} dP}{\int_{U_x} dQ} \leq \max_{U_x} f(x). \quad (2.5.11)$$

Ne consegue che se  $P \ll Q$  il limite (2.5.7) vale

$$\lim_{U_x \downarrow \{x\}} \frac{\int_{U_x} dP}{\int_{U_x} dQ} = \lim_{U_x \downarrow \{x\}} \frac{\int_{U_x} f(x) dQ}{\int_{U_x} dQ} = f(x). \quad (2.5.12)$$

Vale allora il seguente teorema.

**Teorema 2.5.5** – Siano  $P$  e  $Q$  due misure definite su  $(\Omega, \mathcal{F})$  tali che  $P$  sia assolutamente continua rispetto a  $Q$ . Esiste allora la derivata di Radon-Nikodym continua in  $x$  e si ha

$$\ell_x(P, Q) = \frac{dP}{dQ}(x) = f(x). \quad (2.5.13)$$

Si ricordi che vale la regola della composizione delle derivate di Radon-Nikodym: se  $P \ll Q$  e  $Q \ll m$  (da cui  $(P \ll m)$ ), allora

$$\frac{dP}{dm}(x) = \frac{dP}{dQ}(x) \frac{dQ}{dm}(x). \quad (2.5.14)$$

Ne consegue che presa una misura  $m$  (non necessariamente  $m \in \mathcal{P}$ ) rispetto alla quale le misure della famiglia  $\mathcal{P}$  siano assolutamente continue, si ha

$$\frac{dP}{dm}(x) = \ell_x(P, Q) \frac{dQ}{dm}(x), \quad (2.5.15)$$

e quindi

$$\ell_x(P, Q) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{dP}{dm}(x) \geq \frac{dQ}{dm}(x) \quad (2.5.16)$$

ed infine

$$P \stackrel{x}{>} Q \Leftrightarrow \frac{dP}{dm}(x) \geq \frac{dQ}{dm}(x). \quad (2.5.17)$$

Si ha allora il seguente teorema.

**Teorema 2.5.6** – *Siano dati il modello statistico  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  ed una osservazione  $x \in \Omega$  tali che:*

i) *esiste una misura  $m$  su  $(\Omega, \mathcal{F})$  tale che  $\forall P \in \mathcal{P}$*

$$P \ll m \quad (2.5.18)$$

ii)  *$\frac{dP}{dm}$  è continua in  $x \in \Omega$ ,  $\forall P \in \mathcal{P}$*

iii) *esiste almeno una misura  $\bar{P}$  tale che*

$$\frac{d\bar{P}}{dm}(x) > 0. \quad (2.5.19)$$

Allora è ben definito il funzionale  $\mathcal{L}_x : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}^+$  (funzionale di verosimiglianza) dato da:

$$\mathcal{L}_x(P) \triangleq \ell_x(P, m) = \frac{dP}{dm}(x) \quad (2.5.20)$$

che gode della proprietà che

$$\mathcal{L}_x(\tilde{P}) \geq \mathcal{L}_x(P), \quad \forall P \in \mathcal{P} \quad (2.5.21)$$

se e solo se  $\tilde{P}$  è la stima di massima verosimiglianza data l'osservazione  $x$ . ■

Si può quindi affermare che determinare la stima di massima verosimiglianza equivale a determinare la  $P \in \mathcal{P}$  la cui derivata di Radon-Nikodym rispetto ad una misura  $m$ , calcolata nell'osservazione  $x$ , sia massima.

Quando  $\mathcal{P}$  è parametrizzata da un vettore  $\vartheta \in \Theta$  si ha

$$\frac{dP_\vartheta}{dm}(x) = f(x, \vartheta) \quad (2.5.22)$$

cioè la derivata di Radon-Nikodym è una funzione del parametro  $\vartheta$ . La stima di massima verosimiglianza sarà quindi il massimo di tale funzione, calcolato rispetto a  $\vartheta$ . A questo punto è importante sottolineare come ogni problema di identificazione parametrica di un sistema dinamico sia riconducibile al problema di determinare i valori del parametro che rendono massimo (ottimizzano) il funzionale di verosimiglianza. È allora evidente l'importanza che assumono le tecniche dell'ottimizzazione numerica nella risoluzione dei problemi di stima.

È utile sottolineare che la misura  $m$  che viene scelta per il calcolo operativo del funzionale di verosimiglianza  $\mathcal{L}_x(P)$  è completamente arbitraria (a patto che  $P \ll m \forall P \in \mathcal{P}$ ). In particolare può essere  $m \notin \mathcal{P}$  ed anche  $m(\Omega) = \infty$ .

Un caso notevole e molto frequente nelle applicazioni è quello in cui  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ,  $m$  è l'usuale misura di Lebesgue  $\lambda$  su  $\mathbb{R}^n$ , e  $\mathcal{P}$  è una famiglia di misure di probabilità sulla  $\sigma$ -algebra di Borel di  $\mathbb{R}^n$  assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$ . Con queste ipotesi la derivata di Radon-Nikodym vale

$$\mathcal{L}_x(P) = \frac{dP}{d\lambda}(x) = \frac{\partial^n F_P}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}(x), \quad P \in \mathcal{P}, \quad (2.5.23)$$

dove  $F_P$  è la funzione di distribuzione corrispondente a  $P$ . Quindi la derivata di Radon-Nikodym coincide con la densità di probabilità  $p_X(x, P)$  relativa alla misura di probabilità  $P$ . Se inoltre la famiglia  $\mathcal{P}$  di misure di probabilità è parametrizzata in  $\vartheta$ , si avrà

$$\frac{dP_\vartheta}{d\lambda}(x) = p_X(x; \vartheta). \quad (2.5.24)$$

Nel seguito si indicherà con  $E_\vartheta(\cdot)$  il valore sperato calcolato considerando la densità di probabilità (2.5.24), che sarà funzione del vettore di parametri  $\vartheta$ . Ad esempio, supposto  $x \in \mathbb{R}^n$ , presa una funzione borelliana  $f(x)$  si ha

$$E_\vartheta\{f(x)\} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)p_X(x; \vartheta) dx = F(\vartheta). \quad (2.5.25)$$

## 2.6 Teorema di Cramer-Rao

L'obbiettivo di questo paragrafo e del successivo è quello di stabilire dei criteri oggettivi che consentano di valutare la “bontà” di una stima, permettendo quindi il confronto tra stime diverse. Si osservi innanzitutto che essendo una stima una funzione delle osservazioni, che sono variabili aleatorie, è essa stessa una variabile aleatoria, e quindi se ne può giudicare la bontà per mezzo di parametri statistici quali il valore atteso e la covarianza.

C'è la necessità di stabilire preliminarmente il seguente lemma:

**Lemma 2.6.1** – *Dati comunque due vettori aleatori  $X$  e  $Y$ , con  $E\{YY^T\}$  invertibile, vale la seguente disuguaglianza*

$$E\{XX^T\} - E\{XY^T\}\left(E\{YY^T\}\right)^{-1}E\{YX^T\} \geq 0 \quad ((2.6.1))$$

**Dimostrazione** – È sufficiente constatare che per qualunque valore della matrice  $K$  si ha

$$E\{(X - KY)(X - KY)^T\} \geq 0. \quad (2.6.2)$$

Sviluppando i prodotti ed il valore atteso si ha ancora

$$E\{XX^T\} - KE\{YX^T\} - E\{XY^T\}K^T + KE\{YY^T\}K^T \geq 0, \quad \forall K. \quad (2.6.3)$$

In particolare si può porre per  $K$  un valore che annulli la somma degli ultimi due termini

$$\begin{aligned} -E\{XY^T\}K^{*T} + K^*E\{YY^T\}K^{*T} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow K^* &= E\{XY^T\}(E\{YY^T\})^{-1}. \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

Si ha quindi

$$E\{XX^T\} - K^*E\{YX^T\} \geq 0, \quad (2.6.5)$$

e sostituendo l'espressione di  $K^*$  si ha la tesi. ■

Nel seguito, per brevità, il gradiente di una funzione di  $\vartheta$ , cioè il vettore delle derivate parziali  $\partial F(\vartheta)/\partial \vartheta$ , verrà indicato con  $\nabla_\vartheta$ . Anche se in molti testi il gradiente di una funzione scalare viene considerato un vettore colonna, in questa sezione del testo esso verrà interpretato come un vettore riga. Con questa convenzione, nel caso in cui  $F(\vartheta)$  sia una funzione vettoriale (vettore colonna), la derivata  $\nabla_\vartheta F(\vartheta)$  risulta ben definita come la matrice le cui righe sono i gradienti delle componenti di  $F(\vartheta)$ .  $\nabla_\vartheta F(\vartheta)$  prende anche il nome di matrice jacobiana di  $F(\vartheta)$ .

**Teorema 2.6.2 – (Cramer-Rao)** *Considerata una qualsiasi stima  $\tilde{\vartheta} = f(z)$  del parametro  $\vartheta$ , la quantità*

$$R(\vartheta) = E_\vartheta[(f(z) - \vartheta)(f(z) - \vartheta)^T] \quad (2.6.7)$$

*verifica la seguente disuguaglianza*

$$R(\vartheta) \geq (I + \nabla_\vartheta b(\vartheta))\Lambda^{-1}(\vartheta)(I + \nabla_\vartheta b(\vartheta))^T \quad (2.6.6)$$

dove

$$\Lambda(\vartheta) = E_\vartheta\{[\nabla_\vartheta \log p_Z(z; \vartheta)]^T [\nabla_\vartheta \log p_Z(z; \vartheta)]\}, \quad (2.6.8)$$

$$b(\vartheta) = E_{\vartheta}\{f(z) - \vartheta\}. \quad (2.6.9)$$

**Osservazione 2.6.3** – La  $R(\vartheta)$  è la covarianza dell'errore di stima e la quantità a secondo membro nella (2.6.6) è detta **limite inferiore di Cramer-Rao**,  $b(\vartheta)$  è detta **polarizzazione della stima** (in inglese **bias**), la matrice  $\Lambda(\vartheta)$  è detta **matrice di informazione di Fisher**.  $\triangle$

**Dimostrazione** – Poiché

$$\int_{\mathbb{R}^m} p_Z(z; \vartheta) \, dz = 1 \quad (2.6.10)$$

si ha che il gradiente

$$\nabla_{\vartheta} \int_{\mathbb{R}^m} p_Z(z; \vartheta) \, dz \quad (2.6.11)$$

è un vettore nullo. Sotto condizioni di regolarità che sono sempre soddisfatte per le distribuzioni che si prenderanno in considerazione in questo ambito, segue

$$\int_{\mathbb{R}^m} \nabla_{\vartheta} p_Z(z; \vartheta) \, dz = 0 \quad (2.6.12)$$

Poiché

$$\nabla_{\vartheta} p_Z(z; \vartheta) = [\nabla_{\vartheta} \log p_Z(z; \vartheta)] p_Z(z; \vartheta) \quad (2.6.13)$$

si ha

$$\int_{\mathbb{R}^m} [\nabla_{\vartheta} \log p_Z(z; \vartheta)] p_Z(z; \vartheta) \, dz = 0. \quad (2.6.14)$$

Premoltiplicando per il vettore colonna  $\vartheta$  si ha la matrice

$$\int_{\mathbb{R}^m} \vartheta [\nabla_{\vartheta} \log p_Z(z; \vartheta)] p_Z(z; \vartheta) \, dz = 0 \quad (2.6.15)$$

che equivale a scrivere

$$E_{\vartheta}\{\vartheta [\nabla_{\vartheta} \log p_Z(z; \vartheta)]\} = 0. \quad (2.6.16)$$

Dalla definizione (2.6.9) della polarizzazione si ha

$$\nabla_{\vartheta} E_{\vartheta}\{f(z)\} = \nabla_{\vartheta}[\vartheta + b(\vartheta)] = I + \nabla_{\vartheta} b(\vartheta). \quad (2.6.17)$$

Derivando la (2.5.25) invece si ha

$$\begin{aligned} \nabla_{\vartheta} E_{\vartheta}\{f(z)\} &= \int_{\mathbb{R}^m} f(z) \nabla_{\vartheta} \log p_Z(z; \vartheta) p_Z(z; \vartheta) \, dz = \\ &= E_{\vartheta}\{f(z) \nabla_{\vartheta} \log p_Z(z; \vartheta)\} \end{aligned} \quad (2.6.18)$$

che, dalla (2.6.16), si può anche scrivere

$$\nabla_{\vartheta} E_{\vartheta}\{f(z)\} = E_{\vartheta}\{[f(z) - \vartheta] \nabla_{\vartheta} \log p_Z(z; \vartheta)\} \quad (2.6.19)$$

e quindi, eguagliando la (2.6.17) e la (2.6.19), si ha

$$I + \nabla_{\vartheta} b(\vartheta) = E_{\vartheta}\{[f(z) - \vartheta] \nabla_{\vartheta} \log p_Z(z; \vartheta)\} \quad (2.6.20)$$

Si ponga adesso

$$X = f(z) - \vartheta \quad (2.6.21a),$$

$$Y = [\nabla_{\vartheta} \log p(z; \vartheta)]^T. \quad (2.6.21b)$$

La disuguaglianza di Cramer-Rao è una diretta conseguenza della proprietà ((2.6.1)), riscritta nella forma

$$E_{\vartheta}\{X X^T\} \geq E_{\vartheta}\{X Y^T\} \left( E_{\vartheta}\{Y Y^T\} \right)^{-1} E_{\vartheta}\{Y X^T\}$$

ed effettuando le sostituzioni (2.6.21). Infatti è facile verificare che

$$E_{\vartheta}\{Y Y^T\} = \Lambda(\vartheta), \quad (2.6.22)$$

mentre dalla (2.6.20) si ha

$$E_{\vartheta}\{XY^T\} = I + \nabla_{\vartheta}b(\vartheta). \quad (2.6.23)$$

Resta così dimostrato il teorema. ■

## 2.7 Proprietà di una stima

**Definizione 2.7.1** – Una stima è detta *efficiente* se essa è tale che

$$R(\vartheta) = (I + \nabla_{\vartheta}b(\vartheta))\Lambda^{-1}(\vartheta)(I + \nabla_{\vartheta}b(\vartheta))^T \quad (2.7.1)$$

per ogni  $\vartheta$  ammissibile. •

**Definizione 2.7.2** – Una stima  $\tilde{\vartheta} = f(z)$  si dice **centrata** se, per ogni  $\vartheta$  ammissibile, la polarizzazione è nulla, cioè

$$E_{\vartheta}\{f(z)\} = \vartheta. \quad (2.7.2)$$

Una stima non centrata si dirà **polarizzata**.

**Corollario 2.7.3** – Condizione necessaria affinché una stima sia efficiente è che essa sia centrata.

**Dimostrazione** – Mantenendo le notazioni (2.6.21), si osservi che se una stima è efficiente per definizione accade che

$$E_{\vartheta}\{XX^T\} - E_{\vartheta}\{XY^T\}[E_{\vartheta}(YY^T)]^{-1}E_{\vartheta}\{YX^T\} = 0 \quad (2.7.3)$$

e quindi con la scelta  $K^* = E_{\vartheta}\{XY^T\}[E_{\vartheta}(YY^T)]^{-1}$  si ha

$$E_{\vartheta}\{(X - K^*Y)(X - K^*Y)^T\} = 0 \quad (2.7.4)$$

Poiché il prodotto di una matrice per la sua trasposta dà sempre una matrice semidefinita positiva, affinché valga la relazione (2.7.4) deve accadere che

$$X - K^*Y = 0, \Rightarrow X = K^*Y \quad (2.7.5)$$

Effettuando le debite sostituzioni per  $X$  e per  $K^*$  si ottiene

$$f(z) - \vartheta = E_{\vartheta}\{XY^T\}[E_{\vartheta}(YY^T)]^{-1}Y \quad (2.7.6)$$

Calcolando il valore sperato di entrambi i membri si ha

$$E_{\vartheta}\{f(z) - \vartheta\} = E_{\vartheta}\{XY^T\}[E_{\vartheta}(YY^T)]^{-1}E_{\vartheta}\{Y\} \quad (2.7.7)$$

Tenendo conto delle (2.6.14) e (2.6.21), si ha che  $E_{\vartheta}\{Y\} = 0$  e poiché  $\vartheta$  è un parametro e non una variabile aleatoria, sarà

$$E_{\vartheta}\{f(z)\} - \vartheta = 0, \Rightarrow E_{\vartheta}\{f(z)\} = \vartheta, \quad (2.7.8)$$

e quindi la tesi. ■

In molti problemi applicativi il vettore delle osservazioni si arricchisce di componenti all'aumentare di un indice  $N$ . Da una buona stima ci si aspetta che essa divenga più accurata al crescere delle informazioni e che al limite tenda, secondo qualche criterio, al valore vero. Per esprimere in modo formale queste proprietà è utile dare la definizione di **consistenza** di una sequenza di stime.

**Definizione 2.7.4** – Una sequenza di stime  $\{\tilde{\vartheta}_N\}$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , del parametro  $\vartheta$  è detta **consistente** se  $\tilde{\vartheta}_N = f_N(z)$  converge a  $\vartheta$  in probabilità secondo la misura di probabilità  $P_{\vartheta}$

$$\tilde{\vartheta}_N \xrightarrow{P_{\vartheta}} \vartheta. \quad (2.7.9)$$

Si ricordi che con la notazione (2.7.9) si intende che per ogni  $\vartheta \in \Theta$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\vartheta}\{z \in \mathbb{R}^m : \|f_N(z) - \vartheta\| > \varepsilon\} = 0. \quad (2.7.10)$$

Nelle applicazioni il pedice  $N$  può essere un indice temporale o un indice che denota una discretizzazione di un problema



continuo. Nel primo caso  $N \rightarrow \infty$  corrisponde all'avanzare del tempo fino ad  $\infty$ , nel secondo caso corrisponde all'infittimento della discretizzazione fino ad intervalli infinitesimi. Un esempio della prima classe di problemi verrà svolto nel capitolo successivo, che tratta dell'identificazione parametrica di sistemi lineari tempo-continuo con osservazioni tempo-discreto. Come esempio della seconda classe di problemi si pensi al caso in cui la variabile aleatoria  $z$  non assume valori in  $\mathbb{R}^m$  ma in uno spazio di funzioni, come ad esempio lo spazio delle funzioni continue nell'intervallo  $[0, L]$ , indicato con  $\mathcal{C}^0[0, L]$  (l'intervallo  $[0, L]$  può essere un intervallo spaziale, temporale o altro). In questo caso si dice che  $z$  è un processo aleatorio (la teoria dei processi aleatori sarà svolta in modo rigoroso più avanti nel testo). Si ha quindi che  $z(\omega, s) \in \mathbb{R}$ , con  $\omega \in \Omega$  e  $s \in [0, L]$ , e quindi un'osservazione  $z$ , essendo una funzione in  $[0, L]$ , è composta da infiniti valori. La stima di  $\vartheta$  può essere ottenuta sfruttando solo un numero finito  $N$  di valori che  $z$  assume nell'intervallo  $[0, L]$ . Ad esempio, si può considerare il vettore  $z_N \in \mathbb{R}^N$ , la cui  $i$ -esima componente è pari a  $z_N(i) = z((i-1)\Delta)$ , con passo  $\Delta = L/(N-1)$ . In questo caso  $\tilde{\vartheta}_N$  può essere la stima di  $\vartheta$  basata su  $z_N$ . È intuitivo quindi che la consistenza è una proprietà desiderabile in quanto assicura, all'infittirsi della discretizzazione dell'intervallo  $[0, L]$ , la convergenza della stima al valore vero.

## 2.8 Esempi

**Esempio 2.8.1** – Si consideri il problema della stima del valor medio  $m$  e della covarianza  $\sigma^2$  di una variabile aleatoria gaussiana, a partire da un numero  $N$  di esperimenti  $z_i$ , con  $i = 1, \dots, N$ , che per ipotesi sono tra loro indipendenti. Il vettore dei parametri sia  $\vartheta = [m \ \sigma]^T$ . La densità di probabilità di ciascun campione è data da

$$p_{Z_i}(z_i; \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\vartheta_2} e^{-(z_i - \vartheta_1)^2 / 2\vartheta_2^2} \quad i = 1, \dots, N \quad (2.8.1)$$

e quindi, in virtù dell'indipendenza degli esperimenti, il funzionale di verosimiglianza è dato da

$$\begin{aligned} p_Z(z; \vartheta) &= \prod_{i=1}^N p_{Z_i}(z_i; \vartheta) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \vartheta_2^N} e^{-\frac{1}{2\vartheta_2^2} \sum_{i=1}^N (z_i - \vartheta_1)^2}. \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

Per trovare il massimo rispetto a  $\vartheta$  si annullano le derivate prime rispetto a  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ . In questo caso è più semplice massimizzare  $\log p_Z(z; \vartheta)$ . Si osservi che il risultato non cambia in quanto

$$\frac{d}{dx} \log f(x) = \frac{1}{f(x)} \frac{d}{dx} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} f(x) = 0. \quad (2.8.3)$$

Il logaritmo della Gaussiana è

$$\log p_Z(z; \vartheta) = -N \log \vartheta_2 - \frac{1}{2\vartheta_2^2} \sum_{i=1}^N (z_i - \vartheta_1)^2 \quad (2.8.4)$$

e annullando le sue derivate si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta_1} (\log p_Z(z; \vartheta)) \Big|_{\hat{\vartheta}} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2\hat{\vartheta}_2^2} \sum_{i=1}^N 2(z_i - \hat{\vartheta}_1) = 0 \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^N (z_i - \hat{\vartheta}_1) = 0 &\Rightarrow \left( \sum_{i=1}^N z_i \right) - N\hat{\vartheta}_1 = 0 \Rightarrow \\ \hat{\vartheta}_1 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i = \hat{m} \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta_2} (\log p_Z(z; \vartheta)) \Big|_{\hat{\vartheta}} = 0 &\Rightarrow -\frac{N}{\hat{\vartheta}_2} + \frac{1}{\hat{\vartheta}_2^3} \sum_{i=1}^N (z_i - \hat{\vartheta}_1)^2 = 0 \\ \Rightarrow \hat{\vartheta}_2^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_i - \hat{\vartheta}_1)^2 = \hat{\sigma}^2. \end{aligned} \quad (2.8.6)$$

Si può notare che, come è lecito aspettarsi,  $\hat{\vartheta}_1$  e  $\hat{\vartheta}_2$  sono funzioni dell'osservazione  $z$  della v.a. vettoriale  $Z$ . Riassumendo, le stime del valor medio  $m$  e della varianza  $\sigma^2$  della variabile aleatoria gaussiana possono essere scritte in funzione del vettore  $z$  dei risultati degli esperimenti come

$$\begin{aligned}\hat{m}(z) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i, \\ \hat{\sigma}^2(z) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_i - \hat{m}(z))^2.\end{aligned}\tag{2.8.7}$$

È facile verificare la stima del valor medio  $\hat{m}(z)$  è una stima centrata, e cioè tale da verificare l'identità  $E\{\hat{m}(z)\} = m$ . È appena un po' più difficile verificare che invece la stima della varianza  $\hat{\sigma}^2(z)$  **non** è centrata. Infatti

$$E\{\hat{\sigma}^2(z)\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\left\{\left(z_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N z_j\right)^2\right\}\tag{2.8.8}$$

che può essere riscritta come

$$E\{\hat{\sigma}^2(z)\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\left\{\left((z_i - m) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (z_j - m)\right)^2\right\}\tag{2.8.9}$$

e quindi

$$\begin{aligned}E\{\hat{\sigma}^2(z)\} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( E\{(z_i - m)^2\} + \frac{1}{N^2} E\left\{\left(\sum_{j=1}^N (z_j - m)\right)^2\right\} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{N} E\{(z_i - m) \sum_{j=1}^N (z_j - m)\} \right).\end{aligned}\tag{2.8.10}$$

Poiché per ipotesi gli  $N$  esperimenti sono indipendenti, e quindi per  $i \neq j$  risulta  $E\{(z_i - m)(z_j - m)\} = 0$ , si ha

$$E\{\hat{\sigma}^2(z)\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \sigma^2 + \frac{1}{N^2} N \sigma^2 - \frac{2}{N} \sigma^2 \right),\tag{2.8.11}$$

e in definitiva

$$E\{\hat{\sigma}^2(z)\} = \frac{N-1}{N} \sigma^2 \neq \sigma^2.\tag{2.8.12}$$

Si ha pertanto che la stima di massima verosimiglianza, in questa applicazione, non è centrata. Dalla (2.8.12) risulta evidente che una stima centrata per la varianza della variabile aleatoria è data da

$$\tilde{\sigma}^2(z) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (z_i - \hat{m}(z))^2,\tag{2.8.13}$$

che è pari a  $\frac{N}{N-1} \hat{\sigma}^2(z)$ . ■

Si vuole ora ritornare sul problema della soluzione approssimata di equazioni lineari algebriche che non ammettono soluzione esatta, introdotto all'inizio del capitolo.

**Esempio 2.8.2** – Si consideri nuovamente il sistema (2.1.13), in cui il rumore  $N$  è un vettore aleatorio gaussiano con media nulla e covarianza  $\Psi_N$ , e il vettore  $X$  sia deterministico ed incognito, per cui si preferisce indicarlo con la lettera minuscola  $x$

$$Y(\omega) = Ax + N(\omega).\tag{2.8.14}$$

Il vettore  $Y$  sarà quindi un vettore aleatorio gaussiano di media e covarianza, rispettivamente,

$$\begin{aligned}m_Y &= E\{Ax + N\} = Ax, \\ \Psi_Y &= E\{(Y - Ax)(Y - Ax)^T\} = \Psi_N.\end{aligned}\tag{2.8.15}$$

La densità di probabilità del vettore  $Y$  è quindi nota a meno del vettore  $x$ , che gioca così il ruolo del vettore di parametri  $\vartheta$  nella

famiglia di misure di probabilità di cui si è discusso nella sezione sul criterio della massima verosimiglianza. Secondo questo criterio il valore più verosimile per il vettore di parametri è quello che rende massima la probabilità che il risultato della variabile aleatoria  $Y$  sia proprio pari al valore osservato  $y$ . Ne risulta che il calcolo della stima di massima verosimiglianza del vettore  $x$  si ottiene massimizzando la densità

$$p_Y(y; x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\Psi_N|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y - Ax)^T \Psi_N^{-1} (y - Ax)\right), \quad (2.8.16)$$

ovvero minimizzando la forma quadratica

$$\frac{1}{2}(y - Ax)^T \Psi_N^{-1} (y - Ax), \quad \text{per } x \in \mathbb{R}^r. \quad (2.8.17)$$

Annullando il gradiente  $\nabla_x$  della forma quadratica si ha

$$-(y - Ax)^T \Psi_N^{-1} A \Big|_{\hat{x}} = 0 \quad (2.8.18)$$

da cui, se la matrice  $A$  ha colonne indipendenti, si ottiene

$$\hat{x} = (A^T \Psi_N^{-1} A)^{-1} A^T \Psi_N^{-1} y. \quad (2.8.19)$$

Si osservi che la matrice che risolve il problema è la pseudoinversa della matrice  $A$  pesata con l'inverso della covarianza del rumore, ovvero la stima di massima verosimiglianza coincide con la soluzione deterministica (2.1.5) in cui si abbia  $W = \Psi_N^{-1}$ . Definendo quindi

$$A_{\Psi_N}^\dagger = (A^T \Psi_N^{-1} A)^{-1} A^T \Psi_N^{-1}, \quad (2.8.20)$$

si ha

$$\hat{x} = A_{\Psi_N}^\dagger y. \quad (2.8.21)$$

Una proprietà fondamentale della pseudoinversa (2.8.21) di  $A$  è che

$$A_{\Psi_N}^\dagger A = I. \quad (2.8.22)$$

Ciò consente di dimostrare che la stima (2.8.21) è centrata

$$E\{\hat{x}\} = E\{A_{\Psi_N}^\dagger y\} = A_{\Psi_N}^\dagger E\{y\} = A_{\Psi_N}^\dagger Ax = x. \quad (2.8.23)$$

Grazie alla stessa proprietà è possibile riscrivere l'errore di stima  $\hat{x} - x$  come  $A_{\Psi_N}^\dagger (y - Ax)$ . La covarianza dell'errore di stima allora sarà pari a

$$\begin{aligned} E\{(\hat{x} - x)(\hat{x} - x)^T\} &= E\{A_{\Psi_N}^\dagger (y - Ax)(y - Ax)^T (A_{\Psi_N}^\dagger)^T\} = \\ &= (A^T \Psi_N^{-1} A)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.8.24)$$

In questa applicazione, in cui la stima è centrata, il limite inferiore della covarianza dell'errore di stima è pari all'inversa della matrice di informazione di Fisher

$$\Lambda(\vartheta) = E_\vartheta\{[\nabla_\vartheta \log p_Y(y; \vartheta)]^T [\nabla_\vartheta \log p_Y(y; \vartheta)]\}. \quad (2.8.25)$$

Nel nostro caso  $\vartheta = x$ , e  $[\nabla_\vartheta \log p_Y(y; \vartheta)]^T$  è pari a

$$A^T \Psi_N^{-1} (y - Ax), \quad (2.8.26)$$

e quindi la matrice di Fisher risulta essere

$$\Lambda(x) = E\{A^T \Psi_N^{-1} (y - Ax)(y - Ax)^T \Psi_N^{-1} A\} = A^T \Psi_N^{-1} A. \quad (2.8.27)$$

Si ha quindi il notevole risultato che la stima di massima verosimiglianza in questo esempio è *efficiente* in quanto la covarianza dell'errore di stima è esattamente pari a  $\Lambda(x)^{-1}$ .

In alcune applicazioni non è interessante disporre di  $\hat{x}$ , ma è richiesta l'osservazione filtrata  $\hat{y}$ , che nel nostro caso è pari a

$$\hat{y} = A\hat{x} = AA_{\Psi_N}^\dagger y. \quad (2.8.28)$$

Una proprietà della stima (2.8.21) è che l'errore  $y - \hat{y}$  tra l'osservazione e l'osservazione filtrata è ortogonale all'immagine della matrice  $A$ , secondo il prodotto scalare definito come

$$\langle y_1, y_2 \rangle \triangleq y_1^T \Psi_N^{-1} y_2. \quad (2.8.29)$$

Infatti,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^r$  si ha

$$\langle A\alpha, y - AA_{\Psi_N}^\dagger y \rangle = \alpha^T A^T \Psi_N^{-1} (I - AA_{\Psi_N}^\dagger) y = 0, \quad (2.8.30)$$

in quanto è facile verificare che  $A^T \Psi_N^{-1} AA_{\Psi_N}^\dagger = A^T \Psi_N^{-1}$ . Ne consegue che  $\hat{y}$  è la proiezione ortogonale di  $y$  nello spazio immagine di  $A$ .  $\triangle$

**Esempio 2.8.3** – Si consideri il problema di stimare una quantità scalare costante  $\vartheta$  a partire da  $m$  misure indipendenti. Ciascuna misura, indicata con  $y_i$  è affetta da un rumore additivo  $n_i$  che si suppone essere gaussiano di media nulla e varianza nota  $\sigma_{N_i}^2$

$$\begin{aligned} y_i &= \vartheta + n_i, \\ E\{n_i\} &= 0, \quad E\{n_i^2\} = \sigma_{N_i}^2, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.8.31)$$

Riunendo le misure  $y_i$  in un vettore  $Y$  e i rumori  $n_i$  in un vettore  $N$  è possibile riscrivere le (2.8.31) nel formato matriciale (2.8.14), in cui l'incognita  $x$  è lo scalare  $\vartheta$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \vartheta + N, \quad \Psi_N = \text{diag}\{\sigma_{N_i}^2\}. \quad (2.8.32)$$

Problemi di questo tipo sono stati risolti nell'esempio 2.8.2, con la formula (2.8.21) che, particolarizzata al caso (2.8.32) in cui la matrice  $A$  è un vettore di 1 ed in cui  $\Psi_N^{-1} = \text{diag}\{1/(\sigma_{N_i}^2)\}$ , fornisce la soluzione

$$\hat{\vartheta} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{y_i}{\sigma_{N_i}^2}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{N_i}^2}}. \quad (2.8.33)$$

Nel caso in cui non si abbiano informazioni a priori sulla statistica del rumore di misura si sarebbe dovuti ricorrere alla stima

deterministica, minimizzando la somma dei quadrati degli errori di misura

$$\min_{\vartheta} \sum_{i=1}^m (y_i - \vartheta)^2. \quad (2.8.34)$$

Eguagliando a zero la derivata rispetto a  $\vartheta$  e risolvendo si ha la soluzione

$$\tilde{\vartheta} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i. \quad (2.8.34)$$

Quest'ultima costituisce la **stima ai minimi quadrati** del parametro  $\vartheta$ . La (2.8.33) invece fornisce il minimo della funzione

$$\min_{\vartheta} \sum_{i=1}^m \frac{(y_i - \vartheta)^2}{\sigma_{N_i}^2}, \quad (2.8.35)$$

e pertanto costituisce la soluzione ai minimi quadrati degli errori pesati secondo le inverse delle rispettive varianze. Una stima di questo tipo viene detta **stima di Markov**.

È facile verificare che la stima di Markov coincide con la stima ai minimi quadrati quando i rumori sulle misure, oltre ad essere indipendenti, hanno tutti la stessa varianza.

Sia la stima di Markov che la stima ai minimi quadrati sono stime centrate. Ciò può essere verificato sviluppando direttamente il calcolo di  $E\{\hat{\vartheta}\}$  e di  $E\{\tilde{\vartheta}\}$ , ricordando che  $E\{y_i\} = \vartheta$ .

Passando al calcolo della varianza dell'errore di stima, per la stima di Markov si cominci con l'osservare che l'errore può essere scritto come

$$\vartheta - \hat{\vartheta} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{N_i}^2} \vartheta - \sum_{i=1}^m \frac{y_i}{\sigma_{N_i}^2}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{N_i}^2}} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{(\vartheta - y_i)}{\sigma_{N_i}^2}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{N_i}^2}}. \quad (2.8.36)$$

Ricordando che per ipotesi i rumori di misura  $n_i = \vartheta - y_i$  sono indipendenti si ha che la varianza dell'errore di stima è pari a

$$\sigma_{\vartheta}^2 = E\{(\vartheta - \hat{\vartheta})^2\} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{E\{(\vartheta - y_i)^2\}}{\sigma_{N_i}^4}}{\left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{N_i}^2}\right)^2} \quad (2.8.37)$$

e quindi

$$\sigma_{\vartheta}^2 = \frac{1}{\frac{m}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{N_i}^2}}}, \quad (2.8.38)$$

che è precisamente la media *armonica* delle varianze delle singole misure diviso per il numero di misure  $m$ . Per quanto riguarda la stima ai minimi quadrati è più semplice il calcolo della varianza dell'errore di stima che fornisce

$$\sigma_{\vartheta}^2 = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \sigma_{N_i}^2, \quad (2.8.39)$$

che è la media *aritmetica* delle varianze delle singole misure diviso  $m$ .

Poiché è noto che la media armonica di  $m$  numeri è minore o uguale alla media aritmetica, risulta che la varianza dell'errore per la stima di Markov è minore o uguale alla varianza dell'errore per la stima ai minimi quadrati. D'altro canto ci si aspettava questo risultato in quanto essendo la stima di Markov efficiente, secondo quanto sviluppato nell'esempio 2.8.2, la sua varianza dell'errore deve per forza risultare minore o uguale a quella ottenuta mediante qualsiasi altra stima.

**Esempio 2.8.4** – Un altro problema del tipo (2.8.14) è quello riportato nell'esempio 2.1.1. Si supponga dapprima che le misure di

corrente non siano affette da rumore, mentre sia nota la covarianza del rumore sulle misure di tensione. Si ha cioè

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_m \end{bmatrix}, \quad \Psi_N = \text{diag}\{\sigma_{N_k}^2\}. \quad (2.8.40)$$

Nell'ipotesi che il rumore sia gaussiano si può utilizzare la (2.8.21) per calcolare la stima di massima verosimiglianza

$$\hat{R} = \frac{\sum_{k=1}^m \frac{i_k v_k}{\sigma_{N_k}^2}}{\sum_{k=1}^m \frac{i_k^2}{\sigma_{N_k}^2}}. \quad (2.8.41)$$

Se le misure hanno tutte la stessa varianza si riottiene il risultato calcolato nell'esempio 2.1.1.

Se si assume che siano le misure di tensione ad essere esenti da rumore il problema lo si scrive

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}, \quad \Psi_H = \text{diag}\{\sigma_{H_k}^2\} \quad (2.8.42)$$

in cui  $Y$  è l'ammettenza che deve essere stimata. La soluzione sarà data da

$$\hat{Y} = \frac{\sum_{k=1}^m \frac{i_k v_k}{\sigma_{H_k}^2}}{\sum_{k=1}^m \frac{v_k^2}{\sigma_{H_k}^2}}. \quad (2.8.43)$$

Nel caso in cui i rumori di misura abbiano tutti la stessa varianza si ha

$$\hat{Y} = \frac{\sum_{k=1}^m i_k v_k}{\sum_{k=1}^m v_k^2}. \quad (2.8.44)$$

È interessante osservare che, sempre nell'ipotesi in cui tutti i rumori di misura abbiano la stessa varianza, si ha

$$\widehat{R}\widehat{Y} \leq 1. \quad (2.8.45)$$

Infatti in questo caso chiamando con  $V$  il vettore delle tensioni e con  $I$  il vettore delle correnti, le soluzioni di massima verosimiglianza per  $\widehat{R}$  e  $\widehat{Y}$  possono essere scritte come

$$\widehat{R} = \frac{V^T I}{I^T I} \quad \text{e} \quad \widehat{Y} = \frac{V^T I}{V^T V} \quad (2.8.46)$$

e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz risulta

$$\widehat{R}\widehat{Y} = \frac{(V^T I)^2}{(I^T I)(V^T V)} = \frac{\langle V, I \rangle^2}{\langle I, I \rangle \langle V, V \rangle} \leq 1. \quad (2.8.47)$$

**Esempio 2.8.5** – Si consideri nuovamente il sistema (2.1.13) in cui il rumore  $N$  sia ancora un vettore aleatorio gaussiano con media nulla e covarianza  $\Psi_N$ , ma in cui stavolta anche il vettore  $X$  sia un vettore aleatorio a densità gaussiana con media  $m_X$  e covarianza  $\Psi_X$ . Poiché il vettore  $Y$  è una combinazione lineare di variabili aleatorie gaussiane sarà anch'esso gaussiano. Il valore atteso e la covarianza di  $Y$  si calcolano facilmente

$$\begin{aligned} E\{Y\} &= E\{AX + N\} = Am_X, \\ E\{(A(X - m_X) + N)(A(X - m_X) + N)^T\} &= A\Psi_X A^T + \Psi_N, \end{aligned} \quad (2.8.48)$$

in cui si è supposto che  $X$  e  $N$  sono vettori aleatori indipendenti. La covarianza mutua tra  $X$  e  $Y$  è

$$E\{(X - m_X)(Y - Am_X)^T\} = E\{(X - m_X)[A(X - m_X) + N]^T\} = \Psi_X A^T. \quad (2.8.49)$$

Si ha quindi che il vettore aleatorio  $Z = [X^T \ Y^T]^T$  è gaussiano con media e covarianza dati da

$$E\{Z\} = \begin{bmatrix} m_X \\ Am_X \end{bmatrix}, \quad \Psi_Z = \begin{bmatrix} \Psi_X & \Psi_X A^T \\ A\Psi_X & A\Psi_X A^T + \Psi_N \end{bmatrix}. \quad (2.8.50)$$

Ne consegue che, nota l'osservazione  $y$  del sottovettore  $Y$ , la migliore stima per il vettore  $x$  è data dalla (2.3.25) (stima di minima varianza), che diventa

$$\hat{x} = m_X + \Psi_X A^T (A\Psi_X A^T + \Psi_N)^{-1} (y - Am_X). \quad (2.8.51)$$

È facile verificare che la soluzione (2.8.51) è anche quel valore di  $x$  che minimizza la funzione quadratica

$$(x - m_X)^T \Psi_X^{-1} (x - m_X) + (y - Ax)^T \Psi_N^{-1} (y - Ax). \quad (2.8.52)$$

(Il lettore può fare la verifica annullando il gradiente della somma delle due forme quadratiche). La stima  $\hat{x}$  è quindi il risultato un compromesso tra due esigenze:

- il vettore  $\hat{x}$  deve essere 'abbastanza vicino' al valore sperato  $m_X$ ,
- il vettore  $A\hat{x}$  deve essere 'abbastanza vicino' a  $y$ .

Si osservi che la stima di massima verosimiglianza è rivolta al soddisfacimento della sola specifica (b). Ciò è dovuto principalmente al fatto che non si hanno informazioni a priori sul vettore  $x$  (come la media e la covarianza).

Si osservi che la matrice che risolve il problema di stima

$$A^\# = \Psi_X A^T (A\Psi_X A^T + \Psi_N)^{-1} \quad (2.8.53)$$

è ottenuta invertendo una matrice di ordine  $m$ , pari cioè alla dimensione del vettore delle osservazioni  $y$ . Poiché molto spesso nelle applicazioni si ha che le osservazioni sono in numero molto maggiore delle variabili incognite, è conveniente utilizzare la seguente forma alternativa per  $A^\#$

$$A^\# = (\Psi_X^{-1} + A^T \Psi_N^{-1} A)^{-1} A^T \Psi_N^{-1} \quad (2.8.54)$$

in cui la matrice da invertire è di ordine  $r$  pari alla dimensione del vettore delle incognite  $x$ .

L'equivalenza delle due espressioni è garantita dal seguente lemma

**Lemma 2.8.6** – Date due matrici quadrate  $P$  e  $Q$  non singolari, e due matrici di dimensioni opportune  $C$  e  $D$  si ha

$$QD(P + CQD)^{-1} = (DP^{-1}C + Q^{-1})^{-1}DP^{-1}. \quad (2.8.55)$$

**Dimostrazione** – Si parta dall'identità

$$QD = Q(DP^{-1}CQ + I)^{-1}(DP^{-1}CQ + I)D, \quad (2.8.56)$$

e si ricordi che  $(AB + I)^{-1} = B^{-1}(A + B^{-1})^{-1}$ . Si ha allora

$$\begin{aligned} QD &= [DP^{-1}C + Q^{-1}]^{-1}D[I + P^{-1}CQD] = \\ &= [DP^{-1}C + Q^{-1}]^{-1}DP^{-1}[P + CQD], \end{aligned} \quad (2.8.57)$$

da cui la tesi.  $\blacksquare$

Si osservi che se la variabile aleatoria  $X$  ha un'elevata covarianza, ovvero se la probabilità di avere  $X(\omega)$  prossimo al valore sperato è piccola, la densità gaussiana tende ad appiattirsi su  $\mathbb{R}^r$ . In particolare per  $\Psi_X \rightarrow \infty$  (in norma) si può dire, in modo informale, che la variabile aleatoria ha distribuzione uniforme su  $\mathbb{R}^r$ . Questo accade, per esempio, quando le informazioni a priori su  $X$  sono molto scarse. In tal caso il vettore  $X$  può essere considerato deterministico ed incognito, e si può calcolarne la stima di massima verosimiglianza. Utilizzando l'espressione (2.8.54) per  $A^\#$  si può osservare che per  $\Psi_X^{-1} \rightarrow 0$  (e cioè per  $\Psi_X \rightarrow \infty$ ) si riottiene la pseudoinversa  $A_{\Psi_N}^\dagger$ , e quindi la stima di minima varianza arriva a coincidere con la stima di massima verosimiglianza.

Per concludere l'esempio è opportuno ricavare dalla (2.3.24), con le opportune sostituzioni, la covarianza dell'errore di stima

$$\Psi_{\hat{X}} = \Psi_X - \Psi_X A^T (A \Psi_X A^T + \Psi_N)^{-1} A \Psi_X, \quad (2.8.58)$$

che può anche essere riscritta come

$$\Psi_{\hat{X}} = (I - A^\# A) \Psi_X. \quad (2.8.59)$$

È interessante anche riscrivere l'espressione della stima di minima varianza nel formato

$$\hat{x} = A^\# y + (I - A^\# A) m_X, \quad (2.8.60)$$

in cui si può notare che il secondo termine della somma non dipende dalle osservazioni ma dalle sole informazioni a priori sul vettore  $X$  e sul legame tra  $X$  e  $Y$ .  $\triangle$

**Esempio 2.8.7** – Si consideri un caso particolare del problema (2.1.13) dell'esempio precedente, e precisamente il caso in cui il rumore  $N$  è assente e la matrice  $A$  ha le righe indipendenti, in modo che qualunque sia il risultato  $y$  della variabile aleatoria  $Y$  esiste sicuramente almeno un vettore  $x$  tale che  $y = Ax$ .

La soluzione a questo problema è semplicemente data dalla (2.8.51) in cui si ponga  $\Psi_N = 0$ , e cioè

$$\hat{x} = m_X + \Psi_X A^T (A \Psi_X A^T)^{-1} (y - A m_X). \quad (2.8.61)$$

La matrice

$$A_{\Psi_X}^\dagger = \Psi_X A^T (A \Psi_X A^T)^{-1} \quad (2.8.62)$$

è la pseudoinversa della matrice  $A$  pesata con la covarianza del vettore  $X$ . Si osservi la differenza che esiste tra la pseudoinversa di una matrice con colonne indipendenti (rettangolare *alta*), quale è la (2.8.20), e la pseudoinversa di una matrice con righe indipendenti (rettangolare *bassa*), quale è la (2.8.62).

Questo tipo di soluzione può essere usata per stimare simultaneamente il vettore  $X$  ed il vettore di rumore  $N$  a partire dalla conoscenza di  $y$  nel problema generale analizzato nell'esempio precedente. A tale scopo è sufficiente trasformare il problema

$$Y = AX + N,$$

$$\begin{aligned} E\{X\} &= m_X, & E\{(X - m_X)(X - m_X)^T\} &= \Psi_X, \\ E\{N\} &= 0, & E\{N \cdot N^T\} &= \Psi_N, & E\{(X - m_X)N^T\} &= 0, \end{aligned} \quad (2.8.63)$$

nel seguente problema

$$Y = S \cdot Z, \quad E\{Z\} = \begin{bmatrix} m_X \\ 0 \end{bmatrix} = m_Z, \quad \Psi_Z = \begin{bmatrix} \Psi_X & 0 \\ 0 & \Psi_N \end{bmatrix}, \quad (2.8.64)$$

in cui evidentemente

$$Z = \begin{bmatrix} X \\ N \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

La stima di minima varianza è data da

$$\hat{z} = m_Z + \Psi_Z S^T (S \Psi_Z S^T)^{-1} (y - S m_Z). \quad (2.8.65)$$

Considerato che

$$S \Psi_Z S^T = A \Psi_X A^T + \Psi_N \quad (2.8.66)$$

suddividendo a blocchi la soluzione  $\hat{z}$  si ha

$$\begin{aligned} \hat{x} &= m_X + \Psi_X A^T (A \Psi_X A^T + \Psi_N)^{-1} (y - A m_X), \\ \hat{n} &= \Psi_N (A \Psi_X A^T + \Psi_N)^{-1} (y - A m_X), \end{aligned} \quad (2.8.67)$$

che è la soluzione cercata. Si vede che  $\hat{x}$  coincide con la soluzione data nell'esempio precedente. È facile verificare inoltre che  $\hat{n}$  è esattamente pari a

$$\hat{n} = y - A \hat{x}. \quad (2.8.68)$$

Infatti

$$\begin{aligned} y - A \hat{x} &= y - A m_X - A \Psi_X A^T (A \Psi_X A^T + \Psi_N)^{-1} (y - A m_X) = \\ &= [I - A \Psi_X A^T (A \Psi_X A^T + \Psi_N)^{-1}] (y - A m_X) = \\ &= [A \Psi_X A^T + \Psi_N - A \Psi_X A^T] (A \Psi_X A^T + \Psi_N)^{-1} (y - A m_X) = \\ &= \Psi_N (A \Psi_X A^T + \Psi_N)^{-1} (y - A m_X) = \hat{n}. \end{aligned} \quad (2.8.69)$$

△

## 2.9 Stima di minima varianza: un calcolo alternativo

Si vuole ora derivare nuovamente l'espressione della stima di minima varianza facendo uso delle densità di probabilità, senza passare per spazi di probabilità astratti  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Dati due vettori aleatori  $X$  e  $Y$ , di cui sia nota la densità di probabilità congiunta

$$p_{X,Y}(x,y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad (2.9.1)$$

il problema della stima di minima varianza consiste nel trovare quella funzione  $\hat{x} = f(y)$  dell'osservazione  $y$  del vettore aleatorio  $Y$ , che renda minimo il valore atteso del quadrato della norma dell'errore di stima  $x - f(y)$ , ovvero che minimizzi il funzionale

$$J(f) = E\{[X - f(Y)]^T [X - f(X)]\}. \quad (2.9.2)$$

La funzione incognita  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  non è sottoposta a vincoli di tipo differenziale (può addirittura essere discontinua) e può essere calcolata senza ricorrere a tecniche dell'analisi funzionale e del calcolo variazionale. Occorre innanzitutto riscrivere il funzionale

$$J(f) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} [x - f(y)]^T [x - f(y)] p_{X,Y}(x,y) dx dy, \quad (2.9.3)$$

ricordando la formula di Bayes  $p_{X,Y}(x,y) = p_{X|Y}(x|y)p_Y(y)$  per ottenere

$$J(f) = \int_{\mathbb{R}^m} p_Y(y) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} [x - f(y)]^T [x - f(y)] p_{X|Y}(x|y) dx \right\} dy. \quad (2.9.4)$$

Dalla (2.9.4) ci si rende conto che per minimizzare la  $J(f)$  occorre e basta minimizzare, per ogni  $y$ , la seguente funzione del vettore  $h \in \mathbb{R}^n$

$$H(y, h) = \int_{\mathbb{R}^n} (x - h)^T (x - h) p_{X|Y}(x|y) dx. \quad (2.9.5)$$



Il vettore  $h_y$  che minimizza la  $H(y, h)$ , per un  $y$  assegnato, costituisce il valore della  $f$  cercata in  $y$ , cioè  $f(y) \triangleq h_y$ . Per calcolare  $h_y$  occorre annullare il gradiente della  $H(y, h)$  per ottenere

$$\left. \frac{\partial H(y, h)}{\partial h} \right|_{h=h_y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} 2(x - h_y)^T p_{X|Y}(x|y) dx = 0, \quad (2.9.6)$$

e quindi, essendo  $h_y$  costante rispetto alla variabile  $x$ , risulta

$$h_y = \int_{\mathbb{R}^n} x p_{X|Y}(x|y) dx, \quad (2.9.7)$$

che è una funzione borelliana del vettore  $y$ , e quindi

$$\hat{x} = f(y) = \int_{\mathbb{R}^n} x p_{X|Y}(x|y) dx, \quad (2.9.8)$$

risultato che coincide con quanto ottenuto nella sezione sulla stima di minima varianza.

## 2.10 Stime subottime: stima polinomiale

Nel corso del capitolo è stato più volte messo in evidenza il fatto che il calcolo esatto della stima di minima varianza, in generale, risulta molto complesso. In questo testo è stato svolto in modo completo l'integrale che porta al calcolo di  $\hat{X} = E\{X|Y\}$  nel solo caso di vettori aleatori  $X$  e  $Y$  gaussiani. In questo caso particolare la stima ottima  $\hat{X}$  risulta essere un polinomio di primo grado nella variabile  $Y$ . Nel caso in cui i vettori aleatori  $X$  e  $Y$  non siano gaussiani la stima  $\hat{X}$  risulta essere una funzione di  $Y$  che, a meno di altri pochi casi particolarissimi, non può essere espressa in forma chiusa. In tutti questi casi si può comunque ricorrere a stime approssimate o subottime, ovvero a stime che sono ottime in un assegnato sottospazio delle funzioni della variabile  $Y$ .

Per introdurre il problema del calcolo delle stime subottime occorre innanzitutto ricordare l'interpretazione del concetto di valore atteso condizionato nello spazio  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  delle variabili aleatorie di quadrato sommabile. Da questo punto di vista l'espressione  $E\{X|Y\}$  coincide con la proiezione della variabile aleatoria  $X$  nello spazio delle variabili aleatorie  $\mathcal{F}^Y$ -misurabili, ovvero nello spazio  $\mathcal{M}^Y$  delle funzioni di Borel di  $Y$ . Si ricordi a questo punto l'equivalenza delle notazioni

$$\hat{X} = E\{X|\mathcal{F}^Y\} = E\{X|Y\} = \Pi(X|\mathcal{M}^Y) = X_{\mathcal{M}^Y}, \quad (2.10.1)$$

che indicano l'unica funzione borelliana di  $Y$  (unica in  $L_2$  nel senso delle classi di equivalenza delle funzioni coincidenti quasi ovunque) tale da rendere la differenza  $X - \hat{X}$  (errore di stima) ortogonale a qualunque funzione borelliana di  $Y$ . In formule

$$X - X_{\mathcal{M}^Y} \perp h(Y), \quad \forall h \in \mathcal{M}^Y. \quad (2.10.2)$$

Il quadrato della norma dell'errore di stima in  $L_2$  ne è la varianza, e la proiezione di  $X$  su  $\mathcal{M}^Y$  è tale da renderla minima. In formule

$$\|X - X_{\mathcal{M}^Y}\| \leq \|X - h(Y)\|, \quad \forall h \in \mathcal{M}^Y. \quad (2.10.3)$$

Poiché la ricerca della proiezione  $\hat{X} = X_{\mathcal{M}^Y}$  di  $X$  nello spazio delle funzioni borelliane di  $Y$  risulta in generale complicata, si può cercare di effettuare la proiezione di  $X$  in uno spazio di funzioni più ristretto e più maneggevole dal punto di vista dei calcoli.

Ad esempio, sia  $\mathcal{G}^Y$  un sottospazio lineare di  $\mathcal{M}^Y$ , e sia  $X_{\mathcal{G}^Y}$  la proiezione di  $X$  in  $\mathcal{G}^Y$ . Si ha

$$X - X_{\mathcal{G}^Y} \perp g(Y), \quad \forall g \in \mathcal{G}^Y, \quad (2.10.4)$$

e  $X_{\mathcal{G}^Y}$  costituisce la stima di minima varianza tra tutte le stime che sono funzioni di  $Y$  contenute in  $\mathcal{G}^Y$ . In altre parole la  $X_{\mathcal{G}^Y}$  è la stima ottima nel sottospazio considerato, e può essere denominata subottima in quanto, ovviamente,

$$\|X - X_{\mathcal{M}^Y}\| \leq \|X - X_{\mathcal{G}^Y}\|. \quad (2.10.5)$$

Più in generale se  $\mathcal{G}_1^Y$  e  $\mathcal{G}_2^Y$  sono due sottospazi lineari di  $\mathcal{M}^Y$  tali che  $\mathcal{G}_2^Y \subseteq \mathcal{G}_1^Y$ , allora si ha

$$\|X - X_{\mathcal{G}_1^Y}\| \leq \|X - X_{\mathcal{G}_2^Y}\|. \quad (2.10.6)$$

e quindi la stima  $X_{\mathcal{G}_1^Y}$  è migliore della stima  $X_{\mathcal{G}_2^Y}$ , nel senso che la varianza dell'errore di stima risulta inferiore.

Nel seguito sarà mostrato come viene svolto il calcolo di stime polinomiali ottime, ovvero di stime che sono ottime nel sottospazio di  $\mathcal{M}^Y$  costituito dai polinomi di grado inferiore o uguale ad un grado fissato  $n$ , che sarà indicato nel seguito con  $\mathcal{P}_n^Y$ .

Si comincerà con il trovare la stima ottima nel sottospazio  $\mathcal{P}_0^Y$  dei polinomi di grado 0, che è costituito da tutte le funzioni costanti. La stima ottima avrà pertanto espressione  $X_{\mathcal{P}_0^Y} = b$ , con  $b \in \mathbb{R}^r$  (si ricordi che  $X(\omega) \in \mathbb{R}^r$  e  $Y(\omega) \in \mathbb{R}^m$ ). Per il teorema di ortogonalità deve essere

$$X - X_{\mathcal{P}_0^Y} \perp c, \quad \forall c \in \mathcal{P}_0^Y \equiv \mathbb{R}^r. \quad (2.10.7)$$

Sostituendo l'espressione  $X_{\mathcal{P}_0^Y} = b$  la condizione di ortogonalità al sottospazio  $\mathcal{P}_0^Y$  si scrive

$$E\{(X - b)c^T\} = 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}^r, \quad (2.10.8)$$

da cui

$$\left. \begin{aligned} (m_X - b)c^T &= 0 \\ \forall c \in \mathbb{R}^r \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = m_X, \quad (2.10.9)$$

e quindi

$$X_{\mathcal{P}_0^Y} = m_X. \quad (2.10.10)$$

Pertanto la stima polinomiale ottima di ordine 0 di un vettore aleatorio  $X$  è sempre pari al suo valor medio  $m_X$ . Ovviamente tale stima è centrata e la covarianza dell'errore di stima  $\Psi_{E0}$  è pari alla covarianza del vettore aleatorio  $X$ , e cioè  $\Psi_{E0} = \Psi_X$ .

Passando alla stima polinomiale ottima di ordine 1 (stima lineare ottima), si osservi che il generico elemento di  $\mathcal{P}_1^Y$ , spazio dei polinomi di primo grado in  $Y$ , si scrive

$$p_1(Y) = c + H Y, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}^r, \quad H \in \mathbb{R}^{r \times m}. \quad (2.10.11)$$

La stima ottima avrà anch'essa un'espressione del tipo

$$X_{\mathcal{P}_1^Y} = b + K Y, \quad b \in \mathbb{R}^r, \quad K \in \mathbb{R}^{r \times m}, \quad (2.10.12)$$

in cui i coefficienti  $b$  e  $K$  devono essere tali da rendere la differenza  $X - X_{\mathcal{P}_1^Y}$  ortogonale a qualunque polinomio in  $\mathcal{P}_1^Y$ . Dovrà essere cioè

$$\begin{aligned} E\{(X - b - K Y)(c^T - Y^T H^T)\} &= 0, \\ \forall c \in \mathbb{R}^r, \quad \forall H \in \mathbb{R}^{r \times m}. \end{aligned} \quad (2.10.13)$$

Sviluppando i calcoli e indicando con  $M_{XY}$  il momento misto di  $X$  e  $Y$ , e con  $M_{YY}$  il momento del secondo ordine di  $Y$ , si ha

$$\begin{aligned} (m_X - b - K m_Y)c^T + (M_{XY} - b m_Y^T - K M_{YY})H^T &= 0, \\ \forall c \in \mathbb{R}^r, \quad \forall H \in \mathbb{R}^{r \times m}, \end{aligned} \quad (2.10.14)$$

e quindi

$$\begin{aligned} m_X - b - K m_Y &= 0 \\ M_{XY} - b m_Y^T - K M_{YY} &= 0, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} b &= m_X - K m_Y, \\ M_{XY} - (m_X - K m_Y)m_Y^T - K M_{YY} &= 0. \end{aligned}$$

Risolvendo la seconda equazione per  $K$  si ha

$$K = (M_{XY} - m_X m_Y^T)(M_{YY} - m_Y m_Y^T)^{-1}. \quad (2.10.15)$$

Ricordando la formula che lega i momenti assoluti e i momenti centrati

$$\begin{aligned} \Psi_Y &= M_{YY} - m_Y m_Y^T, \\ \Psi_{XY} &= M_{XY} - m_X m_Y^T, \end{aligned} \quad (2.10.16)$$

si ha in definitiva

$$\begin{aligned} K &= \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1}, \\ b &= m_X - \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} m_Y, \end{aligned} \quad (2.10.17)$$

La migliore stima lineare è quindi data da

$$X_{\mathcal{P}_1^Y} = m_X + \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} (Y - m_Y). \quad (2.10.18)$$

Si osservi che questa espressione coincide con la stima ottima (2.3.25), ottenuta nell'ipotesi che i vettori  $X$  e  $Y$  fossero gaussiani. Questa coincidenza è molto importante perché porta ad affermare che lo stimatore costruito sotto ipotesi di gaussianità resta comunque il migliore tra gli stimatori lineari, anche quando queste ipotesi sono disattese.

Per il calcolo della covarianza dell'errore di stima conviene definire le variabili aleatorie centrate

$$X_C \triangleq X - m_X, \quad Y_C \triangleq Y - m_Y. \quad (2.10.19)$$

La stima ottima lineare di  $X_C$  è quindi pari a

$$X_{C, \mathcal{P}_1^{Y_C}} = \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} Y_C \quad (2.10.20)$$

e la covarianza dell'errore di stima è data da

$$\begin{aligned} \Psi_{E1} &= \{(X_C - \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} Y_C)(X_C - \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} Y_C)^T\} = \\ &= \Psi_X - \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} \Psi_{YX} - \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} \Psi_{YX} + \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} \Psi_Y \Psi_Y^{-1} \Psi_{YX}. \end{aligned} \quad (2.10.21)$$

Si ha in definitiva

$$\Psi_{E1} = \Psi_X - \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} \Psi_{YX}, \quad (2.10.22)$$

che nel caso di variabili aleatorie gaussiane coincide con la covarianza dell'errore commesso dallo stimatore ottimo. Poiché inoltre  $\Psi_{E0} = \Psi_X$  e la matrice  $\Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} \Psi_{YX}$  è semidefinita positiva, si ha

$$\Psi_{E0} \geq \Psi_{E1}. \quad (2.10.23)$$

In generale andando a considerare stime polinomiali di ordine sempre più elevato si avrà

$$\Psi_{E0} \geq \Psi_{E1} \geq \Psi_{E2} \geq \cdots \geq \Psi_{En} \geq \Psi_E \quad (2.10.24)$$

in cui con  $\Psi_E$  si è indicata la covarianza della stima ottima in  $\mathcal{M}^Y$ . Si osservi però che nelle ipotesi di gaussianità per le variabili aleatorie  $X$  e  $Y$ , per cui la stima ottima coincide con la stima lineare ottima, le stime polinomiali di ordine superiore non possono fornire covarianze inferiori per l'errore di stima.

Si consideri ora lo spazio  $\mathcal{P}_2^Y$  dei polinomi di secondo grado in  $Y$ . Per trattare il problema della proiezione del vettore aleatorio  $X$  sullo spazio  $\mathcal{P}_2^Y$  è conveniente introdurre un operatore binario chiamato **prodotto di Kronecker** e indicato con il simbolo  $\otimes$ , che a due vettori  $X \in \mathbb{R}^r$  e  $Y \in \mathbb{R}^m$  associa un vettore in  $\mathbb{R}^{rm}$  ed è definito nel modo seguente

$$X \otimes Y = \begin{bmatrix} X_1 Y \\ \vdots \\ X_r Y \end{bmatrix}, \quad (2.10.25)$$

ovvero, in forma estesa,

$$X \otimes Y = [X_1 Y_1 \ X_1 Y_2 \ \cdots \ X_1 Y_m \ X_2 Y_1 \ \cdots \ X_2 Y_m \ \cdots \ X_r Y_1 \ \cdots \ X_r Y_m]^T. \quad (2.10.26)$$

Il quadrato di Kronecker di un vettore  $Y$  è un vettore  $Y^{[2]} \in \mathbb{R}^{m^2}$  definito, consistentemente con la definizione del prodotto, come  $Y^{[2]} = Y \otimes Y$ , e quindi

$$Y^{[2]} = [Y_1^2 \ Y_1 Y_2 \ \cdots \ Y_1 Y_m \ Y_2 Y_1 \ Y_2^2 \ \cdots \ Y_2 Y_m \ \cdots \ Y_m Y_1 \ \cdots \ Y_m^2]^T. \quad (2.10.27)$$

Per impostare il calcolo della stima ottima in  $\mathcal{P}_2^Y$  conviene formulare il problema in relazione alle variabili centrate  $X_C$  e  $Y_C$ . Con la notazione introdotta, un polinomio di secondo grado in  $Y_C$  si esprime come

$$p_2(Y_C) = c + H Y_C + M Y_C^{[2]}, \quad (2.10.28)$$

con  $c \in \mathbb{R}^r$ ,  $H \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{r \times m^2}$ .

La stima ottima in  $\mathcal{P}_2^{Y_C}$  ha quindi un'espressione del tipo

$$X_{C, \mathcal{P}_2^{Y_C}} = b + K Y_C + S Y_C^{[2]}, \quad (2.10.29)$$

con  $b \in \mathbb{R}^r$ ,  $K \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{r \times m^2}$ .

I coefficienti del polinomio si trovano imponendo l'ortogonalità

$$\begin{aligned} E\left\{(X_C - b - K Y_C - S Y_C^{[2]})(c^T + Y_C^T H^T + Y_C^{[2]T} M^T)\right\} &= 0 \\ \forall c \in \mathbb{R}^r, \forall H \in \mathbb{R}^{r \times m}, \forall M \in \mathbb{R}^{r \times m^2}, \end{aligned} \quad (2.10.30)$$

e quindi, ricordando che  $m_{X_C} = 0$  e  $m_{Y_C} = 0$ ,

$$\begin{aligned} -b - S E\{Y_C^{[2]}\} &= 0, \\ \Psi_{XY} - K \Psi_Y - S E\{Y_C^{[2]} Y_C^T\} &= 0, \\ E\{X_C Y_C^{[2]T}\} - b E\{Y_C^{[2]T}\} - K E\{Y_C Y_C^{[2]T}\} - S E\{Y_C^{[2]} Y_C^{[2]T}\} &= 0. \end{aligned} \quad (2.10.31)$$

Dalla prima equazione si ha  $b = S E\{Y_C^{[2]}\}$ , che sostituita nella terza fornisce

$$\begin{aligned} E\{X_C Y_C^{[2]T}\} - K E\{Y_C Y_C^{[2]T}\} - \\ - S \left( E\{Y_C^{[2]} Y_C^{[2]T}\} - S E\{Y_C^{[2]}\} E\{Y_C^{[2]T}\} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.10.32)$$

Ricavando  $K$  dalla seconda si ha

$$K = (\Psi_{XY} - S E\{Y_C^{[2]} Y_C^T\}) \Psi_Y^{-1}. \quad (2.10.33)$$

Con qualche passaggio algebrico si arriva alla seguente soluzione

$$\begin{aligned} S &= \left( E\{X_C Y_C^{[2]T}\} - \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} G_{3,Y_C}^T \right) \left( M_{Y_C^{[2]}} - G_{3,Y_C} \Psi_Y^{-1} G_{3,Y_C}^T \right)^{-1}, \\ K &= (\Psi_{XY} - S E\{Y_C^{[2]} Y_C^T\}) \Psi_Y^{-1}, \\ b &= S E\{Y_C^{[2]}\}, \end{aligned} \quad (2.10.34)$$

in cui si sono adottate le seguenti definizioni

$$\begin{aligned} M_{Y_C^{[2]}} &= E\{Y_C^{[2]} Y_C^{[2]T}\} - E\{Y_C^{[2]}\} E\{Y_C^{[2]T}\}, \\ G_{3,Y_C} &= E\{Y_C^{[2]} Y_C^T\}. \end{aligned} \quad (2.10.35)$$

Si osservi che per il calcolo di  $M_{Y_C^{[2]}}$  sono necessari i momenti centrati di ordine 2 e di ordine 4, mentre per il calcolo di  $G_{3,Y_C}$  sono necessari i momenti centrati di ordine 3. Inoltre nel calcolo della matrice  $S$  viene impiegato il termine  $E\{X_C Y_C^{[2]T}\}$  che contiene i momenti misti del terzo ordine. In generale si può affermare che per il calcolo della stima polinomiale di ordine  $n$  è necessaria la conoscenza dei momenti centrati di ordine fino a  $2n$ .

La stima ottima quadratica può pertanto essere scritta come

$$X_{C, \mathcal{P}_2^{Y_C}} = K Y_C + S(Y_C^{[2]} - E\{Y_C^{[2]}\}). \quad (2.10.36)$$

Sviluppando il calcolo della covarianza dell'errore di stima si arriva all'espressione

$$\Psi_{E2} = \Psi_X - \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} \Psi_{YX} - R Q R^T, \quad (2.10.37)$$

in cui

$$\begin{aligned} R &= E\{X_C Y_C^{[2]T}\} - \Psi_{XY} \Psi_Y^{-1} G_{3,Y_C}^T, \\ Q &= \left( M_{Y_C^{[2]}} - G_{3,Y_C} \Psi_Y^{-1} G_{3,Y_C}^T \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.10.38)$$

che dimostra che

$$\Psi_{E2} \leq \Psi_{E1}. \quad (2.10.39)$$

Poiché se sono nulli i momenti centrati del terzo ordine le matrice  $R$  risulta essere nulla, si ha in questo caso

$$\Psi_{E2} = \Psi_{E1}. \quad (2.10.40)$$

Questo è ciò che accade nel caso di distribuzioni gaussiane, in quanto queste hanno tutti i momenti di ordine dispari nulli.

Il lettore avrà a questo punto compreso come procedere per il calcolo di stime polinomiali ottime di ordine 3 o superiori. Avrà peraltro intuito che il numero dei calcoli da sviluppare cresce notevolmente al crescere dell'ordine del polinomio. Resta comunque il fatto che i calcoli da svolgere sono solo di tipo algebrico, e non

di tipo integrale come nel caso del calcolo della stima ottima esatta mediante il valore sperato condizionato.

Esiste comunque la possibilità di sfruttare il formalismo del prodotto e delle potenze di Kronecker per avere una soluzione più compatta ed elegante del problema della stima polinomiale ottima. Per introdurre questa tecnica si ritiene opportuno sviluppare dapprima il caso di variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  scalari. Come è stato detto precedentemente nel testo, per il calcolo della stima polinomiale ottima di ordine  $n$  è necessario disporre dei momenti misti di ordine fino a  $2n$ . In effetti si vedrà qui di seguito che sono necessari i seguenti momenti assoluti

$$\begin{aligned} E\{XY^i\}, & \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, n, \\ E\{Y^k\}, & \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, 2n, \end{aligned} \quad (2.10.41)$$

o, in alternativa, il valori sperati  $m_X$  e  $m_Y$ , ed i seguenti momenti centrati

$$\begin{aligned} E\{(X - m_X)(Y - m_Y)^i\}, & \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, n, \\ E\{(Y - m_Y)^k\}, & \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (2.10.42)$$

Indicando con la notazione  $[Y]_n$  il vettore di dimensione  $n + 1$  che contiene le potenze di  $Y$  da 0 a  $n$ , e cioè

$$[Y]_n = [1 \ Y \ \dots \ Y^n]^T, \quad (2.10.43)$$

la generica stima polinomiale di ordine  $n$  ha la struttura

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \sum_{k=0}^n a_k Y^k = A_n^T [Y]_n, \\ \text{con } A_n &= [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n]^T. \end{aligned} \quad (2.10.44)$$

In altre parole, una funzione polinomiale di grado  $n$  della variabile  $Y$  si può scrivere come una funzione lineare del vettore  $[Y]_n$ .

La varianza  $\sigma_{En}^2$  dell'errore di stima dipende dal vettore  $A_n \in \mathbb{R}^{n+1}$  dei coefficienti del polinomio, ed è pari a

$$\begin{aligned} \sigma_{En}^2(A_n) &= E\{(X - A_n^T [Y]_n)^2\} = \\ &= E\left\{\left(X - \sum_{k=0}^n a_k Y^k\right)^2\right\} \end{aligned} \quad (2.10.45)$$

I coefficienti  $a_i$  che rendono minima la varianza dell'errore di stima si trovano uguagliando a zero le derivate parziali

$$\frac{\partial \sigma_{En}^2(A_n)}{\partial a_i} = -E\left\{2Y^i \left(X - \sum_{k=0}^n a_k Y^k\right)\right\} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (2.10.46)$$

e cioè risolvendo le  $n + 1$  equazioni algebriche

$$E\{XY^i\} - \sum_{k=0}^n a_k E\{Y^{k+i}\} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.10.47)$$

Questo sistema algebrico si può scrivere nel formato esteso

$$\begin{bmatrix} 1 & E\{Y\} & \dots & E\{Y^n\} \\ E\{Y\} & E\{Y^2\} & \dots & E\{Y^{n+1}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{Y^n\} & E\{Y^{n+1}\} & \dots & E\{Y^{2n}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\{X\} \\ E\{XY\} \\ \vdots \\ E\{XY^n\} \end{bmatrix}. \quad (2.10.48)$$

Osservando che la matrice dei coefficienti è pari a  $E\{[Y]_n [Y]_n^T\}$  e che il vettore dei termini noti è pari a  $E\{[Y]_n X\}$ , il sistema si scrive in maniera compatta come

$$E\{[Y]_n [Y]_n^T\} A_n = E\{[Y]_n X\} \quad (2.10.49)$$

e la soluzione risulta essere data da

$$A_n = E\{[Y]_n [Y]_n^T\}^{-1} E\{[Y]_n X\}. \quad (2.10.50)$$

Si ha quindi la stima polinomiale ottima

$$X_{\mathcal{P}_n^Y} = E\{X[Y]_n^T\}E\{[Y]_n[Y]_n^T\}^{-1}[Y]_n, \quad (2.10.51)$$

Il valore della covarianza dell'errore di stima si ottiene per calcolo diretto,

$$\begin{aligned} \sigma_{En}^2 &= E\left\{(X - E\{X[Y]_n^T\}E\{[Y]_n[Y]_n^T\}^{-1}[Y]_n) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (X - [Y]_n^T E\{[Y]_n[Y]_n^T\}^{-1}E\{[Y]_n X\})\right\} = \\ &= E\{X^2\} - E\{X[Y]_n^T\}E\{[Y]_n[Y]_n^T\}^{-1}E\{[Y]_n X\}. \end{aligned} \quad (2.10.52)$$

In generale è preferibile impostare il problema in modo da utilizzare i momenti centrati anzichè i momenti assoluti. Infatti questi ultimi sono sempre dei numeri più grandi rispetto ai primi, e di conseguenza la matrice dei coefficienti costituita da momenti assoluti ha maggiori possibilità di risultare malcondizionata, rispetto ad una matrice dei coefficienti costituita da momenti centrati. Convienne pertanto esprimere la stima polinomiale in termini di variabili aleatorie centrate  $X_C = X - m_X$  e  $Y_C = Y - m_Y$

La generica stima polinomiale di ordine  $n$  risulta quindi del tipo

$$\begin{aligned} \tilde{X}_C &= \sum_{k=0}^n b_k Y_C^k = B_n^T [Y_C]_n, \\ \text{con } B_n &= [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_n]^T, \end{aligned} \quad (2.10.53)$$

e la varianza  $\sigma_E^2$  dell'errore di stima è pari a

$$\sigma_E^2(B_n) = E\left\{\left(X_C - \sum_{k=0}^n b_k Y_C^k\right)^2\right\}. \quad (2.10.54)$$

Uguagliando a zero le derivate parziali rispetto ai coefficienti  $b_i$  si arriva al sistema algebrico

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & E\{Y_C^n\} \\ 0 & E\{Y_C^2\} & \cdots & E\{Y_C^{n+1}\} \\ E\{Y_C^2\} & E\{Y_C^3\} & \cdots & E\{Y_C^{n+2}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{Y_C^n\} & E\{Y_C^{n+1}\} & \cdots & E\{Y_C^{2n}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E\{X_C Y_C\} \\ E\{X_C Y_C^2\} \\ \vdots \\ E\{X_C Y_C^n\} \end{bmatrix}. \quad (2.10.55)$$

Con questa impostazione le matrici dei coefficienti e dei termini noti contengono i momenti centrati, e gli zeri che sono stati introdotti sono dovuti al fatto che le variabili aleatorie centrate hanno media nulla. La soluzione del sistema è data da

$$B_n = E\{[Y_C]_n[Y_C]_n^T\}^{-1}E\{[Y_C]_n X_C\}. \quad (2.10.56)$$

e la stima polinomiale ottima può essere scritta, in termini di variabili aleatorie non centrate,

$$X_{\mathcal{P}_n^Y} = m_X + E\{X_C[Y_C]_n^T\}E\{[Y_C]_n[Y_C]_n^T\}^{-1}[Y - m_Y]_n, \quad (2.10.57)$$

Questa espressione della stima polinomiale ottima generalizza l'espressione della stima lineare ottima (2.10.18), valida anche nel caso di variabili  $X$  e  $Y$  vettoriali.

Il valore della varianza dell'errore di stima è pari a

$$\begin{aligned} \sigma_{En}^2 &= E\left\{(X_C - E\{X_C[Y_C]_n^T\}E\{[Y_C]_n[Y_C]_n^T\}^{-1}[Y_C]_n) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (X_C - [Y_C]_n^T E\{[Y_C]_n[Y_C]_n^T\}^{-1}E\{[Y_C]_n X_C\})\right\} = \\ &= E\{X_C^2\} - E\{X_C[Y_C]_n^T\}E\{[Y_C]_n[Y_C]_n^T\}^{-1}E\{[Y_C]_n X_C\}. \end{aligned} \quad (2.10.58)$$

Il calcolo dei coefficienti dello stimatore polinomiale è stato eseguito trovando il minimo per la varianza  $\sigma_{En}^2$  dell'errore di stima, ovvero eguagliando a zero le derivate parziali della  $\sigma_{En}^2$  rispetto ai coefficienti. Allo stesso risultato si sarebbe potuto arrivare utilizzando la condizione di ortogonalità

$$X_C - X_{C,\mathcal{P}_n^Y} \perp S_n^T Y_C, \quad \forall S_n \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (2.10.59)$$

ovvero

$$E\{(X_C - B_n^T[Y_C]_n)[Y_C]_n^T S_n\} = 0, \quad \forall S_n \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (2.10.60)$$

Questa condizione è verificata se

$$E\{X_C[Y_C]_n^T\} - B_n^T E\{[Y_C]_n[Y_C]_n^T\} = 0, \quad (2.10.61)$$

da cui si ricava la (2.10.56).

**Esempio 2.10.1** – Si vuole ricavare l'espressione della stima lineare ottima utilizzando le formule date nel caso scalare. Il sistema da risolvere, usando la formulazione con variabili centrate, è dato da

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{XY} \end{bmatrix}, \quad (2.10.62)$$

da cui

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}. \quad (2.10.63)$$

Si ha quindi la stima lineare ottima

$$X_{\mathcal{P}_1^Y} = m_X + \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}(Y - m_Y), \quad (2.10.64)$$

e la varianza dell'errore di stima

$$\sigma_X^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_Y^2}. \quad (2.10.65)$$

△

**Esempio 2.10.2** – Si vuole ricavare l'espressione della stima quadratica ottima, sempre utilizzando la formulazione centrata. I coefficienti del polinomio si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sigma_Y^2 \\ 0 & \sigma_Y^2 & \gamma_Y^3 \\ \sigma_Y^2 & \gamma_Y^3 & \beta_Y^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{XY} \\ \gamma_{XY^2} \end{bmatrix}, \quad (2.10.66)$$

in cui si sono usate le notazioni

$$\gamma_Y^3 = E\{Y_C^3\}, \quad \beta_Y^4 = E\{Y_C^4\}, \quad \gamma_{XY^2} = E\{XY_C^2\}. \quad (2.10.67)$$

Il determinante  $\Delta$  della matrice dei coefficienti è pari a  $\Delta = \sigma_Y^2(\beta_Y^4 - \sigma_Y^4) - \gamma_Y^6$ . Si ha quindi la soluzione

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \sigma_Y^2\beta_Y^4 - \gamma_Y^6 & \sigma_Y^2\gamma_Y^3 & -\sigma_Y^4 \\ \sigma_Y^2\gamma_Y^3 & \beta_Y^4 - \sigma_Y^4 & -\gamma_Y^3 \\ -\sigma_Y^4 & -\gamma_Y^3 & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{XY} \\ \gamma_{XY^2} \end{bmatrix}, \quad (2.10.68)$$

e cioè

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{\sigma_Y^2(\gamma_Y^3\sigma_{XY} - \sigma_Y^2\gamma_{XY^2})}{\sigma_Y^2(\beta_Y^4 - \sigma_Y^4) - \gamma_Y^6}, \\ b_1 &= \frac{(\beta_Y^4 - \sigma_Y^4)\sigma_{XY} - \gamma_Y^3\gamma_{XY^2}}{\sigma_Y^2(\beta_Y^4 - \sigma_Y^4) - \gamma_Y^6}, \\ b_2 &= \frac{-\gamma_Y^3\sigma_{XY} + \sigma_Y^2\gamma_{XY^2}}{\sigma_Y^2(\beta_Y^4 - \sigma_Y^4) - \gamma_Y^6}. \end{aligned} \quad (2.10.69)$$

La varianza dell'errore di stima è

$$\sigma_X^2 - \frac{(\beta_Y^4 - \sigma_Y^4)\sigma_{XY}^2 - 2\gamma_Y^3\gamma_{XY^2}\sigma_{XY} + \sigma_Y^2\gamma_{XY^2}^2}{\sigma_Y^2(\beta_Y^4 - \sigma_Y^4) - \gamma_Y^6}. \quad (2.10.70)$$

Nel caso notevole in cui la densità di probabilità  $p_{XY}(x, y)$  sia una funzione simmetrica rispetto al punto  $(m_X, m_Y)$  il filtro quadratico ottimo coincide con il filtro lineare ottimo. Infatti, nel caso di densità simmetrica i momenti centrati di ordine dispari sono tutti nulli, e quindi  $\gamma_Y^3 = \gamma_{XY^2} = 0$ . Si ha in questo caso

$$\begin{aligned} b_0 &= 0, \\ b_1 &= \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}, \\ b_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.10.71)$$

e la varianza dell'errore di stima è ancora pari a

$$\sigma_X^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_Y^2}. \quad (2.10.72)$$

△

Utilizzando il formalismo dei prodotti di Kronecker anche per il caso di variabili aleatorie vettoriali è possibile avere una soluzione elegante del problema della stima polinomiale ottima. Si ricordi che il prodotto di Kronecker fra due vettori  $X \in \mathbb{R}^r$  e  $Y \in \mathbb{R}^m$  è dato da

$$X \otimes Y = \begin{bmatrix} X_1 Y \\ \vdots \\ X_r Y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \cdot m}. \quad (2.10.73)$$

La potenza  $k$ -esima di Kronecker di un vettore  $Y \in \mathbb{R}^m$  è definita come

$$Y^{[k]} = Y \otimes Y^{[k-1]}, \quad Y^{[k]} \in \mathbb{R}^{m^k}, \quad (2.10.74)$$

con  $Y^{[0]} = 1$ .

Con questo formalismo, un polinomio di grado  $n$  in  $Y$  può semplicemente essere espresso come una funzione lineare del vettore

$$[Y]_n = [1 \quad Y \quad Y^{[2]} \quad \dots \quad Y^{[n]}] \in \mathbb{R}^{1+m+m^2+\dots+m^n} \quad (2.10.75)$$

Andando a considerare direttamente le variabili aleatorie centrate, una stima polinomiale di  $X_C$  in funzione di  $Y_C$  si scrive come

$$\tilde{X}_C = S_n^T [Y_C]_n, \quad S_n \in \mathbb{R}^{r \times (1+m+m^2+\dots+m^n)}. \quad (2.10.76)$$

La stima polinomiale ottima

$$X_{C, \mathcal{P}_n^Y} = B_n^T [Y_C]_n, \quad (2.10.77)$$

deve soddisfare la condizione di ortogonalità

$$E\{(X_C - B_n^T [Y_C]_n)[Y_C]_n^T S_n\} = 0, \quad \forall S_n \in \mathbb{R}^{r \times (1+m+m^2+\dots+m^n)}. \quad (2.10.78)$$

Questa condizione è verificata se

$$E\{X_C [Y_C]_n^T\} - B_n^T E\{[Y_C]_n [Y_C]_n^T\} = 0, \quad (2.10.79)$$

e quindi

$$B_n = E\{[Y_C]_n [Y_C]_n^T\}^{-1} E\{[Y_C]_n X_C\}. \quad (2.10.80)$$

Questa espressione è formalmente analoga alla (2.10.56) ricavata nel caso di variabili aleatorie scalari, così come è formalmente analoga l'espressione del filtro polinomiale ottimo

$$X_{\mathcal{P}_n^Y} = m_X + E\{X_C [Y_C]_n^T\} E\{[Y_C]_n [Y_C]_n^T\}^{-1} [Y - m_Y]_n. \quad (2.10.81)$$

In effetti il formalismo di Kronecker è nato proprio per permettere di estendere formule ed espressioni in cui vi sono prodotti e potenze di variabili scalari al caso di variabili vettoriali. È bene osservare però che alla semplicità e all'eleganza formale però non corrisponde una ridotta complessità computazionale. Ad esempio, la matrice che deve essere invertita

$$E\{[Y_C]_n [Y_C]_n^T\}, \quad (2.10.82)$$

costituita da tutti i momenti centrati del vettore  $Y$  fino all'ordine  $2n$ , è un matrice quadrata di lato  $1 + m + m^2 + \dots + m^n$ .

## 2.11 Stima simultanea di variabili aleatorie e parametri

Nei paragrafi precedenti sono stati studiati separatamente i criteri della minima varianza e della massima verosimiglianza nei problemi di stima. In particolare il criterio della minima varianza è stato impiegato per il calcolo della stima ottima di variabili aleatorie, mentre il criterio della massima verosimiglianza è stato applicato nel calcolo dei parametri incogniti in distribuzioni di probabilità con struttura nota.

In molti problemi pratici tuttavia può risultare necessario stimare simultaneamente variabili aleatorie e parametri. Si considerino ad esempio due vettori aleatori  $X$  e  $Y$  la cui densità congiunta è funzione di un vettore di parametri  $\vartheta$ . Si ha cioè

$$p_{X,Y}(x, y; \vartheta), \quad x \in \mathbb{R}^r, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad \vartheta \in \mathbb{R}^p. \quad (2.11.1)$$



La stima di minima varianza della variabile aleatoria  $X$ , noto che sia il risultato della  $Y$ , è data da

$$E_{\vartheta}\{X|Y\} = f(Y; \vartheta), \quad (2.11.2)$$

ed è quindi una funzione del vettore di parametri  $\vartheta$ .

La stima di massima verosimiglianza del vettore  $\vartheta$  è quel valore che rende massima la densità di probabilità marginale  $p_Y(y; \vartheta)$ , ottenuta come

$$p_Y(y; \vartheta) = \int_{\mathbb{R}^r} p_{X,Y}(x, y; \vartheta) dx. \quad (2.11.3)$$

Pertanto per risolvere il problema della stima simultanea di variabili aleatorie e parametri occorre prima risolvere il problema

$$\hat{\vartheta} = \arg \max_{\vartheta \in \Theta} p_Y(y; \vartheta), \quad (2.11.4)$$

e poi sostituire il valore  $\hat{\vartheta}$  così ottenuto nel valore atteso condizionato

$$\hat{X} = \left( E_{\vartheta}\{X|Y\} \right)_{\vartheta=\hat{\vartheta}}. \quad (2.11.5)$$

**Esempio 2.11.1** – Siano  $X$  e  $N$  due vettori aleatori gaussiani indipendenti con statistiche note ( $X(\omega) \in \mathbb{R}^r$  e  $N(\omega) \in \mathbb{R}^m$ ). Sia  $m_X$  il valore medio di  $X$  e  $\Psi_X$  la sua covarianza. Il vettore  $N$  ha media nulla e covarianza  $\Psi_N$ . Sia  $Y$  un vettore aleatorio legato a  $X$  e  $N$  dalla relazione lineare

$$Y = AX + B\vartheta + N, \quad (2.11.6)$$

in cui  $\vartheta \in \mathbb{R}^p$  è un vettore deterministico di parametri incogniti.  $Y(\omega) \in \mathbb{R}^m$  è un vettore gaussiano in quanto combinazione lineare di variabili gaussiane. La stima ottima di  $X$  in funzione dell'osservazione  $y$  del vettore  $Y$  è data da

$$\hat{x} = m_X + \Psi_{XY}(\vartheta) \Psi_Y^{-1}(\vartheta) (y - m_Y(\vartheta)), \quad (2.11.7)$$

ed è pertanto funzione di  $\vartheta$ . Il calcolo del valore medio di  $Y$ , della covarianza  $\Psi_Y$  e della mutua covarianza  $\Psi_{XY}$  è semplice e fornisce

$$\begin{aligned} m_Y &= Am_X + B\vartheta, \\ \Psi_{XY} &= \Psi_X A^T, \\ \Psi_Y &= A\Psi_X A^T + \Psi_N, \end{aligned} \quad (2.11.8)$$

e quindi la stima ottima  $\hat{x}$  in funzione di  $y$  e di  $\vartheta$  diventa

$$\hat{x} = m_X + \Psi_X A^T (A\Psi_X A^T + \Psi_N)^{-1} (y - Am_X - B\vartheta). \quad (2.11.9)$$

Per calcolare la stima ottima di  $\vartheta$  occorre massimizzare la densità marginale del vettore  $Y$

$$p_Y(y; \vartheta) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\Psi_Y|^{1/2}} \exp\left(\frac{1}{2} (y - m_Y(\vartheta))^T \Psi_Y^{-1} (y - m_Y(\vartheta))\right). \quad (2.11.10)$$

Poiché solamente l'esponente della densità è funzione di  $\vartheta$ , per massimizzare la  $p_Y$  in funzione di  $\vartheta$  è sufficiente minimizzare l'esponente cambiato di segno

$$J(\vartheta) = \frac{1}{2} (y - Am_X - B\vartheta)^T \Psi_Y^{-1} (y - Am_X - B\vartheta). \quad (2.11.11)$$

Poiché  $\hat{\vartheta}$  annulla la derivata di  $J$  si ha

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \vartheta} \right|_{\hat{\vartheta}} = -B^T \Psi_Y^{-1} (y - Am_X - B\hat{\vartheta}) = 0. \quad (2.11.12)$$

Risolvendo la (2.11.12) si ottiene

$$\hat{\vartheta} = (B^T \Psi_Y^{-1} B)^{-1} B^T \Psi_Y^{-1} (y - Am_X). \quad (2.11.13)$$

Sostituendo la (2.11.13) nell'espressione della  $\hat{x}$  si ha, dopo semplici passaggi,

$$\hat{x} = m_X + \Psi_X A^T (\Psi_Y^{-1} - \Psi_Y^{-1} B (B^T \Psi_Y^{-1} B)^{-1} B^T \Psi_Y^{-1}) (y - Am_X). \quad (2.11.14)$$

# Identificazione parametrica dei sistemi lineari

**C**OME prima applicazione della teoria sviluppata nei capitoli 1 e 2 nel campo dei sistemi dinamici, in questo capitolo si prenderà in esame il problema della identificazione dei parametri nei sistemi lineari e stazionari tempo-continuo nel caso in cui sul vettore delle uscite, osservate ad intervalli regolari di tempo, sia presente del rumore additivo gaussiano.

## 3.1 Formulazione del problema

Un sistema lineare e stazionario tempo-continuo, noto a meno di un vettore di parametri incogniti  $\vartheta \in \mathbb{R}^m$ , può essere scritto come

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\vartheta)x(t) + B(\vartheta)u(t) & x(0) &= x_0, & x(t) &\in \mathbb{R}^n, \\ y(t) &= C(\vartheta)x(t) + D(\vartheta)u(t) & u(t) &\in \mathbb{R}^p & y(t) &\in \mathbb{R}^q \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

L'obiettivo che ci si pone consiste nell'identificare il vettore  $\vartheta$  a partire da misure effettuate sull'uscita. Si suppone che l'uscita venga prelevata con un intervallo di campionamento  $\Delta$  e che sia corrotta da rumore secondo il modello

$$z(k\Delta) = y(k\Delta) + \epsilon_k \quad (3.1.2)$$

$$\text{con } \epsilon_k = G N_k \quad (3.1.3)$$

dove con  $\epsilon_k$  si indica il rumore di osservazione,  $G$  è una matrice costante, e  $\{N_k\}$  è una sequenza di variabili aleatorie. Ne consegue che le misure disponibili  $\{z(0), z(\Delta), \dots\}$  costituiscono una sequenza di variabili aleatorie, e quindi il problema della identificazione dei parametri dovrà essere affrontato con gli strumenti del calcolo delle probabilità e della teoria della stima esposti nei capitoli precedenti.

Occorre innanzitutto stabilire un modello statistico per il rumore di osservazione. Al fine di ottenere risultati esprimibili con un formalismo semplice verranno fatte le seguenti ipotesi di lavoro:

- a)  $N_k$  ha distribuzione gaussiana;
  - b)  $E(N_k) = 0$ ;
  - c)  $E\{N_k N_k^T\} = I$ ;
  - d)  $E\{N_k N_j^T\} = 0$  per  $k \neq j$ .
- (3.1.4)

Le proprietà c) e d) possono essere espresse in forma sintetica facendo uso del simbolo di Kroenecker  $\delta_{kj}$ , che vale 1 se  $k = j$  e vale 0 se  $k \neq j$ . Pertanto esse possono essere sostituite dalla

$$c') \quad E\{N_k N_j^T\} = \delta_{kj} I.$$

Una sequenza  $\{N_k\}$  che verifica queste ipotesi è detta **sequenza aleatoria gaussiana bianca standard**.

L'ipotesi a) non è troppo restrittiva in quanto il rumore di misura può spesso pensarsi originato dalla somma di un certo numero di componenti indipendenti, aventi tutte la stessa distribuzione. L'adozione di una distribuzione gaussiana trova quindi la sua giustificazione nel teorema del limite centrale, illustrato, seppur in maniera non rigorosa, nella sezione del capitolo 1 sulle distribuzioni notevoli. L'ipotesi b) non riduce affatto la generalità del problema in quanto se il valore atteso  $E\{N_k\} = m_k$  fosse diverso da zero e noto, ci si ricondurrebbe facilmente al caso di rumore a media nulla considerando la sequenza  $N'_k = N_k - m_k$  e le osservazioni equivalenti

$$z'(k\Delta) = z(k\Delta) - Gm_k, \quad (3.1.5)$$

notando che

$$z'(k\Delta) = y(k\Delta) + G(N_k - m_k) = y(k\Delta) + GN'_k. \quad (3.1.6)$$

L'ipotesi c) si può giustificare osservando che il vero rumore di osservazione non è dato da  $N_k$  ma è pari a  $GN_k$ , che è ancora un rumore gaussiano essendo trasformazione lineare di una variabile gaussiana. Inoltre è a media nulla

$$E\{GN_k\} = GE\{N_k\} = 0 \quad (3.1.7)$$

ed ha covarianza pari a

$$E\{GN_k(GN_k)^T\} = E\{GN_k N_k^T G^T\} = G E\{N_k N_k^T\} G^T = GG^T \quad (3.1.8)$$

Di conseguenza, per ottenere una covarianza assegnata  $\psi$  del rumore di uscita (con  $\psi$  matrice simmetrica e definita positiva) è sufficiente scegliere una matrice  $G$  tale che

$$GG^T = \psi. \quad (3.1.9)$$

Per impostare il problema della stima del vettore di parametri  $\vartheta$  secondo il criterio della massima verosimiglianza, si cominci con lo scrivere l'espressione dell'evoluzione dello stato e dell'uscita per il sistema (3.1.1). Dalla teoria dei sistemi, ponendo

$$\bar{h}(t, x(0), u, \vartheta) = e^{A(\vartheta)t} x_0 + \int_0^t e^{A(\vartheta)(t-\tau)} B(\vartheta) u(\tau) d\tau \quad (3.1.10)$$

si ha

$$x(t) = \bar{h}(t, x(0), u, \vartheta) \quad (3.1.11)$$

$$z(k\Delta) = C(\vartheta)\bar{h}(k\Delta, x(0), u, \vartheta) + D(\vartheta)u(k\Delta) + GN_k. \quad (3.1.12)$$

Definendo

$$h(k\Delta, x(0), u, \vartheta) = C(\vartheta)\bar{h}(k\Delta, x(0), u, \vartheta) + D(\vartheta)u(k\Delta) \quad (3.1.13)$$

si ha che

$$z(k\Delta) = h(k\Delta, x(0), u, \vartheta) + GN_k, \quad k = 0, \dots, N. \quad (3.1.14)$$

Definendo il vettore delle uscite *calcolate* da 0 a  $N$  come

$$H_N(x(0), u, \vartheta) = \begin{bmatrix} h(0, x(0), u, \vartheta) \\ h(\Delta, x(0), u, \vartheta) \\ \vdots \\ h(N\Delta, x(0), u, \vartheta) \end{bmatrix} \quad (3.1.15)$$

ed i vettori delle osservazioni e dei rumori di osservazione nel seguente modo

$$z_N = \begin{bmatrix} z(0) \\ z(\Delta) \\ \vdots \\ z(N\Delta) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_N = \begin{bmatrix} GN_0 \\ GN_1 \\ \vdots \\ GN_N \end{bmatrix} \quad (3.1.16)$$

la (3.1.14) può essere scritta in forma compatta

$$z_N = H_N(x(0), u, \vartheta) + \mathcal{E}_N. \quad (3.1.17)$$

L'equazione algebrica (3.1.17) è anche detta **equazione di misura**.

A questo punto occorre scegliere il criterio più opportuno per effettuare la stima del parametro  $\vartheta$  date le osservazioni  $z_N$ . Secondo la teoria illustrata nel capitolo precedente, per questo tipo di problema in cui  $\vartheta$  è un vettore deterministico, è conveniente usare il criterio della massima verosimiglianza. A questo scopo è innanzitutto necessario specificare quali sono gli insiemi che costituiscono la terna statistica  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  di interesse. Se si indica con  $q$  la dimensione dell'uscita  $y(t)$ , e quindi di  $z(k\Delta)$ , il vettore  $z_N$  avrà dimensione  $q(N+1)$

$$z_N \in \mathbb{R}^{q(N+1)} \equiv \Omega \quad \text{spazio dei campioni} \quad (3.1.18)$$

È opportuno scegliere come  $\sigma$ -algebra quella di Borel associata a  $\mathbb{R}^{q(N+1)}$

$$\mathcal{F} = \mathcal{B}^{q(N+1)}$$

Verrà dapprima considerato il caso in cui  $x(0)$  è noto. In questo caso, poiché  $\mathcal{E}_N$  è un vettore gaussiano ed  $H_N$  è una quantità incognita

che non è una v.a.,  $z_N$  risulta essere una v.a. gaussiana avente valor medio

$$E(z_N) = H_N(x(0), u, \vartheta) \quad (3.1.19)$$

e matrice di covarianza

$$\begin{aligned} E\{[z_N - H_N(x(0), u, \vartheta)][z_N - H_N(x(0), u, \vartheta)]^T\} &= E\{\mathcal{E}_N \mathcal{E}_N^T\} = \\ &= E\left\{ \begin{bmatrix} GN_0 \\ GN_1 \\ \vdots \\ GN_N \end{bmatrix} \cdot [N_0^T G^T \quad N_1^T G^T \quad \dots \quad N_N^T G^T] \right\} = \\ &= E \begin{bmatrix} GN_0 N_0^T G^T & \dots & GN_0 N_N^T G^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ GN_N N_0^T G^T & \dots & GN_N N_N^T G^T \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} GG^T & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & GG^T \end{bmatrix} \triangleq \Psi_N \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Quindi la famiglia  $\mathcal{P}$  di misure di probabilità è data da tutte le gaussiane  $q(N+1)$ -dimensionali che hanno un valor medio pari a  $H_N(\vartheta, x(0), u)$  e covarianza  $\Psi_N$ . La famiglia  $\mathcal{P}$  è parametrizzata da  $\vartheta$ , in quanto ogni membro di questa famiglia è determinato da un valore di  $\vartheta$ . A questo punto si può calcolare il funzionale di verosimiglianza. Poiché la misura gaussiana su  $\mathbb{R}^{q(N+1)}$  è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, il funzionale di verosimiglianza  $\ell_{z_N}(P_\vartheta)$  è dato dalla derivata di Radon-Nikodym della gaussiana considerata rispetto alla misura di Lebesgue, e cioè dalla densità di probabilità  $p_{z_N}(z_N; \vartheta)$ . Si ha quindi

$$\ell_{z_N}(\vartheta) = \frac{1}{(2\pi)^{q(N+1)/2} |\Psi_N|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(z_N - H_N) \Psi_N^{-1} (z_N - H_N)}. \quad (3.1.21)$$

Per quanto esposto nel capitolo precedente il vettore  $\vartheta$  che rende massimo questo funzionale è la stima di massima verosimiglianza. Poiché la matrice di covarianza non dipende da  $\vartheta$ , per ottenere il

massimo della funzione  $\ell_{z_N}(\vartheta)$  è sufficiente massimizzare l'esponente della (3.1.21). Poiché quest'ultimo è di segno negativo, il problema si riduce nel determinare il valore  $\hat{\vartheta}_N$  che rende minima la funzione:

$$J_N(\vartheta) = \frac{1}{2} [z_N - H_N(x(0), u, \vartheta)]^T \Psi_N^{-1} [z_N - H_N(x(0), u, \vartheta)]. \quad (3.1.22)$$

Effettuando le opportune sostituzioni e sviluppando i prodotti matriciali si ottiene

$$\begin{aligned} J_N(\vartheta) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (z(k\Delta) - h(k\Delta, x(0), u, \vartheta))^T \cdot \\ &\quad \cdot (GG^T)^{-1} (z(k\Delta) - h(k\Delta, x(0), u, \vartheta)) \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Si osservi che  $h(k\Delta, x(0), u, \vartheta)$  è l'uscita calcolata in corrispondenza ad un  $\vartheta$  fissato mentre  $z(k\Delta)$  è l'uscita misurata, quindi  $J_N(\vartheta)$  è una funzione del quadrato dell'errore. Pertanto determinare il valore  $\hat{\vartheta}_N$  che minimizza  $J_N(\vartheta)$  equivale a minimizzare la differenza (al quadrato) tra l'uscita calcolata e quella misurata. Nei casi in cui manca qualsiasi informazione sull'errore di misurazione si può porre  $G \equiv I$ , ottenendo

$$J_N(\vartheta) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \|z(k\Delta) - h(k\Delta, x(0), u, \vartheta)\|^2 \quad (3.1.24)$$

e quindi  $J_N(\vartheta)$  diventa lo scarto quadratico tra  $z$  ed  $h$  e minimizzarlo equivale a fare una **stima ai minimi quadrati**.

La definizione della funzione  $J_N(\vartheta)$  da minimizzare costituisce la formulazione matematica del problema della stima dei parametri. Rimane a questo punto il problema pratico di trovare il minimo di una funzione ad  $m$  variabili, che dovrà essere risolto con metodi numerici propri della teoria dell'ottimizzazione. In generale, data la struttura della  $J_N(\vartheta)$ , la complessità computazionale degli algoritmi numerici è notevole e può non consentire il calcolo in linea del vettore di parametri.

Nel caso in cui lo stato iniziale non sia noto esso può essere modellato come una variabile aleatoria, che per semplicità viene assunta gaussiana con valor medio  $x_0$  e covarianza  $\Psi_{X(0)}$ . È ragionevole inoltre supporre  $x(0)$  scorrelato dal rumore di osservazione in ogni istante  $k$ . Si riscriva ora il vettore delle uscite calcolate da 0 a  $N$ , separando la dipendenza dallo stato iniziale dalla dipendenza dall'ingresso

$$H_N(x(0), u, \vartheta) = S_N(\vartheta)x(0) + F_N(u, \vartheta), \quad (3.1.25)$$

in cui

$$S_N(\vartheta) = \begin{bmatrix} C(\vartheta) \\ C(\vartheta)e^{A(\vartheta)\Delta} \\ \vdots \\ C(\vartheta)e^{A(\vartheta)N\Delta} \end{bmatrix}, \quad (3.1.26)$$

$$F_N(u, \vartheta) = \begin{bmatrix} D(\vartheta)u(0) \\ \vdots \\ \int_0^{N\Delta} e^{A(\vartheta)(N\Delta-\tau)} B(\vartheta)u(\tau) d\tau \end{bmatrix}.$$

L'equazione di misura può essere riscritta ora come

$$z_N = S_N(\vartheta)x(0) + F_N(u, \vartheta) + \mathcal{E}_N$$

Il valore atteso del vettore aleatorio gaussiano  $z_N$  risulta essere adesso

$$E\{z_N\} = S_N(\vartheta)x_0 + F_N(u, \vartheta). \quad (3.1.27)$$

Definendo la variabile aleatoria a media nulla  $\tilde{x}_0 = x(0) - x_0$  la covarianza di  $z_N$  si scrive

$$\begin{aligned} \Psi_{Z_N} &= E\left\{(z_N - S_N(\vartheta)x_0 - F_N(u, \vartheta))(z_N - S_N(\vartheta)x_0 - F_N(u, \vartheta))^T\right\} \\ &= E\left\{(S_N(\vartheta)\tilde{x}_0 + \mathcal{E}_N)(S_N(\vartheta)\tilde{x}_0 + \mathcal{E}_N)^T\right\}, \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

e quindi, dall'indipendenza di  $\tilde{x}_0$  e  $\mathcal{E}_N$ , si ha

$$\Psi_{Z_N}(\vartheta) = S_N(\vartheta)\Psi_{X(0)}S_N^T(\vartheta) + \Psi_N. \quad (3.1.29)$$

Si può osservare che in questo caso la matrice di covarianza dipende dal parametro  $\vartheta$ . Il funzionale di verosimiglianza si scrive

$$\ell_{z_N}(\vartheta) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(z_N - S_N x_0 - F_N)\Psi_{Z_N}^{-1}(z_N - S_N x_0 - F_N)}}{(2\pi)^{q(N+1)/2}|\Psi_{Z_N}(\vartheta)|^{1/2}}. \quad (3.1.30)$$

Si osservi che in questo caso massimizzare il funzionale rispetto  $\vartheta$  non equivale a minimizzare l'esponente cambiato di segno, in quanto anche il coefficiente moltiplicativo dipende da  $\vartheta$ . Pertanto il problema numerico di minimo risulta essere, in generale, più difficile.

### 3.2 Distinguibilità dell'uscita ed identificabilità

Sia

$$y(t) = h(t, x_0, u, \vartheta) \quad (3.2.1)$$

l'uscita al tempo  $t$  di un sistema del tipo (3.1.1) in cui lo stato  $x_0$ , senza perdita di generalità, si suppone noto, e  $\vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m$ .

Definendo **esperimento** la coppia  $(x_0, u)$ , e considerando un insieme prefissato  $U_T$  di funzioni di ingresso definite fra 0 e  $T$  si definisce  $\mathcal{E}$  l'insieme di esperimenti  $\mathcal{E} = \{(x_0, u) : u \in U_T\}$ .

**Definizione 3.2.1** – La coppia di valori  $(\vartheta, \alpha)$  del vettore dei parametri,  $\vartheta, \alpha \in \Theta$ , è detta **indistinguibile** rispetto ad  $\mathcal{E}$  se:

$$h(t, x_0, u, \vartheta) = h(t, x_0, u, \alpha) \quad (3.2.2)$$

per ogni  $(x_0, u) \in \mathcal{E}$ ,  $0 \leq t \leq T$ ; in caso contrario la coppia è detta **distinguibile**. •

Nel seguito la classe di ingressi che verrà considerata è quella degli ingressi uniformemente limitati nell'intervallo  $[0, T]$ . Indicando  $S(\vartheta, \epsilon)$  come l'intorno sferico di  $\vartheta$  con raggio  $\epsilon$ , si ha la seguente definizione di identificabilità locale.

**Definizione 3.2.2** – Un parametro  $\vartheta \in \Theta$  è **localmente identificabile** se esiste un  $\epsilon > 0$  tale che ogni coppia  $(\vartheta, \alpha)$  per cui

sia  $\alpha \in S(\vartheta, \epsilon) \cap \Theta$  e  $\alpha \neq \vartheta$  risulta distinguibile. Il parametro è invece **globalmente identificabile** se la coppia  $(\vartheta, \alpha)$  è distinguibile per ogni  $\alpha \in \Theta$  e  $\alpha \neq \vartheta$ . •

Dato il sistema (3.1.1) con stato iniziale zero, vale il seguente teorema che caratterizza l'indistinguibilità di una coppia di parametri.

**Teorema 3.2.3** – Una coppia di parametri  $(\vartheta, \alpha)$ ,  $\vartheta, \alpha \in \Theta$ , è indistinguibile con esperimenti aventi stato iniziale zero se e solo se

$$\begin{aligned} D(\vartheta) &= D(\alpha) \\ C(\vartheta)A^\ell(\vartheta)B(\vartheta) &= C(\alpha)A^\ell(\alpha)B(\alpha), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

**Dimostrazione** – La sufficienza può essere dimostrata osservando che la (3.2.3) implica l'uguaglianza della matrice delle risposte impulsive di entrambi i sistemi. Infatti la risposta impulsiva del sistema con parametro generico  $\beta$  è data da

$$w(t, \beta) = C(\beta)e^{A(\beta)t}B(\beta) + D(\beta)\delta(t). \quad (3.2.4)$$

Poiché il primo addendo può essere riscritto come

$$C(\beta)e^{A(\beta)t}B(\beta) = \sum_{i=0}^{\infty} C(\beta)A(\beta)^i B(\beta) \frac{t^i}{i!} \quad (3.2.5)$$

grazie all'ipotesi del teorema è immediato verificare che  $w(t, \alpha) = w(t, \vartheta)$ . Pertanto entrambi i sistemi forniscono la stessa risposta a qualunque ingresso, partendo da stato iniziale nullo, e quindi dalla definizione 3.2.1 se ne conclude che i parametri  $\alpha$  e  $\vartheta$  sono indistinguibili.

Per provare la necessità del teorema, si assuma la coppia  $(\vartheta, \alpha)$  indistinguibile, così da avere

$$\begin{aligned} C(\vartheta) \int_0^t e^{A(\vartheta)(t-\tau)} B(\vartheta) u(\tau) d\tau + D(\vartheta) u(t) &= \\ = C(\alpha) \int_0^t e^{A(\alpha)(t-\tau)} B(\alpha) u(\tau) d\tau + D(\alpha) u(t) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

per ogni  $u \in U_T$  e per ogni  $t \in [0, T]$ . Considerando l'uguaglianza per  $t = 0$  è evidente che deve essere

$$D(\vartheta) = D(\alpha), \quad (3.2.7)$$

e quindi anche

$$\int_0^t [C(\vartheta)e^{A(\vartheta)(t-\tau)} B(\vartheta) - C(\alpha)e^{A(\alpha)(t-\tau)} B(\alpha)] u(\tau) d\tau = 0. \quad (3.2.8)$$

Poiché per il Lemma di Eulero-Lagrange, data una  $f(\tau)$  continua

$$\int_0^t f(\tau) g(\tau) d\tau = 0 \quad \forall g \quad \Rightarrow \quad f(\tau) \equiv 0 \quad (3.2.9)$$

dalla (3.2.9) segue che

$$C(\vartheta)e^{A(\vartheta)\delta} B(\vartheta) - C(\alpha)e^{A(\alpha)\delta} B(\alpha) = 0 \quad \forall \delta \in [0, T], \quad (3.2.10)$$

che a sua volta implica l'annullarsi di tutte le derivate in  $[0, T]$ . Il calcolo delle derivate in  $\delta = 0$  fornisce le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} C(\vartheta)B(\vartheta) &= C(\alpha)B(\alpha) \\ C(\vartheta)A(\vartheta)B(\vartheta) &= C(\alpha)A(\alpha)B(\alpha) \\ C(\vartheta)A^\ell(\vartheta)B(\vartheta) &= C(\alpha)A^\ell(\alpha)B(\alpha) \quad \ell = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

e cioè la tesi. ■

Verrà ora mostrato che in realtà non è strettamente necessario che le eguaglianze (3.2.3) siano soddisfatte per ogni  $\ell$ , bensì occorre e basta che siano verificate fino ad un opportuno indice finito. Si comincerà ad analizzare il caso di sistemi ad un ingresso ed un'uscita, dimostrando il seguente teorema.

**Teorema 3.2.4** – Si supponga che in corrispondenza al parametro  $\vartheta \in \Theta$  il sistema (3.1.1) con  $p = q = 1$  sia raggiungibile ed

osservabile. La coppia  $(\vartheta, \alpha)$  è indistinguibile con esperimenti aventi stato iniziale zero se e solo se

$$\begin{aligned} D(\vartheta) &= D(\alpha) \\ C(\vartheta)A^\ell(\vartheta)B(\vartheta) &= C(\alpha)A^\ell(\alpha)B(\alpha), \quad \ell = 0, 1, \dots, 2n-1 \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

**Dimostrazione** – La necessità segue banalmente dal teorema precedente. Per la sufficienza basta dimostrare che le (3.2.12) implicano le (3.2.3). A tal fine si cominci con l'osservare che grazie al Teorema di Cayley-Hamilton valgono le seguenti relazioni ricorsive per il calcolo delle potenze di di esponente intero delle matrici  $A(\vartheta)$  e  $A(\alpha)$

$$\begin{aligned} A^{n+k}(\vartheta) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^{i+k}(\vartheta) \\ A^{n+k}(\alpha) &= \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i A^{i+k}(\alpha) \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.2.13)$$

dove  $a_i$  e  $\bar{a}_i$  sono, rispettivamente, i coefficienti dei polinomi caratteristici di  $A(\vartheta)$  e  $A(\alpha)$ . Si Considerino le (3.2.13) per  $k$  fino a  $n-1$ .

Premoltiplicando per  $C(\cdot)$  e postmoltiplicando per  $B(\cdot)$  si hanno le relazioni

$$\begin{aligned} C(\vartheta)A^{n+k}(\vartheta)B(\vartheta) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i C(\vartheta)A^{i+k}(\vartheta)B(\vartheta), \\ C(\alpha)A^{n+k}(\alpha)B(\alpha) &= \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i C(\alpha)A^{i+k}(\alpha)B(\alpha), \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

che consentono di calcolare in modo ricorsivo i prodotti  $C(\vartheta)A^\ell(\vartheta)B(\vartheta)$  e  $C(\alpha)A^\ell(\alpha)B(\alpha)$  per  $\ell \geq n$  utilizzando gli stessi prodotti con  $\ell$  fino a  $n-1$ . Dalle (3.2.14) è evidente che se si ha  $a_i = \bar{a}_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ), ovvero se  $A(\vartheta)$  e  $A(\alpha)$  hanno lo

stesso polinomio caratteristico, allora le eguaglianze (3.2.12) fino a  $\ell = n-1$  implicano le (3.2.12) per qualunque  $\ell \geq n-1$ . Quello che si vuole ora dimostrare è che le eguaglianze (3.2.12) fino a  $\ell = 2n-1$ , nell'ipotesi di osservabilità e raggiungibilità della terna  $A(\vartheta), B(\vartheta), C(\vartheta)$ , implicano l'uguaglianza dei polinomi caratteristici. A tale scopo si consideri per ogni  $k$  compreso tra 0 e  $n-1$  la differenza tra le due sommatorie (3.2.14). Tenendo conto delle uguaglianze (3.2.12) si ottiene

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_i - \bar{a}_i) C(\vartheta)A^{i+k}(\vartheta)B(\vartheta) = 0. \quad (3.2.15)$$

Tale relazione, omettendo per motivi di spazio la dipendenza dal parametro  $\vartheta$ , può essere riscritta nella forma

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B & AB & A^{n-1}B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 - \bar{a}_0 \\ a_1 - \bar{a}_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} - \bar{a}_{n-1} \end{bmatrix} = 0. \quad (3.2.16)$$

Per ipotesi il prodotto tra la matrice di osservabilità e quella di raggiungibilità è non singolare, e quindi il sistema ammette come unica soluzione la soluzione banale  $a_i - \bar{a}_i = 0$  per  $i = 0, \dots, n-1$ , ovvero  $a_i = \bar{a}_i$ . Ne consegue che le eguaglianze (3.2.12) unitamente alle relazioni ricorsive (3.2.14) implicano le eguaglianze (3.2.3), e quindi l'indistinguibilità dei parametri  $\vartheta$  e  $\alpha$ . ■

Si osservi che le condizioni (3.2.3) non sono utilizzabili nella pratica perché le eguaglianze da verificare sono in numero infinito. Le condizioni (3.2.12) sono invece un numero finito ( $2n+1$  nei sistemi ad un ingresso ed una uscita) e possono essere effettivamente impiegate per valutare l'indistinguibilità di una coppia di parametri. Si vuole ora mostrare che se la terna  $A(\vartheta), B(\vartheta), C(\vartheta)$  non è completamente raggiungibile e/o osservabile, le eguaglianze da verificare sono meno di  $2n+1$ . Sia  $m$  la dimensione del più grande sottospazio dello spazio di stato che sia completamente raggiungibile ed osservabile.

In tal caso è possibile operare un opportuno cambio di coordinate per ottenere la rappresentazione del sistema nella forma canonica di Kalman, che fornisce la seguente struttura a blocchi per le matrici  $\bar{A}(\vartheta)$ ,  $\bar{B}(\vartheta)$  e  $\bar{C}(\vartheta)$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} & \bar{A}_{14} \\ 0 & \bar{A}_{22} & \bar{0} & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{33} & \bar{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{A}_{44} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2.17)$$

$$\bar{C} = [0 \quad \bar{C}_2 \quad 0 \quad \bar{C}_4],$$

in cui la matrice  $\bar{A}_{22}$  è quadrata di lato  $m$ . È noto che la terna  $\bar{A}_{22}(\vartheta)$ ,  $\bar{B}_2(\vartheta)$ ,  $\bar{C}_2(\vartheta)$  costituisce una realizzazione minima del sistema dato, ed è facile verificare che si ha

$$C(\vartheta)A^\ell(\vartheta)B(\vartheta) = \bar{C}_2(\vartheta)\bar{A}^\ell(\vartheta)\bar{B}(\vartheta), \quad (3.2.18)$$

per  $\ell = 0, \dots, n$ .

È noto inoltre che la dimensione del sottospazio raggiungibile e osservabile è pari al rango della matrice di Hankel

$$\begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B & \dots \\ CAB & CA^2B & CA^3B & \dots \\ CA^2B & CA^3B & CA^4B & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.2.19)$$

che in ogni caso non può essere maggiore di  $n$ . Ne consegue che se valgono le (3.2.3) o le (3.2.12) allora le rappresentazioni  $A(\vartheta)$ ,  $B(\vartheta)$ ,  $C(\vartheta)$  e  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$ ,  $C(\alpha)$  hanno il sottospazio raggiungibile ed osservabile con la stessa dimensione  $m$ .

A questo punto è facile dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 3.2.5** – *Si consideri il sistema (3.1.1) con  $p = q = 1$ . Siano  $m_\vartheta$  e  $m_\alpha$ , rispettivamente, le dimensioni dei sottospazi raggiungibili ed osservabili dello spazio di stato per le due rappresentazioni  $A(\vartheta)$ ,  $B(\vartheta)$ ,  $C(\vartheta)$  e  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$ ,  $C(\alpha)$  di (3.1.1) in*

*corrispondenza ai parametri  $\vartheta, \alpha \in \Theta$ . Sia  $m \leq n$  il più grande tra  $m_\vartheta$  e  $m_\alpha$ . La coppia  $(\vartheta, \alpha)$  è indistinguibile con esperimenti aventi stato iniziale zero se e solo se*

$$D(\vartheta) = D(\alpha)$$

$$C(\vartheta)A^\ell(\vartheta)B(\vartheta) = C(\alpha)A^\ell(\alpha)B(\alpha), \quad \ell = 0, 1, \dots, 2m - 1 \quad (3.2.12b)$$

Si osservi che il numero di eguaglianze che devono essere verificate per assicurare l'indistinguibilità di due valori nello spazio dei parametri è ancora inferiore nel caso in cui le matrici  $\bar{A}_{22}(\vartheta)$  e  $\bar{A}_{22}(\alpha)$  che definiscono la dinamica dei sottospazi raggiungibili ed osservabili delle due rappresentazioni, ammettono polinomi annullanti di grado inferiore a, rispettivamente,  $m_\vartheta$  e  $m_\alpha$ . In particolare, esiste sicuramente un polinomio di grado  $\bar{m}$ , con  $\min(m_\vartheta, m_\alpha) \leq \bar{m} \leq \max(m_\vartheta, m_\alpha)$ , che sia annullante per  $\bar{A}_{22}(\vartheta)$  e  $\bar{A}_{22}(\alpha)$ , e la sua esistenza consente di dimostrare che le condizioni (3.2.3) fino ad  $\ell = 2\bar{m} - 1$  sono necessarie e sufficienti per l'indistinguibilità della coppia di parametri.

Si vuole osservare che dal punto di vista operativo è più semplice verificare le  $2n + 1$  eguaglianze (3.2.12), piuttosto che individuare preliminarmente il grado  $\bar{m}$  del più piccolo polinomio annullante per  $\bar{A}_{22}(\vartheta)$  e  $\bar{A}_{22}(\alpha)$ , al fine poi di verificare un numero inferiore di uguaglianze, e cioè  $2\bar{m} + 1$ .

Pertanto, nel caso generale di sistemi a più ingressi e più uscite è conveniente dare solamente il seguente teorema.

**Teorema 3.2.6** – *Si supponga che in corrispondenza al parametro  $\vartheta \in \Theta$  il sistema sia osservabile, ed inoltre che esista almeno una componente del vettore di ingressi  $u$  rispetto alla quale il sistema risulti completamente raggiungibile. La coppia  $(\vartheta, \alpha)$  è indistinguibile con esperimenti aventi stato iniziale zero se e solo se*

$$D(\vartheta) = D(\alpha)$$

$$C(\vartheta)A^\ell(\vartheta)B(\vartheta) = C(\alpha)A^\ell(\alpha)B(\alpha), \quad \ell = 0, 1, \dots, 2n - 1 \quad (3.2.12c)$$



**Dimostrazione** – La dimostrazione segue esattamente la linea seguita nel caso scalare ( $p = q = 1$ ). La differenza sostanziale si ha quando si considerano le soluzioni del sistema di equazioni che ha per incognite le differenze tra i coefficienti dei polinomi caratteristici. Si ha in questo caso

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B & AB & A^{n-1}B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (a_0 - \bar{a}_0)I_p \\ (a_1 - \bar{a}_1)I_p \\ \vdots \\ (a_{n-1} - \bar{a}_{n-1})I_p \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2.20)$$

dove  $I_p$  è la matrice identità  $p \times p$ . Poiché per ipotesi il sistema è osservabile, il nullo della matrice di osservabilità è  $\{0\}$ , e pertanto la (3.2.20) può essere riscritta eliminando dal prodotto la matrice di osservabilità. Si ha quindi un sistema lineare omogeneo con matrice dei coefficienti  $n \times (n \cdot p)$  coincidente con la matrice di raggiungibilità del sistema (3.1.1), che ha rango pieno per ipotesi. Le incognite  $x_i$  sono le differenze  $a_i - \bar{a}_i$ . La particolare struttura della matrice delle incognite consente di spezzare il sistema di equazioni in  $p$  sottosistemi con incognite vettoriali. Indicando con  $b_j$  la  $j$ -esima colonna della matrice  $B$  e con  $\mathcal{R}_j$  la relativa matrice di raggiungibilità, si ha

$$\mathcal{R}_j x = \begin{bmatrix} b_j & Ab_j & A^{n-1}b_j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = 0 \quad j = 1, \dots, p. \quad (3.2.21)$$

Per avere  $x_i = a_i - \bar{a}_i = 0$  è sufficiente che anche una sola delle matrici dei coefficienti sia non singolare. Ma ciò è vero in quanto per ipotesi esiste almeno una componente del vettore degli ingressi rispetto alla quale il sistema è raggiungibile.

L'unicità della soluzione simultanea  $x = 0$  dei  $p$  sistemi (3.2.21) assicura l'uguaglianza dei polinomi caratteristici di  $A(\vartheta)$  e di  $A(\alpha)$ , e quindi, da quanto discusso riguardo la (3.2.14), la sufficienza delle condizioni (3.2.12). ■

**Osservazione 3.2.7** – In realtà la condizione di raggiungibilità del sistema rispetto ad almeno una componente dell'ingresso non è strettamente necessaria per l'indistinguibilità. Ciò che è necessario invece è che l'intersezione degli spazi delle soluzioni dei  $p$  sistemi lineari (3.2.21) sia pari al vettore nullo.  $\triangle$

Per quanto riguarda l'identificabilità locale del parametro  $\vartheta$  vale il teorema seguente, valido per sistemi scalari ad un ingresso, basato su una applicazione del teorema della funzione inversa.

**Teorema 3.2.8** – Considerato il vettore  $R(\vartheta)$

$$R(\vartheta) = \begin{bmatrix} D(\vartheta) \\ C(\vartheta)B(\vartheta) \\ C(\vartheta)A(\vartheta)B(\vartheta) \\ \vdots \\ C(\vartheta)A^{2n-1}(\vartheta)B(\vartheta) \end{bmatrix} \quad (3.2.22)$$

(vettore dei coefficienti di Markov), se le componenti sono continue e derivabili con derivata continua rispetto a  $\vartheta$ ,  $\vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m$  il parametro  $\vartheta$  è localmente identificabile se lo Jacobiano  $dR/d\vartheta$  ha rango pari ad  $m$ .

**Dimostrazione** – Le ipotesi del teorema assicurano che esiste un intorno di  $\vartheta$  in cui la funzione vettoriale  $R(\vartheta)$  è uno ad uno e quindi, per ogni  $\alpha \neq \vartheta$  in questo intorno, è  $R(\alpha) \neq R(\vartheta)$ . Ne consegue che, in base al teorema precedente, la coppia  $(\alpha, \vartheta)$  non è indistinguibile. ■

Si noti che lo Jacobiano ha rango pari ad  $m$  se e solo se è non singolare la matrice  $m \times m$

$$\det \left( \left[ \frac{dR}{d\vartheta} \right]^T \left[ \frac{dR}{d\vartheta} \right] \right) > 0. \quad (3.2.23)$$

Nel caso di sistemi con più ingressi e più uscite occorre definire un vettore di Markov  $R_i(\vartheta)$  per ogni componente  $u_i$  dell'ingresso

$u$  (costruito usando la definizione del teorema con  $B_i$  al posto di  $B$ ). Per avere identificabilità locale è sufficiente che il teorema sia verificato per almeno uno Jacobiano  $dR_i/d\vartheta$ . In realtà è sufficiente verificare una condizione meno restrittiva, anche se più onerosa, computazionalmente, ovvero che abbia rango  $m$  lo Jacobiano del vettore

$$\tilde{R}(\vartheta) = \begin{bmatrix} R_1(\vartheta) \\ \vdots \\ R_p(\vartheta) \end{bmatrix}. \quad (3.2.24)$$

### 3.3 Consistenza della stima di massima verosimiglianza

Riprendiamo in esame il problema della stima di massima verosimiglianza del valore incognito  $\vartheta^*$  dei parametri del sistema (3.1.1). Per ogni  $N$  fissato, indichiamo con  $\hat{\vartheta}_N$  la stima di massima verosimiglianza di  $\vartheta^*$ , cioè il valore di  $\vartheta$  che minimizza l'indice  $J_N(\vartheta)$  dato dalla (3.1.22). Si osservi innanzitutto che

$$E\{z_N - H_N(\vartheta^*)\} = E\{\mathcal{E}_N\} = 0. \quad (3.3.1)$$

Si vuole ora dimostrare che sotto opportune ipotesi la stima  $\hat{\vartheta}_N$  è *consistente* secondo la definizione data nel capitolo precedente, ovvero è tale che per qualunque  $\varepsilon > 0$  si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\vartheta}\{\|\hat{\vartheta}_N - \vartheta\| > \varepsilon\} = 0. \quad (3.3.2)$$

Tra le ipotesi necessarie alla dimostrazione della consistenza della stima di massima verosimiglianza c'è, evidentemente, l'identificabilità locale del parametro  $\vartheta^*$ , che si traduce nella condizione che le colonne della matrice Jacobiana del vettore di coefficienti di Markov siano indipendenti. Tuttavia, è intuitivo che questa condizione non può essere sufficiente perché anche gli ingressi giocano un ruolo importante nell'identificazione di un sistema. Si

consideri ad esempio il caso banale in cui il sistema sia a riposo ( $x(0) = 0$ ) e gli ingressi siano identicamente nulli. In tal caso la misura dell'uscita, essendo identicamente nulla l'uscita del sistema, sarà costituita dal solo rumore di misura. È evidente che in questa situazione nessun parametro del sistema, anche se localmente identificabile, potrà essere identificato. Nel caso invece di ingressi diversi da zero ma costanti, se il sistema si trova a regime, produrrà uscite costanti che non possono in alcun caso consentire la stima di parametri *dinamici*, quali ad esempio le costanti di tempo del sistema. Nelle situazioni descritte vi sono parametri che, anche al tendere di  $N$  all'infinito, non potranno mai convergere ai valori veri.

Avendo stabilito in maniera intuitiva che esistono ingressi che danno luogo a stime non consistenti, ha interesse studiare sotto quali ipotesi gli ingressi assicurano la consistenza della stima. A questo proposito è utile introdurre il concetto di **ingresso persistentemente eccitante** rispetto ad un vettore di parametri  $\vartheta$  localmente identificabili. Esistono diversi modi per definire la persistente eccitazione di un parametro o di un sistema. Quella che viene data in questo testo è strettamente legata all'utilizzo che se ne farà nella dimostrazione della consistenza della stima di massima verosimiglianza.

Si comincerà col dare la definizione di ingresso persistentemente eccitante rispetto ad un parametro scalare  $\vartheta \in \mathbb{R}$ . In questo caso si possono definire le sensibilità delle matrici  $A, B, C$  e  $D$  rispetto al parametro  $\vartheta$  come le loro derivate rispetto al parametro, indicandole con il pedice  $\vartheta$

$$\begin{aligned} A_{\vartheta} &\triangleq \frac{\partial A}{\partial \vartheta}, & B_{\vartheta} &\triangleq \frac{\partial B}{\partial \vartheta}, \\ C_{\vartheta} &\triangleq \frac{\partial C}{\partial \vartheta}, & D_{\vartheta} &\triangleq \frac{\partial D}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Allo stesso modo è possibile definire le sensibilità dello stato  $x_{\vartheta}$  e dell'uscita  $y_{\vartheta}$ . Quest'ultima si può calcolare come  $y_{\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta} h(t, \vartheta)|_{\vartheta^*}$

oppure può pensarsi generata dal cosiddetto sistema di sensibilità

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_\vartheta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_\vartheta & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_\vartheta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B_\vartheta \end{bmatrix} u \\ y_\vartheta &= [C_\vartheta \ C] \begin{bmatrix} x \\ x_\vartheta \end{bmatrix} + D_\vartheta u. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

**Osservazione 3.3.1** – Indicando con  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  e  $\bar{D}$  le quattro matrici che definiscono il sistema di sensibilità si ha

$$\begin{aligned} \bar{D} = D_\vartheta &\Rightarrow \frac{d}{d\vartheta} D \\ \bar{C}\bar{B} = C_\vartheta B + CB_\vartheta &\Rightarrow \frac{d}{d\vartheta} CB \\ \bar{C}\bar{A}\bar{B} = C_\vartheta AB + CA_\vartheta B + CAB_\vartheta &\Rightarrow \frac{d}{d\vartheta} CAB \\ &\vdots \\ \bar{C}\bar{A}^k \bar{B} = C_\vartheta A^k B + \dots + CA^k B_\vartheta &\Rightarrow \frac{d}{d\vartheta} CA^k B \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

È noto che in un sistema lineare se sono nulli i coefficienti di Markov  $D$  e  $CA^k B$ , con  $k$  che va da 0 fino a  $n - 1$ , allora la risposta impulsiva è identicamente nulla ( $B \in \mathcal{N}(Q)$ , dove  $Q$  è la matrice di osservabilità). Si ha quindi che, a partire da uno stato iniziale  $x(0) \in \mathcal{N}(Q)$ , l'uscita è identicamente nulla per qualunque ingresso  $u$ . Viceversa se tali coefficienti di Markov non sono tutti nulli, ad un ingresso non identicamente nullo corrisponde un'uscita che non è identicamente nulla. Osservando ora che il vettore dei coefficienti di Markov del sistema di sensibilità fino a  $k = 2n - 1$  (si ricordi che  $\bar{A}$  ha lato pari a  $2n$ ) è esattamente pari alla derivata rispetto a  $\vartheta$  del vettore dei coefficienti di Markov  $R(\vartheta)$  definito dalla (3.2.22), ne consegue che la condizione di identificabilità locale del parametro  $\vartheta$  corrisponde al fatto che il sistema di sensibilità abbia risposta impulsiva non identicamente nulla.

Si intuisce a questo punto che le osservazioni dell'uscita  $y$  contengono informazioni sul parametro  $\vartheta$  solo se l'uscita dipende effettivamente da esso, e quindi se la sensibilità  $y_\vartheta$  è diversa da zero. Affinché ciò accada è sufficiente che l'ingresso  $u$  non sia identicamente nullo. Ma ciò in effetti non garantisce la consistenza della stima. Per poter identificare il parametro  $\vartheta$ , considerata anche la presenza di rumore di misura, occorre che la sensibilità si mantenga sufficientemente diversa da zero. Esso deve pertanto eccitare in modo persistente il sistema di sensibilità. Un ingresso persistentemente eccitante rispetto ad un parametro può essere definito nel modo seguente:

**Definizione 3.3.2** – Un ingresso  $u$  uniformemente limitato in  $[0, \infty)$  si definisce persistentemente eccitante per un dato sistema lineare e stazionario rispetto ad un parametro  $\vartheta$  se fissato comunque una costante positiva  $\alpha$  esistono due numeri positivi  $\delta$  e  $\beta$  tali da soddisfare le due condizioni

$$\forall t \quad \int_t^{t+\delta} \|u(\tau)\|^2 d\tau \geq \alpha \quad (3.3.6)$$

e

$$\forall t \quad \int_t^{t+\delta} \|y_\vartheta(\tau)\|^2 d\tau \geq \beta. \quad (3.3.7)$$

•

Si osservi che affinché un ingresso sia persistentemente eccitante rispetto al parametro  $\vartheta$  in un punto  $\bar{\vartheta}$  è necessario che tale parametro sia localmente identificabile in  $\bar{\vartheta}$ .

Come definizione alternativa, del tutto equivalente però a quella data, si può dire che un ingresso  $u$  uniformemente limitato in  $[0, \infty)$  è persistentemente eccitante rispetto ad un parametro  $\vartheta$  se esiste un istante di tempo  $T_0$  e due costanti positive  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  tali che

$$\forall T > T_0 \quad \frac{1}{T} \int_0^T \|u(\tau)\|^2 d\tau \geq \bar{\alpha} \quad (3.3.8)$$

e

$$\forall T > T_0 \quad \frac{1}{T} \int_0^T \|y_\vartheta(\tau)\|^2 d\tau \geq \bar{\beta}. \quad (3.3.9)$$

Si osservi che un ingresso risulta essere persistentemente eccitante indipendentemente dalla norma impiegata nello spazio  $\mathbb{R}^q$  in cui assume valori  $y_\vartheta$ . Ciò si verifica mettendo a confronto la norma euclidea di  $y_\vartheta(t)$  e una qualunque norma ottenuta utilizzando una qualsiasi matrice di peso  $W$  definita positiva. Infatti, indicando con  $w_m$  e  $w_M$  il minimo e il massimo degli autovalori di  $W$  si ha

$$\begin{aligned} w_M \int_{t_1}^{t_2} y_\vartheta^T(\tau) y_\vartheta(\tau) d\tau &\geq \\ &\geq \int_{t_1}^{t_2} y_\vartheta^T(\tau) W y_\vartheta(\tau) d\tau \geq w_m \int_{t_1}^{t_2} y_\vartheta^T(\tau) y_\vartheta(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

ed è facile capire come sia possibile ridefinire le costanti  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  nella definizione di ingresso persistentemente eccitante affinché un ingresso persistentemente eccitante secondo una norma lo sia anche secondo un'altra.

Nel caso in cui  $\vartheta$  non sia scalare ma sia un vettore ad  $m$  componenti, il sistema di sensibilità può essere ugualmente definito a patto però o di appesantire notevolmente la notazione, oppure di mantenere formalmente la notazione data, considerando però le  $A_\vartheta$ ,  $B_\vartheta$ ,  $C_\vartheta$  e  $D_\vartheta$  come opportune matrici a tre indici, ricordando che  $x_\vartheta$  è ora una matrice  $n \times m$ , e  $y_\vartheta$  è una matrice  $q \times m$ .

La condizione di identificabilità locale del parametro  $\vartheta$  si traduce ora nella indipendenza lineare delle colonne della matrice dei coefficienti di Markov.

La persistente eccitazione ora va definita in modo matriciale. Per generalità si prende come norma nello spazio  $\mathbb{R}^q$ , in cui assumono valori le uscite, quella generata da una qualunque matrice simmetrica e definita positiva  $W$  come  $\|y(t)\|^2 \triangleq y^T(t) W y(t)$ .

**Definizione 3.3.3** – *Un ingresso  $u$  uniformemente limitato in  $[0, \infty)$  si definisce persistentemente eccitante per un dato sistema*

lineare e stazionario rispetto ad un parametro  $\vartheta$  se fissato comunque una matrice  $W$ , simmetrica e definita positiva, ed una costante positiva  $\alpha$  esistono due numeri positivi  $\delta$  e  $\beta$  tali da soddisfare le due condizioni

$$\forall t \quad \int_t^{t+\delta} \|u(\tau)\|^2 d\tau \geq \alpha \quad (3.3.10)$$

e

$$\forall t \quad \int_t^{t+\delta} y_\vartheta^T(\tau) W y_\vartheta(\tau) d\tau \geq \beta I. \quad (3.3.11)$$

•

Anche in questo caso la definizione può anche essere riformulata stabilendo che un ingresso  $u$  uniformemente limitato in  $[0, \infty)$  è persistentemente eccitante rispetto a  $\vartheta$  se esiste un istante di tempo  $T_0$  e due costanti positive  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  tali che

$$\forall T > T_0 \quad \frac{1}{T} \int_0^T \|u(\tau)\|^2 d\tau \geq \bar{\alpha} \quad (3.3.12)$$

(definizione di ingresso persistente) e

$$\forall T > T_0 \quad \frac{1}{T} \int_0^T y_\vartheta^T(\tau) W y_\vartheta(\tau) d\tau \geq \bar{\beta} I. \quad (3.3.13)$$

Nel caso di osservazioni discrete la condizione di persistente eccitazione prodotta da un ingresso  $u$  non è in forma integrale ma in forma di sommatoria. Nel caso inoltre di misure rumorose, con covarianza dell'errore di misura pari a  $GG^T$  è opportuno porre  $W = (GG^T)^{-1}$ . Una funzione di ingresso si definisce persistentemente eccitante rispetto al vettore di parametri  $\vartheta$ , con osservazioni effettuate negli istanti  $t_i$ , se esiste un intero  $N_0$  e due costanti positive  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  tali che

$$\forall N > N_0 \quad \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \|u(t_i)\|^2 \geq \bar{\alpha}$$

e

$$\forall N > N_0 \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_{\vartheta}(t_i)^T (GG^T)^{-1} y_{\vartheta}(t_i) \geq \bar{\beta} I. \quad (3.3.14)$$

Quest'ultima è la definizione di ingresso persistentemente eccitante che si rivelerà utile per le considerazioni svolte nel seguito del capitolo. È possibile adesso formulare il seguente teorema di consistenza della stima  $\hat{\vartheta}_N$ .

**Teorema 3.3.4** – *Sia  $\vartheta^*$  il valore vero del parametro  $\vartheta$ . Si assuma che:*

- i)  $\vartheta^*$  sia localmente identificabile
- ii) il sistema sia asintoticamente stabile per  $\vartheta = \vartheta^*$
- iii) le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  siano continue rispetto a  $\vartheta$  assieme alle loro derivate prime e seconde
- iv) la classe  $U$  degli ingressi sia costituita da ingressi uniformemente limitati e persistentemente eccitanti.

Allora la stima di massima verosimiglianza di  $\vartheta^*$  è consistente. ■

Per la dimostrazione di questo teorema è necessario introdurre preliminarmente alcuni lemmi. Definiamo anzitutto le seguenti quantità:

$$\gamma(N, \vartheta) \triangleq \left[ \frac{dJ_N(\vartheta)}{d\vartheta} \right]^T \quad (3.3.15)$$

$$M(N, \vartheta) \triangleq \frac{d\gamma(N, \vartheta)}{d\vartheta} \quad (3.3.16)$$

$$Q(N, \vartheta) \triangleq \frac{dM(N, \vartheta)}{d\vartheta} \quad (3.3.17)$$

Si osservi che il generico elemento  $m_{i,j}$  di  $M(N, \vartheta)$  è pari a

$$m_{i,j} = (M(N, \vartheta))_{i,j} = \frac{\partial^2 J_N(\vartheta)}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_i} \quad (3.3.18)$$

e che  $Q(N, \vartheta)$  è una matrice cubica il cui elemento generico è dato da

$$q_{i,j,k} = [Q(N, \vartheta)]_{i,j,k} = \frac{\partial m_{i,j}}{\partial \vartheta_k} = \frac{\partial^3 J_N(\vartheta)}{\partial \vartheta_k \partial \vartheta_j \partial \vartheta_i}. \quad (3.3.19)$$

Inoltre, dato un vettore  $\Delta\vartheta \in \mathbb{R}^m$  il prodotto  $Q(N, \vartheta)\Delta\vartheta$  è una matrice quadrata il cui generico elemento di indici  $i, j$  è dato da

$$(Q(N, \vartheta)\Delta\vartheta)_{i,j} = \sum_k^m q_{i,j,k} \Delta\vartheta_k. \quad (3.3.20)$$

Si vuole ora dare una espressione per lo sviluppo in serie del vettore  $\gamma(N, \vartheta)$  attorno al punto  $\vartheta^*$ . Per cominciare è facile mostrare che vale

$$\begin{aligned} \gamma(N, \vartheta) - \gamma(N, \vartheta^*) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \gamma(N, s\vartheta + (1-s)\vartheta^*) ds = \\ &= \int_0^1 M(N, s\vartheta + (1-s)\vartheta^*) ds (\vartheta - \vartheta^*) \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

ed in modo simile

$$\begin{aligned} M(N, s\vartheta + (1-s)\vartheta^*) - M(N, \vartheta^*) &= \\ &= \int_0^1 \frac{dM}{d\tau} (N, \tau[s\vartheta + (1-s)\vartheta^*] + (1-\tau)\vartheta^*) d\tau = \\ &= \int_0^1 Q(N, s\tau\vartheta + (1-s\tau)\vartheta^*) d\tau [s(\vartheta - \vartheta^*)]. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Sostituendo la (3.3.22) nella (3.3.21) e definendo

$$\bar{Q}(N, \vartheta) = \int_0^1 \int_0^1 Q(N, s\tau\vartheta + (1-s\tau)\vartheta^*) d\tau s ds \quad (3.3.23)$$

si ha

$$\gamma(N, \vartheta) = \gamma(N, \vartheta^*) + M(N, \vartheta^*)(\vartheta - \vartheta^*) + [\bar{Q}(N, \vartheta)(\vartheta - \vartheta^*)](\vartheta - \vartheta^*) \quad (3.3.24)$$

che è lo sviluppo in serie con resto di  $\gamma(N, \vartheta)$  intorno a  $\vartheta^*$  arrestato al primo termine. Si osservi che la stima di massima verosimiglianza  $\hat{\vartheta}_N$  è tale da annullare  $\gamma(N, \vartheta)$ , ovvero

$$\hat{\vartheta}_N : \quad \gamma(N, \vartheta) = \left[ \frac{dJ_N(\vartheta)}{d\vartheta} \right]_{\hat{\vartheta}_N}^T = 0. \quad (3.3.25)$$

Dalle (3.3.15), (3.3.16), (3.3.17) e (3.1.22) si ha

$$\gamma(N, \vartheta) = -2 \left( \frac{d}{d\vartheta} H_N(\vartheta) \right)^T \Psi_N^{-1} (z_N - H_N(\vartheta)). \quad (3.3.26)$$

e

$$\begin{aligned} M(N, \vartheta) &= 2 \left( \frac{d}{d\vartheta} H_N(\vartheta) \right)^T \Psi_N^{-1} \frac{d}{d\vartheta} H_N(\vartheta) - \\ &- 2 \left[ \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{d}{d\vartheta} H_N(\vartheta) \right) \right]^T \Psi_N^{-1} (z_N - H_N(\vartheta)). \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

Per semplicità la (3.3.27) verrà riscritta utilizzando la pseudo-matrice di dimensioni  $m \times m \times (N+1)q$  definita come

$$L_N(\vartheta) \triangleq \left[ \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{d}{d\vartheta} H_N(\vartheta) \right) \right]^T, \quad (3.3.28)$$

e le matrici  $m \times m$

$$M_1(N, \vartheta) \triangleq 2 \left( \frac{d}{d\vartheta} H_N(\vartheta) \right)^T \Psi_N^{-1} \frac{d}{d\vartheta} H_N(\vartheta) \quad (3.3.29)$$

e

$$M_2(N, \vartheta) \triangleq -2 L_N(\vartheta) \Psi_N^{-1} (z_N - H_N(\vartheta)), \quad (3.3.30)$$

così da avere

$$M(N, \vartheta) = M_1(N, \vartheta) + M_2(N, \vartheta). \quad (3.3.31)$$

Si può ora dimostrare il seguente risultato

**Lemma 3.3.5** – Data la stabilità asintotica in  $\vartheta^*$  del sistema, la uniforme limitatezza dell'ingresso e l'ipotesi (iii) si ha

$$P\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{N} (M(N, \vartheta^*) - M_1(N, \vartheta^*)) \right\| = 0. \quad (3.3.32)$$

**Dimostrazione** – La (3.3.32) asserisce che la matrice di variabili aleatorie  $(M(N, \vartheta^*) - M_1(N, \vartheta^*)) / N$ , che in base alla definizioni date è pari a  $M_2(N, \vartheta^*) / N$ , converge in probabilità alla matrice nulla. Poiché la convergenza in probabilità è implicata dalla convergenza in media quadratica, sarà sufficiente dimostrare quest'ultima. Innanzitutto per calcolo diretto si ha

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{N} (M(N, \vartheta^*) - M_1(N, \vartheta^*)) \right\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{N} M_2(N, \vartheta^*) \right\} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} E \left( -\frac{2}{N} L_N(\vartheta) \Psi_N^{-1} (z_N - H_N(\vartheta^*)) \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

poiché  $E(z_N - H_N(\vartheta^*)) = 0$ . Si consideri allora il limite

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{N} M_2(N, \vartheta^*) \cdot \frac{1}{N} M_2(N, \vartheta^*)^T \right\} &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{N^2} E \left\{ L_N(\vartheta) \Psi_N^{-1} (z_N - H_N(\vartheta)) \cdot \right. \\ &\quad \left. (z_N - H_N(\vartheta))^T \Psi_N^{-1} L_N(\vartheta)^T \right\} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{N^2} L_N(\vartheta) \Psi_N^{-1} L_N^T(\vartheta). \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

L'argomento del limite è una matrice quadrata definita positiva. Invece di mostrare la convergenza a zero elemento per elemento, verrà dimostrata la convergenza a zero della norma. Per la norma dell'argomento del limite valgono le seguenti maggiorazioni

$$\frac{4}{N^2} \|L_N(\vartheta) \Psi_N^{-1} L_N^T(\vartheta)\| \leq \frac{4}{N^2} \|\Psi_N^{-1}\| \cdot \|L_N(\vartheta)\|^2. \quad (3.3.35)$$

Inoltre, poiché  $\Psi_N^{-1} = \text{diag} \{(GG^T)^{-1} \dots (GG^T)^{-1}\}$  si ha

$$\begin{aligned} \|\Psi_N^{-1}\|^2 &\triangleq \sup_{\|y\|=1} \|\Psi_N^{-1}y\|^2 = \\ &= \sup_{\|y_1\|^2 + \dots + \|y_N\|^2 = 1} (\|(GG^T)^{-1}y_1\|^2 + \dots + \|(GG^T)^{-1}y_N\|^2) \end{aligned}$$

dove  $y_1, \dots, y_N$  rappresentano una partizione di  $y$  in componenti equidimensionali di dimensione  $q$ . Quindi

$$\begin{aligned} \|\psi_N^{-1}\|^2 &\leq \sup_{\sum_{i=1}^N \|y_i\|^2 = 1} \|(GG^T)^{-1}\|^2 \cdot \sum_{i=1}^N \|y_i\|^2 = \\ &= \|(GG^T)^{-1}\|^2 \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

ove il segno di uguaglianza vale per  $\|y_i\| = 1$  e  $\|y_j\| = 0$ ,  $i \neq j$ . Inoltre per la norma di  $L_N(\vartheta^*)$  si ha la seguente maggiorazione

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{d\vartheta} \left[ \left( \frac{d}{d\vartheta} H_N(\vartheta) \right)^T \right]_{\vartheta=\vartheta^*} \right\| &= \sup_{\|\Delta\vartheta\|=1} \left\| \begin{bmatrix} \frac{d^2 h_1(t_1, \vartheta^*)}{d\vartheta^2} \Delta\vartheta \\ \vdots \\ \frac{d^2 h_q(t_N, \vartheta^*)}{d\vartheta^2} \Delta\vartheta \end{bmatrix} \right\|^2 = \\ &\leq \sup_{\|\Delta\vartheta\|=1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^q \left\| \frac{d^2 h_j(t_i, \vartheta^*)}{d\vartheta^2} \Delta\vartheta \right\|^2 \\ &\leq \sup_{\|\Delta\vartheta\|=1} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{d^2 h(t_i, \vartheta^*)}{d\vartheta^2} \right\|^2 \cdot \|\Delta\vartheta\|^2 \leq N c_1^2 \end{aligned}$$

dove  $c_1$  è una opportuna costante che maggiora ciascun elemento della sommatoria per qualunque coppia  $i, j$ . Per mostrare che la costante  $c_1$  esiste finita, si definisca la sensibilità di ordine  $k$  dello stato come

$$S_x^{(k)} = \frac{d^k}{d\vartheta^k} x(t, \vartheta, u) \quad (3.3.37)$$

(si noti che  $S_x^{(2)}$  è una matrice a tre dimensioni). Si hanno le seguenti espressioni per le sensibilità

$$\begin{aligned} \dot{S}_x^{(1)} &= A(\vartheta) S_x^{(1)}(t) + \frac{dA(\vartheta)}{d\vartheta} x(t, \vartheta, u) + \frac{dB(\vartheta)}{d\vartheta} u(t), \\ \dot{S}_x^{(2)} &= A(\vartheta) S_x^{(2)}(t) + 2 \frac{dA(\vartheta)}{d\vartheta} S_x^{(1)}(t) + \frac{d^2 A(\vartheta)}{d\vartheta^2} x(t, \vartheta, u) + \frac{d^2 B(\vartheta)}{d\vartheta^2} u(t). \end{aligned}$$

Dalle ipotesi di stabilità asintotica di  $A(\vartheta^*)$  e di uniforme limitatezza dell'ingresso, segue che per  $\vartheta = \vartheta^*$  le sensibilità  $S_x^{(1)}(t)$  e  $S_x^{(2)}(t)$  sono uniformemente limitate. Poiché, considerando l'uscita  $j$ -esima, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h_j(t, \vartheta)}{d\vartheta^2} &= \frac{d^2 C_j(\vartheta)}{d\vartheta^2} x(t, \vartheta, u) + 2 \frac{dC_j(\vartheta)}{d\vartheta} S_x^{(1)}(t) + \\ &\quad + C_j(\vartheta) S_x^{(2)}(t) + \frac{d^2 D_j(\vartheta)}{d\vartheta^2} u(t) \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

allora per  $\vartheta = \vartheta^*$  è evidente che esiste una costante  $c_1$  che limita uniformemente

$$\left\| \frac{d^2 h(t, \vartheta)}{d\vartheta^2} \Big|_{\vartheta^*} \right\|. \quad (3.3.39)$$

Il limite della norma dell'argomento del limite (3.3.34) è allora pari a

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{N^2} \|L_N(\vartheta) \Psi_N^{-1} L_N^T(\vartheta)\| &\leq \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{N^2} \|(GG^T)^{-1}\|^2 N c_1^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.3.40)$$

Il limite (3.3.34) è quindi nullo, e ciò prova il lemma poiché la convergenza in media quadratica implica la convergenza in probabilità. ■

**Lemma 3.3.6** – Si ha, nelle ipotesi del lemma (3.3.5)

$$P\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \gamma(N, \vartheta^*) = 0 \quad (3.3.41)$$

**Dimostrazione** – Si osservi innanzitutto che  $E(\frac{1}{N} \gamma(N, \vartheta^*)) = 0$ . Inoltre, per  $N \rightarrow \infty$ ,

$$E\left\{ \frac{1}{N^2} \gamma(N, \vartheta^*) \gamma(N, \vartheta^*)^T \right\} = \frac{4}{N^2} \left( \frac{d}{d\vartheta} H_N(\vartheta) \right)^T \Psi_N^{-1} \frac{d}{d\vartheta} H_N(\vartheta) \rightarrow 0$$

data l'uniforme limitatezza di  $\left\| \frac{d}{d\vartheta} h(t, \vartheta) \right\|_{\vartheta^*}$ . Quindi, dati  $\epsilon > 0$  e  $\delta_1 > 0$ , esiste  $N''(\epsilon, \delta_1)$  tale che per  $N > N''$  si ha, con probabilità maggiore di  $1 - \epsilon$ , che

$$\left\| \frac{1}{N} \gamma(N, \vartheta^*) \right\| \leq \delta_1 \quad (3.3.42)$$

e cioè la tesi. ■

**Lemma 3.3.7** – Nelle ipotesi del lemma 3.3.5, dato  $\epsilon > 0$ , esistono un  $N'''(\epsilon)$  ed una costante positiva  $c$  tali che, per  $N > N'''$  e per ogni  $\vartheta \in S(\vartheta^*, r)$ , cioè nella sfera di centro  $\vartheta$  e raggio  $r$  per cui il sistema rimane stabile, si ha con probabilità maggiore di  $1 - \epsilon$

$$\left\| \frac{1}{N} [\bar{Q}(N, \vartheta)(\vartheta - \vartheta^*)](\vartheta - \vartheta^*) \right\| \leq c \|\vartheta - \vartheta^*\|^2 \quad (3.3.43)$$

**Dimostrazione** – Si ha per ogni  $\vartheta \in S(\vartheta^*, r)$

$$\left\| \frac{1}{N} [\bar{Q}(N, \vartheta)(\vartheta - \vartheta^*)](\vartheta - \vartheta^*) \right\| \leq \sup_{\vartheta \in S(\vartheta^*, r)} \frac{1}{N} \|\bar{Q}(N, \vartheta)\| \cdot \|\vartheta - \vartheta^*\|^2.$$

Il lemma si dimostra con tecniche analoghe a quelle della prova del lemma 3.3.5, tenendo conto che la sensibilità di ordine 3 dell'uscita è uniformemente limitata per  $\vartheta \in S(\vartheta^*, r)$ . ■

Ricordando ora la definizione di  $M_1$  si può scrivere

$$\frac{1}{N} M_1(N, \vartheta^*) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{d}{d\vartheta} h(t_i, \vartheta^*) \right)^T (GG^T)^{-1} \frac{d}{d\vartheta} h(t_i, \vartheta^*).$$

In base alla definizione di ingresso persistentemente eccitante nel caso di osservazioni rumorose a tempo discreto, ricordando che  $y_{\vartheta^*}(t_i) = \frac{d}{d\vartheta} h(t_i, \vartheta^*)$ , si può concludere che esiste una costante  $\sigma > 0$  tale che definitivamente (ovvero  $\exists N_0$  tale che  $\forall N > N_0$ ) si ha

$$\frac{1}{N} M_1(N, \vartheta^*) \geq \sigma I. \quad (3.3.45)$$

Ciò equivale ad affermare che esiste una costante positiva  $\sigma$  tale che definitivamente il minimo autovalore di  $\frac{1}{N} M_1(N, \vartheta^*)$ , risulta maggiore o uguale a  $\sigma$ , e cioè

$$\lambda_{\min} \left\{ \frac{1}{N} M_1(N, \vartheta^*) \right\} \geq \sigma. \quad (3.3.46)$$

**Lemma 3.3.8** – Dati  $\epsilon'$  ed  $\epsilon$  sufficientemente piccoli, esiste un  $N'(\epsilon, \epsilon')$  tale che per  $N > N'$ , con probabilità maggiore di  $1 - \epsilon$ , il minimo autovalore di  $\frac{1}{N} M(N, \vartheta^*)$  è maggiore di  $\sigma - \epsilon'$ .

**Dimostrazione** – È conseguenza immediata dei lemmi 3.3.5 e 3.3.46. ■

Si osservi ora che, scegliendo  $\epsilon' = \sigma/2$ , si ha in probabilità per  $N > N'(\epsilon)$

$$\left\| \left[ \frac{1}{N} M(N, \vartheta^*) \right]^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\sigma'} \quad \text{dove} \quad \sigma' \triangleq \frac{\sigma}{2}. \quad (3.3.47)$$

Infatti se il minimo autovalore di una matrice  $Q$  simmetrica definita positiva è  $\lambda_{\min}(Q) > \frac{\sigma}{2}$ , si ha  $\lambda_{\max}(Q^{-1}) \leq \frac{2}{\sigma}$ ; inoltre, poiché la norma delle matrici simmetriche definite positive è uguale al massimo autovalore, si ha  $\|Q^{-1}\| \leq \frac{2}{\sigma}$ .

È ora possibile fornire la dimostrazione del teorema (3.3.4)

**Dimostrazione** – Si definisca il vettore

$$\nu \equiv \vartheta - \vartheta^*$$

e la funzione

$$\Gamma_N(\nu) = \nu - M^{-1}(N, \vartheta^*) \gamma(N, \vartheta^* + \nu). \quad (3.3.48)$$

Sostituendo lo sviluppo in serie (3.3.24) di  $\gamma(N, \cdot)$  nella espressione precedente si ha

$$\begin{aligned} \Gamma_N(\nu) &= \nu - M^{-1}(N, \vartheta^*) \cdot \left( \gamma(N, \vartheta^*) + M(N, \vartheta^*) \nu + [\bar{Q}(N, \vartheta^* + \nu) \nu] \right) = \\ &= -M^{-1}(N, \vartheta^*) \gamma(N, \vartheta^*) - M^{-1}(N, \vartheta^*) [\bar{Q}(N, \vartheta^* + \nu) \nu] \nu, \end{aligned}$$



che può essere riscritto come

$$\Gamma_N(\nu) = - \left[ \frac{M(N, \vartheta^*)}{N} \right]^{-1} \cdot \left( \frac{\gamma(N, \vartheta^*)}{N} + \left[ \frac{1}{N} \bar{Q}(N, \vartheta^* + \nu) \nu \right] \nu \right).$$

Tenendo conto delle maggiorazioni illustrate dai lemmi 3.3.6, 3.3.7 e 3.3.8, dati  $\epsilon > 0$  e  $\delta_1 > 0$  (con  $\delta_1$  tale che  $\frac{2\delta_1}{\sigma'} \leq \frac{\sigma'}{4c}$ ), si ha per ogni  $N > \max\{N'(\epsilon), N''(\epsilon, \delta_1), N'''(\epsilon)\}$  con probabilità maggiore di  $1 - \epsilon$

$$\|\Gamma_N(\nu)\| \leq \frac{\delta_1}{\sigma'} + \frac{c}{\sigma'} \|\nu\|^2.$$

Sia ora  $\delta$  nell'intervallo  $[\frac{2\delta_1}{\sigma'}, \frac{\sigma'}{4c}]$ . Si ha di conseguenza

$$\frac{2\delta_1}{\sigma'} \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta_1}{\sigma'} \leq \frac{\delta}{2}, \quad (3.3.49)$$

e

$$\begin{aligned} \delta \leq \frac{\sigma'}{4c} &\Rightarrow \frac{4c\delta}{\sigma'} \leq 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{c\delta^2}{\sigma'} \leq \frac{\delta}{4}. \end{aligned} \quad (3.3.50)$$

Ne consegue che per ogni  $\nu$  tale che  $\|\nu\| \leq \delta$ , si ha

$$\|\Gamma_N(\nu)\| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4} = \frac{3\delta}{4}.$$

Una funzione  $\Gamma_N(\nu)$  che soddisfa a condizioni del tipo

$$\|\nu\| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|\Gamma_N(\nu)\| \leq \alpha\delta, \quad (3.3.51)$$

con  $\alpha < 1$  è detta essere una **contrazione** e per il cosiddetto teorema del punto fisso per essa esiste un  $\hat{\nu}_N$  tale che

$$\begin{aligned} \|\hat{\nu}_N\| &\leq \delta, \\ \Gamma_N(\hat{\nu}_N) &= \hat{\nu}_N. \end{aligned} \quad (3.3.52)$$

Infine dalla definizione della funzione  $\Gamma_N(\nu)$ , ed essendo  $\frac{1}{N}M(N, \vartheta^*)$  definita positiva, si ha

$$\gamma(N, \vartheta^* + \hat{\nu}_N) = 0$$

Ne consegue che  $\hat{\vartheta}_N \triangleq \vartheta^* + \hat{\nu}_N$  è proprio la stima di massima verosimiglianza di  $\vartheta^*$ , ed è unica per le ipotesi fatte. Potendosi poi scegliere  $\delta$  arbitrariamente piccolo (scegliendo opportunamente  $\delta_1$ ), segue che in probabilità  $\hat{\vartheta}_N \rightarrow \vartheta^*$ , il che dimostra la consistenza della stima. ■

# Il Filtro di Kalman

**I**N questo capitolo viene considerato il problema della stima ottima dello stato in sistemi lineari a tempo discreto con rumore gaussiano che agisce sullo stato e sulle osservazioni dell'uscita. Con queste ipotesi ad ogni istante di tempo lo stato e l'uscita osservata sono entrambi vettori aleatori gaussiani, di cui è possibile calcolare media e covarianza. Ha senso quindi utilizzare il criterio della minima varianza nella stima dello stato a partire dalle osservazioni delle uscite fino all'istante considerato per la stima. Si perverrà così ad una relazione lineare del tipo (2.3.25), in cui la stima ottima dello stato dipende linearmente dagli scostamenti delle osservazioni dai valori attesi. Il notevole risultato ottenuto da Kalman è stato quello di costruire un algoritmo ricorsivo, denominato **filtro di Kalman**, che consente il calcolo della stima ottima dello stato ad un certo istante utilizzando le sole osservazioni nello stesso istante e la stima ottima dello stato all'istante precedente. La formulazione del problema della stima dello stato, la derivazione del filtro di Kalman e lo studio delle sue proprietà costituiscono l'oggetto principale di questo capitolo, nel quale verrà anche presentata una tecnica che estende l'applicazione del filtro di Kalman per la stima ricorsiva dello stato nei sistemi non lineari. Sarà inoltre affrontato il problema della stima dello stato per sistemi lineari in presenza di rumore non gaussiano.

## 4.1 Formulazione del problema

Si consideri un sistema lineare a tempo discreto, in cui il forzamento è costituito da una componente nota ed una componente aleatoria (rumore di stato). Inoltre le osservazioni dell'uscita siano affette da rumore di misura (rumore di osservazione). Un sistema di questo tipo è descritto da equazioni del tipo

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + \tilde{F}(k)N'_k, \quad (4.1.1a)$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) + \tilde{G}(k)N''_k. \quad (4.1.1b)$$

$$\text{con } x(k) \in \mathbb{R}^n, \quad u(k) \in \mathbb{R}^p, \quad y(k) \in \mathbb{R}^q.$$

Le sequenze  $\{N'_k\}$  e  $\{N''_k\}$  sono famiglie di vettori aleatori parametrizzati con gli interi positivi. La sequenza  $\{u(k)\}$  costituisce l'ingresso deterministico al sistema e si suppone nota, mentre il rumore di stato  $N'_k = \tilde{F}(k)N'_k$  ed il rumore di osservazione  $N''_k = \tilde{G}(k)N''_k$  ne costituiscono l'ingresso stocastico, che in quanto tale è noto solo attraverso le sue caratteristiche statistiche (densità di probabilità o semplicemente media e covarianza). La presenza delle matrici  $\tilde{F}(k)$  e  $\tilde{G}(k)$  serve per rendere più generale la formulazione, consentendo di trattare casi in cui vi sia una particolare struttura nell'azione del rumore sullo stato o sulle osservazioni.

Senza perdita di generalità conviene supporre che i rumori di stato e di osservazione siano a media nulla.

**Osservazione 4.1.1** – Nel caso in cui i rumori non fossero a media nulla sarebbe comunque facile ricondursi ad un sistema del tipo (4.1.1), con rumori a media nulla, semplicemente ridefinendo opportunamente l'ingresso  $u$ , le matrici  $B$  e  $D$  ed il rumore di stato e di osservazione. Ad esempio, siano  $m'_k = E\{N'_k\}$  e  $m''_k = E\{N''_k\}$ . Con le seguenti definizioni

$$\begin{aligned} \bar{N}'_k &= N'_k - m'_k, & \bar{N}''_k &= N''_k - m''_k, \\ \bar{B}(k) &= [B(k) \quad \tilde{F}(k) \quad 0], & \bar{u}(k) &= \begin{bmatrix} u(k) \\ m'_k \\ m''_k \end{bmatrix}, \\ \bar{D}(k) &= [D(k) \quad 0 \quad \tilde{G}(k)], \end{aligned}$$

il sistema (4.1.1) in cui i rumori sono a media non nulla viene trasformato nel sistema

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + \bar{B}(k)\bar{u}(k) + \tilde{F}(k)\bar{N}'_k, \\ y(k) &= C(k)x(k) + \bar{D}(k)\bar{u}(k) + \tilde{G}(k)\bar{N}''_k. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

in cui i rumori sono a media nulla.  $\triangle$

Il problema che si pone è quello di stimare lo stato  $x$  all'istante  $j$  a partire dalla sequenza delle osservazioni fino ad un certo istante  $k$

$$\{y(0), y(1), \dots, y(k)\}. \quad (4.1.3)$$

Se  $j = k$  si ha un problema di **filtraggio**, se  $j < k$  si ha una **interpolazione** e se  $j > k$  si ha una **predizione**. Più in dettaglio se  $j = k + m$  si parla di predizione ad  $m$  passi.

Per semplificare la formulazione del problema è conveniente sfruttare il principio di sovrapposizione degli effetti, derivante dalla linearità del sistema, per scomporre lo stato in una parte deterministica  $x_d$ , dipendente dal solo ingresso deterministico  $\{u(k)\}$ , ed in una parte stocastica  $x_s$  dipendente dal solo ingresso stocastico  $\{N'_k\}$ . Ciò può essere fatto semplicemente prendendo come parte deterministica il valor medio di  $x(k)$ , definendo

$$\begin{aligned} x_d(k) &\triangleq E\{x(k)\}, \\ x_s(k) &\triangleq x(k) - x_d(k) \end{aligned} \quad \implies \quad x(k) = x_d(k) + x_s(k). \quad (4.1.4)$$

Con queste definizioni lo stato stocastico  $\{x_s(k)\}$  risulta essere una sequenza di variabili aleatorie a media nulla. Supponendo che lo stato iniziale  $x(0)$  sia un vettore aleatorio di valore atteso noto  $x_0$ , è facile calcolare l'evoluzione della parte deterministica dello stato  $x_d(k)$  a partire dalla conoscenza dell'ingresso deterministico. Si ha infatti

$$\begin{aligned} x_d(k+1) &= E\{x(k+1)\} = E\left\{A(k)x(k) + B(k)u(k) + \tilde{F}(k)N'_k\right\} \\ &= A(k)E\{x(k)\} + B(k)u(k) + \tilde{F}(k)E\{N'_k\} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

e quindi, con le ipotesi fatte

$$x_d(k+1) = A(k)x_d(k) + B(k)u(k).$$

Si ha quindi, dalla linearità

$$x_d(k+1) = A(k)x_d(k) + B(k)u(k), \quad x_d(0) = x_0, \quad (4.1.6a)$$

$$x_s(k+1) = A(k)x_s(k) + \tilde{F}(k)N'_k, \quad x_s(0) = x(0) - x_0. \quad (4.1.7b)$$

È facile verificare che il valore atteso di  $x_s(0)$  è uguale a 0, e che la sua covarianza è pari alla covarianza di  $x(0)$ , indicata con  $\Psi_{x(0)}$ .

Si può notare che mentre nella (4.1.6a) sono noti sia lo stato iniziale che gli ingressi, ciò non è vero per la (4.1.7b). L'obiettivo è quindi quello di stimare lo stato nella sola parte stocastica. È necessario a questo scopo effettuare anche la scomposizione dell'uscita in una componente deterministica  $y_d$  ed in una stocastica  $y_s$ . Sostituendo la (4.1.4) nella (4.1.1b) si ottiene

$$y(k) = C(k)x_d(k) + C(k)x_s(k) + D(k)u(k) + \tilde{G}(k)N''_k \quad (4.1.8)$$

e quindi si può definire

$$y_d(k) = C(k)x_d(k) + D(k)u(k), \quad (4.1.9a)$$

$$y_s(k) = C(k)x_s(k) + \tilde{G}(k)N''_k. \quad (4.1.9b)$$

Si osservi che l'uscita del sistema stocastico è una variabile aleatoria a media nulla

$$E\{y_s(k)\} = C(k)E\{x_s(k)\} + \tilde{G}(k)E\{N''_k\} = 0. \quad (4.1.10)$$

In conclusione la parte stocastica del sistema avrà equazioni

$$x_s(k+1) = A(k)x_s(k) + \tilde{F}(k)N'_k, \quad (4.1.11a)$$

$$y_s(k) = C(k)x_s(k) + \tilde{G}(k)N''_k. \quad (4.1.11b)$$

**Osservazione 4.1.2** – Senza perdita di generalità conviene supporre che le covarianze dei rumori  $N'_k$  e  $N''_k$  siano pari all'identità. Ciò non è riduttivo in quanto se fosse

$$E\{N'_k N'^T_k\} = \Psi'_k > 0, \quad \text{e} \quad E\{N''_k N''^T_k\} = \Psi''_k > 0, \quad (4.1.12)$$

ci si potrebbe ricondurre a rumori con covarianza unitaria semplicemente considerando le sequenze

$$\bar{N}'_k = (\Psi'_k)^{-\frac{1}{2}} N'_k \quad \text{e} \quad \bar{N}''_k = (\Psi''_k)^{-\frac{1}{2}} N''_k, \quad (4.1.13)$$

e utilizzando al posto di  $\tilde{F}(k)$  e  $\tilde{G}(k)$  le matrici

$$\bar{F}(k) = \tilde{F}(k)(\Psi'_k)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \bar{G}(k) = \tilde{G}(k)(\Psi''_k)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.1.14)$$

È facile infatti verificare che le nuove sequenze di rumore hanno covarianza unitaria

$$\begin{aligned} E\{\bar{N}'_k \bar{N}'^T_k\} &= (\Psi'_k)^{-\frac{1}{2}} E\{N'_k N'^T_k\} (\Psi'_k)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= (\Psi'_k)^{-\frac{1}{2}} \Psi'_k (\Psi'_k)^{-\frac{1}{2}} = I, \\ E\{\bar{N}''_k \bar{N}''^T_k\} &= (\Psi''_k)^{-\frac{1}{2}} E\{N''_k N''^T_k\} (\Psi''_k)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= (\Psi''_k)^{-\frac{1}{2}} \Psi''_k (\Psi''_k)^{-\frac{1}{2}} = I, \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

e che il loro effetto sullo stato e sull'uscita non cambia in quanto

$$\bar{F}(k) \bar{N}'_k = \tilde{F}(k) N'_k, \quad \text{e} \quad \bar{G}(k) \bar{N}''_k = \tilde{G}(k) N''_k. \quad (4.1.16)$$

△

Il problema del filtraggio per il sistema stocastico (4.1.11) consiste nel determinare una stima di  $x_s(k)$ , data una sequenza di uscite  $\{y_s(0), y_s(1), \dots, y_s(k)\}$ , utilizzando al meglio il modello, ovvero la conoscenza delle matrici  $A(k)$ ,  $\bar{F}(k)$ ,  $C(k)$  e  $\bar{G}(k)$ . Ovviamente la stima dello stato  $x(k)$  è ottenibile, una volta nota la stima  $\tilde{x}_s(k)$  della parte stocastica, dalla somma di quest'ultima e

della parte deterministica. Per semplicità di notazione nel seguito si ometterà il pedice  $s$ , specificandolo solo qualora la sua assenza possa dar luogo ad ambiguità.

Allo scopo di semplificare ulteriormente la scrittura è utile definire

$$N_k = \begin{bmatrix} N'_k \\ N''_k \end{bmatrix}, \quad (4.1.17)$$

così da disporre di un unico vettore che rappresenti il rumore nel sistema. È opportuno ridefinire anche le matrici  $\tilde{F}$  e  $\tilde{G}$  come

$$\begin{aligned} F(k) &= \begin{bmatrix} \tilde{F}(k) & 0 \end{bmatrix}, \\ G(k) &= \begin{bmatrix} 0 & \tilde{G}(k) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

in modo da avere

$$\tilde{F}(k) N'_k = F(k) N_k \quad \text{e} \quad \tilde{G}(k) N''_k = G(k) N_k. \quad (4.1.19)$$

Con queste posizioni le equazioni del sistema stocastico (4.1.11) diventano

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + F(k)N_k, \\ y(k) &= C(k)x(k) + G(k)N_k. \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Questa scrittura è particolarmente utile quando i rumori  $N'_k$  e  $N''_k$  sono scorrelati. In questo caso infatti si ha  $E\{N'_k N''^T_k\} = 0$  e quindi la matrice di covarianza del rumore  $N_k$  risulta essere pari all'identità. In particolare verrà fatta l'ipotesi che la sequenza  $\{N_k\}$  sia bianca e standard, ovvero tale che

$$E\{N_k N_j^T\} = \delta_{kj} I.$$

Con questa ipotesi il rumore di stato all'istante  $k$ ,  $F(k)N_k$ , ed il rumore di osservazione all'istante  $j$ ,  $G(j)N_j$ , risultano scorrelati, grazie anche alla struttura delle matrici (4.1.18). Si ha infatti per qualunque coppia di istanti  $k$  e  $j$

$$E\{F(k)N_k N_j^T G^T(j)\} = \delta_{kj} F(k)G^T(j) = 0, \quad \forall k, j.$$

**Osservazione 4.1.3** – Poiché il rumore di osservazione è in sostanza un rumore di misura, sempre presente in ogni misurazione di grandezze fisiche, è ragionevole supporre che tale rumore su ciascuna delle componenti dell'uscita sia indipendente dal rumore sulle altre componenti. Questo significa che la matrice di covarianza dell'errore di uscita  $G(k)N_k$ , che è data dal prodotto  $G(k)G^T(k)$ , risulta essere definita positiva e quindi a rango pieno, e di conseguenza le  $p$  righe della  $G(k)$  devono essere linearmente indipendenti.  $\triangle$

Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  lo spazio di base per il sistema che si sta considerando e si indichi con  $\mathcal{F}_k^Y$  la  $\sigma$ -algebra generata dal vettore aleatorio ottenuto dall'aggregazione delle osservazioni, ovvero

$$Y_k \triangleq \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}, \quad (4.1.21)$$

$$\mathcal{F}_k^Y \triangleq \sigma(Y_k). \quad (4.1.22)$$

$\mathcal{F}_k^Y$  è ovviamente una sotto  $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{F}$  e gode inoltre, come si può facilmente dimostrare, della seguente proprietà

$$\mathcal{F}_k^Y \subseteq \mathcal{F}_{k+1}^Y. \quad (4.1.23)$$

In altre parole la famiglia di  $\sigma$ -algebre  $\{\mathcal{F}_k^Y\}$  è non decrescente. Nella letteratura specifica una famiglia non decrescente di  $\sigma$ -algebre viene anche chiamata **filtrazione**.

Il problema che si sta affrontando è quello di individuare tra tutte le possibili stime  $\tilde{x}(k)$  dello stato, la stima migliore rispetto ad un dato indice di qualità. Una qualsiasi stima  $\tilde{x}(k)$ , dovendo essere determinata a partire dai dati in ingresso del problema, che sono le osservazioni, dovrà dipendere da una opportuna manipolazione di questi dati. Non è limitativo quindi supporre che sia rappresentata da una funzione di Borel  $\Phi(\cdot)$

$$\tilde{x}(k) = \Phi(Y_k). \quad (4.1.24)$$

Nel capitolo sulla stima si è visto che scegliendo come indice di qualità la varianza dell'errore di stima

$$J(\tilde{x}(k)) = E\{\|\tilde{x}(k) - x(k)\|^2\} \quad (4.1.25)$$

la stima ottima, in base alla (2.2.3), è data da

$$\hat{x}(k) = E\{x(k)|\mathcal{F}_k^Y\}, \quad (4.1.26)$$

indicata anche con  $\hat{x}(k) = E\{x(k)|Y_k\}$ . Si è anche visto che l'errore di stima  $x(k) - \hat{x}(k)$  ha media nulla ed ha la minima covarianza, ovvero

$$\begin{aligned} P(k) &= E\{(x(k) - \hat{x}(k))(x(k) - \hat{x}(k))^T\} \\ S(k) &= E\{(x(k) - \tilde{x}(k))(x(k) - \tilde{x}(k))^T\} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} P(k) \leq S(k), \\ \forall \tilde{x}(k) = \Phi(Y_k). \end{cases} \quad (4.1.27)$$

**Osservazione 4.1.4** – Spesso la grandezza che interessa stimare è l'uscita  $s(k) = C(k)x(k)$  del sistema (4.1.20), e non tutto lo stato  $x(k)$ . Pertanto a  $s(k)$  si attribuisce il nome di *segnale utile*. Si ha quindi che l'osservazione è pari a  $y(k) = s(k) + G(k)N(k)$ , e l'obiettivo del filtraggio è di separare, per quanto possibile, il segnale utile  $s(k)$  dal rumore  $G(k)N_k$ . In ogni caso la stima di minima varianza di  $s(k)$  passa per la stima ottima di tutto lo stato  $x(k)$ . Infatti

$$\begin{aligned} \hat{s}(k) &= E\{s(k)|\mathcal{F}_k^Y\} = E\{C(k)x(k)|\mathcal{F}_k^Y\} = \\ &= C(k)\hat{x}(k). \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

Quindi, per risolvere il problema della stima ottima del segnale utile è necessario risolvere il problema della stima dello stato.  $\triangle$

La soluzione del problema della stima ottima dello stato risiede nel calcolo della (4.1.26) ad ogni istante  $k$ . Per svolgere questo calcolo occorre disporre delle densità di probabilità dello stato iniziale  $x(0)$  e del rumore  $N_j$  per  $j = 0, \dots, k$ , in modo da poter poi calcolare, sfruttando opportunamente il modello (4.1.20), la densità

di probabilità del vettore  $x(k)$  condizionata alle osservazioni  $Y_k$ . A questo punto non resta che calcolarne il valore atteso condizionato svolgendo l'integrale (1.14.7).

Nel caso generale questo calcolo è molto complesso da effettuare, e non dà luogo a soluzioni di tipo ricorsivo, che sono quelle più atte ad essere impiegate nelle applicazioni in tempo reale.

Nel caso, però, in cui la sequenza  $N_k$  sia gaussiana e bianca esiste una soluzione elegante ed in forma ricorsiva del problema, che prende il nome di **filtro di Kalman**, e che verrà ampiamente illustrata nel seguito del capitolo. Si riportano qui di seguito le proprietà che saranno ipotizzate per il rumore  $N_k$ , che lo caratterizzano come sequenza aleatoria gaussiana bianca standard.

- 1)  $N_k(\omega)$  è un vettore aleatorio gaussiano;
- 2)  $E\{N_k\} = 0$ ;
- 3)  $E\{N_k N_j^T\} = \delta_{k,j} I, \quad \forall i, j$ .

La proprietà (3) asserisce che non vi è correlazione tra i rumori in istanti diversi, comunque essi siano vicini, e che quindi il valore assunto da  $N_{k-1}$  non è di alcuna utilità nella predizione di  $N_k$ . Ciò consente di dire che la sequenza  $N_k(\omega)$ , con  $\omega$  fissato, ha un contenuto di frequenza illimitato, ed è proprio questa caratteristica a costituire la **bianchezza** del rumore.

Altri commenti sulle ipotesi adottate per il rumore  $N_k$  sono riportati nel capitolo precedente, in quanto le stesse ipotesi vengono fatte sul rumore di osservazione nel problema della stima dei parametri in un sistema lineare tempo-continuo con osservazioni discrete rumorose.

Anche lo stato iniziale  $x(0)$  viene supposto essere una variabile aleatoria gaussiana a media nulla, scorrelata dal rumore  $N_k$ , per qualunque  $k$ . A partire dalla conoscenza della covarianza dello stato iniziale  $\Psi_{x(0)}$  è facile calcolare la covarianza dello stato in qualunque istante  $k$  in modo ricorsivo. Il calcolo si svolge nel modo seguente (si ricordi che per come è stato definito lo stato stocastico è a media

nulla)

$$\begin{aligned} \Psi_x(k+1) &= E\{x(k+1)x^T(k+1)\} = \\ &= E\left\{\left(A(k)x(k) + F(k)N_k\right)\left(A(k)x(k) + F(k)N_k\right)^T\right\} \\ &= A(k)E\{x(k)x^T(k)\}A^T(k) + A(k)E\{x(k)N_k^T\}F^T(k) + \\ &\quad + F(k)E\{N_k x^T(k)\}A^T(k) + F(k)E\{N_k N_k^T\}F(k)^T. \end{aligned}$$

Poiché lo stato all'istante  $k$  è scorrelato dal rumore allo stesso istante, in quanto è funzione dei soli termini  $N_j$  per  $j < k$ , e ricordando che la sequenza  $\{N_k\}$  è bianca e standard, si ha

$$\begin{aligned} \Psi_x(k+1) &= A(k)\Psi_x(k)A^T(k) + F(k)F(k)^T, \\ \Psi_x(0) &= \Psi_{x(0)}. \end{aligned} \tag{4.1.29}$$

Questa è l'espressione ricorsiva che fornisce la sequenza delle covarianze dello stato. Più avanti nel testo si mostrerà che, nel caso di sistemi stazionari, se la matrice  $A$  ha tutti gli autovalori in modulo minori di uno, la covarianza dello stato tende ad un valore limite  $\bar{\Psi}_x$ , indipendente da  $\Psi_{x(0)}$ , che risolve l'equazione algebrica

$$\bar{\Psi}_x = A\bar{\Psi}_x A^T + FF^T. \tag{4.1.30}$$

## 4.2 Sequenze di innovazione

Le ipotesi di gaussianità sui rumori e sullo stato iniziale consentono di asserire che lo stato e le osservazioni sono le componenti di un vettore aleatorio gaussiano. Pertanto la stima ottima dello stato all'istante  $k$  può essere ottenuta dalle osservazioni dall'istante 0 fino all'istante  $k$  per mezzo di una operazione *affine* (quasi lineare), che è data dalla (2.3.25). Al fine di facilitare i calcoli è utile definire delle nuove variabili aleatorie sulle quali operare per il calcolo della stima ottima. Tali variabili aleatorie sono le cosiddette sequenze di innovazione dello stato e dell'uscita.

**Definizione 4.2.1** – Si definisce **sequenza di innovazione dello stato** la sequenza

$$\begin{aligned}\nu_s(0) &= \hat{x}(0) = 0 \\ \nu_s(k) &= \hat{x}(k) - E\{\hat{x}(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\}, \quad k \geq 1.\end{aligned}\quad (4.2.1)$$

•

**Definizione 4.2.2** – Si definisce **sequenza di innovazione dell'uscita** la sequenza

$$\begin{aligned}\nu_o(0) &= \hat{y}(0) = 0, \\ \nu_o(k) &= \hat{y}(k) - E\{\hat{y}(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\}, \quad k \geq 1.\end{aligned}\quad (4.2.2)$$

•

Dalla (4.1.26) segue che

$$E\{\hat{x}(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\} = E\{E[x(k)|\mathcal{F}_k^Y]|\mathcal{F}_{k-1}^Y\} \quad (4.2.3)$$

e quindi dalla (4.1.23) e dalla (1.13.7) si ottiene

$$E\{\hat{x}(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\} = E\{x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\}, \quad (4.2.4)$$

che costituisce la stima ottima dello stato all'istante  $k$  date le osservazioni fino all'istante  $k-1$  (predizione ottima ad un passo), e nella letteratura tecnica viene spesso indicata con la notazione  $\hat{x}(k|k-1)$ . L'innovazione dello stato è quindi una variabile aleatoria  $\mathcal{F}_k^Y$ -misurabile pari alla differenza tra la stima ottima dello stato al passo  $k$ , ottenuta in base alle osservazioni fino all'istante  $k$ , e la predizione ottima all'istante  $k$  ottenuta in base alle osservazioni fino all'istante  $k-1$ . Essa quindi rappresenta il contributo *innovativo* che l'osservazione  $k$ -esima apporta alla stima dello stato all'istante  $k$ .

Analoga interpretazione si può dare per l'innovazione dell'uscita. Poiché inoltre per definizione

$$\hat{y}(k) = E(y(k)|\mathcal{F}_k^Y) \quad (4.2.5)$$

essendo il vettore aleatorio  $y(k)$   $\mathcal{F}_k^Y$ -misurabile, si ha

$$\hat{y}(k) = y(k). \quad (4.2.6)$$

È possibile quindi riscrivere le sequenze di innovazione dello stato e dell'uscita nella seguente forma

$$\nu_s(k) = \hat{x}(k) - E\{x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\}, \quad (4.2.7)$$

$$\nu_o(k) = y(k) - E\{y(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\}. \quad (4.2.8)$$

Vi sono alcune proprietà importanti delle sequenze di innovazione che saranno sfruttate nel calcolo del filtro di Kalman, e che vengono qui di seguito enunciate nella forma di lemmi.

**Lemma 4.2.3** – La sequenza di innovazione dello stato soddisfa alle seguenti proprietà

$$E\{\nu_s(k)\} = 0 \quad (4.2.9a)$$

$$E\{\nu_s(k)\nu_s^T(j)\} = 0 \quad \forall k \neq j \quad (4.2.9b)$$

ed è quindi una sequenza bianca a valor medio nullo.

**Dimostrazione** – Ricordando che per qualunque variabile aleatoria  $z$  e qualunque sotto  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{G}$  vale la (1.13.6), che qui di seguito riportiamo

$$E\{z\} = E\{E(z|\mathcal{G})\}, \quad (4.2.10)$$

si dimostra facilmente la (4.2.9a)

$$\begin{aligned}E\{\nu_s(k)\} &= E\{E[x(k)|\mathcal{F}_k^Y] - E[x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y]\} = \\ &= E\{E[x(k)|\mathcal{F}_k^Y]\} - E\{E[x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y]\} = \\ &= E\{x(k)\} - E\{x(k)\} = 0.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la (4.2.9b), per definizione si ha

$$\begin{aligned}E\{\nu_s(k)\nu_s^T(j)\} &= \\ &= E\{[\hat{x}(k) - E(x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y)][\hat{x}(j) - E(x(j)|\mathcal{F}_{j-1}^Y)]^T\}.\end{aligned}\quad (4.2.11)$$

Poiché per ipotesi  $k \neq j$ , sarà  $k > j$  oppure  $k < j$ . È ovvio che sarà sufficiente condurre la dimostrazione in uno solo dei due casi. Nel seguito verrà considerato il caso  $k < j$ , e quindi  $k \leq j - 1$ , così che  $\mathcal{F}_k^Y \subseteq \mathcal{F}_j^Y$ . Con questa ipotesi, per la (1.13.6), considerata la sotto  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_k^Y$ , la relazione (4.2.11) può essere scritta

$$\begin{aligned} E\{\nu_s(k)\nu_s^T(j)\} &= \\ &= E\left\{E\{[\hat{x}(k) - E(x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y)][\hat{x}(j) - E(x(j)|\mathcal{F}_{j-1}^Y)]^T\}|\mathcal{F}_k^Y\right\}. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

È necessario a questo punto ricordare che se  $z$  è  $\mathcal{G}$ -misurabile vale il seguente risultato (Teorema 1.13.7)

$$E\{zw|\mathcal{G}\} = zE\{w|\mathcal{G}\}. \quad (4.2.13)$$

Si osservi che  $\nu_s(k)$  è  $\mathcal{F}_k^Y$ -misurabile. Infatti dalla definizione di valore atteso condizionato  $\hat{x}(k)$  è  $\mathcal{F}_k^Y$ -misurabile e  $E\{x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\}$  è  $\mathcal{F}_{k-1}^Y$ -misurabile, e quindi dalla (4.1.23), è  $\mathcal{F}_k^Y$ -misurabile. Ne risulta che la (4.2.12) diventa

$$E\{\nu_s(k)\nu_s^T(j)\} = E\{E[\nu_s(k)\nu_s^T(j)|\mathcal{F}_k^Y]\} = E\{\nu_s(k)E[\nu_s^T(j)|\mathcal{F}_k^Y]\}. \quad (4.2.14)$$

Prendendo in esame il termine  $E\{\nu_s^T(j)|\mathcal{F}_k^Y\}$ , e ricordando che  $\mathcal{F}_k^Y \subseteq \mathcal{F}_{j-1}^Y$ , essendo  $k \leq j - 1$ , si ha

$$\begin{aligned} E\{\nu_s^T(j)|\mathcal{F}_k^Y\} &= \\ &= E\{\hat{x}(j) - E[x(j)|\mathcal{F}_{j-1}^Y]|\mathcal{F}_k^Y\} \\ &= E\{E[x(j)|\mathcal{F}_j^Y] - E[x(j)|\mathcal{F}_{j-1}^Y]|\mathcal{F}_k^Y\} \\ &= E\{x(j)|\mathcal{F}_k^Y\} - E\{x(j)|\mathcal{F}_k^Y\} = 0. \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Resta quindi dimostrato che

$$E\{\nu_s(k)\nu_s^T(j)\} = 0 \quad (4.2.16)$$

■

**Lemma 4.2.4** – *La sequenza di innovazione dell'uscita soddisfa alle seguenti proprietà*

$$E\{\nu_o(k)\} = 0 \quad (4.2.17)$$

$$E\{\nu_o(k)\nu_o^T(j)\} = 0 \quad \forall k \neq j \quad (4.2.18)$$

*ed è quindi una sequenza bianca a media nulla.*

**Dimostrazione** – La dimostrazione può essere svolta in modo analogo a quella del Lemma precedente. Della prima relazione si vuole qui fornire una dimostrazione alternativa

$$\begin{aligned} E\{\nu_o(k)\} &= E\{y(k) - E[y(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y]\} = \\ &= E\{E[y(k) - E(y(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y)]|\mathcal{F}_{k-1}^Y\} = \\ &= E\{E[y(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y] - E[y(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y]\} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

■

**Lemma 4.2.5** – *Le innovazioni  $\nu_s(k)$  e  $\nu_o(j)$  sono scorrelate per  $k \neq j$ , ovvero*

$$E\{\nu_s(k)\nu_o^T(j)\} = 0, \quad k \neq j. \quad (4.2.20)$$

**Dimostrazione** – Si osservi innanzitutto che per la loro stessa definizione  $\nu_s(k)$  è  $\mathcal{F}_k^Y$ -misurabile e  $\nu_o(j)$  è  $\mathcal{F}_j^Y$ -misurabile. Considerando dapprima il caso  $k > j$  si può scrivere

$$E\{\nu_s(k)\nu_o^T(j)\} = E\{E[\nu_s(k)\nu_o^T(j)|\mathcal{F}_j^Y]\} = E\{E[\nu_s(k)|\mathcal{F}_j^Y]\nu_o^T(j)\}.$$

Poiché si ha

$$\begin{aligned} E\{\nu_s(k)|\mathcal{F}_j^Y\} &= E\{[\hat{x}(k) - E(x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y)]|\mathcal{F}_j^Y\} = \\ &= E\{[E(x(k)|\mathcal{F}_k^Y) - E(x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y)]|\mathcal{F}_j^Y\} \end{aligned}$$

e poiché essendo  $\mathcal{F}_j^Y \subseteq \mathcal{F}_{k-1}^Y \subseteq \mathcal{F}_k^Y$  risulta

$$E\{x(k)|\mathcal{F}_j^Y\} - E\{x(k)|\mathcal{F}_j^Y\} = 0$$



ne consegue

$$E\{\nu_s(k)\nu_o^T(j)\} = 0 \quad \text{per } k > j.$$

Per  $k < j$  si procede in modo del tutto analogo. ■

**Lemma 4.2.6** – *La sequenza di innovazione dello stato si può esprimere come*

$$\nu_s(k) = \hat{x}(k) - A(k-1)\hat{x}(k-1). \quad (4.2.21)$$

**Dimostrazione** – Tenendo conto della (4.2.7) si ha

$$\begin{aligned} \nu_s(k) &= \hat{x}(k) - E\{x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\} = \\ &= \hat{x}(k) - E\{[A(k-1)x(k-1) + F(k-1)N_{k-1}]|\mathcal{F}_{k-1}^Y\} = \\ &= \hat{x}(k) - A(k-1)E\{x(k-1)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\} - E\{F(k-1)N_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}^Y\}. \end{aligned}$$

per la (4.1.26) si ottiene

$$\nu_s(k) = \hat{x}(k) - A(k-1)\hat{x}(k-1) - E\{F(k-1)N_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}^Y\}. \quad (4.2.22)$$

Verrà ora mostrato che il rumore di stato all'istante  $k-1$  non dipende dall'uscita allo stesso istante e, a maggior ragione, non dipende dall'uscita ad istanti precedenti  $k-1$ . Infatti, dall'equazione di uscita del sistema

$$\begin{aligned} y(k-1) &= C(k-1)x(k-1) + G(k-1)N_{k-1} = \\ &= C(k-1)A(k-2)x(k-2) + \\ &+ C(k-1)F(k-2)N_{k-2} + G(k-1)N_{k-1}. \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Per ipotesi il rumore all'istante  $k$  è indipendente dal rumore ad istanti precedenti, cioè  $F(k-1)N_{k-1}$  è indipendente da  $F(k-2)N_{k-2}$ , inoltre il rumore di stato è indipendente da quello di osservazione, cioè  $F(k-1)N_{k-1}$  è indipendente da  $G(k-1)N_{k-1}$ . Poiché  $x(k-2)$  non dipende da  $F(k-1)N_{k-1}$  dalla (4.2.23) segue che l'uscita all'istante  $k-1$  non dipende in alcun modo dal rumore di stato allo stesso istante. Perciò

$$E\{F(k-1)N_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}^Y\} = E\{F(k-1)N_{k-1}\} = 0 \quad (4.2.24)$$

Dalle (4.2.22) e (4.2.24) segue la tesi. ■

**Osservazione 4.2.7** – Si può notare che dalla (4.2.7) e dalla (4.2.21) risulta che la predizione ottima dello stato  $\hat{x}(k|k-1)$  si scrive

$$E\{x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\} = A(k-1)\hat{x}(k-1), \quad (4.2.25)$$

mentre dalla prima delle (4.1.20) si ha che

$$x(k) = A(k-1)x(k-1) + F(k-1)N_{k-1}. \quad (4.2.26)$$

Dal confronto si capisce che la predizione ottima dello stato ad un passo si calcola utilizzando l'equazione dinamica dello stato, dove al posto dello stato al passo  $k-1$  si sostituisce la stima ottima nello stesso istante e al posto del rumore la sua migliore stima, cioè il valore medio che è nullo.

**Lemma 4.2.8** – *La sequenza di innovazione dell'uscita è esprimibile come*

$$\nu_o(k) = y(k) - C(k)A(k-1)\hat{x}(k-1). \quad (4.2.27)$$

**Dimostrazione** – Come nel lemma precedente si ha

$$\begin{aligned} \nu_o(k) &= y(k) - E\{y(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\} = \\ &= y(k) - E\{C(k)x(k) + G(k)N_k|\mathcal{F}_{k-1}^Y\} \\ &= y(k) - C(k)E\{x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\} - E\{G(k)N_k|\mathcal{F}_{k-1}^Y\}. \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

Poiché il rumore all'istante  $k$  è indipendente da ciò che è accaduto ad istanti precedenti, l'ultimo addendo è nullo. Sostituendo la (4.2.25) nella (4.2.28) segue la tesi.

**Osservazione 4.2.9** – Dalla (4.2.27) e dalla definizione di sequenza di innovazione dell'uscita segue che

$$E\{y(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\} = C(k)A(k-1)\hat{x}(k-1). \quad (4.2.29)$$

Poiché dal sistema (4.1.20) si ricava che l'espressione dell'uscita al passo  $k$  è data da

$$y(k) = C(k)A(k-1)x(k-1) + C(k)F(k-1)N_{k-1} + G(k)N_k, \quad (4.2.30)$$

dal confronto con la (4.2.29) si conclude che fare la predizione ad un passo dell'uscita equivale a prendere come stima dell'uscita all'istante  $k$  la stima di predizione dello stato premoltiplicata per  $C(k)$ , supponendo nulli i rumori di stato e di osservazione.  $\triangle$

Si vuole ora mostrare che le sequenze di innovazione dello stato e dell'uscita sono vettori aleatori gaussiani. Per prima cosa si osservi che lo stato ad ogni istante  $k$  è un vettore aleatorio gaussiano. Infatti, dato il sistema (4.1.20) lo stato nel generico istante  $k > 0$  si scrive

$$x(k) = \Phi(k, 0)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k, j+1)F(j)N_j \quad (4.2.31)$$

dove la funzione matriciale  $\Phi(\cdot, \cdot)$  è definita come

$$\begin{aligned} \Phi(k, k) &= I, & \forall k \\ \Phi(k, j) &= A(k-1)A(k-2) \cdots A(j), & k > j. \end{aligned}$$

Essendo lo stato una combinazione lineare di vettori aleatori gaussiani a media nulla, ne risulta che è esso stesso un vettore aleatorio gaussiano a media nulla. Analogamente è facile verificare che il vettore  $Y_k$  delle osservazioni fino all'istante  $k$  è un vettore gaussiano, sempre in quanto combinazione di vettori gaussiani

$$y(j) = C(j)x(j) + G(j)N_j, \quad j = 0, \dots, k. \quad (4.2.32)$$

Anche la stima ottima  $\hat{x}(k)$  nel generico istante  $k$  e la predizione ottima  $\hat{x}(k|k-1)$  sono vettori gaussiani. Infatti, secondo quanto stabilisce la formula (2.3.25),  $\hat{x}(k) = E\{x(k)|\mathcal{F}_k^Y\}$  è una funzione affine del vettore (gaussiano) delle osservazioni  $Y_k$ , ed è pertanto un vettore gaussiano. Per lo stesso motivo, anche  $\hat{x}(k|k-1) = E\{x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\}$  è un vettore gaussiano.

In base a quanto discusso, e tenuto conto delle (4.2.21) e (4.2.27), si può affermare che le innovazioni dello stato e dell'uscita sono vettori aleatori gaussiani.

Verrà ora dimostrato un risultato notevole, che va sotto il nome di **Teorema di equivalenza**, o **Teorema di Mitter**, che stabilisce l'equivalenza tra la  $\sigma$ -algebra generata dalle uscite fino all'istante  $k$  e la  $\sigma$ -algebra generata dalle innovazioni dell'uscita fino allo stesso istante. Quest'ultima verrà indicata con  $\mathcal{F}_k^{\nu_o}$

$$\mathcal{F}_k^{\nu_o} = \sigma\{\nu_o(j); 0 \leq j \leq k\}. \quad (4.2.33)$$

**Teorema 4.2.10 – (Mitter)** *La sigma algebra  $\mathcal{F}_k^{\nu_o}$  coincide con la sigma algebra  $\mathcal{F}_k^Y$ .*

**Dimostrazione** – Dalla definizione

$$\begin{aligned} \nu_o(0) &= y(0) - E\{y(0)|\mathcal{F}_{ban}\}, \\ &\vdots \\ \nu_o(k) &= y(k) - E\{y(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\} \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

è evidente che le innovazioni  $\nu_o(j)$  con  $0 \leq j \leq k$  sono tutte variabili aleatorie  $\mathcal{F}_k^Y$ -misurabili. Infatti  $y(j)$  è  $\mathcal{F}_j^Y$ -misurabile,  $E(y(j)|\mathcal{F}_{j-1}^Y)$  è  $\mathcal{F}_{j-1}^Y$ -misurabile e  $\mathcal{F}_{j-1}^Y \subseteq \mathcal{F}_j^Y \subseteq \mathcal{F}_k^Y$ . Quindi, essendo per definizione  $\mathcal{F}_k^{\nu_o}$  la più piccola  $\sigma$ -algebra che rende misurabili tutte le  $\nu_o(j)$ , deve valere la relazione

$$\mathcal{F}_k^{\nu_o} \subseteq \mathcal{F}_k^Y. \quad (4.2.35)$$

Per dimostrare l'uguaglianza delle due  $\sigma$ -algebre è sufficiente a questo punto mostrare che vale anche  $\mathcal{F}_k^Y \subseteq \mathcal{F}_k^{\nu_o}$ . Ciò verrà provato mostrando che la generica osservazione  $y(j)$ , può essere espressa come una funzione borelliana delle innovazioni  $\nu_o(i)$ , per  $i \leq j$ . Si ricordi a tale proposito che data una coppia di variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  il valore atteso condizionato  $E\{X|\mathcal{F}^Y\}$  è una funzione Borelliana della variabile  $Y$ . Si cominci con lo scrivere l'innovazione all'istante 0

$$\nu_o(0) = y(0) - E\{y(0)|\mathcal{F}_{ban}\} = y(0). \quad (4.2.36)$$

L'uscita all'istante  $j = 0$  risulta quindi essere pari a  $\nu_o(0)$ , e quindi  $\mathcal{F}_0^{\nu_o} = \mathcal{F}_0^Y$ . L'uscita all'istante  $j = 1$  si scrive

$$y(1) = \nu_o(1) + E\{y(1)|\mathcal{F}_0^Y\}.$$

Ora  $E\{y(1)|\mathcal{F}_0^Y\}$  è una funzione di Borel di  $y(0)$ , che è pari a  $\nu_o(0)$ . Si può quindi scrivere

$$y(1) = F_1(\nu_o(0), \nu_o(1)),$$

dove  $F_1(\nu_o(0), \nu_o(1))$  è una opportuna funzione di Borel. Analogamente considerando

$$y(2) = \nu_o(2) + E\{y(2)|\mathcal{F}_1^Y\}, \quad (4.2.37)$$

in cui  $E\{y(2)|\mathcal{F}_1^Y\}$  una funzione di Borel di  $y(0)$  e  $y(1)$ , ed essendo queste a loro volta funzioni di Borel di  $\nu_o(0)$  e  $\nu_o(1)$ , si ha che l'uscita  $y(2)$  può essere scritta come

$$y(2) = F_2(\nu_o(0), \nu_o(1), \nu_o(2)),$$

dove  $F_2(\nu_o(0), \nu_o(1), \nu_o(2))$  è ancora di Borel. Continuando con il ragionamento si arriva a stabilire che il vettore delle osservazioni fino all'istante  $k$  è una funzione Borelliana del vettore delle innovazioni fino allo stesso istante, ed in quanto tale è  $\mathcal{F}_k^{\nu_o}$ -misurabile. Si ha quindi

$$\mathcal{F}_k^Y \subseteq \mathcal{F}_k^{\nu_o}, \quad (4.2.38)$$

che è quanto dovevasi dimostrare. ■

Il teorema di equivalenza stabilisce che le sequenze di innovazione dell'uscita e le misure dell'uscita contengono la stessa quantità di informazione. Infatti condizionare una variabile aleatoria ad  $\mathcal{F}_k^Y$  o ad  $\mathcal{F}_k^{\nu_o}$  restituisce gli stessi valori attesi, nel primo caso come funzione di  $Y_k$  e nel secondo come funzione di  $\{\nu_o(0), \dots, \nu_o(k)\}$ . Questa proprietà ha numerose applicazioni nel campo delle telecomunicazioni e nell'informatica. Infatti la

rappresentazione numerica delle innovazioni in generale risulta essere più compatta rispetto alla rappresentazione delle osservazioni, pur mantenendo la stessa quantità di informazione. Si comprende quindi il vantaggio che si ha nel trasmettere o nel registrare le innovazioni anziché i dati originari.

**Osservazione 4.2.11** – La costruzione delle sequenze di innovazione può essere interpretata come un procedimento di ortogonalizzazione applicato ad una sequenza di variabili aleatorie. A questo proposito è utile ricordare la procedura di Gram-Schmidt, definita su spazi vettoriali dotati di prodotto scalare, che consente la costruzione, a partire da un insieme di  $n$  vettori indipendenti  $x_k$ , di un insieme di  $n$  vettori ortogonali  $\bar{x}_k$ . Il procedimento si svolge in  $n$  passi. Al primo passo si pone  $\bar{x}_1 = x_1$ . Al passo  $k$ -esimo, per  $k > 1$ , si pone

$$\bar{x}_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle x_k, \bar{x}_i \rangle}{\langle \bar{x}_i, \bar{x}_i \rangle} \bar{x}_i. \quad (4.2.39)$$

Non è difficile dimostrare che  $\forall i \neq j$  si ha  $\langle \bar{x}_i, \bar{x}_j \rangle = 0$ , e cioè che la sequenza ottenuta è ortogonale. È immediato quindi verificare che la sommatoria a secondo membro della (4.2.39) non è altro che la proiezione ortogonale del vettore  $x_k$  sul sottospazio generato dai vettori  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}$ , indicato con  $\text{Im}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1})$ . Rappresentando tale proiezione con il simbolo  $\Pi(x_k|\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1})$ , la (4.2.39) diventa

$$\bar{x}_k = x_k - \Pi(\bar{x}_k|x_1, \dots, \bar{x}_{k-1}). \quad (4.2.40)$$

Poiché il generico vettore  $x_j$  risulta essere una combinazione lineare dei vettori  $\bar{x}_i$ , con  $i \leq j$

$$x_j = \bar{x}_j + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle x_j, \bar{x}_i \rangle}{\langle \bar{x}_i, \bar{x}_i \rangle} \bar{x}_i. \quad (4.2.41)$$

ed è quindi evidente che il sottospazio generato dai vettori  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$  coincide con il sottospazio generato dai vettori  $x_1, \dots, x_k$ , si può anche scrivere

$$\bar{x}_k = x_k - \Pi(x_k|x_1, \dots, x_{k-1}). \quad (4.2.42)$$

Tornando allo spazio vettoriale  $L_2(\Omega)$  delle variabili aleatorie vettoriali dotate di covarianza finita, si ricordi che la proiezione di un vettore aleatorio  $Z$  sul sottospazio delle funzioni borelliane di una variabile aleatoria  $W$ , denominato  $\mathcal{M}^W$  viene effettuata tramite l'operazione di valore atteso condizionato, ovvero

$$\Pi(Z|\mathcal{M}^W) = E\{Z|W\}.$$

In altre parole si ha che  $Z - E\{Z|W\}$  è ortogonale a  $\mathcal{M}^W$ , ovvero è indipendente da ogni funzione borelliana della variabile aleatoria  $W$ .

Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt applicato alla sequenza delle osservazioni  $\{y(k)\}$  (sequenza di vettori in  $L_2(\Omega)$ ), fornisce

$$\begin{aligned}\bar{y}(0) &= y(0), \\ \bar{y}(k) &= y(k) - E\{y(k)|y(0), \dots, y(k-1)\}.\end{aligned}\quad (4.2.43)$$

La sequenza delle variabili aleatorie ortogonali  $\{\bar{y}(k)\}$  non è altro che la sequenza delle innovazioni dell'uscita  $\{\nu_o(k)\}$ . La proprietà che  $\text{Im}(x_1, \dots, x_k) = \text{Im}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$ , applicata alla sequenza delle osservazioni e delle innovazioni, non è altro che il teorema di Mitter.  $\triangle$

### 4.3 Le equazioni del filtro

L'espressione (4.2.21) della sequenza di innovazione dello stato stabilisce una relazione tra la stima ottenuta all'istante  $k$  e la stima ottenuta all'istante  $k-1$ . Se si avesse a disposizione un'espressione dell'innovazione  $\nu_s(k)$  in funzione di grandezze note, si avrebbe un legame noto di tipo iterativo tra le stime ottime in istanti successivi.

In questo paragrafo si mostrerà che esiste un legame proporzionale tra le sequenze di innovazione dello stato e dell'uscita. Poiché  $\nu_o(k)$ , in base alla (4.2.8), dipende dall'uscita misurata all'istante  $k$  e dalla stima dello stato all'istante  $k-1$ , il legame

iterativo tra le stime ottime in istanti successivi risulta noto una volta che sia nota la costante di proporzionalità (matriciale).

Si comincerà col dimostrare che la stima ottima  $\hat{\nu}_s(k)$  dell'innovazione dello stato all'istante  $k$ , dato il vettore  $Y_k$  delle osservazioni fino allo stesso istante, coincide con l'innovazione stessa, ovvero

$$\hat{\nu}_s(k) = E(\nu_s(k)|\mathcal{F}_k^Y) = \nu_s(k). \quad (4.3.1)$$

A tale scopo basta riconoscere che  $\nu_s(k)$  è  $\mathcal{F}_k^Y$ -misurabile. Infatti

$$\begin{aligned}\hat{\nu}_s(k) &= E\{\nu_s(k)|\mathcal{F}_k^Y\} = E\{\hat{x}(k) - E[x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y]|\mathcal{F}_k^Y\} = \\ &= E\{E[x(k)|\mathcal{F}_k^Y] - E[x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y]|\mathcal{F}_k^Y\} = \\ &= \hat{x}(k) - E[x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y] = \nu_s(k)\end{aligned}$$

Il teorema di equivalenza consente inoltre di scrivere

$$\nu_s(k) = E\{\nu_s(k)|\mathcal{F}_k^{\nu_o}\}. \quad (4.3.2)$$

Avendo precedentemente dimostrato che il vettore

$$\begin{bmatrix} \nu_s(k) \\ \nu_o(0) \\ \vdots \\ \nu_o(k) \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

è un vettore aleatorio gaussiano a media nulla, dalla relazione (2.3.22) si ha che deve esistere una matrice  $\bar{K}(k)$  (che gioca il ruolo del prodotto  $\psi_{XY}\psi_Y^{-1}$  nella (2.3.22)) tale che la stima ottima di  $\nu_s(k)$  è pari a

$$\nu_s(k) = \hat{\nu}_s(k) = \bar{K}(k) \begin{bmatrix} \nu_o(0) \\ \vdots \\ \nu_o(k) \end{bmatrix}. \quad (4.3.4)$$

Si vuole mostrare ora che in realtà la stima ottima dell'innovazione dello stato all'istante  $k$  è proporzionale all'innovazione dell'uscita al solo istante  $k$ .

**Teorema 4.3.1** – Considerata la partizione di  $\bar{K}(k)$

$$\bar{K}(k) = [\bar{K}(0, k) \quad \bar{K}(1, k) \quad \dots \quad \bar{K}(k, k)] \quad (4.3.5)$$

si ha

$$\bar{K}(i, k) = 0 \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, k-1. \quad (4.3.6)$$

**Dimostrazione** – Sostituendo la (4.3.5) nella (4.3.4) si ottiene

$$\nu_s(k) = \sum_{i=0}^k \bar{K}(i, k) \nu_o(i). \quad (4.3.7)$$

Postmoltiplicando per  $\nu_o^T(j)$ , con  $j < k$ , e calcolando il valore sperato della espressione ottenuta si ha

$$E\{\nu_s(k) \nu_o^T(j)\} = \sum_{i=0}^k \bar{K}(i, k) E\{\nu_o(i) \nu_o^T(j)\}. \quad (4.3.8)$$

Poiché la (4.2.18) e (4.2.20) affermano che

$$\begin{aligned} E\{\nu_s(k) \nu_o(j)^T\} &= 0 & \text{per } k \neq j \\ E\{\nu_o(i) \nu_o(j)^T\} &= 0 & \text{per } i \neq j \end{aligned}$$

si ha

$$\bar{K}(j, k) E\{\nu_o(j) \nu_o(j)^T\} = 0 \quad \text{per } j < k,$$

e quindi, essendo  $E\{\nu_o(j) \nu_o(j)^T\}$  definita positiva e quindi non singolare, deve essere

$$\bar{K}(j, k) = 0 \quad \text{per } j < k, \quad (4.3.9)$$

e cioè la tesi. ■

**Corollario 4.3.2** – Esiste una matrice  $K(k)$ , detta **matrice del guadagno di Kalman**, tale che

$$\nu_s(k) = K(k) \nu_o(k). \quad (4.3.10)$$

**Dimostrazione** – Dalla (4.3.7), tenendo conto della (4.3.6), si ottiene

$$\nu_s(k) = \bar{K}(k, k) \nu_o(k), \quad (4.3.11)$$

è quindi sufficiente porre

$$K(k) \triangleq \bar{K}(k, k)$$

per ottenere la (4.3.10), che è proprio l'espressione del filtro di Kalman. ■

Sostituendo nell'equazione (4.3.10) le espressioni date dalle (4.2.21) e (4.2.27) per le sequenze di innovazione dello stato e dell'uscita si ha l'espressione

$$\begin{aligned} \hat{x}(k) - A(k-1)\hat{x}(k-1) &= K(k) \cdot \\ &\cdot [y(k) - C(k)A(k-1)\hat{x}(k-1)], \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

da cui si ottiene la seguente espressione del filtro di Kalman

$$\hat{x}(k) = A(k-1)\hat{x}(k-1) + K(k) \left( y(k) - C(k)A(k-1)\hat{x}(k-1) \right), \quad (4.3.13a)$$

che calcola la stima ottima dello stato  $\hat{x}(k)$  in funzione della stima ottima all'istante precedente  $\hat{x}(k-1)$  e dell'osservazione  $y(k)$  dell'uscita all'istante  $k$ . Un'altra espressione del filtro di Kalman, perfettamente equivalente alla (4.3.13a) è la seguente

$$\hat{x}(k) = [I - K(k)C(k)]A(k-1)\hat{x}(k-1) + K(k)y(k). \quad (4.3.13b)$$

**Osservazione 4.3.3** – È importante notare innanzitutto che il filtro di Kalman è costituito da un sistema dinamico lineare, che in generale è non stazionario anche se il sistema in esame è stazionario (matrici  $A, C, F$  e  $G$  costanti). Prendendo in considerazione la struttura (4.3.13a) si osserva che il filtro è composto di due termini: il primo  $A(k-1)\hat{x}(k-1)$  è la predizione ad un passo, ottenuta

utilizzando soltanto le misure sino all'istante  $(k-1)$ ; il secondo termine apporta una correzione proporzionale, secondo  $K(k)$ , alla differenza tra l'uscita reale e la sua predizione ad un passo. Da questo punto di vista il filtro di Kalman ha la stessa struttura del ben noto osservatore di Luenberger per sistemi stazionari in situazioni deterministiche (assenza di rumore).  $\triangle$

#### 4.4 Calcolo della matrice di guadagno

In questa sezione viene svolto il calcolo della matrice di guadagno  $K(\cdot)$ , che risulterà alquanto laborioso. Si dimostrerà l'importante risultato che  $K(k)$  è indipendente dalle osservazioni e che quindi, nelle applicazioni, il suo calcolo può essere effettuato fuori linea.

Si consideri l'espressione del filtro di Kalman nella forma

$$\nu_s(k) = K(k)\nu_o(k)$$

e si moltiplichino a destra ambo i membri per  $\nu_o^T(k)$ . Il calcolo del valore sperato fornisce

$$E\{\nu_s(k)\nu_o^T(k)\} = K(k)E\{\nu_o(k)\nu_o^T(k)\} \quad (4.4.1)$$

e quindi

$$K(k) = E\{\nu_s(k)\nu_o^T(k)\}E\{\nu_o(k)\nu_o^T(k)\}^{-1}. \quad (4.4.2)$$

Prima di passare al calcolo delle covarianze che sono nella (4.4.2) conviene svolgere preliminarmente il calcolo della **covarianza dell'errore di stima**, essendo l'errore di stima definito come

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k). \quad (4.4.3)$$

Poiché si ha

$$E\{\hat{x}(k)\} = E\{E[x(k)|\mathcal{F}_k^Y]\} = E\{x(k)\} \quad (4.4.4)$$

è facile verificare che l'errore di stima è una variabile aleatoria a media nulla

$$E\{e(k)\} = 0. \quad (4.4.5)$$

La covarianza dell'errore di stima, indicata con  $P(k)$ , si calcola allora come

$$P(k) = E\{e(k)e^T(k)\}. \quad (4.4.6)$$

Per svolgere il calcolo di  $P(k)$  conviene dare una espressione opportuna all'errore di stima. Dall'espressione (4.3.13b) della stima ottima si ottiene

$$e(k) = x(k) - [I - K(k)C(k)]A(k-1)\hat{x}(k-1) - K(k)y(k) \quad (4.4.7)$$

e sostituendo al posto di  $x(k)$  la (4.2.26) e al posto di  $y(k)$  la (4.2.30) si ha

$$e(k) = [I - K(k)C(k)]A(k-1)(x(k-1) - \hat{x}(k-1)) + [I - K(k)C(k)]F(k-1)N_{k-1} - K(k)G(k)N_k \quad (4.4.8)$$

e quindi

$$e(k) = [I - K(k)C(k)]A(k-1)e(k-1) + [I - K(k)C(k)]F(k-1)N_{k-1} - K(k)G(k)N_k. \quad (4.4.9)$$

Si vuole mostrare che i tre addendi del secondo membro della (4.4.9) sono a due a due indipendenti. Nel seguito si indicherà con  $a$  il primo addendo, con  $b$  il secondo addendo e con  $c$  il terzo. Si osservi che  $E(a) = E(b) = E(c) = 0$ .

$b \perp c$  :  $b$  e  $c$  sono indipendenti tra loro perché  $N_{k-1}$  è indipendente da  $N_k$ , dalla definizione di sequenza bianca. Quindi  $E(bc^T) = E(a)E(b^T) = 0$ ;

$a \perp c$  :  $a$  è indipendente da  $c$  perché, essendo il sistema causale, l'errore all'istante  $k-1$  non può dipendere dal rumore  $N_k$  all'istante successivo. Quindi  $E(ac^T) = 0$ ;

$a \perp b$  : per dimostrare l'indipendenza di  $a$  e  $b$ , bisogna dimostrare che l'errore  $e(k-1)$  non dipende da  $F(k-1)N_{k-1}$ . Infatti

dalle equazioni del sistema (4.1.20) si deduce che  $x(k-1)$  dipende da  $F(k-2)N_{k-2}$  e così via per quanto riguarda gli istanti precedenti, ma non dipende da  $F(k-1)N_{k-1}$ . La stima  $\hat{x}(k-1)$  dipende dalle osservazioni  $y(\cdot)$  fino all'istante  $k-1$ , e quindi dipende da  $G(k-1)N_{k-1}$  ma non da  $F(k-1)N_{k-1}$ . Poiché queste due ultime quantità sono indipendenti tra loro (si ricordi che  $F(k-1)G(k-1)^T = 0$ ) nel complesso la  $\hat{x}(k-1)$  risulta indipendente da  $F(k-1)N_{k-1}$  e quindi l'errore  $e(k-1)$  è indipendente da  $F(k-1)N_{k-1}$ . Quindi anche  $E(ab^T) = 0$ .

Dall'indipendenza dei tre addendi si ha che la covarianza dell'errore di stima è data da

$$P(k) = E\{e(k)e^T(k)\} = E\{aa^T\} + E\{bb^T\} + E\{cc^T\}. \quad (4.4.10)$$

Operando nella (4.4.10) le opportune sostituzioni e ricordando che  $E(N_k N_k^T) = I$ , si ottiene la seguente espressione per la covarianza dell'errore di stima

$$\begin{aligned} P(k) = & \\ & [I - K(k)C(k)]A(k-1)P(k-1)A^T(k-1)[I - K(k)C(k)]^T + \\ & + [I - K(k)C(k)]F(k-1)F^T(k-1)[I - K(k)C(k)]^T + \\ & + K(k)G(k)G^T(k)K^T(k), \end{aligned}$$

dove  $P(k-1)$  è, ovviamente, la covarianza dell'errore di stima all'istante  $k-1$ . Per semplificare la notazione è opportuno definire la matrice

$$P_p(k) = A(k-1)P(k-1)A^T(k-1) + F(k-1)F^T(k-1), \quad (4.4.11)$$

che consente di riscrivere la covarianza dell'errore di stima come

$$\begin{aligned} P(k) = & [I - K(k)C(k)]P_p(k)[I - K(k)C(k)]^T + \\ & + K(k)G(k)G^T(k)K^T(k). \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

**Osservazione 4.4.1** – La matrice  $P_p(k)$  è la covarianza dell'errore di predizione. Per dimostrarlo si indichi con  $e_p(k)$  l'errore di predizione, definito come

$$e_p(k) = x(k) - E\{x(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\} = x(k) - A(k-1)\hat{x}(k-1). \quad (4.4.13)$$

Utilizzando la tecnica del doppio condizionamento è facile verificare che  $E\{e_p(k)\} = 0$ . Sostituendo in (4.4.13) la  $x(k)$  data dalla (4.2.26) si ha

$$e_p(k) = A(k-1)e(k-1) + F(k-1)N_{k-1}. \quad (4.4.14)$$

Poiché l'errore di predizione all'istante  $k-1$  è indipendente dal rumore di stato allo stesso istante, e quindi  $E\{e_p(k-1)N_{k-1}F^T(k-1)\} = 0$ , il calcolo della covarianza restituisce

$$E\{e_p(k)e_p^T(k)\} = P_p(k). \quad (4.4.15)$$

A causa del suo significato di covarianza dell'errore della stima condizionata alle misure fino all'istante  $k-1$ , molto spesso nella letteratura tecnica la matrice  $P_p(k)$  viene indicata con la scrittura  $P(k|k-1)$ , in analogia con la notazione  $\hat{x}(k|k-1)$  per la predizione ottima.  $\triangle$

Tornando alle espressioni (4.4.1) e (4.4.2) verranno qui di seguito sviluppati i calcoli delle covarianze  $E\{\nu_o(k)\nu_o^T(k)\}$  e  $E\{\nu_s(k)\nu_o^T(k)\}$ . Si cominci col riscrivere l'espressione della sequenza di innovazione dell'uscita nella forma

$$\begin{aligned} \nu_o(k) = & C(k)x(k) + G(k)N_k - C(k)A(k-1)\hat{x}(k-1) = \\ = & C(k)[A(k-1)x(k-1) + F(k-1)N_{k-1}] + \\ & + G(k)N_k - C(k)A(k-1)\hat{x}(k-1) \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

da cui

$$\nu_o(k) = C(k)A(k-1)e(k-1) + C(k)F(k-1)N_{k-1} + G(k)N_k. \quad (4.4.17)$$

Ripetendo le osservazioni già fatte nel calcolo della covarianza dell'errore di stima, è facile convincersi che i tre addendi della (4.4.17) sono indipendenti, e quindi si ottiene

$$\begin{aligned} E\{\nu_o(k)\nu_o^T(k)\} &= C(k)A(k-1)P(k-1)A^T(k-1)C^T(k) + \\ &+ C(k)F(k-1)F^T(k-1)C^T(k) + \\ &+ G(k)G^T(k) \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

da cui, utilizzando l'espressione della covarianza dell'errore di predizione  $P_p(k)$  si ha

$$E\{\nu_o(k)\nu_o^T(k)\} = C(k)P_p(k)C^T(k) + G(k)G^T(k). \quad (4.4.19)$$

Per svolgere il calcolo della covarianza  $E\{\nu_s(k)\nu_o^T(k)\}$  si riscriva l'innovazione dello stato aggiungendo e sottraendo  $x(k)$

$$\begin{aligned} \nu_s(k) &= \hat{x}(k) - A(k-1)\hat{x}(k-1) - x(k) + x(k) = \\ &= -e(k) + x(k) - A(k-1)\hat{x}(k-1) \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

per ottenere

$$\begin{aligned} \nu_s(k) &= -e(k) - A(k-1)\hat{x}(k-1) + \\ &+ A(k-1)x(k-1) + F(k-1)N_{k-1} = \\ &= -e(k) + A(k-1)e(k-1) + F(k-1)N_{k-1} \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

e pertanto

$$\begin{aligned} E\{\nu_s(k)\nu_o^T(k)\} &= -E\{e(k)\nu_o^T(k)\} + E\{A(k-1)e(k-1)\nu_o^T(k)\} + \\ &+ E\{F(k-1)N_{k-1}\nu_o^T(k)\}. \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Si può dimostrare che il primo termine della somma è nullo. Infatti ricordando che, grazie al teorema di Mitter,  $\nu_o^T(k)$  è  $\mathcal{F}_k^Y$ -misurabile, si ha

$$E\{e(k)\nu_o^T(k)\} = E\{E[e(k)\nu_o^T(k)|\mathcal{F}_k^Y]\} = E\{E[e(k)|\mathcal{F}_k^Y]\nu_o^T(k)\}, \quad (4.4.23)$$

e quindi basta dimostrare che  $E\{e(k)|\mathcal{F}_k^Y\}$  è pari a zero. Ciò si ottiene svolgendo il valore atteso

$$E\{x(k) - \hat{x}(k)|\mathcal{F}_k^Y\} = E\{x(k)|\mathcal{F}_k^Y\} - E\{\hat{x}(k)|\mathcal{F}_k^Y\} = 0. \quad (4.4.24)$$

**Osservazione 4.4.2** – Il risultato che errore di stima e innovazione dell'uscita sono ortogonali (e cioè che  $E\{[x(k) - \hat{x}(k)]\nu_o(k)^T\} = 0$ ) non è altro che una diretta conseguenza del teorema di proiezione (1.15.4), enunciato a volte come principio di ortogonalità, che asserisce che la stima ottima, date le osservazioni  $Y_k$ , è quella che rende l'errore di stima ortogonale a qualunque funzione  $\mathcal{F}_k^Y$ -misurabile. E per il teorema di Mitter  $\nu_o(k)$  è  $\mathcal{F}_k^Y$ -misurabile.  $\triangle$

Per quanto riguarda gli altri due addendi della (4.4.22) ricordando l'espressione (4.2.27) dell'innovazione dell'uscita si ha

$$\begin{aligned} E\{A(k-1)e(k-1)\nu_o^T(k)\} &= \\ &= A(k-1)E\{e(k-1)e^T(k-1)\}A^T(k-1)C^T(k), \\ E\{F(k-1)N_{k-1}\nu_o^T(k)\} &= \\ &= F(k-1)E\{N_{k-1}N_{k-1}^T\}F^T(k-1)C^T(k), \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

ed infine, essendo  $E\{e(k-1)e^T(k-1)\} = P(k-1)$  e  $E\{N_{k-1}N_{k-1}^T\} = I$ , risulta

$$\begin{aligned} E\{A(k-1)e(k-1)\nu_o^T(k)\} &= A(k-1)P(k-1)A^T(k-1)C^T(k), \\ E\{F(k-1)N_{k-1}\nu_o^T(k)\} &= F(k-1)F^T(k-1)C^T(k). \end{aligned}$$

A questo punto la (4.4.22) diventa

$$\begin{aligned} E\{\nu_s(k)\nu_o^T(k)\} &= A(k-1)P(k-1)A^T(k-1)C^T(k) + \\ &+ F(k-1)F^T(k-1)C^T(k). \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

Ricordando l'espressione (4.4.11) di  $P_p(k)$  si vede che è possibile riscrivere la (4.4.22) come

$$E\{\nu_s(k)\nu_o^T(k)\} = P_p(k)C^T(k). \quad (4.4.27)$$



Sostituendo ora nella (4.4.2) le espressioni (4.4.19) e (4.4.27) si ottiene l'espressione del guadagno di Kalman

$$K(k) = P_p(k)C^T(k) \left( C(k)P_p(k)C^T(k) + G(k)G^T(k) \right)^{-1}. \quad (4.4.28)$$

Nel caso in cui la matrice di covarianza dell'innovazione dell'uscita risulti singolare il calcolo (4.4.28) non può essere svolto. Il guadagno  $K(k)$  soddisfa comunque alla relazione (4.4.1), che con le debite sostituzioni diventa

$$P_p(k)C^T(k) = K(k) \left( C(k)P_p(k)C^T(k) + G(k)G^T(k) \right). \quad (4.4.29)$$

Non è difficile verificare che se la matrice  $P_p(k)$  è definita positiva la covarianza dell'innovazione dell'uscita all'istante  $k$ , semidefinita positiva per costruzione, è in realtà definita positiva, e quindi non singolare, *se e solo se* le righe della matrice  $[C(k) \ G(k)]$  sono indipendenti. Infatti si ha

$$z^T C(k)P_p(k)C^T(k)z + z^T G(k)G^T(k)z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z^T C(k) = 0 \\ z^T G(k) = 0 \end{cases}$$

$$\text{ovvero } z^T [C(k) \ G(k)] = 0,$$

e quindi se le righe di  $[C(k) \ G(k)]$  sono indipendenti non può esistere un vettore  $z \neq 0$  che annulla la forma quadratica, che pertanto risulta definita positiva. Più avanti nel capitolo si analizzerà sotto quali ipotesi la sequenza delle  $P_p(k)$  è costituita da matrici definite positive.

Si osservi che in base alla (4.4.28) il guadagno di Kalman all'istante  $k$  viene calcolato utilizzando la matrice  $P_p(k)$ , che a sua volta viene calcolata utilizzando la covarianza dell'errore di stima all'istante  $k-1$ , la matrice  $P(k-1)$  per mezzo della (4.4.11). Ne consegue che per calcolare il guadagno di Kalman all'istante successivo  $k+1$  occorre conoscere la matrice  $P(k)$ . Quest'ultima può essere calcolata tramite la (4.4.12), che utilizza  $K(k)$  e  $P(k-1)$ . Si hanno quindi delle espressioni che consentono il calcolo ricorsivo

si della matrice di guadagno  $K(k)$  che della covarianza  $P(k)$ . È conveniente però operare una notevole semplificazione nella (4.4.12). A tale scopo la si riscriva come

$$P(k) = [I - K(k)C(k)]P_p(k) + \left( [I - K(k)C(k)]P_p(k)C^T(k) - K(k)G(k)G^T(k) \right) K^T(k). \quad (4.4.30)$$

Osservando che la (4.4.29) può essere riscritta come

$$[I - K(k)C(k)]P_p(k)C^T(k) - K(k)G(k)G^T(k) = 0 \quad (4.4.31)$$

ne risulta la seguente semplice espressione per la covarianza dell'errore di stima all'istante  $k$

$$P(k) = [I - K(k)C(k)]P_p(k). \quad (4.4.32)$$

Le due formule (4.4.28) e (4.4.32), unitamente alla (4.4.11), consentono di effettuare in modo ricorsivo il calcolo del guadagno di Kalman. Si osservi che per innescare l'algoritmo ricorsivo, assunto  $k=0$  come istante iniziale, occorre disporre della predizione ottima dello stato in tale istante, che per uniformità di scrittura può essere indicata con  $\hat{x}(0|-1)$ , e della covarianza dell'errore di predizione  $P_p(0)$ . Poiché non si hanno misure per istanti precedenti lo 0, la migliore predizione che si possa fare dello stato iniziale è il suo valore atteso  $E\{x(0)\}$  (che per il sottosistema stocastico in esame è pari a zero). In questo caso la covarianza dell'errore di predizione è pari alla covarianza dello stato iniziale  $\Psi_{x(0)}$ .

È opportuno a questo punto riportare in modo sintetico le equazioni che costituiscono il filtro di Kalman nella successione temporale che ne consente la corretta implementazione su calcolatore.

Sia dato un sistema stocastico descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + F(k)N_k & k &= 0, 1, 2, \dots \\ y(k) &= C(k)x(k) + G(k)N_k \end{aligned}$$

con  $F(k)G(k)^T = 0$  e con  $N_k$  sequenza aleatoria gaussiana bianca *standard*, e con stato iniziale  $x(0)$  vettore aleatorio gaussiano indipendente da  $N_k$  e tale che

$$E\{x(0)\} = 0, \quad E\{x(0)x(0)^T\} = \Psi_{x(0)}. \quad (4.4.33)$$

La stima ottima dello stato ad ogni istante  $k$  si calcola con il

### FILTRO DI KALMAN (1K)

(I) Condizioni iniziali

$$\hat{x}(0|-1) = E\{x(0)\} = 0 \quad P_p(0) = \Psi_{x(0)};$$

(II)  $k = 0$ ;

(III) Se  $k > 0$ : calcolo della matrice  $P_p(k)$  (già disponibile per  $k = 0$ )

$$P_p(k) = A(k-1)P(k-1)A^T(k-1) + F(k-1)F^T(k-1);$$

(IV) Calcolo del guadagno  $K(k)$

$$K(k) = P_p(k)C^T(k) \left( C(k)P_p(k)C^T(k) + G(k)G^T(k) \right)^{-1};$$

(V) Calcolo della covarianza  $P(k)$  dell'errore di stima

$$P(k) = [I - K(k)C(k)]P_p(k);$$

(VI) Se  $k > 0$ : calcolo della predizione ottima (già disponibile per  $k = 0$ )

$$\hat{x}(k|k-1) = A(k-1)\hat{x}(k-1);$$

(VII) Calcolo della stima ottima  $\hat{x}(k)$

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)(y(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1));$$

(VIII)  $k = k + 1$ ; GOTO (III).

### Osservazioni:

– Il filtro di Kalman ad ogni passo  $k$  non solo fornisce la stima ottima dello stato in tale istante, ma fornisce anche la covarianza di tale stima, utile per valutarne la bontà.

– Come si vede dalle equazioni del filtro, anche nelle ipotesi di stazionarietà del sistema stocastico in generale il guadagno di Kalman è funzione dell'indice  $k$ , e pertanto il filtro di Kalman risulta essere un sistema non stazionario.

– Nel calcolo delle matrici del guadagno di Kalman e della covarianza dell'errore di stima non entrano in alcun modo le osservazioni  $y(k)$ , ma solo le informazioni a priori che si hanno sul sistema e sui rumori di stato e di uscita. Ciò significa che la sequenza dei guadagni  $K(k)$  può essere calcolata fuori linea rispetto all'esecuzione del filtro. Questa proprietà rappresenta un notevole vantaggio in quanto può servire a ridurre notevolmente la potenza di calcolo richiesta nelle applicazioni in cui vi siano vincoli temporali molto stretti.

– Il filtro di Kalman, avendo una struttura ricorsiva, fornisce ad ogni istante  $k$  la stima ottima dello stato se e solo se esso viene innescato in modo ottimo. In altre parole il filtro deve essere ottimo sin dal primo passo. A tal proposito le condizioni iniziali adottate al passo (I) dell'algoritmo sono dettate dal fatto che, non avendo informazioni disponibili prima di tale passo, è necessario assumere come predizione ottima dello stato iniziale il suo valore atteso condizionato alla  $\sigma$ -algebra banale, che rappresenta l'assenza di informazione, ottenendo così  $\hat{x}(0|-1) = E\{x(0)|\mathcal{F}_{ban}\} = E\{x(0)\}$ . Ne consegue che la covarianza dell'errore di predizione è pari proprio a  $\Psi_{x(0)}$ .

– Si può dimostrare, e verrà fatto più avanti nel testo, che qualora non si disponga di una valutazione accurata della  $\Psi_{x(0)}$  il filtro di Kalman, sotto opportune ipotesi, risulta essere *asintoticamente* ottimo. Ciò significa che asintoticamente il filtro di Kalman è insensibile a  $P_p(0)$ . Si può dimostrare inoltre, sotto le stesse ipotesi, che se  $P_p(0)$  è definita positiva allora in ogni istante  $k$  la matrice

che deve essere invertita al passo (IV) per il calcolo di  $K(k)$  è non singolare.  $\triangle$

Le formule che producono la sequenza delle covarianze  $P(k)$ , elencate nei passi (III–V), sono chiamate le **formule di Riccati**. Per sostituzioni successive è possibile scrivere la  $P(k)$  in funzione della  $P(k-1)$ , ottenendo la cosiddetta *equazione di Riccati* che verrà discussa più in dettaglio nella sezione successiva.

Prima di passare alla discussione delle proprietà del filtro di Kalman, si vuole dare una espressione alternativa del calcolo del guadagno  $K(k)$  e della covarianza  $P(k)$ , che consente di calcolare la  $P(k)$  al passo (IV) in funzione della  $P_p(k)$ , e la  $K(k)$  al passo (V) in funzione della  $P(k)$ . Basta riscrivere la (4.4.29) come

$$[I - K(k)C(k)]P_p(k)C^T(k) = K(k)G(k)G^T(k), \quad (4.4.34)$$

e confrontare il termine a primo membro con la (4.4.32) per ottenere

$$P(k)C^T(k) = K(k)G(k)G^T(k). \quad (4.4.35)$$

Nell'ipotesi in cui il rumore di uscita  $G(k)N_k$  abbia la covarianza a rango pieno (situazione in cui il rumore di misura su ciascuna componente dell'uscita è indipendente dal rumore sulle altre componenti), si ha

$$K(k) = P(k)C^T(k)[G(k)G^T(k)]^{-1}. \quad (4.4.36)$$

A questo punto la covarianza dell'errore di stima diventa

$$P(k) = P_p(k) - P(k)C^T(k)[G(k)G^T(k)]^{-1}C(k)P_p(k) \quad (4.4.37)$$

da cui

$$P(k)\left(I + C^T(k)[G(k)G^T(k)]^{-1}C(k)P_p(k)\right) = P_p(k) \quad (4.4.38)$$

e quindi

$$P(k) = P_p(k)\left(I + C^T(k)[G(k)G^T(k)]^{-1}C(k)P_p(k)\right)^{-1}. \quad (4.4.39)$$

L'equazione (4.4.39) può essere usata nel filtro di Kalman per il calcolo della  $P(k)$  al passo (IV), in quanto richiede solo  $P_p(k)$ , mentre la (4.4.36) in tal caso verrebbe usata al passo (V), in quanto richiede la conoscenza di  $P(k)$ . Si ha quindi una diversa sequenza di calcoli per il filtro di Kalman.

## FILTRO DI KALMAN (2K)

(I) Condizioni iniziali

$$\hat{x}(0|-1) = E\{x(0)\} = 0 \quad P_p(0) = \Psi_{x(0)};$$

(II)  $k = 0$ ;

(III) Se  $k > 0$ : calcolo della matrice  $P_p(k)$  (già disponibile per  $k = 0$ )

$$P_p(k) = A(k-1)P(k-1)A^T(k-1) + F(k-1)F^T(k-1);$$

(IV) Calcolo della covarianza  $P(k)$

$$P(k) = P_p(k)\left(I + C^T(k)[G(k)G^T(k)]^{-1}C(k)P_p(k)\right)^{-1};$$

(V) Calcolo del guadagno  $K(k)$

$$K(k) = P(k)C^T(k)[G(k)G^T(k)]^{-1};$$

(VI) Se  $k > 0$ : calcolo della predizione ottima (già disponibile per  $k = 0$ )

$$\hat{x}(k|k-1) = A(k-1)\hat{x}(k-1);$$

(VII) Calcolo della stima ottima  $\hat{x}(k)$

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)(y(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1));$$

(VIII)  $k = k + 1$ ; GOTO (III).

Dal punto di vista della complessità dei calcoli occorre osservare che quest'ultimo schema di calcolo richiede ad ogni passo l'inversione di una matrice di ordine  $n$ , ovvero della dimensione dello spazio di stato del sistema in esame, ed in più l'inversione della matrice  $G(k)G^T(k)$ , che è di ordine  $q$ , pari alla dimensione del vettore delle uscite (nel caso stazionario, in cui  $G(k) = G$  costante, ovviamente l'inversa di  $GG^T$  necessita di essere calcolata solo al primo passo).

Lo schema di calcolo (1K) per il filtro di Kalman non necessita dell'ipotesi di invertibilità di  $G(k)G^T(k)$  e risulta computazionalmente meno oneroso. Infatti ad ogni passo si deve calcolare l'inversa di una sola matrice di ordine  $q$  (si ricordi che  $q \leq n$ ). Addirittura nel caso di sistemi con una sola uscita il calcolo dell'inversa si riduce alla divisione per una quantità scalare.

Nelle figure 4.4.1 e 4.4.2 vengono illustrati graficamente entrambi gli schemi di calcolo con cui è possibile implementare il filtro di Kalman.

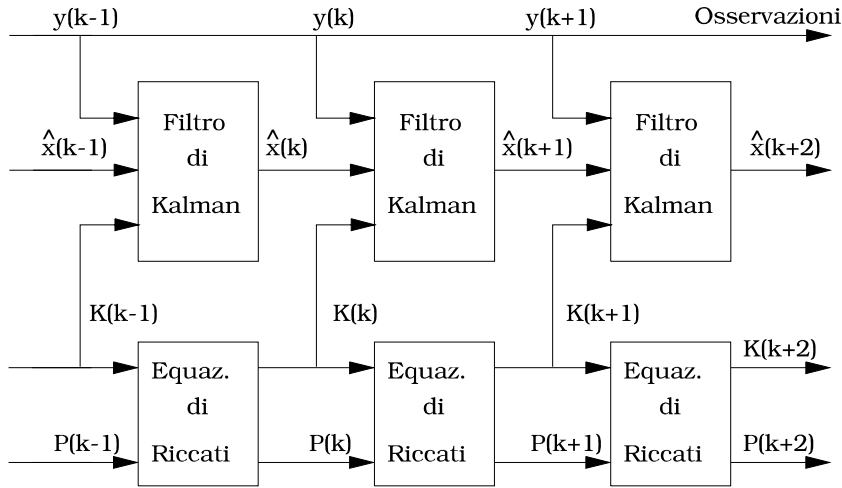


Figura 4.4.1. Schema di calcolo 1K.

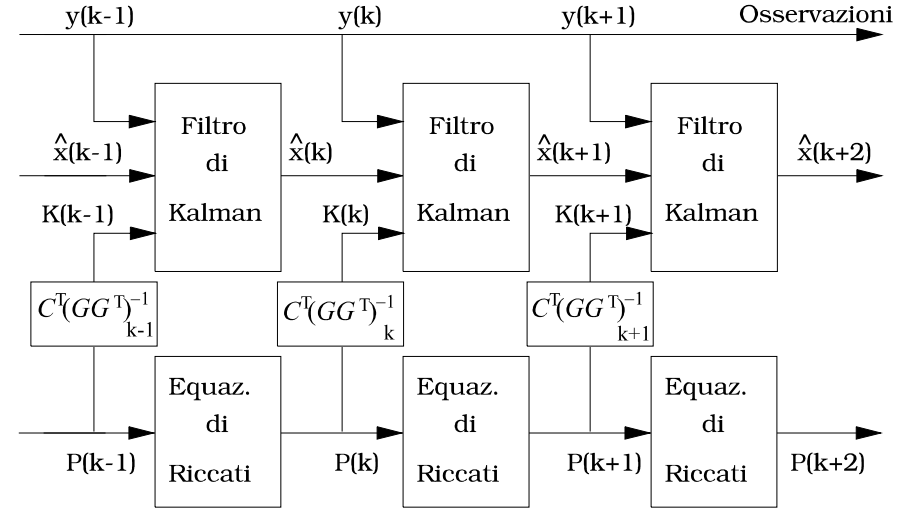


Figura 4.4.2. Schema di calcolo 2K.

**Osservazione 4.4.3** – Anche se non è immediatamente rilevabile dalle strutture di calcolo (4.4.32) e (4.4.39), la sequenza di matrici  $P(k)$  per  $k > 1$  è una sequenza di matrici simmetriche e semidefinite positive, purché  $P(0)$  sia tale. Ciò perché esse sono delle matrici di covarianza. Per lo stesso motivo anche le matrici  $P_p(k)$  sono simmetriche semidefinite positive, come rilevabile anche in modo immediato dalla struttura della (4.4.11). Anche l'espressione (4.4.32) per la  $P(k)$  può essere messa in una forma che ne renda evidente la simmetria. Infatti, distribuendo il prodotto nella (4.4.32)

$$P(k) = P_p(k) - K(k)C(k)P_p(k), \quad (4.4.40)$$

e sostituendo l'espressione (4.4.28) per la  $K(k)$  si ha

$$P(k) = P_p(k) - P_p(k)C^T(k) \cdot \left( C(k)P_p(k)C^T(k) + G(k)G^T(k) \right)^{-1} C(k)P_p(k). \quad (4.4.41)$$

Resta così dimostrato che l'espressione (4.4.39) per la  $P(k)$  può essere senz'altro riscritta come

$$P(k) = \left( I + P_p(k)C^T(k)[G(k)G^T(k)]^{-1}C(k) \right)^{-1} P_p(k).$$

△

**Osservazione 4.4.4** – Nel caso in cui il rumore di osservazione abbia la matrice di covarianza singolare lo schema di calcolo (2K) sicuramente non è applicabile in quanto non è possibile calcolare l'inversa di  $G(k)G^T(k)$  al passo (V). Nel caso poi in cui il rumore di osservazione sia completamente assente, e quindi  $G(k) \equiv 0$ , il guadagno  $K(k)$  del filtro di Kalman si riduce ad essere la pseudoinversa della matrice  $C(k)$  pesata con la  $P_p(k)$ . Infatti la (4.4.28) diventa

$$K(k) = P_p(k)C^T(k)\left(C(k)P_p(k)C^T(k)\right)^{-1}, \quad (4.4.42)$$

ed è tale per cui  $C(k)K(k) = I$ . Si ha di conseguenza che  $C(k)[I - K(k)C(k)] = 0$ , e quindi è facile verificare che la  $\hat{x}(k)$  fornita dal filtro di Kalman nella espressione (4.3.13b)

$$\hat{x}(k) = [I - K(k)C(k)]A(k-1)\hat{x}(k-1) + K(k)y(k)$$

è tale che  $C(k)\hat{x}(k) = y(k)$ . La matrice  $[I - K(k)C(k)]$  rappresenta l'operatore di proiezione nel nucleo di  $C(k)$ , ortogonale secondo il prodotto scalare dato dal tensore metrico  $P_p(k)^{-1}$ .

Non è difficile mostrare che in effetti il filtro di Kalman in questo caso risolve in modo esatto il seguente sistema lineare algebrico *sottodeterminato* (numero di incognite superiore al numero di equazioni)

$$C(k)x = y(k), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y(k) \in \mathbb{R}^q, \quad q < n$$

nell'incognita  $x$ , minimizzando allo stesso tempo l'indice quadratico

$$J(x) = (x - \hat{x}(k|k-1))^T P_p(k)^{-1} (x - \hat{x}(k|k-1)),$$

che esprime una norma della differenza tra  $x$  e  $\hat{x}(k|k-1)$ . △

**Osservazione 4.4.5** – Si è mostrato in precedenza che la stima ottima del segnale utile  $s(k) = C(k)x(k)$  è pari a  $\hat{s}(k) = C(k)\hat{x}(k)$ .

Per ottenerla è quindi necessario implementare completamente il filtro di Kalman e poi eseguire il prodotto  $C(k)\hat{x}(k)$ . La covarianza dell'errore di stima del segnale utile è pari a

$$\begin{aligned} E\{(s(k) - \hat{s}(k))(s(k) - \hat{s}(k))^T\} &= \\ &= C(k)E\{(x(k) - \hat{x}(k))(x(k) - \hat{x}(k))^T\}C(k)^T = \\ &= C(k)P(k)C(k)^T, \end{aligned}$$

e, essendo ottima la stima, è senz'altro inferiore alla covarianza dell'errore di qualunque altra stima di  $s(k)$ . Ad esempio, una stima  $\tilde{s}(k)$  di  $s(k)$  è senz'altro l'osservazione  $y(k)$  stessa ( $\tilde{s}(k) = y(k)$ ). La covarianza dell'errore di stima in questo caso è

$$\begin{aligned} E\{(s(k) - \tilde{s}(k))(s(k) - \tilde{s}(k))^T\} &= \\ &= E\{(C(k)x(k) - y(k))(C(k)x(k) - y(k))^T\} = \\ &= E\{G(k)N_k N_k^T G(k)^T\} = G(k)G(k)^T, \end{aligned}$$

cioè esattamente pari alla covarianza del rumore di osservazione. Si ha quindi che

$$\begin{aligned} C(k)P(k)C(k)^T &\leq G(k)G(k)^T, \\ \left( \text{ovvero } G(k)G(k)^T - C(k)P(k)C(k)^T \geq 0 \right). \end{aligned}$$

△

Si vuole ora riportare, per completezza, l'algoritmo del filtro di Kalman in forma di predittore ad un passo. Questo schema di calcolo è utilizzato nei problemi di controllo, nei quali è richiesta la stima dello stato all'istante  $k+1$  per poter calcolare l'ingresso di controllo da applicare nello stesso istante  $k+1$ . Il calcolo della stima deve pertanto essere svolto *prima* dell'istante  $k+1$ , utilizzando quindi solamente le osservazioni fino all'istante  $k$ .

Esiste la possibilità di riscrivere l'algoritmo di Kalman in funzione delle predizioni  $\hat{x}(k|k-1)$ . A tal fine si riprenda l'espressione della predizione ottima indicata al passo (VI) dello schema 1K,

scritta però per comodità con l'indice avanzato di 1, ed indicando per maggior chiarezza la stima ottima all'istante  $k$  con  $\hat{x}(k|k)$

$$\hat{x}(k+1|k) = A(k)\hat{x}(k|k).$$

In questa espressione si sostituisca il valore della stima ottima dato dal passo (VII) dello schema 1K

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)(y(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)),$$

per ottenere

$$\hat{x}(k+1|k) = A(k)\hat{x}(k|k-1) + A(k)K(k)(y(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)).$$

Il guadagno del predittore è pari a  $\bar{K}(k) = A(k)K(k)$ .

Per il calcolo del guadagno non è necessario sviluppare il calcolo della  $P(k)$ , in quanto è sufficiente la sola  $P_p(k)$ . Dalle relazioni

$$\begin{aligned} P(k) &= (I - K(k)C(k))P_p(k), \\ P_p(k+1) &= A(k)P(k)A^T(k) + F(k)F^T(k), \end{aligned} \quad (4.4.43)$$

si ha

$$P_p(k+1) = A(k)(I - K(k)C(k))P_p(k)A^T(k) + F(k)F^T(k),$$

che, ricordando la definizione  $\bar{K}(k) = A(k)K(k)$ , diventa

$$P_p(k+1) = A(k)P_p(k)A^T(k) - \bar{K}(k)C(k)P_p(k)A^T(k) + F(k)F^T(k),$$

L'espressione per il guadagno  $\bar{K}(k)$  è la seguente

$$\bar{K}(k) = A(k)P_p(k)C^T(k)(C(k)P_p(k)C^T(k) + G(k)G^T(k))^{-1}.$$

L'algoritmo per il calcolo della predizione ottima ad un passo dello stato è pertanto il seguente.

### PREDITTORE DI KALMAN (3K)

(I) Condizioni iniziali

$$\hat{x}(0|-1) = E\{x(0)\} = 0 \quad P_p(0) = \Psi_{x(0)};$$

(II)  $k = 0$ ;

(III) Calcolo del guadagno  $\bar{K}(k)$

$$\bar{K}(k) = A(k)P_p(k)C^T(k)\left(C(k)P_p(k)C^T(k) + G(k)G^T(k)\right)^{-1};$$

(IV) Calcolo della predizione ottima  $\hat{x}(k+1|k)$

$$\hat{x}(k+1|k) = A(k)\hat{x}(k|k-1) + \bar{K}(k)(y(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1));$$

(V) Calcolo della covarianza  $P_p(k)$  dell'errore di predizione

$$P_p(k+1) = A(k)P_p(k)A^T(k) - \bar{K}(k)C(k)P_p(k)A^T(k) + F(k)F^T(k);$$

(VI)  $k = k+1$ ; GOTO (III).

### 4.5 Il filtro con l'ingresso deterministico.

In questa sezione si vuole mostrare come devono essere modificate le equazioni del filtro allorché si prenda in considerazione anche la presenza dell'ingresso deterministico  $u$  nel sistema (4.1.1). A tale scopo è opportuno riassumere il percorso compiuto sino a questo istante. Si è partiti dal sistema costituito dalle equazioni (4.1.1) e, scomponendo lo stato e l'uscita in una parte deterministica ed in una stocastica, si sono ottenuti i due sottosistemi

$$\begin{aligned} x_d(k+1) &= A(k)x_d(k) + B(k)u(k), & x(0) &= E\{x(0)\} \\ y_d(k) &= C(k)x_d(k) + D(k)u(k), \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

e

$$\begin{aligned} x_s(k+1) &= A(k)x_s(k) + F(k)N_k, & x_s(0) &= x(0) - E\{x(0)\}, \\ y_s(k) &= C(k)x_s(k) + G(k)N_k, & E\{x_s(0)x_s^T(0)\} &= \Psi_{x(0)}. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

L'evoluzione dello stato del primo sottosistema è nota con esattezza a partire dalla conoscenza dell'ingresso  $u$ , mentre per il secondo sottosistema si è costruito il filtro di Kalman che restituisce la stima di minima varianza dello stato. Esso è composto da uno schema di calcolo che fornisce in modo ricorsivo le matrici di guadagno  $K(k)$  utilizzate nell'equazione dinamica

$$\hat{x}_s(k+1) = A(k)\hat{x}_s(k) + K(k+1)\left(y_s(k+1) - C(k+1)A(k)\hat{x}_s(k)\right)$$

inizializzata con  $\hat{x}_s(0) = E\{x_s(0)\} = 0$  (4.5.3)

Invece di calcolare separatamente la parte deterministica dello stato  $x_d(k)$  e di stimare la parte stocastica  $x_s(k)$ , per poi successivamente sommarle ricostruendo così la stima dello stato  $x(k)$  del sistema di partenza (4.1.1), è preferibile costruire una formula unica per il calcolo della stima di  $x(k)$ . Ciò anche perché il calcolo della parte deterministica tramite la prima delle (4.5.1) introduce necessariamente errori (dovuti ad un errato stato iniziale o ad errori nel modello, o semplicemente ad errori numerici), che possono crescere indefinitamente al crescere di  $k$  in quanto non vi è alcuna retroazione dall'uscita che provveda a mantenerli limitati.

Tenendo presente che  $x_d(k)$  è un vettore deterministico, si ha

$$\hat{x}(k) = E\{x_d(k) + x_s(k)|\mathcal{F}_k^Y\} = x_d(k) + \hat{x}_s(k). \quad (4.5.4)$$

Occorre quindi sommare alla stima deterministica dello stato

$$x_d(k+1) = A(k)x_d(k) + B(k)u(k), \quad (4.5.5)$$

la stima stocastica fornita dal filtro di Kalman (4.3.13a), scritto per  $k+1$

$$\hat{x}_s(k+1) = A(k)\hat{x}_s(k) + K(k+1)\left(y_s(k+1) - C(k+1)A(k)\hat{x}_s(k)\right). \quad (4.5.6)$$

Considerando che la parte stocastica dell'uscita si calcola come

$$y_s(k+1) = y(k+1) - C(k+1)x_d(k+1) - D(k+1)u(k+1),$$

la somma della parte deterministica e stocastica della stima risulta essere

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A(k)[x_d(k) + \hat{x}_s(k)] + B(k)u(k) + K(k+1)\left(y(k+1) - \right. \\ &\quad \left. - D(k+1)u(k+1) - C(k+1)[A(k)x_d(k) + B(k)u(k)] - \right. \\ &\quad \left. - C(k+1)A(k)\hat{x}_s(k)\right), \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A(k)\hat{x}(k) + B(k)u(k) + K(k+1)\left(y(k+1) - \right. \\ &\quad \left. - D(k+1)u(k+1) - C(k+1)[A(k)\hat{x}(k) + B(k)u(k)]\right), \\ \hat{x}(0) &= E\{x(0)\}. \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Questa equazione di stima può essere spezzata in due passi introducendo, come già fatto nella sezione precedente, la predizione ottima  $\hat{x}(k+1|k) = E\{x(k+1)|\mathcal{F}_k^Y\}$  che diventa in questo caso

$$\hat{x}(k+1|k) = A(k)\hat{x}(k) + B(k)u(k). \quad (4.5.8)$$

L'equazione del filtro diventa allora

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \hat{x}(k+1|k) + K(k+1) \cdot \left(y(k+1) - D(k+1)u(k+1) - C(k+1)\hat{x}(k+1|k)\right). \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

Il calcolo delle matrici  $K(k)$  e  $P(k)$  ad ogni passo rimane invariato.

Un'ulteriore semplificazione formale dell'espressione del filtro si ottiene definendo la predizione ottima dell'uscita

$$y(k+1|k) \triangleq E\{y(k+1)|\mathcal{F}_k^Y\}$$

che si calcola come

$$\hat{y}(k+1|k) = C(k+1)\hat{x}(k+1|k) + D(k+1)u(k+1). \quad (4.5.10)$$

L'espressione del filtro diventa allora semplicemente

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1)[y(k+1) - \hat{y}(k+1|k)]. \quad (4.5.11)$$

## 4.6 Richiami su sistemi lineari stazionari

Prima di passare ad analizzare alcune proprietà che il filtro di Kalman acquista quando è applicato a sistemi lineari e stazionari, si ritiene opportuno raccogliere in questa sezione alcuni richiami sulle proprietà strutturali e sulla stabilità di tali sistemi. Vengono anche richiamate alcune proprietà delle matrici simmetriche e semidefinite positive, utili per gli sviluppi del paragrafo successivo.

Per quanto riguarda la stabilità di un sistema lineare e stazionario, è noto che se la matrice dinamica  $A$  di un sistema a tempo discreto ha tutti gli autovalori con modulo strettamente minore di uno (ovvero se l'origine dello spazio di stato è un punto di equilibrio asintoticamente stabile), allora se gli ingressi al sistema sono limitati in ampiezza anche lo stato risulterà limitato (stabilità B.I.B.S.=Bounded-Input Bounded-State). Per questo motivo nel testo si dirà che una matrice  $A$  è stabile se e solo se tutti i suoi autovalori hanno modulo minore di uno.

Si hanno diversi criteri di stabilità di una matrice  $A$ , che riportiamo qui di seguito in forma di teorema.

**Teorema 4.6.1** – *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- 1) *La matrice  $A$  ha tutti autovalori con modulo minore di 1;*
- 2)  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ ;
- 3)  $\exists \mu > 0$  e  $\lambda \in (0, 1) : \|A^k\| \leq \mu \cdot \lambda^k, \quad \forall k \geq 0$ ;

- 4) *fissata comunque una matrice simmetrica e definita positiva  $Q$  l'equazione (di Lyapunov)*

$$S = ASA^T + Q$$

*nell'incognita  $S$  ammette soluzione unica, simmetrica e definita positiva.* ■

La dimostrazione non viene riportata in quanto i contenuti del teorema sono risultati ben noti della teoria dei sistemi. Si ritiene opportuno però riportare l'espressione della soluzione dell'equazione di Lyapunov

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} A^j Q (A^j)^T. \quad (4.6.1)$$

La convergenza della sommatoria è assicurata dal fatto che la successione  $\{S(k)\}$ , con  $S(k) = \sum_{j=0}^k A^j Q (A^j)^T$ , è monotona non decrescente e limitata superiormente. Che la successione sia monotona non decrescente è dimostrato dal fatto che è semidefinita positiva la differenza

$$S(k) - S(k-1) = S = A^k Q (A^k)^T \geq 0,$$

mentre la limitatezza (in norma) è implicata dalla proprietà 3) delle matrici stabili (teorema precedente)

$$\|S\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|Q\| \cdot \|A^k\|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|Q\| \cdot \mu^2 \lambda^{2k} = \|Q\| \cdot \frac{\mu^2}{1 - \lambda^2}.$$

**Osservazione 4.6.2** – La matrice  $S$  soluzione dell'equazione di Lyapunov può essere interpretata come la soluzione di regime della seguente equazione alle differenze

$$S(k+1) = AS(k)A^T + Q, \quad S(0) = S_0. \quad (4.6.2)$$



La soluzione nel generico istante  $k$  può essere scritta come

$$S(k) = A^k S_0 (A^k)^T + \sum_{j=0}^{k-1} A^j Q (A^j)^T, \quad (4.6.3)$$

Se la matrice  $A$  è stabile il termine  $A^k S_0 (A^k)^T$  tende a zero per  $k$  che tende ad infinito, e il valore limite della  $S(k)$  risulta essere indipendente da  $S_0$ .

Si noti che l'equazione (4.6.2) è equivalente all'equazione (4.1.30), cioè che se  $S_0$  è la covarianza dello stato iniziale  $x(0)$  del sistema  $x(k+1) = Ax(k) + FN_k$ , allora l'equazione ricorsiva (4.6.2), in cui  $Q = FF^T$ , fornisce ad ogni istante  $k$  la covarianza dello stato in quell'istante. Se la matrice  $A$  è stabile la covarianza di regime è indipendente dalla covarianza iniziale.  $\triangle$

La proprietà di stabilità si può attribuire ai vettori  $x$  dello spazio di stato di un sistema nel modo seguente:

**Definizione 4.6.3** – *Uno stato  $x$  si dice **A-stabile** se*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = 0. \quad (4.6.4)$$

*Uno stato si dice **A-instabile** se*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|A^k x\| = +\infty. \quad (4.6.5)$$

•

Per quanto riguarda la proprietà di osservabilità si ha il seguente teorema.

**Teorema 4.6.4** – *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- 1) la coppia  $(A, C)$  è osservabile;
- 2) la matrice

$$\mathcal{Q}_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

ha rango pari a  $n$ ;

3) la matrice

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$$

ha rango  $n$  per qualunque  $\lambda \in \mathbb{C}$ .  $\blacksquare$

È noto che uno stato  $x$  tale che  $\mathcal{Q}_n x = 0$  produce un'evoluzione libera dell'uscita identicamente nulla. Esso è pertanto non distinguibile dallo stato zero in base a osservazioni dell'uscita, e viene detto  $(A, C)$ -inosservabile. Il nucleo  $\mathcal{N}(\mathcal{Q}_n)$  costituisce l'insieme degli stati  $(A, C)$ -inosservabili.

È anche noto che se vale la proprietà di osservabilità è possibile assegnare gli autovalori alla matrice  $A - KC$  ovunque nel piano complesso, con una opportuna scelta matrice  $K$ . Questo significa che è possibile progettare un osservatore asintotico dello stato con dinamica dell'errore assegnata. Infatti l'osservatore di Luenberger, nella forma di predittore, ha la struttura

$$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) + K(y(k) - C\tilde{x}(k)), \quad (4.6.6)$$

per cui la dinamica dell'errore di osservazione  $e(k) = x(k) - \tilde{x}(k)$ , in assenza di rumori di stato e di osservazione, assume la forma

$$e(k+1) = (A - KC)e(k). \quad (4.6.7)$$

Una proprietà meno forte dell'osservabilità è la *rilevabilità* (dall'inglese *detectability*) o *ricostruibilità* dello stato. Quest'ultima garantisce la possibilità di costruire un osservatore asintotico dello stato che dia una dinamica dell'errore stabile. In altre parole una coppia  $(A, C)$  si dice rilevabile se esiste la possibilità di rendere stabile la matrice  $(A - KC)$  con una opportuna scelta di  $K$ . Si ha in proposito il seguente teorema:

**Teorema 4.6.5** – *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- 1) la coppia  $(A, C)$  è rilevabile;

2) non esistono stati  $A$ -instabili che sono  $(A, C)$ -inosservabili, ovvero

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|A^k x\| = +\infty \Rightarrow \mathcal{Q}_n x \neq 0;$$

3) tutti gli stati  $(A, C)$ -inosservabili sono  $A$ -stabili, ovvero

$$\mathcal{Q}_n x = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = 0;$$

4) la matrice

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$$

ha rango  $n$  per qualunque  $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq 1$ ;

5) esiste una matrice  $K$  tale che la matrice

$$A - KC$$

è stabile. ■

La rilevabilità della coppia  $(A, C)$  consente dunque la costruzione di un osservatore di Luenberger in forma di predittore con una dinamica dell'errore di stima asintoticamente stabile.

Spesso però nei sistemi a tempo discreto l'osservatore di Luenberger viene messo nella forma di filtro, e cioè

$$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) + K(y(k+1) - C A\tilde{x}(k)). \quad (4.6.8)$$

La dinamica dell'errore acquista, di conseguenza, la struttura

$$e(k+1) = (A - KCA)e(k). \quad (4.6.9)$$

Riguardo la proprietà di rilevabilità della coppia  $(A, CA)$  si ha il seguente teorema:

**Teorema 4.6.6** – Se la coppia  $(A, C)$  è rilevabile, allora anche la coppia  $(A, CA)$  è rilevabile.

**Dimostrazione** – Essendo le matrici di osservabilità delle due coppie definite come

$$\mathcal{Q}_n(A, CA) = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^n \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_n(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},$$

utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton nella forma

$$CA^n = -a_0 C - a_1 CA - \dots - a_{n-1} CA^{n-1},$$

è facile verificare che se  $a_0 \neq 0$  allora  $\mathcal{N}[\mathcal{Q}_n(A, C)] = \mathcal{N}[\mathcal{Q}_n(A, CA)]$ , e quindi gli stati  $(A, C)$ -inosservabili sono tutti e soli gli stati  $(A, CA)$ -inosservabili. Resta così verificato, grazie all'ipotesi, che tutti gli stati  $(A, CA)$ -inosservabili sono  $A$ -stabili, e quindi la coppia  $(A, CA)$  è rilevabile.

Se invece la matrice  $A$  ha autovalori nell'origine, e quindi  $a_0 = 0$ , si ha che  $\mathcal{N}[\mathcal{Q}_n(A, C)] \subseteq \mathcal{N}[\mathcal{Q}_n(A, CA)]$ . Occorre allora dimostrare che tutti gli stati  $(A, CA)$ -inosservabili che non sono  $(A, C)$ -inosservabili sono  $A$ -stabili. Sia  $x_0$  uno di tali stati (esso è tale che  $x_0 \in \mathcal{N}[\mathcal{Q}_n(A, CA)]$  e  $Cx_0 \neq 0$ ). È facile verificare che  $x_1 = Ax_0$  appartiene a  $\mathcal{N}[\mathcal{Q}(A, C)]$ , e quindi è  $A$ -stabile. Ma ciò implica che anche  $x_0$  è  $A$ -stabile, infatti

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x_1 = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A^{k+1} x_0 = 0. \quad (4.6.10)$$

Resta quindi dimostrato che tutti gli stati  $(A, CA)$ -inosservabili sono stabili, e quindi che la coppia  $(A, CA)$  è rilevabile. ■

Le definizioni e i risultati disponibili sul tema dell'osservabilità e della rilevabilità di una coppia  $(A, C)$  si possono estendere facilmente alla raggiungibilità e alla stabilizzabilità di una coppia  $(A, F)$ . A tal fine si ricordi che dalla teoria delle funzioni lineari su spazi lineari è noto che data una trasformazione lineare  $\mathcal{S} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$  valgono le seguenti relazioni

$$\mathcal{R}(\mathcal{S})^\perp = \mathcal{N}(\mathcal{S}^T) \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(\mathcal{S}^T) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{S}) = \mathbb{R}^n. \quad (4.6.11)$$

Ora sia  $\mathcal{P}_n = [F \ AF \dots A^{n-1}F]$ . Si ha che tutti e soli gli stati  $(A^T, F^T)$ -inosservabili, che costituiscono il nucleo di  $\mathcal{P}_n^T$ , costituiscono un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$  complementare a  $\mathcal{R}(\mathcal{P}_n)$ , che è lo spazio degli stati raggiungibili. Pertanto gli stati  $(A^T, F^T)$ -inosservabili, essendo complementari agli stati  $(A, F)$ -raggiungibili, sono di fatto non raggiungibili.

Ne consegue che la coppia  $(A, F)$  è raggiungibile se e solo se la coppia  $(A^T, F^T)$  è osservabile. La coppia  $(A, F)$  si dirà *stabilizzabile* se tutti gli stati  $(A^T, F^T)$ -inosservabili sono  $A$ -stabili. Grazie alla proprietà di dualità, si può affermare che la coppia  $(A, F)$  è stabilizzabile se e solo se la coppia  $(A^T, F^T)$  è rilevabile.

Si vuole ora richiamare alcune proprietà delle matrici simmetriche e semidefinite positive. Molte di queste possono essere dimostrate semplicemente sfruttando il fatto che una matrice  $S$  simmetrica e semidefinita positiva può sempre essere fattorizzata nella forma

$$S = R^T R. \quad (4.6.12)$$

Ad esempio si ha il seguente risultato

$$x^T S x = 0 \quad \Rightarrow \quad S x = 0, \quad (4.6.13)$$

che si dimostra tenendo conto che

$$x^T S x = x^T R^T R x = (R x)^T R x = \|R x\|^2$$

e quindi

$$x^T S x = 0 \quad \Rightarrow \quad \|R x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad R x = 0 \quad \Rightarrow \quad S x = 0,$$

e cioè l'implicazione (4.6.13).

Si ha inoltre che se la  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ha rango  $r \leq n$  allora la si può fattorizzare scegliendo una matrice  $R \in \mathbb{R}^{r \times n}$  con le  $r$  righe indipendenti.

Si ha poi il seguente lemma:

**Lemma 4.6.7** – Siano  $L$  e  $S$  due matrici semidefinite positive. Se  $S$  è simmetrica allora la matrice

$$I + L S \quad (4.6.14)$$

è invertibile.

**Dimostrazione** – Il teorema si dimostra per assurdo. Se  $(I + L S)$  fosse singolare, esisterebbe un vettore  $x \neq 0$  tale che  $(I + L S)x = 0$ . Si avrebbe quindi

$$\begin{aligned} (I + L S)x = 0 & \Rightarrow x^T S^T (I + L S)x = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow x^T S^T x + x^T S^T L S x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^T S^T x = 0, \\ x^T S^T L S x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

e poiché  $x^T S x = 0$  implica  $S x = 0$ , vale la seguente implicazione

$$(I + L S)x = 0 \quad \Rightarrow \quad S x = 0.$$

Però si ha anche

$$(I + L S)x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -L S x \quad \Rightarrow \quad S x \neq 0,$$

che è assurdo, essendo in contraddizione con quanto appena mostrato. ■

Si dimostra facilmente anche che se  $S$  è simmetrica e semidefinita positiva, qualsiasi matrice del tipo

$$M^T S M,$$

è semidefinita positiva. Basta scrivere la forma quadratica  $x^T M^T S M x$  e porre  $z = M x$  per avere  $z^T S z \geq 0$ . Se  $S$  è definita positiva allora il rango di  $M^T S M$  è pari al rango della  $M$ . In particolare se  $M$  è quadrata e non singolare  $M^T S M$  è definita positiva.

Più in generale si ha il seguente teorema:

**Teorema 4.6.8** – Siano  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  due matrici simmetriche e definite positive. La matrice

$$M^T S M + R^T Q R, \quad \text{con } M \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad R \in \mathbb{R}^{m \times p}, \quad (4.6.15)$$

è definita positiva se e solo se la matrice  $[M^T R^T]$  ha le righe indipendenti.

**Dimostrazione** – La forma quadratica

$$x^T (M^T S M + R^T Q R) x$$

è nulla per  $x \neq 0$  se e solo se

$$x^T M^T S M x = 0 \quad \text{e} \quad x^T R^T Q R x = 0.$$

e quindi se e solo se  $x^T M^T = 0$  e  $x^T R^T = 0$ . Deve quindi essere

$$x^T [M^T R^T] = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho([M^T R^T]) < p.$$

Quindi la forma quadratica si può annullare se e solo se le righe della  $[M^T R^T]$  sono dipendenti ( $\rho([M^T R^T]) < p$ ). Pertanto la matrice (4.6.15) è definita positiva se e solo se  $\rho([M^T R^T]) = p$ , e cioè se le righe della  $[M^T R^T]$  sono indipendenti. ■

È opportuno ricordare anche che matrici simmetriche e semidefinite positive  $S$  sono non singolari se e solo se sono definite positive. Infatti  $S$  non può essere allo stesso tempo definita positiva e singolare, perché abbiamo visto che  $x^T S x = 0$  implica  $Sx = 0$ , e quest'ultima può verificarsi, con  $x \neq 0$ , se e solo se  $S$  è singolare. Viceversa se  $S$  è non singolare è per forza anche definita positiva in quanto se non esistono vettori tali che  $Sx = 0$  la forma quadratica  $x^T S x$  non può mai annullarsi. È facile dimostrare che se  $S$  è definita positiva lo è anche  $S^{-1}$ . Infatti

$$x^T S^{-1} x = x^T S^{-1} S S^{-1} x = z^T S z \geq 0, \\ \text{con } z = S^{-1} x$$

inoltre

$$z^T S z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0, \quad \text{ma} \quad z = S^{-1} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Un'altra proprietà notevole delle matrici simmetriche e semidefinite positive è che possono sempre essere diagonalizzate con una trasformazione di coordinate per mezzo di una matrice ortonormale. Si ricordi che una matrice ortonormale  $U$  è una matrice quadrata tale che  $U \cdot U^T = I$ , ovvero tale che  $U^{-1} = U^T$ . Si ha quindi che una matrice  $S$  simmetrica e semidefinita positiva può essere sempre scritta come

$$S = U^T \Lambda U,$$

con  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$ ,  $\lambda_i \geq 0$ , ovvero come

$$S = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^T.$$

Una proprietà delle matrici ortonormali è che esse rappresentano operatori che preservano la norma, ovvero tali che

$$z = Ux \quad \Rightarrow \quad \|z\| = \|x\|.$$

Infatti

$$\|z\|^2 = z^T z = x^T U^T U x = x^T x = \|x\|^2.$$

Nello spazio lineare delle matrici simmetriche è possibile definire una norma nel seguente modo:  $\|S\|$  è la più piccola costante  $\gamma$  tale che

$$|x^T S x| \leq \gamma \cdot x^T x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

ovvero

$$\|S\| = \max_{x \neq 0} \frac{|x^T S x|}{x^T x}$$

o ancora

$$\|S\| = \max_{\|x\|=1} |x^T S x|.$$

È facile verificare che per le matrici simmetriche e semidefinite positive si ha

$$\lambda_{\min}(S)x^T x \leq x^T S x \leq \lambda_{\max}(S)x^T x,$$

e quindi

$$\|S\| = \lambda_{\max}(S).$$

Inoltre, indicando con  $\text{Tr}[S]$  la traccia di una matrice  $S$ , si ha che

$$\|S\| \leq \text{Tr}[S] \leq n\|S\|.$$

Questa proprietà trova applicazione nello studio della convergenza di successioni di matrici simmetriche semidefinite positive  $\{S(k)\}$ . Ad esempio si ha che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S(k)\| = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Tr}[S] = \infty$$

e che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S(k)\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Tr}[S] = 0.$$

## 4.7 Filtro di Kalman asintoticamente ottimo

È bene sottolineare che il filtro di Kalman è ottimo ad ogni istante  $k$  solamente nel caso in cui venga correttamente innescato. A tale scopo è necessario conoscere il valor medio  $E\{x(0)\}$  dello stato iniziale, impiegato per inizializzare la sequenza delle stime ottime  $\hat{x}(k)$ , nonché la sua covarianza  $\Psi_{x(0)}$ , con cui inizializzare la sequenza  $P(k)$  delle covarianze degli errori di stima. Un errore commesso sulla inizializzazione di  $P(0)$  si propaga nel calcolo delle covarianze  $P(k)$  in tutti gli istanti successivi, e quindi nel calcolo di tutte le matrici di guadagno  $K(k)$  impiegate nel filtro, che pertanto fornisce un risultato che non è ottimo. L'errore su  $\hat{x}(0)$ , pur non avendo effetti sul calcolo del guadagno e quindi sulla struttura del filtro, si ripercuoterà tuttavia su tutte le stime  $\hat{x}(k)$  negli istanti

successivi. Ha quindi interesse studiare sotto quali ipotesi al crescere di  $k$  la covarianza  $P(k)$ , e di conseguenza il guadagno  $K(k)$ , si rende indipendente dal valore di inizializzazione  $P(0)$ , e sotto quali ipotesi la stima  $\hat{x}(k)$  si rende indipendente da  $\hat{x}(0)$ . È evidente che quest'ultima proprietà risulta sicuramente verificata quando il filtro è asintoticamente stabile, in quanto l'evoluzione libera dello stato tende a zero per  $k$  che tende a infinito. Ha pertanto interesse analizzare le proprietà di stabilità del filtro di Kalman.

In questa sezione si considera innanzitutto il problema di stabilire sotto quali condizioni la successione delle covarianze  $P(k)$ , ottenuta dalle equazioni di Riccati, a regime risulta essere indipendente dall'inizializzazione  $P(0)$ . Di seguito ci si pone il problema di stabilire sotto quali condizioni il filtro di Kalman, in cui il guadagno sia calcolato sulla base del valore di regime di  $P(k)$ , risulta stabile.

Delle condizioni di questo genere rivestirebbero un notevole interesse nelle applicazioni, in quanto garantirebbero l'insensibilità asintotica del filtro di Kalman ad errori commessi nella inizializzazione. È opportuno osservare infatti che spesso, nelle applicazioni, è impensabile conoscere il valore atteso o la covarianza dello stato iniziale, per cui il filtro viene innescato con dei valori arbitrari per entrambe le quantità.

Purtroppo nel caso generale di sistemi lineari non stazionari non è possibile dare una risposta precisa ai quesiti posti. Pertanto in questa sede ci si occuperà esclusivamente di sistemi lineari e stazionari, per i quali esistono delle condizioni che assicurano le proprietà sopra enumerate. In particolare si tornerà a considerare solamente il sottosistema stocastico di un assegnato sistema, omettendo nuovamente, per semplicità, il pedice  $s$ . Per sistemi stazionari del tipo

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + FN_k, & E\{x(0)\} &= 0, \\ y(k) &= Cx(k) + GN_k, & FG^T &= 0, \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

il filtro di Kalman nella formulazione (2K) si sviluppa nel modo seguente.

**Filtro di Kalman per sistemi stazionari (A).**

(I) Inizializzazione

$$\hat{x}(0|-1) = 0, \quad P_p(0) = \Psi_{x(0)}, \quad k = -1;$$

(II) Equazione di Riccati (in due passi)

$$\begin{aligned} P_p(k+1) &= AP(k)A^T + FF^T, \quad (\text{non eseguire per } k = -1) \\ P(k+1) &= [I + P_p(k+1)C^T(GG^T)^{-1}C]^{-1}P_p(k+1); \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

(III) Calcolo del guadagno

$$K(k+1) = P(k+1)C^T(GG^T)^{-1};$$

(IV) Calcolo della stima ottima

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + K(k+1)[y(k+1) - CA\hat{x}(k)];$$

(V)  $k = k+1$ ; GOTO II.

Si osservi che il filtro risulta essere, in generale, un sistema lineare non stazionario anche qualora il sistema di partenza sia un sistema stazionario.

Il problema che ci si pone è di determinare sotto quali condizioni esiste il limite sottoindicato

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(k) = P_\infty, \quad (4.7.3)$$

e sotto quali condizioni  $P_\infty$  risulta essere indipendente da  $P_p(0)$ . La quantità  $P_\infty$  è detta **soluzione stazionaria dell'equazione di Riccati**.

Se  $P_\infty$  esiste si ha anche

$$K_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} K(k) = P_\infty C^T [GG^T]^{-1}. \quad (4.7.4)$$

Ciò significa che dopo un opportuno numero di passi la matrice del guadagno diventa praticamente costante, e il filtro si riduce ad un sistema lineare e stazionario.

Generalmente nei testi si fa riferimento a successioni di Riccati  $P(k)$  inizializzate con opportuni valori per  $P(0)$ . Il fatto di innescare le equazioni di Riccati con  $P(0)$  anziché con  $P_p(0)$  deriva dalla consuetudine di non considerare le misure all'istante 0 per ottenere  $\hat{x}(0)$ . Seguendo questa convenzione si ha la seguente successione temporale per l'implementazione delle equazioni di Riccati e del filtro di Kalman.

**Filtro di Kalman per sistemi stazionari (B).**

(I) Inizializzazione

$$\hat{x}(0) = 0, \quad P(0) = \Psi_{x(0)}, \quad k = 0;$$

(II) Equazione di Riccati (in due passi)

$$\begin{aligned} P_p(k+1) &= AP(k)A^T + FF^T, \\ P(k+1) &= [I + P_p(k+1)C^T(GG^T)^{-1}C]^{-1}P_p(k+1); \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

(III) Calcolo del guadagno

$$K(k+1) = P(k+1)C^T(GG^T)^{-1};$$

(IV) Calcolo della stima ottima

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + K(k+1)[y(k+1) - CA\hat{x}(k)];$$

(V)  $k = k+1$ ; GOTO II.

Come si vede la misura  $y(0)$  non viene usata per il calcolo di  $\hat{x}(0)$ . In altre parole, con questa implementazione si suppone che la migliore stima dello stato che si possa dare all'istante 0 è pari al

valore atteso, e quindi la covarianza  $P(0)$  dell'errore di stima coincide con la covarianza dello stato iniziale.

Nel seguito, per comodità, si farà riferimento a questo tipo di implementazione, e si parlerà correttamente di sequenze di Riccati innescate da  $P(0)$ .

L'equazione di Riccati che genera la sequenza  $P(k)$  risulta spezzata nei due termini (4.7.2), e pertanto la soluzione stazionaria  $P_\infty$  deve verificare le due equazioni

$$P_{p,\infty} = AP_\infty A^T + FF^T, \quad (4.7.5)$$

$$P_\infty = [I + P_{p,\infty} C^T (GG^T)^{-1} C]^{-1} P_{p,\infty}. \quad (4.7.6)$$

Sostituendo la (4.7.5) nella (4.7.6) si ottiene la seguente equazione algebrica in  $P_\infty$

$$P_\infty = [I + (AP_\infty A^T + FF^T) C^T (GG^T)^{-1} C]^{-1} (AP_\infty A^T + FF^T), \quad (4.7.7)$$

che può essere riscritta come

$$P_\infty + (AP_\infty A^T + FF^T) (C^T (GG^T)^{-1} C P_\infty - I) = 0. \quad (4.7.8)$$

Questo è un modo di scrivere l'**equazione algebrica di Riccati**, un'equazione quadratica nell'incognita matriciale  $P_\infty$ . L'equazione algebrica di Riccati è dotata di una proprietà di simmetria che però non viene evidenziata in questa formulazione. Utilizzando però la formulazione (1K) per il filtro di Kalman, particolarizzata al caso di sistemi stazionari, l'equazione algebrica di Riccati risulta spezzata nei due termini

$$\begin{aligned} K_\infty &= P_{p,\infty} C^T (C P_{p,\infty} C^T + GG^T)^{-1}, \\ P_\infty &= (I - K_\infty C) P_{p,\infty} \end{aligned}$$

Sostituendo  $K_\infty$  nella seconda equazione si ha

$$P_\infty = P_{p,\infty} - P_{p,\infty} C^T (C P_{p,\infty} C^T + GG^T)^{-1} C P_{p,\infty},$$

e sostituendo l'espressione (4.7.5) per  $P_{p,\infty}$  si ha la seguente scrittura per l'equazione algebrica di Riccati

$$\begin{aligned} P_\infty - AP_\infty A^T - FF^T + (AP_\infty A^T + FF^T) C^T \\ \cdot (C(AP_\infty A^T + FF^T) C^T + GG^T)^{-1} C (AP_\infty A^T + FF^T) = 0. \end{aligned}$$

In quest'ultima scrittura è evidente la simmetria dell'equazione matriciale. Si può quindi affermare che l'equazione algebrica di Riccati è composta in effetti da  $n(n+1)/2$  equazioni scalari distinte. Poiché inoltre  $P_\infty$  è una matrice simmetrica, e quindi è individuata da  $n(n+1)/2$  componenti, la risoluzione dell'equazione algebrica di Riccati matriciale richiede la soluzione di  $n(n+1)/2$  equazioni scalari in altrettante incognite scalari.

Dal punto di vista numerico invece di risolvere algebricamente l'equazione di Riccati spesso risulta vantaggioso calcolare  $P_\infty$  usando il limite (4.7.3), nell'ipotesi che questo esista.

Le condizioni che verranno ricavate per la convergenza della successione di  $P(k)$  ad un valore  $P_\infty$ , eventualmente indipendente da  $P(0)$ , avranno a che fare con la stabilizzabilità della coppia  $A, F$  e con la rilevabilità della coppia  $A, C$ .

Prima di procedere è opportuno introdurre una trasformazione sull'uscita del sistema (4.7.1) in modo da avere un rumore di osservazione standard, ovvero con covarianza pari all'identità. A tale scopo è necessario ipotizzare che  $GG^T$  sia nonsingolare ed è sufficiente considerare invece dell'uscita  $y(k)$  l'uscita trasformata

$$\bar{y}(k) = (GG^T)^{-\frac{1}{2}} y(k). \quad (4.7.9)$$

Ciò equivale prendere come equazione di uscita del sistema (4.7.1) la seguente

$$\begin{aligned} \bar{y}(k) &= \bar{C}x(k) + \bar{G}N_k, \\ \text{con } \bar{C} &= (GG^T)^{-\frac{1}{2}} C, \quad \bar{G} = (GG^T)^{-\frac{1}{2}} G. \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

Con queste posizioni è facile verificare che  $\bar{G}\bar{G}^T = I$ , ovvero che la covarianza del rumore di osservazione è pari alla matrice

identità. Questa proprietà alleggerisce notevolmente la scrittura delle equazioni del filtro e le equazioni di Riccati, in cui compare ripetutamente il termine  $(GG^T)^{-1}$ . È importante notare che le proprietà di osservabilità e di rilevabilità della coppia  $(A, \bar{C})$  risultano invariate rispetto a quelle della coppia  $(A, C)$ . Infatti le due matrici di osservabilità hanno lo stesso nucleo in quanto legate dalla relazione

$$\begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}A \\ \vdots \\ \bar{C}A^{n-1} \end{bmatrix} = (GG^T)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.7.11)$$

Nel seguito, per semplicità, si ometterà di riportare la barra sulla  $y(k)$  e sulle matrici  $C$  e  $G$ , e si assumerà semplicemente che  $GG^T = I$ .

Le equazioni di Riccati che verranno considerate nel seguito assumono quindi la forma

$$\begin{aligned} P_p(k+1) &= AP(k)A^T + FF^T, \\ P(k+1) &= [I + P_p(k+1)C^TC]^{-1}P_p(k+1). \end{aligned} \quad (4.7.12)$$

Per prima cosa occorre stabilire sotto quali condizioni è sicuramente possibile il calcolo dell'inversa della matrice  $[I + P_p(k+1)C^TC]$  nelle (4.7.12). Ricordando che, come mostrato nella sezione precedente, se due matrici  $L$  e  $S$  sono simmetriche semidefinite positive allora la matrice  $I + LS$  è nonsingolare, resta verificato che la matrice  $[I + P_p(k+1)C^TC]$  è sempre invertibile (verifica con  $L = P_p(k+1)$  e  $S = C^TC$ ).

Il risultato a cui si giunge è che a partire da una matrice  $P(0)$  simmetrica e semidefinita positiva è sempre possibile costruire la sequenza di matrici  $P(k)$ , in quanto l'inversa nella (4.7.12) può sempre essere calcolata. Si è già verificato inoltre (osservazione 4.4.3) che per ogni  $k > 0$  le  $P(k)$  continuano ad essere simmetriche e semidefinite positive. Si vuole ora studiare sotto quali ipotesi le  $P(k)$  sono definite positive.

**Lemma 4.7.1** – *La coppia  $(A, F)$  sia raggiungibile. Se per un dato  $k$  la matrice  $P(k)$  è definita positiva allora la  $P(k+1)$  risulta essere invertibile.*

**Dimostrazione** – Dalla espressione (4.7.12), utilizzata per il calcolo della  $P(k+1)$  a partire dalla  $P_p(k+1)$ , si vede che per stabilire l'invertibilità della  $P(k+1)$  occorre e basta dimostrare l'invertibilità della  $P_p(k+1)$ .

L'invertibilità della  $P_p(k+1)$  si dimostra per assurdo. Se  $P_p(k+1)$  fosse singolare esisterebbe un vettore  $x \neq 0$  tale che

$$\begin{aligned} P_p(k+1)x &= 0 \quad \text{ovvero} \quad AP(k)A^Tx + FF^Tx = 0 \\ \text{da cui} \quad x^T AP(k)A^Tx + x^T FF^Tx &= 0. \end{aligned} \quad (4.7.13)$$

Il primo addendo dell'espressione (4.7.13) è una forma quadratica nella variabile  $(A^Tx)$  e, poiché  $P(k)$  è definita positiva per ipotesi, è sempre positivo a meno che non sia  $A^Tx = 0$ . Il secondo addendo è pari al quadrato della norma di  $Fx$ , e quindi sempre maggiore o uguale a zero. Ne segue che

$$P_p(k+1)x = 0 \quad \Rightarrow \quad F^Tx = 0 \quad \text{e} \quad A^Tx = 0, \quad (4.7.14)$$

e quindi anche

$$x^TF = 0, \quad x^TA^hF = 0, \quad \forall h > 0 \quad (4.7.15)$$

ovvero

$$x^T [F \quad AF \quad \dots \quad A^{n-1}F] = 0. \quad (4.7.16)$$

La (4.7.16) contraddice l'ipotesi di raggiungibilità fatta sulla coppia  $(A, F)$ . Resta quindi dimostrato che con le ipotesi fatte  $P_p(k+1)$  è non singolare, e quindi, dalla (4.7.12) discende la tesi. ■

In realtà per assicurare l'invertibilità della  $P_p(k+1)$  non è strettamente necessaria la raggiungibilità della coppia  $(A, F)$ , come stabilito dal seguente toerema.

**Lemma 4.7.2** – Condizione necessaria e sufficiente affinché, data  $P(k)$  simmetrica e definita positiva, la matrice  $P(k+1)$  sia invertibile è che la matrice  $[A \ F]$  abbia rango  $n$ .



**Dimostrazione** – Riprendendo la dimostrazione del lemma precedente si vede che  $P_p(k+1)$  è invertibile se e solo se non esiste alcun vettore  $x$  tale da annullare simultaneamente i prodotti  $x^T A$  e  $x^T F$ . Ma questa condizione equivale ad affermare che la matrice  $[A \ F]$  ha rango pieno

$$\left\{ \begin{array}{l} x^T A = 0 \\ x^T F = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho[A \ F] = n. \quad (4.7.17)$$

e cioè la tesi. ■

Questa condizione è meno forte della raggiungibilità. A tal proposito si ricordi che una condizione di raggiungibilità della coppia  $(A, F)$  è che

$$\rho[A - \lambda I \ F] = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

mentre affinché la  $P_p(k+1)$  sia non singolare occorre e basta che la suddetta condizione sia verificata solamente per  $\lambda = 0$ . Questa condizione si può esprimere anche dicendo che il modo relativo ad un eventuale autovalore nullo della matrice  $A$  deve essere eccitabile, ovvero che tutti gli autovettori sinistri  $v_i^T$ , per  $i = 1, \dots, n - \rho(A)$ , devono essere tali che  $v_i^T F \neq 0$ .

È facile ora dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 4.7.3** – *Se la coppia  $(A, F)$  è tale che la matrice  $[A \ F]$  ha rango  $n$ , allora si ha*

$$P(k) > 0 \quad \Rightarrow \quad P(k+h) > 0, \quad \forall h > 0.$$

**Dimostrazione** – Poiché una matrice semidefinita positiva e non singolare è definita positiva, il lemma precedente stabilisce che

$$P(k) > 0 \quad \Rightarrow \quad P(k+1) > 0.$$

Da questo risultato, per induzione sugli interi, si ha la tesi. ■

Ha interesse ora mostrare in quali casi la sequenza  $\{P(k)\}$  può divergere. Si ha in proposito il seguente risultato.

**Teorema 4.7.4** – *Se esiste uno stato  $\bar{x}$   $(A, C)$ -inosservabile ed  $A$ -instabile allora esiste una condizione iniziale  $P(0)$  per l'equazione di Riccati tale che*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P(k)\| = +\infty \quad (4.7.18)$$

**Dimostrazione** – Poiché si è visto che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P(k)\| = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Tr}[P(k)] = +\infty$$

basta dimostrare che esiste un valore di innesco  $P(0)$  per le equazioni di Riccati tale che  $\text{Tr}[P(k)] \rightarrow +\infty$ .

Sia  $\bar{x}$  uno stato  $(A, C)$ -inosservabile ed  $A$ -instabile. Valgono allora le relazioni

$$CA^k \bar{x} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (4.7.19)$$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|A^k \bar{x}\| = +\infty \quad (4.7.20)$$

Senza perdita di generalità si suppone

$$\|\bar{x}\| = 1 \quad (4.7.21)$$

Come matrice  $P(0)$  si può prendere la matrice identità. Si vuole mostrare però che è sufficiente considerare una qualunque matrice simmetrica e definita positiva che abbia  $\bar{x}$  tra i suoi autovettori, e cioè tale che

$$P(0)\bar{x} = \lambda\bar{x}. \quad (4.7.22)$$

Poiché la matrice  $P(0)$  è definita positiva l'autovalore  $\lambda$  deve essere necessariamente positivo. Lo stato iniziale  $x(0) = x_0$ , vettore aleatorio a media nulla, si può scomporre in due componenti ortogonali

$$x_0 = x_a + x_b, \quad \begin{cases} x_a = (x_0^T \bar{x}) \bar{x}, \\ x_b = x_0 - (x_0^T \bar{x}) \bar{x}. \end{cases} \quad (4.7.23)$$

$x_0^T \bar{x} = \langle x_0, \bar{x} \rangle$  è l'ampiezza della componente di  $x_0$  secondo  $\bar{x}$ .  $x_b$  è la componente di  $x_0$  ortogonale a  $\bar{x}$ . È immediato constatare l'ortogonalità *geometrica* tra i vettori  $x_a$  e  $x_b$ , verificando che  $x_a^T x_b = 0$  (si ricordi che  $\bar{x}^T \bar{x} = 1$ ).

Si dimostra anche che le due componenti di  $x_0$  in (4.7.23) sono ortogonali anche dal punto di vista probabilistico (scorrelate), ovvero sono tali che  $E\{x_a x_b^T\} = 0$ . A tale scopo verifichiamo che l'ampiezza del vettore  $x_a$ , ossia  $x_0^T \bar{x}$ , è indipendente da  $x_b$

$$\begin{aligned} E\{(\bar{x}^T x_0) x_b^T\} &= E\{\bar{x}^T x_0 [x_0^T - (x_0^T \bar{x}) \bar{x}^T]\} = \\ &= \bar{x}^T P(0) - \bar{x}^T P(0) \bar{x} \bar{x}^T = \\ &= \bar{x}^T P(0) (I - \bar{x} \bar{x}^T) = \\ &= \lambda \bar{x}^T (I - \bar{x} \bar{x}^T) = 0 \end{aligned}$$

Si vuole dimostrare adesso che l'osservazione  $y(k)$  ad ogni istante  $k$  è indipendente dalla componente di  $x_0$  lungo la direzione di  $\bar{x}$ , e cioè che  $E\{(x_0^T \bar{x}) y(k)^T\} = 0$  per qualunque  $k$ .

L'espressione dell'osservazione dell'uscita all'istante  $k$  è data da

$$y(k) = CA^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} F N_i + G N_k. \quad (4.7.24)$$

Sostituendo la (4.7.23) ed utilizzando la condizione (4.7.19), la (4.7.24) diventa

$$y(k) = CA^k x_b + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} F N_i + G N_k. \quad (4.7.25)$$

Poiché è stato dimostrato che  $x_0^T \bar{x}$  è indipendente da  $x_b$ , e poiché per ipotesi  $x_0$  è indipendente dai rumori  $N_i$ , per qualunque  $i$ , resta verificato che

$$E\{(x_0^T \bar{x}) y(k)^T\} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.7.26)$$

L'errore di stima all'istante  $k$  è dato da

$$x(k) - \hat{x}(k) = A^k (x_0^T \bar{x}) \bar{x} + A^k x_b + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} F N_i - \hat{x}(k). \quad (4.7.27)$$

L'addendo  $A^k (x_0^T \bar{x}) \bar{x}$  del secondo membro dell'equazione (4.7.27) è scorrelato da tutti gli altri addendi. Si è già detto infatti che  $(x_0^T \bar{x})$  è indipendente da  $x_b$  e da tutti i rumori  $N_i$ , per ogni  $i$ . È inoltre scorrelato da  $\hat{x}(k)$  in quanto è noto che la stima ottima è una funzione delle osservazioni  $y(k)$ , che a loro volta sono indipendenti da  $(x_0^T \bar{x})$ , grazie alla (4.7.26).

Ne consegue che la covarianza dell'errore di stima (4.7.27) è data dalla somma delle covarianze di ciascun addendo. In particolare, indicato con  $\alpha$  il primo addendo del secondo membro della (4.7.27) ( $\alpha = A^k (x_0^T \bar{x}) \bar{x}$ ) e con  $\beta$  la parte restante, si ottiene

$$\begin{aligned} P(k) &= E\{[x(k) - \hat{x}(k)][x(k) - \hat{x}(k)]^T\} = E\{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^T\} = \\ &= E\{\alpha \alpha^T\} + E\{\beta \beta^T\}. \end{aligned} \quad (4.7.28)$$

Poiché se con  $v$  si indica un qualunque vettore è facile verificare che

$$\text{Tr}[vv^T] = v^T v = \|v\|^2 \geq 0$$

allora

$$\begin{aligned} \text{Tr}[P(k)] &= \text{Tr}[E\{\alpha \alpha^T\} + E\{\beta \beta^T\}] = \\ &= E\{\alpha^T \alpha\} + E\{\beta^T \beta\} \geq E\{\|\alpha\|^2\}, \end{aligned} \quad (4.7.29)$$

cioè

$$\text{Tr}[P(k)] \geq E\{(x_0^T \bar{x})^2 \|A^k \bar{x}\|^2\} \quad (4.7.30)$$

e poiché  $\bar{x}$  è  $A$ -instabile segue la tesi. ■

**Osservazione 4.7.5** – Il teorema precedente dimostra che condizione sufficiente affinché esista una condizione iniziale  $P(0)$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P(k)\| = +\infty$$

è che esista almeno uno stato  $\bar{x}$  che sia  $(A, C)$ -inosservabile ed  $A$ -instabile. Allora condizione necessaria, ma non sufficiente, affinché esista  $P_\infty$  è che tutti gli stati inosservabili siano  $A$ -stabili (ovvero che

tutti gli stati  $A$ -instabili siano osservabili). Si vedrà più avanti che questa condizione, che altro non è se non la rilevabilità della coppia  $(A, C)$ , è anche sufficiente per l'esistenza di  $P_\infty$ .  $\triangle$

**Osservazione 4.7.6** – È interessante notare che, nel caso in cui vi siano stati  $A$ -instabili e  $(A, C)$ -inosservabili e  $P(0)$  sia tale che la sequenza delle covarianze  $P(k)$  dell'errore di stima dello stato cresca indefinitivamente, l'errore commesso sulla stima del segnale utile  $s(k) = Cx(k)$  ha una covarianza  $CP(k)C^T$  che si mantiene limitata. In particolare continua a valere la disuguaglianza

$$CP(k)C^T \leq I \quad \{ \text{ovvero} \quad CP(k)C^T \leq GG^T \},$$

dimostrata nell'osservazione 4.4.5. Dal punto di vista numerico però in questo caso si hanno delle evidenti difficoltà nell'implementazione del filtro di Kalman (overflow numerico).  $\triangle$

Si definisca ora la funzione di matrice  $\Phi(P)$  nel modo seguente

$$\Phi(P) = (I + P_p(P)C^T C)^{-1} P_p(P) \quad (4.7.31)$$

in cui

$$P_p(P) = APA^T + FF^T. \quad (4.7.32)$$

La funzione di matrice  $P_p(P)$  trasforma matrici semidefinite positive in matrici della stessa classe. Con queste posizioni le equazioni di Riccati (4.7.12) sono sintetizzate nell'espressione

$$P(k+1) = \Phi(P(k)), \quad (4.7.33)$$

e l'equazione algebrica di Riccati può essere scritta come

$$P = \Phi(P). \quad (4.7.34)$$

Se esiste  $P_\infty$  essa soddisfa la (4.7.34).

Vale il seguente lemma:

**Lemma 4.7.7** – Siano  $P$  e  $Q$  due matrici simmetriche semidefinite positive. Si ha allora

$$\Phi(P + Q) \geq \Phi(P). \quad (4.7.35)$$

**Dimostrazione** – Occorre dimostrare che la differenza  $\Phi(P + Q) - \Phi(P)$  è semidefinita positiva. Poiché quest'ultima si può scrivere come

$$\Phi(P + Q) - \Phi(P) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} \Phi(P + \lambda Q) d\lambda,$$

basta dimostrare che l'integrando è semidefinito positivo per ogni  $\lambda$ . Prima di calcolare la derivata riscriviamo per esteso l'integrando

$$\frac{d}{d\lambda} \Phi(P + \lambda Q) = \frac{d}{d\lambda} ((I + P_p(P + \lambda Q)C^T C)^{-1} P_p(P + \lambda Q)).$$

Sia

$$S(\lambda) = I + P_p(P + \lambda Q)C^T C, \quad (4.7.36)$$

e quindi

$$\frac{d}{d\lambda} S(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} P_p(P + \lambda Q)C^T C = AQA^T C^T C.$$

Inoltre poiché  $SS^{-1} = I$  e  $\frac{d}{d\lambda} S(\lambda)S^{-1}(\lambda) = 0$ , è possibile ricavare

$$\frac{d}{d\lambda} S^{-1}(\lambda) = -S^{-1}(\lambda) \left( \frac{dS(\lambda)}{d\lambda} \right) S^{-1}(\lambda).$$

Si ha pertanto

$$\frac{d}{d\lambda} S^{-1}(\lambda) = -S^{-1}(\lambda) AQA^T C^T C S^{-1}(\lambda) \quad (4.7.37)$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \Phi(P + \lambda Q) &= \frac{d}{d\lambda} S^{-1}(\lambda) P_p(P + \lambda Q) = \\ &= S^{-1}(\lambda) AQA^T - S^{-1}(\lambda) AQA^T C^T C S^{-1}(\lambda) P_p(P + \lambda Q) = \\ &= S^{-1}(\lambda) AQA^T [I - C^T C S^{-1}(\lambda) P_p(P + \lambda Q)] = \\ &= S^{-1}(\lambda) AQA^T [I - C^T C \Phi(P + \lambda Q)]. \end{aligned}$$

Ora poiché  $S(\lambda) - P_p(\lambda)C^T C = I$  si ha

$$\begin{aligned} S^{-1}(\lambda) &= S^{-1}(\lambda)(S(\lambda) - P_p(\lambda)C^T C) = \\ &= I - S^{-1}(\lambda)P_p(\lambda)C^T C = I - \Phi(P + \lambda Q)C^T C \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{d}{d\lambda}\Phi(P + \lambda Q) = S^{-1}(\lambda)AQ A^T S^{-T}(\lambda) \quad (4.7.38)$$

che è evidentemente una matrice simmetrica e semidefinita positiva, per cui la tesi resta dimostrata. ■

**Osservazione 4.7.8** – È facile verificare che il lemma appena dimostrato può essere riformulato nella seguente implicazione, in cui  $S$  e  $P$  sono matrici simmetriche e semidefinite positive

$$S \geq P \Rightarrow \Phi(S) \geq \Phi(P). \quad (4.7.39)$$

△

La conseguenza principale di questo lemma è che se per un certo  $k_0$  si ha che  $P(k_0 + 1) \geq P(k_0)$ , la sequenza  $P(k)$  per  $k \geq k_0$  è tale che  $P(k + 1) \geq P(k)$ . Infatti

$$P(k_0 + 1) \geq P(k_0) \Rightarrow \Phi(P(k_0 + 1)) \geq \Phi(P(k_0))$$

ma poiché

$$\Phi(P(k_0 + 1)) = P(k_0 + 2) \quad \text{e} \quad \Phi(P(k_0)) = P(k_0 + 1)$$

si ha

$$P(k_0 + 1) \geq P(k_0) \Rightarrow P(k_0 + 2) \geq P(k_0 + 1).$$

e ripetendo il procedimento (induzione finita sugli interi)

$$P(k_0 + 1) \geq P(k_0) \Rightarrow P(k + 1) \geq P(k), \quad \forall k \geq k_0.$$

D'altronde lo stesso tipo di ragionamento consente di affermare che se per un certo  $k_0$  si ha  $P(k_0 + 1) \leq P(k_0)$ , allora la sequenza di Riccati è tale che  $P(k + 1) \leq P(k)$  per qualunque  $k \geq k_0$ .

Si ha la notevole conseguenza che per avere una sequenza di Riccati monotona non decrescente è necessario e sufficiente che sia  $P(1) \geq P(0)$ , mentre per innescare una sequenza monotona non crescente è necessario e sufficiente che sia  $P(1) \leq P(0)$ .

In particolare l'inizializzazione  $P(0) = 0$  sicuramente innesca una sequenza monotona non decrescente. Infatti

$$\begin{aligned} P(0) = 0 &\Rightarrow P_p(0) = FF^T \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(1) = (I + FF^T CC^T)^{-1} FF^T \geq 0 \Rightarrow P(1) \geq P(0). \end{aligned}$$

Se si dimostra che la sequenza  $\{P(k)\}$  innescata da  $P(0) = 0$  è limitata superiormente, poiché  $\{P(k)\}$  è monotona non decrescente necessariamente essa ammette un limite finito. Le condizioni che garantiscono l'esistenza di un limite superiore per la sequenza di Riccati sono date dal seguente lemma:

**Lemma 4.7.9** – *Se gli stati  $(A, C)$ -inosservabili sono  $A$ -stabili (la coppia  $(A, C)$  è rilevabile), allora per qualsiasi scelta di  $P(0)$  (simmetrica e semidefinita positiva) esiste una sequenza di matrici simmetriche e semidefinite positive  $S(k)$  che maggiora la sequenza di Riccati  $P(k)$  per ogni  $k$  e che tende ad un limite finito  $S_\infty$ , eventualmente dipendente da  $P(0)$ .*

**Dimostrazione** – La dimostrazione viene condotta semplicemente mostrando che esistono degli stimatori ricorsivi dello stato che, pur non restituendo la stima di minima varianza, forniscono una stima con covarianza dell'errore finita, e che per  $k$  che tende ad infinito questa covarianza tende ad un valore di regime finito. Se la covarianza della stima iniziale è la stessa sia per il filtro di Kalman che per lo stimatore non ottimo, chiamando  $S(k)$  la sequenza delle covarianze dello stimatore non ottimo, si ha

$$P(k) \leq S(k), \quad \forall k \geq 0 \quad \text{e quindi} \quad P_\infty \leq S_\infty, \quad (4.7.40)$$

poiché per costruzione la covarianza dell'errore della stima di Kalman è minima.

Non rimane dunque che mostrare che, con l'ipotesi di rilevabilità, è possibile costruire un filtro non ottimo che produca una sequenza di covarianze limitata e convergente ad un valore di regime.

Uno stimatore che fornisce una varianza finita dell'errore di stima è il ben noto osservatore di Luenberger, che qui riportiamo nella forma di filtro

$$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) + K(y(k+1) - CA\tilde{x}(k)). \quad (4.7.41)$$

Sostituendo nella (4.7.41) l'espressione dell'osservazione all'istante  $k+1$

$$\begin{aligned} y(k+1) &= Cx(k+1) + GN_{k+1} = \\ &= CAx(k) + CFN_k + GN_{k+1} \end{aligned} \quad (4.7.42)$$

si ha

$$\tilde{x}(k+1) = (I - KC)A\tilde{x}(k) + KCAx(k) + KCFN_k + KGN_{k+1}. \quad (4.7.43)$$

L'errore di stima  $e(k) = x(k) - \tilde{x}(k)$  all'istante  $k+1$  si scrive

$$e(k+1) = (I - KC)(Ae(k) + FN_k) - KGN_{k+1}. \quad (4.7.44)$$

Poiché i termini  $e(k)$ ,  $FN_k$  e  $GN_{k+1}$  sono termini indipendenti, come si può constatare adoperando argomenti già sfruttati nel calcolo della covarianza dell'errore di stima nel filtro di Kalman, la covarianza si scrive

$$\begin{aligned} S(k+1) &= E\{e(k+1)e(k+1)^T\} = \\ &= (I - KC)(AS(k)A^T + FF^T)(I - KC)^T + K^TK^T. \end{aligned} \quad (4.7.45)$$

e quindi

$$\begin{aligned} S(k+1) &= (I - KC)AS(k)A^T(I - KC)^T + \\ &+ (I - KC)FF^T(I - KC)^T + K^TK^T. \end{aligned} \quad (4.7.46)$$

Chiamando  $\Gamma(\cdot)$  la funzione che genera  $S(k+1)$  in funzione di  $S(k)$  si ha in definitiva

$$\begin{aligned} \Gamma(S(k)) &= \bar{A}S(k)\bar{A}^T + Q \\ \text{con} \quad \begin{cases} \bar{A} &= (I - KC)A \\ Q &= (I - KC)FF^T(I - KC)^T + K^TK^T. \end{cases} \end{aligned}$$

La  $\Gamma(\cdot)$  genera una successione  $S(k)$  che, se  $Q$  e  $S(0)$  sono semidefinite positive e se la matrice  $\bar{A}$  è stabile, converge ad una soluzione di regime  $S_\infty$  che risolve l'equazione di Lyapunov

$$S_\infty = \bar{A}S_\infty\bar{A}^T + Q.$$

Nel seguito ci si riferirà alla  $S(k)$  indicandola come la successione di Lyapunov. Se  $S(0) \geq P(0)$  allora  $S(k) \geq P(k)$ , ovvero la successione di Lyapunov maggiore la successione di Riccati.

La proprietà di rilevabilità della coppia  $(A, C)$  assicura l'esistenza di una matrice di guadagno  $K$  tale da rendere stabile la matrice  $\bar{A} = (I - KC)A$ , ovvero tale che

$$\exists \mu > 0 \text{ e } \lambda \in (0, 1) : \|\bar{A}^k\| \leq \mu\lambda^k, \quad \forall k \geq 0. \quad (4.7.47)$$

La soluzione dell'equazione ricorsiva di Lyapunov all'istante  $k$  è data da

$$S(k) = \bar{A}^k S(0) (\bar{A}^T)^k + \sum_{j=1}^{k-1} \bar{A}^j Q (\bar{A}^T)^j, \quad (4.7.48)$$

Se  $\bar{A}$  è stabile si può dimostrare l'esistenza del limite  $S_\infty$ . Infatti il primo termine della (4.7.48) tende a zero in quanto  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{A}^k = 0$ , e la sommatoria converge poiché

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \bar{A}^j Q (\bar{A}^T)^j \right\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\bar{A}^j Q (\bar{A}^T)^j\| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|Q\| \cdot \|\bar{A}\|^{2j} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|Q\| \cdot \mu \cdot \lambda^{2j} = \|Q\| \frac{\mu}{1 - \lambda^2}, \end{aligned} \quad (4.7.49)$$

si ha quindi

$$S_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{A}^j Q (\bar{A}^T)^j,$$

soluzione semidefinita positiva dell'equazione di Lyapunov

$$S_\infty = \Gamma(S_\infty). \quad (4.7.50)$$

Resta quindi dimostrata la tesi poiché

$$S(k) \geq P(k) \quad \forall k \quad \Rightarrow \quad S_\infty \geq P_\infty. \quad (4.7.51)$$

■

**Osservazione 4.7.10** – Anche per la sequenza di Lyapunov è possibile mostrare che se per un dato  $k_0$  si ha  $S(k_0+1) \geq S(k_0)$  allora la sequenza  $S(k)$  è monotona non decrescente per qualunque  $k \geq k_0$ . A tale scopo è sufficiente dimostrare che date  $P$  e  $S$  semidefinite positive

$$\Gamma(P+S) \geq \Gamma(S).$$

Infatti

$$\begin{aligned} \Gamma(P+S) - \Gamma(S) &= \bar{A}(P+S)\bar{A}^T + Q - \bar{A}S\bar{A}^T - Q = \\ &= \bar{A}P\bar{A}^T \geq 0, \end{aligned}$$

in modo che

$$\begin{aligned} S(k_0+1) \geq S(k_0) &\Rightarrow \Gamma(S(k_0+1)) \geq \Gamma(S(k_0)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow S(k_0+2) \geq S(k_0+1), \end{aligned}$$

e per induzione finita sugli interi

$$S(k_0+1) \geq S(k_0) \quad \Rightarrow \quad S(k+1) \geq S(k), \quad \forall k \geq k_0.$$

■

Si ricordi che l'ipotesi di rilevabilità della coppia  $(A, C)$  è anche necessaria per l'esistenza di un limite finito per la successione di Riccati. Ciò grazie al teorema 4.7.4 che ha mostrato che se esiste uno stato  $(A, C)$ -inosservabile e instabile, allora esiste una inizializzazione  $P(0)$  della sequenza di Riccati tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|P(k)\| = +\infty$ .

Dopo avere concluso che le ipotesi di rilevabilità della coppia  $(A, C)$  sono necessarie e sufficienti per la convergenza della successione di Riccati ad un limite finito  $P_\infty$  che soddisfa all'equazione algebrica di Riccati, si vuole ora mostrare sotto quali ipotesi tale soluzione è unica e tale da far sì che la matrice dinamica del filtro,  $(I - P_\infty C^T C)A$ , sia stabile.

Si ha in proposito il seguente teorema:

**Lemma 4.7.11** – Sia  $P$  una soluzione semidefinita positiva dell'equazione algebrica di Riccati. Se gli stati  $(A^T, F^T)$ -inosservabili sono  $A^T$  stabili allora la  $P$  è l'unica soluzione semidefinita positiva dell'equazione algebrica di Riccati, ed inoltre essa è tale che la matrice

$$(I - PC^T C)A$$

è stabile (ha autovalori in modulo minore di uno).

**Dimostrazione** – Se  $P$  è una soluzione semidefinita positiva dell'equazione algebrica di Riccati (4.7.6) allora (si ricordi che  $GG^T = I$ )

$$(I + P_p(P)C^T C)P = P_p(P) \quad (4.7.52)$$

in cui  $P_p(P)$  è data dalla (4.7.31). Dalla (4.7.52) si ha

$$P = P_p(P)(I - C^T CP) \quad (4.7.53)$$

in modo che

$$\begin{aligned} P - PC^T CP &= (I - PC^T C)P = \\ &= (I - PC^T C)P_p(P)(I - C^T CP), \end{aligned}$$

da cui

$$P = (I - PC^T C)P_p(P)(I - C^T CP) + PC^T CP, \quad (4.7.54)$$

che è la versione stazionaria dell'equazione (4.4.12). Ricordando che

$$P_p(P) = APA^T + FF^T$$

e definendo

$$\bar{A} = (I - PC^T C)A, \quad \text{e} \quad J = (I - PC^T C),$$

è possibile riscrivere la (4.7.54) come

$$P = \bar{A}P\bar{A}^T + JFF^TJ^T + PC^T CP.$$

La dimostrazione procederà per assurdo, mostrando che se  $\bar{A} = (I - PC^T C)A$ , e  $J = (I - PC^T C)$  fosse instabile, allora esisterebbero degli stati  $A$ -instabili e  $(A^T, F^T)$ -inosservabili, contravvenendo così all'ipotesi di rilevabilità della coppia  $(A^T, F^T)$  e permettendo di concludere che  $\bar{A}$  non può che essere stabile.

Sia quindi  $\bar{A}$  instabile (e quindi sia instabile anche  $\bar{A}^T$ ), e sia  $x$  un autovettore instabile di  $\bar{A}^T$ , e cioè tale che

$$\bar{A}^T x = \lambda x, \quad \text{con} \quad |\lambda| \geq 1$$

(eventualmente con  $x$  e  $\lambda$  complessi). La forma quadratica  $x^*Px$ , utilizzando la (4.7.54) si scrive

$$x^*Px = \lambda^* \lambda x^*Px + \|F^T J^T x\|^2 + \|CPx\|^2,$$

e quindi

$$(1 - |\lambda|^2)x^*Px = \|F^T J^T x\|^2 + \|CPx\|^2.$$

Poiché  $x^*Px \geq 0$ , essendo  $P$  semidefinita positiva, e  $(1 - |\lambda|^2) \leq 0$ , e poiché la quantità a destra dell'uguale non può essere negativa, deve essere necessariamente

$$F^T J^T x = 0 \quad \text{e} \quad CPx = 0.$$

Ma poiché dalla definizione di  $J$

$$J^T x = x + C^T CPx = x$$

risulta

$$\begin{aligned} F^T J^T x = 0, \\ CPx = 0 \end{aligned} \quad \implies \quad F^T x = 0.$$

Inoltre si ha

$$\bar{A}^T x = A^T(I - C^T CP)x = A^T x \quad \Rightarrow \quad A^T x = \lambda x,$$

e quindi per ogni  $k$

$$F^T(A^T)^k x = \lambda^k F^T x = 0,$$

e pertanto lo stato  $x$  risulta essere  $A^T$ -instabile e  $(A^T, F^T)$ -inosservabile, contravvenendo alle ipotesi. Quindi  $\bar{A}$  non può che essere stabile.

Per dimostrare l'unicità della soluzione dell'equazione algebrica di Riccati si assuma che esistano due soluzioni  $P_1$  e  $P_2$ , entrambe simmetriche e semidefinite positive. Per quanto appena dimostrato le matrici

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= (I - P_1 C^T C)A, \\ \bar{A}_2 &= (I - P_2 C^T C)A, \end{aligned}$$

sono entrambe stabili. Definendo

$$Q = P_1 - P_2$$

e ricordando che  $P_p(P) = APA^T + FF^T$  si ha

$$P_p(P_1) - P_p(P_2) = AQA^T.$$

Poiché dalla (4.7.53) e dalla simmetria della  $P_p$  si ha anche

$$P_p(P) = P(I - C^T CP)^{-1} = (I - PC^T C)^{-1}P,$$

si può scrivere

$$\begin{aligned} P_p(P_1) &= P_1(I - C^T C P_1)^{-1}, \\ P_p(P_2) &= (I - P_2 C^T C)^{-1} P_2, \end{aligned}$$

Sottraendo queste due espressioni si ottiene

$$AQA^T = P_1(I - C^T C P_1)^{-1} - (I - P_2 C^T C)^{-1} P_2.$$

Moltiplicando ambo i membri a destra per  $(I - C^T C P_1)$  e a sinistra per  $(I - P_2 C^T C)$  si ha

$$(I - P_2 C^T C)AQA^T(I - C^T C P_1) = P_1 - P_2 = Q$$

In definitiva vale la proprietà

$$\bar{A}_2 Q \bar{A}_1^T = Q.$$

L'applicazione ripetuta  $k$  volte di questa proprietà fornisce

$$Q = \bar{A}_2^k Q (\bar{A}_1^T)^k,$$

da cui

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{A}_2^k Q (\bar{A}_1^T)^k = Q.$$

Ma poiché  $\bar{A}_1$  e  $\bar{A}_2$  sono matrici stabili si ha anche

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{A}_2^k Q (\bar{A}_1^T)^k = 0,$$

e quindi  $Q = 0$  e cioè

$$P_1 = P_2,$$

che è quanto doveva essere dimostrato. ■

I risultati dei lemmi precedenti possono essere raccolti in un unico enunciato, che costituisce il teorema fondamentale di questa sezione. In questa occasione le formule saranno scritte tornando ad

indicare esplicitamente il prodotto  $GG^T$ , che nei lemmi precedenti era stato posto uguale all'identità.

**Teorema 4.7.12** – *Se la coppia  $(A, C)$  è rilevabile e se la coppia  $(A, F)$  è stabilizzabile, allora*

- 1) *esiste ed è unica la matrice  $P_\infty$  simmetrica e semidefinita positiva tale che*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(k) = P_\infty \quad \forall P(0); \quad (4.7.56)$$

- 2) *il filtro di Kalman è stabile, cioè la matrice dinamica del filtro*

$$(I - P_\infty C^T (GG^T)^{-1} C)A \quad (4.7.57)$$

*ha tutti gli autovalori in modulo minori di 1;*

- 3) *il filtro di Kalman che si ottiene usando la matrice di guadagno costante  $K_\infty = P_\infty C^T (GG^T)^{-1}$  è asintoticamente ottimo.*

**Dimostrazione** – Le affermazioni 1) e 2) discendono direttamente dai due lemmi precedenti. La proposizione 3) equivale ad affermare che asintoticamente la covarianza dell'errore di stima tende a  $P_\infty$ , e cioè che, indicata con  $\hat{x}_a(k)$  la stima dello stato ottenuta da

$$\hat{x}_a(k+1) = A\hat{x}_a(k) + P_\infty C^T (GG^T)^{-1} (y(k+1) - CA\hat{x}_a(k)),$$

qualunque sia  $\hat{x}_a(0)$ , indicata con  $P_a(k)$  la covarianza dell'errore di stima, deve essere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_a(k) = P_\infty.$$

Per mostrare ciò occorre calcolare l'equazione ricorsiva che genera la successione delle covarianze  $\{P_a(k)\}$ . I calcoli sono del tutto simili a quelli che hanno portato all'espressione ricorsiva della covarianza della stima ottima (4.4.12). Riscrivendo, per brevità,  $K_\infty$  al posto di  $P_\infty C^T (GG^T)^{-1}$ , l'equazione dinamica dell'errore di stima  $e(k) = x(k) - \hat{x}_a(k)$  è data da

$$e(k+1) = (I - K_\infty C)(Ae(k) + FN_k) - K_\infty GN_{k+1}.$$



Da questa è facile calcolare la covarianza (tenendo conto che  $E\{e(k)\} = 0$  e che i termini  $e(k)$ ,  $FN_k$  e  $GN_k$  sono indipendenti)

$$P_a(k+1) = (I - K_\infty C)(AP_a(k)A^T + FF^T)(I - K_\infty C)^T + K_\infty GG^T K_\infty^T.$$

Sottraendo a questa l'equazione di Riccati a regime (4.7.54)

$$P_\infty = (I - K_\infty C)(AP_\infty A^T + FF^T)(I - K_\infty C)^T + K_\infty GG^T K_\infty^T$$

si ha

$$P_a(k+1) - P_\infty = [(I - K_\infty C)A](P_a(k) - P_\infty)[(I - K_\infty C)A]^T$$

e quindi il generico termine della successione  $\{P_a(k) - P_\infty\}$  si scrive

$$P_a(k) - P_\infty = [(I - K_\infty C)A]^k (P_a(0) - P_\infty) \left( [(I - K_\infty C)A]^T \right)^k.$$

Poiché la matrice  $(I - K_\infty C)A$  è stabile si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_a(k) - P_\infty = 0,$$

ovvero

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_a(k) = P_\infty,$$

come dovevasi dimostrare. ■

Il teorema (4.7.12) sull'esistenza e sulle proprietà dello stato stazionario dell'equazione di Riccati vale sotto una serie di ipotesi non richiamate esplicitamente nell'enunciato, che sono: la bianchezza e la gaussianità della sequenza standard  $\{N_k\}$ , la gaussianità dello stato iniziale e la sua indipendenza dalla sequenza  $\{N_k\}$ , e le due proprietà

$$FG^T = 0, \quad \det(GG^T) \neq 0.$$

Poiché le dimostrazioni dei lemmi e dei teoremi preliminari al teorema (4.7.12) sono svolte per la maggior parte utilizzando la formulazione (2K) del filtro di Kalman, è stato necessario supporre il prodotto  $GG^T$  non singolare. Tuttavia questa condizione non è strettamente necessaria. È sufficiente che abbia rango  $q$  (righe indipendenti) la matrice  $[C \ G]$ . Questa condizione, unitamente alla condizione che abbia rango  $n$  la matrice  $[A \ F]$ , garantisce la possibilità di costruire mediante le equazioni di Riccati nella forma (1K) una sequenza di matrici di covarianza definite positive (l'inversa in (4.4.28)) può sempre essere calcolata).

**Osservazione 4.7.13** – Se venissero a cadere le ipotesi di gaussianità dello stato iniziale e della sequenza di rumore, il filtro di Kalman non sarebbe più lo stimatore ottimo dello stato. Tuttavia, secondo quanto illustrato nel capitolo sulla teoria della stima, esso continuerebbe a essere il migliore tra tutti gli stimatori lineari. Per migliorare la varianza dell'errore di stima si potrebbe far ricorso a stimatori polinomiali, del tipo di quelli illustrati nello stesso capitolo, al prezzo di una maggiore complessità algoritmica e computazionale della soluzione.  $\triangle$

## 4.8 Il filtro di Kalman nel caso di rumore di stato e di osservazione correlati

Nella teoria fin qui sviluppata per il filtro di Kalman, si è sempre ipotizzato che i rumori di stato e di osservazione fossero scorrelati. Nel modello impiegato, in cui per ogni  $k$  la variabile aleatoria  $N_k$  è standard, ovvero ha covarianza pari all'identità, l'indipendenza dei rumori di stato e di osservazione si traduce nella condizione matriciale  $F(k)G^T(k) = 0$  per ogni  $k$ .

In questo paragrafo viene mostrato in che modo i risultati fin qui ottenuti possono essere applicati al caso di sistemi in cui i rumori di stato e di osservazione sono correlati, e cioè quando  $F(k)G^T(k) \neq 0$ , almeno per qualche  $k$ . Per semplicità di notazione nel seguito viene

considerato il solo caso di sistemi stazionari. Il sistema in esame sia quindi

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + FN_k, & x(0) &= x_0, \\ y(k) &= Cx(k) + GN_k, & FG^T &\neq 0, \end{aligned} \quad (4.8.1)$$

in cui  $\{N_k\}$  è una sequenza aleatoria gaussiana bianca e standard. È possibile ricondurre il problema ad uno in cui il rumore di stato e di osservazione sono scorrelati definendo il seguente sistema esteso

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \bar{N}_k, \\ y(k) &= [C \quad G] \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_0 \\ N_0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

in cui la sequenza  $\{\bar{N}_k\}$  altro non è che la traslazione di un passo della sequenza  $\{N_k\}$ , ovvero  $\bar{N}_k \triangleq N_{k+1}$ . Dalla struttura delle matrici si deduce che  $z_2(k) = N_k$  e che  $z_1(k) = x(k)$ . Il sistema ha ora acquistato la struttura

$$\begin{aligned} z(k+1) &= \bar{A}z(k) + \bar{F}\bar{N}_k, & z(0) &= z_0 \\ y(k) &= \bar{C}z(k) + \bar{G}\bar{N}_k, & \bar{F}\bar{G}^T &= 0 \end{aligned} \quad (4.8.2)$$

con  $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [C \quad G], \quad \bar{G} = 0, \quad z_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ N_0 \end{bmatrix},$

in cui il rumore di osservazione è assente, e quindi banalmente indipendente dal rumore di stato. Per questa formulazione è possibile scrivere le usuali equazioni di Riccati per il calcolo del guadagno del filtro di Kalman, tenendo conto che  $\bar{G} = 0$

$$\begin{aligned} \bar{P}_p(k+1) &= \bar{A}\bar{P}_p(k)\bar{A}^T + \bar{F}\bar{F}^T, \\ \bar{K}(k+1) &= \bar{P}_p(k+1)\bar{C}^T(\bar{C}\bar{P}_p(k+1)\bar{C}^T)^{-1}, \\ \bar{P}(k+1) &= (I - \bar{K}(k+1)\bar{C})\bar{P}_p(k+1). \end{aligned}$$

Il filtro di Kalman ha la solita struttura

$$\hat{z}(k+1) = \bar{A}\hat{z}(k) + \bar{K}(k+1)(y(k+1) - \bar{C}\bar{A}\hat{z}(k)).$$

Si osservi che ad ogni passo  $k$  si ottiene non solo la stima dello stato  $x(k)$  ma anche la stima del rumore  $N_k$ . Infatti

$$\hat{z}(k) = \begin{bmatrix} \hat{z}_1(k) \\ \hat{z}_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ \hat{N}_k \end{bmatrix}.$$

È inoltre facile verificare che  $\bar{C}\bar{K}(k+1) = I$ , e che quindi  $\bar{C}\hat{z}(k+1) = y(k+1)$ , e cioè sviluppando i blocchi

$$y(k+1) = C\hat{x}(k+1) + G\hat{N}_{k+1}. \quad (4.8.3)$$

Definendo opportunamente la scomposizione di  $\bar{K}(k+1)$  in due sottomatrici  $K(k+1)$  e  $H(k+1)$  è possibile suddividere l'equazione del filtro di Kalman nei due blocchi

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + F(k)\hat{N}_k + K(k+1)(y(k+1) - C(A\hat{x}(k) + F\hat{N}_k)) \\ \hat{N}_{k+1} &= H(k+1)(y(k+1) - CA\hat{x}(k) - CF\hat{N}_k). \end{aligned} \quad (4.8.4)$$

Questa scrittura consente di fornire una interpretazione delle modifiche che il filtro di Kalman subisce quando i rumori di stato e di osservazione sono correlati: la stima del rumore viene utilizzata nel calcolo della predizione ottima dello stato, che per l'appunto diventa

$$\hat{x}(k+1|k) = A\hat{x}(k) + F\hat{N}_k. \quad (4.8.5)$$

Prima di passare alla riscrittura delle equazioni di Riccati, opportunamente suddivise in blocchi, si vuole riportare un'altra implementazione dello stesso filtro appena presentato, che evita il calcolo esplicito della stima del rumore  $\hat{N}_k$ . A tale scopo si riscriva la prima equazione del filtro di Kalman utilizzando la predizione ottima, scrivendo per chiarezza  $\hat{x}(k|k)$  al posto di  $\hat{x}(k)$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)(y(k) - C\hat{x}(k|k-1)). \quad (4.8.6)$$

Tenendo conto che

$$\hat{N}_k = H(k)(y(k) - C\hat{x}(k|k-1))$$

la predizione ottima si scrive anche

$$\hat{x}(k+1|k) = A\hat{x}(k|k) + FH(k)(y(k) - C\hat{x}(k|k-1)), \quad (4.8.7)$$

e sostituendo  $\hat{x}(k|k)$  si ha

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1|k) = A\left(\hat{x}(k|k-1) + K(k)(y(k) - C\hat{x}(k|k-1))\right) + \\ + FH(k)(y(k) - C\hat{x}(k|k-1)). \end{aligned} \quad (4.8.8)$$

Riordinando quest'ultima si ha

$$\hat{x}(k+1|k) = A\hat{x}(k|k-1) + (AK(k) + FH(k))(y(k) - C\hat{x}(k|k-1)). \quad (4.8.9)$$

La predizione ottima  $\hat{x}(k+1|k)$  viene impiegata poi per il calcolo della stima ottima

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1)(y(k+1) - C\hat{x}(k+1|k)). \quad (4.8.10)$$

Riassumendo, il filtro di Kalman nel caso di rumori di stato e di uscita correlati può essere implementato in due passi successivi: nel primo viene calcolata la predizione ottima all'istante  $k+1$  utilizzando l'osservazione all'istante  $k$ , mentre nel secondo passo viene calcolata la stima ottima all'istante  $k+1$  utilizzando l'osservazione nello stesso istante.

Resta a questo punto solamente da risolvere il problema del calcolo delle matrici di guadagno  $K(k)$  e  $H(k)$ . Per fare ciò occorre suddividere in blocchi le equazioni di Riccati. Si definisca innanzitutto la seguente partizione della matrice di covarianza dell'errore di stima

$$\bar{P}(k) \triangleq \begin{bmatrix} P(k) & R(k) \\ R^T(k) & Q(k) \end{bmatrix}, \quad (4.8.11)$$

in cui  $P(k)$  è la covarianza dell'errore di stima dello stato,  $Q(k)$  è la covarianza dell'errore di stima del rumore e  $R(k)$  è la mutua covarianza tra i due errori di stima. Lo sviluppo del calcolo della covarianza dell'errore di predizione porta a

$$\bar{P}_p(k+1) = \begin{bmatrix} P_p(k+1) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\text{in cui } P_p(k+1) = AP(k)A^T + FR^T(k)A^T + AR(k)F^T + FQ(k)F^T. \quad (4.8.12)$$

Si ha poi l'equivalenza

$$\bar{C}\bar{P}_p(k+1)\bar{C}^T + \bar{G}\bar{G}^T = CP_p(k+1)C^T + GG^T, \quad (4.8.13)$$

da cui il guadagno  $\bar{K}(k+1)$  può essere calcolato

$$\begin{aligned} \bar{K}(k+1) &= \begin{bmatrix} K(k+1) \\ H(k+1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} P_p(k+1)C^T(CP_p(k+1)C^T + GG^T)^{-1} \\ G^T(CP_p(k+1)C^T + GG^T)^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.8.14)$$

Il calcolo della covarianza dell'errore di stima porta a

$$\bar{P}(k+1) = \begin{bmatrix} (I - K(k+1)C)P_p(k+1) & -K(k+1)G \\ -H(k+1)CP_p(k+1) & I - H(k+1)G \end{bmatrix} \quad (4.8.15)$$

Confrontando quest'ultima con la suddivisione a blocchi della  $\bar{P}(k)$  si ha che

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (I - K(k+1)C)P_p(k+1) \\ R(k+1) &= -K(k+1)G, \quad Q(k+1) = I - H(k+1)G, \\ &\left(\text{e anche } K(k+1)G = (H(k+1)CP_p(k+1))^T\right). \end{aligned}$$

Poiché le matrici  $R(\cdot)$  e  $Q(\cdot)$  vengono impiegate esclusivamente nel calcolo della  $P_p(\cdot)$ , invece di essere memorizzate è possibile sostituirle direttamente nell'equazione ricorsiva, ottenendo

$$P_p(k+1) = AP(k)A + FF^T - FG^TK^T(k)A^T - AK(k)GF^T - FH(k)GF^T. \quad (4.8.16)$$

Definendo la matrice di covarianza dell'errore di predizione dell'uscita

$$S(k+1) = CP_p(k+1)C^T + GG^T$$

le espressioni dei guadagni di Kalman  $K(k+1)$  e  $H(k+1)$  risultano più semplici

$$\begin{aligned} K(k+1) &= P_p(k+1)C^T S^{-1}(k+1), \\ H(k+1) &= G^T S^{-1}(k+1), \end{aligned}$$

come anche la covarianza della stima del rumore

$$Q(k+1) = I - G^T S^{-1}(k+1)G.$$

A questo punto è possibile riassumere le equazioni del filtro di Kalman nel caso di rumori di stato e di osservazione correlati secondo le due implementazioni presentate.

### Filtro di Kalman nel caso $FG^T \neq 0$ . (A)

(I) Inizializzazione:

$$\begin{aligned} P_p(0) &= \Psi_{x0}, \\ S(0) &= C\Psi_{x0}C^T + GG^T \end{aligned} \quad \begin{cases} K(0) = P_p(0)C^T S^{-1}(0), \\ H(0) = G^T S^{-1}(0). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(0) &= K(0)y(0), \\ \hat{N}_0 &= H(0)y(0), \quad k=0. \end{aligned}$$

(II) Equazioni di Riccati:

$$\begin{aligned} P_p(k+1) &= AP(k)A - FG^T K^T(k)A^T - AK(k)GF^T + \\ &\quad + F(I - G^T S^{-1}(k)G)F^T, \\ S(k+1) &= CP_p(k+1)C^T + GG^T, \\ K(k+1) &= P_p(k+1)C^T S^{-1}(k+1), \\ H(k+1) &= G^T S^{-1}(k+1), \\ P(k+1) &= (I - K(k+1)C)P_p(k+1), \end{aligned}$$

(III) Filtro

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + F(k)\hat{N}_k + K(k+1) \cdot \\ &\quad \cdot (y(k+1) - C(A\hat{x}(k) + F\hat{N}_k)) \quad (4.8.17) \\ \hat{N}_{k+1} &= H(k+1)(y(k+1) - CA\hat{x}(k) - CF\hat{N}_k). \end{aligned}$$

IV  $k=k+1$ . GOTO II.

Se si è interessati a conoscere la covarianza dell'errore di stima del rumore è sufficiente calcolare  $Q(k) = I - G^T S^{-1}(k)G$ .

L'implementazione alternativa presentata diventa:

### Filtro di Kalman nel caso $FG^T \neq 0$ . (B)

(I) Inizializzazione:

$$\begin{aligned} P_p(0) &= \Psi_{x0}, \\ S(0) &= C\Psi_{x0}C^T + GG^T \end{aligned} \quad \begin{cases} K(0) = P_p(0)C^T S^{-1}(0), \\ H(0) = G^T S^{-1}(0). \end{cases}$$

$$\hat{x}(0|-1) = 0, \quad k = -1;$$

(II) Calcolo della stima

$$\hat{x}(k+1|k+1) = x(k+1|k) + K(k+1)(y(k+1) - C\hat{x}(k+1|k)),$$

(III)  $k = k+1$ ;

(IV) Equazioni di Riccati:

$$\begin{aligned} P_p(k+1) &= AP(k)A - FG^T K^T(k)A^T - AK(k)GF^T + \\ &\quad + F(I - G^T S^{-1}(k)G)F^T, \\ S(k+1) &= CP_p(k+1)C^T + GG^T, \\ K(k+1) &= P_p(k+1)C^T S^{-1}(k+1), \\ H(k+1) &= G^T S^{-1}(k+1), \\ P(k+1) &= (I - K(k+1)C)P_p(k+1), \end{aligned}$$

(V) Calcolo della predizione

$$\hat{x}(k+1|k) = Ax(k|k-1) + (AK(k) + FH(k))(y(k) - C\hat{x}(k|k-1)),$$

(VI) GOTO (II).

Si ricordi che affinché la sequenza di Riccati  $\{\bar{P}(k)\}$  possa essere costruita per qualunque  $k$  e sia sempre definita positiva deve essere  $\bar{P}(0) > 0$  e le matrici  $[\bar{A} \mid \bar{F}]$  e  $[\bar{C} \mid \bar{G}]$  devono avere rango  $n$  e  $q$  rispettivamente.

Ricordando le definizioni delle matrici “barrate”, ciò significa che deve essere

$$\begin{aligned} \bar{P}(0) > 0, \quad \rho\left(\begin{bmatrix} A & F & | & 0 \\ 0 & 0 & | & I \end{bmatrix}\right) &= n + s, \\ \rho\left(\begin{bmatrix} C & G & | & 0 \end{bmatrix}\right) &= q. \end{aligned} \quad (4.8.18)$$

È facile verificare che se sono soddisfatte le condizioni che consentono la costruzione del filtro di Kalman nel caso di rumore di stato e di osservazione scorrelati, e cioè

$$P(0) > 0, \quad \rho([A \ F]) = n, \quad \rho([C \ G]) = q, \quad (4.8.19)$$

allora anche le (4.8.18) sono soddisfatte.

Affinché inoltre esista unico lo stato stazionario per l'equazione di Riccati, e quindi esista il guadagno di regime  $\bar{K}_\infty$  tale da stabilizzare la matrice  $(I - \bar{K}_\infty \bar{C})\bar{A}$ , la coppia  $(\bar{A}, \bar{F})$  deve essere stabilizzabile e la coppia  $(\bar{A}, \bar{C})$  deve essere rilevabile. Ancora una volta, in base alle definizioni date per le quantità “barrate”, è facile verificare che queste proprietà sono soddisfatte se e solo se la coppia  $(A, F)$  è stabilizzabile e la coppia  $(A, C)$  è rilevabile. Ad esempio,  $(\bar{A}, \bar{F})$  è stabilizzabile se e solo se

$$\rho\left(\begin{bmatrix} \lambda I - A & -F & | & 0 \\ 0 & \lambda I & | & I \end{bmatrix}\right) = n + s, \quad \forall |\lambda| \geq 1,$$

e vista la struttura delle matrici nei blocchi, questo è vero se e solo se

$$\rho([\lambda I - A \quad -F]) = n, \quad \forall |\lambda| \geq 1,$$

e cioè se e solo se è stabilizzabile la coppia  $(A, F)$ . Analogamente si dimostra l'equivalenza della stabilizzabilità delle coppie  $(\bar{A}, \bar{C})$  e  $(A, C)$ .

La matrice  $(I - \bar{K}_\infty \bar{C})\bar{A}$  si scrive

$$\begin{bmatrix} (I - K_\infty C)A & (I - K_\infty C)F \\ -H_\infty CA & -H_\infty CF \end{bmatrix},$$

ed è stabile se e solo se la coppia  $(A, F)$  è stabilizzabile e la coppia  $(A, C)$  è rilevabile.

## 4.9 Smoothing ottimo

In questo paragrafo viene analizzato e risolto il problema del calcolo della stima ottima dello stato in ogni istante  $k$  interno ad un intervallo di tempo finito  $[0, T]$  a partire da tutte le osservazioni nello stesso intervallo  $[0, T]$ . Si tratta quindi di un problema di **interpolazione**. A differenza del filtraggio, per il calcolo della stima dello stato  $x(k)$  vengono impiegate anche informazioni successive all'istante  $k$ , per cui in generale gli algoritmi di interpolazione non sono causali e pertanto non possono essere eseguiti in linea. Il segnale utile che si ottiene utilizzando questo tipo di stima si presenta più *liscio* (in inglese *smooth*) rispetto alle osservazioni grezze, che sono affette da rumore bianco. Pertanto il problema viene spesso indicato in letteratura come il problema dello **smoothing ottimo** su intervallo di tempo finito.

Per semplificare le notazioni in questo paragrafo viene trattato solamente il caso di sistemi stazionari. I risultati ottenuti possono comunque essere facilmente estesi al caso di sistemi non stazionari. Inoltre viene considerato il solo sottosistema stocastico, omettendo per semplicità il pedice  $s$ .

Il vettore delle osservazioni è dato da

$$Y_T = \begin{bmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(T) \end{bmatrix}.$$

Poiché la stima ottima è sempre data dal valore atteso condizionato alla  $\sigma$ -algebra generata dal vettore delle osservazioni, e lo stato all'istante  $k$  è dato da

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} F N_j,$$

si ha

$$E\{x(k)|Y_T\} = A^k E\{x(0)|Y_T\} + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} F E\{N_j|Y_T\},$$

o anche, con diversa notazione,

$$\hat{x}(k|T) = A^k \hat{x}(0|T) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} F \hat{N}_{j|T}.$$

Il problema dello smoothing ottimo è pertanto risolto calcolando il valore atteso condizionato a  $Y_T$  del vettore

$$Z_T = \begin{bmatrix} x(0) \\ N_0 \\ \vdots \\ N_T \end{bmatrix}.$$

Quest'ultimo, secondo le ipotesi usuali, è un vettore aleatorio gaussiano di media nulla e matrice di covarianza pari a

$$\Psi_{Z_T} = \begin{bmatrix} \Psi_{x(0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix}.$$

(Si osservi che l'ipotesi di bianchezza della sequenza  $N_k$  e l'ipotesi di indipendenza dallo stato iniziale  $x(0)$  rende diagonale la matrice di covarianza.)

Ricordando che l'osservazione al generico istante  $k$  è data da

$$y(k) = C A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} C A^{k-j-1} F N_j + G N_k,$$

si può definire la seguente matrice di coefficienti

$$S_T = \begin{bmatrix} C & G & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CA & CF & G & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ CA^{T-1} & CA^{T-2}F & CA^{T-3}F & \cdots & G & 0 \\ CA^T & CA^{T-1}F & CA^{T-2}F & \cdots & CF & G \end{bmatrix},$$

Con queste posizioni, il problema dello smoothing ottimo su intervallo finito  $[0, T]$  consiste nel trovare la migliore stima per il vettore aleatorio  $Z_T$  noto che sia il vettore  $Y_T$  legato a  $Z_T$  dall'espressione lineare

$$Y_T = S_T \cdot Z_T, \quad \text{con} \quad \begin{aligned} E\{Z_T\} &= 0, \\ E\{Z_T Z_T^T\} &= \Psi_{Z_T}. \end{aligned} \quad (4.9.1)$$

Questo problema è stato analizzato e risolto nel capitolo sulla teoria della stima (esempio 2.8.7), in cui si è mostrato che nell'ipotesi in cui la matrice  $S_T$  abbia le righe indipendenti, la soluzione ottima  $\hat{Z}_T = E\{Z_T|Y_T\}$  è data dall'espressione

$$\hat{Z}_T = \Psi_{Z_T} S_T^T (S_T \Psi_{Z_T} S_T^T)^{-1} \cdot Y_T \quad (4.9.2)$$

Come è già stato osservato, questa soluzione coincide anche con la soluzione del seguente problema di ottimo vincolato

$$\begin{aligned} \min_{Z_T} \quad & \frac{1}{2} Z_T^T \Psi_{Z_T}^{-1} Z_T \\ \text{vincolo :} \quad & Y_T = S_T \cdot Z_T. \end{aligned} \quad (4.9.3)$$

Questa soluzione è onerosa dal punto di vista computazionale in quanto prevede il calcolo dell'inversa di una matrice quadrata di lato  $q(T+1)$  ( $q$  è la dimensione del vettore delle osservazioni in ciascun istante  $k$ ). È quindi interessante fornire una soluzione che sia ricorsiva, simile alla soluzione fornita dal filtro di Kalman al problema del filtraggio.

In questo paragrafo si studierà il problema di minimo (4.9.3) formulato in maniera espansa, e cioè spezzando il vincolo in modo da considerare anche le variabili di stato del sistema dinamico. Ciò è ottenuto introducendo tra le variabili, rispetto a cui calcolare il minimo, anche il vettore  $X_{T+1}$  che raccoglie gli stati dall'istante 0 all'istante  $T+1$ . Si definiscano quindi i seguenti vettori

$$X_{T+1} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(T+1) \end{bmatrix}, \quad \bar{N}_T = \begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ \vdots \\ N_T \end{bmatrix}.$$

La funzione da minimizzare per avere lo smoothing ottimo, scritta in maniera espansa, è data da

$$J(X_{T+1}, \bar{N}_T) = \frac{1}{2} x^T(0) \Psi_{x(0)}^{-1} x(0) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^T N_k^T N_k,$$

mentre i vincoli sono dati da

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + FN_k, \\ y(k) &= Cx(k) + GN_k, \end{aligned} \quad k = 0, \dots, T.$$

Per semplificare la soluzione del problema verranno fatte, come nel caso del filtraggio, le seguenti ipotesi

$$\det(GG^T) \neq 0, \quad FG^T = 0.$$

Per trovare il minimo di questo problema vincolato è opportuno impiegare due vettori di moltiplicatori di Lagrange,  $\Lambda_T =$

$[\lambda^T(0) \dots \lambda^T(T)]^T$  e  $B_T = [\beta^T(0) \dots \beta^T(T)]$ , e scrivere la funzione Lagrangiana

$$\begin{aligned} J_L(X_{T+1}, \bar{N}_T, \Lambda_T, B_T) &= J(X_{T+1}, \bar{N}_T) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^T \lambda^T(k) (y(k) - Cx(k) - GN_k) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^T \beta^T(k) (x(k+1) - Ax(k) - FN_k). \end{aligned}$$

Il minimo vincolato per la funzione  $J$  è un punto di stazionarietà per il Lagrangiano  $J_L$ , e si ottiene eguagliando a zero le derivate parziali, che sono date da

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_L}{\partial x(0)} &= x^T(0) \Psi_{x(0)}^{-1} - \lambda^T(0)C - \beta^T(0)A, \\ \frac{\partial J_L}{\partial x(T+1)} &= \beta^T(T), \\ \frac{\partial J_L}{\partial x(k)} &= -\lambda^T(k)C - \beta^T(k)A + \beta^T(k-1), \\ &\text{per } k = 1, 2, \dots, T, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J_L}{\partial N_k} &= N_k^T - \lambda^T(k)G - \beta^T(k)F, \\ \frac{\partial J_L}{\partial \lambda(k)} &= (y(k) - Cx(k) - GN_k)^T, \\ \frac{\partial J_L}{\partial \beta(k)} &= (x(k+1) - Ax(k) - FN_k)^T, \end{aligned} \right\} \quad k = 0, 1, \dots, T.$$

Uguagliando a zero e indicando con un asterisco il valore delle variabili nell'ottimo, si ha

$$\begin{aligned} x^*(0) &= \Psi_{x(0)} (A^T \beta^*(0) + C^T \lambda^*(0)), \\ \beta^*(T) &= 0, \\ \beta^*(k-1) &= A^T \beta^*(k) + C^T \lambda^*(k), \quad k = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} N_k^* &= F^T \beta^*(k) + G^T \lambda^*(k), \\ x^*(k+1) &= Ax^*(k) + FN_k^*, \\ y(k) &= Cx^*(k) + GN_k^*, \end{aligned} \right\} \quad k = 0, 1, \dots, T$$

Per avere la soluzione del problema di minimo, e quindi del problema dello smoothing ottimo, occorre risolvere questo sistema di equazioni algebriche. Come primo passo conviene eliminare i moltiplicatori  $\lambda^*(k)$ . A tale scopo si premoltiplichi  $N_k^*$  per la matrice  $G$ , ottenendo

$$GN_k^* = GF^T \beta^*(k) + GG^T \lambda^*(k).$$

Ricordando che  $GF^T = 0$  e che  $GG^T$  è invertibile si ha

$$\lambda^*(k) = (GG^T)^{-1} G N_k^*,$$

e poiché è anche  $GN_k^* = y(k) - Cx^*(k)$ , si ha in definitiva

$$\lambda^*(k) = (GG^T)^{-1} (y(k) - Cx^*(k)). \quad (4.9.4)$$

Sostituendo quest'ultima espressione nell'equazione che definisce ricorsivamente  $\beta^*(k)$  si ha

$$\beta^*(k-1) = A^T \beta^*(k) + C^T (GG^T)^{-1} (y(k) - Cx^*(k)),$$

per  $k = 1, \dots, T$  (si ricordi che  $\beta^*(T) = 0$ ). Il vettore  $\beta^*(k)$ , che ha le stesse dimensioni dello stato  $x(k)$ , si ottiene quindi da una equazione dinamica *all'indietro* nel tempo il cui comportamento è determinato dalla matrice  $A^T$ , ed in cui il forzamento entra attraverso la matrice  $C^T$ . Si tratta quindi di un sistema *duale* al sistema che descrive la dinamica dello stato, e per questo motivo al vettore  $\beta(k)$  viene dato il nome di **co-stato**.

Sostituendo  $N_k^*$  nell'equazione di stato si ha

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= Ax^*(k) + F(F^T \beta^*(k) + G^T \lambda^*(k)), \\ &= Ax^*(k) + FF^T \beta^*(k), \end{aligned}$$

mentre per lo stato all'istante iniziale si ha

$$\begin{aligned} x^*(0) &= \Psi_{X(0)} (A^T \beta^*(0) + C^T \lambda^*(0)), \\ &= \Psi_{X(0)} (A^T \beta^*(0) + C^T (GG^T)^{-1} (y(0) - Cx^*(0))). \end{aligned}$$

Raccogliendo  $x^*(0)$  quest'ultima diventa

$$\begin{aligned} x^*(0) &= (I + \Psi_{X(0)} C^T (GG^T)^{-1} C)^{-1} \Psi_{X(0)} \cdot \\ &\quad \cdot (A^T \beta^*(0) + C^T (GG^T)^{-1} y(0)). \end{aligned}$$

In definitiva si ha il seguente sistema di equazioni alle differenze, una in avanti ed una all'indietro, che viene definito sistema Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= Ax^*(k) + FF^T \beta^*(k), & k = 0, \dots, T, \\ \beta^*(k-1) &= -C^T (GG^T)^{-1} Cx^*(k) + A^T \beta^*(k) + C^T (GG^T)^{-1} y(k), & k = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

con le condizioni agli estremi

$$\begin{aligned} x^*(0) &= P(0) (A^T \beta^*(0) + C^T (GG^T)^{-1} y(0)), \\ \beta^*(T) &= 0, \end{aligned}$$

in cui  $P(0) \triangleq (I + \Psi_{X(0)} C^T (GG^T)^{-1} C)^{-1} \Psi_{X(0)}$ .

Per risolvere in maniera agevole questo sistema Hamiltoniano, caratterizzato dall'aver condizioni sullo stato ad entrambi gli estremi dell'intervallo  $[0, T]$ , è utile definire il seguente cambiamento di coordinate (non stazionario)

$$\begin{aligned} \xi^*(k) &= x^*(k) - P(k) A^T \beta^*(k), \\ \beta^*(k) &= \beta^*(k), \end{aligned}$$

in cui la matrice  $P(0)$  è già stata definita, mentre la sequenza di matrici  $P(k)$  per  $k > 0$  sarà opportunamente definita in seguito. Si osservi in primo luogo che poiché

$$x^*(0) = P(0) A^T \beta^*(0) + P(0) C^T (GG^T)^{-1} y(0),$$



dalla definizione di  $\xi^*(k)$  per  $k = 0$  si ha

$$\xi^*(0) = P(0)C^T(GG^T)^{-1}y(0),$$

mentre per indici superiori si ha semplicemente

$$\xi^*(k+1) = x^*(k+1) - P(k+1)A^T\beta^*(k+1). \quad (4.9.5)$$

Sostituendo in quest'ultima equazione le identità

$$A^T\beta^*(k+1) = \beta^*(k) - C^T(GG^T)^{-1}(y(k+1) - Cx^*(k+1)),$$

e

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= Ax^*(k) + FF^T\beta^*(k) = \\ &= A(\xi^*(k) + P(k)A^T\beta^*(k)) + FF^T\beta^*(k), \end{aligned}$$

e sviluppando i prodotti si ha

$$\begin{aligned} \xi^*(k+1) &= A\xi^*(k) + R(k+1)\beta^*(k+1) + \\ &+ P(k+1)C^T(GG^T)^{-1}(y(k+1) - CA\xi^*(k)), \end{aligned}$$

in cui la matrice  $R(k+1)$  è definita come

$$\begin{aligned} R(k+1) &= AP(k)A^T + FF^T - P(k+1) - \\ &- P(k+1)C^T(GG^T)^{-1}C(AP(k)A^T + FF^T). \end{aligned}$$

È possibile a questo punto definire opportunamente  $P(k+1)$  in modo da annullare la matrice  $R(k+1)$ , ottenendo così la semplice equazione ricorsiva

$$\xi^*(0) = P(0)C^T(GG^T)^{-1}y(0),$$

$$\xi^*(k+1) = A\xi^*(k) + P(k+1)C^T(GG^T)^{-1}(y(k+1) - CA\xi^*(k)).$$

Quest'ultima consente il calcolo in avanti della sequenza  $\{\xi^*(k)\}$  in quanto viene eliminata la dipendenza da  $\beta^*(k)$ , che presenta una condizione sull'istante finale ( $\beta^*(T) = 0$ ). Ponendo quindi

$R(k+1) = 0$  si ottiene l'equazione ricorsiva che fornisce il calcolo della  $P(k+1)$ . Definendo  $P_p(k+1) = AP(k)A^T + FF^T$  la condizione  $R(k+1) = 0$  si scrive

$$-P(k+1)[I + C^T(GG^T)^{-1}CP_p(k+1)] + P_p(k+1) = 0,$$

che può essere riscritta nella forma

$$P(k+1) = P_p(k+1)\left(I + C^T(GG^T)^{-1}CP_p(k+1)\right)^{-1} \quad (4.9.6)$$

che coincide esattamente con l'equazione che fornisce la covarianza dell'errore di stima nel filtro di Kalman. Definendo poi il guadagno

$$K(k+1) = P(k+1)C^T(GG^T)^{-1},$$

l'equazione ricorsiva che fornisce  $\xi^*(k)$  diventa

$$\xi^*(0) = K(0)y(0),$$

$$\xi^*(k+1) = A\xi^*(k) + K(k+1)(y(k+1) - CA\xi^*(k)),$$

che ha esattamente la struttura del filtro di Kalman. Ciò vuol dire che la variabile  $\xi^*(k)$  coincide con la stima ottima di  $x(k)$  condizionata a  $Y_k$ , e nel seguito sarà indicata con  $\hat{x}(k|k)$ . Si ricordi inoltre che  $x^*(k)$  è la stima ottima condizionata a  $Y_T$ , e in quanto tale sarà indicata con  $\hat{x}(k|T)$ . Poiché dalla definizione di  $\xi^*(k)$  si ricava

$$x^*(k) = \xi^*(k) + P(k)A^T\beta^*(k),$$

che con le nuove notazioni diventa

$$\hat{x}(k|T) = \hat{x}(k|k) + P(k)A^T\beta^*(k), \quad (4.9.7)$$

si vede che per risolvere completamente il problema dello smoothing ottimo occorre ancora calcolare l'evoluzione del co-stato  $\beta^*(k)$ . Quest'ultima viene calcolata sfruttando l'espressione del sistema duale che, utilizzando la nuova notazione, è data da

$$\beta^*(T) = 0,$$

$$\beta^*(k-1) = A^T\beta^*(k) + C^T(GG^T)^{-1}(y(k) - C\hat{x}(k|T))$$

Si osservi che una volta disponibile il co-stato è immediato anche il calcolo della stima ottima del rumore  $N_k$ , indicata in precedenza con  $N_k^*$  e da ora in poi con  $\hat{N}_{k|T}$ , che è data da

$$\hat{N}_{k|T} = F^T \beta^*(k) + G^T (GG^T)^{-1} (y(k) - C\hat{x}(k|T)). \quad (4.9.8)$$

L'algoritmo dello smoothing ottimo su intervallo finito  $[0, T]$  può quindi essere riassunto nei seguenti tre passi:

- 1) Calcolo della sequenza delle matrici di covarianza  $P(k)$ ;
- 2) Calcolo della sequenza delle stime  $\hat{x}(k|k)$  con il filtro di Kalman;
- 3) Calcolo della sequenza delle stime  $\hat{x}(k|T)$  utilizzando l'equazione ricorsiva del co-stato.

In maniera più estesa, l'algoritmo può essere scritto come segue:

### Smoothing Ottimo su intervallo finito $[0, T]$ .

(Sistemi stazionari)

(I) Inizializzazione:

$$P(0) = (I + \Psi_{X(0)} C^T (GG^T)^{-1} C)^{-1} \Psi_{X(0)},$$

$$\hat{x}(0|0) = P(0) C^T (GG^T)^{-1} y(0)$$

(II) Calcolo della sequenza  $P(k)$  per  $k$  da 0 a  $T$  (Equazioni di Riccati):

$$P_p(k+1) = AP(k)A^T + FF^T,$$

$$P(k+1) = \left( I + P_p(k+1)C^T(GG^T)^{-1}C \right)^{-1} P_p(k+1);$$

(III) Calcolo della stima di Kalman (per  $k$  da 0 a  $T$ ):

$$\hat{x}(k+1|k+1) = A\hat{x}(k|k) +$$

$$+ P(k+1)C^T(GG^T)^{-1}(y(k+1) - CA\hat{x}(k|k));$$

(IV) Inizializzazione co-stato:  $\beta^*(T) = 0$ ;

(V) Calcolo del co-stato  $\beta^*(k)$  e della stima ottima  $\hat{x}(k|T)$  per  $k$  da  $T$  a 0:

$$\hat{x}(k|T) = \hat{x}(k|k) + P(k)A^T\beta^*(k),$$

$$\beta^*(k-1) = A^T\beta^*(k) + C^T(GG^T)^{-1}(y(k) - C\hat{x}(k|T));$$

(VI) Se richiesto, calcolo della stima ottima del rumore

$$\hat{N}_{k|T} = F^T \beta^*(k) + G^T (GG^T)^{-1} (y(k) - C\hat{x}(k|T)).$$

(FINE).

Come si vede per implementare lo smoothing ottimo occorre memorizzare tutta la sequenza di Riccati  $P(k)$  nell'intervallo considerato. Nel solo caso di sistemi stazionari per semplificare l'algoritmo è possibile impiegare la soluzione  $P_\infty$ , con la conseguenza di avere uno smoothing non ottimo, ma tanto più prossimo all'ottimo quanto più ci si allontana dall'origine dei tempi.

È utile osservare che il calcolo del co-stato non è necessariamente ottenuto tramite l'evoluzione all'indietro di un sistema dinamico. Per mostrare ciò si scriva dapprima la formula del calcolo della stima all'istante  $k+1$

$$\hat{x}(k+1|T) = \hat{x}(k+1|k+1) + P(k+1)A^T\beta^*(k+1)$$

e si sostituiscano nei due addendi i termini

$$\hat{x}(k+1|k+1) = (I - P(k+1)C^T(GG^T)^{-1}C)A\hat{x}(k|k) +$$

$$+ P(k+1)C^T(GG^T)^{-1}y(k+1),$$

$$A^T\beta^*(k+1) = \beta^*(k) - C^T(GG^T)^{-1}(y(k+1) - C\hat{x}(k+1|T)).$$

Sviluppando i calcoli si ha

$$\hat{x}(k+1|T) = (I - P(k+1)C^T(GG^T)^{-1}C)A\hat{x}(k|k) +$$

$$+ P(k+1)C^T(GG^T)^{-1}y(k+1) +$$

$$+ P(k+1)\beta^*(k) - P(k+1)C^T(GG^T)^{-1}y(k+1) +$$

$$+ P(k+1)C^T(GG^T)^{-1}C\hat{x}(k+1|T),$$

e riordinando

$$\begin{aligned} P(k+1)\beta^*(k) &= \\ &= (I - P(k+1)C^T(GG^T)^{-1}C)(\hat{x}(k+1|T) - A\hat{x}(k|k)), \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \beta^*(k) &= \\ &= P^{-1}(k+1)(I - P(k+1)C^T(GG^T)^{-1}C)(\hat{x}(k+1|T) - A\hat{x}(k|k)), \end{aligned}$$

od anche

$$\beta^*(k) = P_p^{-1}(k+1)(\hat{x}(k+1|T) - A\hat{x}(k|k)).$$

come è facile verificare.

Al passo (V) dell'algoritmo di smoothing ottimo può essere quindi sostituita la seguente equazione dinamica (all'indietro)

$$\hat{x}(k|T) = \hat{x}(k|k) + P(k)A^T P_p^{-1}(k+1)(\hat{x}(k+1|T) - A\hat{x}(k|k)).$$

Si osservi che per questa implementazione occorre memorizzare la sequenza delle matrici  $P_p(k)$ , di cui occorre anche calcolare le inverse. Dal punto di vista computazionale risulta quindi più onerosa.

Per valutare la bontà della stima di smoothing, occorre disporre della covarianza dell'errore commesso ad ogni istante  $k$ , covarianza che può essere indicata con la seguente notazione

$$P(k|T) \triangleq E\{(x(k) - \hat{x}(k|T))(x(k) - \hat{x}(k|T))^T\},$$

(si osservi che l'errore ha media nulla). Una notazione analoga può essere adottata per le covarianze degli errori di filtraggio e di predizione

$$P(k|k) \triangleq P(k), \quad P(k+1|k) \triangleq P_p(k+1).$$

È possibile dimostrare che la covarianza dell'errore di smoothing può essere calcolata con la seguente formula ricorsiva

$$P(k|T) = P(k|k) - H(k)\left(P(k+1|T) - P(k+1|k)\right)H^T(k),$$

in cui  $H(k) = P(k|k)A^T P^{-1}(k+1|k)$ . Evidentemente, poiché lo smoothing costituisce un miglioramento della stima rispetto al filtraggio, sarà

$$P(k|T) \leq P(k|k).$$

Riportiamo qui di seguito, per comodità del lettore, questa diversa implementazione dell'algoritmo di smoothing ottimo. Inoltre, per completezza, si è preferito riportare il caso generale di sistemi non stazionari. Per semplicità di scrittura si è posto  $R(k) = G(k)G^T(k)$ .

### Smoothing Ottimo su intervallo finito $[0, T]$ .

(Sistemi non stazionari)

(I) Inizializzazione:

$$\begin{aligned} P(0) &= (I + \Psi_{X(0)}C(0)^T R^{-1}(0)C(0))^{-1} \Psi_{X(0)}, \\ \hat{x}(0|0) &= P(0)C(0)^T R^{-1}(0)y(0) \end{aligned}$$

(II) Calcolo delle sequenze  $P(k+1|k+1)$  e  $P(k+1|k)$  per  $k$  da 0 a  $T-1$  (Equazioni di Riccati):

$$\begin{aligned} P(k+1|k) &= A(k)P(k|k)A^T(k) + F(k)F^T(k), \\ P(k+1|k+1) &= \left(I + P(k+1|k)C^T(k)R^{-1}(k)C(k)\right)^{-1} P(k+1|k); \end{aligned}$$

(III) Calcolo della stima di Kalman (per  $k$  da 0 a  $T$ ):

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1|k+1) &= A(k)\hat{x}(k|k) + \\ &+ K(k+1)\left(y(k+1) - C(k+1)A(k)\hat{x}(k|k)\right), \end{aligned}$$

con  $K(k+1) = P(k+1|k+1)C^T(k+1)R^{-1}(k+1)$ ;

(IV) Calcolo della stima di smoothing  $\hat{x}(k|T)$  per  $k$  da  $T-1$  a 0:

$$\hat{x}(k|T) = \hat{x}(k|k) + H(k)(\hat{x}(k+1|T) - A(k)\hat{x}(k|k)),$$

dove  $H(k) = P(k|k)A^T(k)P^{-1}(k+1|k)$ .

(V) Calcolo della sequenza  $P(k|T)$  per  $k$  da  $T-1$  a  $0$  (se richiesto)

$$P(k|T) = P(k|k) - H(k)[P(k+1|T) - P(k+1|k)]H^T(k);$$

(FINE).

#### 4.10 Il filtro di Kalman per sistemi tempo-continui con osservazioni discrete

Nella maggior parte delle applicazioni il segnale che viene osservato e che deve essere filtrato è generato da sistemi fisici che sono intrinsecamente tempo-continui. Inoltre le osservazioni sono in molti casi di natura discreta, ovvero vengono effettuate in determinati istanti di tempo generalmente, ma non necessariamente, equispaziati. Nell'ipotesi che il sistema in esame sia lineare e stazionario e che le misure vengano effettuate a intervalli regolari di tempo  $T$ , possiamo scrivere il seguente modello

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \tilde{F}\nu(t), \\ y(kT) &= Cx(kT) + Du(kT) + \tilde{G}N_k'', \end{aligned} \quad x(0) = x_0, \quad (4.10.1)$$

in cui  $u(t)$  è l'ingresso deterministico al sistema e  $N_k''$  è il rumore di osservazione che costituisce, come al solito, una sequenza gaussiana bianca standard. Occorre a questo punto formulare delle ipotesi opportune sul rumore di stato  $\nu(t)$ , che consentano di ricondurre agevolmente questo problema di filtraggio al caso tempo-discreto, già risolto nelle sezioni precedenti. È bene sottolineare che una analisi rigorosa richiederebbe a questo punto l'introduzione di alcuni concetti (processo di Wiener, processo di Ito, integrale stocastico), che per il momento vengono rinviati. Per snellire la trattazione in questa sezione verrà usato un formalismo semplificato, molto diffuso nei testi non specialistici, anche se non rigoroso, assegnando il nome

di **rumore bianco standard** a un segnale aleatorio  $\nu(t)$  che soddisfa alle seguenti proprietà

- 1)  $E\{\nu(t)\} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+;$
- 2)  $E\{\nu(t)\nu^T(\tau)\} = I\delta(t-\tau) \quad \forall t, \tau \in \mathbb{R}^+.$

La seconda proprietà, in cui la  $\delta(\cdot)$  è la distribuzione di Dirac, stabilisce che i valori assunti da  $\nu(t)$  in due istanti di tempo comunque ravvicinati sono scorrelati. Ciò equivale ad affermare che il contenuto di frequenza del segnale  $\nu(t)$  è illimitato, e pertanto un rumore di questo tipo viene definito bianco.

Ad  $\nu(t)$  si attribuisce inoltre la proprietà di gaussianità qualora risulti gaussiana la variabile aleatoria  $v$  definita dall'integrale

$$v(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\nu(t)dt, \quad t_1 \geq t_2,$$

qualunque sia la funzione  $f(t)$ , e qualunque siano gli estremi di integrazione  $t_1$  e  $t_2$ .

Per il sistema (4.10.1) si ipotizzerà dunque che  $\nu(t)$  sia un rumore bianco gaussiano standard. Per definire l'indipendenza tra  $\nu(t)$  e  $N_k''(k)$  si potrebbe stabilire che  $E\{N_k''\nu(t)^T\} = 0, \quad \forall k, t$ , con  $k \in \mathbb{N}$  e  $t \in \mathbb{R}^+$ , ma è formalmente più corretto ipotizzare l'indipendenza tra  $N_k''$  e  $v(t_1, t_2)$ , ovvero

$$E\{N_k''v^T(t_1, t_2)\} = 0, \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

A questo punto è possibile procedere alla discretizzazione del sistema (4.10.1) con passo  $T$ , consentendo così l'impiego del filtro di Kalman così come formulato nella sezione precedente.

L'espressione della transizione da  $x(kT)$  a  $x((k+1)T)$  si scrive

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= e^{A((k+1)T-kT)}x(kT) + \\ &+ \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau + \\ &+ \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}\tilde{F}\nu(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Indicando lo stato all'istante  $kT$  semplicemente con  $x(k)$ , e definendo la matrice  $A_d = e^{AT}$ , si può scrivere

$$x(k+1) = A_d x(k) + \tilde{u}(k) + V_k,$$

dove

$$\begin{aligned}\tilde{u}(k) &= \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} B u(\tau) d\tau, \\ V_k &= \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} \tilde{F} \nu(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

o anche, effettuando il cambio di variabile  $\tau = (k+1)T - \vartheta$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{u}(k) &= \int_0^T e^{A\vartheta} B u((k+1)T - \vartheta) d\vartheta, \\ V_k &= \int_0^T e^{A\vartheta} \tilde{F} \nu((k+1)T - \vartheta) d\vartheta.\end{aligned}$$

Con le ipotesi adottate la sequenza  $\{V_k\}$  risulta essere una sequenza gaussiana bianca. Infatti il valor medio risulta nullo

$$E\{V_k\} = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} B E\{\nu(\tau)\} d\tau = 0.$$

Passando al calcolo della covarianza  $E\{V_k V_j^T\}$  si ha

$$\begin{aligned}E\{V_k V_j^T\} &= E\left\{ \int_{kT}^{(k+1)T} \int_{jT}^{(j+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} \tilde{F} \nu(\tau) \cdot \nu^T(\vartheta) F^T e^{A^T((j+1)T-\vartheta)} d\vartheta d\tau \right\} = \\ &= \int_{kT}^{(k+1)T} \int_{jT}^{(j+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} \tilde{F} E\{\nu(\tau) \nu^T(\vartheta)\} \tilde{F}^T e^{A^T((j+1)T-\vartheta)} d\vartheta d\tau.\end{aligned}$$

Prima di eseguire questo calcolo, si ricordi la proprietà di campionamento dell'impulso di Dirac

$$\int_c^d f(x, y) \delta(x - y) dy = \begin{cases} f(x, x) & \text{se } x \in [c, d], \\ 0 & \text{se } x \notin [c, d], \end{cases}$$

da cui

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \delta(x - y) dy dx = \int_{[a, b] \cap [c, d]} f(x, x) dx.$$

Sfruttando questa relazione, ricordando che  $E\{\nu(\tau) \nu^T(\vartheta)\} = I \delta(\tau - \vartheta)$ , e osservando che per  $k \neq j$  l'insieme  $[kT, (k+1)T] \cap [jT, (j+1)T]$  o è vuoto o è costituito da un solo punto, e quindi ha in ogni caso misura nulla, si ha

$$E\{V_k V_j^T\} = 0 \quad \text{per } k \neq j$$

Per  $k = j$  si ha invece

$$E\{V_k V_k^T\} = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} \tilde{F} \tilde{F}^T e^{A^T((k+1)T-\tau)} d\tau,$$

che, con il cambio di variabile  $(k+1)T - \tau = \vartheta$ , diventa

$$E\{V_k V_k^T\} = \int_0^T e^{A\vartheta} \tilde{F} \tilde{F}^T e^{A^T \vartheta} d\vartheta = \Psi_V \quad (4.10.2)$$

La matrice simmetrica  $\Psi_V$  è detta Gramiano di raggiungibilità della coppia  $(A, \tilde{F})$ , ed è una matrice simmetrica e semidefinita positiva che si può anche calcolare come soluzione all'istante  $T$  dell'equazione differenziale lineare matriciale

$$\dot{S}(t) = AS(t) + S(t)A^T + \tilde{F} \tilde{F}^T, \quad S(0) = 0,$$

o con lo sviluppo in serie

$$\Psi_V = S(T) = \sum_{k=1}^{\infty} S^{(k)}(0) \frac{T^k}{k!},$$

in cui la derivata  $k$ -esima  $S^{(k)}(0)$  può essere calcolata con la formula ricorsiva

$$\begin{cases} S^{(1)}(0) = \tilde{F} \tilde{F}^T, \\ S^{(k+1)}(0) = AS^{(k)}(0) + S^{(k)}(0)A^T. \end{cases}$$

Non è difficile dimostrare che la  $\Psi_V$  è definita positiva se e solo se la coppia  $(A, \tilde{F})$  è raggiungibile. Più in dettaglio, il rango  $r$  della  $\Psi_V$  è pari alla dimensione del sottospazio degli stati raggiungibili per la coppia  $(A, \tilde{F})$ .

A questo punto ancora non ci si trova nelle condizioni ipotizzate per l'applicazione del filtro di Kalman così come è stato impostato nelle sezioni precedenti, in quanto la sequenza  $\{V_k\}$ , pur essendo gaussiana e bianca, non è standard. Occorre quindi normalizzarla, e cioè esprimere  $V_k$  in funzione di una sequenza gaussiana bianca standard  $N'_k$ , in modo da avere

$$V_k = \bar{F}N'_k, \quad \text{con } E\{N'_k N'^T_k\} = I \text{ e } \bar{F}\bar{F}^T = \Psi_V.$$

È del tutto evidente che basta porre  $\bar{F} = \Psi_V^{1/2}$  per raggiungere lo scopo. Ma come si è già detto nel corso del capitolo una matrice semidefinita positiva  $\Psi_V$  di rango  $r \leq n$  può sempre essere fattorizzata in un prodotto del tipo  $\bar{F}\bar{F}^T$  in cui  $\bar{F}$  è una matrice  $n \times r$  di rango  $r$ , ovvero con  $r$  colonne indipendenti. Si osservi che pertanto, in generale, la dimensione di  $\nu(t)$  e la dimensione di  $N'_k$  differiscono. Infatti il numero di colonne indipendenti di  $\bar{F}$  è pari alla dimensione dello spazio degli stati  $(A, \tilde{F})$ -raggiungibili, che è maggiore del numero di colonne indipendenti di  $\tilde{F}$ .

Ponendo ora

$$\begin{aligned} F &= [\bar{F} \ 0] \\ G &= [0 \ \bar{G}] \end{aligned} \quad \text{e} \quad N_k = \begin{bmatrix} N'_k \\ N''_k \end{bmatrix}$$

finalmente è possibile scrivere il sistema (4.10.1) nella seguente forma discretizzata

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d x(k) + \tilde{u}(k) + FN_k, \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) + GN_k, \end{aligned} \quad (4.10.3)$$

per la quale è possibile impiegare direttamente il filtro di Kalman studiato nelle precedenti sezioni.

Nel caso notevole in cui l'ingresso deterministico  $u(t)$  sia costante negli intervalli tra due istanti di campionamento, e quindi possa essere scritto come

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)[\delta_{-1}(t - kT) - \delta_{-1}(t - (k+1)T)],$$

si ha

$$\tilde{u}(k) = B_d u(k), \quad \text{con } B_d = \int_0^T e^{A\vartheta} B d\vartheta,$$

e il sistema (4.10.1) discretizzato diventa

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) + FN_k, \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) + GN_k. \end{aligned}$$

Si osservi che l'impiego di un passo di discretizzazione costante  $T$  porta alla definizione di un sistema tempo-discreto stazionario. Il lettore può facilmente verificare che l'impiego di un campionamento a frequenza variabile porterebbe alla definizione di un sistema tempo-discreto non stazionario.

## 4.11 Il filtro di Kalman Esteso

In questa sezione viene preso in esame il problema del filtraggio per sistemi non lineari a tempo discreto descritti da equazioni del tipo

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k), k) + F(k)N_k, & F(j)G^T(k) &= 0, \\ y(k) &= h(x(k), u(k), k) + G(k)N_k, & \forall j, k, \end{aligned} \quad (4.11.1)$$

in cui le funzioni  $f(\cdot)$  e  $h(\cdot)$  sono generiche funzioni non lineari dello stato e dell'ingresso, ed eventualmente dell'istante di tempo  $k$ . I rumori di stato e di osservazione, analogamente al caso lineare, sono di tipo additivo.

Il problema della stima ottima dello stato per questo tipo di sistemi non è risolto, nel caso generale. In molti casi è però possibile

costruire degli stimatori che forniscono stime accettabili, nel senso che l'errore di stima rimane limitato. È bene osservare che non vi è nessuna teoria a supportare la preferenza per algoritmi di stima di tipo ricorsivo. Anzi, in generale ci si aspetta risultati migliori da tecniche che utilizzino per il calcolo della stima al generico istante  $k$  tutte le osservazioni effettuate a partire dall'istante iniziale. Questi tipi di algoritmi, detti a memoria infinita, sono tuttavia svantaggiosi nelle applicazioni in tempo reale in quanto ovviamente necessitano di più memoria e di un maggiore tempo di calcolo rispetto ad algoritmi di tipo ricorsivo.

Il **filtro di Kalman Esteso** è un'algoritmo ricorsivo molto diffuso, che costituisce una naturale estensione del filtro di Kalman al caso di sistemi non lineari. Per il calcolo della stima dello stato all'istante  $k + 1$  esso utilizza il filtro di Kalman applicato alla linearizzazione del sistema in esame attorno alla stima corrente  $\hat{x}(k)$ . Per facilitare l'esposizione in questa sezione verrà utilizzata la notazione  $\hat{x}(k|k)$  per indicare la stima dello stato al passo  $k$  ricavata dalle misure fino all'istante  $k$ . In maniera analoga  $\hat{y}(k|k)$  denoterà la stima dell'uscita all'istante  $k$ , che coincide evidentemente con  $y(k)$ , e con  $\hat{x}(k + 1|k)$  e  $\hat{y}(k + 1|k)$  saranno indicate le predizioni ad un passo dello stato e dell'uscita, date rispettivamente da

$$\begin{aligned}\hat{x}(k + 1|k) &= f(\hat{x}(k|k), u(k), k), \\ \hat{y}(k + 1|k) &= h(\hat{x}(k + 1|k), u(k + 1), k + 1).\end{aligned}\quad (4.11.2)$$

Con queste posizioni è possibile definire le innovazioni dello stato e dell'uscita in maniera analoga a quanto fatto per i sistemi lineari

$$\begin{aligned}\nu_s(k + 1) &= \hat{x}(k + 1|k + 1) - \hat{x}(k + 1|k), \\ \nu_o(k + 1) &= y(k + 1) - \hat{y}(k + 1|k).\end{aligned}$$

In questo caso però le sequenze di innovazione non soddisfano a tutte quelle proprietà dimostrate nel caso di sistemi lineari. Appare tuttavia ragionevole cercare un filtro che stabilisca un legame lineare tra innovazioni dello stato e dell'uscita, ottenendo una espressione analoga al filtro di Kalman per sistemi lineari

$$\nu_s(k + 1) = K(k + 1)\nu_o(k + 1), \quad (4.11.3)$$

e quindi

$$\hat{x}(k + 1|k + 1) = \hat{x}(k + 1|k) + K(k + 1)(y(k + 1) - \hat{y}(k + 1|k)). \quad (4.11.4)$$

Per poter eseguire il calcolo del guadagno di Kalman  $K(k + 1)$  occorre sviluppare opportunamente una approssimazione lineare per le due equazioni del sistema (4.11.1). Per coerenza con la definizione data delle predizioni dello stato e dell'uscita, occorre linearizzare l'equazione di stato attorno alla stima  $\hat{x}(k|k)$  e l'equazione di osservazione attorno alla predizione  $\hat{x}(k|k - 1)$ , ottenendo così il seguente sviluppo lineare

$$\begin{aligned}x(k + 1) &\approx f(\hat{x}(k|k), u(k), k) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{\hat{x}(k|k)} (x(k) - \hat{x}(k|k)) + F(k)N_k, \\ y(k) &\approx h(\hat{x}(k|k - 1), u(k), k) + \\ &\quad + \left. \frac{dh}{dx} \right|_{\hat{x}(k|k - 1)} (x(k) - \hat{x}(k|k - 1)) + G(k)N_k.\end{aligned}\quad (4.11.5)$$

Indicando con  $A(k)$  e  $C(k)$  le matrici Jacobiane

$$A(k) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{\hat{x}(k|k)} = \begin{bmatrix} \left. \frac{df_1}{dx_1} \right|_{\hat{x}(k|k)} & \cdots & \left. \frac{df_1}{dx_n} \right|_{\hat{x}(k|k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{df_n}{dx_1} \right|_{\hat{x}(k|k)} & \cdots & \left. \frac{df_n}{dx_n} \right|_{\hat{x}(k|k)} \end{bmatrix}$$

e

$$C(k) = \left. \frac{dh}{dx} \right|_{\hat{x}(k|k - 1)} = \begin{bmatrix} \left. \frac{dh_1}{dx_1} \right|_{\hat{x}(k|k - 1)} & \cdots & \left. \frac{dh_1}{dx_n} \right|_{\hat{x}(k|k - 1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{dh_q}{dx_1} \right|_{\hat{x}(k|k - 1)} & \cdots & \left. \frac{dh_q}{dx_n} \right|_{\hat{x}(k|k - 1)} \end{bmatrix},$$

e ricordando le definizioni (4.11.2), e sostituendo il segno  $\approx$  con l'uguale, l'approssimazione lineare si può scrivere

$$\begin{aligned}x(k + 1) &= A(k)x(k) + [\hat{x}(k + 1|k) - A(k)\hat{x}(k|k)] + F(k)N_k \\ y(k) &= C(k)x(k) + [\hat{y}(k|k - 1) - C(k)\hat{x}(k|k - 1)] + G(k)N_k.\end{aligned}\quad (4.11.6)$$

Per come sono state definite, le quantità tra parentesi quadre sono note ad ogni passo di calcolo, e quindi possono essere considerate come ingressi deterministici al sistema approssimato. Definendo quindi

$$\begin{aligned} u_s(k) &= \hat{x}(k+1|k) - A(k)\hat{x}(k|k), \\ u_o(k) &= \hat{y}(k|k-1) - C(k)\hat{x}(k|k-1), \end{aligned}$$

si ha il sistema approssimato in una forma pronta per l'utilizzo del filtro di Kalman così come è stato formulato nelle sezioni precedenti del capitolo, relativamente al caso in cui è presente l'ingresso deterministico,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + u_s(k) + F(k)N_k \\ y(k) &= C(k)x(k) + u_o(k) + G(k)N_k. \end{aligned} \quad (4.11.7)$$

Le formule per il calcolo del guadagno  $K(k)$  sono quindi esattamente quelle studiate nel corso del capitolo, mentre per il filtro si ha

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1|k+1) &= A(k)\hat{x}(k|k) + u_s(k) + K(k+1) \cdot \\ &\quad \left( y(k+1) - u_o(k+1) - C(k+1)(A(k)\hat{x}(k|k) + u_s(k)) \right). \end{aligned}$$

Poiché in base alle definizioni (4.11.2) si ottiene

$$A(k)\hat{x}(k|k) + u_s(k) = \hat{x}(k+1|k)$$

e quindi anche

$$u_o(k+1) + C(k+1)(A(k)\hat{x}(k|k) + u_s(k)) = \hat{y}(k+1|k),$$

si ha in definitiva l'equazione del filtro di Kalman Esteso

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1)(y(k+1) - \hat{y}(k+1|k)). \quad (4.11.8)$$

Riportiamo qui di seguito in maniera completa tutti i passi richiesti per l'applicazione del Filtro di Kalman Esteso, utilizzando la formulazione 1K del filtro di Kalman.

## FILTRO DI KALMAN ESTESO (EKF)

(I) Condizioni iniziali

$$\hat{x}(0|-1) = \hat{x}_0, \quad P_p(0) = \Psi_{x(0)}, \quad k = -1;$$

(II) Calcolo della predizione dell'uscita

$$\hat{y}(k+1|k) = h(\hat{x}(k+1|k), u(k+1), k+1);$$

(III) Calcolo della matrice Jacobiana della  $h$  in  $\hat{x}(k+1|k)$

$$C(k+1) = \left. \frac{dh}{dx}(x, u(k+1), k+1) \right|_{x=\hat{x}(k+1|k)}$$

(IV) Calcolo del guadagno  $K(k+1)$

$$\begin{aligned} K(k+1) &= P_p(k+1)C^T(k+1) \cdot \\ &\quad \cdot \left( C(k+1)P_p(k+1)C^T(k+1) + G(k+1)G^T(k+1) \right)^{-1}; \end{aligned}$$

(V) Calcolo della matrice  $P(k+1)$

$$P(k+1) = [I - K(k+1)C(k+1)]P_p(k+1);$$

(VI) Calcolo della stima  $\hat{x}(k+1|k+1)$

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1)(y(k+1) - \hat{y}(k+1|k));$$

(VII) Incremento contatore  $k = k+1$ ;

(VIII) Calcolo della predizione dello stato

$$\hat{x}(k+1|k) = f(\hat{x}(k|k), u(k), k);$$

(IX) Calcolo della matrice Jacobiana della  $f$  in  $\hat{x}(k|k)$

$$A(k) = \left. \frac{df}{dx}(x, u(k), k) \right|_{x=\hat{x}(k|k)}$$



(X) Calcolo della matrice  $P_p(k+1)$

$$P_p(k+1) = A(k)P(k)A^T(k) + F(k)F^T(k);$$

(XI) GOTO (II).

**Osservazione 4.11.1** – È bene ribadire che il filtro di Kalman Esteso, in generale, non fornisce la stima ottima dello stato. Anzi, non è nemmeno garantito che l'errore di stima si mantenga limitato. Ne consegue che in questo algoritmo la matrice  $P(k)$  non ha più il significato di covarianza dell'errore di stima, e la matrice  $P_p(k)$  non è più la covarianza dell'errore di predizione. Come osservazione del tutto generale si può dire che il comportamento del filtro di Kalman Esteso è tanto migliore quanto più l'errore iniziale di stima è piccolo. Ciò è dovuto al fatto che tanto più piccoli sono gli errori di stima, tanto meglio l'approssimazione lineare emula il comportamento del sistema non lineare e tanto migliore sarà la stima ottenuta con il filtro di Kalman.  $\triangle$

**Osservazione 4.11.2** – L'implementazione del filtro di Kalman Esteso risulta sempre più onerosa dal punto di vista computazionale rispetto all'implementazione del filtro di Kalman, in quanto le matrici  $A(k)$  e  $C(k)$  vanno calcolate ad ogni passo in funzione della stima e della predizione dello stato. Esse sono pertanto funzione delle osservazioni. Ne consegue, tra l'altro, che non è possibile effettuare il calcolo delle matrici di guadagno  $K(k)$  fuori linea, come accadeva invece per il filtro di Kalman applicato ai sistemi lineari.  $\triangle$

## 4.12 I minimi quadrati ricorsivi attraverso il filtro di Kalman

Nel capitolo sulla Teoria della Stima è stato analizzato, tra l'altro, il problema della soluzione di un sistema di equazioni algebriche lineari in cui il vettore dei termini noti in generale non è contenuto nello spazio immagine della matrice dei coefficienti (2.8.14). In questa

sezione viene ripresa l'impostazione del problema secondo cui il vettore delle incognite  $x$  non è una variabile aleatoria (2.8.14). Si tratta di un problema di stima di massima verosimiglianza per il vettore di parametri  $x \in \mathbb{R}^n$  a partire dal risultato  $y$  della variabile aleatoria  $Y$  definita da

$$Y = Hx + V,$$

in cui  $H$  è la matrice dei coefficienti e  $V$  è un rumore additivo gaussiano a media nulla. Se  $\Psi_V$  è la covarianza del rumore, la stima di massima verosimiglianza è data da

$$\hat{x} = (H^T \Psi_V^{-1} H)^{-1} H^T \Psi_V^{-1} y. \quad (4.12.1)$$

È stato dimostrato inoltre che questa soluzione è anche quella che minimizza l'indice quadratico

$$(y - Hx)^T \Psi_V^{-1} (y - Hx).$$

Pertanto, qualora si assuma  $\Psi_V = I$ , questa soluzione del problema viene anche detta ai **minimi quadrati**. Quando  $\Psi_V$  è diversa dall'identità si parla di minimi quadrati pesati, in quanto la  $\Psi_V^{-1}$  pesa in maniera differente le diverse componenti dell'errore  $Y - Hx$ .

Questo, così come è formulato, è un problema di tipo **statico**. Di esso si può dare una formulazione **dinamica** supponendo che le componenti del vettore  $Y$  dei termini noti siano delle osservazioni che vengano acquisite in istanti di tempo successivi. Sia quindi

$$Y(k) = H(k)x + V(k),$$

$$\text{con} \quad Y(k) = \begin{bmatrix} Y(k-1) \\ y(k) \end{bmatrix}, \quad H(k) = \begin{bmatrix} H(k-1) \\ h(k) \end{bmatrix}, \quad (4.12.2)$$

$$V(k) = \begin{bmatrix} V(k-1) \\ v(k) \end{bmatrix}.$$

Definendo per semplicità la matrice peso  $W(k) \triangleq \Psi_V^{-1}(k)$ , la soluzione ai minimi quadrati in due istanti successivi  $k$  e  $k+1$  è

data da

$$\begin{aligned}\hat{x}(k) &= (H^T(k)W(k)H(k))^{-1}H^T(k)W(k)Y(k), \\ \hat{x}(k+1) &= (H^T(k+1)W(k+1)H(k+1))^{-1} \\ &\quad \cdot H^T(k+1)W(k+1)Y(k+1).\end{aligned}$$

Si osservi che ad ogni istante deve essere eseguita l'inversione di una nuova matrice  $n \times n$ , e che al crescere di  $k$  aumenta il numero di moltiplicazioni e addizioni da svolgere, poiché aumentano le dimensioni delle matrici in gioco. Inoltre occorre disporre di grandi capacità di memoria per conservare i dati relativi ad  $H(k)$  e  $Y(k)$ .

L'algoritmo dei **minimi quadrati ricorsivi** è una tecnica che, con una ridotta complessità numerica ed una minore necessità di memoria, consente di calcolare la stima ottima  $\hat{x}(k+1)$  utilizzando la sola conoscenza della stima all'istante precedente  $\hat{x}(k)$ , della matrice  $h(k+1)$  e del vettore  $y(k+1)$ .

Lo sviluppo delle equazioni dei minimi quadrati ricorsivi nei testi viene generalmente fatto a partire da una formula che consente il calcolo ricorsivo della matrice

$$S(k) \triangleq (H^T(k)W(k)H(k))^{-1}. \quad (4.12.3)$$

Generalmente, per semplicità, la *crescita* della matrice peso  $W(k)$  viene supposta del tipo

$$W(k+1) = \begin{bmatrix} W(k) & 0 \\ 0 & w(k+1) \end{bmatrix}, \quad (4.12.4)$$

dando luogo in questo modo ad una matrice diagonale a blocchi. Si ha così l'equazione ricorsiva

$$\begin{aligned}S(k+1) &= (H^T(k)W(k)H(k) + h^T(k+1)w(k+1)h(k+1))^{-1} = \\ &= (S(k)^{-1} + h^T(k+1)w(k+1)h(k+1))^{-1} = \\ &= (I + S(k)h^T(k+1)w(k+1)h(k+1))^{-1}S(k).\end{aligned} \quad (4.12.5)$$

Occorre a questo punto derivare una relazione ricorsiva tra  $\hat{x}(k+1)$  e  $\hat{x}(k)$ . Una strada è quella di sviluppare l'espressione

$$\hat{x}(k+1) = S(k+1)H^T(k+1)W(k+1)Y(k+1)$$

tenendo conto delle suddivisioni a blocchi precedentemente indicate.

In questa sezione si preferisce ricavare le equazioni dei minimi quadrati ricorsivi utilizzando le formule del filtro di Kalman. A tal fine basta riscrivere il problema in forma di sistema dinamico. Poiché il vettore di parametri  $x$  è costante, allora le equazioni di stato saranno semplicemente

$$\begin{aligned}x(k+1) &= x(k), \\ y(k) &= h(k)x(k) + v(k).\end{aligned} \quad (4.12.6)$$

Sia  $\psi_V(k) = E\{v(k)v(k)^T\} = w^{-1}(k)$ , e sia  $G(k) = w^{-1/2}(k)$ , allora il sistema possiede effettivamente la forma standard

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(k)x(k) + F(k)N_k, \\ y(k) &= C(k)x(k) + G(k)N_k,\end{aligned}$$

con

$$A(k) = I, \quad F(k) = 0, \quad C(k) = h(k), \quad G(k)G^T(k) = w^{-1}(k),$$

e  $N_k$  sequenza aleatoria gaussiana bianca standard. L'equazione del filtro di Kalman diventa allora

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + K(k+1)(y(k+1) - h(k+1)\hat{x}(k)),$$

in cui  $K(k+1)$  si calcola attraverso le equazioni di Riccati nella formulazione (1FK) o (2FK). In entrambe si ha che la covarianza dell'errore di predizione è pari a

$$P_p(k+1) = A(k)P(k)A^T(k) + F(k)F^T(k) = P(k),$$

ovvero coincide con la covarianza dell'errore di stima all'istante precedente. Nella formulazione (2FK) si ha

$$P(k+1) = [I + P_p(k+1)C(k+1)^T \cdot (G(k+1)G^T(k+1))^{-1}C(k+1)]^{-1}P_p(k+1),$$

che applicata al problema in esame diventa

$$P(k+1) = [I + P(k)h(k+1)^T w(k+1)h(k+1)]^{-1}P(k). \quad (4.12.7)$$

Confrontando quest'ultima con l'equazione (4.12.5) si vede che, se  $P(0) = S(0)$ , allora per ogni  $k$  si ha  $P(k) = S(k)$ . La matrice  $K(k+1)$  è data da

$$K(k+1) = P(k+1)C^T(k+1)(G(k+1)G^T(k+1))^{-1},$$

ovvero nel nostro caso

$$K(k+1) = P(k+1)h^T(k+1)w(k+1).$$

Si ha in definitiva il seguente algoritmo dei minimi quadrati ricorsivi

$$\begin{aligned} P(k+1) &= [I + P(k)h^T(k+1)w(k+1)h(k+1)]^{-1}P(k), \\ \hat{x}(k+1) &= \hat{x}(k) + P(k+1)h^T(k+1)w(k+1) \cdot \\ &\quad \cdot (y(k+1) - h(k+1)\hat{x}(k)). \end{aligned} \quad (4.12.8)$$

In questa formulazione per calcolare  $P(k+1)$  ad ogni passo occorre invertire una matrice  $n \times n$ . Seguendo invece la formulazione del filtro di Kalman 1K ad ogni passo occorre invertire una matrice  $q \times q$ , dove  $q$  è la dimensione del vettore delle osservazioni  $y(k)$ . L'equazione di Riccati che fornisce il guadagno di Kalman è

$$K(k+1) = P_p(k+1)C^T(k+1) \cdot (C(k+1)P_p(k+1)C^T(k+1) + G(k+1)G^T(k+1))^{-1},$$

che particolarizzata al nostro problema diventa

$$K(k+1) = P(k)h^T(k+1) \cdot (h(k+1)P(k)h^T(k+1) + w^{-1}(k+1))^{-1},$$

o anche

$$K(k+1) = P(k)h^T(k+1)w(k+1) \cdot (h(k+1)P(k)h^T(k+1)w(k+1) + I)^{-1},$$

e

$$\begin{aligned} P(k+1) &= [I - K(k+1)C(k+1)]P_p(k+1) = \\ &= [I - K(k+1)h(k+1)]P(k). \end{aligned}$$

Come in tutti gli algoritmi ricorsivi si presenta a questo punto il problema dell'inizializzazione. Si ricordi che in questa formulazione il vettore  $x$  non è una variabile aleatoria, e quindi non esistono un valore atteso e una covarianza con cui innescare l'algoritmo. Il modo più rigoroso di procedere consiste nell'inizializzare l'algoritmo a partire da un certo istante  $\bar{k} \geq 0$  risolvendo, per un volta, il problema in forma non ricorsiva

$$\begin{aligned} P(\bar{k}) &= (H^T(\bar{k})W(\bar{k})H(\bar{k}))^{-1}, \\ \hat{x}(\bar{k}) &= P(\bar{k})H^T(\bar{k})W(\bar{k})Y(\bar{k}). \end{aligned} \quad (4.12.9)$$

Spesso però, nelle applicazioni, il risultato della stima deve essere fornito fin dall'istante iniziale  $k = 0$ , per cui non è possibile attendere il primo istante  $\bar{k}$  in cui è possibile calcolare  $P(\bar{k}) = (H^T(\bar{k})W(\bar{k})H(\bar{k}))^{-1}$ . Quello che si fa comunemente è di usare una stima iniziale  $\bar{x}$  disponibile grazie a qualche informazione a priori sul problema specifico in esame, e di inizializzare  $P(0)$  ad un valore *sufficientemente elevato*. La stima all'istante 0 sarà quindi data da

$$\hat{x}(0) = \bar{x} + P(0)h^T(0)w(0)(y(0) - h(0)\bar{x}). \quad (4.12.10)$$

Si ricordi che il vettore incognito  $x$  non è una variabile aleatoria e quindi  $P(0)$  non è una matrice di covarianza e  $\bar{x}$  non è un valore atteso. Nel funzionamento dell'algoritmo però la  $P(k)$  gioca un ruolo analogo a quello della matrice di covarianza dell'errore di stima nel filtro di Kalman. Questo fatto suggerisce quindi di scegliere  $P(0)$  abbastanza grande per modellare, seppure in modo qualitativo, l'incertezza nella stima a priori  $\bar{x}$ . Si osservi inoltre che nell'espressione (4.12.10) il peso del secondo termine (termine di correzione) risulta essere tanto più elevato rispetto al primo termine (di predizione) quanto più  $P(0)$  è elevato. In altre parole più  $P(0)$  è elevato e meno l'errore commesso sulla stima a priori  $\bar{x}$  influenza l'errore sulle stime successive  $\hat{x}(k)$ .

Quando la matrice di peso  $W(k)$  non è la matrice identità si parla genericamente di minimi quadrati pesati. Nella maggior parte delle situazioni però, se non si hanno informazioni sufficienti per pesare in maniera selettiva le diverse componenti dell'errore  $Y(k) - H(k)x$ , si adotta per  $W(k)$  la matrice identità.

Nel problema dinamico che è stato appena analizzato può avere interesse pesare maggiormente le informazioni più recenti e trascurare le informazioni più distanti. Questo obiettivo può essere ottenuto definendo una matrice peso del tipo

$$W(k) = \begin{bmatrix} I\beta^k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I\beta & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I \end{bmatrix}$$

con  $\beta \in (0, 1)$ , di modo che l'indice quadratico da minimizzare risulta essere

$$\sum_{j=0}^k \beta^{k-j} \|y(j) - h(j)x\|^2.$$

L'equazione che descrive la *crescita* della matrice  $W(k)$  è la seguente

$$W(k+1) = \begin{bmatrix} \beta W(k) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

mentre le formule ricorsive che forniscono il guadagno  $K(k+1)$  risultano essere

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (\beta H^T(k)W(k)H(k) + h^T(k+1)h(k+1))^{-1} = \\ &= (\beta P^{-1}(k) + h^T(k+1)h(k+1))^{-1} = \\ &= \left(I + \frac{P(k)}{\beta} h^T(k+1)h(k+1)\right)^{-1} \frac{P(k)}{\beta}, \end{aligned}$$

e

$$K(k+1) = P(k+1)h^T(k+1),$$

ovvero coincidono con quelle già viste a meno della sostituzione di  $P(k)$  con  $\frac{P(k)}{\beta}$ . Nella formulazione alternativa si ha invece

$$\begin{aligned} K(k+1) &= \frac{P(k)}{\beta} h^T(k+1) \left( h(k+1) \frac{P(k)}{\beta} h^T(k+1) + I \right)^{-1}, \\ P(k+1) &= [I - K(k+1)h(k+1)] \frac{P(k)}{\beta}. \end{aligned}$$

Nella letteratura anglosassone il parametro  $\beta$  prende il nome di **forgetting factor**, in quanto è responsabile della rapidità con cui l'algoritmo si *dimentica* del passato. Tanto più prossimo a zero è  $\beta$ , tanto meno sono pesate le osservazioni antiche rispetto a quelle recenti. Tanto più  $\beta$  è prossimo a 1 tanto minore è la differenza di peso tra osservazioni antiche e recenti.

Si può anche applicare il forgetting factor  $\beta$  nel caso dei minimi quadrati pesati, semplicemente definendo

$$W(k+1) = \begin{bmatrix} \beta W(k) & 0 \\ 0 & w(k+1) \end{bmatrix}.$$

Le equazioni risultanti possono essere facilmente calcolate, e le riportiamo qui di seguito come sintesi di tutto quanto esposto nel paragrafo.

**Algoritmo dei minimi quadrati pesati ricorsivi  
con forgetting factor  $\beta$**

(Ia) Inizializzazione:

$$\begin{aligned} P(\bar{k}) &= (H^T(\bar{k})W(\bar{k})H(\bar{k}))^{-1}, \\ \hat{x}(\bar{k}) &= P(\bar{k})H^T(\bar{k})W(\bar{k})Y(\bar{k}), \end{aligned} \quad k = \bar{k};$$

(Ib) Inizializzazione (in alternativa):

$$\begin{aligned} P(0) &= P_0, \\ \hat{x}(0) &= \bar{x} + P(0)h^T(0)w(0)(y(0) - h(0)\bar{x}), \\ k &= 0; \end{aligned}$$

(II) Calcolo del guadagno  $K(k+1)$ :

$$\begin{aligned} K(k+1) &= P(k)h^T(k+1)w(k+1) \cdot \\ &\quad \cdot \left( h(k+1)P(k)h^T(k+1)w(k+1) + I\beta \right)^{-1}, \\ P(k+1) &= [I - K(k+1)h(k+1)] \frac{P(k)}{\beta}. \end{aligned}$$

(III) Calcolo della stima:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + K(k+1)(y(k+1) - h(k+1)\hat{x}(k)),$$

(IV)  $k = k+1$ ; GOTO II.

### 4.13 Rumore non gaussiano: filtraggio quadratico

Nel capitolo sulla teoria della stima si è visto che quando in un problema, anche se lineare, le variabili aleatorie in gioco non hanno una distribuzione gaussiana, il calcolo della stima ottima attraverso

il valore atteso condizionato può risultare molto difficile. In questi casi si può sempre calcolare una stima polinomiale ottima, e cioè la migliore stima tra tutte le funzioni polinomiali delle osservazioni.

Nel caso del problema della stima dello stato nei sistemi dinamici lineari il miglior stimatore lineare ha una struttura ricorsiva, e coincide con il filtro di Kalman. Andando a considerare lo stimatore ottimo tra le funzioni quadratiche delle osservazioni, in generale non si otterrà una struttura ricorsiva. La stima quadratica ottima sarà quindi fornita da un algoritmo a memoria infinita, non adatto per applicazioni in tempo reale. È però possibile ricercare lo stimatore a minima varianza tra tutti gli stimatori quadratici che hanno una struttura ricorsiva mediante una apposita formulazione del problema. Allo scopo di alleggerire le notazioni, nel seguito verrà sviluppato il filtro quadratico nel caso di sistemi lineari e stazionari, ma la trattazione può essere banalmente estesa al caso di sistemi non stazionari. Prima di formulare il problema si ritiene opportuno ricordare che per il calcolo della stima polinomiale di ordine  $n$  sono necessari i momenti delle osservazioni fino all'ordine  $2n$ . Questi ultimi si possono ottenere dai momenti dei rumori di stato e di osservazione fino allo stesso ordine  $2n$ . In definitiva, per il calcolo del filtro quadratico ottimo è necessario disporre dei momenti del rumore fino al quarto ordine.

Nel paragrafo sulla stima polinomiale ottima (Capitolo 2) si è introdotto il prodotto di Kronecker tra vettori. Per sviluppare i calcoli relativi al filtro quadratico ottimo occorre definire anche il prodotto di Kronecker tra matrici nel modo seguente

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad B \in \mathbb{R}^{r \times s}, \quad \Rightarrow \quad A \otimes B \in \mathbb{R}^{(n \cdot r) \times (m \cdot s)}, \\ A \otimes B \triangleq \begin{bmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,m}B \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

dove  $a_{i,j}$  è il generico elemento della matrice  $A$ . Ovviamente questa definizione è consistente con la definizione data nel Capitolo 2.

Si consideri la classe di sistemi del tipo

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + f_k, & x(0) &= x_0, \\ y(k) &= Cx(k) + g_k, \end{aligned} \quad (4.13.1)$$

con  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}^p$ ,  $f_k \in \mathbb{R}^n$  e  $g_k \in \mathbb{R}^p$ . La sola proprietà che viene richiesta sulle sequenze aleatorie  $\{f_k\}$  e  $\{g_k\}$  è la bianchezza fino al quarto ordine, nel senso che devono risultare nulli i momenti misti fino al quarto ordine tra elementi delle sequenze presi in istanti diversi. Per formalizzare questa ipotesi è vantaggioso definire le matrici

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i,j}(h,k) &= E\{f_h^{[i]} f_k^{[j]T}\}, \\ \mathcal{G}_{i,j}(h,k) &= E\{g_h^{[i]} g_k^{[j]T}\}. \end{aligned}$$

che generalizzano le matrici di mutua covarianza dei rumori. Infatti, ricordando la definizione di potenza di Kronecker, data nel capitolo 2, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{1,1}(h,k) &= E\{f_h f_k^T\}, \\ \mathcal{G}_{1,1}(h,k) &= E\{g_h g_k^T\}. \end{aligned}$$

Le ipotesi che è necessario adottare per impostare il problema della stima ricorsiva quadratica ottima sono quindi le seguenti

- 1)  $E\{f_k\} = 0$ ,  $E\{g_k\} = 0$ ;
- 2)  $\mathcal{F}_{i,j}(k,k) < \infty$ ,  $\mathcal{G}_{i,j}(k,k) < \infty$ , per  $i+j \leq 4$ ,  $\forall k$ ;
- 3)  $\mathcal{F}_{i,j}(h,k) = E\{f_h^{[i]}\} E\{f_k^{[j]T}\}$ ,  $\mathcal{G}_{i,j}(h,k) = E\{g_h^{[i]}\} E\{g_k^{[j]T}\}$   
per  $i+j \leq 4$ ,  $\forall h \neq k$ ;
- 4)  $E\{f_h^{[i]} g_k^{[j]T}\} = E\{f_h^{[i]}\} E\{g_k^{[j]T}\}$  per  $i+j \leq 4$ ,  $\forall h, k$ ;

La proprietà (3) si può tradurre in parole affermando che le sequenze di rumore devono essere bianche fino al quarto ordine, e la (4) dicendo che il rumore di stato e di osservazione sono scorrelati fino al quarto ordine.

Inoltre devono anche valere le proprietà

- i)  $E\{x_0\} = 0$ ;

- ii)  $E\{x_0^{[i]} x_0^{[j]T}\} < \infty$ , per  $i+j \leq 4$ ;
- iii)  $E\{x_0^{[i]} f_k^{[j]T}\} = E\{x_0^{[i]}\} E\{f_k^{[j]T}\}$ ,  $E\{x_0^{[i]} g_k^{[j]T}\} = E\{x_0^{[i]}\} E\{g_k^{[j]T}\}$   
per  $i+j \leq 4$ ,  $\forall k$ ;

La proprietà (iii) si esprime dicendo che le sequenze di rumore e lo stato iniziale sono scorrelate fino al quarto ordine.

Seguendo una procedura simile a quella seguita nel capitolo 2, occorre preliminarmente definire i vettori estesi

$$X(k) = \begin{bmatrix} x^T(k) \\ x^{[2]T}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n^2}, \quad Y(k) = \begin{bmatrix} y^T(k) \\ y^{[2]T}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p+p^2}, \quad (4.13.2)$$

che verranno indicati nel seguito col nome di *stato quadratico* e di *osservazione quadratica*. Occorre a questo punto sviluppare un modello per l'evoluzione dello stato quadratico  $X(k)$ . La potenza di Kronecker  $x^{[2]}(k+1)$  si esprime in funzione di  $x(k)$  e  $f_k$  come

$$\begin{aligned} x^{[2]}(k+1) &= (Ax(k) + f_k)^{[2]} = \\ &= (Ax(k) + f_k) \otimes (Ax(k) + f_k). \end{aligned} \quad (4.13.3)$$

Sviluppando i prodotti di Kronecker e utilizzando alcune proprietà dell'algebra di Kronecker, proprietà che non verranno qui discusse, dopo alcuni conti si ottiene

$$x^{[2]}(k+1) = A^{[2]} x^{[2]}(k) + F_2(k) \quad (4.13.4)$$

in cui

$$\begin{aligned} F_2(k) &= (I \otimes A)(f_k \otimes x(k)) + \\ &+ (A \otimes I)(x(k) \otimes f_k) + f_k^{[2]}. \end{aligned} \quad (4.13.5)$$

Ribattezzando  $f_k$  col nome di  $F_1(k)$ , le due equazioni ricorsive (4.13.1) e (4.13.4) che forniscono l'evoluzione temporale della prima e della seconda potenza di Kronecker dello stato possono essere scritte in una forma più compatta come

$$X(k+1) = \bar{A}X(k) + F(k), \quad (4.13.6)$$

$$\text{dove } \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{[2]} \end{bmatrix}, \text{ e } F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}.$$

Considerando ora l'osservazione dell'uscita, la potenza di Kronecker  $y^{[2]}(k)$  è data da

$$\begin{aligned} y^{[2]}(k) &= (Cx(k) + g_k)^{[2]} = \\ &= C^{[2]}x^{[2]}(k) + G_2(k), \end{aligned} \quad (4.13.7)$$

in cui

$$\begin{aligned} G_2(k) &= (I \otimes C)(g_k \otimes x(k)) + \\ &+ (C \otimes I)(x(k) \otimes g_k) + g_k^{[2]}. \end{aligned} \quad (4.13.8)$$

Di nuovo, indicando  $g_k$  con la notazione  $G_1(k)$ , le due equazioni che forniscono le osservazioni quadratiche  $Y(k)$  si possono mettere nella forma

$$Y(k) = \bar{C}X(k) + G(k) \quad (4.13.9)$$

$$\text{dove } G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \text{ e } \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C^{[2]} \end{bmatrix}.$$

Il sistema quadratico che si ottiene in definitiva è

$$\begin{aligned} X(k+1) &= \bar{A}X(k) + F(k), \quad X(0) = X_0, \\ Y(k) &= \bar{C}X(k) + G(k). \end{aligned} \quad (4.13.10)$$

in cui  $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_0^{[2]} \end{bmatrix}$ . In base alle ipotesi fatte, date le espressioni (4.13.5) e (4.13.8), si può dimostrare che  $F(k)$  e  $G(k)$  sono sequenze a media nulla, bianche e scorrelate. Di conseguenza il filtro lineare ottimo per il sistema (4.13.10) ha la forma standard del filtro di Kalman, la cui equazione ricorsiva è data da

$$\begin{aligned} \hat{X}(k+1) &= \bar{A}\hat{X}(k) + K(k+1) \cdot \\ &\cdot (Y(k+1) - \bar{C}\bar{A}\hat{X}(k)). \end{aligned} \quad (4.13.11)$$

La matrice di guadagno  $K(k)$  si ottiene attraverso le equazioni di Riccati

$$\begin{aligned} P_p(k+1) &= \bar{A}P(k)\bar{A}^T + Q(k), \\ K(k+1) &= P_p(k+1)\bar{C}^T \cdot \\ &\cdot (\bar{C}P_p(k+1)\bar{C}^T + S(k+1))^{-1}, \\ P(k+1) &= (I - K(k+1)\bar{C})P_p(k+1), \end{aligned}$$

dove  $Q(k) = E\{F(k)F^T(k)\}$  e  $S(k) = E\{G(k)G^T(k)\}$ , sono le matrici di covarianza del rumore di stato e di osservazione per il sistema quadratico, e  $P(k)$  e  $P_p(k)$  sono, rispettivamente, la covarianza dell'errore di stima e di predizione per lo stato quadratico.

Naturalmente il filtro calcola la migliore stima quadratica sia dello stato che del suo quadrato di Kronecker

$$\hat{X}(k) = G = \begin{bmatrix} \hat{\hat{x}}(k) \\ \hat{\hat{x}}^{[2]}(k) \end{bmatrix}.$$

È facile verificare che per il calcolo delle matrici  $Q(k)$  e  $S(k)$  sono necessari i momenti del rumore fino al quarto ordine

$$Q(k) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{1,1}(k, k) & \mathcal{F}_{1,2}(k, k) \\ \mathcal{F}_{2,1}(k, k) & \mathcal{F}_{2,2}(k, k) \end{bmatrix}, \quad (4.13.12)$$

$$S(k) = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{1,1}(k, k) & \mathcal{G}_{1,2}(k, k) \\ \mathcal{G}_{2,1}(k, k) & \mathcal{G}_{2,2}(k, k) \end{bmatrix}. \quad (4.13.13)$$

# Stima di stato e parametri nei sistemi lineari a tempo discreto

**I**N questo capitolo si prenderà in esame il problema della stima simultanea dello stato e dei parametri nei sistemi lineari e stazionari a tempo discreto in presenza di rumore di stato e di osservazione. Verranno considerati sistemi lineari in cui le matrici che definiscono le equazioni di transizione e di osservazione dipendono da un vettore di parametri incogniti. Questi ultimi non sono modellati come variabili aleatorie e per la loro stima verrà utilizzato il criterio della massima verosimiglianza. Il vettore di stato invece continuerà ad essere una variabile aleatoria gaussiana in quanto i rumori di stato e di osservazione ancora una volta sono costituiti da sequenze aleatorie gaussiane. Per la stima dello stato si adotterà ancora il criterio della minima varianza dell'errore di stima, ricorrendo quindi all'impiego del filtro di Kalman.

## 5.1 Impostazione del funzionale di verosimiglianza

Si consideri un sistema lineare e stazionario il cui modello è noto a meno di un vettore di parametri  $\vartheta \in \mathbb{R}^r$ , secondo la seguente struttura

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\vartheta)x(k) + B(\vartheta)u(k) + F(\vartheta)N_k, & F(\vartheta)G^T(\vartheta) &= 0, \\ y(k) &= C(\vartheta)x(k) + D(\vartheta)u(k) + G(\vartheta)N_k. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Le ipotesi a cui soddisfano la sequenza degli ingressi aleatori  $N_k$  e lo stato iniziale  $x(0)$  sono le stesse del Capitolo 4, necessarie per lo sviluppo del filtro di Kalman. Il problema della stima simultanea dello stato e dei parametri, date le osservazioni  $y(k)$  dall'istante 0 fino all'istante  $T$ , può essere formulato e risolto seguendo le indicazioni riportate alla fine del Capitolo 2, nel paragrafo che tratta della stima simultanea di variabili aleatorie e dei parametri di una distribuzione. Occorre pertanto prima stimare il vettore dei parametri secondo il criterio della massima verosimiglianza e poi lo stato secondo il criterio della minima varianza. Per risolvere il primo problema occorre trovare l'espressione della densità di probabilità dell'aggregato del vettore delle osservazioni, definito come

$$Y_T = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(T) \end{bmatrix}. \quad (5.1.2)$$

$Y_T$  è un vettore gaussiano, poiché gaussiani sono lo stato iniziale e la sequenza dei rumori di stato e di osservazione, ed è possibile per esso calcolare il valor medio e la matrice di covarianza in funzione delle matrici del sistema (5.1.1). A tal fine è sufficiente applicare le definizioni di valor medio e covarianza all'espressione dell'osservazione al generico istante  $k$

$$\begin{aligned} y(k) &= C(\vartheta)A^k(\vartheta)x(0) + \\ &+ D(\vartheta)u(k) + \sum_{j=0}^{k-1} C(\vartheta)A^{k-j-1}(\vartheta)B(\vartheta)u(j) + \\ &+ G(\vartheta)N_k + \sum_{j=0}^{k-1} C(\vartheta)A^{k-j-1}(\vartheta)F(\vartheta)N_j. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Il valor medio, indicato con  $m_{Y_T}(\vartheta)$ , è un vettore a  $q(T+1)$  componenti, e la matrice di covarianza, indicata con  $\Psi_{Y_T}(\vartheta)$  ha dimensioni  $q(T+1) \times q(T+1)$ . Il calcolo *simbolico* di queste matrici



non presenta difficoltà, e viene omesso, mentre il calcolo *numerico* si presenta tanto più oneroso quando maggiore è il numero delle osservazioni.

La terna statistica nella quale formulare il problema è

$$(\mathbb{R}^{q(T+1)}, \mathcal{B}, \mathcal{P})$$

dove  $\mathcal{B}$  è la  $\sigma$ -algebra di Borel su  $\mathbb{R}^{q(T+1)}$  e  $\mathcal{P}$  è la famiglia delle misure di probabilità, parametrizzata da  $\vartheta$ , indotta da  $Y_T$  su  $(\mathbb{R}^{q(T+1)}, \mathcal{B}^{q(T+1)})$ . Date le caratteristiche del vettore aleatorio  $Y_T$  ogni misura  $P_\vartheta \in \mathcal{P}$  è gaussiana, con media  $m_{Y_T}(\vartheta)$  e covarianza  $\Psi_{Y_T}(\vartheta)$ . Poiché inoltre tale misura è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue per ogni  $\vartheta$ , il funzionale di verosimiglianza coincide con la densità di probabilità della misura  $\mathcal{P}_\vartheta$  calcolata in corrispondenza alle osservazioni  $Y_T$ , cioè

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_T}(\vartheta) &= \frac{d\mathcal{P}_\vartheta}{d\lambda} \Big|_{Y_T} = p(Y_T; \vartheta) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{q(T+1)/2} |\Psi_{Y_T}(\vartheta)|^{1/2}} \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(Y_T - m_{Y_T}(\vartheta))^T \Psi_{Y_T}^{-1}(\vartheta)(Y_T - m_{Y_T}(\vartheta))\right). \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Il valore del parametro  $\vartheta$  che rende massimo  $\mathcal{L}_{Y_T}(\vartheta)$  costituisce la stima di massima verosimiglianza. Tale stima si ottiene annullando il gradiente della (5.1.4) rispetto a  $\vartheta$ . In generale si dovrà ricorrere ad algoritmi numerici per la ricerca del massimo, in quanto non è pensabile di poter ricavare una soluzione in forma chiusa.

Poiché la maggior parte degli algoritmi numerici per la ricerca del massimo di una funzione si fonda sull'algoritmo del gradiente, che come è noto costituisce la direzione di massima salita per la funzione, è importante valutare la complessità del calcolo del gradiente del funzionale di verosimiglianza. A tal proposito si può osservare che la dimensione della matrice di covarianza  $\Psi_{Y_T}(\vartheta)$  cresce al crescere di  $T$ , ed in situazioni di interesse applicativo potrebbe avere dimensioni proibitive, considerando che nell'espressione del funzionale compare

sia la radice quadrata del determinante di tale matrice che la sua inversa. L'elevata complessità, intesa come numero di calcoli elementari, di questo approccio consiglia di cercare strade alternative più adatte ad una implementazione in tempo reale dell'algoritmo di stima.

Ciò che rende non percorribile nella pratica l'approccio sopra descritto è il fatto che la matrice di covarianza è *piena*, e non è dotata di alcuna struttura che ne semplifichi il calcolo del determinante e dell'inversa.

Una drastica semplificazione nella soluzione del problema della stima dei parametri si ottiene ricordando la definizione di sequenza di innovazione dell'uscita e la sua proprietà di avere lo stesso contenuto informativo della sequenza delle osservazioni (Teorema di Mitter).

L'innovazione dell'uscita all'istante  $k$  è stata definita nel capitolo 4 per il solo sottosistema stocastico. Si ricordi a tale proposito la scomposizione di un modello del tipo (5.1.1) in un sottosistema deterministico ed in un sottosistema stocastico nel modo seguente

$$\begin{aligned} x_d(k+1) &= A(\vartheta)x_d(k) + B(\vartheta)u(k), & x_d(0) &= E\{x(0)\} \\ y_d(k) &= C(\vartheta)x_d(k) + D(\vartheta)u(k) \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

$$\begin{aligned} x_s(k+1) &= A(\vartheta)x_s(k) + F(\vartheta)N_k, & F(\vartheta)G^T(\vartheta) &= 0 \\ y_s(k) &= C(\vartheta)x_s(k) + G(\vartheta)N_k, & x_s(0) &= x(0) - E\{x(0)\}. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

L'innovazione dell'uscita per il sottosistema stocastico è stata definita come

$$\nu_o(k) = E\{y_s(k)|\mathcal{F}_k^Y\} - E\{y_s(k)|\mathcal{F}_{k-1}^Y\}. \quad (5.1.7)$$

e può essere riscritta come

$$\nu_o(k) = y_s(k) - C(\vartheta)A(\vartheta)\hat{x}_s(k-1). \quad (5.1.8)$$

Nel capitolo 4 è stato dimostrato che la sequenza delle innovazioni è a media nulla, è gaussiana ed è bianca. La covarianza dell'innovazione

dell'uscita all'istante  $k$  risulta essere

$$\Psi_{\nu_o}(k) = E\{\nu_o(k)\nu_o^T(k)\} = C(\vartheta)P_p(k; \vartheta)C^T(\vartheta) + G(\vartheta)G^T(\vartheta). \quad (5.1.9)$$

in cui  $P_p(k; \vartheta)$  è la covarianza dell'errore di predizione dello stato all'istante  $k$ , ed è funzione del vettore  $\vartheta$ .

Poiché  $y_s(k) = y(k) - y_d(k)$ , per la sequenza di innovazione dell'uscita si ha la seguente espressione

$$\begin{aligned} \nu_o(k) &= y(k) - y_d(k) - C(\vartheta)A(\vartheta)\hat{x}_s(k-1) = \\ &= y(k) - C(\vartheta)x_d(k) - D(\vartheta)u(k) - C(\vartheta)A(\vartheta)\hat{x}_s(k-1) = \\ &= y(k) - C(\vartheta)A(\vartheta)x_d(k-1) - C(\vartheta)B(\vartheta)u(k-1) - \\ &\quad - D(\vartheta)u(k) - C(\vartheta)A(\vartheta)\hat{x}_s(k-1) \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

e poiché  $\hat{x} = x_d + \hat{x}_s$  si ottiene

$$\nu_o(k) = y(k) - D(\vartheta)u(k) - C(\vartheta)A(\vartheta)\hat{x}(k-1) - C(\vartheta)B(\vartheta)u(k-1). \quad (5.1.11)$$

Da questa ultima espressione risulta evidente che  $\nu_o(k)$  è un dato disponibile, come funzione di  $\vartheta$ , in quanto  $y(k)$  è l'uscita misurata, l'ingresso deterministico  $u(k)$  è noto e  $\hat{x}(k-1)$  è la stima dello stato fornita dal filtro di Kalman.

Si definisca a questo punto l'aggregato del vettore delle innovazioni

$$\mathcal{O}_T = \begin{bmatrix} \nu_o(0) \\ \nu_o(1) \\ \vdots \\ \nu_o(T) \end{bmatrix}; \quad (5.1.12)$$

che, per quanto detto nel capitolo 4, ha lo stesso contenuto informativo del vettore delle osservazioni  $Y_T$ . Poiché per  $\nu_o(k)$  ha le stesse dimensioni dell'osservazione  $y(k)$  si ha che  $\mathcal{O}_T \in \mathbb{R}^{q(T+1)}$ . Inoltre  $\mathcal{O}_T$  è un vettore gaussiano a media nulla, la cui covarianza è

diagonale a blocchi

$$\Psi_{\mathcal{O}_T}(\vartheta) = E\{\mathcal{O}_T^T \mathcal{O}_T\} = \begin{bmatrix} \Psi_{\nu_o}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Psi_{\nu_o}(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \Psi_{\nu_o}(T) \end{bmatrix} \quad (5.1.13)$$

La terna statistica in esame è

$$(\mathbb{R}^{q(T+1)}, \mathcal{B}, \mathcal{P})$$

dove  $\mathcal{B}$  è la  $\sigma$ -algebra di Borel su  $\mathbb{R}^{q(T+1)}$  e  $\mathcal{P}$  è la famiglia delle misure di probabilità, parametrizzata da  $\vartheta$ , indotta da  $\mathcal{O}_T$  su  $(\mathbb{R}^{q(T+1)}, \mathcal{B}^{q(T+1)})$ . Anche in questo caso ogni misura  $P_\vartheta \in \mathcal{P}$  è gaussiana, e quindi assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. Il funzionale di verosimiglianza è pertanto la densità di probabilità della misura  $\mathcal{P}_\vartheta$  calcolata in corrispondenza ad  $\mathcal{O}_T$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{O}_T}(\vartheta) &= \frac{d\mathcal{P}_\vartheta}{d\lambda} \Big|_{\mathcal{O}_T} = \frac{1}{(2\pi)^{q(T+1)/2} |\Psi_{\mathcal{O}_T}(\vartheta)|^{1/2}} \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \mathcal{O}_T^T \Psi_{\mathcal{O}_T}(\vartheta)^{-1} \mathcal{O}_T\right) \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

e con le opportune sostituzioni si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{O}_T}(\vartheta) &= \frac{1}{(2\pi)^{q(T+1)/2} \prod_{k=0}^T |\Psi_{\nu_o}(k; \vartheta)|^{1/2}} \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^T \nu_o^T(k) \Psi_{\nu_o}^{-1} \nu_o(k)\right\}. \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

La stima di massima verosimiglianza  $\hat{\vartheta}$  è il vettore che  $\mathcal{L}_{\mathcal{O}_T}(\vartheta)$  che rende massima la (5.1.15). D'altra parte massimizzare  $\mathcal{L}_{\mathcal{O}_T}(\vartheta)$  equivale a minimizzare il suo logaritmo cambiato di segno, eliminando tutte le costanti moltiplicative. Si può pertanto definire

il seguente indice di costo da minimizzare per ottenere la stima di massima verosimiglianza

$$J(\vartheta) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^T \log |\Psi_{\nu_o}(k)| + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^T [y(k) - Du(k) - CBu(k-1) - CA\hat{x}(k-1)]^T \Psi_{\nu_o}^{-1}(k) \cdot \\ \cdot [y(k) - Du(k) - CBu(k-1) - CA\hat{x}(k-1)], \quad (5.1.16)$$

(la dipendenza da  $\vartheta$  è stata omessa per ragioni di spazio).

Algoritmi numerici per la minimizzazione di funzioni di questo tipo possono essere implementati in maniera efficiente. Si noti che le matrici nell'espressione (5.1.16), di cui occorre calcolare i determinanti e le inverse, sono tutte di dimensioni  $q \times q$ . Il calcolo risulta particolarmente facilitato quando l'uscita è scalare.

Per semplificare ulteriormente il calcolo del funzionale di verosimiglianza è possibile operare alcune approssimazioni. Ad esempio è possibile considerare le matrici di covarianza delle innovazioni *a regime*

$$\Psi_{\nu_o}(\infty; \vartheta) = C(\vartheta)P_p(\infty; \vartheta)C(\vartheta) + G(\vartheta)G^T(\vartheta); \quad (5.1.17)$$

in modo da avere il funzionale semplificato

$$\bar{J}(\vartheta) = \frac{(T+1)}{2} \log |\Psi_{\nu_o}(\infty)| + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^T [y(k) - Du(k) - CBu(k-1) - CA\hat{x}(k-1)]^T \Psi_{\nu_o}^{-1}(\infty) \cdot \\ \cdot [y(k) - Du(k) - CBu(k-1) - CA\hat{x}(k-1)]. \quad (5.1.18)$$

Questa semplificazione trova corretta applicazione quando si voglia impiegare per la stima le osservazioni non a partire da 0 ma da un istante  $k_0$  sufficientemente elevato da poter considerare a regime le equazioni di Riccati.

Una volta calcolata la stima di massima verosimiglianza  $\hat{\vartheta}$  del vettore di parametri, la stima ottima dello stato si ottiene utilizzando il filtro di Kalman, utilizzando le matrici del sistema (5.1.1) valutate in  $\hat{\vartheta}$ .

Anche se la formulazione del problema utilizzando le innovazioni dell'uscita risulta più semplice rispetto alla formulazione nello spazio delle osservazioni, in generale gli algoritmi numerici per la ricerca del massimo della funzione  $J(\vartheta)$  possono essere molto complessi e non adatti ad una implementazione in linea.

Algoritmi di stima più efficienti possono essere ottenuti adottando delle semplificazioni. Ad esempio, si osservi che al crescere di  $T$  aumenta la dimensione del vettore delle innovazioni  $\mathcal{O}_T$ , e pertanto aumenta il numero di calcoli che occorre eseguire per ricavare la stima ottima di  $\vartheta$ . Anche la memoria richiesta all'elaboratore aumenta con l'avanzare del tempo. Pertanto nella letteratura scientifica si è cercato di introdurre opportune semplificazioni al fine di ottenere una implementazione ricorsiva della stima dei parametri, ovvero che consenta di esprimere la stima ottima all'istante  $T+1$  in funzione della stima all'istante  $T$ , dell'osservazione all'istante  $T$  e, eventualmente, di un numero limitato di osservazioni dell'uscita precedenti l'istante  $T$ .

## 5.2 Stima di stato e parametri con il filtro di Kalman Esteso

Un algoritmo non rigoroso, ma che in molti casi fornisce buoni risultati, per la stima simultanea di stato e parametri è il filtro di Kalman Esteso applicato ad un'opportuna estensione del sistema lineare in esame. Si consideri nuovamente il sistema lineare (5.1.1) in cui le sole matrici  $A, B, C$  e  $D$  dipendono da un vettore di parametri incogniti  $\vartheta$ . Il vettore di parametri, pur essendo costante, può essere annoverato tra le variabili di stato del sistema, definendo opportunamente la funzione di transizione  $\vartheta(k+1) = \vartheta(k)$ . È

possibile così creare uno stato esteso

$$x_e(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \vartheta(k) \end{bmatrix}$$

ed un sistema esteso

$$\begin{aligned} x_e(k+1) &= f_e(x_e(k), u(k), k) + F_e(k)N_k, & F_e(j)G^T(k) &= 0, \\ y(k) &= h_e(x_e(k), u(k), k) + G(k)N_k, & \forall j, k, \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

in cui

$$\begin{aligned} f_e(x_e(k), u(k), k) &= \begin{bmatrix} A(\vartheta(k))x(k) + B(\vartheta(k))u(k) \\ \vartheta(k) \end{bmatrix}, \\ h_e(x_e(k), u(k), k) &= C(\vartheta(k))x(k) + D(\vartheta(k))u(k), \\ F_e(k) &= \begin{bmatrix} F(k) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Il sistema esteso, non lineare, ha esattamente lo stesso comportamento del sistema lineare originario ammesso che  $\vartheta(0)$  sia correttamente inizializzato al valore vero del vettore di parametri.

L'applicazione del filtro di Kalman Esteso al sistema esteso (5.2.1) fornisce ad ogni istante  $k$  una stima dell'intero vettore di stato esteso  $x_e(k)$ , e quindi fornisce simultaneamente la stima dello stato  $\hat{x}(k|k)$  ed la stima del vettore di parametri  $\hat{\vartheta}(k|k)$ .

**Osservazione 5.2.1** – Utilizzando lo stesso accorgimento il filtro di Kalman Esteso può essere applicato anche per la stima simultanea di stato e parametri in sistemi non lineari del tipo

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k), \vartheta, k) + F(k)N_k, & F(j)G^T(k) &= 0, \\ y(k) &= h(x(k), u(k), \vartheta, k) + G(k)N_k, & \forall j, k, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Con la stessa definizione di stato esteso  $x_e(k) = [x^T(k), \vartheta^T(k)]^T$  si ha nuovamente un sistema non lineare con la struttura (5.2.1), ma

con la seguente definizione per le funzioni  $f_e(\cdot)$ ,  $h_e(\cdot)$  e per la matrice  $F_e(k)$

$$\begin{aligned} f_e(x_e(k), u(k), k) &= \begin{bmatrix} f(x(k), u(k), \vartheta(k), k) \\ \vartheta(k) \end{bmatrix}, & F_e(k) &= \begin{bmatrix} F(k) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ h_e(x_e(k), u(k), k) &= h(x(k), u(k), \vartheta(k), k). \end{aligned}$$

△

**Esempio 5.2.2** – Dato un sistema lineare e stazionario del secondo ordine strettamente proprio si vuole stimare la risposta impulsiva  $w(k)$  a partire dalla conoscenza dell'ingresso  $u(k)$  e dell'uscita osservata  $y(k)$ .

Date le ipotesi la risposta impulsiva può senz'altro essere scritta come

$$w(k) = \begin{cases} 0 & \text{per } k = 0, \\ R_1 a_1^k + R_2 a_2^k & \text{per } k \geq 1. \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Una realizzazione per il sistema in esame è data dalla forma diagonale

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}, \\ C &= [1 \quad 1] \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Assumendo rumori indipendenti per ciascuna componente dello stato e sull'uscita, si ha

$$F = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = [0 \quad 0 \quad \sigma_3], \quad (5.2.5)$$

in cui le deviazioni standard sono note.

Definendo il vettore di parametri  $\vartheta$  come

$$\vartheta = [a_1 \quad a_2 \quad R_1 \quad R_2]^T \quad (5.2.6)$$

e lo stato esteso come

$$x_e = [x_1 \quad x_2 \quad \vartheta_1 \quad \vartheta_2 \quad \vartheta_3 \quad \vartheta_4], \quad (5.2.7)$$

si ha

$$f_e(x_e, u) = \begin{bmatrix} \vartheta_1 x_1 + \vartheta_3 u \\ \vartheta_2 x_2 + \vartheta_4 u \\ \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.2.8)$$

$$h_e(x_e) = x_1 + x_2, \quad G = [0 \quad 0 \quad \sigma_3].$$

Le matrici

$$\bar{A}(x_e) \triangleq \frac{\partial f_e}{\partial x_e}, \quad \bar{C}(x_e) \triangleq \frac{\partial h_e}{\partial x_e}, \quad (5.2.9)$$

sono date da

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & 0 & x_1 & 0 & u & 0 \\ 0 & \vartheta_2 & 0 & x_2 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$\bar{C} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \quad (5.2.10)$$

Si supponga ora di avere ulteriori informazioni sul sistema. Ad esempio da prove sperimentali si è ricavato che a regime la risposta al gradino unitario vale  $y(\infty) = 2$ . La trasformata  $z$  della risposta al gradino vale

$$Y(z) = \left( \frac{R_1}{z - a_1} + \frac{R_2}{z - a_2} \right) \frac{z}{z - 1} \quad (5.2.11)$$

e la condizione sulla risposta a regime si traduce in

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{R_1}{z - a_1} + \frac{R_2}{z - a_2} \right) z, \quad (5.2.12)$$

e quindi

$$\frac{R_1}{z - a_1} + \frac{R_2}{z - a_2} = 2 \quad \Rightarrow \quad R_2 = (1 - a_2) \left( 2 - \frac{R_1}{1 - a_1} \right). \quad (5.2.13)$$

Definendo il vettore di parametri  $\vartheta = [a_1 \ a_2 \ R_1]^T$  si ha

$$R_2(\vartheta) = (1 - \vartheta_2) \left( 2 - \frac{\vartheta_3}{1 - \vartheta_1} \right). \quad (5.2.14)$$

Lo stato esteso ora ha dimensione minore, e la funzione di transizione  $f_e$  è pari a

$$f_e(x_e, u) = \begin{bmatrix} \vartheta_1 x_1 + \vartheta_3 u \\ \vartheta_2 x_2 + R_2(\vartheta) u \\ \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $\bar{A}(x_e)$  è ora pari a

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & 0 & x_1 & 0 & u \\ 0 & \vartheta_2 & \frac{\partial R_2}{\partial \vartheta_1} u & x_2 + \frac{\partial R_2}{\partial \vartheta_2} u & \frac{\partial R_2}{\partial \vartheta_3} u \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.2.15)$$

# Indice analitico

- algebra degli eventi, 22
- atomi, 23
- coefficiente di correlazione, 45
- coefficienti di Markov, 198
- collezione di eventi, 21
- consistenza di una stima, 147, 199
- convergenza
  - debole, 79
  - in media di ordine  $p$ , 77
  - in media quadratica, 77
  - in probabilità, 76
  - limitata, 79
  - quasi certa o quasi ovunque, 74
  - correlazione, 44
  - co-stato, 307
  - covarianza, 44
  - covarianza dell'errore di stima, 246, 249
- densità
  - condizionata, 111
  - di probabilità, 38
  - gaussiana, 64
  - marginale, 58
- derivata di Radon-Nikodym, 187, 92, 138
- deviazione standard, 35
- diseguaglianza
  - di Cauchy-Schwarz, 46, 70
  - di Chebyshev, 72
  - di Hlder, 69
  - di Jensen, 71
  - di Minkowski, 70
- distanza, 18
- distribuzione
  - binomiale, 47
  - congiunta, 57
  - di Cantor, 55
  - di Poisson, 49
  - gaussiana o normale, 50
  - marginale, 57
- efficienza di una stima, 145
- equazione
  - di misura, 186
  - di Riccati, 249
  - di Riccati algebrica, 273
- esperimento, 190
- eventi indipendenti, 39
- evento certo e evento impossibile, 24
- filtraggio, 217
- filtraggio quadratico, 333
- filtrazione, 221
- filtro di Kalman
  - algoritmo 1K, 247
  - algoritmo 2K, 249
  - asintoticamente ottimo, 269
  - matrice di guadagno, 237, 244, 249
- filtro di Kalman Estesio, 320, 323, 346
- forgetting factor, 332
- funzionale di verosimiglianza, 137, 341, 344
- funzione
  - caratteristica, 27
  - continua, 21
  - semplice, 29
  - di distribuzione, 36
- indipendenza di variabili aleatorie, 42
- indistinguibilit dei parametri, 190
- ingresso persistentemente eccitante, 200
- insiemi
  - aperti, 20
  - di Borel, 26
  - misurabili, 23
- integrale
  - di Lebesgue-Stieltjes, 30
  - di Stieltjes, 37
- interpolatore, 311, 314
- interpolazione, 217, 302
- limite in misura, 76
- limite inferiore di Cramer-Rao, 144
- matrice di covarianza, 61
- matrice di informazione di Fisher, 144
- media armonica, 156
- minimi quadrati ricorsivi, 325, 333
- misura di probabilità, 21, 23
- misura positiva, 29
- misure assolutamente continue, 88, 139
- momenti di varabili aleatorie
  - assoluti e centrati di ordine  $p$ , 68
  - momenti centrati del secondo ordine, 35
- norma, 18
- ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, 233
- polarizzazione di una stima, 144, 146
- predittore di Kalman, 256
- predizione, 217, 229
- probabilità
  - condizionata, 105, 108
  - congiunta, 57
- prodotto di Kronecker, 168, 334
- prodotto scalare, 19
- proiezione ortogonale, 82, 113
- pseudoinversa, 120, 152
- rapporto di verosimiglianza, 138
- rilevabilità, 262
- rumore bianco standard, 315
- scomposizione di Hahn, 86
- sequenza bianca, 184
- sequenza gaussiana bianca standard, 223
- sequenze di innovazione, 225
- sigma algebra
  - di Borel, 26
  - di eventi, 22
  - banale e totale, 24
- sistema di sensibilità, 200
- sistema Hamiltoniano, 308
- smoothing, 302, 311, 314
- spazi
  - di Banach, 19
  - di Hilbert, 19
  - di Hilbert di variabili aleatorie, 79
  - di misura, 23, 29
  - lineari o vettoriali, 18
  - metrici, 18
  - normati, 19
  - topologici, 20
- spazio degli eventi, 21
- spazio di probabilità, 23
- stabilizzabilità, 265
- stati  $A$ -stabili e  $A$ -instabili, 261
- stima
  - ai minimi quadrati, 119, 155, 188
  - di Markov, 155
  - di massima verosimiglianza, 136, 138
  - di minima varianza, 124, 162
  - lineare ottima, 134, 175
  - simultanea di stato e parametri, 339
- stime
  - centrate, 146
  - stime subottime e polinomiali, 164
- teorema
  - di Bayes, 111
  - di Cramer-Rao, 143
  - di equivalenza (Mitter), 231
  - di Proiezione, 113
  - di Radon-Nikodym, 88
- terna statistica, 137, 340
- valore atteso, medio, sperato, 34
- valore sperato condizionato, 95, 97, 124
- variabile aleatoria, 26
- variabili aleatorie
  - gaussiana, 51
  - indipendenti, 42
  - scorrelate, 46
- varianza, 35, 63
- vettore aleatorio, 57
- vettore aleatorio gaussiano, 64