DM 3 | GAVRILOV MISHA

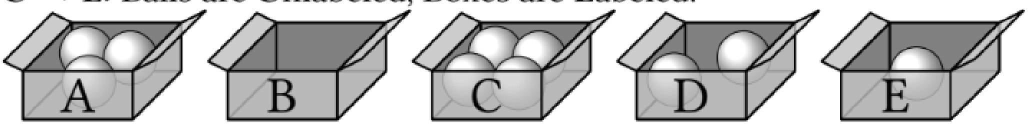
Опять же альтернативная ссылка на просмотр <u>решений</u>(из-за проблем с форматом при конвертации из notion в pdf).

Task 1

1. One of the classical combinatorial problems is counting the number of arrangements of n balls into k boxes. There are at least 12 variations of this problem: four cases (a–d) with three different constraints (1–3). For each problem (case+constraint), derive the corresponding generic formula. Additionally, pick several representative values for n and k and use your derived formulae to find the numbers of arrangements. Visualize several possible arrangements for the chosen n and k.

1a)

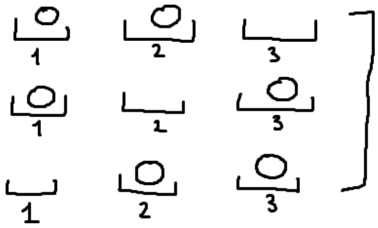
a. **U** $\to$ **L**: Balls are **U**nlabeled, Boxes are **L**abeled.



1. ≤ 1 ball per box — *injective* mapping.

$n \leq k$, общая формула: $\binom{k}{n}$

Возьмём $k=3$ и $n=2$



3 вар-та $= \binom{3}{2} = 3$

1b)

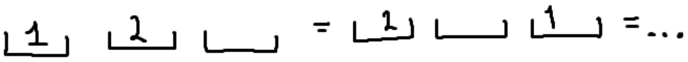
b. **L** $\to$ **U**: Balls are **L**abeled, Boxes are **U**nlabeled.

1. ≤ 1 ball per box — *injective* mapping.

$n \leqslant k$

Так как у нас все коробки одинаковые, а в каждую мы можем положить не более 1 шара. То у нас есть всего 1 способ положить n шаров в k коробок (так как мы можем их переставлять)

Пример: $k=3$ и $n=2$ 1 вариант



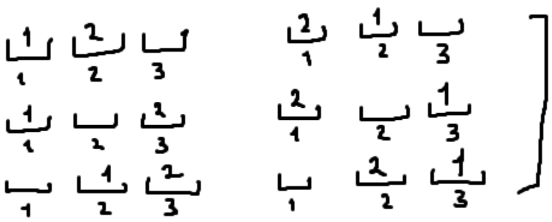
1c)

c. **L** → **L**: Balls are **L**abeled, Boxes are **L**abeled.

1. ≤ 1 ball per box — *injective* mapping.

$n \leqslant k$, общая формула: $P(k,n) = \dfrac{k!}{(k-n)!}$

Пример: $k=3$ и $n=2$ $P(3,2) = \dfrac{3!}{1!} = 6$



6 вар-ов

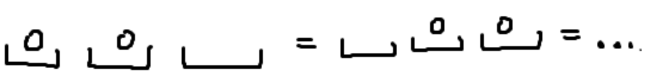
1d)

d. **U** → **U**: Balls are **U**nlabeled, Boxes are **U**nlabeled.

1. ≤ 1 ball per box — *injective* mapping.

Аналогично пункту 1b всего 1 способ, так как мы можем переставлять коробки.

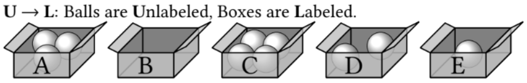
При $k=3$ и $n=2$



2a)

2. ≥ 1 ball per box — *surjective* mapping.

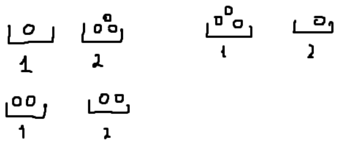
a. **U** → **L**: Balls are **U**nlabeled, Boxes are **L**abeled.



n - 1 мест для перегородки
k - 1 надо выбрать

=> Общая формула: $\binom{n-1}{k-1}$

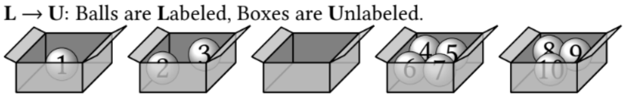
Пример: k = 2 n = 4 => $\binom{3}{1} = 3$



2b)

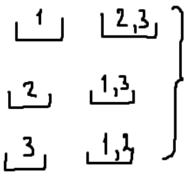
2. ≥ 1 ball per box — *surjective* mapping.

b. **L** → **U**: Balls are **L**abeled, Boxes are **U**nlabeled.



Общая формула : $\left\{ n \atop k \right\}$ - число Стирлинга 2 рода.

Пример: k = 2 n = 3 $\left\{ 3 \atop 2 \right\} = 3$

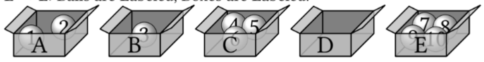


= 3

2c)

2. ≥ 1 ball per box — *surjective* mapping.

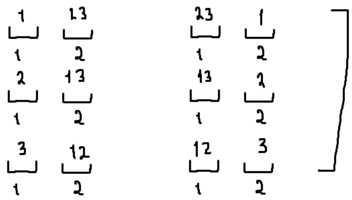
c. **L** ⟶ **L**: Balls are **L**abeled, Boxes are **L**abeled.



Общая формула:

$k! \left\{ n \atop k \right\}$, так как мы хотим переставлять коробки местами.

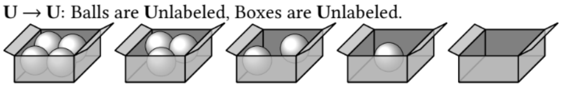
Пример: $k=2$ $n=3$ $2! \left\{ 3 \atop 2 \right\} = 6$



2d)

2. ≥ 1 ball per box — *surjective* mapping.

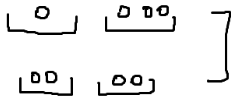
d. **U** ⟶ **U**: Balls are **U**nlabeled, Boxes are **U**nlabeled.



Отсортируем все коробки по кол-ву шаров в них. Тогда мы свели задачу к Partition function: $n = a_1 + \dots a_k$; $a_1 \geq \dots \geq a_k$

Общая формула: $P_k(n)$

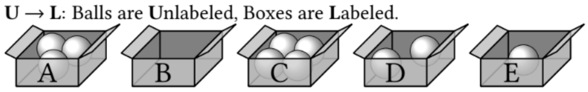
Пример: $k=2$ $n=4$

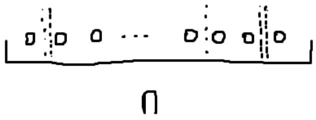


3a)

3. Arbitrary number of balls per box.

a. **U** → **L**: Balls are **U**nlabeled, Boxes are **L**abeled.



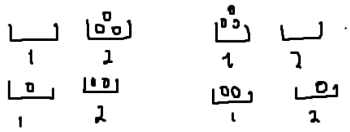


$n+k-1$ - объектов всего

n - выбрать

Общая формула: $\binom{n+k-1}{n}$

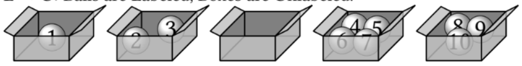
Пример: $k=2$ $n=3$ $\binom{4}{3}=4$



3b)

3. Arbitrary number of balls per box.

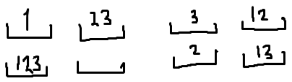
b. **L** → **U**: Balls are **L**abeled, Boxes are **U**nlabeled.



Пусть у нас есть i коробок в которых n мячей. Тогда в таком случае формула: $\left\{ {n \atop k-i} \right\}$ (как в 2b)

Тогда общая формула: $\sum_{i=0}^{k} \left\{ {n \atop k-i} \right\}$

Пример: $k=2$ $n=3$ $\left\{ {3 \atop 2} \right\} + \left\{ {3 \atop 1} \right\} + \left\{ {3 \atop 0} \right\} = 4$



3c)

3. Arbitrary number of balls per box.

c. **L** → **L**: Balls are **L**abeled, Boxes are **L**abeled.

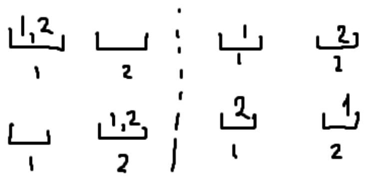
① — k вар-ов

② - k - вар-ов

...

Общая формула: K^n

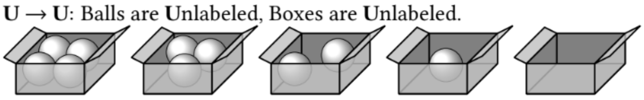
Пример: $k = 2$ $n = 2$ => $2^2 = 4$



3d)

3. Arbitrary number of balls per box.

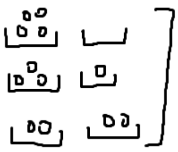
d. **U** → **U**: Balls are **U**nlabeled, Boxes are **U**nlabeled.



Пусть у нас есть i коробок, в которые 0 мячей. Тогда в таком случае формула: $P_{k-i}(n)$

Тогда общая формула: $\sum_{i=0}^{k} P_{k-i}(n)$

Пример: $k=2$ $n=4$



= 3

Task 2

2. How many different passwords can be formed using the following rules?
   * The password must be exactly 8 characters long.
   * The password must consist only of Latin letters (a-z, A-Z) and Arabic digits (0-9).
   * The password must contain at least 2 digits (0-9) and at least 1 uppercase letter (A-Z).
   * Each character can be used no more than once in the password.

   How long does it take to crack such a password?

Всего: 10 цифр, 26 букв в нижнем регистре, 26 букв в верхнем регистре.

Посчитаем общее количество паролей без ограничений: $\frac{62!}{54!}$. Далее вычтем из этого количества все пароли не удовлетворяющие ограничениям, то есть пароли в которых есть 0 цифр, 1 цифра, 0 заглавных букв: $\frac{52!}{44!}, \frac{52!}{45!} \cdot 10 \cdot 8, \frac{36!}{28!}$. Но заметим, что мы учли пароли, содержащие 0 цифр и 0 заглавных букв, а также 1 цифру и 0 заглавных букв два раза, вернем их обратно: $\frac{26!}{18!}, \frac{26!}{19!} \cdot 80$.

Тогда общее количество возможных паролей будет: $\frac{62!}{54!} - (\frac{52!}{44!} + \frac{52!}{45!} \cdot 80 + \frac{36!}{28!}) + \frac{26!}{18!} + \frac{26!}{19!} \cdot 80 = 136325893334400 - (30342338208000 + 674274182400 \cdot 80 + 1220096908800) + 62990928000 + 3315312000 \cdot 80 = 51149739513600$

Допустим, взламывающая программа обрабатывает 10^8 паролей в секунду, тогда ей потребуется $511497 sec = 8524 min = 142 hr$.

Task 3

3. Find the number of different 5-digit numbers using digits 1–9 under the given constraints. For each case, provide examples of numbers that comply and do not comply with the constraints, and derive a generic formula that can be applied to other values of n (total available digits) and k (number of digits in the number). Express the formula using standard combinatorial terms, such as k-combinations C_n^k and k-permutations $P(n, k)$.

a)

(a) Digits *can* be repeated.

У нас есть 5 позиций, в каждой из которой может быть число от 1 до 9, тогда всего 9^5 вариантов 5-значных чисел. Для k-значных чисел с цифрами от 1 до n всего n^k.

Пример соответствующего числа :

11111, несоответствующего : 11101

b)

(b) Digits *cannot* be repeated.

Нам нужно выбрать 5 цифр из 9 без повторений. Тогда всего : $P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ вариантов. При $n = 9$ и $k = 5$ $P(n, k) = \frac{9!}{4!} = 15120$.

Пример соответствующего числа : 12345, несоответствующего : 11111.

c)

(c) Digits *can* be repeated and must be written in *non-increasing*[1] order.

Рассмотрим порядок : 987654321. Будем расставлять перегородки так, что поставленная перегородка значит, что мы берем цифру слева от нее. Перегородки можно ставить между цифрами и в конце. Тогда всего есть 13 мест для перегородок и 5 перегородок и количество способов : $\binom{13}{5} = 1287$. Общая формула : $\binom{n+k-1}{k}$.

Пример соответствующего числа : 98766, несоответствующего : 12345.

d)

(d) Digits *cannot* be repeated and must be written in *strictly increasing* order.

Рассмотрим порядок : 123456789. Аналогично предыдущему пункту будем расставлять такие же перегородки. Тогда всего будет 9 мест для них и 5 перегородок, при этом на одно и то же место мы не можем ставить несколько перегородок. Количество способов : $\binom{9}{5} = 126$. Общая формула : $\binom{n}{k}$.

Пример соответствующего числа : 12345, несоответствующего : 98766.

e)

(e) Digits *cannot* be repeated and the sum of the digits must be even.

Сумма всех цифр числа будет четной, если количество нечетных цифр - четно.

Тогда формула будем иметь вид: $\sum\limits_{i=0,(k-i)\%2=0}^{k} \binom{k}{i} P(|even|, i) P(|odd|, k-i)$, где $[\frac{n}{2}] = |even|$ - количество четных цифр в наборе, $n - [\frac{n}{2}] = |odd|$ - количество нечетных цифр в наборе. То есть мы берем все такие i (количество четных цифр), когда количество мест для нечетных цифр четное, затем выбираем на какие позиции расставить четные цифры(на оставшиеся места пойдут нечетные цифры) и расставляем на соответствующие позиции сначала четные, а затем нечетные.
Код на
$Python$, считающий количество при входных данных n и k.

```
import math

def C(n, k):
    if n < k:
        return 0
```

```
    return math.factorial(n) // math.factorial(k) // math.factorial(n

def P(n, k):
    return C(n, k) * math.factorial(k)

places = int(input())
digits = int(input())

even_size = digits // 2
odd_size = digits - even_size
counter = 0

for i in range(0, places + 1):
    if (places - i) % 2 != 0:
        continue
    counter += C(places, i) * P(even_size, i) * P(odd_size, places - i

print("number of digits:", places)
print("total available digits:", digits)
print(counter)
```

При $n = 9$(общее количество доступных цифр) и $k = 5$(количество цифр в числе) ответ будет: 7200.

Пример соответствующего числа: 12346, несоответствующего: 12345.

Task 4

4. Let n be a positive integer. Prove the following identity using a combinatorial argument:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$$

Рассмотрим левую часть:

$\binom{n}{k}$ значит, что мы строим различные комбинации размера k из n элементов. Тогда для одной такой комбинации мы можем выбрать “лидера” k способами, а $k\binom{n}{k}$ обозначает количество способов выбрать уникальную пару из лидера и комбинации размера k. А сумма этих произведений обозначает общее количество способов выбрать уникальную пару из лидера и комбинации размера не более n.

Рассмотрим правую часть:

Поймем, что значит 2^{n-1}. Рассмотрим битмаску размера $n - 1$, пусть если в каком-то разряде стоит 1, то мы берем этот элемент в комбинацию, иначе не берем. Тогда 2^{n-1} обозначает общее количество таких битмасок, то есть общее количество способов составить комбинации размера не более $n-1$, а также лидера для нее мы можем добавить n способами.

Таким образом левая и правая часть обозначают одинаковые вещи.

Task 5

5. Let r, m, n be non-negative integers. Prove the following identity using a combinatorial argument:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$$

Пусть m - кол-во чётных чисел, n - кол-во нечётных чисел.
Мы хотим выбрать r чисел (не смотря на чётность).

Рассмотрим левую часть

Она значит как раз то, что у нас есть набор из $m+n$ чисел и мы хотим выбрать из него комбинацию размера r. То есть $\binom{m+n}{r}$

Рассмотрим правую часть

Мы берём k чётных чисел, тогда останется $r-k$ нечётных чисел. Кол-во способов сделать это $= \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$. Если k идёт от 0 до r и мы просуммируем результаты, то мы получим общее кол-во способов выбрать r чисел из $m+n$, то есть $\binom{m+n}{r}$.

∎

Task 6

6. Prove the Generalized Pascal's Formula (for $n \ge 1$ and $k_1, \ldots, k_r \ge 0$ with $k_1 + \cdots + k_r = n$):

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{k_1, \ldots, k_i - 1, \ldots, k_r}$$

$$\binom{n}{k_1 \ldots k_r} = \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} \quad ✓$$

$$\sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{k_1, \ldots k_i - 1 \ldots, k_r} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n-1)!}{k_1! \ldots (k_i-1)! \ldots k_r!} = \sum_{i=1}^{r} \frac{k_i (n-1)!}{k_1! \ldots k_r!} = (k_1 + \ldots + k_r) \frac{(n-1)!}{k_1! \ldots k_r!} =$$

$$= \frac{n(n-1)!}{k_1! \ldots k_r!} = \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} \quad ✓$$

Task 7

7. Find the coefficient of $x^5 y^7 z^3$ in the expansion of $(x+y+z)^{15}$.

$(x+y+z)^n = \sum_{0 \le k_1 \ldots \le k_r \le n, k_1+\ldots+k_r=n} \binom{n}{k_1,\ldots,k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}$. Тогда коэффициент будет : $\binom{15}{5,7,3} = \frac{15!}{5!7!3!} = 360360$.

Task 8

8. Count the number of permutations of the multiset $\Sigma^* = \{2 \cdot \triangle, 3 \cdot \square, 1 \cdot$ 🐈$\}$.

Всего у нас 6 элементов, из которых треугольник повторяется 2 раза, квадрат повторяется 3 раза, котик 1 раз. Тогда мы можем переставлять их $2!$, $3!$ и $1!$ способами.

Тогда общее количество : $\frac{(2+3+1)!}{2!3!1!} = \frac{6!}{2!3!} = 60$.

Task 9

9. A *non-crossing perfect matching* in a graph is a set of pairwise disjoint edges that cover all vertices and do not intersect with each other. For example, consider a graph on $2n$ vertices numbered from 1 to $2n$ and arranged in a circle. Additionally, assume that edges are straight lines. In this case, edges $\{i, j\}$ and $\{a, b\}$ intersect whenever $i < a < j < b$.

a)

(a) Count the number of all possible non-crossing perfect matchings in a complete graph K_{2n}.

(*) Если мы опишем окружность вокруг нашего графа и соединим две вершины, то есть проведем хорду, то наша окружность разобьется на две половины, при этом каждая должна содержать четное число вершин, иначе произойдет пересечение хорд, что противоречит условию.

Тогда обозначим за $P(k)$ - количество **(+)** в полном графе размера $2k$. **(+)** в графе размера $2k$ состоит из k ребер.
Рассмотрим изначальный граф
K_{2n}. Если мы проведем хорду, удовлетворяющую **(*)**, то граф разделится на 2 части размеров: $2k$ и $2n-2k-2 = 2(n-k-1)$, количество ребер в **(+)** будет равно: k и $n-k-1$, а способов выделить **(+)** будет: $P(k)$ и $P(n-k-1)$.

Тогда мы можем выразить общее количество рекуррентно. При этом $k \in [0, n)$, тогда имеем $P(n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(k)P(n-k-1)$.

Где $P(0) = 1, P(1) = 1$.

(+) = **идеальное-непересекающееся паросочетание**

`#define идеальноенепересекающеесяпаросочетание (+)`

b)

(b) Consider a graph on vertices labeled with letters from {A, C, G, U}. Each pair of vertices labeled with A and U is connected with a *basepair edge*. Similarly, C–G pairs are also connected. The picture below illustrates some of possible non-crossing perfect matchings in the graph with 12 vertices AUCGUAAUCGCG arranged in a circle. Basepair edges are drawn dashed gray, matching is red.

Применим здесь аналогичные рассуждения пункту **a**, но будем проверять связность двух вершин через *basepair edge* перед тем как добавить в **(+)**.

```
#include <iostream>
#include <string>

static const std::string kGraph = "CGUAAUUACGGCAUUAGCAU";

bool isBasePair(char a, char b) {
    if (a > b) {
        std::swap(a, b);
    }
    if (a == 'A' && b == 'U') {
        return true;
    }
    if (a == 'C' && b == 'G') {
        return true;
    }
    return false;
}

size_t Calculate(size_t start, size_t finish) {
    if (start >= finish) {
        return 1;
    }
    size_t result = 0;
    for (size_t i = start + 1; i < finish + 1; i += 2) {
        if (!isBasePair(kGraph[start], kGraph[i])) {
            continue;
        }
        result += Calculate(start + 1, i - 1) * Calculate(i + 1, finis
    }
    return result;
}
```

```
int main() {
    std::cout << Calculate(0, kGraph.size() - 1);
    return 0;
}
```

Ответ будет равен 21.

Task 10

10. How many integer solutions are there for each given equation?

a)

(a) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $x_i \geq 0$

$$\underbrace{1 \,\vdots\, 1 \quad \vdots\, 1 \; \dots \; 1}_{20}$$

Надо расставить 2 перегородки.
Всего $20 + 2 = 22$ места.
Выбрать 20 мест, остальные займут перегородки.
Итого: $\binom{n+k-1}{n} = \binom{20+3-1}{20} = \binom{22}{20} = \underline{231}$

b)

(b) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $x_i \geq 1$

$$\underbrace{1 \,\vdots\, 1 \; 1 \dots \vdots\, 1 \,\vdots\, 1}_{20}$$

19 мест для перегородок.
Надо выбрать 2
Итого $\binom{19}{2} = 171$

c)

(c) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $x_i \geq 5$

Пусть $a_i = x_i - 5$. Тогда $a_i \geq 0$

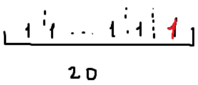
$a_1 + 5 + a_2 + 5 + a_3 + 5 = 20$

$a_1 + a_2 + a_3 = 5$, $a_i \geq 0$

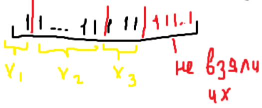
Тогда аналогично пункту a общее кол-во: $\binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{5} = \underline{21}$

d)

(d) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$, where $x_i \geq 0$



Расставим 3 перегородки, каждая из которых показывает крайнюю 1, которую мы взяли. То есть все, что находится левее перегородки, до другой перегородки или начала принадлежит x_i. Пример



Тогда всего надо расставить 3 перегородки, всего 23 места

Итого: $\binom{23}{3} = \underline{1771}$

e)

(e) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$

По определению Partition function, количество будет $P_3(20)$.

f)

(f) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$

Решим эту задачу аналогично пункту e, для этого рассмотрим три случая: когда среди чисел 0 нулей, 1 ноль, 2 нуля(3 не может быть, так как тогда бы сумма была = 0). Затем найдем сумму количества решений этих ситуаций и получим ответ.

1. 0 нулей, в этом случае $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ и $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Тогда, количество решений равно $P_3(20)$.
2. 1 ноль, в этом случае $x_1 = 0$(если бы $x_2 = 0$, а $x_1 \leq x_2$, то $x_1 = x_2 = 0$, а у нас должен быть всего один 0). Тогда $x_2 + x_3 = 20$ и $1 \leq x_2 \leq$

x_3. В этом случае количество решений равно $P_2(20)$.

3. 2 нуля, в этом случае $x_1 = x_2 = 0$(аналогично рассуждениям в пункте 2). Тогда $x_3 = 20$. То есть всего 1 решение.

Тогда всего $P_3(20) + P_2(20) + 1$ решений.

g)

$$\text{(g) } x_1 + x_2 + x_3 = 20, \text{ where } 0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le 10$$

Решим задачу методом полного перебора:

$\{(0,10,10),(1,9,10),(2,8,10),(2,9,9),(3,7,10),(3,8,9),(4,6,10),(4,7,9),(4,8,8),$
$(5,5,10),(5,6,9),(5,7,8),(6,6,8),(6,7,7)\}$

Всего получили 14 решений.

h)

$$\text{(h) } x_1 + x_2 + x_3 = 5, \text{ where } -5 \le x_i \le 5$$

Пусть $a_i = x_i + 5$, то есть $x_i = a_i - 5$ и $0 \le a_i \le 10$.

$x_1 + x_2 + x_3 = (a_1 - 5) + (a_2 - 5) + (a_3 - 5) = 5$

$a_1 + a_2 + a_3 = 20$ и $0 \le a_i \le 10$.

Тогда для начала найдем количество решений при $a_i \ge 0$, а затем вычтем решения в которых есть $a_i > 10$. При этом количество $a_i \ge 11$ не может быть больше одного, так как иначе сумма > 20.

Количество решений для $a_i \ge 0$ равно $\binom{20+3-1}{20} = 231$.

Найдем количество решений при существующем $a_i \ge 11$. Тогда заметим, что если мы выбираем $a_i = b$, где $b \in [11, 20]$, то нам надо посчитать количество решений для оставшихся двух чисел с суммой $20 - b$, и оно будет равно $20 - b + 1$(так как мы можем перебрать все варианты первого числа от 0 до $20 - b$, а второе выберется автоматически).

Тогда найдем $\sum\limits_{i=11}^{20} 20 - i + 1 = 10 + 9 + ... + 2 + 1 = 11 \cdot 10/2 = 55$. Но при этом у нас есть 3 варианта выбрать число > 10, тогда общее количество будет равно $55 \cdot 3 = 165$.

Вычтем это из количества решений без ограничения на максимальную границу числа и получим $231 - 165 = 66$.

Task 11

11. Consider three dice: one with 4 faces, one with 6 faces, and one with 8 faces. The faces are numbered 1 to 4, 1 to 6, and 1 to 8, respectively. Find the probability of rolling a total sum of 12.

$x_1 + x_2 + x_3 = 12$, $1 \le x_1 \le 4, 1 \le x_2 \le 6, 1 \le x_3 \le 8$, где x_i - число, выпавшее на i игральной кости.

Пусть $a_i = x_i - 1$, тогда $a_1 + a_2 + a_3 = 9$, где $0 \le a_1 \le 3, 0 \le a_2 \le 5, 0 \le a_3 \le 7$.

1. Если $a_1 = 0$, то $a_2 + a_3 = 9$, то есть решения $(2,7),(3,6),(4,5),(5,4)$.
2. Если $a_1 = 1$, то $a_2 + a_3 = 8$, то есть решения $(1,7),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3)$.
3. Если $a_1 = 2$, то $a_2 + a_3 = 7$, то есть решения $(0,7),(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2)$.
4. Если $a_1 = 3$, то $a_2 + a_3 = 6$, то есть решения $(0,6),(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$.

Тогда вероятность равна $\frac{21}{4 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{21}{192}$

Task 12

12. Let $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Define an *interesting* subset of A as a subset in which no two elements have a difference of 3. Determine the number of interesting subsets of A.

Рассмотрим подмножество $\{1,4,7,10\}$, оно является плохим. Рассмотрим его плохие подмножества:
$\{1,4\},\{4,7\},\{7,10\},\{1,4,7\},\{1,4,10\},\{1,7,10\},\{4,7,10\}$, тогда все остальные его подмножества будут хорошими, их количество $2^4 - 8 = 8$.

Аналогично проделаем с другими плохими подмножествами исходного: $\{2,5,8,11\}$ и $\{3,6,9,12\}$. Каждый из них аналогично будет иметь 8 плохих подмножеств и 8 хороших подмножеств.

Для каждого из этих множеств($\{1,4,7,10\}$,$\{2,5,8,11\}$,$\{3,6,9,12\}$) мы можем выбрать хорошие подмножества и обьединить их, получив при этом хорошее множество(так как элементы из разных множеств не сравнимы по модулю 3). Тогда общее количество будет равно $8^3 = 512$.

Task 13

13. Find the number of ways to arrange five people of distinct heights in a line such that no three consecutive individuals form a strictly ascending or descending height sequence.

Для начала упорядочим всех людей по возрастанию роста, допустим 1-самый низкий, 5-самый высокий.

Всего $5!$=120 вариантов расставить людей.

Возрастающие комбинации:

1. Найдем запрещающие комбинации из 3 людей

   $(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5)$

   $(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5)$

   $(3,4,5)$

   Всего их 10

2. Найдем запрещающие комбинации из 4 людей

   $(1,2,3,4),(1,2,3,5),(1,2,4,5),(1,3,4,5)$

   $(2,3,4,5)$

   Всего их 5

3. Найдем запрещающие комбинации из 5 людей

   $(1,2,3,4,5)$

   Всего 1, но мы учли ее в комбинации из 4 людей.

Убывающие комбинации строятся аналогично возрастающим, но в обратном порядке. Их количество будет аналогичным.

Тогда обобщим эти комбинации для 5 людей. Запрещающие возрастающие последовательности можно расставить на 5 мест в $10 \cdot 3 \cdot 2 = 60$ способах(выбрать начало последовательности из 3 людей и поставить остальных 2). Из 4 людей аналогично в $5 \cdot 2 \cdot 1 = 10$ способах. Из 5 людей только 1 способом. При этом некоторые последовательности мы посчитали несколько раз, нам надо вычесть их. Тогда общее количество возрастающих равно $60 - 10 + 1 - 1 = 50$.

Аналогично для убывающих количество равно 50.

Далее заметим, что мы не учли последовательности, которые сначала возрастают, а затем убывают: $\{12543, 13542, 14532, 23541, 24531, 34521\}$.

Тогда общее количество допускающих последовательностей будет

$120 - 50 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 32$.

Task 14

14. GLaDOS, the mastermind AI, is testing a new batch of first-year students in one of her infamous test chambers. She assigns each test subject a unique number from 1 to n, and then splits the students into k indistinguishable groups. Furthermore, one student in each group is assigned as the group leader. GLaDOS wants to know how many different ways she can arrange the students into groups and select group leaders, so that the students can navigate through the test chambers without getting lost. She calls this arrangement a “GLaDOS Partition”.

    For example, consider $n = 7$ students and $k = 3$ groups. Here are three (out of many!) different partitions, with the group leaders underlined: $(\underline{1} \mid 2\underline{5}67 \mid 3\underline{4})$, $(\underline{1} \mid 25\underline{6}7 \mid \underline{3}4)$, and $(\underline{1} \mid 25\underline{6}7 \mid 3\underline{4})$.

    Let the number of GLaDOS Partitions for n students into k groups, where each group has a designated leader, be denoted as $G(n, k)$. Your task is to find a generic formula and/or recurrence relation for $G(n, k)$ and justify it.

Количество способов выбрать лидеров для k групп: $\binom{n}{k}$.

Осталось $n - k$ студентов. Количество способов разбить $n - k$ студентов на k групп = k^{n-k}.

Тогда: $G(n, k) = \binom{n}{k} \cdot k^{n-k}$.