DM4|Gavrilov Misha

По традиции, альтернативная ссылочка с хорошим форматом.

Task 1

1. For each given recurrence relation, find the first five terms, derive the closed-form solution, and check it by substituting it back to the recurrence relation.

a)

(a) $a_n = a_{n-1} + n$ with $a_0 = 2$

(a) $a_n = a_{n-1} + n$

$$\begin{array}{ccccc} (2, & 3, & 5, & 8, & 12) \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$ – первые 5 эл-ов.

Telescoping

$a_0 = 2$

$a_1 = a_0 + 1$

$a_2 = a_1 + 2 = a_0 + 1 + 2$

$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 2 + 3 = a_0 + 1 + 2 + 3$

$\dots$

Тогда $a_n = a_0 + \sum_{i=1}^{n} i = a_0 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+4}{2}$ – замкн-ая форма

Проверка

$a_n = a_{n-1} + n = \frac{(n-1)n+4}{2} + n = \frac{n^2+n+4}{2} = \frac{n(n+1)+4}{2} = a_n$ ✓

b)

(b) $a_n = 2a_{n-1} + 2$ with $a_0 = 1$

$a_n = 2a_{n-1} + 2, \quad a_0 = 1$

$\underline{(1, 4, 10, 22, 46)}$ – первые 5 эл-ов
0 1 2 3 4

<u>Telescoping</u>

$a_0 = 1$

$a_1 = 2a_0 + 2$

$a_2 = 2a_1 + 2 = 2(2a_0 + 2) + 2 = 4a_0 + 4 + 2$

$a_3 = 2a_2 + 2 = 2(4a_0 + 4 + 2) + 2 = 8a_0 + 8 + 4 + 2$

Тогда:

$$a_n = 2^n a_0 + \sum_{i=}^{n} 2^i = 2^n + \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} + 2^n - 2$$ – замкн-ая ф-ма

Проверка:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2 = 2(2^n + 2^{n-1} - 2) + 2 = 2^{n+1} + 2^n - 2 = a_n$$ V

c)

(c) $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ with $a_0 = 5$

$a_n = 3a_{n-1} + 2^n$

$\underline{(5, 17, 55, 173, 535)}$ – первые 5 эл-ов
0 1 2 3 4

<u>Telescoping</u>

$a_0 = 5$

$a_1 = 3a_0 + 2$

$a_2 = 3(3a_0 + 2) + 4 = 9a_0 + 6 + 4$

$a_3 = 3(9a_0 + 6 + 4) + 8 = 27a_0 + 18 + 12 + 8$

Тогда

$$a_n = 3^n a_0 + \sum_{i=0}^{n-1} 3^i \cdot 2^{n-i} = 3^n \cdot 5 + 2^n + 3^1 2^{n-1} + \ldots + 3^{n-2} 2^2 + 3^{n-1} 2^1$$

$$= 3^n \cdot 5 + 2^n \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \ldots + \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}\right) = 3^n \cdot 5 + 2^n \cdot \frac{1\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{3}{2} - 1}$$

$$= 3^n \cdot 5 + 2^n \cdot 2 \cdot \frac{3^n}{2^n} - 2^n \cdot 2 = 3^n \cdot 5 + 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} = \underline{3^n \cdot 7 - 2^{n+1}}$$

<u>Проверка</u>

$$a_n = 3a_{n-1} + 2^n = 3(3^{n-1} \cdot 7 - 2^n) + 2^n = 3^n \cdot 7 - 2 \cdot 2^n$$

$$= 3^n \cdot 7 - 2^{n+1}$$ V

d)

$$\text{(d)}\quad a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2} \text{ with } a_0 = 1,\ a_1 = 17$$

$a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$

$(\underline{1, 17, 73, 377, 1873})$ - первые 5 эл-ов

$\ \ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

Харак-ое ур-ие:

$\lambda^n - 4\lambda^{n-1} - 5\lambda^{n-2} = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 5$ $\quad \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow a_n = a(-1)^n + b\,5^n$

Тогда:

$$\begin{cases} a_0 = a + b = 1 \\ a_1 = -a + 5b = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = 3 \\ a = -2 \end{matrix} \Rightarrow \underline{a_n = (-1)^n(-2) + 5^n \cdot 3}$$

Проверим

$a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2} = 4\left(-2\cdot(-1)^{n-1} + 5^{n-1}\cdot 3\right) + 5\left(-2\cdot(-1)^{n-2} + 5^{n-2}\cdot 3\right)$

$= -8\cdot(-1)^{n-1} + 12\cdot 5^{n-1} - 10\cdot(-1)^{n-2} + 5^{n-1}\cdot 3 = (-1)^n(8 - 10) + 5^n\left(\frac{12}{5} + \frac{3}{5}\right)$

$= (-1)^n(-2) + 5^n \cdot 3 = a_n$ v

e)

$$\text{(e)}\quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \text{ with } a_0 = 3,\ a_1 = 11$$

$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} = 4(a_{n-1} - a_{n-2})$

$(\underset{0}{3}, \underset{1}{11}, \underset{2}{32}, \underset{3}{84}, \underset{4}{208})$ - первые 5 эл-ов

Харак-ое ур-ие:

$\lambda^n - 4\lambda^{n-1} + 4\lambda^{n-2} = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2 = 0$

$\lambda = 2$, $k = 2$ (кратность) $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \Rightarrow a_n = a2^n + bn2^n$

Тогда

$$\begin{cases} a_0 = a = 3 \\ a_1 = 2a + 2b = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 3 \\ b = \frac{5}{2} \end{matrix} \Rightarrow \underline{a_n = 3 \cdot 2^n + 5n \cdot 2^{n-1}} =$$

Проверка

$a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2}) = 4(3 \cdot 2^{n-1} + 5(n-1)2^{n-2} - 3 \cdot 2^{n-2} - 5(n-2)2^{n-3})$

$= 4(2^{n-2}(3 \cdot 2 + 5(n-1)) - 2^{n-3}(3 \cdot 2 + 5(n-2)))$

$= 2^n(5n+1) - 2^{n-1}(5n-4) = 5n(2^n - 2^{n-1}) + (2^n + 2^{n+1})$

$= 5n \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^n$ V

f)

(f) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ with $a_{0,1,2} = 3, 2, 6$

$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$

$\left(\dfrac{3,\ 2,\ 6,\ 8,\ 18}{0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 4}\right)$ - первые 5 эл-ов

Хар-ое ур-ие:

$\lambda^n - 2\lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} + 2\lambda^{n-3} = 0$

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 1) - 2(\lambda^2 - 1) = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \quad \Rightarrow a_n = a + (-1)^n b + 2^n \cdot c$

$\lambda_3 = 2$

$$\begin{cases} a_0 = a + b + c = 3 \\ a_1 = a - b + 2c = 2 \\ a_2 = a + b + 4c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{a_n = 1 + (-1)^n + 2^n}$$

Проверка

$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3} = 2\left(1 + (-1)^{n-1} + 2^{n-1}\right) + \left(1 + (-1)^{n-2} + 2^{n-2}\right)$

$- 2\left(1 + (-1)^{n-3} + 2^{n-3}\right) = 1 \cdot (2 + 1 - 2) + (-1)^n(-2 + 1 + 2) + 2^n\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)$

$= 1 + (-1)^n + 2^n = a_n$ ✓

Task 2

2. Solve the following recurrences by applying the Master theorem. For the cases where the Master theorem does not apply, use the Akra–Bazzi method. In cases where neither of these two theorems apply, explain why and solve the recurrence relation by closely examining the recursion tree. Solutions must be in the form $T(n) \in \Theta(\ldots)$.

a)

$$\text{(a)}\ T(n) = 2T(n/2) + n$$

В данном виде мы можем применить Мастер теорему: $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$.

Тогда $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = n$, $c_{crit} = \log_2 2 = 1$.

Так как $c = c_{crit}$ и $f(n) \in \Theta(n^{c_{crit}}, log^0 n)$, то выбираем 2 случай Мастер теоремы.

Тогда $T(n) \in \Theta(nlogn)$

b)

$$\text{(b) } T(n) = T(3n/4) + T(n/4) + n$$

В данном виде мы не можем применить Мастер теорему, поэтому применим **Акры-Бацци метод**. $T(n) = f(n) + \sum\limits_{i=1}^{k} a_i T(b_i n + h_i(n))$

$k = 2, a_i = 1, b_1 = \frac{3}{4}, b_2 = \frac{1}{4}, f(n) = n$.

Тогда: $T(n) \in \Theta(n^p \cdot (1 + \int\limits_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx))$. Найдем p: $(\frac{3}{4})^p + (\frac{1}{4})^p = 1$. Левая часть убывает с ростом p, а правая часть - прямая, поэтому существует только одно решение $p = 1$.

$\int\limits_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx = \int\limits_1^n \frac{x}{x^2} dx = \log n$.

$T(n) \in \Theta(n(1 + \log n))$ или $T(n) \in \Theta(n \log n)$.

c)

$$\text{(c) } T(n) = 3T(n/2) + n$$

В данном виде мы можем применить Мастер теорему: $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$.

Тогда $a = 3$, $b = 2$, $f(n) = n$, $c_{crit} = \log_2 3$.

Тогда, так как $c < c_{crit}$, то $T(n) \in \Theta(n^{\log_2 3})$.

d)

$$\text{(d) } T(n) = 2T(n/2) + n/\log n$$

В данном виде мы можем применить Мастер Теорему: $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$.

Тогда $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = \frac{n}{\log n}$, $c_{crit} = \log_2 2 = 1$.

Так как $f(n) \in \Theta(n^{c_{crit}}, log^{-1} n)$, то выбираем **2b** случай Мастер теоремы.

Тогда $T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log\log n) = \Theta(n \log\log n)$.

e)

$$\text{(e)} \quad T(n) = 6T(n/3) + n^2 \log n$$

В данном виде мы можем применить Мастер Теорему: $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$.

Тогда $a = 6$, $b = 3$, $f(n) = n^2 \log n$, $c_{crit} = \log_6 3$.

Так как $c > c_{crit}$, то выбираем 3 случай Мастер теоремы.

Тогда $T(n) \in \Theta(n^2 \log n)$.

f)

$$\text{(f)} \quad T(n) = T(3n/4) + n \log n$$

В данном виде мы можем применить Мастер Теорему: $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$.

Тогда $a = 1$, $b = \frac{4}{3}$, $f(n) = n \log n$, $c_{crit} = \log_{\frac{4}{3}} 1 = 0$.

Так как $c > c_{crit}$, то выбираем 3 случай Мастер теоремы.

Тогда $T(n) \in \Theta(n \log n)$.

g)

$$\text{(g)} \quad T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n$$

В данном виде мы не можем применить Мастер теорему, поэтому применим **Акры-Бацци метод.** Перепишем исходное условие: $T(n) = T(\frac{n}{2} - O(1)) + T(\frac{n}{2} + O(1)) + n$.

$T(n) = f(n) + \sum\limits_{i=1}^{k} a_i T(b_i n + h_i(n))$

$k = 2, a_i = 1, b_i = \frac{1}{2}, f(n) = n$.

Тогда: $T(n) \in \Theta(n^p \cdot (1 + \int\limits_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx))$. Найдем p: $(\frac{1}{2})^p + (\frac{1}{2})^p = 1$. Левая часть убывает с ростом p, а правая часть - прямая, поэтому существует только одно решение $p = 1$. $\int\limits_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx = \int\limits_1^n \frac{x}{x^2} dx = \log n$.

Тогда: $T(n) \in \Theta(n(1+\log n))$ или $T(n) \in \Theta(n \log n)$.

h)

$$\text{(h) } T(n) = T(n/2) + T(n/4) + 1$$

В данном виде мы не можем применить Мастер теорему, поэтому применим **Акры-Бацци метод.**

$T(n) = f(n) + \sum\limits_{i=1}^{k} a_i T(b_i n + h_i(n))$

$k = 2, a_i = 1, b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{4}, f(n) = 1$.

Тогда: $T(n) \in \Theta(n^p \cdot (1 + \int\limits_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx))$. Найдем p: $(\frac{1}{2})^p + (\frac{1}{4})^p = 1$.

Это квадратное уравнение относительно $(\frac{1}{2})^p$: $(\frac{1}{2})^p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Тогда $p = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \log_{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{5}) - 1$. $\int\limits_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx = \int\limits_1^n \frac{1}{x^{\log_{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{5})}} dx = \frac{n^{1-\log_{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{5})}}{1-\log_{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{5})} - \frac{1}{1-\log_{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{5})} = \frac{n^{1-\log_{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{5})} - 1}{1-\log_{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{5})}$.

Тогда: $T(n) \in \Theta(n^{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1+\sqrt{5}}{2}} (1 + \frac{n^{1-\log_{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{5})} - 1}{1-\log_{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{5})}))$.

i)

$$\text{(i) } T(n) = T(n/2) + T(n/3) + T(n/6) + n$$

В данном виде мы не можем применить Мастер теорему, поэтому применим **Акры-Бацци метод.** $T(n) = f(n) + \sum\limits_{i=1}^{k} a_i T(b_i n + h_i(n))$

$k = 3, a_i = 1, b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{6}, f(n) = n$.

Тогда: $T(n) \in \Theta(n^p \cdot (1 + \int\limits_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx))$. Найдем p: $(\frac{1}{2})^p + (\frac{1}{3})^p + (\frac{1}{6})^p = 1$.

Левая часть убывает с ростом p, а правая часть - прямая, поэтому существует только одно решение $p = 1$.

$\int\limits_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx = \int\limits_1^n \frac{x}{x^2} dx = \log n$.

$T(n) \in \Theta(n(1+\log n))$ или $T(n) \in \Theta(n \log n)$.

j)

$$\text{(j)}\quad T(n) = 2T(n/3) + 2T(2n/3) + n$$

В данном виде мы не можем применить Мастер теорему, поэтому применим **Акры-Бацци метод.** $T(n) = f(n) + \sum\limits_{i=1}^{k} a_i T(b_i n + h_i(n))$

$k = 2, a_1 = 2, a_2 = 2, b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{2}{3}, f(n) = n.$

Тогда: $T(n) \in \Theta(n^p \cdot (1 + \int\limits_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx))$. Найдем p: $2(\frac{1}{3})^p + 2(\frac{2}{3})^p = 1$.

Левая часть убывает с ростом p, а правая часть - прямая, поэтому существует только одно решение $p \approx 2$.

$\int\limits_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx = \int\limits_1^n \frac{x}{x^3} dx = 1 - \frac{1}{n} = \frac{1-n}{n}$.

$T(n) \in \Theta(n^2(1 + 1 - \frac{1}{n}))$ или $T(n) \in \Theta(n^2)$.

k)

$$\text{(k)}\quad T(n) = \sqrt{2n}\,T(\sqrt{2n}) + \sqrt{n}$$

Обозначим $m = \log_2 n - 1$, тогда $n = 2^{m+1}$, $\sqrt{2n} = \sqrt{2^{m+2}} = 2^{\frac{m}{2}+1}$, $\sqrt{n} = 2^{\frac{m+1}{2}}$

Рассмотрим $S(m) = \frac{T(n)}{n} = 2\frac{T(\sqrt{2n})}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2S(\frac{m}{2}) + \frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}}}$.

В данном виде мы можем применить Мастер теорему.

Тогда $a = 2$, $b = 2$, $f(m) = 2^{-\frac{m+1}{2}}$, $c_{crit} = \log_2 2 = 1$.

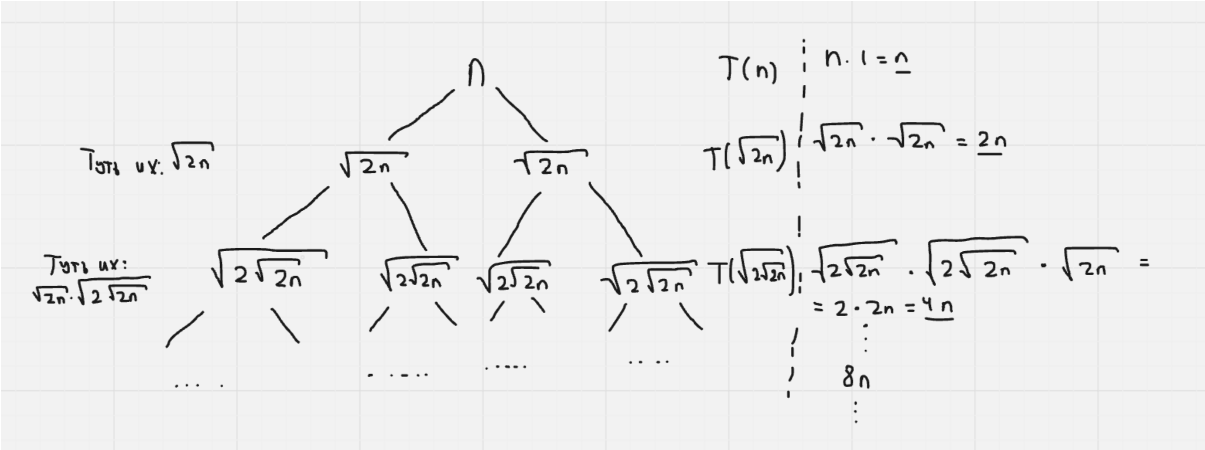
Заметим, что $\lim_{m \to \infty} \frac{f(m)}{m} = 0$, то есть $f(m) \in o(m)$, а так как $m = m^{c_{crit}}$, то мы можем применить 1 случай Мастер теоремы.

Тогда $S(m) \in \Theta(m)$, $S(m) \in \Theta(\log_2 n - 1)$.

Подставим в исходное и получим: $T(n) \in \Theta(n \log n)$.

l)

$$\text{(l)}\quad T(n) = \sqrt{2n}\,T(\sqrt{2n}) + n$$



Task 3

3. Consider a recurrence relation $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ with $a_0 = a_1 = 2$. Solve it (*i.e.* find a closed formula) and show how it can be used to estimate the value of $\sqrt{3}$ (hint: observe $\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n-1}$). After that, devise an algorithm for constructing a recurrence relation with integer coefficients and initial conditions that can be used to estimate the square root $\sqrt{k}$ of a given integer k.

1. $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$

   Запишем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. Тогда $\lambda = 1 \pm \sqrt{3}$.

   $\lambda_1 \neq \lambda_2 \to a_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$

   $a_0 = A + B = 2$

   $a_1 = A(1+\sqrt{3}) + B(1-\sqrt{3}) = 2$. Решения этой системы: $A = B = 1$.

   Тогда $a_n = (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$.

2. Рассмотрим $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n}{(1+\sqrt{3})^{n-1} + (1-\sqrt{3})^{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$.

   То есть $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$, тогда $\sqrt{3} = \frac{2}{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}} + 1$.

3. Найдем формулу для $\sqrt{k}$.

   В общем виде при конкретном k: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{k-1}{\sqrt{k}-1}$.

   То есть $a_n = (1+\sqrt{k})^n + (1-\sqrt{k})^n$, где $1 \pm \sqrt{k}$ - корни характеристического уравнения, при этом $A = B = 1$.

   Тогда $(\lambda - (1+\sqrt{k}))(\lambda - (1-\sqrt{k})) = 0$, то есть $(\lambda - 1)^2 - k = 0$.

   $\lambda^2 - 2\lambda + 1 - k = 0$. Отсюда $a_n - 2a_{n-1} + (1-k)a_{n-2} = 0$.

   Или $a_n = 2a_{n-1} - (1-k)a_{n-2}, a_0 = a_1 = 2$.

Task 4

4. Find a closed formula for the n-th term of the sequence with generating function $\frac{3x}{1-4x} + \frac{1}{1-x}$.

$F(x) = \frac{A_1}{1-a_1x} + \frac{A_2}{1-a_2x} + \frac{A_3}{1-a_3x} = \frac{3}{4}\frac{1}{1-4x} - \frac{3}{4}\frac{1}{1-0x} + \frac{1}{1-x}$. $A_1 = \frac{3}{4}, A_2 = -\frac{3}{4}, A_3 = 1, a_1 = 4, a_2 = 0, a_3 = 1$.

Тогда $a_n = A_1a_1^n + A_2a_2^n = 3 \cdot 4^{n-1} + 1$.

При $n \geq 1$: $a_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 1$.

$n = 0$: $a_0 = 1$.

Task 5

5. Given the generating function $G(x) = \frac{5x^2+2x+1}{(1-x)^3}$, decompose it into partial fractions and find the sequence that it represents.

$G(x) = \frac{5x^2+2x+1}{(1-x)^3} = \frac{5}{1-x} - \frac{12}{(x-1)^2} - \frac{8}{(x-1)^3}$(спасибо вольфраму)

$G(x) = \frac{5x^2+2x+1}{(1-x)^3} = \frac{5}{1-x} - \frac{12}{(x-1)^2} + \frac{8}{(1-x)^3} = 5\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n - 12\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + 8\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$.

Тогда получим: $g_n = 5 - 12(n+1) + 4(n+1)(n+2) = 5 - 12n - 12 + (4n^2 + 12n + 8) = 4n^2 + 1$ или $(1, 5, 17, 37, 65....)$.

Task 6

6. Pell–Lucas numbers are defined by $Q_0 = Q_1 = 2$ and $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ for $n \geq 2$. Derive the corresponding generating function and find a closed formula for the n-th Pell–Lucas number.

Заменю Q на A, q на a.

1. $(2, 2, 6, 14, 34....)$

   $a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 0$

   $A = 2 + 2x + 6x^2 + 14x^3 + 34x^4 + ... + a_nx^n + ...$

   $-2xA = 0 - 4x - 4x^2 - 12x^3 - 28x^4 - ... - 2a_{n-1}x^n - ...$

   $-x^2A = 0 - 0 - 2x^2 - 2x^3 - 6x^4 - ... - a_{n-2}x^2 - ...$

   $(1 - 2x - x^2)A = 2 - 2x$, тогда $A = \frac{2-2x}{1-2x-x^2}$ - **GF.**

2. Найдем a_n

Тут не особо приятно раскладывается А, поэтому буду искать через характеристическое уравнение.

$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$, отсюда $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$.

$\lambda_1 \neq \lambda 2 \to a_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$.

$a_0 = A + B = 2$

$a_1 = A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}) = 2$.

Из этой системы находим: $A = B = 1$, тогда $a_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$.

Task 7

7. For each given recurrence relation, derive the corresponding generating function and find a closed formula for the n-th term of the sequence.

a)

(a) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ with $a_0 = 3$, $a_1 = 5$

$(3, 5, 7, 9, 11, 13 \ldots)$ $\quad a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$

$A = 3 + 5x + 7x^2 + 9x^3 + 11x^4 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

$-2xA = 0 - 6x - 10x^2 - 14x^3 - 18x^4 - \ldots - 2a_{n-1}x^n - \ldots$

$x^2A = 0 + 0 + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \ldots + a_{n-2}x^n + \ldots$

Тогда: $(1 - 2x + x^2)A = 3 - x$

$$A = \frac{3-x}{1-2x+x^2} = \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{(1,1,\ldots 1)} + \underbrace{\frac{2}{(1-x)^2}}_{(2,4,6\ldots)} \quad - \underline{GF}$$

Тогда:

$\underline{a_n = 1 \cdot 1^n + 2(n+1) = 2n+3}$ – замкн-ая ф-ла.

b)

(b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$ with $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$

$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} = 0$

$(1, 1, 5, 5, 9, 9, 13 \ldots)$

$$A = 1 + x + 5x^2 + 5x^3 + 9x^4 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$
$$-xA = 0 - x - x^2 - 5x^3 - 5x^4 - \ldots - a_{n-1} x^n - \ldots$$
$$-x^2 A = 0 + 0 - x^2 - x^3 - 5x^4 - \ldots - a_{n-2} x^n - \ldots$$
$$x^3 A = 0 + 0 + 0 + x^3 + x^4 + \ldots + a_{n-3} x^n + \ldots$$

Тогда:

Такие штуки считает wolfram

$$(1 - x - x^2 + x^3) A = 1 + 3x^2$$

$$A = \frac{1 + 3x^2}{1 - x - x^2 + x^3} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

Тогда

$$a_n = 1(-1)^n - 2 \cdot 1^n + 2(n+1) = (-1)^n - 2 + 2n + 2 = 2n + (-1)^n$$

c)

(c) $a_n = a_{n-1} + n$ with $a_0 = 0$

$(0, 1, 3, 6, 10 \ldots)$ $\qquad a_n - a_{n-1} - n = 0$

$$A = 0 + x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$
$$-xA = 0 + 0 - x^2 - 3x^3 - 6x^4 - \ldots - a_{n-1} x^n - \ldots$$
$$-n = -0 - x - 2x^2 - 3x^3 - 4x^4 - \ldots - n x^n - \ldots$$

$$(1 - x)A - n = 0 \qquad (0, 1, 2 \ldots) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Тогда:

$$A = \frac{x}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{(1-x)} = \frac{x}{(1-x)^3} = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} \quad - GF$$

Тогда:

$$a_n = \frac{n(n-1)}{2}$$ (по пункту a 1 номера)

d)

(d) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n$ with $a_0 = 2,\ a_1 = 1$

1. $(2, 1, 9, 19, 53 \dots)$

$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} - 2^n = 0$

$$A = 2 + x + 9x^2 + 19x^3 + 53x^4 + \dots + a_n x^n + \dots$$
$$-xA = 0 - 2x - x^2 - 9x^3 - 19x^4 - \dots - a_{n-1}x^n - \dots$$
$$-2x^2 A = 0 - 0 - 4x^2 - 2x^3 - 18x^4 - \dots - 2a_{n-2}x^n - \dots$$
$$-2^n = -1 - 2x - 4x^2 - 8x^3 - 16x^4 - \dots - 2^n x^n - \dots$$

$$(1 - x - 2x^2)A - \frac{1}{1-2x} = 1 - 3x$$
$$(1 - x - 2x^2)A = 1 - 3x + \frac{1}{1-2x}$$

$$-\frac{1}{(1-2x)^2}\cdot(-2) = \frac{2}{(1-2x)^2}$$
$$\parallel$$
$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1-2x}\right)'$$

$$A = \frac{1 - 3x + \frac{1}{1-2x}}{1 - x - 2x^2} = -\frac{1}{9(1-2x)} + \frac{2}{3(1-2x)^2} + \frac{13}{9(1+x)} \text{ — } \underline{GF}$$

2. Тогда: $a_n = -\frac{1}{9}\cdot 2^n + \frac{2}{3}\cdot(n+1)2^n + \frac{13}{9}\cdot(-1)^n$

Task 8

8. Find the number of non-negative integer solutions to the Diophantine equation $3x + 5y = 100$ using generating functions.

$3x + 5y = 100$, $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Составим GF: $a = 3x\ (a \,\%\, 3 = 0)$, $b = 5y\ (b \,\%\, 5 = 0)$

$$A_1(a) = 1 + x^3 + x^6 + \dots = \frac{1}{1-x^3}$$
$$A_2(b) = 1 + x^5 + x^{10} + \dots = \frac{1}{1-x^5}$$

Перемножим их, что бы найти n.

$$F(x) = A_1(a)\cdot A_2(b) = \frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}$$

Ответ на нашу задачу - коэф-нт перед x^{100}.

Он равен 7.

$$1 + x^3 + x^5 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + 2x^{15} + x^{16} + x^{17} + 2x^{18} + x^{19} + 2x^{20} + 2x^{21} + x^{22} + 2x^{23} + 2x^{24} + 2x^{25} + 2x^{26} + 2x^{27} + 2x^{28} + 2x^{29} + 3x^{30} + 2x^{31} + 2x^{32} + 3x^{33} + 2x^{34} + 3x^{35} + 3x^{36} + 2x^{37} + 3x^{38} + 3x^{39} + 3x^{40} + 3x^{41} + 3x^{42} + 3x^{43} + 3x^{44} + 4x^{45} + 3x^{46} + 3x^{47} + 4x^{48} + 3x^{49} + 4x^{50} + 4x^{51} + 3x^{52} + 4x^{53} + 4x^{54} + 4x^{55} + 4x^{56} + 4x^{57} + 4x^{58} + 4x^{59} + 5x^{60} + 4x^{61} + 4x^{62} + 5x^{63} + 4x^{64} + 5x^{65} + 5x^{66} + 4x^{67} + 5x^{68} + 5x^{69} + 5x^{70} + 5x^{71} + 5x^{72} + 5x^{73} + 5x^{74} + 6x^{75} + 5x^{76} + 5x^{77} + 6x^{78} + 5x^{79} + 6x^{80} + 6x^{81} + 5x^{82} + 6x^{83} + 6x^{84} + 6x^{85} + 6x^{86} + 6x^{87} + 6x^{88} + 6x^{89} + 7x^{90} + 6x^{91} + 6x^{92} + 7x^{93} + 6x^{94} + 7x^{95} + 7x^{96} + 6x^{97} + 7x^{98} + 7x^{99} + \boxed{7x^{100}} + 7x^{101} + 7x^{102} + 7x^{103} + 7x^{104} + 8x^{105} + 7x^{106} + 7x^{107} + 8x^{108} + 7x^{109} + 8x^{110} + 8x^{111} + 7x^{112} + 8x^{113} + 8x^{114} + 8x^{115} + 8x^{116} + 8x^{117} + 8x^{118} + 8x^{119} + 9x^{120} + 8x^{121} + 8x^{122} + 9x^{123} + 8x^{124} + 9x^{125} + 9x^{126} + 8x^{127} + 9x^{128} + 9x^{129} + 9x^{130} + 9x^{131} + 9x^{132} + 9x^{133} + 9x^{134} + 10x^{135} + 9x^{136} + 9x^{137} + 10x^{138} + 9x^{139} + 10x^{140} + 10x^{141} + 9x^{142} + 10x^{143} + 10x^{144} + 10x^{145} + 10x^{146} + 10x^{147} + 10x^{148} + 10x^{149} + 11x^{150} + 10x^{151} + 10x^{152} + 11x^{153} + 10x^{154} + 11x^{155} + 11x^{156} + 10x^{157} + 11x^{158} + 11x^{159} + 11x^{160} + 11x^{161} + 11x^{162} + 11x^{163} + 11x^{164} + 12x^{165} + 11x^{166} + 11x^{167} + 12x^{168} + O(x^{169})$$

Task 9

9. Consider a $2n$-digit ticket number to be "lucky" if the sum of its first n digits is equal to the sum of its last n digits. Each digit (including the first one!) in a number can take value from 0 to 9. For example, a 6-digit ticket 345 264 is lucky since $3+4+5=2+6+4$.

a)

(a) Find the number of lucky 6-digit and 8-digit tickets.

$a_1a_2...a_n...a_{2n}$ — число, заменим во второй половине числа все цифры на обратные, то есть $9-a_i$.

Тогда: $a_1+...+a_n=a_{n+1}+...+a_{2n}$ - до замены

$a_1+...+a_n=-a_{n+1}-...-a_{2n}+9n$ - после замены.

Перенесем все в одну часть: $a_1+...+a_{2n}=9n$

1. 6-значные числа, $2n=6, n=3$.

   $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=27$, при этом $0\le a_i\le 9$.

   Тогда: $A_i(x)=1+x+x^2+...+x^9$ - **GF** для a_i.

   Тогда перемножим все A_i для того чтоб найти общую **GF**

   $F(x)=(A_1(x))^6$, так как все A_i одинаковые.

   Ответом на нашу задачу будет коэффициент перед x^{27}, для его поиска воспользуемся вольфрамом: **55252**

Series expansion at x=∞

$$x^{54}+6x^{53}+21x^{52}+56x^{51}+126x^{50}+252x^{49}+462x^{48}+792x^{47}+1287x^{46}+2002x^{45}+2997x^{44}+4332x^{43}+6062x^{42}+8232x^{41}+10872x^{40}+13992x^{39}+17577x^{38}+21582x^{37}+25927x^{36}+30492x^{35}+35127x^{34}+39662x^{33}+43917x^{32}+47712x^{31}+50877x^{30}+53262x^{29}+54747x^{28}+55252x^{27}+54747x^{26}+53262x^{25}+50877x^{24}+47712x^{23}+43917x^{22}+39662x^{21}+35127x^{20}+30492x^{19}+25927x^{18}+21582x^{17}+17577x^{16}+13992x^{15}+10872x^{14}+8232x^{13}+6062x^{12}+4332x^{11}+2997x^{10}+2002x^9+1287x^8+792x^7+462x^6+252x^5+126x^4+56x^3+21x^2+6x+1$$

2. 8-значные числа, $2n=8, n=4$.

   $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=36$, при этом $0\le a_i\le 9$.

   Тогда: $A_i(x)=1+x+x^2+...+x^9$ - **GF** для a_i.

   Тогда перемножим все A_i для того чтоб найти общую **GF**

   $F(x)=(A_1(x))^8$, так как все A_i одинаковые.

Ответом на нашу задачу будет коэффициент перед x^{36}, для его поиска воспользуемся вольфрамом: **4816030**

Series expansion at x=∞

$$x^{72} + 8x^{71} + 36x^{70} + 120x^{69} + 330x^{68} + 792x^{67} + 1716x^{66} + 3432x^{65} + 6435x^{64} + 11440x^{63} + 19440x^{62} + 31760x^{61} + 50100x^{60} + 76560x^{59} + 113640x^{58} + 164208x^{57} + 231429x^{56} + 318648x^{55} + 429220x^{54} + 566280x^{53} + 732474x^{52} + 929672x^{51} + 1158684x^{50} + 1419000x^{49} + 1708575x^{48} + 2023680x^{47} + 2358840x^{46} + 2706880x^{45} + 3059100x^{44} + 3405600x^{43} + 3735720x^{42} + 4038560x^{41} + 4303545x^{40} + 4521000x^{39} + 4682700x^{38} + 4782360x^{37} + 4816030x^{36} + 4782360x^{35} + 4682700x^{34} + 4521000x^{33} + 4303545x^{32} + 4038560x^{31} + 3735720x^{30} + 3405600x^{29} + 3059100x^{28} + 2706880x^{27} + 2358840x^{26} + 2023680x^{25} + 1708575x^{24} + 1419000x^{23} + 1158684x^{22} + 929672x^{21} + 732474x^{20} + 566280x^{19} + 429220x^{18} + 318648x^{17} + 231429x^{16} + 164208x^{15} + 113640x^{14} + 76560x^{13} + 50100x^{12} + 31760x^{11} + 19440x^{10} + 11440x^{9} + 6435x^{8} + 3432x^{7} + 1716x^{6} + 792x^{5} + 330x^{4} + 120x^{3} + 36x^{2} + 8x + 1$$

b)

(b) Find the generating function for the number of $2n$-digit lucky tickets.

Воспользуемся пунктом **a**.

$A_i(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^9 = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{10}}{1-x} = \frac{1-x^{10}}{1-x}$(так как мы отрезаем все степени больше 9) - **GF** для a_i.

Тогда, так как у нас всего $2n$ цифр, то $F(x) = (A_1(x))^{2n} = (\frac{1-x^{10}}{1-x})^{2n}$.

c)

(c) Find a closed formula for the number of $2n$-digit lucky tickets.

$F(x) = (A_1(x))^{2n} = (\frac{1-x^{10}}{1-x})^{2n} = (1-x^{10})^{2n}(1-x)^{-2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}(-x^{10})^k(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \binom{-2n}{j}(-x)^j)$.

При этом $\binom{-2n}{k} = (-1)^k\binom{2n+k-1}{k}$. Тогда нам надо найти коэффициент перед x^{9n}.

Он равен: $\sum\limits_{j=0}^{\lfloor \frac{9n}{10} \rfloor} (-1)^j \binom{2n}{j}\binom{11n-10j-1}{9n-10j}$.