e 是什么?

王强

December 21, 2019

南京大学生命科学学院

书上说的

e	自然对数的底
自然对数	以 e 为底的对数

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

定义 e 为唯一的实数 x, 使得

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^h - 1}{h} = 1$$

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

定义 e 为唯一的实数 x, 使得

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^h - 1}{h} = 1$$

$$\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

定义 e 为唯一的实数 x, 使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^h-1}{h} = 1$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

定义 e 为唯一的正数 x, 使得

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = 1$$

“当一幢建筑物完成时, 应该把脚手架拆除干净.”

— 高斯

“当一幢建筑物完成时, 应该把脚手架拆除干净.”

— 高斯

“高斯象一只狐狸, 用尾巴扫砂子来掩盖自己的足迹.”

— 阿贝尔

“美是第一位的, 在这个世界上丑陋的数学没有永久存在的位置.”

— 哈代, 一个数学家的辩白

“美是第一位的, 在这个世界上丑陋的数学没有永久存在的位置.”

— 哈代, 一个数学家的辩白

“在二十世纪中叶, 人们试图将数学与物理分割开来. 其结果是灾难性的.”

— 阿诺尔德

真实的历史

利息

利息　　指负债方为借债向债权人所付的补偿性费用, interest.

计算利息的方法:

- 单利　　按照固定的本金计算的利息, simple interest.
- 复利　　利息除了会根据本金计算外, 新得到的利息同样可以生息, compound interest.

利息的计算公式

F	财富在未来的价值, Future value.
P	现值，即本金, Present value.
r	周期内的利息率, interest rate.
n	累计的周期数.

单利

$$F_S = P + P \cdot r \cdot n$$

复利

$$F_C = P \cdot (1 + r)^n$$

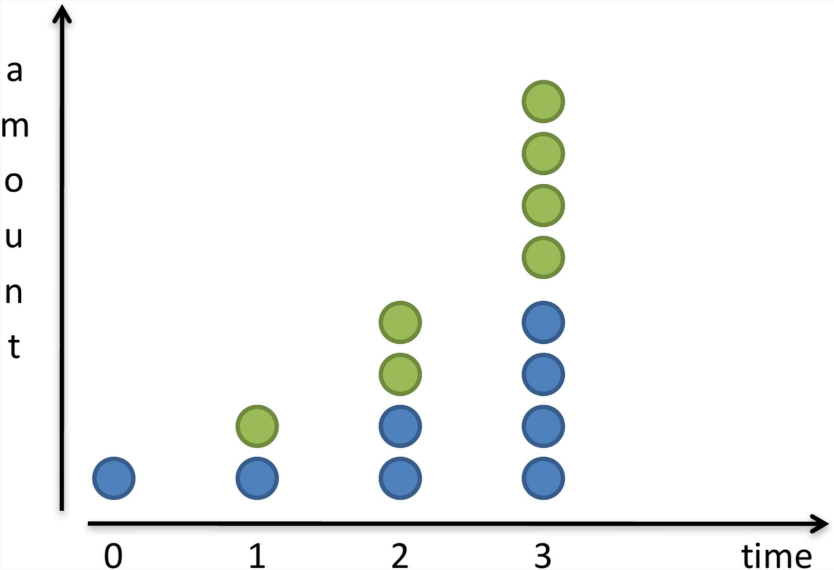
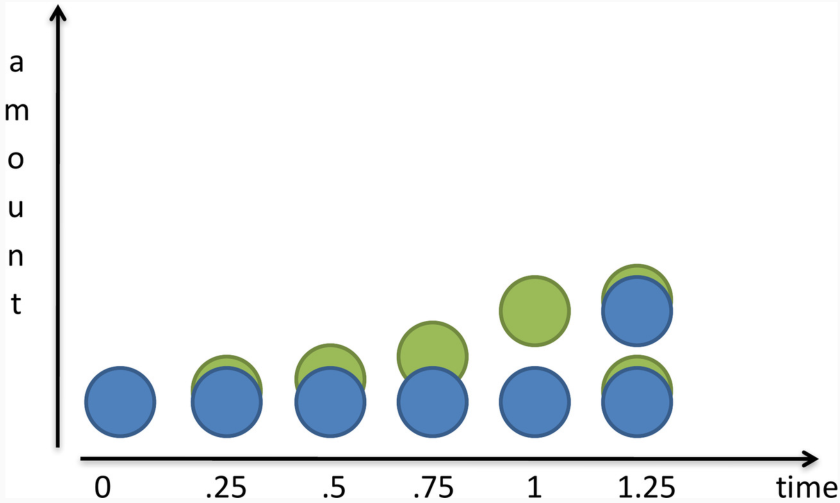
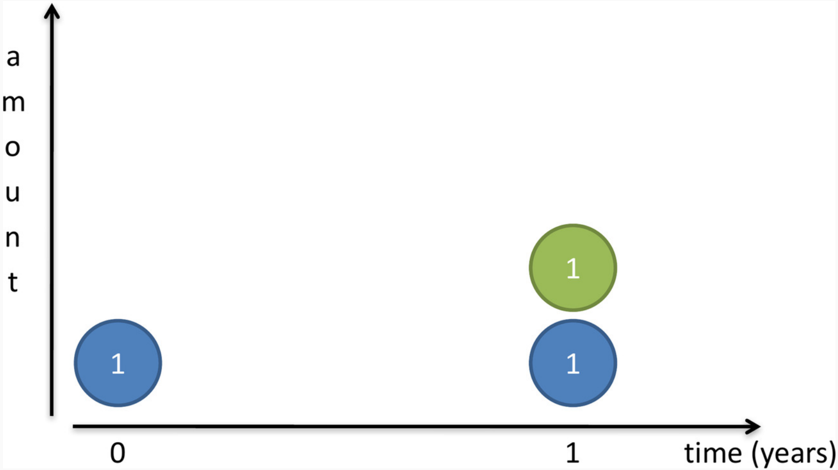
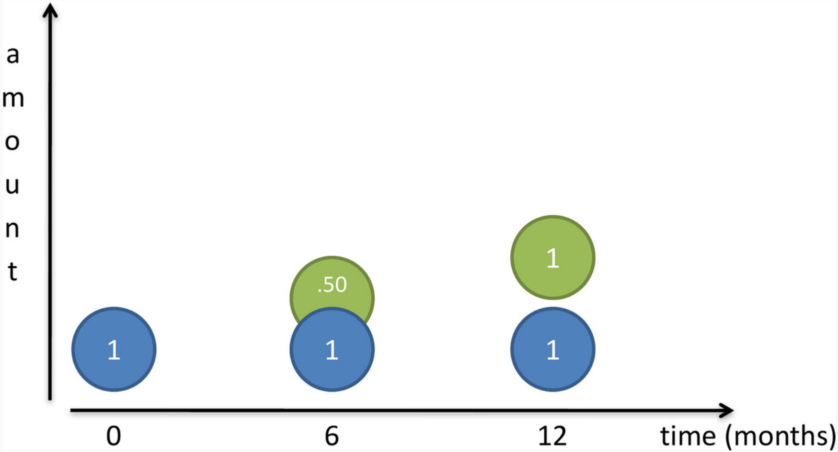
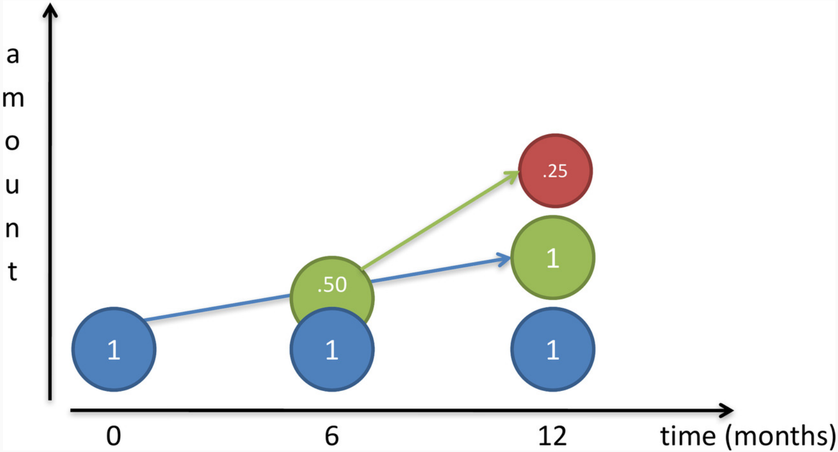


Figure 1. 简化条件: 令 $P = 1$, $r = 1$, 则 $F_C = (1 + 1)^n$

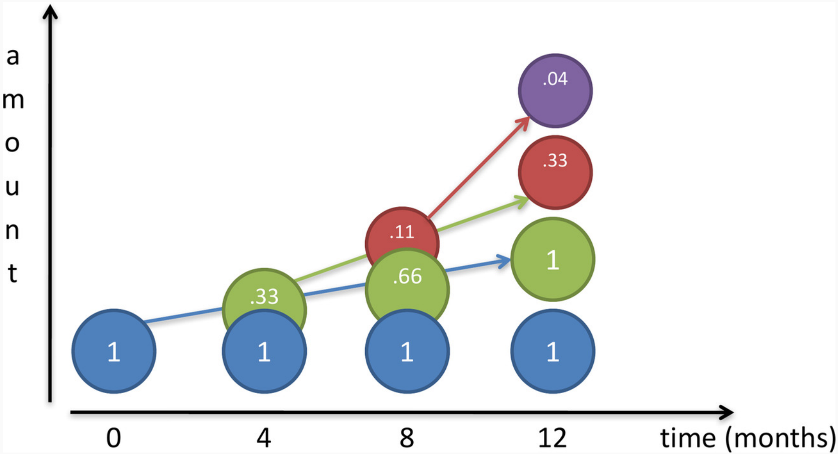

a
m
o
u
n
t
0
.25
.5
.75
1
1.25
time


a
m
o
u
n
t
1
1
1
0
1
time (years)


a
m
o
u
n
t
.50
1
1
1
1
1
0
6
12
time (months)



a
m
o
u
n
t
1
1
.50
1
1
.25
0
6
12
time (months)


a
m
o
u
n
t
.04
.33
.11
1
.33
.66
1
1
1
1
1
0
4
8
12
time (months)

m 一个周期内, 计复利的次数.

前面的简化公式

$$F_C = (1+1)^1$$

利率 $r = 1/m$, 累计的周期数 $n = m$, 上式变成了

$$F_C = (1+\frac{1}{m})^m$$

m	$(a+b)^m$	$(1+1/m)^m$	F_C
1	$a+b$	1 + 1	2
2	$a^2+2ab+b^2$	$1^2+2\cdot 1\cdot 1/2+(1/2)^2 = 1+1+0.25$	2.25
3	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$1^3+3\cdot 1^2\cdot 1/3+3\cdot 1\cdot (1/3)^2+(1/3)^3 \approx 1+1+0.33+0.04$	2.37

m	$F_C = (1 + 1/m)^m$
1	2
2	2.25
3	2.37
12	2.613
365	2.714567
$365 \cdot 24 \cdot 60$	2.718279

m	$F_C = (1 + 1/m)^m$
1	2
2	2.25
3	2.37
12	2.613
365	2.714567
$365 \cdot 24 \cdot 60$	2.718279

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1\cdot n}$$

The base for continuous growth is
the unit quantity earning unit interest for unit time,
compounded as fast as possible.

连续增长的底是
单位本金在单位时间里以单位利息
尽可能快地复利.

Bonus slides

1626 年, 荷兰人以 60 荷兰盾 (NLG) 从当地印地安酋长那里买下整个曼哈顿岛.

印地安酋长将钱存放到荷兰银行, 收取每年 6.5% 的复利利率, 并承受通货膨胀带来的贬值.

$$
\begin{aligned}
F &= 60 \text{ NLG} \times (1 + 6.5 \div 100)^{2016-1626} \\
&= 60 \text{ NLG} \times 1.065^{390} \\
&\approx 2782904368555 \text{ NLG} \\
&= 2782904368555 \div 2.20371 \times 1.0595 \text{ USD} \\
&\approx 1.338 \text{ Trillion USD}
\end{aligned}
$$

“Compound interest is the most powerful force in the universe.”

— Albert Einstein

另一条路径

$$
\begin{aligned}
f(x) &= R^x \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{R^{x+h} - R^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(R^x \cdot \frac{R^h - 1}{h} \right) \\
&= R^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{R^h - 1}{h}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= R^x \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{R^{x+h} - R^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(R^x \cdot \frac{R^h - 1}{h} \right) \\
&= R^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{R^h - 1}{h}
\end{aligned}
$$

$$
R^x = \frac{d}{dx} R^x \to \lim_{h \to 0} \frac{R^h - 1}{h} = 1
$$

数学家们应用洛必达法则, 可以求出

$$\lim_{h\to 0}\frac{R^h-1}{h}=\ln(R)$$

这里用土一点的办法.

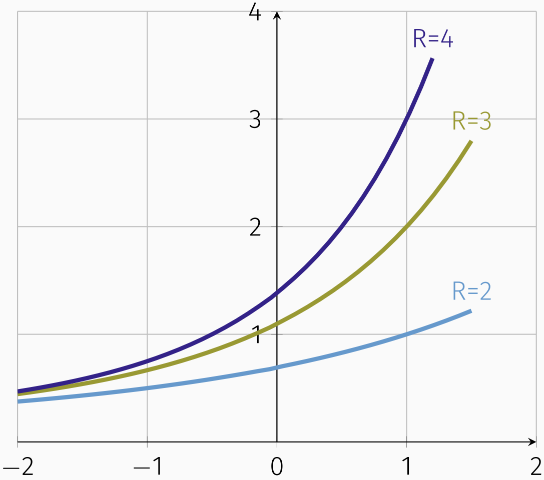


Figure 2. $\lim_{h \to 0} \frac{R^h - 1}{h}$, $R = 2 \to 4$

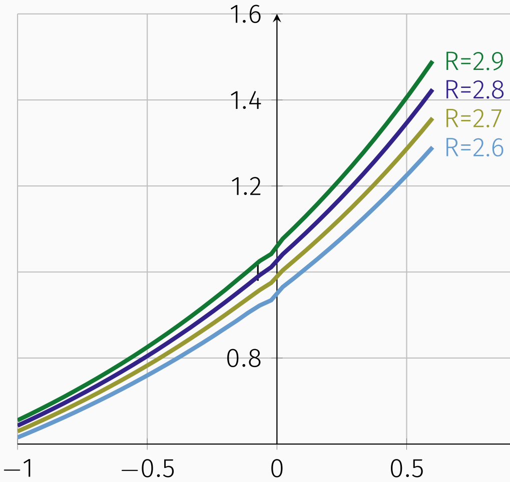


Figure 3. $\lim_{h \to 0} \frac{R^h - 1}{h}$, $R = 2.6 \to 2.9$

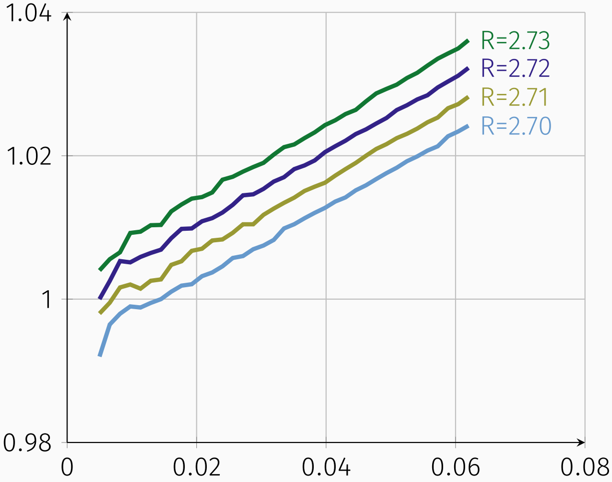


Figure 4. $\lim_{h\to 0} \frac{R^h - 1}{h}$, $R = 2.70 \to 2.73$

剩下的两个

第三种定义

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

e^x 的泰勒展式, 令 $x = 1$

$$\mathrm{Series}\left[e^x, \{x, 0, 4\}\right] = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O\left(x^5\right)$$

第四种定义

定义 e 为唯一的正数 x, 使得

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = 1$$

看下这个不定积分

$$\int \frac{1}{t}\, dt = \ln(t)$$

- 人类科学发展的历史, 先有猜想和算法, 而后严格地形式化证明.
- 每次进一步地形式化, 都提高了门槛, 降低了人们的学习兴趣.
- 没有新人进入, 就减慢了学科的发展, 被动地毁灭了学科[1].
- 形式化的学科内容, 决不能在一开始就灌输给初学者.

---

[1] Watterson, G. A. On the Number of Segregating Sites in Genetical Models without Recombination. *Theoretical Population Biology* **7,** 256–276 (1975)

“如果你要造船, 不要招揽人来搬木材, 不要指派人任务和工作, 而是要教他们去渴望那无边无际广袤的大海.”

— 安东 · 德 · 圣艾修伯里