# Algebra liniowa z geometrią 2

## 1 Terminy kolowium

- 12.04 - pierwszy semestr
- 24.05 - drugi semestr (1-11) Jurlewicz

## 2 Przestrzenie wektorowe

**Uwagi:** $(V, K, \oplus, \odot)$ - przestrzeń wektorowa

1. Elementy ciala $K$ nazywamy **skalarami**, a elementy zbioru $V$ **wektorami**.
2. Dla uproszczenia zapisu na skalarach i wektorach działania będziemy oznaczali $+, \cdot$.
3. Gdy $K = \mathbb{R}$, to przestrzeń wektorowa $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ nazywamy rzeczywistą.
4. Gdy $K = \mathbb{C}$, to $(V, \mathbb{C}, +, \cdot)$ nazywamy zespoloną.
5. Zamiast pisać $(V, K, +, \cdot)$ często piszemy "$V$ jest przestrzenią wektorową".
6. Jeśli $x, y \in V$, to zapis $x - y$ oznaczamy $x + (-y)$, gdzie $-y$ jest elementem przeciwnym w grupie addytywnej $(V, +)$.
7. Element neutralny w grupie $(V, +)$ oznaczamy $\Theta$ i nazywamy wektorem zerowym.

**Przykład 2.1.**
$(\mathbb{R}^N = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{N}, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ *jest przestrzenią wektorową, gdzie działania są zdefiniowane następująco:*

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_N), y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N :$$
$$x \oplus y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_N + y_N) \in \mathbb{R}^N$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N :$$
$$\alpha \odot x := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

**Przykład 2.2.**
$K$ *- dowolne ciało*
$(K^N = \underbrace{K \times \ldots \times K}_{N}, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ *- przestrzeń wektorowa z działaniami:*

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_N), y = (y_1, \ldots, y_N) \in K^N :$$
$$x \oplus y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_N + y_N)$$

$$\forall \alpha \in K, \forall x = (x_1, \ldots, x_N) \in K^N :$$
$$\alpha \odot x := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_N).$$

**Przykład 2.3.**
$(K, +, \cdot)$ *- ciało*

$$K^\infty := \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \forall\ n : x_n \in K\}$$

$(K^\infty, K, \oplus, \odot)$ *- jest przestrzenią wektorową z działaniami*

$$\forall\ \{x_n\}, \{y_n\} \in K^\infty : \{x_n\} \oplus \{y_n\} := \{z_n\}$$
$$gdzie \quad \forall\ n : z_n := x_n + y_n$$
$$\forall\ \alpha \in K\ \forall \{\alpha_n\} \in K^\infty : \alpha \odot \{x_n\} := \{z_n\}$$
$$gdzie \quad \forall\ n : z_n := \alpha \cdot x_n$$

# 3 Podprzestrzenie wektorowe

# 4 Liniowa niezależność wektorów

# 5 Baza

## 6 Wymiar przestrzeni wektorowej

**Twierdzenie 6.1.** *Wszystkie bazy danej przestrzeni wektorowej są równoliczne.*

**Wniosek.** *( twierdzenie Steinera )*
*Jeśli pewna baza przestrzeni $V$ ma $n$ elementów, to każda inna baza tej przestrzeni ma też $n$ elementów.*

**Definicja 6.1.**

- *Jeśli przestrzeń wektorowa $V$ ma skończoną bazę, to mówimy, że jest skończenie wymiarowa i oznaczamy* $\dim V$.
- *Jeśli przestrzeń $V$ ma nieskończoną bazę, to mówimy, że jest nieskończenie wymiarowa i wówczas oznaczamy* $\dim V = \infty$.

**Uwaga:** Powyższa definicja jest poprawna ponieważ wszystkie bazy są równoliczne.

**Twierdzenie 6.2.**

***Założenia:*** *$V$ w przestrzeni wektorowej, $V_1 \subseteq V$ - podprzestrzeń*
***Teza:***

1. $\dim V_1 \leq \dim V$
2. *Jeśli* $\dim V_1 = \dim < \infty$, *to* $V = V_1$ *??*

**Dowód.**

1. Niech $B$ będzie bazą $V_1 \implies \dim V_1 = \sharp B$
$\implies B$ jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych w $V$
$\implies B$ można rozszerzyć do bazy
$A \supseteq B$ w $V$
$\dim V = \sharp A \geq \sharp B = \dim V_1$
2. Niech $B$ będzie bazą w $V_1$
$\implies B$ mogę rozszerzyć do bazy $A \geq B$ w $V$

ale $\sharp A = \sharp B < \infty \implies A = B$

$V_1 = lin(B) = lin(A) = V$

$\square$

**Twierdzenie 6.3.**

**Założenia:** $V$ - przestrzeń wektorowa, $\dim V = n$
**Twierdzenie:** następujące wnioski są równoważne

1. wektory $v_1, \ldots, v_n$ są bazą w $V$
2. wektory $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo liniowo niezależne
3. wektory $v_1, \ldots, v_n$ generują $V$

**Dowód.**
1) $\implies$ 2) oczywiste
2) $\implies$ 1) wektory $v_1, \ldots, v_n$ można rozszerzyć do bazy, ale każda baza ma $n$ elementów $\implies v_1, \ldots, v_n$ są bazą
1) $\implies$ 3) oczywiste
3) $\implies$ 1) z wektorów $v_1, \ldots, v_n$ można wybrać bazę, ale każda baza ma $n$ elementów $\implies v_1, \ldots, v_n$ są bazą

**Przykład 6.1.**

- $\dim\{\Theta\} = 0$
- $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1,\ baza = 1, x, \ldots, x^n$
- $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$
- $\dim(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot) = \infty$
- $\dim(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot) = 2$
- $\dim(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, +, \cdot) = n$
- $\dim(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, +, \cdot) = 2n$
- $\dim(\mathbb{R}^\infty, \mathbb{R}, +, \cdot) = \infty$

# 7 Odwzorowania liniowe

**Definicja 7.1.**

*Niech $V$ i $W$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $K$. Mówimy, że odwzorowanie $\varphi : V \mapsto W$ jest **liniowe**, jeśli*

$$\forall x, y \in V, \alpha, \beta \in K : \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$$

**Twierdzenie 7.1.** *$\varphi : V \mapsto W$ jest odwzorowaniem liniowym $\Longleftrightarrow$*

$$\begin{cases} \forall x, y \in V : \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) & (1) \\ \forall \alpha \in K, x \in V : \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) & (2) \end{cases}$$

**Dowód.**
"$\Longleftarrow$"

$$\varphi(\alpha x + \beta y) \stackrel{1)}{=} \varphi(\alpha x) + \varphi(\beta y) \stackrel{2)}{=} \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$$

"$\Longrightarrow$"

- $\varphi(x+y) = \varphi(1 \cdot x + 1 \cdot y) \stackrel{\text{zał}}{=} 1 \cdot \varphi(x) + 1 \cdot \varphi(y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- $\varphi(\alpha x) = \varphi(\alpha x + 0 \cdot x) \stackrel{\text{zał}}{=} \alpha\varphi(x) + 0 \cdot \varphi(x) = \alpha\varphi(x) + \Theta = \alpha\varphi(x)$

$\square$

**Twierdzenie 7.2.** *$\varphi : V \mapsto W$ jest liniowe $\Longleftrightarrow$*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall v_1, \ldots, v_k \in V, \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K : \varphi(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi(v_1)$$

**Dowód.** indukcją matematyczną na $k$ (ćw.)

**Twierdzenie 7.3.**

*Jeśli* $\varphi : V \mapsto W$ *jest odwzrowaniem liniowym to* $\varphi(\Theta_v) = \Theta_w$

**Dowód.**

$$\varphi(\Theta_v) = \varphi(0 \cdot v) = 0 \cdot \varphi(v) = \Theta_w$$

$\square$

**Przykład 7.1.**

**1**) $id_v : V \ni v \longmapsto v \in V$ jest odwzorowaniem liniowym

$$id_v(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha \cdot id_v(v_1) + \beta \cdot id(v_2)$$

**2**) **Odwzorowanie zerowe**

$$\varphi : V \ni v \longmapsto \Theta_w \in W$$
$$\Theta(\alpha v_1 + \beta v_2) = \Theta_w = \alpha \cdot \Theta_w + \beta \cdot \Theta_w = \alpha\varphi(v_1) + \beta\varphi(v_2)$$

**3**) Niech $V = V_1 \oplus V_2$
Wówczas $\forall\ v \in V\ \exists!\ v_1 \in V_1\ \exists!\ v_1 \in V_2 : v = v_1 + v_2$

Definiujemy odwzorowanie $\pi_1 : V \ni v \longmapsto v_1 \in V_1$
- rzutowanie na $V_1$ w kierunku $V_2$

Analogicznie $\pi_2 : V \ni v \longmapsto v_2 \in V_2$
- rzutowanie na $V_2$ w kierunku $V_1$

Udowodnimy, że $\pi_1$ jest liniowe (dowód dla $\pi_2$ analogiczny).

Niech $x, y \in V, \alpha, \beta \in K$
Wówczas

$$x = x_1 + x_2$$
$$y = y_1 + y_2$$

gdzie $x_1, y_1 \in V_1, x_2, y_2 \in V_2$

$$\begin{aligned}\pi_1 \overbrace{(\alpha x + \beta y)}^{v} &= \pi_1(\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2)) \\ &= \pi_1(\underbrace{(\alpha x_1 + \beta y_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(\alpha x_2 + \beta y_2)}_{\in V_2}) \\ &= \alpha x_1 + \beta y_1 \\ &= \alpha \pi_1(x) + \beta \pi_1(y)\end{aligned}$$

«jakis rysuneczek tutaj»

**4**) Niech $W$ będzie podprzestrzenią wektorową w $V$

$$\kappa : W \ni w \longmapsto w \in V - zanurzenie$$

Przykład «rysuneczek dwie osie i R do 2»

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^2$$
$$\mathbb{R} \times \{0\} \ni (x, 0) \longmapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^2$$

**5**) $V$ - przestrzeń wektorowa, $\lambda \in K$

Odwzorowanie $\varphi_\lambda : v \ni v \longmapsto \lambda v \in V$ jest liniowe i nazywamy je **homotetią**.

**6**) $I$ - przedział w $\mathbb{R}$

$$\mathcal{C}^\infty(I) = \{f : I \longmapsto \mathbb{R} : \ f \ \ jest \ \ w \ \ \mathcal{C}^\infty\}$$

$$F : \quad \mathcal{C}^\infty(I) \ni f \longmapsto f' \in \mathcal{C}^\infty(I)$$

Ponieważ $(f+g)' = f' + g'$
$(\alpha f)' = \alpha \cdot f'$

Zatem $F$ jest odwzorowaniem liniowym.

**Definicja 7.2.** $\varphi : v \longmapsto W$ *- liniowe*

(a) $\varphi$ jest izomorfizmem, jeśli $\varphi$ jest bijekcją.

(b) $\varphi$ jest monoformizmem, jeśli $\varphi$ jest iniekcją.

(c) $\varphi$ jest epimorfizmem, jeśli $\varphi$ jest surjekcją.

Jeśli $V = W$, to $\varphi$ nazywamy **endomorfizmem**.
Jeśli $V = W$, $\varphi$ jest bijekcją, to $\varphi$ nazywamy **automorfizmem**.

**Przykład 7.2.**

**1**) $id_v$ - izomorfizm (automorfizm)

**2**) Odwzorowanie zerowe $\varphi : V \longmapsto W$
jest monoformizmem $\Longleftrightarrow V = \Theta$
jest epimorfizmem $\Longleftrightarrow W = \Theta$

**3**) $V = V_1 \oplus V_2 \qquad \pi_1 : V \longmapsto V_1$ rzutowanie
$\pi_1$ jest epimorfizmem, bo $\forall\ v_1 \in V_1 : \pi_1(v_1) = v_1$

**4**) Zanurzenie $\varphi$ i $W \ni w \longmapsto w \in V$
jest monoformizmem ...
jest epimorfizmem $\Longleftrightarrow V = W$

**5**) Homotetia $\varphi : V \ni v \longmapsto \lambda v \in V$

Gdy $\lambda \neq 0$, to $\varphi$ jest monomorfizmem, bo $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow & \lambda v_1 = \lambda v_2 \Big/ \lambda^{-1}, \quad bo \ \ \lambda \neq 0 \\ & \lambda^{-1}\lambda v_1 = \lambda^{-1}\lambda v_2 \\ & 1 \cdot v_1 = 1 \cdot v_2 \\ & v_1 = v_2 \\ & \Longrightarrow \varphi \quad - \quad monoformizm \end{aligned}$$

Gdy $\lambda \neq 0$ to $\varphi$ jest epimorfizmem, bo

$$\forall \ w \in V \ \exists \ v \in V : \varphi(v) = w$$

Niech $w \in V$

$$v := \lambda^{-1} w$$
$$\varphi(v) = \lambda v = \lambda\lambda^{-1} w = w$$

**6**) $F : \quad \mathcal{C}^{\infty}(I) \ni f \longmapsto f' \in \mathcal{C}^{\infty}(I)$
– nie jest monomorfizmem, bo $(2x + 1)' = (2x + 2)'$
– jest epimorfizmem, bo każda funkcja ciągła ma pierwotną

**Twierdzenie 7.4.**
*Niech $V, W$ - przestrzenie wektorowe nad ciałem $K$*
*$v_1, \ldots, v_n$ - baza $V$*
*$w_1, \ldots, w_n$ - dowolne wektory $W$*
*Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe*
*$\varphi : V \longmapsto W$ takie, że $\varphi(v_1) = w_i \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$*

**Heureza.**
Jak należy zdefiniować $\varphi$, aby było liniowe?
Niech $v \in V$. Ponieważ $v_1, \ldots, v_n$ są bazą $V$, to

$$\exists!\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K : v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Ponieważ $\varphi$ ma być liniowe, to

$$\varphi(v) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\varphi(v_i)}_{w_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$$

**Dowód.**
Niech $v \in V$. Wówczas

$$\exists!\ \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K : v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Zdefiniujmy

$$\varphi(v) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$$

Należy pokazać:

1. $\varphi$ - liniowe
2. $\varphi(v_1) = w_1 \quad \forall\ i = 1 \ldots n$

**Ad 1.**
Niech $x, y \in V;\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Należy pokazać, że $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$

Ponieważ $v_1, \ldots, v_n$ jest bazą $V$ to

$$\exists!\ \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K : x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

$$\exists!\ \ \beta_1, \ldots, \beta_n \in K : y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

Wówczas

$$\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i) v_i$$

Oraz to przedstawienie jest jednoznaczne, to znaczy:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x + \beta y) &= \varphi(\sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i) v_i) \overset{\mathsf{def}\,\varphi}{=} \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i) w_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \overset{\mathsf{def}}{=} \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)\end{aligned}$$

**Ad 2.**
$?\quad \varphi(v_i) \in W_i \qquad i = 1, \ldots, n$
$v_i$ przedstawia się w bazie $v_1, \ldots, v_n$ jako:

$$v_1 = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \ldots + 0 \cdot v_n$$

(na jeden sposób), zatem

$$\begin{aligned}\varphi(v_1) &= \varphi(0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \ldots + 0 \cdot v_n) \\ &\overset{\mathsf{def}}{=} 0 \cdot w_1 + \ldots + 0 \cdot w_{i-1} + 1 \cdot w_i + 0 \cdot w_{i+1} + \ldots + 0 \cdot w_n \\ &= w_i\end{aligned}$$

**Definicja 7.3.** *Jądro i obraz odwzorowania liniowego*

$$\varphi : V \longrightarrow W - odwzorowanie\ \ liniowe$$

**Jądrem** odwzorowania liniowego $\varphi$ nazywamy

$$\begin{aligned}\ker\varphi &= \{v \in V : \varphi(v) = \Theta_w\} \\ &= \varphi^{-1}(\Theta_w)\end{aligned}$$

**Obrazem** odwzorowania liniowego $\varphi$ nazywamy

$$\begin{aligned}\mathrm{im}\varphi &= \varphi(V) \\ &= \{w \in W : \exists\ v \in V : w = \varphi(v)\} \\ &= \{\varphi(v) : v \in V\}\end{aligned}$$