

Algebra liniowa z geometrią 2

1 Terminy kolowium

- 12.04 - pierwszy semestr
- 24.05 - drugi semestr (1-11) Jurlewicz

2 Przestrzenie wektorowe

Uwagi: (V, K, \oplus, \odot) - przestrzeń wektorowa

1. Elementy ciała K nazywamy **skalarami**, a elementy zbioru V **wektorami**.
2. Dla uproszczenia zapisu na skalarach i wektorach działania będziemy oznaczali $+$, \cdot .
3. Gdy $K = \mathbb{R}$, to przestrzeń wektorowa $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ nazywamy rzeczywistą.
4. Gdy $K = \mathbb{C}$, to $(V, \mathbb{C}, +, \cdot)$ nazywamy zespoloną.
5. Zamiast pisać $(V, K, +, \cdot)$ często piszemy " V jest przestrzenią wektorową".
6. Jeśli $x, y \in V$, to zapis $x - y$ oznaczamy $x + (-y)$, gdzie $-y$ jest elementem przeciwnym w grupie addytywnej $(V, +)$.
7. Element neutralny w grupie $(V, +)$ oznaczamy Θ i nazywamy wektorem zerowym.

Przykład 2.1.

$(\mathbb{R}^N = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_N, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ jest przestrzenią wektorową, gdzie działania są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned}\forall x = (x_1, \dots, x_N), y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N : \\ x \oplus y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N) \in \mathbb{R}^N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \\ \alpha \odot x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_N) \in \mathbb{R}^N.\end{aligned}$$

Przykład 2.2.

K - dowolne ciało

$(K^N = \underbrace{K \times \dots \times K}_N, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ - przestrzeń wektorowa z działaniami:

$$\begin{aligned}\forall x = (x_1, \dots, x_N), y = (y_1, \dots, y_N) \in K^N : \\ x \oplus y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in K, \forall x = (x_1, \dots, x_N) \in K^N : \\ \alpha \odot x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_N).\end{aligned}$$

3 Podprzestrzenie wektorowe**4 Liniowa niezależność wektorów****5 Baza**

6 Wymiar przestrzeni wektorowej

Twierdzenie 6.1. *Wszystkie bazy danej przestrzeni wektorowej są równoliczne.*

Wniosek. (*twierdzenie Steinera*)

Jeśli pewna baza przestrzeni V ma n elementów, to każda inna baza tej przestrzeni ma też n elementów.

Definicja 6.1.

- *Jeśli przestrzeń wektorowa V ma skończoną bazę, to mówimy, że jest skończenie wymiarowa i oznaczamy $\dim V$.*
- *Jeśli przestrzeń V ma nieskończoną bazę, to mówimy, że jest nieskończenie wymiarowa i wówczas oznaczamy $\dim V = \infty$.*

Uwaga: Powyższa definicja jest poprawna ponieważ wszystkie bazy są równoliczne.

Twierdzenie 6.2.

Założenia: V w przestrzeni wektorowej, $V_1 \subseteq V$ - podprzestrzeń
Teza:

1. $\dim V_1 \leq \dim V$
2. *Jeśli $\dim V_1 = \dim V < \infty$, to $V = V_1$??*

Dowód.

1. Niech B będzie bazą $V_1 \implies \dim V_1 = \#B$
 $\implies B$ jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych w V
 $\implies B$ można rozszerzyć do bazy
 $A \supseteq B$ w V
 $\dim V = \#A \geq \#B = \dim V_1$
2. Niech B będzie bazą w V_1
 $\implies B$ mogą rozszerzyć do bazy $A \supseteq B$ w V

$$\text{ale } \sharp A = \sharp B < \infty \implies A = B$$

$$V_1 = \text{lin}(B) = \text{lin}(A) = V$$

□

7 Odwzorowania liniowe

Definicja 7.1.

Niech V i W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K . Mówimy, że odwzorowanie $\varphi : V \mapsto W$ jest **liniowe**, jeśli

$$\forall x, y \in V, \alpha, \beta \in K : \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$$

Twierdzenie 7.1. $\varphi : V \mapsto W$ jest odwzorowaniem liniowym \iff

$$\begin{cases} \forall x, y \in V : \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) & (1) \\ \forall \alpha \in K, x \in V : \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x) & (2) \end{cases}$$

Dowód.

" \Leftarrow "

$$\varphi(\alpha x + \beta y) \stackrel{1)}{=} \varphi(\alpha x) + \varphi(\beta y) \stackrel{2)}{=} \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$$

" \Rightarrow "

- $\varphi(x + y) = \varphi(1 \cdot x + 1 \cdot y) \stackrel{\text{zał}}{=} 1 \cdot \varphi(x) + 1 \cdot \varphi(y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- $\varphi(\alpha x) = \varphi(\alpha x + 0 \cdot x) \stackrel{\text{zał}}{=} \alpha \varphi(x) + 0 \cdot \varphi(x) = \alpha \varphi(x) + \Theta = \alpha \varphi(x)$

□

Twierdzenie 7.2. $\varphi : V \mapsto W$ jest liniowe \iff

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall v_1, \dots, v_k \in V, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K : \varphi\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi(v_i)$$

Dowód. indukcją matematyczną na k (ćw.)

Twierdzenie 7.3.

Jeśli $\varphi : V \mapsto W$ jest odwzorowaniem liniowym to $\varphi(\Theta_v) = \Theta_w$

Dowód.

$$\varphi(\Theta_v) = \varphi(0 \cdot v) = 0 \cdot \varphi(v) = \Theta_w$$

□

Przykład 7.1.

1) $id_v : V \ni v \mapsto v \in V$ jest odwzorowaniem liniowym

$$id_v(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha \cdot id_v(v_1) + \beta \cdot id_v(v_2)$$

2) **Odwzorowanie zerowe**

$$\varphi : V \ni v \mapsto \Theta_w \in W$$

$$\Theta(\alpha v_1 + \beta v_2) = \Theta_w = \alpha \cdot \Theta_w + \beta \cdot \Theta_w = \alpha \varphi(v_1) + \beta \varphi(v_2)$$

3) Niech $V = V_1 \oplus V_2$

Wówczas $\forall v \in V \exists! v_1 \in V_1 \exists! v_2 \in V_2 : v = v_1 + v_2$

Definiujemy odwzorowanie $\pi_1 : V \ni v \mapsto v_1 \in V_1$

- rzutowanie na V_1 w kierunku V_2

Analogicznie $\pi_2 : V \ni v \mapsto v_2 \in V_2$

- rzutowanie na V_2 w kierunku V_1

Udowodnimy, że π_1 jest liniowe (dowód dla π_2 analogiczny).

Niech $x, y \in V, \alpha, \beta \in K$

Wówczas

$$x = x_1 + x_2$$

$$y = y_1 + y_2$$

gdzie $x_1, y_1 \in V_1, x_2, y_2 \in V_2$

$$\begin{aligned} \pi_1(\overbrace{\alpha x + \beta y}^v) &= \pi_1(\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2)) \\ &= \pi_1(\underbrace{(\alpha x_1 + \beta y_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(\alpha x_2 + \beta y_2)}_{\in V_2}) \\ &= \alpha x_1 + \beta y_1 \\ &= \alpha \pi_1(x) + \beta \pi_1(y) \end{aligned}$$

«jakis rysunek tutaj»

4) Niech W będzie podprzestrzenią wektorową w V

$$\kappa : W \ni w \mapsto w \in V - \text{zanurzenie}$$

Przykład «rysunek dwie osie i \mathbb{R} do 2»

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni x &\mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R} \times \{0\} \ni (x, 0) &\mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

5) V - przestrzeń wektorowa, $\lambda \in K$

Odwzorowanie $\varphi_\lambda : v \ni v \mapsto \lambda v \in V$ jest liniowe i nazywamy je **homotetią**.

6) I - przedział w \mathbb{R}

$$\mathcal{C}^\infty(I) = \{f : I \mapsto \mathbb{R} : f \text{ jest w } \mathcal{C}^\infty\}$$

$$F : \mathcal{C}^\infty(I) \ni f \mapsto f' \in \mathcal{C}^\infty(I)$$

$$\begin{aligned} \text{Ponieważ } (f + g)' &= f' + g' \\ (\alpha f)' &= \alpha \cdot f' \end{aligned}$$

Zatem F jest odwzorowaniem liniowym.

Definicja 7.2. $\varphi : v \mapsto W$ - liniowe

- (a) φ jest izomorfizmem, jeśli φ jest bijekcją.
- (b) φ jest monoformizmem, jeśli φ jest iniekcją.
- (c) φ jest epimorfizmem, jeśli φ jest surjekcją.

Jeśli $V = W$, to φ nazywamy **endomorfizmem**.

Jeśli $V = W$, φ jest bijekcją, to φ nazywamy **automorfizmem**.

Przykład 7.2.

- 1) id_v - izomorfizm (automorfizm)
- 2) Odwzorowanie zerowe $\varphi : V \mapsto W$
jest monoformizmem $\iff V = \Theta$
jest epimorfizmem $\iff W = \Theta$
- 3) $V = V_1 \oplus V_2$ $\pi_1 : V \mapsto V_1$ rzutowanie
 π_1 jest epimorfizmem, bo $\forall v_1 \in V_1 : \pi_1(v_1) = v_1$
- 4) Zanurzenie φ i $W \ni w \mapsto w \in V$
jest monoformizmem ...
jest epimorfizmem $\iff V = W$

5) Homotetia $\varphi : V \ni v \mapsto \lambda v \in V$

Gdy $\lambda \neq 0$, to φ jest monomorfizmem, bo $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$

$$\implies \lambda v_1 = \lambda v_2 \Big/ \lambda^{-1}, \text{ bo } \lambda \neq 0$$

$$\lambda^{-1} \lambda v_1 = \lambda^{-1} \lambda v_2$$

$$1 \cdot v_1 = 1 \cdot v_2$$

$$v_1 = v_2$$

$$\implies \varphi \text{ -- monoformizm}$$

Gdy $\lambda \neq 0$ to φ jest epimorfizmem, bo

$$\forall w \in V \exists v \in V : \varphi(v) = w$$

Niech $w \in V$

$$v := \lambda^{-1} w$$

$$\varphi(v) = \lambda v = \lambda \lambda^{-1} w = w$$

6) $F : \mathcal{C}^\infty(I) \ni f \mapsto f' \in \mathcal{C}^\infty(I)$

– nie jest monomorfizmem, bo $(2x + 1)' = (2x + 2)'$

– jest epimorfizmem, bo każda funkcja ciągła ma pierwotną

Twierdzenie 7.4.

Niech V, W - przestrzenie wektorowe nad ciałem K

v_1, \dots, v_n - baza V

w_1, \dots, w_n - dowolne wektory W

Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe

$\varphi : V \mapsto W$ takie, że $\varphi(v_i) = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

Heureka.

Jak należy zdefiniować φ , aby było liniowe?

Niech $v \in V$. Ponieważ v_1, \dots, v_n są bazą V , to

$$\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

Ponieważ φ ma być liniowe, to

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\varphi(v_i)}_{w_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$$

Dowód.

Niech $v \in V$. Wówczas

$$\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

Zdefiniujmy

$$\varphi(v) := \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$$

Należy pokazać:

1. φ - liniowe
2. $\varphi(v_i) = w_i \quad \forall i = 1 \dots n$

Ad 1.

Niech $x, y \in V$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Należy pokazać, że $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$

Ponieważ v_1, \dots, v_n jest bazą V to

$$\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

$$\exists! \beta_1, \dots, \beta_n \in K : y = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$$

Wówczas

$$\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \beta \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i + \beta \beta_i) v_i$$

Oraz to przedstawienie jest jednoznaczne, to znaczy:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha x + \beta y) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i + \beta \beta_i) v_i\right) \stackrel{\text{def } \varphi}{=} \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i + \beta \beta_i) w_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \beta \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y) \end{aligned}$$

Ad 2.

? $\varphi(v_i) \in W_i$ $i = 1, \dots, n$

v_i przedstawia się w bazie v_1, \dots, v_n jako:

$$v_1 = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_n$$

(na jeden sposób), zatem

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= \varphi(0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_n) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} 0 \cdot w_1 + \dots + 0 \cdot w_{i-1} + 1 \cdot w_i + 0 \cdot w_{i+1} + \dots + 0 \cdot w_n \\ &= w_i \end{aligned}$$

□