

# Algebra liniowa z geometrią 2

## 1 Terminy kolowium

- 12.04 - pierwszy semestr
- 24.05 - drugi semestr (1-11) Jurlewicz

## 2 Przestrzenie wektorowe

**Uwagi:**  $(V, K, \oplus, \odot)$  - przestrzeń wektorowa

1. Elementy ciała  $K$  nazywamy **skalarami**, a elementy zbioru  $V$  **wektorami**.
2. Dla uproszczenia zapisu na skalarach i wektorach działania będziemy oznaczali  $+$ ,  $\cdot$ .
3. Gdy  $K = \mathbb{R}$ , to przestrzeń wektorowa  $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$  nazywamy rzeczywistą.
4. Gdy  $K = \mathbb{C}$ , to  $(V, \mathbb{C}, +, \cdot)$  nazywamy zespoloną.
5. Zamiast pisać  $(V, K, +, \cdot)$  często piszemy " $V$  jest przestrzenią wektorową".
6. Jeśli  $x, y \in V$ , to zapis  $x - y$  oznaczamy  $x + (-y)$ , gdzie  $-y$  jest elementem przeciwnym w grupie addytywnej  $(V, +)$ .
7. Element neutralny w grupie  $(V, +)$  oznaczamy  $\Theta$  i nazywamy wektorem zerowym.

**Przykład 2.1.**

$(\mathbb{R}^N = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_N, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$  jest przestrzenią wektorową, gdzie działania są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned}\forall x = (x_1, \dots, x_N), y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N : \\ x \oplus y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N) \in \mathbb{R}^N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \\ \alpha \odot x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_N) \in \mathbb{R}^N.\end{aligned}$$

**Przykład 2.2.**

$K$  - dowolne ciało

$(K^N = \underbrace{K \times \dots \times K}_N, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$  - przestrzeń wektorowa z działaniami:

$$\begin{aligned}\forall x = (x_1, \dots, x_N), y = (y_1, \dots, y_N) \in K^N : \\ x \oplus y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in K, \forall x = (x_1, \dots, x_N) \in K^N : \\ \alpha \odot x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_N).\end{aligned}$$

**3 Podprzestrzenie wektorowe****4 Liniowa niezależność wektorów****5 Baza**

## 6 Wymiar przestrzeni wektorowej

**Twierdzenie 6.1.** *Wszystkie bazy danej przestrzeni wektorowej są równoliczne.*

**Wniosek.** ( *twierdzenie Steinera* )

*Jeśli pewna baza przestrzeni  $V$  ma  $n$  elementów, to każda inna baza tej przestrzeni ma też  $n$  elementów.*

**Definicja 6.1.**

- *Jeśli przestrzeń wektorowa  $V$  ma skończoną bazę, to mówimy, że jest skończenie wymiarowa i oznaczamy  $\dim V$ .*
- *Jeśli przestrzeń  $V$  ma nieskończoną bazę, to mówimy, że jest nieskończenie wymiarowa i wówczas oznaczamy  $\dim V = \infty$ .*

**Uwaga:** Powyższa definicja jest poprawna ponieważ wszystkie bazy są równoliczne.

**Twierdzenie 6.2.**

**Założenia:**  $V$  w przestrzeni wektorowej,  $V_1 \subseteq V$  - podprzestrzeń  
**Teza:**

1.  $\dim V_1 \leq \dim V$
2. *Jeśli  $\dim V_1 = \dim V < \infty$ , to  $V = V_1$  ??*

**Dowód.**

1. Niech  $B$  będzie bazą  $V_1 \implies \dim V_1 = \#B$   
 $\implies B$  jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych w  $V$   
 $\implies B$  można rozszerzyć do bazy  
 $A \supseteq B$  w  $V$   
 $\dim V = \#A \geq \#B = \dim V_1$
2. Niech  $B$  będzie bazą w  $V_1$   
 $\implies B$  mogą rozszerzyć do bazy  $A \supseteq B$  w  $V$

$$\text{ale } \sharp A = \sharp B < \infty \implies A = B$$

$$V_1 = \text{lin}(B) = \text{lin}(A) = V$$

□

## 7 Odwzorowania liniowe

### Definicja 7.1.

Niech  $V$  i  $W$  będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $K$ . Mówimy, że odwzorowanie  $\varphi : V \mapsto W$  jest **liniowe**, jeśli

$$\forall x, y \in V, \alpha, \beta \in K : \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$$

**Twierdzenie 7.1.**  $\varphi : V \mapsto W$  jest odwzorowaniem liniowym  $\iff$

$$\begin{cases} \forall x, y \in V : \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) & (1) \\ \forall \alpha \in K, x \in V : \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x) & (2) \end{cases}$$

**Dowód.**

" $\Leftarrow$ "

$$\varphi(\alpha x + \beta y) \stackrel{1)}{=} \varphi(\alpha x) + \varphi(\beta y) \stackrel{2)}{=} \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$$

" $\Rightarrow$ "

- $\varphi(x + y) = \varphi(1 \cdot x + 1 \cdot y) \stackrel{\text{zał}}{=} 1 \cdot \varphi(x) + 1 \cdot \varphi(y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- $\varphi(\alpha x) = \varphi(\alpha x + 0 \cdot x) \stackrel{\text{zał}}{=} \alpha \varphi(x) + 0 \cdot \varphi(x) = \alpha \varphi(x) + \Theta = \alpha \varphi(x)$

□

**Twierdzenie 7.2.**  $\varphi : V \mapsto W$  jest liniowe  $\iff$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall v_1, \dots, v_k \in V, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K : \varphi\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi(v_i)$$

**Dowód.** indukcją matematyczną na  $k$  (ćw.)

**Twierdzenie 7.3.**

*Jeśli  $\varphi : V \mapsto W$  jest odwzorowaniem liniowym to  $\varphi(\Theta_v) = \Theta_w$*

**Dowód.**

$$\varphi(\Theta_v) = \varphi(0 \cdot v) = 0 \cdot \varphi(v) = \Theta_w$$

□

**Przykład 7.1.**

1)  $id_v : V \ni v \mapsto v \in V$  jest odwzorowaniem liniowym

$$id_v(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha \cdot id_v(v_1) + \beta \cdot id_v(v_2)$$

2) **Odwzorowanie zerowe**

$$\varphi : V \ni v \mapsto \Theta_w \in W$$

$$\Theta(\alpha v_1 + \beta v_2) = \Theta_w = \alpha \cdot \Theta_w + \beta \cdot \Theta_w = \alpha \varphi(v_1) + \beta \varphi(v_2)$$

3) Niech  $V = V_1 \oplus V_2$

Wówczas  $\forall v \in V \exists! v_1 \in V_1 \exists! v_2 \in V_2 : v = v_1 + v_2$

Definiujemy odwzorowanie  $\pi_1 : V \ni v \mapsto v_1 \in V_1$

- rzutowanie na  $V_1$  w kierunku  $V_2$

Analogicznie  $\pi_2 : V \ni v \mapsto v_2 \in V_2$

- rzutowanie na  $V_2$  w kierunku  $V_1$

Udowodnimy, że  $\pi_1$  jest liniowe (dowód dla  $\pi_2$  analogiczny).

Niech  $x, y \in V, \alpha, \beta \in K$

Wówczas

$$x = x_1 + x_2$$

$$y = y_1 + y_2$$

gdzie  $x_1, y_1 \in V_1, x_2, y_2 \in V_2$

$$\begin{aligned} \pi_1(\overbrace{\alpha x + \beta y}^v) &= \pi_1(\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2)) \\ &= \pi_1(\underbrace{(\alpha x_1 + \beta y_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(\alpha x_2 + \beta y_2)}_{\in V_2}) \\ &= \alpha x_1 + \beta y_1 \\ &= \alpha \pi_1(x) + \beta \pi_1(y) \end{aligned}$$

«jakis rysunek tutaj»

4) Niech  $W$  będzie podprzestrzenią wektorową w  $V$

$$\kappa : W \ni w \mapsto w \in V - \text{zanurzenie}$$

Przykład «rysunek dwie osie i  $\mathbb{R}$  do 2»

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni x &\mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R} \times \{0\} \ni (x, 0) &\mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

5)  $V$  - przestrzeń wektorowa,  $\lambda \in K$

Odwzorowanie  $\varphi_\lambda : v \ni v \mapsto \lambda v \in V$  jest liniowe i nazywamy je **homotetią**.

6)  $I$  - przedział w  $\mathbb{R}$

$$\mathcal{C}^\infty(I) = \{f : I \mapsto \mathbb{R} : f \text{ jest w } \mathcal{C}^\infty\}$$

$$F : \mathcal{C}^\infty(I) \ni f \mapsto f' \in \mathcal{C}^\infty(I)$$

$$\begin{aligned} \text{Ponieważ } (f + g)' &= f' + g' \\ (\alpha f)' &= \alpha \cdot f' \end{aligned}$$

Zatem  $F$  jest odwzorowaniem liniowym.

**Definicja 7.2.**  $\varphi : v \mapsto W$  - liniowe

- (a)  $\varphi$  jest izomorfizmem, jeśli  $\varphi$  jest bijekcją.
- (b)  $\varphi$  jest monoformizmem, jeśli  $\varphi$  jest iniekcją.
- (c)  $\varphi$  jest epimorfizmem, jeśli  $\varphi$  jest surjekcją.

Jeśli  $V = W$ , to  $\varphi$  nazywamy **endomorfizmem**.

Jeśli  $V = W$ ,  $\varphi$  jest bijekcją, to  $\varphi$  nazywamy **automorfizmem**.

**Przykład 7.2.**

- 1)  $id_v$  - izomorfizm (automorfizm)
- 2) Odwzorowanie zerowe  $\varphi : V \mapsto W$   
jest monoformizmem  $\iff V = \Theta$   
jest epimorfizmem  $\iff W = \Theta$
- 3)  $V = V_1 \oplus V_2$        $\pi_1 : V \mapsto V_1$  rzutowanie  
 $\pi_1$  jest epimorfizmem, bo  $\forall v_1 \in V_1 : \pi_1(v_1) = v_1$
- 4) Zanurzenie  $\varphi$  i  $W \ni w \mapsto w \in V$   
jest monoformizmem ...  
jest epimorfizmem  $\iff V = W$

5) Homotetia  $\varphi : V \ni v \mapsto \lambda v \in V$

Gdy  $\lambda \neq 0$ , to  $\varphi$  jest monomorfizmem, bo  $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$

$$\implies \lambda v_1 = \lambda v_2 \Big/ \lambda^{-1}, \text{ bo } \lambda \neq 0$$

$$\lambda^{-1} \lambda v_1 = \lambda^{-1} \lambda v_2$$

$$1 \cdot v_1 = 1 \cdot v_2$$

$$v_1 = v_2$$

$$\implies \varphi \text{ -- monomorfizm}$$

Gdy  $\lambda \neq 0$  to  $\varphi$  jest epimorfizmem, bo

$$\forall w \in V \exists v \in V : \varphi(v) = w$$

Niech  $w \in V$

$$v := \lambda^{-1} w$$

$$\varphi(v) = \lambda v = \lambda \lambda^{-1} w = w$$

6)  $F : \mathcal{C}^\infty(I) \ni f \mapsto f' \in \mathcal{C}^\infty(I)$

– nie jest monomorfizmem, bo  $(2x + 1)' = (2x + 2)'$

– jest epimorfizmem, bo każda funkcja ciągła ma pierwotną



**Twierdzenie 7.4.**

Niech  $V, W$  - przestrzenie wektorowe nad ciałem  $K$

$v_1, \dots, v_n$  - baza  $V$

$w_1, \dots, w_n$  - dowolne wektory  $W$

Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe

$\varphi : V \mapsto W$  takie, że  $\varphi(v_i) = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

**Heureka.**

Jak należy zdefiniować  $\varphi$ , aby było liniowe?

Niech  $v \in V$ . Ponieważ  $v_1, \dots, v_n$  są bazą  $V$ , to

$$\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

Ponieważ  $\varphi$  ma być liniowe, to

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\varphi(v_i)}_{w_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$$

**Dowód.**

Niech  $v \in V$ . Wówczas

$$\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

Zdefiniujmy

$$\varphi(v) := \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$$

Należy pokazać:

1.  $\varphi$  - liniowe
2.  $\varphi(v_i) = w_i \quad \forall i = 1 \dots n$

**Ad 1.**

Niech  $x, y \in V$ ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Należy pokazać, że  $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$

Ponieważ  $v_1, \dots, v_n$  jest bazą  $V$  to

$$\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

$$\exists! \beta_1, \dots, \beta_n \in K : y = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$$

Wówczas

$$\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \beta \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i + \beta \beta_i) v_i$$

Oraz to przedstawienie jest jednoznaczne, to znaczy:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha x + \beta y) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i + \beta \beta_i) v_i\right) \stackrel{\text{def } \varphi}{=} \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i + \beta \beta_i) w_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \beta \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y) \end{aligned}$$