Algebra liniowa z geometrią 2

1 Terminy kolowium

- 12.04 - pierwszy semestr
- 24.05 - drugi semestr (1-11) Jurlewicz

2 Przestrzenie wektorowe

Uwagi: $(V, K, \oplus, \odot)$ - przestrzeń wektorowa

1. Elementy ciala K nazywamy **skalarami**, a elementy zbioru V **wektorami**.
2. Dla uproszczenia zapisu na skalarach i wektorach działania będziemy oznaczali $+, \cdot$.
3. Gdy $K = \mathbb{R}$, to przestrzeń wektorowa $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ nazywamy rzeczywistą.
4. Gdy $K = \mathbb{C}$, to $(V, \mathbb{C}, +, \cdot)$ nazywamy zespoloną.
5. Zamiast pisać $(V, K, +, \cdot)$ często piszemy "V jest przestrzenią wektorową".
6. Jeśli $x, y \in V$, to zapis $x - y$ oznaczamy $x + (-y)$, gdzie $-y$ jest elementem przeciwnym w grupie addytywnej $(V, +)$.
7. Element neutralny w grupie $(V, +)$ oznaczamy Θ i nazywamy wektorem zerowym.

Przykład 2.1.
$(\mathbb{R}^N = \underbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{N}, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ *jest przestrzenią wektorową, gdzie działania są zdefiniowane następująco:*

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_N), y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N :$$
$$x \oplus y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_N + y_N) \in \mathbb{R}^N$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N :$$
$$\alpha \odot x := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Przykład 2.2.
K - dowolne ciało
$(K^N = \underbrace{K\times\ldots\times K}_{N}, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ *- przestrzeń wektorowa z działaniami:*

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_N), y = (y_1, \ldots, y_N) \in K^N :$$
$$x \oplus y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_N + y_N)$$

$$\forall \alpha \in K, \forall x = (x_1, \ldots, x_N) \in K^N :$$
$$\alpha \odot x := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_N).$$

3 Podprzestrzenie wektorowe

4 Liniowa niezależność wektorów

5 Baza

6 Wymiar przestrzeni wektorowej

Twierdzenie 6.1. *Wszystkie bazy danej przestrzeni wektorowej są równoliczne.*

Wniosek. *(twierdzenie Steinera)*
Jeśli pewna baza przestrzeni V ma n elementów, to każda inna baza tej przestrzeni ma też n elementów.

Definicja 6.1.

- *Jeśli przestrzeń wektorowa V ma skończoną bazę, to mówimy, że jest skończenie wymiarowa i oznaczamy $dimV$.*
- *Jeśli przestrzeń V ma nieskończoną bazę, to mówimy, że jest nieskończenie wymiarowa i wówczas oznaczamy $dimV = \infty$.*

Uwaga: Powyższa definicja jest poprawna ponieważ wszystkie bazy są równoliczne.

Twierdzenie 6.2.

Założenia: *V w przestrzeni wektorowej, $V_1 \subseteq V$ - podprzestrzeń*
Teza:

1. $dimV_1 \leq dimV$
2. *Jeśli* $dimV_1 = dim < \infty$, *to* $V = V_1$ *??*

Dowód:

1. Niech B będzie bazą $V_1 \implies dimV_1 = \#B$
   $\implies B$ jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych w V
   $\implies B$ można rozszerzyć do bazy
   $A \supseteq B$ w V
   $dimV = \#A \geq \#B = dimV_1$
2. Niech B będzie bazą w V_1
   $\implies B$ mogę rozszerzyć do bazy $A \geq B$ w V
   ale $\#A = \#B < \infty \implies A = B$

   $V_1 = lin(B) = lin(A) = V$
   $\square$