

Algebra liniowa z geometrią 2

1 Terminy kolowium

- 12.04 - pierwszy semestr
- 24.05 - drugi semestr (1-11) Jurlewicz

2 Przestrzenie wektorowe

Uwagi: (V, K, \oplus, \odot) - przestrzeń wektorowa

1. Elementy ciała K nazywamy **skalarami**, a elementy zbioru V **wektorami**.
2. Dla uproszczenia zapisu na skalarach i wektorach działania będziemy oznaczali $+$, \cdot .
3. Gdy $K = \mathbb{R}$, to przestrzeń wektorowa $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ nazywamy rzeczywistą.
4. Gdy $K = \mathbb{C}$, to $(V, \mathbb{C}, +, \cdot)$ nazywamy zespoloną.
5. Zamiast pisać $(V, K, +, \cdot)$ często piszemy " V jest przestrzenią wektorową".
6. Jeśli $x, y \in V$, to zapis $x - y$ oznaczamy $x + (-y)$, gdzie $-y$ jest elementem przeciwnym w grupie addytywnej $(V, +)$.
7. Element neutralny w grupie $(V, +)$ oznaczamy Θ i nazywamy wektorem zerowym.

Przykład 2.1.

$(\mathbb{R}^N = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_N, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ jest przestrzenią wektorową, gdzie działania są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned}\forall x = (x_1, \dots, x_N), y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N : \\ x \oplus y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N) \in \mathbb{R}^N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \\ \alpha \odot x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_N) \in \mathbb{R}^N.\end{aligned}$$

Przykład 2.2.

K - dowolne ciało

$(K^N = \underbrace{K \times \dots \times K}_N, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ - przestrzeń wektorowa z działaniami:

$$\begin{aligned}\forall x = (x_1, \dots, x_N), y = (y_1, \dots, y_N) \in K^N : \\ x \oplus y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in K, \forall x = (x_1, \dots, x_N) \in K^N : \\ \alpha \odot x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_N).\end{aligned}$$

3 Podprzestrzenie wektorowe**4 Liniowa niezależność wektorów****5 Baza**

6 Wymiar przestrzeni wektorowej

Twierdzenie 6.1. *Wszystkie bazy danej przestrzeni wektorowej są równoliczne.*

Wniosek. (*twierdzenie Steinera*)

Jeśli pewna baza przestrzeni V ma n elementów, to każda inna baza tej przestrzeni ma też n elementów.

Definicja 6.1.

- Jeśli przestrzeń wektorowa V ma skończoną bazę, to mówimy, że jest skończenie wymiarowa i oznaczamy $\dim V$.
- Jeśli przestrzeń V ma nieskończoną bazę, to mówimy, że jest nieskończenie wymiarowa i wówczas oznaczamy $\dim V = \infty$.

Uwaga: Powyższa definicja jest poprawna ponieważ wszystkie bazy są równoliczne.

Twierdzenie 6.2.

Założenia: V w przestrzeni wektorowej, $V_1 \subseteq V$ - podprzestrzeń
Teza:

1. $\dim V_1 \leq \dim V$
2. Jeśli $\dim V_1 = \dim < \infty$, to $V = V_1$??

Dowód.

1. Niech B będzie bazą $V_1 \implies \dim V_1 = \#B$
 $\implies B$ jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych w V
 $\implies B$ można rozszerzyć do bazy
 $A \supseteq B$ w V
 $\dim V = \#A \geq \#B = \dim V_1$
2. Niech B będzie bazą w V_1
 $\implies B$ mogą rozszerzyć do bazy $A \supseteq B$ w V

$$\text{ale } \sharp A = \sharp B < \infty \implies A = B$$

$$V_1 = \text{lin}(B) = \text{lin}(A) = V$$

□

7 Odwzorowania liniowe

Definicja 7.1.

Niech V i W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K . Mówimy, że odwzorowanie $\varphi : V \mapsto W$ jest **liniowe**, jeśli

$$\forall x, y \in V, \alpha, \beta \in K : \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$$

Twierdzenie 7.1. $\varphi : V \mapsto W$ jest odwzorowaniem liniowym \iff

$$\begin{cases} \forall x, y \in V : \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) & (1) \\ \forall \alpha \in K, x \in V : \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x) & (2) \end{cases}$$

Dowód.

" \Leftarrow "

$$\varphi(\alpha x + \beta y) \stackrel{1)}{=} \varphi(\alpha x) + \varphi(\beta y) \stackrel{2)}{=} \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$$

" \Rightarrow "

- $\varphi(x + y) = \varphi(1 \cdot x + 1 \cdot y) \stackrel{\text{zał}}{=} 1 \cdot \varphi(x) + 1 \cdot \varphi(y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- $\varphi(\alpha x) = \varphi(\alpha x + 0 \cdot x) \stackrel{\text{zał}}{=} \alpha \varphi(x) + 0 \cdot \varphi(x) = \alpha \varphi(x) + \Theta = \alpha \varphi(x)$

□

Twierdzenie 7.2. $\varphi : V \mapsto W$ jest liniowe \iff

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall v_1, \dots, v_k \in V, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K : \varphi\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi(v_i)$$

Dowód. indukcją matematyczną na k (ćw.)

Twierdzenie 7.3.

Jeśli $\varphi : V \mapsto W$ jest odwzorowaniem liniowym to $\varphi(\Theta_v) = \Theta_w$

Dowód.

$$\varphi(\Theta_v) = \varphi(0 \cdot v) = 0 \cdot \varphi(v) = \Theta_w$$

□

Przykład 7.1.

1. $id_v : V \ni v \mapsto v \in V$ jest odwzorowaniem liniowym

$$id_v(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha \cdot id_v(v_1) + \beta \cdot id_v(v_2)$$

2. Odwzorowanie zerowe

$$\varphi : V \ni v \mapsto \Theta_w \in W$$

$$\Theta(\alpha v_1 + \beta v_2) = \Theta_w = \alpha \cdot \Theta_w + \beta \cdot \Theta_w = \alpha \varphi(v_1) + \beta \varphi(v_2)$$

3. Niech $V = V_1 \oplus V_2$

Wówczas $\forall v \in V \exists! v_1 \in V_1 \exists! v_2 \in V_2 : v = v_1 + v_2$

Definiujemy odwzorowanie $\pi_1 : V \ni v \mapsto v_1 \in V_1$

- rzutowanie na V_1 w kierunku V_2

Analogicznie $\pi_2 : V \ni v \mapsto v_2 \in V_2$

- rzutowanie na V_2 w kierunku V_1

Udowodnimy, że π_1 jest liniowe (dowód dla π_2 analogiczny).

Niech $x, y \in V, \alpha, \beta \in K$

Wówczas

$$x = x_1 + x_2$$

$$y = y_1 + y_2$$

gdzie $x_1, y_1 \in V_1, x_2, y_2 \in V_2$

$$\begin{aligned} \pi_1(\overbrace{\alpha x + \beta y}^v) &= \pi_1(\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2)) \\ &= \pi_1(\underbrace{(\alpha x_1 + \beta y_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(\alpha x_2 + \beta y_2)}_{\in V_2}) \\ &= \alpha x_1 + \beta y_1 \\ &= \alpha \pi_1(x) + \beta \pi_1(y) \end{aligned}$$

«jakis rysunek tutaj»

4. Niech W będzie podprzestrzenią wektorową w V

$$\kappa : W \ni w \longmapsto w \in V - \text{zanurzenie}$$

Przykład «rysunek dwie osie i \mathbb{R} do 2»

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni x &\longmapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R} \times \{0\} \ni (x, 0) &\longmapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

5. V - przestrzeń wektorowa, $\lambda \in K$

6. I - przedział w \mathbb{R}