Wstęp do teorii mnogości

Spis treści

1 Program

1. Dowody i elementy logiki.
2. Zbiory i działania na nich.
3. Relacje równoważności.
4. Funkcje.
5. Własności funkcji.
6. Zbiory równoliczne i nierównoliczne.
7. Relacje porządku.
8. Konstukcje liczbowe.
9. Lemat Kuratowskiego-Zorna.

2 Literatura

1. K. Kustowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości*, PWN, 1994
2. H. Rosiowa, *Wstęp do matematyki*, PWN, 2004
3. W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, 1996

3 Zasady oceniania

$$\textbf{WTM:} \begin{cases} \text{ćwiczenia 30h, } \textbf{2} \text{ obecności bez usprawiedliwienia.} \\ \text{wykład 30h.} \end{cases}$$

Ocenia końcowa: **20%** oceny z ćwiczeń + **80%** oceny z egzaminu (I, II termin).

Pegaz: zestawy zadań: A, B - obowiązkowe. Dowody do oceny "DDO".

4 Spójniki logiczne

4.1 Standardowe

$\neg$ (negacja), $\wedge$ (koniunkcja), $\vee$ (alternatywa), $\implies$ (implikacja), $\iff$ (równoważność)

4.2 Inne spójniki

1. **Alternatywa rozłączna** α i β, oznaczamy $\alpha \oplus \beta$.
   Czytamy "... albo ..." lub "albo ..., albo ...".

α	β	$\alpha \oplus \beta$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$(\alpha \oplus \beta) \iff (\neg\alpha \iff \beta) \iff (\alpha \iff \neg\beta) \iff (\neg(\alpha \iff \beta))$$

2. **Dyzjunkcja** *(kreska Sheffera)* α i β, oznaczamy $\alpha \mid \beta$.
   Czytamy "albo nie ..., albo nie .."

α	β	$\alpha \mid \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$(\alpha \mid \beta) \iff (\neg(\alpha \wedge \beta))$$

3. **Binegacja** *(strzałka Pierce'a, funktor Łukasiewicza)* α i β, oznaczamy $\alpha \downarrow \beta$.
   Czytamy "ani ..., ani .."

α	β	$\alpha \downarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$(\alpha \downarrow \beta) \iff (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

4.3 Związki z OAK

Spójniki logiczne mają przyporządkowane bramki logiczne.

- **NOT:** $\alpha \longmapsto \neg\alpha$ (negacja)
- **AND:** $\alpha, \beta \longmapsto \alpha \wedge \beta$ (koniunkcja)
- **NAND:** $\alpha, \beta \longmapsto \neg(\alpha \wedge \beta)$ (dyzjunkcja)
- **OR:** $\alpha, \beta \longmapsto \alpha \vee \beta$ (alternatywa)
- **NOR:** $\alpha, \beta \longmapsto \neg(\alpha \vee \beta) \iff (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \iff (\alpha \downarrow \beta)$ (binegacja)
- **XOR:** $\alpha, \beta \longmapsto \alpha \oplus \beta$ (alternatywa rozłączna)
- **XNOR:** $\alpha, \beta \longmapsto \neg(\alpha \oplus \beta)$ (negacja alternatywy rozłącznej)

5 Rachunek funkcyjny

5.1 Funkcja zdaniowa

Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą zbiorami.

Definicja. Funkcja zdaniowa
Funkcją (formą) zdaniową n zmiennych nazywamy wyrażenie (formułę) $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$*, w którym występuje n zmiennych* $x_1, \ldots, x_n$*, które zmienia się w zdanie logiczne, gdy za zmienne* $x_1, \ldots, x_n$ *podstawimy nazwę dowolnego elementu ze zbiorów* $X_1, \ldots, X_n$.

Definicja. Dziedzina funkcji zdaniowej
Dziedziną *(zakresem zmienności) funkcji zdaniowej* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *nazywamy iloczyn kartezjański* $x_1 \times \ldots \times x_n$ *i zapisujemy* $Z(\varphi) = x_1 \times \ldots \times x_n$.

Definicja.
Mówimy, że n-tka uporządkowona
$(a_1, \ldots, a_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$ *spełnia funkcję zdaniową* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$*, jeżeli zdanie* $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ *jest prawdziwe.*

Definicja. Zbiór spełniania funkcji zdaniowej
Zbiór spełniania *funkcji zdaniowej* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *określamy następująco:*

$$S(\varphi) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n : \varphi(a_1, \ldots, a_n) = 1\}$$

Funkcja zdaniowa $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *jest prawdziwa w zbiorze* $X_1 \times \ldots \times X_n$*, jeżeli* $S(\varphi) = X_1 \times \ldots \times X_n$.

Twierdzenie.
Niech $\varphi(x_1 \times \ldots \times x_n)$, $\psi(x_1 \times \ldots \times x_n)$*, gdzie* $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$ *będą funkcjami zdaniowymi. Wtedy:*

1) $S(\varphi \wedge \psi) = S(\varphi) \cap S(\psi)$

2) $S(\varphi \vee \psi) = S(\varphi) \cup S(\psi)$

3) $S(\neg\varphi) = (X_1 \times \ldots \times X_n) \setminus S(\varphi)$

4) $S(\varphi \implies \psi) = ((X_1 \times \ldots \times X_n) \setminus S(\varphi)) \cup S(\psi)$

5) $S(\varphi \iff \psi) = (S(\varphi) \cap S(\psi)) \cup (((X_1 \times \ldots \times X_n) \cap ((X_1 \times \ldots \times X_n) \setminus S(\psi)))$

Definicja.
*Funkcje zdaniowe $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ i $\psi(x_1, \dots, x_n)$ nazywamy **równoważnymi** jeżeli*

$$S(\varphi) = S(\psi).$$

Zapisujemy:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv \psi(x_1, \dots, x_n)$$

5.2 Kwantyfikatory

- Kwantyfikator ogólny: $\forall$, $\bigwedge$ (dla każdego)
- Kwantyfikator szczególny: $\exists$, $\bigvee$ (istnieje)
  $\exists!$, (istnieje dokładnie jeden)

5.3 Prawa rachunku funkcyjnego

Twierdzenie. Prawa de Morgana

$$\begin{cases} \neg(\exists x \in X : \varphi(x)) \iff \forall x \in X : \neg\varphi(x) \\ \neg(\forall x \in X : \varphi(x)) \iff \exists x \in X : \neg\varphi(x) \end{cases}$$

Twierdzenie. Prawo egzemplifikacji

$$(\forall x \in X : \varphi(x)) \implies (\exists x \in X : \varphi(x))$$

Twierdzenie. Prawo przestawiania kwantyfikatorów

$$(\forall x \in X, \forall y \in Y : \varphi(x, y)) \iff (\forall y \in Y, \forall x \in X : \varphi(x, y))$$

$$(\exists x \in X, \exists y \in Y : \varphi(x, y)) \iff (\exists y \in Y, \exists x \in X : \varphi(x, y))$$

$$(\exists x \in X, \forall y \in Y : \varphi(x, y)) \implies (\forall y \in Y, \exists x \in X : \varphi(x, y))$$

$\impliedby$ *nie zachodzi!!*

Twierdzenie. Prawo włączania i wyłączania kwantyfikatorów

$$\begin{cases} \forall x \in X : (\varphi(x) \vee \psi) \iff (\forall x \in X : \varphi(x)) \vee \psi \\ \exists x \in X : (\varphi(x) \vee \psi) ? (\exists x \in X : \varphi(x)) \vee \psi \\ \ldots \end{cases}$$

Twierdzenie. Prawo rodzielności kwantyfikatora ogólnego względem koniunkcji

$$\begin{cases} \forall x \in X : (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \iff (\forall x \in X : \varphi(x)) \wedge (\forall x \in X : \psi(x)) \\ \forall x \in X : (\varphi(x) \vee \psi(x)) \impliedby (\forall x \in X : \varphi(x)) \vee (\forall x \in X : \psi(x)) \\ \ldots \end{cases}$$

Przykład. Prawo rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem implikacji

$$(\forall x \in X : (\varphi(x) \implies \psi(x))) \implies ((\forall x \in X : \varphi(x)) \implies (\forall x \in X : \psi(x))$$

$$\impliedby \textit{ nie zachodzi}$$

Niech:

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \\ &\psi(x) = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0\} \\ &X = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wtedy:

$$\underbrace{\underbrace{(\forall x \in \mathbb{R} : (x < 0 \implies x + 1 > 0))}_{\textit{fałsz}} \impliedby \underbrace{(\underbrace{(\forall x \in \mathbb{R} : x < 0)}_{\textit{fałsz}} \implies \underbrace{(\forall x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0))}_{\textit{fałsz}}}_{\textit{prawda}}}_{\textit{fałsz}}$$

Przykład. Prawo rodzielności kwantyfikatora szczególnego względem koniunkcji

$$(\exists x \in X : (\varphi(x) \wedge \psi(x))) \implies ((\exists x \in X : \varphi(x)) \wedge (\exists x \in X : \psi(x))$$

$$\impliedby \textit{ nie zachodzi}$$

Niech:

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) = \{2 \mid x : x \in \mathbb{N}\} \textit{parzyste}\\
&\psi(x) = \{\neg 2 \mid x : x \in \mathbb{N}\} \textit{nieparzyste}\\
&X = \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Wtedy:

$$\underbrace{\underbrace{(\exists x \in \mathbb{N} : (2 \mid x \wedge \neg 2 \mid x))}_{\textit{fałsz}} \impliedby \underbrace{((\underbrace{\exists x \in \mathbb{N} : 2 \mid x)}_{\textit{prawda}} \wedge \underbrace{(\exists x \in \mathbb{N} : \neg 2 \mid x))}_{\textit{prawda}}}_{\textit{prawda}}}_{\textit{fałsz}}$$

Uwaga:

1. Dla formy zdaniowej jednej zmiennej zachodzi:

$$(\forall x : P(x) \implies (\exists x \in X : P(x)))$$

2. Dla formy zdaniowej dwóch zmiennych zachodzi:

$$\begin{array}{lcr}
(\forall x, \forall y : P(x,y)) & \iff & (\forall y, \forall x : P(x,y))\\
\Downarrow & & \Downarrow\\
(\exists x, \forall y : P(x,y)) & & (\exists y, \forall x : P(x,y))\\
\Downarrow & & \Downarrow\\
(\forall y, \exists x : P(x,y)) & & (\forall x, \exists y : P(x,y))\\
\Downarrow & & \Downarrow\\
(\exists y, \exists x : P(x,y)) & & (\exists x, \exists y : P(x,y))
\end{array}$$

6 Zbiory i działania na zbiorach

6.1 Pojęcia

- Pojęcie zbioru jest pojęciem pierwotnym.

$$\begin{aligned}&\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C} - \text{zbiory liczbowe}\\&\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\} \qquad \textit{(Pezno)}\\&\mathbb{N}_1=\{1,2,\ldots\}\end{aligned}$$

- Pojęcie "należenia do zbioru"

$$1\in\mathbb{N}, (\neg(\sqrt{2}\in\mathbb{N})) \iff (\sqrt{2}\notin\mathbb{N})$$

- Zasada równości zbiorów

$$\begin{aligned}&A=B, tzn.\forall x: \underbrace{(x\in A \implies x\in B)}_{A\subset B}\wedge\underbrace{(x\in B \implies x\in A)}_{B\subset A}\\&A\subset B, wtw.\forall x: (x\in A \implies x\in B)\end{aligned}$$

To znaczy, aby udowodnić, że $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ dowodzimy

$$\forall x\begin{cases} x\in A \implies x\in B\\ x\in B \implies x\in A\end{cases}$$

$$A\subset B\wedge B\subset A$$

- Oznaczamy

$$\begin{aligned}&\{a,b\} && \text{para uporządkowana}\\&\{a\} && \text{singleton}\\&\{a,a\}=\{a\}\end{aligned}$$

- Definiowanie zbiorów
  1. Wypisujemy elementy zbioru
  2. $\mathbf{A}=\{\mathbf{x}\in\mathbf{X}:\mathbf{W}(\mathbf{x})\}$
     Par $=\{x\in\mathbb{N}:\underbrace{2\mid x}_{W(x)}\}$, $\qquad \{\underbrace{\{1,2\}}_{\text{jeden element}}\}\neq\{1,2\}$

Definicja. Zbiór potęgowy
Zbiorem potęgowym zbioru A nazywamy zbiór złożony ze wszystkich pozbiorów zbioru A, tzn. $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}$

Zbiór potęgowy $\mathcal{P}(A)$ zbioru A.

$$\begin{aligned}
&\{\varnothing, A\} \subset \mathcal{P}(A) \longleftarrow \\
&\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\} \\
&\mathcal{P}(\{1\}) = \{\varnothing, \{1\}\} \\
&\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

6.2 Działania na zbiorach

Definicja. Suma zbiorów
Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony z tych i tylko z tych elementów, które należą do co najmniej jednego z tych zbiorów.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Twierdzenie.
Jeżeli A i B są zbiorami, to wtedy:

1. $A \subset A \cup B, \qquad B \subset A \cup B$
2. $(A \subset C \wedge B \subset C) \implies A \cup B \subset C$

Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną zbiorów (tzn. zbiorami, którego elemantami są zbiory).

Definicja. Suma rodziny
Suma rodziny $\mathcal{A}$ jest zbiorem złożonym z tych i tylko tych elementów, które należą do co najmniej jednego spośród zbiorów należących do rodziny $\mathcal{A}$, tzn. $x \in \bigcup \mathcal{A}$ *wtw.* $\exists A \in \mathcal{A} : x \in \mathcal{A}$

Jest uogólnienie pojęcia sumy zbiorów.

$$\bigcup\{A, B\} = A \cup B, \qquad \bigcup\{A, B, C\} = A \cup B \cup C$$

Twierdzenie.
Jeżeli *$\mathcal{A}$ jest rodziną zbiorów,* <u>*to*</u> *wtedy*

1. $\forall A : (A \in \mathcal{A} \implies A \subset \bigcup \mathcal{A})$

2. ***Jeżeli*** *C jest zbiorem o następującej własności:*

$$\forall A : (A \in \mathcal{A} \implies A \subset C)$$

To $\qquad \bigcup \mathcal{A} \subset C$

Definicja. Iloczyn zbiorów
Iloczynem zbiorów (przecięciem, częścią wspólną) A i B nazywamy zbiór złożony z tych i tylko z tych elementów, które należą jednocześnie do A i B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \land x \in B\}$$

Twierdzenie.
Jeżeli A i B są zbiorami, to

1. $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$

2. $(C \subset A \land C \subset B) \implies C \subset A \cap B$

Jeżeli $A \cap B = \varnothing$, to A i B nazywamy rozłącznymi.

Niech $\mathcal{A}$ będzie niepustą rodziną zbiorów.

Definicja. Iloczyn rodziny
Iloczynem rodziny $\mathcal{A}$ nazywamy zbiór złożony z tych i tylko z tych elementów, które należą do każdego spośród zbiórów należących do rodziny $\mathcal{A}$, tzn.

$$x \in \bigcap \mathcal{A} \iff \forall A \in \mathcal{A} : x \in A$$

Jest uogólnienie pojęcia iloczynu zbiorów.

$$\bigcap \{A, B\} = A \cap B, \qquad \bigcap \{A, B, C\} = A \cap B \cap C$$

Twierdzenie.
Jeżeli *$\mathcal{A}$ jest niepustą rodziną zbiorów, <u>to</u> wtedy*

1. $\forall A : (A \in \mathcal{A} \implies \bigcap \mathcal{A} \subset A)$
2. ***Jeżeli*** *C jest zbiorem o następującej własności:*

$$\forall A : (A \in \mathcal{A} \implies C \subset A)$$

To $\quad C \subset \bigcap \mathcal{A}$

Definicja. Różnica zbiorów
Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony z tych i tylko z tych elementów, które należą do A i nie należą do B, tzn.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge \neg x \in B\} = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Twierdzenie.
Jeżeli $A \wedge B$ są zbiorami, to

1. $A \setminus B \subset A, (A \setminus B) \cap B = \varnothing$
2. $C \subset A, C \cap B \neq \varnothing) \implies C \subset A \setminus B$

Definicja. Dopełnienie zbioru
Dopełnieniem (uzupełnieniem) zbioru A w zbiorze S nazywamy zbiór $S \setminus A$, piszemy

$$A' = S \setminus A = \setminus A$$

Definicja. Różnica symetryczna
Różnicą symetryczną zbiorów A i B nazywamy zbiór zdefiniowany:

$$A \triangle B = A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
$$x \in A \div B \iff x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A$$
$$A \div B = \varnothing \iff A = B$$

6.3 Zbiory skończone

Definicja. Zbiór skończony
Zbiór A nazywamy zbiorem skończonym jeżeli A zawiera m różnych elementów, gdzie $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Oznaczamy: $n(A)$ - liczba elementów skończonego zbioru

$$A = |A| = \bar{\bar{A}} = \#A$$

Własności.
Jeżeli A, B, C są zbiorami skończonymi, to

1. $A \cup B$, $A \cap B$ są zbiorami skończonymi,
   $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

   Jeżeli A i B są rozłączne, to $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

2. Zbiór A jest podzbiorem skończonego zbioru E.
   Wtedy $n(A') = n(E) - n(A)$.

3. $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$.

4. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C)$
   $-n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

5. $n(\mathcal{P}(A)) = 2^{n(A)}$.

7 Para uporządkowana

7.1 Para uporządkowana

Definicja. Para uporządkowana (Kuratowski)
Parą uporządkowaną elementów a i b nazywamy $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Twierdzenie.
Dla każdego a, b, c, d zachodzi

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \iff a = c \wedge b = d$$

$$(a, b) = (c, d)$$

Dowód.

- $\Longleftarrow$ oczywiste
- $\Longrightarrow$
  1. Jeżeli $a = b$, to $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$ $\qquad (\{a, a\} = \{a\})$
     oraz $\{c, d\} \in \{\{a\}\}$. Wtedy $c = d = a$. Zatem $a = b = c = d$.
  2. Jeżeli $a \neq b$, to $\{c\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
     Ponieważ $a \neq b$, to $\{c\} \notin \{a, b\}$.
     Wtedy $\{c\} = \{a\}$, tzn. $\underline{a = c}$.
     Z drugiej strony, $\{a, b\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$.
     Ponieważ $a \neq b$, to $\{a, b\} = \{c, d\}$ oraz $\underline{b = d}$.

7.2 Iloczyn kartezjański

Definicja. Iloczyn kartezjański
Iloczyn kartezjański zbiorów A i B to zbiór, do którego należą wszystkie pary uporządkowane (a, b), gdzie $a \in A$, $b \in B$.

$$A \times B = \{x : \exists a \in A, \exists b \in B, x = (a, b)\}$$

$$\textit{Piszemy } A^2 = A \times A$$

Uogólnienie na trójki uporządkowane:

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n), a_i \in A_i : \forall i = 1, \ldots, n\} = \times_{i=1}^{n} A_i$$

Przykład.

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$\subset$$
$$\supset$$

Dowód.

- ”$\subset$”
  Pokażemy, że $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
  Niech $(x, y) \in A \times (B \cap C)$. Wtedy $x \in A \wedge y \in B \cap C$.
  Zatem $x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$.
  Mamy $(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$.
  Stąd $\underline{(x, y)} \in A \times B$ i $\underline{(x, y)} \in A \times C$.
  Zachodzi $\underline{(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)}$.

- ”$\supset$”
  Pokażemy, że $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$.
  Niech $\underline{(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)}$.
  Stąd $(x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in A \times C$.
  Wtedy $(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$.
  Otrzymujemy $x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$, tzn. $x \in A \wedge y \in B \cap C$.
  Ostatecznie $\underline{(x, y) \in A \times (A \cap C)}$

- Ponieważ $\subset$ i $\supset$ to

$$A \times (B \cap C) \iff (A \times B) \cap (A \times C)$$

Przykład.

$$(A \setminus B) \times C) = (A \times C) \setminus (A \times C)$$

Dowód.

- ”$\subset$”

$$\begin{aligned} \text{Niech } (x,y) \in (A \setminus B) \times C &\iff ((x \in A \setminus B) \wedge (y \in C)) \\ &\iff ((x \in A \wedge x \notin B) \wedge (y \in C)) \\ &\iff ((x \in A \wedge \neg x \in B) \wedge (y \in C)). \end{aligned}$$

- ”$\supset$”

$$\begin{aligned} \text{Niech } (x,y) \in (A \times C) \setminus (B \times C) &\iff \\ &\iff ((x,y) \in A \times C) \wedge ((x,y) \notin B \times C) \\ &\iff (x \in A \wedge y \in C) \wedge (\neg(x,y) \in B \times C) \\ &\iff (x \in A \wedge y \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge y \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge y \in C) \wedge (\neg(x \in B) \wedge \neg(y \in C)) \end{aligned}$$

- Oznaczamy

$$\begin{cases} p : x \in A \\ q : x \in B \\ r : y \in C \end{cases}$$

8 Relacje

8.1 Relacje

Definicja. Relacja
Relacją R w zbiorze $X \times Y$ nazywamy dowolny podzbiór $R \subset X \times Y$, R nazywamy relacją binarną.

Definicja.
Niech R będzie relacją w zbiorze X tzn. $R \subset X \times X$,

1. *R nazywamy **zwrotną** wtw.*

$$\forall x \in X : xRx$$

2. *R nazywamy **przeciwzwrotną** wtw.*

$$\forall x \in X : \neg xRx$$

3. *R nazywamy **symetryczną** wtw.*

$$\forall x, y \in X : (xRy \implies yRx)$$

4. *R nazywamy **przeciwsymetryczną** (asymetryczną) wtw.*

$$\forall x, y \in X : (xRy \implies \neg(yRx))$$

5. *R nazywamy **słabo antysymetryczną** wtw.*

$$\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx \implies x = y))$$

6. *R nazywamy **przechodnią** wtw.*

$$\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz \implies xRz)$$

7. *R nazywamy **spójną** wtw.*

$$\forall x, y \in X : (\underbrace{xRy \vee yRx}_{x \text{ i } y \text{ są porównywalne}} \vee x = y)$$

Przykład.

$$\textit{Niech } R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$xRy \iff x \leqslant |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1. R **zwrotna**?

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \leqslant |x|$$

TAK

2. R **przeciwzwrotna**?

$$\forall x \in \mathbb{R} : \neg x \leqslant |x|$$

NIE, np. $x = 1$

3. R **symetryczna**?

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leqslant |y| \implies y \leqslant |x|)$$

NIE, np. $x = 0, y = 1$

4. R **przeciwsymetryczna**?

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leqslant |y| \implies \neg y \leqslant |x|)$$

NIE, np. $x = y = 0$

5. R **słabo antysymetrczyna**?

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leqslant |y| \wedge y \leqslant |x| \implies x = y)$$

NIE, np. $x = 2, y = -2$

6. R **przechodnia**?

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \leqslant |y| \wedge y \leqslant |z| \implies x \leqslant |z|)$$

NIE, np. $x = 3, y = -5, z = 2$

7. R **spójna**?

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leqslant |y| \vee y \leqslant |x| \vee x = y)$$

TAK, ponieważ $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x = y \vee x < y \vee y < x)$
oraz $\forall w \in \mathbb{R} : w \leqslant |w|$
zatem $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x < |y| \vee y < |x| \vee x = y)$
stąd R spójna

R jest zwrotna i spójna.

Przykład.

$$\textit{Niech } R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$xRy \iff 3 \mid (x-y), \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

1. R **zwrotna**?

$$\forall x \in \mathbb{Z} : 3 \mid (x-x)$$

TAK

2. R **przeciwzwrotna**?

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \neg(3 \mid (x-x))$$

NIE, np. $x = 0$

3. R **symetryczna**?

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : (3 \mid (x-y) \implies 3 \mid (y-x))$$

TAK: Niech $xRy \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k$, wtedy $\exists l = k \in \mathbb{Z}$ takie, że $y - x = 3l$.
Stąd yRx.

4. R **przeciwsymetryczna**?

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : (3 \mid (x-y) \implies \neg(3 \mid (y-x)))$$

NIE, np. $x = 6, y = 3$

5. R **słabo antysymetrczyna**?

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : (3 \mid (x-y) \wedge 3 \mid (y-x) \implies x = y)$$

NIE, np. $x = 6, y = 3$

6. R **przechodnia**?

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : (3 \mid (x - y) \land 3 \mid (y - z) \implies 3 \mid (x - z))$$

TAK: Niech $3 \mid (x - y) \land 3 \mid (y - z)$.
Stąd $x - y = 3k, k \in \mathbb{Z}$
$y - z = 3l, l \in \mathbb{Z}$.
Zatem $x - y + y - z = 3k + 3l$
$x - z = 3(k + l)$.
Niech $m = k + l, m \in \mathbb{Z}$, bo wtedy
$x - z = 3m$, tzn. $3 \mid (x - z)$.

7. R **spójna**?

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : (3 \mid (x - y) \lor 3 \mid (y - x) \lor x = y)$$

NIE, np. $x = 2, y = 1$, bo $(2 \neq 1 \land \neg(3 \mid 1) \land \neg(3(-1)))$

R jest zwrotna, symetryczna oraz przechodnia.

Definicja. Relacja n-argumentowa, binarna, pusta, pełna
Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą zbiorami. Każdy podziór $R \subset X_1 \times \ldots \times X_n$ nazywamy relacją n-argumentową.
Jeżeli $n = 2$, to $R \subset X_1 \times X_2$ nazywamy relacją binarną.
Jeżeli $R = \varnothing$ to R nazywamy relacją pustą.
Jeżeli $R = X_1 \times \ldots \times X_n$, to R nazywamy relacją pełną.

Definicja. Dziedzina relacji
Dziedziną *relacji $R \subset X \times Y$ nazywamy*

$$D(R) = \{x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in R\} \subset X$$

Definicja. Przeciwdziedzina relacji
Przeciwdziedziną *relacji $R \subset X \times Y$ nazywamy*

$$D^*(R) = \{y \in Y : \exists x \in X : (x, y) \in R\} \subset Y$$

8.2 Relacja równoważności

Definicja. Relacja równoważności
Relację $R \subset X \times X$ nazywamy relacją równoważności wtw. R jest ***zwrotna, symetryczna i przechodnia****. Relacja $R = \varnothing$ jest relacją równoważności.*

Definicja. Klasa abstrakcji
Niech $R \subset X \times X$ relacja równoważności, $X \neq \varnothing, x \in X$.
Klasą abstrakcji (klasą równoważności) elementu x (względem relacji R) nazywamy $[x]_R = \{y \in X : xRy\} \subset X$.

Definicja. Zbiór ilorazowy
Zbiorem ilorazowym zbioru X przez relację R nazywamy zbiór wszystkich klas abstrakcji.

$$X/R = \{[x]_R : x \in X\} \subset X$$

Przykład.
Niech $X = \{1, 2, \ldots, 16\}, R \subset X \times X, xRy \iff 4 \mid (x^2 - y^2), \forall x, y \in X.$

Wyznaczyć zbiór ilorazowy X/R.
Czy R jest relacją równoważności?

$$\begin{cases} \text{R zwrotna}, \forall x \in X : 4 \mid 10 \\ \text{R symetryczna}, \forall x, y \in X : (4 \mid (x^2 - y^2) \implies 4 \mid (y^2 - x^2)) \\ \text{R przechodnia}, \forall x, y, z \in X : (4 \mid (x^2 - y^2) \wedge 4 \mid (y^2 - z^2) \implies 4 \mid (x^2 - z^2)) \end{cases}$$

...dowód...

Co to jest $[x]_R$? $x \in X$.

$$\begin{aligned} [x]_R &= \{y \in X : xRy\} \\ &= \{y \in X : 4 \mid (x^2 - y^2)\} \\ &= \{y \in X : \exists k \in \mathbb{Z} : x^2 - y^2 = 4k\} \end{aligned}$$

$$4 \mid (x^2 - y^2) \iff x^2 - y^2 = 4k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{np. } [1]_R &= \{y \in X : y^2 = 1 + 4k, k \in \mathbb{Z}\} = \{1, 3, 5, \ldots\} \\ [2]_R &= \{y \in X : y^2 = 4 + 4k, k \in \mathbb{Z}\} = y^2 = 4(1 + k) = \{2, 4, \ldots\} \\ [3]_R &= \{y \in X : y^2 = 9 + 4k, k \in \mathbb{Z}\} = [1]_R \\ [4]_R &= [2]_R \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dwie klasy abstrakcji. $[1]_R = A_1, [2]_R = A_2$.
Zbiór ilorazowy $X/R = \{[x]_R : x \in X\} = \{A_1, A_2\}$

Lemat.
Niech $X \neq \varnothing, R \subset X \times X$ relacja równoważności. Wtedy

$$xRy \iff [x]_R = [y]_R, \forall x, y \in X$$

Dowód.

- $" \implies "$
  Niech $x, y \in X$, takie że xRy.

  – Pokażemy, że $\boxed{[x]_R \subset [y]_R}$.
    Niech $a \in [x]_R$. Wtedy $\underline{aRx}$. Ponieważ równocześnie $\underline{xRy}$, to wtedy $\underline{aRy}$ (z przechodniości R).
    Zatem aRy, więc $a \in [y]_R$. Stąd $\boxed{[x]_R \subset [y]_R}$.

  – Pokażemy, że $\boxed{[y]_R \subset [x]_R}$.
    Niech $b \in [y]_R$. Wtedy $\underline{bRx}$ (lub yRb, R symetryczne). Ponieważ równocześnie $\underline{xRy \text{ i } yRb}$, więc $\underline{xRb}$ (lub bRx, z przechodniości R).
    Stąd $b \in [x]_R$. Stąd $\boxed{[y]_R \subset [x]_R}$.

  Wniosek: $[x]_R = [y]_R$

- $" \impliedby "$
  Niech $x, y \in X$, takie że $[x]_R = [y]_R$.
  Czy xRy?

  R zwrotna: xRx. Zatem $x \in [x]_R \overset{\text{zał}}{=} [y]_R$. Więc $x \in [y]_R$. Stąd xRy.

Definicja. Podział zbioru
Niech $X \neq \varnothing$, P rodzina podzbioru zbioru X.($P \subset \mathcal{P}(x)$)
Rodzinę P nazywamy podziałem zbioru X, jeżeli

- $\forall A \in P, A \neq \varnothing$
- $\forall A, B \in P : (A \neq B \implies A \cap B \neq \varnothing)$
- $\bigcup P = X$

***To znaczy** P jest rodziną zbiorów nieparzystych, parami rozłącznych i jej sumą jest cały zbiór X.*
Zbiory rodziny P nazywamy blokami.

Uwaga. Jeżeli $X \neq \varnothing$, to podział $P = \{\{a\} : a \in X\}$ jest "najdrobniejszy", a $P = \{X\}$ (jednoelementowy) zawiera tylko jeden blok.

Twierdzenie. Zasada abstrakcji
Niech $X \neq \varnothing$. Wtedy:

1. *Jeżeli $R \subset X \times X$ jest relacją równoważności to wtedy zbiór ilorazowy X/R jest podzbiorem X.*
2. *Jeżeli P jest podzbiorem zbioru X, to wtedy relacja:*

$$\begin{cases} R \subset X \times X \\ xRy \iff \underbrace{\exists C \in P : (x \in C \land y \in C)}_{\text{"relacja pozostawania w tym samym zbiorze"}} \end{cases}$$

   jest relacją równoważności w X.

Dowód.

Lemat.
Jeżeli $X \neq \varnothing, R \subset X \times X$ jest relacją równoważności, to $xRy \iff [x]_R = [y]_R$ dla każdego $x, y \in X$.

1. Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją równoważności i niech X/R oznacza zbiór ilorazowy ($X/R \subset X$).
   (a) X/R jest niepustą rodziną podzbiorów zbioru X, bo $\forall x \in X : [x]_R \in X/R$. Wtedy $[x]_R \subset X$.
   (b) Każda klasa abstrakcji jest niepustym podzbiorem X, bo jeżeli $[x]_R \in X/R$, to $x \in [x]_R$.

(c) Różne klasy abstrakcji są rozłączne, to znaczy
$([x]_R \neq [y]_R \implies [x]_R \cap [y] = \varnothing)$.

Dowód. (nie wprost)

$$[\neg(p \implies q)] \iff (p \wedge \neg q)$$

Niech $[x]_R \neq [y]_R, x, y \in X$ i $\underline{[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing}$.
Jeżeli $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$, to $\exists c \in [x]_R \cap [y]_R$.
Wtedy $c \in [x]_R \wedge c \in [y]_R$, to znaczy $xRc \wedge yRc$, R jest symetryczna, to $\underline{xRc \wedge cRy}$.

Zatem z przechodniości R mamy $\boxed{xRy}$.

Ponieważ $[x]_R \neq [y]_R$, więc (z lematu) $\boxed{\neg(xRy)}$.
Zatem otrzymujemy sprzeczność. Zatem "$p \implies q$".

(d) $\bigcup(X/R) = X$.

Czy $X \subset \bigcup(X/R) \subset X$?

- $\bigcup(X/R) \subset X$.
  Jeżeli $x \in \bigcup(X/R)$, to $X \in X/R$. Wtedy $x \in X$.
- $X \subset \bigcup(X/R)$. Niech $x \in X$. Ponieważ R jest zwrotna $x \in [x]_R, [x]_R \subset X/R$. Stąd $x \in \bigcup(X/R)$.

2. Sprawdzamy, że relacja R jest relacją równoważności.

R zwrotna tzn. $x \in X, xRx$, tzn. $\exists C \in P : (x \in C \wedge x \in C)$
Stąd $\exists C \in P : x \in C$, ten związek zachodzi, bo P jest podziałem.

R symetryczna : jeżeli $xRy \implies yRx$.
$(\exists C \in P : x \in C \wedge y \in C) \implies (\exists C \in P : (y \in C \wedge x \in C))$

R przechodnia : $xRy \wedge yRz \implies xRz$.
$\exists C \in P : (x \in C \wedge y \in C) \wedge \exists D \in P : (y \in D \wedge z \in D)$

Trzeba pokazać, że xRz, to znaczy $\exists E \in P : (x \in E \wedge z \in E)$.
Niech $E = C \cup D$.
$x \in C \subset C \cup D = E$.
$z \in D \subset C \cup D = E$.
Otrzymujemy, że $x \in E \wedge z \in E$.
Wniosek: Relacja R jest relacją równoważności.

Przykłady.

1. Niech $R \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ określona: $(a,b)R(c,d) \iff a+d=b+c$. Dla $a,b,c,d \in \mathbb{N}$.

   R jest relacją relacją równoważności. Wprowadzamy zbiór ilorazowy X/R, tzn. $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$. $\boxed{\text{Zbiór liczb całkowitych.}}$

   Mamy utożsamienie liczby całkowitej k ze zbiorem $\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : k = m - n\}$

2. Niech $R \subset (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \underbrace{(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\})}_{X}$ określona:

   $(a,b)R(c,d) \iff ad = bc$ dla $a,b,c,d \in X$.

   R jest relacją równoważności, wtedy wprowadzamy zbiór ilorazowy:

   $$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\})/R \qquad \boxed{\text{zbiór liczb wymiernych}}$$

   Utożsamienie liczby wymiernej q ze zbiorem:

   $$\{(k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \frac{k}{l} = q\}$$

3. Ciąg Cauchy'ego (podstawowy)
   Definicja.
   Ciąg $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$ nazywamy ciągniem Cauchy'ego $\iff$

   $$(\forall \varepsilon > 0, \exists N \geqslant 1, \forall m,n \geqslant N : |a_m - a_n| \leqslant \varepsilon)$$

   Niech $F = \{\{a_n\} \subset \mathbb{Q} : a_n \text{ciąg podstawowy}\}$.

   Niech $R \subset F \times F$ będzie określona:

   $$\{a_n\}R\{b_n\} \iff \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

   $$\text{dla } \{a_n\}, \{b_n\} \in F$$

   R jest <u>równoważności</u>. Wprowadzamy

   $$\mathbb{R} = F/R$$

Przykład.
Czy suma i różnica dwóch relacji równoważności jest relacją równoważności?

Nie. $X = \{1, 2, 3\}$

$$\text{są relacjami równoważności} \begin{cases} R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\} \\ S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\} \end{cases}$$

Natomiast

$$R \cup S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$$

$$R \setminus S = \{(1,2),(2,1)\}$$

ponieważ $(2,1),(1,3) \in R \cup S$, ale $(2,3) \notin R \cup S$.