Wstęp do teorii mnogości

Stanisław Migórski

Spis treści

1 Program

1. Dowody i elementy logiki.
2. Zbiory i działania na nich.
3. Relacje równoważności.
4. Funkcje.
5. Własności funkcji.
6. Zbiory równoliczne i nierównoliczne.
7. Relacje porządku.
8. Konstukcje liczbowe.
9. Lemat Kuratowskiego-Zorna.

2 Literatura

1. K. Kustowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości*, PWN, 1994
2. H. Rosiowa, *Wstęp do matematyki*, PWN, 2004
3. W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, 1996

3 Zasady oceniania

$$\textbf{WTM:} \begin{cases} \text{ćwiczenia 30h, } \textbf{2} \text{ obecności bez usprawiedliwienia.} \\ \text{wykład 30h.} \end{cases}$$

Ocenia końcowa: **20%** oceny z ćwiczeń + **80%** oceny z egzaminu (I, II termin).

Pegaz: zestawy zadań: A, B - obowiązkowe. Dowody do oceny ”DDO”.

4 Spójniki logiczne

4.1 Standardowe

$\neg$ (negacja), $\wedge$ (koniunkcja), $\vee$ (alternatywa), $\Rightarrow$ (implikacja), $\Leftrightarrow$ (równoważność)

4.2 Inne spójniki

1. **Alternatywa rozłączna** α i β, oznaczamy $\alpha \oplus \beta$.
   Czytamy "... albo ..." lub "albo ..., albo ...".

α	β	$\alpha \oplus \beta$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$(\alpha \oplus \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow (\alpha \Leftrightarrow \neg\beta) \Leftrightarrow (\neg(\alpha \Leftrightarrow \beta))$$

2. **Dyzjunkcja** *(kreska Sheffera)* α i β, oznaczamy $\alpha \mid \beta$.
   Czytamy "albo nie ..., albo nie .."

α	β	$\alpha \mid \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$(\alpha \mid \beta) \Leftrightarrow (\neg(\alpha \wedge \beta))$$

3. **Binegacja** *(strzałka Pierce'a, funktor Łukasiewicza)* α i β, oznaczamy $\alpha \downarrow \beta$.
   Czytamy "ani ..., ani .."

α	β	$\alpha \downarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$(\alpha \downarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

4.3 Związki z OAK

Spójniki logiczne mają przyporządkowane bramki logiczne.

- **NOT:** $\alpha \longmapsto \neg\alpha$ (negacja)
- **AND:** $\alpha, \beta \longmapsto \alpha \wedge \beta$ (koniunkcja)
- **NAND:** $\alpha, \beta \longmapsto \neg(\alpha \wedge \beta)$ (dyzjunkcja)
- **OR:** $\alpha, \beta \longmapsto \alpha \vee \beta$ (alternatywa)
- **NOR:** $\alpha, \beta \longmapsto \neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \Leftrightarrow (\alpha \downarrow \beta)$ (binegacja)
- **XOR:** $\alpha, \beta \longmapsto \alpha \oplus \beta$ (alternatywa rozłączna)
- **XNOR:** $\alpha, \beta \longmapsto \neg(\alpha \oplus \beta)$ (negacja alternatywy rozłącznej)

5 Rachunek funkcyjny

5.1 Funkcja zdaniowa

Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą zbiorami.

Definicja 5.1 (Funkcja zdaniowa)**.** *Funkcją (formą) zdaniową n zmiennych nazywamy wyrażenie (formułę) $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, w którym występuje n zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, które zmienia się w zdanie logiczne, gdy za zmienne $x_1, \ldots, x_n$ podstawimy nazwę dowolnego elementu ze zbiorów $X_1, \ldots, X_n$.*

Definicja 5.2 (Dziedzina funkcji zdaniowej)**.** ***Dziedziną*** *(zakresem zmienności) funkcji zdaniowej $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy iloczyn kartezjański $x_1 \times \ldots \times x_n$ i zapisujemy $Z(\varphi) = x_1 \times \ldots \times x_n$.*

Definicja 5.3. *Mówimy, że n-tka uporządkowona $(a_1, \ldots, a_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$ spełnia funkcję zdaniową $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, jeżeli zdanie $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ jest prawdziwe.*

Definicja 5.4 (Zbiór spełniania funkcji zdaniowej)**.** ***Zbiór spełniania*** *funkcji zdaniowej $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ określamy następująco:*

$$S(\varphi) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n : \varphi(a_1, \ldots, a_n) = 1\}$$

Funkcja zdaniowa $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jest prawdziwa w zbiorze $X_1 \times \ldots \times X_n$, jeżeli $S(\varphi) = X_1 \times \ldots \times X_n$.

Twierdzenie 5.1. *Niech $\varphi(x_1 \times \ldots \times x_n)$, $\psi(x_1 \times \ldots \times x_n)$, gdzie $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$ będą funkcjami zdaniowymi. Wtedy:*

1) $S(\varphi \wedge \psi) = S(\varphi) \cap S(\psi)$

2) $S(\varphi \vee \psi) = S(\varphi) \cup S(\psi)$

3) $S(\neg\varphi) = (X_1 \times \ldots \times X_n) \setminus S(\varphi)$

4) $S(\varphi \Rightarrow \psi) = ((X_1 \times \ldots \times X_n) \setminus S(\varphi)) \cup S(\psi)$

5) $S(\varphi \Leftrightarrow \psi) = (S(\varphi) \cap S(\psi)) \cup (((X_1 \times \ldots \times X_n) \cap ((X_1 \times \ldots \times X_n) \setminus S(\psi)))$

Definicja 5.5. *Funkcje zdaniowe $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ i $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy* ***równoważnymi*** *jeżeli*

$$S(\varphi) = S(\psi).$$

Zapisujemy:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

5.2 Kwantyfikatory

- Kwantyfikator ogólny: $\forall$, $\bigwedge$ (dla każdego)
- Kwantyfikator szczególny: $\exists$, $\bigvee$ (istnieje)
  $\exists!$, (istnieje dokładnie jeden)

5.3 Prawa rachunku funkcyjnego

Twierdzenie 5.2 (Prawa de Morgana)**.**

$$\begin{cases} \neg(\exists x \in X : \varphi(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X : \neg\varphi(x) \\ \neg(\forall x \in X : \varphi(x)) \Leftrightarrow \exists x \in X : \neg\varphi(x) \end{cases}$$

Twierdzenie 5.3 (Prawo egzemplifikacji)**.**

$$(\forall x \in X : \varphi(x)) \Rightarrow (\exists x \in X : \varphi(x))$$

Twierdzenie 5.4 (Prawo przestawiania kwantyfikatorów)**.**

$$(\forall x \in X, \forall y \in Y : \varphi(x,y)) \Leftrightarrow (\forall y \in Y, \forall x \in X : \varphi(x,y))$$

$$(\exists x \in X, \exists y \in Y : \varphi(x,y)) \Leftrightarrow (\exists y \in Y, \exists x \in X : \varphi(x,y))$$

$$(\exists x \in X, \forall y \in Y : \varphi(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in Y, \exists x \in X : \varphi(x,y))$$

$$\Leftarrow \textit{ nie zachodzi!!}$$

Twierdzenie 5.5 (Prawo włączania i wyłączania kwantyfikatorów)**.**

$$\begin{cases} \forall x \in X : (\varphi(x) \vee \psi) \Leftrightarrow (\forall x \in X : \varphi(x)) \vee \psi \\ \exists x \in X : (\varphi(x) \vee \psi) ? (\exists x \in X : \varphi(x)) \vee \psi \\ \dots \end{cases}$$

Twierdzenie 5.6 (Prawo rodzielności kwantyfikatora ogólnego względem koniunkcji)**.**

$$\begin{cases} \forall x \in X : (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in X : \varphi(x)) \wedge (\forall x \in X : \psi(x)) \\ \forall x \in X : (\varphi(x) \vee \psi(x)) \Leftarrow (\forall x \in X : \varphi(x)) \vee (\forall x \in X : \psi(x)) \\ \dots \end{cases}$$

Przykład. *Prawo rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem implikacji.*

$$(\forall x \in X : (\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))) \Rightarrow ((\forall x \in X : \varphi(x)) \Rightarrow (\forall x \in X : \psi(x))$$

$$\Leftarrow \textit{ nie zachodzi}$$

Niech:

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \\ &\psi(x) = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0\} \\ &X = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wtedy:

$$\underbrace{\underbrace{(\forall x \in \mathbb{R} : (x < 0 \Rightarrow x + 1 > 0))}_{fałsz} \Leftarrow \underbrace{(\underbrace{(\forall x \in \mathbb{R} : x < 0)}_{fałsz} \Rightarrow \underbrace{(\forall x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0)}_{fałsz})}_{prawda}}_{fałsz}$$

Przykład. *Prawo rodzielności kwantyfikatora szczególnego względem koniunkcji.*

$$(\exists x \in X : (\varphi(x) \wedge \psi(x))) \Rightarrow ((\exists x \in X : \varphi(x)) \wedge (\exists x \in X : \psi(x))$$

$$\Leftarrow \textit{nie zachodzi}$$

Niech:

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = \{2 \mid x : x \in \mathbb{N}\}\textit{parzyste} \\ &\psi(x) = \{\neg 2 \mid x : x \in \mathbb{N}\}\textit{nieparzyste} \\ &X = \mathbb{N} \end{aligned}$$

Wtedy:

$$\underbrace{\underbrace{(\exists x \in \mathbb{N} : (2 \mid x \wedge \neg 2 \mid x))}_{fałsz} \Leftarrow \underbrace{(\underbrace{(\exists x \in \mathbb{N} : 2 \mid x)}_{prawda} \wedge \underbrace{(\exists x \in \mathbb{N} : \neg 2 \mid x)}_{prawda})}_{prawda}}_{fałsz}$$

Uwaga:

1. Dla formy zdaniowej jednej zmiennej zachodzi:

$$(\forall x : P(x) \Rightarrow (\exists x \in X : P(x)))$$

2. Dla formy zdaniowej dwóch zmiennych zachodzi:

$$\begin{array}{lr}
(\forall x, \forall y : P(x,y)) \Longleftrightarrow & (\forall y, \forall x : P(x,y)) \\
\Downarrow & \Downarrow \\
(\exists x, \forall y : P(x,y)) & (\exists y, \forall x : P(x,y)) \\
\Downarrow & \Downarrow \\
(\forall y, \exists x : P(x,y)) & (\forall x, \exists y : P(x,y)) \\
\Downarrow & \Downarrow \\
(\exists y, \exists x : P(x,y)) & (\exists x, \exists y : P(x,y))
\end{array}$$

6 Zbiory i działania na zbiorach