Wstęp do teorii mnogości

Stanisław Migórski

Spis treści

1 Program

1. Dowody i elementy logiki.
2. Zbiory i działania na nich.
3. Relacje równoważności.
4. Funkcje.
5. Własności funkcji.
6. Zbiory równoliczne i nierównoliczne.
7. Relacje porządku.
8. Konstukcje liczbowe.
9. Lemat Kuratowskiego-Zorna.

2 Literatura

1. K. Kustowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości*, PWN, 1994
2. H. Rosiowa, *Wstęp do matematyki*, PWN, 2004
3. W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, 1996

3 Zasady oceniania

$$\textbf{WTM:} \begin{cases} \text{ćwiczenia 30h, } \textbf{2} \text{ obecności bez usprawiedliwienia.} \\ \text{wykład 30h.} \end{cases}$$

Ocenia końcowa: **20%** oceny z ćwiczeń + **80%** oceny z egzaminu (I, II termin).

Pegaz: zestawy zadań: A, B - obowiązkowe. Dowody do oceny ”DDO”.

4 Spójniki logiczne

4.1 Standardowe

$\neg$ (negacja), $\wedge$ (koniunkcja), $\vee$ (alternatywa), $\implies$ (implikacja), $\iff$ (równoważność)

4.2 Inne spójniki

1. **Alternatywa rozłączna** α i β, oznaczamy $\alpha \oplus \beta$.
   Czytamy "... albo ..." lub "albo ..., albo ...".

α	β	$\alpha \oplus \beta$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$(\alpha \oplus \beta) \iff (\neg\alpha \iff \beta) \iff (\alpha \iff \neg\beta) \iff (\neg(\alpha \iff \beta))$$

2. **Dyzjunkcja** *(kreska Sheffera)* α i β, oznaczamy $\alpha \mid \beta$.
   Czytamy "albo nie ..., albo nie .."

α	β	$\alpha \mid \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$(\alpha \mid \beta) \iff (\neg(\alpha \wedge \beta))$$

3. **Binegacja** *(strzałka Pierce'a, funktor Łukasiewicza)* α i β, oznaczamy $\alpha \downarrow \beta$.
   Czytamy "ani ..., ani .."

α	β	$\alpha \downarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$(\alpha \downarrow \beta) \iff (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

4.3 Związki z OAK

Spójniki logiczne mają przyporządkowane bramki logiczne.

- **NOT:** $\alpha \longmapsto \neg\alpha$ (negacja)
- **AND:** $\alpha, \beta \longmapsto \alpha \wedge \beta$ (koniunkcja)
- **NAND:** $\alpha, \beta \longmapsto \neg(\alpha \wedge \beta)$ (dyzjunkcja)
- **OR:** $\alpha, \beta \longmapsto \alpha \vee \beta$ (alternatywa)
- **NOR:** $\alpha, \beta \longmapsto \neg(\alpha \vee \beta) \iff (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \iff (\alpha \downarrow \beta)$ (binegacja)
- **XOR:** $\alpha, \beta \longmapsto \alpha \oplus \beta$ (alternatywa rozłączna)
- **XNOR:** $\alpha, \beta \longmapsto \neg(\alpha \oplus \beta)$ (negacja alternatywy rozłącznej)

5 Rachunek funkcyjny

5.1 Funkcja zdaniowa

Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą zbiorami.

Definicja. Funkcja zdaniowa.
Funkcją (formą) zdaniową n zmiennych nazywamy wyrażenie (formułę) $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, w którym występuje n zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, które zmienia się w zdanie logiczne, gdy za zmienne $x_1, \ldots, x_n$ podstawimy nazwę dowolnego elementu ze zbiorów $X_1, \ldots, X_n$.

Definicja. Dziedzina funkcji zdaniowej.
Dziedziną *(zakresem zmienności) funkcji zdaniowej $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy iloczyn kartezjański $x_1 \times \ldots \times x_n$ i zapisujemy $Z(\varphi) = x_1 \times \ldots \times x_n$.*

Definicja. .
Mówimy, że n-tka uporządkowona
$(a_1, \ldots, a_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$ spełnia funkcję zdaniową $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, jeżeli zdanie $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ jest prawdziwe.

Definicja. Zbiór spełniania funkcji zdaniowej.
Zbiór spełniania *funkcji zdaniowej $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ określamy następująco:*

$$S(\varphi) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n : \varphi(a_1, \ldots, a_n) = 1\}$$

Funkcja zdaniowa $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jest prawdziwa w zbiorze $X_1 \times \ldots \times X_n$, jeżeli $S(\varphi) = X_1 \times \ldots \times X_n$.

Twierdzenie. .
Niech $\varphi(x_1 \times \ldots \times x_n)$, $\psi(x_1 \times \ldots \times x_n)$, gdzie $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$ będą funkcjami zdaniowymi. Wtedy:

1) $S(\varphi \wedge \psi) = S(\varphi) \cap S(\psi)$

2) $S(\varphi \vee \psi) = S(\varphi) \cup S(\psi)$

3) $S(\neg\varphi) = (X_1 \times \ldots \times X_n) \setminus S(\varphi)$

4) $S(\varphi \implies \psi) = ((X_1 \times \ldots \times X_n) \setminus S(\varphi)) \cup S(\psi)$

5) $S(\varphi \iff \psi) = (S(\varphi) \cap S(\psi)) \cup (((X_1 \times \ldots \times X_n) \cap ((X_1 \times \ldots \times X_n) \setminus S(\psi)))$

Definicja. .
*Funkcje zdaniowe $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ i $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy **równoważnymi** jeżeli*

$$S(\varphi) = S(\psi).$$

Zapisujemy:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

5.2 Kwantyfikatory

- Kwantyfikator ogólny: $\forall$, $\bigwedge$ (dla każdego)
- Kwantyfikator szczególny: $\exists$, $\bigvee$ (istnieje)
  $\exists!$, (istnieje dokładnie jeden)

5.3 Prawa rachunku funkcyjnego

Twierdzenie. Prawa de Morgana.

$$\begin{cases} \neg(\exists x \in X : \varphi(x)) \iff \forall x \in X : \neg\varphi(x) \\ \neg(\forall x \in X : \varphi(x)) \iff \exists x \in X : \neg\varphi(x) \end{cases}$$

Twierdzenie. Prawo egzemplifikacji.

$$(\forall x \in X : \varphi(x)) \implies (\exists x \in X : \varphi(x))$$

Twierdzenie. Prawo przestawiania kwantyfikatorów.

$$(\forall x \in X, \forall y \in Y : \varphi(x, y)) \iff (\forall y \in Y, \forall x \in X : \varphi(x, y))$$

$$(\exists x \in X, \exists y \in Y : \varphi(x, y)) \iff (\exists y \in Y, \exists x \in X : \varphi(x, y))$$

$$(\exists x \in X, \forall y \in Y : \varphi(x, y)) \implies (\forall y \in Y, \exists x \in X : \varphi(x, y))$$

$$\Longleftarrow \textit{ nie zachodzi!!}$$

Twierdzenie. Prawo włączania i wyłączania kwantyfikatorów.

$$\begin{cases} \forall x \in X : (\varphi(x) \vee \psi) \iff (\forall x \in X : \varphi(x)) \vee \psi \\ \exists x \in X : (\varphi(x) \vee \psi) ? (\exists x \in X : \varphi(x)) \vee \psi \\ \ldots \end{cases}$$

Twierdzenie. Prawo rodzielności kwantyfikatora ogólnego względem koniunkcji.

$$\begin{cases} \forall x \in X : (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \iff (\forall x \in X : \varphi(x)) \wedge (\forall x \in X : \psi(x)) \\ \forall x \in X : (\varphi(x) \vee \psi(x)) \Longleftarrow (\forall x \in X : \varphi(x)) \vee (\forall x \in X : \psi(x)) \\ \ldots \end{cases}$$

Przykład. .
Prawo rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem implikacji.

$$(\forall x \in X : (\varphi(x) \implies \psi(x))) \implies ((\forall x \in X : \varphi(x)) \implies (\forall x \in X : \psi(x))$$

$$\Longleftarrow \ \textit{nie zachodzi}$$

Niech:

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \\ &\psi(x) = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0\} \\ &X = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wtedy:

$$\underbrace{\underbrace{(\forall x \in \mathbb{R} : (x < 0 \implies x + 1 > 0))}_{fałsz} \Longleftarrow \underbrace{(\underbrace{(\forall x \in \mathbb{R} : x < 0)}_{fałsz} \implies \underbrace{(\forall x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0)}_{fałsz})}_{prawda}}_{fałsz}$$

Przykład. .
Prawo rodzielności kwantyfikatora szczególnego względem koniunkcji.

$$(\exists x \in X : (\varphi(x) \wedge \psi(x))) \implies ((\exists x \in X : \varphi(x)) \wedge (\exists x \in X : \psi(x))$$

$$\Longleftarrow \ \textit{nie zachodzi}$$

Niech:

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = \{2 \mid x : x \in \mathbb{N}\}\textit{parzyste} \\ &\psi(x) = \{\neg 2 \mid x : x \in \mathbb{N}\}\textit{nieparzyste} \\ &X = \mathbb{N} \end{aligned}$$

Wtedy:

$$\underbrace{\underbrace{(\exists x \in \mathbb{N} : (2 \mid x \wedge \neg 2 \mid x))}_{fałsz} \Longleftarrow \underbrace{(\underbrace{(\exists x \in \mathbb{N} : 2 \mid x)}_{prawda} \wedge \underbrace{(\exists x \in \mathbb{N} : \neg 2 \mid x)}_{prawda})}_{prawda}}_{fałsz}$$

Uwaga:

1. Dla formy zdaniowej jednej zmiennej zachodzi:

$$(\forall x : P(x) \implies (\exists x \in X : P(x)))$$

2. Dla formy zdaniowej dwóch zmiennych zachodzi:

$$\begin{array}{lcr}
(\forall x, \forall y : P(x,y)) & \iff & (\forall y, \forall x : P(x,y)) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
(\exists x, \forall y : P(x,y)) & & (\exists y, \forall x : P(x,y)) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
(\forall y, \exists x : P(x,y)) & & (\forall x, \exists y : P(x,y)) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
(\exists y, \exists x : P(x,y)) & & (\exists x, \exists y : P(x,y))
\end{array}$$

6 Zbiory i działania na zbiorach

6.1 Pojęcia

- Pojęcie zbioru jest pojęciem <u>pierwotnym</u>.

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} - \text{zbiory liczbowe} & \\
\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} & \textit{(Pezno)} \\
\mathbb{N}_1 = \{1, 2, \ldots\} &
\end{array}$$

- Pojęcie "należenia do zbioru"

$$1 \in \mathbb{N}, (\neg(\sqrt{2} \in \mathbb{N})) \iff (\sqrt{2} \notin \mathbb{N})$$

- Zasada równości zbiorów

$$A = B, tzn. \forall x : \underbrace{(x \in A \implies x \in B)}_{A \subset B} \wedge \underbrace{(x \in B \implies x \in A)}_{B \subset A}$$

$$A \subset B, wtw. \forall x : (x \in A \implies x \in B)$$

To znaczy, aby udowodnić, że $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ dowodzimy

$$\forall x \begin{cases} x \in A \implies x \in B \\ x \in B \implies x \in A \end{cases}$$

$$A \subset B \wedge B \subset A$$

- Oznaczamy

$$\begin{aligned} &\{a,b\} && \text{para uporządkowana}\\ &\{a\} && \text{singleton}\\ &\{a,a\}=\{a\} \end{aligned}$$

- Definiowanie zbiorów
  1. Wypisujemy elementy zbioru
  2. $\mathbf{A}=\{\mathbf{x}\in\mathbf{X}:\mathbf{W}(\mathbf{x})\}$
     Par $=\{x\in\mathbb{N}:\underbrace{2\mid x}_{W(x)}\}$, $\quad \{\ \underbrace{\{1,2\}}_{\text{jeden element}}\ \}\neq\{1,2\}$

Definicja. Zbiór potęgowy.
Zbiorem potęgowym zbioru A nazywamy zbiór złożony ze wszystkich pozbiorów zbioru A, tzn. $\mathcal{P}(A)=\{X:X\subset A\}$

Zbiór potęgowy $\mathcal{P}(A)$ zbioru A.

$$\begin{aligned} &\{\varnothing,A\}\subset\mathcal{P}(A)\longleftarrow\\ &\mathcal{P}(\varnothing)=\{\varnothing\}\\ &\mathcal{P}(\{1\})=\{\varnothing,\{1\}\}\\ &\mathcal{P}(\{1,2\})=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}\\ &\dots \end{aligned}$$

6.2 Działania na zbiorach

Definicja. Suma zbiorów.
Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony z tych i tylko z tych elementów, które należą do co najmniej jednego z tych zbiorów.

$$A\cup B=\{x:x\in A\vee x\in B\}$$

Twierdzenie. .
Jeżeli A i B są zbiorami, to wtedy:

1. $A\subset A\cup B,\qquad B\subset A\cup B$
2. $(A\subset C\wedge B\subset C)\implies A\cup B\subset C$

Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną zbiorów (tzn. zbiorami, którego elemantami są zbiory).

Definicja. Suma rodziny.
Suma rodziny $\mathcal{A}$ jest zbiorem złożonym z tych i tylko tych elementów, które należą do co najmniej jednego spośród zbiorów należących do rodziny $\mathcal{A}$, tzn. $x \in \bigcup \mathcal{A}$ wtw. $\exists A \in \mathcal{A} : x \in \mathcal{A}$

Jest uogólnienie pojęcia sumy zbiorów.

$$\bigcup\{A, B\} = A \cup B, \qquad \bigcup\{A, B, C\} = A \cup B \cup C$$

Twierdzenie. .
Jeżeli *$\mathcal{A}$ jest rodziną zbiorów, <u>to</u> wtedy*

1. $\forall A : (A \in \mathcal{A} \implies A \subset \bigcup \mathcal{A})$
2. ***Jeżeli*** *C jest zbiorem o następującej własności:*

$$\forall A : (A \in \mathcal{A} \implies A \subset C)$$

To $\bigcup \mathcal{A} \subset C$

Definicja. Iloczyn zbiorów.
Iloczynem zbiorów (przecięciem, częścią wspólną) A i B nazywamy zbiór złożony z tych i tylko z tych elementów, które należą jednocześnie do A i B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Twierdzenie. .
Jeżeli A i B są zbiorami, to

1. $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$
2. $(C \subset A \wedge C \subset B) \implies C \subset A \cap B$

Jeżeli $A \cap B = \varnothing$, to A i B nazywamy rozłącznymi.

Niech $\mathcal{A}$ będzie niepustą rodziną zbiorów.

Definicja. Iloczyn rodziny.
Iloczynem rodziny $\mathcal{A}$ nazywamy zbiór złożony z tych i tylko z tych elementów, które należą do każdego spośród zbiorów należących do rodziny $\mathcal{A}$, tzn.

$$x \in \bigcap \mathcal{A} \iff \forall A \in \mathcal{A} : x \in A$$

Jest uogólnienie pojęcia iloczynu zbiorów.

$$\bigcap\{A, B\} = A \cap B, \qquad \bigcap\{A, B, C\} = A \cap B \cap C$$

Twierdzenie. .
Jeżeli *$\mathcal{A}$ jest niepustą rodziną zbiorów, <u>to</u> wtedy*

1. $\forall A : (A \in \mathcal{A} \implies \bigcap \mathcal{A} \subset A)$
2. ***Jeżeli*** *C jest zbiorem o następującej własności:*

$$\forall A : (A \in \mathcal{A} \implies C \subset A)$$

To $\qquad C \subset \bigcap \mathcal{A}$

Definicja. Różnica zbiorów.
Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony z tych i tylko z tych elementów, które należą do A i nie należą do B, tzn.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge \neg x \in B\} = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Twierdzenie. .
Jeżeli $A \wedge B$ są zbiorami, to

1. $A \setminus B \subset A, (A \setminus B) \cap B = \varnothing$
2. $C \subset A, C \cap B \neq \varnothing) \implies C \subset A \setminus B$

Definicja. Dopełnienie zbioru.
Dopełnieniem (uzupełnieniem) zbioru A w zbiorze S nazywamy zbiór $S \setminus A$, piszemy

$$A' = S \setminus A = \setminus A$$

Definicja. Różnica symetryczna.
Różnicą symetryczną zbiorów A i B nazywamy zbiór zdefiniowany:

$$A \triangle B = A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
$$x \in A \div B \iff x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A$$
$$A \div B = \varnothing \iff A = B$$

6.3 Zbiory skończone

Definicja. Zbiór skończony.
Zbiór A nazywamy zbiorem skończonym jeżeli A zawiera m różnych elementów, gdzie $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Oznaczamy: $n(A)$ - liczba elementów skończonego zbioru

$$A = |A| = \bar{\bar{A}} = \#A$$

Własności.
Jeżeli A, B, C są zbiorami skończonymi, to

1. $A \cup B$, $A \cap B$ są zbiorami skończonymi,
   $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

   Jeżeli A i B są rozłączne, to $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.
2. Zbiór A jest podzbiorem skończonego zbioru E.
   Wtedy $n(A') = n(E) - n(A)$.
3. $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$.
4. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C)$
   $-n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.
5. $n(\mathcal{P}(A)) = 2^{n(A)}$.

7 Para uporządkowana

7.1 Para uporządkowana

Definicja. Para uporządkowana (Kuratowski).
Parą uporządkowaną elementów a i b nazywamy $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Twierdzenie. .
Dla każdego a, b, c, d zachodzi

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \iff a = c \wedge b = d$$

$$(a, b) = (c, d)$$

Dowód.

- $\Longleftarrow$ oczywiste
- $\Longrightarrow$

  1. Jeżeli $a = b$, to $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\} \qquad (\{a, a\} = \{a\})$
     oraz $\{c, d\} \in \{\{a\}\}$. Wtedy $c = d = a$. Zatem $a = b = c = d$.
  2. Jeżeli $a \neq b$, to $\{c\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
     Ponieważ $a \neq b$, to $\{c\} \notin \{a, b\}$.
     Wtedy $\{c\} = \{a\}$, tzn. $\underline{a = c}$.
     Z drugiej strony, $\{a, b\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$.
     Ponieważ $a \neq b$, to $\{a, b\} = \{c, d\}$ oraz $\underline{b = d}$.

7.2 Iloczyn kartezjański

Definicja. Iloczyn kartezjański.
Iloczyn kartezjański zbiorów A i B to zbiór, do którego należą wszystkie pary uporządkowane (a, b), gdzie $a \in A$, $b \in B$.

$$A \times B = \{x : \exists a \in A, \exists b \in B, x = (a, b)\}$$

$$\textit{Piszemy } A^2 = A \times A$$

Uogólnienie na trójki uporządkowane:

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n), a_i \in A_i : \forall i = 1, \ldots, n\} = \times_{i=1}^{n} A_i$$

Przykład.

$$
\begin{gathered}
A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \\
\subset \\
\supset
\end{gathered}
$$

Dowód.

- "$\subset$"
  Pokażemy, że $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
  Niech $(x, y) \in A \times (B \cap C)$. Wtedy $x \in A \wedge y \in B \cap C$.
  Zatem $x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$.
  Mamy $(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$.
  Stąd $\underline{(x, y)} \in A \times B$ i $\underline{(x, y)} \in A \times C$.
  Zachodzi $\underline{(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)}$.

- "$\supset$"
  Pokażemy, że $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$.
  Niech $\underline{(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)}$.
  Stąd $(x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in A \times C$.
  Wtedy $(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$.
  Otrzymujemy $x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$, tzn. $x \in A \wedge y \in B \cap C$.
  Ostatecznie $\underline{(x, y) \in A \times (A \cap C)}$

- Ponieważ $\subset$ i $\supset$ to

$$A \times (B \cap C) \iff (A \times B) \cap (A \times C)$$

Przykład.

$$(A \setminus B) \times C) = (A \times C) \setminus (A \times C)$$

Dowód.

- ”$\subset$”

$$\begin{aligned} \text{Niech } (x,y) \in (A \setminus B) \times C &\iff ((x \in A \setminus B) \wedge (y \in C)) \\ &\iff ((x \in A \wedge x \notin B) \wedge (y \in C)) \\ &\iff ((x \in A \wedge \neg x \in B) \wedge (y \in C)). \end{aligned}$$

- ”$\supset$”

$$\begin{aligned} \text{Niech } (x,y) \in (A \times C) \setminus (B \times C) &\iff \\ &\iff ((x,y) \in A \times C) \wedge ((x,y) \notin B \times C) \\ &\iff (x \in A \wedge y \in C) \wedge (\neg(x,y) \in B \times C) \\ &\iff (x \in A \wedge y \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge y \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge y \in C) \wedge (\neg(x \in B) \wedge \neg(y \in C)) \end{aligned}$$

- Oznaczamy

$$\begin{cases} p : x \in A \\ q : x \in B \\ r : y \in C \end{cases}$$