

# Wstęp do teorii mnogości

Stanisław Migórski

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Program</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Literatura</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Zasady oceniania</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Spójniki logiczne</b>	<b>3</b>
4.1	Standardowe . . . . .	3
4.2	Inne spójniki . . . . .	3
4.3	Związki z OAK . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Rachunek funkcyjny</b>	<b>5</b>
5.1	Funkcja zdaniowa . . . . .	5
5.2	Kwantyfikatory . . . . .	6
5.3	Prawa rachunku funkcyjnego . . . . .	6
<b>6</b>	<b>Zbiory i działania na zbiorach</b>	<b>9</b>
6.1	Pojęcia . . . . .	9
6.2	Działania na zbiorach . . . . .	10
6.3	Zbiory skończone . . . . .	13
<b>7</b>	<b>Para uporządkowana</b>	<b>14</b>
7.1	Para uporządkowana . . . . .	14
7.2	Iloczyn kartezjański . . . . .	14
<b>8</b>	<b>Relacje</b>	<b>17</b>
8.1	Relacje . . . . .	17
8.2	Relacja równoważności . . . . .	21

# 1 Program

1. Dowody i elementy logiki.
2. Zbiory i działania na nich.
3. Relacje równoważności.
4. Funkcje.
5. Własności funkcji.
6. Zbiory równoliczne i nierównoliczne.
7. Relacje porządku.
8. Konstrukcje liczbowe.
9. Lemat Kuratowskiego-Zorna.

# 2 Literatura

1. K. Kustowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości*, PWN, 1994
2. H. Rosiowa, *Wstęp do matematyki*, PWN, 2004
3. W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, 1996

# 3 Zasady oceniania

WTM:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ćwiczenia 30h, 2 obecności bez usprawiedliwienia.} \\ \text{wykład 30h.} \end{array} \right.$

**Ocenia końcowa:** **20%** oceny z ćwiczeń + **80%** oceny z egzaminu (I, II termin).

**Pegaz:** zestawy zadań: A, B - obowiązkowe. Dowody do oceny "DDO".

## 4 Spójniki logiczne

### 4.1 Standardowe

$\neg$  (negacja),  $\wedge$  (konjunktja),  $\vee$  (alternatywa),  $\implies$  (implikacja),  $\iff$  (równoważność)

### 4.2 Inne spójniki

1. **Alternatywa rozłączna**  $\alpha$  i  $\beta$ , oznaczamy  $\alpha \oplus \beta$ .  
Czytamy "... albo ..." lub "albo ..., albo ...".

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \oplus \beta$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$(\alpha \oplus \beta) \iff (\neg \alpha \iff \beta) \iff (\alpha \iff \neg \beta) \iff (\neg(\alpha \iff \beta))$$

2. **Dyzjunktja** (*kreska Sheffera*)  $\alpha$  i  $\beta$ , oznaczamy  $\alpha \mid \beta$ .  
Czytamy "albo nie ..., albo nie .."

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \mid \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$(\alpha \mid \beta) \iff (\neg(\alpha \wedge \beta))$$

3. **Binegacja** (*strzałka Pierce’a, funktor Łukasiewicza*)  $\alpha$  i  $\beta$ , oznaczamy  $\alpha \downarrow \beta$ .  
Czytamy ”ani ..., ani ..”

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \downarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$(\alpha \downarrow \beta) \iff (\neg \alpha \wedge \neg \beta)$$

### 4.3 Związki z OAK

Spójniki logiczne mają przyporządkowane bramki logiczne.

- **NOT:**  $\alpha \mapsto \neg \alpha$  (negacja)
- **AND:**  $\alpha, \beta \mapsto \alpha \wedge \beta$  (koniunkcja)
- **NAND:**  $\alpha, \beta \mapsto \neg(\alpha \wedge \beta)$  (dyzjunkcja)
- **OR:**  $\alpha, \beta \mapsto \alpha \vee \beta$  (alternatywa)
- **NOR:**  $\alpha, \beta \mapsto \neg(\alpha \vee \beta) \iff (\neg \alpha \wedge \neg \beta) \iff (\alpha \downarrow \beta)$  (binegacja)
- **XOR:**  $\alpha, \beta \mapsto \alpha \oplus \beta$  (alternatywa rozłączna)
- **XNOR:**  $\alpha, \beta \mapsto \neg(\alpha \oplus \beta)$  (negacja alternatywy rozłącznej)

## 5 Rachunek funkcyjny

### 5.1 Funkcja zdaniowa

Niech  $x_1, \dots, x_n$  będą zbiorami.

**Definicja.** Funkcja zdaniowa

*Funkcję (formą) zdaniową  $n$  zmiennych nazywamy wyrażenie (formułę)  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ , w którym występuje  $n$  zmiennych  $x_1, \dots, x_n$ , które zmienia się w zdanie logiczne, gdy za zmienne  $x_1, \dots, x_n$  podstawimy nazwę dowolnego elementu ze zbiorów  $X_1, \dots, X_n$ .*

**Definicja.** Dziedzina funkcji zdaniowej

***Dziedzina** (zakresem zmienności) funkcji zdaniowej  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  nazywamy iloczyn kartezjański  $x_1 \times \dots \times x_n$  i zapisujemy  $Z(\varphi) = x_1 \times \dots \times x_n$ .*

**Definicja.**

*Mówimy, że  $n$ -tka uporządkowana*

*$(a_1, \dots, a_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  spełnia funkcję zdaniową  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ , jeżeli zdanie  $\varphi(a_1, \dots, a_n)$  jest prawdziwe.*

**Definicja.** Zbiór spełniania funkcji zdaniowej

***Zbiór spełniania** funkcji zdaniowej  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  określamy następująco:*

$$S(\varphi) = \{(a_1, \dots, a_n) \in X_1 \times \dots \times X_n : \varphi(a_1, \dots, a_n) = 1\}$$

*Funkcja zdaniowa  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  jest prawdziwa w zbiorze  $X_1 \times \dots \times X_n$ , jeżeli  $S(\varphi) = X_1 \times \dots \times X_n$ .*

**Twierdzenie.**

*Niech  $\varphi(x_1 \times \dots \times x_n)$ ,  $\psi(x_1 \times \dots \times x_n)$ , gdzie  $x_i \in X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  będą funkcjami zdaniowymi. Wtedy:*

$$1) S(\varphi \wedge \psi) = S(\varphi) \cap S(\psi)$$

$$2) S(\varphi \vee \psi) = S(\varphi) \cup S(\psi)$$

$$3) S(\neg\varphi) = (X_1 \times \dots \times X_n) \setminus S(\varphi)$$

$$4) S(\varphi \implies \psi) = ((X_1 \times \dots \times X_n) \setminus S(\varphi)) \cup S(\psi)$$

$$5) S(\varphi \iff \psi) = (S(\varphi) \cap S(\psi)) \cup (((X_1 \times \dots \times X_n) \cap ((X_1 \times \dots \times X_n) \setminus S(\psi))))$$

**Definicja.**

Funkcje zdaniowe  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  i  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  nazywamy **równoważnymi** jeżeli

$$S(\varphi) = S(\psi).$$

Zapisujemy:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv \psi(x_1, \dots, x_n)$$

**5.2 Kwantyfikatory**

- Kwantyfikator ogólny:  $\forall$ ,  $\wedge$  (dla każdego)
- Kwantyfikator szczególny:  $\exists$ ,  $\vee$  (istnieje)  
 $\exists!$ , (istnieje dokładnie jeden)

**5.3 Prawa rachunku funkcyjnego**

**Twierdzenie.** Prawa de Morgana

$$\begin{cases} \neg(\exists x \in X : \varphi(x)) \iff \forall x \in X : \neg\varphi(x) \\ \neg(\forall x \in X : \varphi(x)) \iff \exists x \in X : \neg\varphi(x) \end{cases}$$

**Twierdzenie.** Prawo egzemplifikacji

$$(\forall x \in X : \varphi(x)) \implies (\exists x \in X : \varphi(x))$$

**Twierdzenie.** Prawo przestawiania kwantyfikatorów

$$(\forall x \in X, \forall y \in Y : \varphi(x, y)) \iff (\forall y \in Y, \forall x \in X : \varphi(x, y))$$

$$(\exists x \in X, \exists y \in Y : \varphi(x, y)) \iff (\exists y \in Y, \exists x \in X : \varphi(x, y))$$

$$(\exists x \in X, \forall y \in Y : \varphi(x, y)) \implies (\forall y \in Y, \exists x \in X : \varphi(x, y))$$

$$\iff \text{nie zachodzi!!}$$

**Twierdzenie.** Prawo włączania i wyłączenia kwantyfikatorów

$$\begin{cases} \forall x \in X : (\varphi(x) \vee \psi) \iff (\forall x \in X : \varphi(x)) \vee \psi \\ \exists x \in X : (\varphi(x) \vee \psi) \iff (\exists x \in X : \varphi(x)) \vee \psi \\ \dots \end{cases}$$

**Twierdzenie.** Prawo rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem koniunkcji

$$\begin{cases} \forall x \in X : (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \iff (\forall x \in X : \varphi(x)) \wedge (\forall x \in X : \psi(x)) \\ \forall x \in X : (\varphi(x) \vee \psi(x)) \iff (\forall x \in X : \varphi(x)) \vee (\forall x \in X : \psi(x)) \\ \dots \end{cases}$$

**Przykład.** Prawo rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem implikacji

$$\begin{aligned} (\forall x \in X : (\varphi(x) \implies \psi(x))) &\implies ((\forall x \in X : \varphi(x)) \implies (\forall x \in X : \psi(x))) \\ &\iff \text{nie zachodzi} \end{aligned}$$

Niech:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \\ \psi(x) &= \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0\} \\ X &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wtedy:

$$\underbrace{(\forall x \in \mathbb{R} : (x < 0 \implies x + 1 > 0))}_{\text{fałsz}} \iff \underbrace{((\underbrace{(\forall x \in \mathbb{R} : x < 0)}_{\text{fałsz}} \implies \underbrace{(\forall x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0)}_{\text{fałsz}}))}_{\text{prawda}}_{\text{fałsz}}$$

**Przykład.** Prawo rozdzielności kwantyfikatora szczególnego względem koniunkcji

$$(\exists x \in X : (\varphi(x) \wedge \psi(x))) \implies ((\exists x \in X : \varphi(x)) \wedge (\exists x \in X : \psi(x)))$$

$$\Longleftarrow \text{nie zachodzi}$$

Niech:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \{2 \mid x : x \in \mathbb{N}\} \text{parzyste} \\ \psi(x) &= \{\neg 2 \mid x : x \in \mathbb{N}\} \text{nieparzyste} \\ X &= \mathbb{N}\end{aligned}$$

Wtedy:

$$\underbrace{(\exists x \in \mathbb{N} : (2 \mid x \wedge \neg 2 \mid x))}_{\text{fałsz}} \Longleftarrow \underbrace{((\underbrace{\exists x \in \mathbb{N} : 2 \mid x}_{\text{prawda}}) \wedge (\underbrace{\exists x \in \mathbb{N} : \neg 2 \mid x}_{\text{prawda}}))}_{\text{prawda}}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{fałsz}}$$

**Uwaga:**

1. Dla formy zdaniowej jednej zmiennej zachodzi:

$$(\forall x : P(x) \implies (\exists x \in X : P(x)))$$

2. Dla formy zdaniowej dwóch zmiennych zachodzi:

$$\begin{array}{ccc}(\forall x, \forall y : P(x, y)) & \Longleftrightarrow & (\forall y, \forall x : P(x, y)) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (\exists x, \forall y : P(x, y)) & & (\exists y, \forall x : P(x, y)) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (\forall y, \exists x : P(x, y)) & & (\forall x, \exists y : P(x, y)) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (\exists y, \exists x : P(x, y)) & & (\exists x, \exists y : P(x, y))\end{array}$$



## 6 Zbiory i działania na zbiorach

### 6.1 Pojęcia

- Pojęcie zbioru jest pojęciem pierwotnym.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  – zbiory liczbowe

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  (Pezno)

$\mathbb{N}_1 = \{1, 2, \dots\}$

- Pojęcie "należenia do zbioru"

$$1 \in \mathbb{N}, (\neg(\sqrt{2} \in \mathbb{N})) \iff (\sqrt{2} \notin \mathbb{N})$$

- Zasada równości zbiorów

$$A = B, \text{ tzn. } \forall x : \underbrace{(x \in A \implies x \in B)}_{A \subset B} \wedge \underbrace{(x \in B \implies x \in A)}_{B \subset A}$$

$$A \subset B, \text{ wtw. } \forall x : (x \in A \implies x \in B)$$

To znaczy, aby udowodnić, że  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  dowodzimy

$$\forall x \begin{cases} x \in A \implies x \in B \\ x \in B \implies x \in A \end{cases}$$

$$A \subset B \wedge B \subset A$$

- Oznaczamy

$\{a, b\}$  para uporządkowana

$\{a\}$  singleton

$\{a, a\} = \{a\}$

- Definiowanie zbiorów

1. Wypisujemy elementy zbioru

2.  $\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{W}(\mathbf{x})\}$

$$\text{Par} = \{x \in \mathbb{N} : \underbrace{2 \mid x}_{W(x)}, \quad \{ \underbrace{\{1, 2\}}_{\text{jeden element}} \} \neq \{1, 2\}$$

**Definicja.** Zbiór potęgowy

*Zbiorem potęgowym zbioru  $A$  nazywamy zbiór złożony ze wszystkich podzbiorów zbioru  $A$ , tzn.  $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}$*

Zbiór potęgowy  $\mathcal{P}(A)$  zbioru  $A$ .

$$\{\emptyset, A\} \subset \mathcal{P}(A) \longleftarrow$$

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

...

## 6.2 Działania na zbiorach

**Definicja.** Suma zbiorów

*Sumą zbiorów  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór złożony z tych i tylko z tych elementów, które należą do co najmniej jednego z tych zbiorów.*

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

**Twierdzenie.**

*Jeżeli  $A$  i  $B$  są zbiorami, to wtedy:*

1.  $A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B$
2.  $(A \subset C \wedge B \subset C) \implies A \cup B \subset C$

Niech  $\mathcal{A}$  będzie rodziną zbiorów (tzn. zbiorami, którego elementami są zbiory).

**Definicja.** Suma rodziny

*Suma rodziny  $\mathcal{A}$  jest zbiorem złożonym z tych i tylko z tych elementów, które należą do co najmniej jednego spośród zbiorów należących do rodziny  $\mathcal{A}$ , tzn.  $x \in \bigcup \mathcal{A}$  wtw.  $\exists A \in \mathcal{A} : x \in A$*

Jest uogólnienie pojęcia sumy zbiorów.

$$\bigcup \{A, B\} = A \cup B, \quad \bigcup \{A, B, C\} = A \cup B \cup C$$

**Twierdzenie.**

*Jeżeli  $\mathcal{A}$  jest rodziną zbiorów, to wtedy*

$$1. \forall A : (A \in \mathcal{A} \implies A \subset \bigcup \mathcal{A})$$

*2. Jeżeli  $C$  jest zbiorem o następującej własności:*

$$\forall A : (A \in \mathcal{A} \implies A \subset C)$$

$$\text{To} \quad \bigcup \mathcal{A} \subset C$$

**Definicja.** Iloczyn zbiorów

*Iloczynem zbiorów (przecięciem, częścią wspólną)  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór złożony z tych i tylko z tych elementów, które należą jednocześnie do  $A$  i  $B$ .*

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

**Twierdzenie.**

*Jeżeli  $A$  i  $B$  są zbiorami, to*

$$1. A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$$

$$2. (C \subset A \wedge C \subset B) \implies C \subset A \cap B$$

*Jeżeli  $A \cap B = \emptyset$ , to  $A$  i  $B$  nazywamy rozłącznymi.*

Niech  $\mathcal{A}$  będzie niepustą rodziną zbiorów.

**Definicja.** Iloczyn rodziny

*Iloczynem rodziny  $\mathcal{A}$  nazywamy zbiór złożony z tych i tylko z tych elementów, które należą do każdego spośród zbiorów należących do rodziny  $\mathcal{A}$ , tzn.*

$$x \in \bigcap \mathcal{A} \iff \forall A \in \mathcal{A} : x \in A$$

Jest uogólnienie pojęcia iloczynu zbiorów.

$$\bigcap \{A, B\} = A \cap B, \quad \bigcap \{A, B, C\} = A \cap B \cap C$$

**Twierdzenie.**

*Jeżeli  $\mathcal{A}$  jest niepustą rodziną zbiorów, to wtedy*

$$1. \forall A : (A \in \mathcal{A} \implies \bigcap \mathcal{A} \subset A)$$

*2. Jeżeli  $C$  jest zbiorem o następującej własności:*

$$\forall A : (A \in \mathcal{A} \implies C \subset A)$$

$$\text{To} \quad C \subset \bigcap \mathcal{A}$$

**Definicja.** Różnica zbiorów

*Różnicą zbiorów  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór złożony z tych i tylko z tych elementów, które należą do  $A$  i nie należą do  $B$ , tzn.*

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge \neg x \in B\} = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

**Twierdzenie.**

*Jeżeli  $A \wedge B$  są zbiorami, to*

$$1. A \setminus B \subset A, (A \setminus B) \cap B = \emptyset$$

$$2. C \subset A, C \cap B \neq \emptyset \implies C \subset A \setminus B$$

**Definicja.** Dopelnienie zbioru

*Dopelnieniem (uzupełnieniem) zbioru  $A$  w zbiorze  $S$  nazywamy zbiór  $S \setminus A$ , piszemy*

$$A' = S \setminus A = \setminus A$$

**Definicja.** Różnica symetryczna

*Różnicą symetryczną zbiorów  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór zdefiniowany:*

$$A \triangle B = A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$x \in A \div B \iff x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A$$

$$A \div B = \emptyset \iff A = B$$

## 6.3 Zbiory skończone

**Definicja.** Zbiór skończony

*Zbiór  $A$  nazywamy zbiorem skończonym jeżeli  $A$  zawiera  $m$  różnych elementów, gdzie  $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .*

**Oznaczamy:**  $n(A)$  - liczba elementów skończonego zbioru

$$A = |A| = \bar{\bar{A}} = \#A$$

**Własności.**

Jeżeli  $A, B, C$  są zbiorami skończonymi, to

1.  $A \cup B, A \cap B$  są zbiorami skończonymi,  
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ .

Jeżeli  $A$  i  $B$  są rozłączne, to  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ .

2. Zbiór  $A$  jest podzbiorem skończonego zbioru  $E$ .  
Wtedy  $n(A') = n(E) - n(A)$ .
3.  $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$ .
4.  $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ .
5.  $n(\mathcal{P}(A)) = 2^{n(A)}$ .

## 7 Para uporządkowana

### 7.1 Para uporządkowana

**Definicja.** Para uporządkowana (Kuratowski)

Parę uporządkowaną elementów  $a$  i  $b$  nazywamy  $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ .

**Twierdzenie.**

Dla każdego  $a, b, c, d$  zachodzi

$$\begin{aligned}\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} &\iff a = c \wedge b = d \\ (a, b) &= (c, d)\end{aligned}$$

**Dowód.**

- $\Leftarrow$  oczywiste
- $\Rightarrow$ 
  1. Jeżeli  $a = b$ , to  $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$  ( $\{a, a\} = \{a\}$ )  
oraz  $\{c, d\} \in \{\{a\}\}$ . Wtedy  $c = d = a$ . Zatem  $a = b = c = d$ .
  2. Jeżeli  $a \neq b$ , to  $\{c\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$ .  
Ponieważ  $a \neq b$ , to  $\{c\} \notin \{a, b\}$ .  
Wtedy  $\{c\} = \{a\}$ , tzn.  $a = c$ .  
Z drugiej strony,  $\{a, b\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$ .  
Ponieważ  $a \neq b$ , to  $\{a, b\} = \{c, d\}$  oraz  $b = d$ .

### 7.2 Iloczyn kartezjański

**Definicja.** Iloczyn kartezjański

Iloczyn kartezjański zbiorów  $A$  i  $B$  to zbiór, do którego należą wszystkie pary uporządkowane  $(a, b)$ , gdzie  $a \in A, b \in B$ .

$$A \times B = \{x : \exists a \in A, \exists b \in B, x = (a, b)\}$$

$$\text{Piszemy } A^2 = A \times A$$

Uogólnienie na trójki uporządkowane:

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n), a_i \in A_i : \forall i = 1, \dots, n\} = \times_{i=1}^n A_i$$

### Przykład.

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$\subset$

$\supset$

### Dowód.

- " $\subset$ "

Pokażemy, że  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ .

Niech  $(x, y) \in A \times (B \cap C)$ . Wtedy  $x \in A \wedge y \in B \cap C$ .

Zatem  $x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$ .

Mamy  $(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$ .

Stąd  $\underline{(x, y) \in A \times B}$  i  $\underline{(x, y) \in A \times C}$ .

Zachodzi  $\underline{(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)}$ .

- " $\supset$ "

Pokażemy, że  $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$ .

Niech  $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ .

Stąd  $(x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in A \times C$ .

Wtedy  $(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$ .

Otrzymujemy  $x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$ , tzn.  $x \in A \wedge y \in B \cap C$ .

Ostatecznie  $\underline{(x, y) \in A \times (B \cap C)}$

- Ponieważ  $\subset$  i  $\supset$  to

$$A \times (B \cap C) \iff (A \times B) \cap (A \times C)$$

**Przykład.**

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$$

**Dowód.**

- "⊂"

$$\begin{aligned} \text{Niech } (x, y) \in (A \setminus B) \times C &\iff ((x \in A \setminus B) \wedge (y \in C)) \\ &\iff ((x \in A \wedge x \notin B) \wedge (y \in C)) \\ &\iff ((x \in A \wedge \neg x \in B) \wedge (y \in C)). \end{aligned}$$

- "⊃"

$$\begin{aligned} \text{Niech } (x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C) &\iff \\ &\iff ((x, y) \in A \times C) \wedge ((x, y) \notin B \times C) \\ &\iff (x \in A \wedge y \in C) \wedge \neg(x, y) \in B \times C \\ &\iff (x \in A \wedge y \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge y \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge y \in C) \wedge (\neg(x \in B) \wedge \neg(y \in C)) \end{aligned}$$

- Oznaczamy

$$\left\{ \begin{array}{l} p : x \in A \\ q : x \in B \\ r : y \in C \end{array} \right.$$



## 8 Relacje

### 8.1 Relacje

**Definicja.** Relacja

Relację  $R$  w zbiorze  $X \times Y$  nazywamy dowolny podzbiór  $R \subset X \times Y$ ,  $R$  nazywamy relacją binarną.

**Definicja.**

Niech  $R$  będzie relacją w zbiorze  $X$  tzn.  $R \subset X \times X$ ,

1.  $R$  nazywamy **zwrotną** wtw.

$$\forall x \in X : xRx$$

2.  $R$  nazywamy **przeciwzwrotną** wtw.

$$\forall x \in X : \neg xRx$$

3.  $R$  nazywamy **symetryczną** wtw.

$$\forall x, y \in X : (xRy \implies yRx)$$

4.  $R$  nazywamy **przeciwsymetryczną** (asymetryczną) wtw.

$$\forall x, y \in X : (xRy \implies \neg(yRx))$$

5.  $R$  nazywamy **słabo antysymetryczną** wtw.

$$\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx \implies x = y)$$

6.  $R$  nazywamy **przechodnią** wtw.

$$\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz \implies xRz)$$

7.  $R$  nazywamy **spójną** wtw.

$$\forall x, y \in X : ( \underbrace{xRy \vee yRx}_{x \text{ i } y \text{ są porównywalne}} \vee x = y )$$

**Przykład.**

$$\begin{aligned} & \text{Niech } R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ & xRy \iff x \leq |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1. R zwrotna?

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \leq |x|$$

**TAK**

2. R przeciwwzrotna?

$$\forall x \in \mathbb{R} : \neg x \leq |x|$$

**NIE**, np.  $x = 1$

3. R symetryczna?

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq |y| \implies y \leq |x|)$$

**NIE**, np.  $x = 0, y = 1$

4. R przeciwsymetryczna?

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq |y| \implies \neg y \leq |x|)$$

**NIE**, np.  $x = y = 0$

5. R słabo antysymetryczna?

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq |y| \wedge y \leq |x| \implies x = y)$$

**NIE**, np.  $x = 2, y = -2$

6. R przechodnia?

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \leq |y| \wedge y \leq |z| \implies x \leq |z|)$$

**NIE**, np.  $x = 3, y = -5, z = 2$

7. R spójna?

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq |y| \vee y \leq |x| \vee x = y)$$

**TAK**, ponieważ  $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x = y \vee x < y \vee y < x)$

oraz  $\forall w \in \mathbb{R} : w \leq |w|$

zatem  $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x < |y| \vee y < |x| \vee x = y)$

stąd R spójna

R jest zwrotna i spójna.

**Przykład.**

Niech  $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$xRy \iff 3 \mid (x - y), \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

1. R zwrotna?

$$\forall x \in \mathbb{Z} : 3 \mid (x - x)$$

**TAK**

2. R przeciwzwrotna?

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \neg(3 \mid (x - x))$$

**NIE**, np.  $x = 0$

3. R symetryczna?

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : (3 \mid (x - y) \implies 3 \mid (y - x))$$

**TAK:** Niech  $xRy \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k$ , wtedy  $\exists l = k \in \mathbb{Z}$  takie,  
że  $y - x = 3l$ .  
Stąd  $yRx$ .

4. R przeciwsymetryczna?

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : (3 \mid (x - y) \implies \neg(3 \mid (y - x)))$$

**NIE**, np.  $x = 6, y = 3$

5. R słabo antysymetryczna?

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : (3 \mid (x - y) \wedge 3 \mid (y - x) \implies x = y)$$

**NIE**, np.  $x = 6, y = 3$

6. R przechodnia?

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : (3 \mid (x - y) \wedge 3 \mid (y - z) \implies 3 \mid (x - z))$$

**TAK:** Niech  $3 \mid (x - y) \wedge 3 \mid (y - z)$ .

Stąd  $x - y = 3k, k \in \mathbb{Z}$

$y - z = 3l, l \in \mathbb{Z}$ .

Zatem  $x - y + y - z = 3k + 3l$

$x - z = 3(k + l)$ .

Niech  $m = k + l, m \in \mathbb{Z}$ , bo wtedy

$x - z = 3m$ , tzn.  $3 \mid (x - z)$ .

7. R spójna?

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : (3 \mid (x - y) \vee 3 \mid (y - x) \vee x = y)$$

**NIE**, np.  $x = 2, y = 1$ , bo  $(2 \neq 1 \wedge \neg(3 \mid 1) \wedge \neg(3 \mid (-1)))$

R jest zwrotna, symetryczna oraz przechodnia.

**Definicja.** Relacja  $n$ -argumentowa, binarna, pusta, pełna  
*Niech  $X_1, \dots, X_n$  będą zbiorami. Każdy podzior  $R \subset X_1 \times \dots \times X_n$  nazywamy relacją  $n$ -argumentową.*

*Jeżeli  $n = 2$ , to  $R \subset X_1 \times X_2$  nazywamy relacją binarną.*

*Jeżeli  $R = \emptyset$  to  $R$  nazywamy relacją pustą.*

*Jeżeli  $R = X_1 \times \dots \times X_n$ , to  $R$  nazywamy relacją pełną.*

**Definicja.** Dziedzina relacji

*Dziedzina relacji  $R \subset X \times Y$  nazywamy*

$$D(R) = \{x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in R\} \subset X$$

**Definicja.** Przeciwdziedzina relacji

*Przeciwdziedzina relacji  $R \subset X \times Y$  nazywamy*

$$D^*(R) = \{y \in Y : \exists x \in X : (x, y) \in R\} \subset Y$$

## 8.2 Relacja równoważności

**Definicja.** Relacja równoważności

*Relację  $R \subset X \times X$  nazywamy relacją równoważności wtw.  $R$  jest **zwrotna, symetryczna i przechodnia**. Relacja  $R = \emptyset$  jest relacją równoważności.*

**Definicja.** Klasa abstrakcji

*Niech  $R \subset X \times X$  relacja równoważności,  $X \neq \emptyset, x \in X$ .*

*Klasę abstrakcji (klasę równoważności) elementu  $x$  (względem relacji  $R$ ) nazywamy  $[x]_R = \{y \in X : xRy\} \subset X$ .*

**Definicja.** Zbiór ilorazowy

*Zbiorem ilorazowym zbioru  $X$  przez relację  $R$  nazywamy zbiór wszystkich klas abstrakcji.*

$$X/R = \{[x]_R : x \in X\} \subset X$$

**Przykład.**

Niech  $X = \{1, 2, \dots, 16\}$ ,  $R \subset X \times X$ ,  $xRy \iff 4 \mid (x^2 - y^2)$ ,  $\forall x, y \in X$ .

Wyznaczyć zbiór ilorazowy  $X/R$ .

Czy  $R$  jest relacją równoważności?

$$\begin{cases} R \text{ zwrotna}, \forall x \in X : 4 \mid 10 \\ R \text{ symetryczna}, \forall x, y \in X : (4 \mid (x^2 - y^2) \implies 4 \mid (y^2 - x^2)) \\ R \text{ przechodnia}, \forall x, y, z \in X : (4 \mid (x^2 - y^2) \wedge 4 \mid (y^2 - z^2) \implies 4 \mid (x^2 - z^2)) \end{cases}$$

... dowód ...

Co to jest  $[x]_R$ ?  $x \in X$ .

$$\begin{aligned} [x]_R &= \{y \in X : xRy\} \\ &= \{y \in X : 4 \mid (x^2 - y^2)\} \\ &= \{y \in X : \exists k \in \mathbb{Z} : x^2 - y^2 = 4k\} \\ 4 \mid (x^2 - y^2) &\iff x^2 - y^2 = 4k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{np. } [1]_R &= \{y \in X : y^2 = 1 + 4k, k \in \mathbb{Z}\} = \{1, 3, 5, \dots\} \\ [2]_R &= \{y \in X : y^2 = 4 + 4k, k \in \mathbb{Z}\} = y^2 = 4(1 + k) = \{2, 4, \dots\} \\ [3]_R &= \{y \in X : y^2 = 9 + 4k, k \in \mathbb{Z}\} = [1]_R \\ [4]_R &= [2]_R \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dwie klasy abstrakcji.  $[1]_R = A_1$ ,  $[2]_R = A_2$ .

Zbiór ilorazowy  $X/R = \{[x]_R : x \in X\} = \{A_1, A_2\}$

**Lemat.**

Niech  $X \neq \emptyset$ ,  $R \subset X \times X$  relacja równoważności. Wtedy

$$xRy \iff [x]_R = [y]_R, \forall x, y \in X$$

**Dowód.**

- "  $\implies$  "

Niech  $x, y \in X$ , takie że  $xRy$ .

- Pokażemy, że  $[x]_R \subset [y]_R$ .

Niech  $a \in [x]_R$ . Wtedy  $\underline{aRx}$ . Ponieważ równocześnie  $\underline{xRy}$ , to wtedy  $\underline{aRy}$  (z przechodności  $R$ ).

Zatem  $aRy$ , więc  $a \in [y]_R$ . Stąd  $[x]_R \subset [y]_R$ .

- Pokażemy, że  $[y]_R \subset [x]_R$ .

Niech  $b \in [y]_R$ . Wtedy  $\underline{bRy}$  (lub  $yRb$ ,  $R$  symetryczne). Ponieważ równocześnie  $\underline{xRy}$  i  $yRb$ , więc  $\underline{xRb}$  (lub  $bRx$ , z przechodności  $R$ ).

Stąd  $b \in [x]_R$ . Stąd  $[y]_R \subset [x]_R$ .

Wniosek:  $[x]_R = [y]_R$

- "  $\impliedby$  "

Niech  $x, y \in X$ , takie że  $[x]_R = [y]_R$ .

Czy  $xRy$ ?

$R$  zwrotna:  $xRx$ . Zatem  $x \in [x]_R \stackrel{\text{zał}}{=} [y]_R$ . Więc  $x \in [y]_R$ . Stąd  $xRy$ .

**Definicja.** Podział zbioru

Niech  $X \neq \emptyset$ ,  $P$  rodzina podzbioru zbioru  $X$ . ( $P \subset \mathcal{P}(X)$ )

Rodzinę  $P$  nazywamy podziałem zbioru  $X$ , jeżeli

- $\forall A \in P, A \neq \emptyset$
- $\forall A, B \in P : (A \neq B \implies A \cap B = \emptyset)$
- $\bigcup P = X$

**To znaczy**  $P$  jest rodziną zbiorów nieparzystych, parami rozłącznych i jej sumą jest cały zbiór  $X$ .

Zbiory rodziny  $P$  nazywamy blokami.

**Uwaga.** Jeżeli  $X \neq \emptyset$ , to podział  $P = \{\{a\} : a \in X\}$  jest "najdrobniejszy", a  $P = \{X\}$  (jednoelementowy) zawiera tylko jeden blok.

**Twierdzenie.** Zasada abstrakcji

Niech  $X \neq \emptyset$ . Wtedy:

1. Jeżeli  $R \subset X \times X$  jest relacją równoważności to wtedy zbiór ilorazowy  $X/R$  jest podzbiorem  $X$ .
2. Jeżeli  $P$  jest podzbiorem zbioru  $X$ , to wtedy relacja:

$$\left\{ \begin{array}{l} R \subset X \times X \\ xRy \iff \underbrace{\exists C \in P : (x \in C \wedge y \in C)}_{\text{"relacja pozostawania w tym samym zbiorze"}} \end{array} \right.$$

jest relacją równoważności w  $X$ .

**Przykład.**

Czy suma i różnica dwóch relacji równoważności jest relacją równoważności?

**Nie.**  $X = \{1, 2, 3\}$

$$\text{są relacjami równoważności } \left\{ \begin{array}{l} R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\} \\ S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\} \end{array} \right.$$

Natomiast

$$R \cup S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$$

$$R \setminus S = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

ponieważ  $(2, 1), (1, 3) \in R \cup S$ , ale  $(2, 3) \notin R \cup S$ .