L3 INFO Magistère et LDD 3 Info-Math : Option IOC UPSACLAY

2023-2024

TP/Projet : Résolution d'un programme linéaire en variables continues et en variables entières

Partie I : modélisation et compréhension du problème du sac à dos 0-1.

Pour embarquer dans l'avion, votre valise ne doit pas peser plus de *B* kg. Il ne va donc pas être possible d'emporter les n objets que vous vouliez y placer. Vous allez devoir faire des choix. Vous avez pesé chaque objet : pi est le poids de l'objet *i (i=1,…,n).* Pour optimiser le contenu de la valise, vous avez attribué à chaque objet une note d'utilité entre 1 et 20 aux n objets : *c*i est donc la note attribuée *(i=1,…n).*
Votre objectif est de maximiser l'utilité globale de la valise (égale à la somme des utilités des objets emportés.

Nous allons modéliser ce problème sous la forme d'un programme linéaire en nombres entiers puis le résoudre en utilisant une méthode de type **Branch&Bound**.

1. Définissez les variables de décision *(x_i)*
2. Définissez les contraintes et la fonction objectif. Ecrivez le programme linéaire en nombres entiers *(KP)* à résoudre.
3. Ecrivez le programme linéaire si le poids maximum autorisé *est B=17 kg* et que vous devez choisir parmi 4 objets dont les poids respectifs sont *p1=3, p2=7, p3=9 et p4=6 et les utilités sont u1=8, u2=18, u3=20 et u4=11.*
4. Résolution de la relaxation continue (KP_{cont}) du problème ci-dessus avec une méthode autre que le simplexe.
   On suppose donc que les objets sont fractionnables : le programme (KP_{cont}) est donc le programme dans lequel on remplace *x_i* appartenant à {0 ;1} par [0,1]. Le programme (KP_{cont}) (relaxation continue donc de (KP)) peut se résoudre de façon exacte par la méthode de *Fayard et Plateau (1978*) plus rapide que la méthode du *simplexe*. Elle se déroule comme suit :
   On trie les ratios ci/pi par ordre décroissant ;
   Selon l'ordre, on met les objets dans le sac jusqu'à ce que l'on dépasse B ;
   Le premier objet qui dépasse B est mis fractionnaire de façon à compléter le poids de la valise (jusqu'à B) ;
   Soit imax tel que la somme pour i allant de 1 à imax des pi soit inférieure ou égale à B et la somme pour i allant de 1 à imax +1 soit strictement supérieure à B. On a donc :
   $x_i = 1$ pour $i=1,\ldots,imax$ et $x_{imax+1} = (B-\sum_{i=1}^{imax} p_i)/p_{imax+1}$ et $x_i=0$ pour $imax+2,\ldots,n$;
5. Quelle est la solution dans le cas de l'instance du 3) si on suppose les objets fractionnables ?
6. Résolvez maintenant *(KP)* pour l'exemple du 3) par une méthode arborescente en vous servant en chaque nœud de l'arbre de la méthode donnée en 4) pour résoudre (KP_{cont}) et pas celle du simplexe.

Partie II: codage de votre B&B en Julia **http://web4.ensiie.fr/~faye/mpro/MPRO_reseau/Projet_2019/tutojulia.pdf**

pour un sac à dos en variables 0-1 où en chaque nœud de l'arborescence la borne supérieure est calculée via la méthode de Fayard et Plateau 1978 et démarrage de l'arbre avec une solution admissible de bonne qualité obtenue via un glouton.

La structure du B&B vous est fournie en Julia via la fonction bonobo
https://opensourc.es/blog/tsp-branch-and-bound/#bonobo

II.1. Codez en Julia une heuristique gloutonne vous permettant de déterminer une solution admissible de départ pour le problème du sac à dos en variables 0-1.

II.2. Codez en Julia l'algorithme de fayard et Plateau vous permettant de déterminer la solution optimale du problème en variables continues associée au sac à dos 0-1.

II.3. Codez alors l'algorithme de B&B incorporant les solutions de II.1 et de II.2 via Bonobo https://opensourc.es/blog/tsp-branch-and-bound/#bonobo .

Vous pouvez partir de l'instance suivante :

$$\text{Max } f(x) = 8\,x1 + 18\,x2 + 20\,x3 + 11\,x4$$
$$\text{s.c.}$$
$$3\,x1 + 7\,x2 + 9\,x3 + 6\,x4 <= 17$$
$$x1, x2, x3, x4 \in \{0; 1\}$$

ANNEXE (sac à dos 0-1, résolution du continue avec l'algorithme de Fayard et Plateau)

Pour embarquer dans l'avion, votre valise ne doit pas peser plus de *B* kg. Il ne va donc pas être possible d'emporter les n objets que vous vouliez y placer. Vous allez devoir faire des choix. Vous avez pesé chaque objet : pi est le poids de l'objet *i (i=1,…,n).* Pour optimiser le contenu de la valise, vous avez attribué à chaque objet une note d'utilité entre 1 et 20 aux n objets : *ci* est donc la note attribuée *(i=1,…n).*
Votre objectif est de maximiser l'utilité globale de la valise (égale à la somme des utilités des objets emportés.

Nous allons modéliser ce problème sous la forme d'un programme linéaire en nombres entiers puis le résoudre en utilisant une méthode de type **Branch&Bound** (B&B).

PSEUDO CODE DU B&B

1. Initialisation:

    Calculer un LB (borne Inférieure : valeur de la fonction provenant d'une solution admissible en nombres entiers pour (P)

    Calculer un UB(borne supérieure par la méthode du simplex (var. continues) soit graphiquement

    si e deux dimensions sinon par tableau

2. Choisir une variable xi et une constante k et ajouter la contrainte xi >= k+1 et xi <= k
cette variable est choisie parmi celle qui est la plus fractionnaire dans la solution fournie par la relaxation continue
3. Diviser l'arbre selon ces deux contraintes
4. Pour chaque nœud i calculer Ubi de ce nœud par la méthode du simplexe

    Si (Ubi < LB)

    ne poursuivez pas sur ce noeud

    Sinon (si la solution de UBi est fractionnée)

    Allez à 2
    Sinon (Si la solution de Ubi est entière)

    Si LB < UBi alors LB <- Ubi
    Allez à 2