Análisis IV – Guía de problemas N°3
Series de Taylor y Laurent
Singularidades, polos y Residuos

Series de Taylor

1) Escriba un programa en Python para graficar una secuencia de números complejos. Use el programa para descubrir secuencias que tienen propiedades geométricas interesantes, por ejemplo, que estén siempre en una elipse, o vayan en espiral hacia un centro que es su límite, tienen infinitos puntos limites, etc.

2) Muestre que las funciones pares (impares) tienen desarrollos en serie con todos los coeficientes a_n impares (pares) cero (solo tienen coeficientes distintos de cero en sus potencias pares (impares). De ejemplos de ambos casos. (**Nota**: toda función se puede escribir como suma de una función par, más una impar. $f(x) \; = \frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\; + \left(f(x)-f(-x)\right)\right)$

3) Calcule los desarrollos de Taylor, alrededor de $z_0 = 0$, para las siguientes funciones que aparecen en muchas aplicaciones (estadística, conducción del calor, óptica), llamadas Función error, erf(z), integral del seno, Si(z), e integrales de Fresnel, S(z) y C(z), llamadas funciones trascendentales superiores.

a) $S(z) = \int_0^z sen(t^2)\, dt$

b) $\mathrm{C}(z) = \int_0^z cos(t^2)\, dt$

c) $\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2\, dt}$

d) $\mathrm{Si}(z) = \int_0^z \frac{sen(t)}{t} dt$

4) Escriba un programa que calcule los **números de Euler**, E_{2n}, definidos por los coeficientes del desarrollo de la serie de Taylor alrededor de $z_0 = 0$, para la función:

$$f(z) = sec(z) = \frac{1}{cos(z)} = E_0 - \frac{E_2}{2!}z^2 + \frac{E_4}{4!}z^4 + \cdots + \frac{(-1)^n E_{2n}}{2n!}z^{2n} + \cdots$$

Realice lo mismo para los **números de Bernoulli**, en este caso con la función:

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!}z^1 + \frac{B_2}{2!}z^2 + \frac{B_3}{3!}z^3 + \cdots .. + \frac{B_n}{n!}z^n + \cdots$$

Por último, realice lo mismo con la función tan(z) y vea que aparecen los números de Bernoulli pares.

5) Calcule los desarrollos de Taylor alrededor de z_0 y calcule su radio de convergencia, para las siguientes funciones:

a) $\frac{1}{z}, \quad z_0 = i$

b) $\frac{1}{(1-z)}, \quad z_0 = i$

c) $cos^2(z), \quad z_0 = \pi/2$

d) $sin(z), \quad z_0 = \pi/2$

e) $cosh(z - i\,\pi), \quad z_0 = i\,\pi$

f) $\frac{1}{(1+z)^2}, \quad z_0 = i$

g) $e^{z(z-2)}, \quad z_0 = 1$

h) $senh(2z - i), \quad z_0 = \pi\,/\,2$

6) Calcule el desarrollo de la función $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ en serie de Taylor alrededor de $z_0 = 0$ y luego integrando término a término obtener el desarrollo en serie del ArcSen(z)

Series de Laurent

7) Dadas las siguientes funciones, encuentre las singularidades, calcule los desarrollos en serie de Laurent y con ella clasifique las singularidades y evalue el residuo en ellas.

a) $z^3 cos(1/z)$
b) $\frac{senh(z)}{(z-1)^4}$
c) $tan(z)$
d) $e^{\frac{1}{(1-z)}}$
e) $\frac{1}{(1-e^z)}$
f) $\frac{e^z-1}{z^3(z-2)^2}$
g) $\frac{sen(z)}{z(z-1)^2}$

8) Realice un programa para calcular el residuo de una función en un dado polo.

9) Calcule las siguientes integrales sobre las curvas cerradas en sentido antihorario

a) $\oint_C e^{\frac{1}{z}}\, dz$ con C la circunferencia unitaria
b) $\oint_C \frac{e^z}{cos(z)}\, dz$ C: | z – πi/2 | = 4.5
c) $\oint_C \frac{cos(\pi z)}{z^5}\, dz$ C: | z | = 0.5
d) $\oint_C \frac{z^2 sen(z)}{4z^2-1}\, dz$ C la circunferencia unitaria
e) $\oint_C \frac{\text{sen}(z)\text{dz}}{(z^2+1)^3}$ $C: |z| = 2$
f) $\oint_C \frac{\text{dz}}{(1-\cos(z))^2}$ $C: |z| = 1$

10) Calcule las siguientes integrales reales con funciones seno y coseno

a) $\int_0^{\pi} \frac{2\, d\theta}{k - cos(\theta)}$
b) $\int_0^{2\pi} \frac{(1+4\, cos(\theta))\, d\theta}{(17-8\, cos(\theta))}$
c) $\int_0^{\pi} \frac{sen^2(\theta) d\theta}{(5-4cos(\theta))}$
d) $\int_0^{\pi} sen^n(\theta) d\theta$ para n enteros mayores o iguales a 1
e) $\int_0^{\pi} \frac{\cos(2\theta)\text{d}\theta}{1-2\, a \cos(\theta)+ \text{a}^2}$ con -1 < a < 1

11) Calcule las siguientes integrales impropias

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)}$
b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$
c) $\int_0^{\infty} \frac{sen(\pi x)dx}{x(1-x^2)}$
d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(3x)dx}{(x^4+1)}$
e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(4x)dx}{(x^4+5x^2+4)}$
f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^4-1)}$

12) Analice y clasifique las singularidades que tenga la función $f(z) = \frac{1}{(1-\text{Cosh}(2z))}$. Calcule el resultado de la integral $\oint_C \frac{1}{(1-\text{Cosh}(2z))} dz$ sobre la curva C: | z | = 2, en sentido antihorario.

13) Calcule la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ integrando en el plano complejo sobre el rectángulo de vértices - R, R, R + i b y - R + i b y luego tomar el límite R → ∞