Fórmulas 1er Parcial
Funciones complejas

Algunas Funciones Complejas

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$\cos z = \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

$$(\cos z)' = -\sin z, \qquad (\sin z)' = \cos z, \qquad (\tan z)' = \sec^2 z,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cosh z = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \qquad \sinh z = \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

$$(\cosh z)' = \sinh z, \qquad (\sinh z)' = \cosh z,$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}.$$

$$\cosh iz = \cos z, \qquad \sinh iz = i \sin z.$$

$$\cos iz = \cosh z, \qquad \sin iz = i \sinh z.$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta,$$
$$v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$$

A demás u y v satisfacen a ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

O en coordenadas polares

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

Integrales Complejas

$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f[z(t)]\dot{z}(t)\, dt$$

a. Parametrizar la curva de integración C: z(t) a ≤ t ≤ b

b. Calcular la derivada $\left(\dot{z} = \frac{dz}{dt}\right)$

c. Sustituir en la integral f(z) por f(z(t)), dz la derivada calculada en b) por dt y los límites de integración reales, a y b, obteniendo una integral de variable real.

d. Resolver las integrales reales obtenidas por el método tradicional

$$\oint_C (z - z_0)^m\, dz = \begin{cases} 2\pi i & (m = -1), \\ 0 & (m \neq -1 \text{ and integer}). \end{cases}$$

Fórmulas integrales de Cauchy

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0)$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

Series de Taylor

Las funciones **analíticas** en un z_0 se pueden desarrollar en serie de **Taylor**, alrededor de z_0, con un radio de convergencia mayor que cero.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$ con $$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Sus integrales y derivadas tienen el mismo radio de convergencia

Ejemplos: Serie geométrica, exponencial, trigonométricas e hiperbólicas, logaritmo, binomial

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots.$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

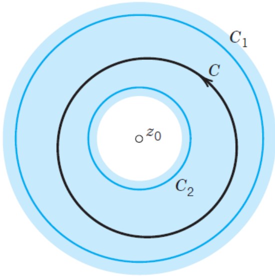
$$\operatorname{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \cdots$$

$$\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right)$$

$$\frac{1}{(1+z)^m} = (1+z)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} z^n$$

Series de Laurent

Dada una función analítica f(z) en todo el dominio limitado por dos circunferencias C_1 y C_2, con z_0 una singularidad, el desarrollo en seria de potencias positivas y negativas de $(z-z_0)$ converge al valor de la función en z.



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

Calculo de integrales utilizando el residuo (b_1 en el desarrollo de Laurent)

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i b_1$$

Orden de un polo utilizando límites

$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)^l = b_l$ con b_l un valor finito, distinto de 0 (ni 0 ni ∞)

Residuos por límite para polos simples (en segunda expresión $p(z_0) \neq 0$)

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Residuos por límite para polos dobles (en segunda expresión $p(z_0) \neq 0$)
0

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \{[(z - z_0)^2 f(z)]'\}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = 2\frac{p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{p(z_0)\, q'''(z_0)}{(q''(z_0))^2}$$

Residuo por límite, caso general para un polo de orden m

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] \right\}$$

Integrales impropias

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx = -2\pi \sum \operatorname{Im} \operatorname{Res}\,[f(z)e^{isz}],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\,dx = 2\pi \sum \operatorname{Re} \operatorname{Res}\,[f(z)e^{isz}].$$

f(z) = q(z) / p(z)
con Gr(q) + 2 ≤ Gr(p)

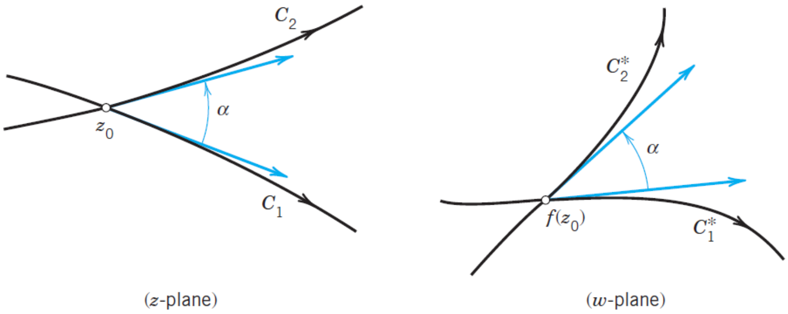
con s > 0

con los residuos en el semiplano superior

Polos simples en el eje real

$$\text{pr. v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) + \pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$$

Mapeo Conforme: Una función f(z) realiza un mapeo conforme, manteniendo el ángulo y la orientación entre dos curvas que se cruzan en un punto z_0, si la función es analítica en z_0 y además su derivada es distinta de 0 en ese punto.



La función inversa multiplicativa w = f(z) = 1/z mapea rectas y circunferencias en rectas y circunferencias.

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

$$Az\bar{z} + B\frac{z+\bar{z}}{2} + C\frac{z-\bar{z}}{2i} + D = 0$$

$$A + B\frac{w+\bar{w}}{2} - C\frac{w-\bar{w}}{2i} + Dw\bar{w} = 0$$

$$A = 1; B = -2x_0; C = -2y_0; D = x_0^2 + y_0^2 - R^2$$

$$A + Bu - Cv + D(u^2+v^2) = 0$$

Nota: Las rectas o circunferencias en z que pasan por el origen (D=0) al transformar w = 1/z se convierten en rectas en el plano w.

Las rectas en z (A=0) se convertirán en rectas o circunferencias en w que pasan por el origen.

Transformaciones lineales fraccionarias

También mapea rectas o circunferencias en rectas o circunferencias

$$f(z) = w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad\qquad w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\,\frac{1}{\left(z+\frac{d}{c}\right)}$$

a) Traslación $z_1 = z + d/c$

b) Inversión $z_2 = 1 / z_1$

c) Multiplicación por un complejo (expansión/ contracción del módulo y rotación del argumento) $z_3 = z_2\,(bc-ad)/c^2$

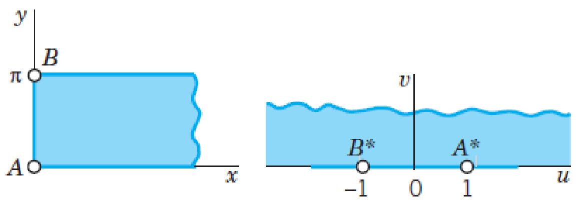
d) Traslación $z_4 = z_3 + a/c$

Dados tres números z_1, z_2 y z_3 pueden ser mapeados a w_1, w_2 y w_3 por una y solo una transformación lineal fraccionaria dada implícitamente por

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

Si alguno de los números complejos corresponde al infinito, la fracción donde aparezcan esos valores debe ser reemplazado por 1.

Mapeo de w = cosh(z)



Teoría del Potencial

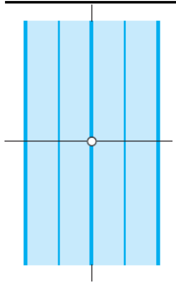
Ec. de Laplace Cartesianas y polares

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

Aplicación en problemas de Electrostática, Conducción de temperatura en estado estacionario o fluidos ideales.

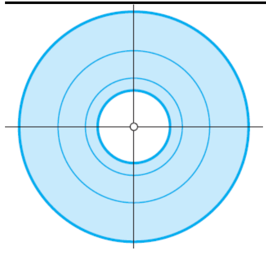
Dado el potencial complejo $F(z) = \Phi + i\ \Psi$,
$\Phi = \text{cte}$ representa las curvas equipotenciales, isotermas o de velocidad constante
$\Psi = \text{cte}$ representa las líneas de E, flujo de calor o líneas de corriente.

Caso 1 – Uniforme



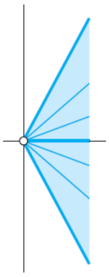
$\Phi(x) = Ax + B; \quad \Psi(y) \quad = Ay + C; \quad F(z) = \Phi + \mathrm{i}\ \Psi = Az + D$

Caso 2 – Cilindros coaxiales



$\Phi(\mathrm{r}) = A\, ln(r) + B; \quad \Psi(\theta) = A\,\theta + C; \quad F(z) = \Phi + i\,\Psi = A\,\mathrm{Ln}(z) + D$

Caso 3 – Planos formando un ángulo



$\Phi(\theta) = A\,\theta + B; \quad \Psi(\mathrm{r}) = A\, ln(r) + C; \; F(z) = \Phi + i\,\Psi = A\,(\text{- i})\,\mathrm{Ln}(z) + D$

Velocidad de un fluido como derivada del potencial

$$V = V_1 + iV_2 = \overline{F'(z)}$$