Appendix

Lemma 4

Broadly, Lemma 4 states that for agents i and k, if k is in $N_i^c(t)$ and is not a first-degree neighbor of i, then there exists an agent j that is a first-degree neighbor of i that is connected to both i and k. There are three properties that hold for Lemma 4 between the agents i and k. Of the 12 possible pairs for (i, k), we highlight the formulas used for the pair $(1, 2)$ in this section. The three dL formulas representing Lemma 4 is as follows:

$$\begin{aligned}
\mathsf{PrL4_12_1} \triangleq\ & \mathsf{A1SN2} = 0 \lor \mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} \neq 5 \lor (\mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} = 5 \\
& \land ((\mathsf{distance(x1,y1,x3,y3)} \leq R \land \mathsf{distance(x3,y3,x2,y2)} \leq R \land \mathsf{distance(x1,y1,x4,y4)} \leq R \\
& \land \mathsf{distance(x4,y4,x2,y2)} \leq R) \\
& \lor (\mathsf{distance(x1,y1,x3,y3)} \leq R \land \mathsf{distance(x3,y3,x2,y2)} \leq R) \lor (\mathsf{distance(x1,y1,x4,y4)} \leq R \\
& \land \mathsf{distance(x4,y4,x2,y2)} \leq R))) \\
\mathsf{PrL4_12_2} \triangleq\ & \mathsf{A1SN2} = 0 \lor \mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} \neq 5 \lor (\mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} = 5 \\
& \land ((\mathsf{N1C3} = 1 \land \mathsf{N3C2} = 1 \land \mathsf{N2C3} = 1 \land \mathsf{N1C4} = 1 \land \mathsf{N4C2} = 1 \land \mathsf{N2C4} = 1) \\
& \lor (\mathsf{N1C3} = 1 \land \mathsf{N3C2} = 1 \land \mathsf{N2C3} = 1 \land (\mathsf{N1C4} = 0 \lor \mathsf{N4C2} = 0 \lor \mathsf{N2C4} = 0)) \\
& \lor ((\mathsf{N1C3} = 0 \lor \mathsf{N3C2} = 0 \lor \mathsf{N2C3} = 0) \land \mathsf{N1C4} = 1 \land \mathsf{N4C2} = 1 \land \mathsf{N2C4} = 1))) \\
\mathsf{PrL4_12_3} \triangleq\ & \mathsf{A1SN2} = 0 \lor \mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} \neq 5 \lor \mathsf{slot13} = 0 \lor \mathsf{slot14} = 0 \lor (\mathsf{A1SN3} + \mathsf{replan1} = 5 \\
& \land ((\mathsf{PrL3_13} \land \mathsf{PrL3_14}) \lor \mathsf{PrL3_13} \lor \mathsf{PrL3_14}))
\end{aligned}$$

PrL4_12_1 is proven directly, and is equivalent to Inv6_12 below. PrL4_12_2 is proven using Inv7_12 and Inv8_12. Lastly, PrL4_12_3 is proven using the formulas for Lemma 3, namely PrL3_13 and PrL3_14.

$$\begin{aligned}
\mathsf{Inv6_12} \triangleq\ & \mathsf{A1SN2} = 0 \lor \mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} \neq 5 \lor (\mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} = 5 \\
& \land ((\mathsf{distance(x1,y1,x3,y3)} \leq R \land \mathsf{distance(x3,y3,x2,y2)} \leq R \land \mathsf{distance(x1,y1,x4,y4)} \leq R \\
& \land \mathsf{distance(x4,y4,x2,y2)} \leq R) \\
& \lor (\mathsf{distance(x1,y1,x3,y3)} \leq R \land \mathsf{distance(x3,y3,x2,y2)} \leq R) \lor (\mathsf{distance(x1,y1,x4,y4)} \leq R \\
& \land \mathsf{distance(x4,y4,x2,y2)} \leq R))) \\
\mathsf{Inv7_12} \triangleq\ & \mathsf{A1SN2} = 0 \lor \mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} \neq 5 \lor (\mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} = 5 \\
& \land ((\mathsf{distance(x1,y1,x3,y3)} \leq R \land \mathsf{distance(x3,y3,x2,y2)} \leq R \land \mathsf{distance(x1,y1,x4,y4)} \leq R \\
& \quad \land \mathsf{distance(x4,y4,x2,y2)} \leq R \\
& \quad \land \mathsf{N1C3} = 1 \land \mathsf{e1N3C2} = 1 \land \mathsf{e1N2C3} = 1 \land \mathsf{N1C4} = 1 \land \mathsf{e1N4C2} = 1 \land \mathsf{e1N2C4} = 1) \\
& \lor (\mathsf{distance(x1,y1,x3,y3)} \leq R \land \mathsf{distance(x3,y3,x2,y2)} \leq R \\
& \quad \land \mathsf{N1C3} = 1 \land \mathsf{e1N3C2} = 1 \land \mathsf{e1N2C3} = 1 \land (\mathsf{N1C4} = 0 \lor \mathsf{e1N4C2} = 0 \lor \mathsf{e1N2C4} = 0)) \\
& \lor (\mathsf{distance(x1,y1,x4,y4)} \leq R \land \mathsf{distance(x4,y4,x2,y2)} \leq R \\
& \quad \land (\mathsf{N1C3} = 0 \lor \mathsf{e1N3C2} = 0 \lor \mathsf{e1N2C3} = 0) \land \mathsf{N1C4} = 1 \land \mathsf{e1N4C2} = 1 \land \mathsf{e1N2C4} = 1))) \\
\mathsf{Inv8_12} \triangleq\ & (\mathsf{distance(x3,y3,x2,y2)} \leq R \lor \mathsf{e1N3C2} = 0 \lor \mathsf{e1N2C3} = 0 \lor \\
& \ (\mathsf{distance(x3,y3,x2,y2)} > R \land \mathsf{e1N3C2} = 1 \land \mathsf{e1N2C3} = 1 \land \mathsf{N3C2} = 1 \\
& \quad \land \mathsf{N2C3} = 1)) \\
& \land (\mathsf{distance(x4,y4,x2,y2)} \leq R \lor \mathsf{e1N4C2} = 0 \lor \mathsf{e1N2C4} = 0 \lor \\
& \ (\mathsf{distance(x4,y4,x2,y2)} > R \land \mathsf{e1N4C2} = 1 \land \mathsf{e1N2C4} = 1 \land \mathsf{N4C2} = 1 \\
& \quad \land \mathsf{N2C4} = 1))
\end{aligned}$$

Lemmas 5-7

The dL formulas representing lemmas 5, 6, and 7 are weaker cases of lemma 4, and thus can be proven using the more general formulas and invariants of lemma 4.

$$\mathsf{PrL5\_12\_1} \triangleq \mathsf{A1SN2} = 0 \lor \mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} \neq 5 \lor \mathsf{N2C1} \geq \mathsf{N2C1old} \lor (\mathsf{A1SN3} + \mathsf{replan1} = 5$$

$$
\begin{aligned}
& \wedge \mathsf{N2C1} < \mathsf{N2C1old} \wedge \mathsf{InvDist}) \\
\mathsf{PrL5\_12\_2} \triangleq\ & \mathsf{A1SN2} = 0 \vee \mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} \neq 5 \vee \mathsf{N2C1} \geq \mathsf{N2C1old} \vee (\mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} = 5 \\
& \wedge \mathsf{N2C1} < \mathsf{N2C1old} \wedge \mathsf{InvNiC}), \\
\mathsf{PrL5\_12\_3} \triangleq\ & \mathsf{A1SN2} = 0 \vee \mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} \neq 5 \vee \mathsf{N2C1} \geq \mathsf{N2C1old} \\
& \vee \mathsf{slot13} = 0 \vee \mathsf{slot14} = 0 \vee (\mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} = 5 \\
& \wedge \mathsf{N2C1} < \mathsf{N2C1old} \wedge ((\mathsf{PrL3\_13} \wedge \mathsf{PrL3\_14}) \vee \mathsf{PrL3\_13} \vee \mathsf{PrL3\_14})) \\
\mathsf{PrL6\_12\_2} \triangleq\ & \mathsf{A1SN2} = 0 \vee \mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} \neq 5 \vee \mathsf{N2C1} \geq \mathsf{N2C1old} \vee \mathsf{Rhat3old} \neq 0 \\
& \vee (\mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} = 5 \wedge \mathsf{N2C1} < \mathsf{N2C1old} \wedge \mathsf{Rhat3old} = 0 \wedge \mathsf{InvNiC}) \\
\mathsf{PrL6\_12\_3} \triangleq\ & \mathsf{A1SN2} = 0 \vee \mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} \neq 5 \vee \mathsf{N2C1} \geq \mathsf{N2C1old} \vee \mathsf{Rhat3old} \neq 0 \\
& \vee (\mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} = 5 \wedge \mathsf{N2C1} < \mathsf{N2C1old} \wedge \mathsf{Rhat3old} = 0 \\
& \wedge ((\mathsf{PrL3\_13} \wedge \mathsf{PrL3\_14}) \vee \mathsf{PrL3\_13} \vee \mathsf{PrL3\_14})) \\
\mathsf{PrL7\_12\_1} \triangleq\ & \mathsf{A1SN2} = 0 \vee \mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} \neq 5 \vee \mathsf{N2C1} \geq \mathsf{N2C1old} \vee \mathsf{Rhat1old} \neq 0 \\
& \vee (\mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} = 5 \wedge \mathsf{N2C1} < \mathsf{N2C1old} \wedge \mathsf{Rhat1old} = 0 \wedge \mathsf{InvDist\_2}) \\
\mathsf{PrL7\_12\_2} \triangleq\ & \mathsf{A1SN2} = 0 \vee \mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} \neq 5 \vee \mathsf{N2C1} \geq \mathsf{N2C1old} \vee \mathsf{Rhat1old} \neq 0 \\
& \vee (\mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} = 5 \wedge \mathsf{N2C1} < \mathsf{N2C1old} \wedge \mathsf{Rhat1old} = 0 \wedge \mathsf{InvNiC\_2}) \\
\mathsf{PrL7\_12\_3} \triangleq\ & \mathsf{A2SN1} = 0 \vee \mathsf{A2SN1} + \mathsf{replan2} \neq 5 \vee \mathsf{N1C2} \geq \mathsf{N1C2old} \vee \mathsf{Rhat1old} \neq 0 \\
& \vee \mathsf{Rhat2old} \neq 0 \vee \vee(\mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} = 5 \wedge \mathsf{N1C2} < \mathsf{N1C2old} \wedge \mathsf{Rhat1old} = 0 \\
& \wedge \mathsf{Rhat2old} = 0 \wedge \mathsf{InvDist\_2}) \\
\mathsf{PrL7\_12\_4} \triangleq\ & \mathsf{A2SN1} = 0 \vee \mathsf{A2SN1} + \mathsf{replan2} \neq 5 \vee \mathsf{N1C2} \geq \mathsf{N1C2old} \vee \mathsf{Rhat1old} \neq 0 \\
& \vee \mathsf{Rhat2old} \neq 0 \vee \vee(\mathsf{A1SN2} + \mathsf{replan1} = 5 \wedge \mathsf{N1C2} < \mathsf{N1C2old} \wedge \mathsf{Rhat1old} = 0 \\
& \wedge \mathsf{Rhat2old} = 0 \wedge \mathsf{InvNiC\_2}), \ \text{where} \\
\mathsf{InvDist} \triangleq\ & ((\mathsf{distance(x1,y1,x3,y3)} \leq R \wedge \mathsf{distance(x3,y3,x2,y2)} \leq R \wedge \mathsf{distance(x1,y1,x4,y4)} \leq R \\
& \wedge \mathsf{distance(x4,y4,x2,y2)} \leq R) \vee (\mathsf{distance(x1,y1,x3,y3)} \leq R \wedge \mathsf{distance(x3,y3,x2,y2)} \leq R) \\
& \vee (\mathsf{distance(x1,y1,x4,y4)} \leq R \wedge \mathsf{distance(x4,y4,x2,y2)} \leq R)) \\
\mathsf{InvNiC} \triangleq\ & ((\mathsf{N1C3} = 1 \wedge \mathsf{N3C2} = 1 \wedge \mathsf{N2C3} = 1 \wedge \mathsf{N1C4} = 1 \wedge \mathsf{N4C2} = 1 \wedge \mathsf{N2C4} = 1) \\
& \vee (\mathsf{N1C3} = 1 \wedge \mathsf{N3C2} = 1 \wedge \mathsf{N2C3} = 1 \wedge (\mathsf{N1C4} = 0 \vee \mathsf{N4C2} = 0 \vee \mathsf{N2C4} = 0)) \\
& \vee ((\mathsf{N1C3} = 0 \vee \mathsf{N3C2} = 0 \vee \mathsf{N2C3} = 0) \wedge \mathsf{N1C4} = 1 \wedge \mathsf{N4C2} = 1 \wedge \mathsf{N2C4} = 1)) \\
\mathsf{InvDist\_2} \triangleq\ & (\mathsf{distance(x1,y1,x3,y3)} \leq R \wedge \mathsf{distance(x3,y3,x2,y2)} \leq R \wedge \mathsf{distance(x1,y1,x4,y4)} \leq R \\
& \wedge \mathsf{distance(x4,y4,x2,y2)} \leq R) \vee (\mathsf{distance(x1,y1,x3,y3)} \leq R \wedge \mathsf{distance(x3,y3,x2,y2)} \leq R) \\
& \vee (\mathsf{distance(x1,y1,x4,y4)} \leq R \wedge \mathsf{distance(x4,y4,x2,y2)} \leq R) \vee (\mathsf{distance(x1,y1,x3,y3)} \leq R \\
& \wedge \mathsf{distance(x3,y3,x4,y4)} \leq R \wedge \mathsf{distance(x4,y4,x2,y2)} \leq R) \vee (\mathsf{distance(x1,y1,x4,y4)} \leq R \\
& \wedge \mathsf{distance(x4,y4,x3,y3)} \leq R \wedge \mathsf{distance(x3,y3,x2,y2)} \leq R)) \\
\mathsf{InvNiC\_2} \triangleq\ & ((\mathsf{N1C3} = 1 \wedge \mathsf{N3C2} = 1 \wedge \mathsf{N2C3} = 1 \wedge \mathsf{N1C4} = 1 \wedge \mathsf{N4C2} = 1 \wedge \mathsf{N2C4} = 1) \\
& \vee (\mathsf{N1C3} = 1 \wedge \mathsf{N3C2} = 1 \wedge \mathsf{N2C3} = 1 \wedge (\mathsf{N1C4} = 0 \vee \mathsf{N4C2} = 0 \vee \mathsf{N2C4} = 0)) \\
& \vee ((\mathsf{N1C3} = 0 \vee \mathsf{N3C2} = 0 \vee \mathsf{N2C3} = 0) \wedge \mathsf{N1C4} = 1 \wedge \mathsf{N4C2} = 1 \wedge \mathsf{N2C4} = 1) \\
& \vee (\mathsf{N1C3} = 1 \wedge \mathsf{N3C4} = 1 \wedge \mathsf{N4C3} = 1 \wedge \mathsf{N4C2} = 1 \wedge \mathsf{N2C4} = 1) \\
& \vee (\mathsf{N1C4} = 1 \wedge \mathsf{N4C3} = 1 \wedge \mathsf{N3C4} = 1 \wedge \mathsf{N3C2} = 1 \wedge \mathsf{N2C3} = 1))
\end{aligned}
$$