

# 失效相关的齿轮一次四阶矩可靠性分析

魏兴春, 王智明, 郭俊锋, 张亚飞, 宋亚龙

(兰州理工大学 机电工程学院, 兰州 730050)

**摘 要:** 齿轮是机械传动的关键零件之一, 为了分析其可靠性, 在改进的验算点一次二阶矩可靠性方法基础上, 应用 Taylor 级数展开和 Hermite 多项式近似等方法, 推导了齿轮功能函数的验算点前四阶矩, 分析了具有齿根断裂和齿面点蚀两种主要相关失效模式的齿轮传动可靠性, 给出了其相关系数和齿轮的可靠度。另一方面, 因影响齿轮失效的因素繁杂众多, 计算齿轮的可靠度时, 不管是用一次二阶矩可靠性方法还是四阶矩可靠性方法, 其计算量均偏大, 且容易出错。针对该问题, 提出了一种分类变差系数验算点一次四阶矩可靠性分析方法, 该方法对齿轮功能函数的不同基本随机变量进行分类综合, 减少了设计变量, 使计算量明显减小, 解决了用矩方法分析结构可靠性时计算量偏大且易出错的难题。最后应用所提分类变差系数验算点一次四阶矩可靠性分析法估计了某车床主轴箱一对传动齿轮的可靠性, 计算结果显示该对齿轮齿根弯曲疲劳强度和齿面接触疲劳强度有一定的相关性, 所用一次四阶矩方法因包含偏度、峰度等更高阶的统计信息可进一步提高估计精度。

**关键词:** 齿轮可靠性; 相关失效模式; 分类变差系数; 验算点; 一次四阶矩

中图分类号: TG659; TB114

文献标志码: A

DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2020.07.003

## Reliability analysis for gear pairs with correlated failure modes using first-order fourth-moment method

WEI Xingchun, WANG Zhiming, GUO Junfeng, ZHANG Yafei, SONG Yalong

(School of Mechanical and Electronic Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

**Abstract:** Gears pair is one of key components of mechanical transmission. To analyze its reliability, based on the improved checking point first-order second-moment (IFOSM) reliability method, Taylor series expansion and Hermite polynomial approximation were used to derive gear performance function's checking point first-order fourth-moment (FOFM) method, analyze gear transmission reliability with two major correlated failure modes of tooth root fracture and tooth surface corrosion, and give two modes' correlation coefficient and gear reliability. On the other hand, due to many factors affecting gear failure, when either IFOSM reliability method or FOFM reliability one was used to estimate gear reliability, the computation amount was large and they were easy to make mistakes. Aiming at this problem, a classified variation difference coefficient checking point first-order fourth-moment reliability analysis method was proposed. This method was used to classify and integrate gear performance function's basic random variables, significantly reduce design variables and computation amount, and solve the difficult problem mentioned above. Finally, the proposed method was used to estimate the reliability of a transmission gear pair in a certain lathe spindle box. The results showed that there is a certain correlation between tooth root bending fatigue strength and tooth surface contact fatigue strength of the gear pair; the proposed FOFM method can further improve estimation accuracy due to its containing higher order statistical information of skewness and kurtosis.

**Key words:** gear reliability; correlated failure mode; classified variation difference coefficient; checking point; first-order four-moment (FOFM)

齿轮是机械传动的关键零件之一, 其传动结构因

受材料特性的变异、加工制造、安装调试、保养维修等误差因素以及各种偶然因素和环境因素等的影响, 所受载荷、材料参数、几何尺寸、边界条件、计算模型均具有随机性的特点<sup>[1-3]</sup>。因此, 现代齿轮设计方法在传统设计方法的基础上采用了概率设计方法。齿轮传动主

基金项目: 国家自然科学基金(51565032)

收稿日期: 2019-06-18 修改稿收到日期: 2019-09-16

第一作者 魏兴春 男, 博士生, 讲师, 1978 年生

通信作者 王智明 男, 博士, 副教授, 1969 年生

要失效形式有齿面接触疲劳失效、齿根弯曲疲劳折断、齿面磨损、胶合以及塑性变形等。因此,在进行齿轮的可靠性分析与设计时,一般多以齿面接触疲劳失效或齿根弯曲疲劳失效准则建立其可靠性分析模型。但是,仅以单一失效模式建立可靠性模型评价齿轮传动的失效情况是与实际不相符的。这是因为齿轮在工作过程中,齿面接触疲劳和弯曲疲劳有可能同时发生。因此,应综合考虑在接触应力和弯曲应力共同作用下齿轮的传动可靠性。事实上,机械零部件在服役过程中由于受材料、载荷等各种不确定性多因素的相互影响,其失效模式通常会呈现出多样性及相关性<sup>[4-8]</sup>。

基于应力强度干涉模型的一次可靠性方法是结构可靠性分析中最为常见的方法之一,其中的均值一次二阶矩法(中心点法)在对非线性功能函数进行线性化处理时,在各随机变量的均值点处将功能函数展开成 Taylor 级数,仅取一次项近似为结构功能函数,然后计算出功能函数的均值和标准差,进而求得结构的可靠度<sup>[9]</sup>。可见,该类方法是一种近似的计算方法。在功能函数非线性程度不高时计算精度尚能满足工程需求,但当功能函数非线性程度较高时,其缺点是显而易见的,特别是对于物理意义相同而数学表达式不同的非线性问题有可能给出不同的可靠度数值,导致可靠性评估结果完全不同的致命缺点。改进的一次二阶矩法(验算点法)取结构最大可能失效概率所对应的设计验算点为功能函数线性化点,克服了中心点法的缺点。但其在计算过程中,因忽略了随机变量的其他统计特征,且没有考虑到功能函数在设计验算点附近的局部性质,当功能函数的非线性程度较高时,仍会产生较大的误差。高阶矩可靠性方法的出现,部分解决了这种估计偏差问题。这是因为该方法由于利用了随机变量的高阶矩信息,如描述随机变量概率密度函数陡峭程度的峰度信息和反映概率密度函数对称特性的偏度信息,明显地提高了可靠度的计算精度。常见的高阶矩法有最佳平方逼近法<sup>[10-11]</sup>、响应面法<sup>[12-14]</sup>、逐步等效平面法<sup>[15]</sup>及遗传算法等<sup>[16]</sup>,广泛应用于车削颤振、蜗轮传动及机器人可靠性分析问题<sup>[17-19]</sup>。

改进的一次二阶矩法之所以优于均值一次二阶矩法,是因为前者以设计验算点取代均值点为功能函数线性化点来求取结构最大可能失效概率,即其可给出结构的最大可能失效点,其几何意义是用功能函数在验算点处的切平面代替功能函数极限状态曲面。四阶矩估计的优点是其不仅包括了二阶矩估计中随机变量的均值和方差,而且考虑了峰度和偏度的更高阶统计信息,且适合于任意分布的随机变量,但其未能给出结构的最大可能失效点。因此,本文结合这两种方法的优点,提出了一种分类变差系数验算点一次四阶矩可

靠性分析方法。该方法在改进的一次二阶矩方法基础上,综合应用基于 Taylor 级数展开和高阶标准化技术的一次四阶矩方法,分析齿轮齿根断裂和齿面点蚀两种主要相关失效模式下的齿轮传动可靠性,可进一步提高基于矩方法的可靠性计算精度。同时,影响齿轮失效的因素繁杂众多,按常规的设计方法求解时,计算量偏大,且容易出错,本文所提分类变差系数法可对不同随机变量进行分类综合,减少设计变量,使计算量明显减小。

## 1 失效相关的齿轮可靠性模型

### 1.1 齿轮结构功能函数及其最大可能失效点

若齿轮失效形式为单一的齿面接触疲劳失效,则可用下式计算齿轮齿面接触应力 $\sigma_H$ 。

$$\sigma_H = Z_H Z_E Z_\epsilon Z_\beta \sqrt{\frac{F_t}{d_1 b} \frac{u \pm 1}{u} K_A K_v K_{H\alpha} K_{H\beta}} \quad (1)$$

式中: $Z_H$ 为节点区域系数; $Z_E$ 为弹性系数; $Z_\epsilon$ 为重合度系数; $Z_\beta$ 为螺旋角系数; $F_t$ 为端面切向力; $d_1$ 为小齿轮分度圆直径; $b$ 为齿宽; $u$ 为传动比; $K_A$ 为工况系数; $K_v$ 为动载系数; $K_{H\alpha}$ 为齿间载荷分配系数; $K_{H\beta}$ 为齿向载荷分布系数。

相应的齿面计算接触疲劳强度极限 $\sigma_{HlimC}$ 为

$$\sigma_{HlimC} = \sigma_{Hlim} Z_N Z_R Z_v Z_W Z_L Z_X \quad (2)$$

式中: $\sigma_{Hlim}$ 为试验齿轮接触疲劳极限; $Z_N$ 为接触强度计算寿命系数; $Z_R$ 为齿面粗糙度系数; $Z_v$ 为速度系数; $Z_W$ 为工作硬化系数; $Z_L$ 为润滑剂系数; $Z_X$ 为尺寸系数。

当齿轮的齿面计算接触疲劳强度 $\sigma_{HlimC}$ 大于齿面计算接触应力 $\sigma_H$ 时,即 $\sigma_{HlimC} - \sigma_H > 0$ 时,其处于工作安全状态。所以,由式(1)和(2)得包含各随机变量 $X$ 的齿轮齿面接触疲劳强度功能函数 $Z_1$ 为

$$Z_1 = g_1(X) = \sigma_{HlimC} - \sigma_H = \sigma_{Hlim} Z_N Z_R Z_v Z_W Z_L Z_X - Z_H Z_E Z_\epsilon Z_\beta \sqrt{\frac{F_t}{d_1 b} \frac{u \pm 1}{u} K_A K_v K_{H\alpha} K_{H\beta}} \quad (3)$$

同理,若只考虑齿轮齿根折断时,齿轮齿根计算弯曲应力 $\sigma_F$ 可由下式给出。

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b m_n} Y_{Fa} Y_{sa} Y_\epsilon Y_\beta K_A K_v K_{F\alpha} K_{F\beta} \quad (4)$$

式中: $F_t$ 为端面切向力; $b$ 为齿宽; $m_n$ 为法向模数; $Y_{Fa}$ 为齿形系数; $Y_{sa}$ 为应力修正系数; $Y_\epsilon$ 为重合度系数; $Y_\beta$ 为螺旋角系数; $K_A$ 为工况系数; $K_v$ 为动载系数; $K_{F\alpha}$ 为齿间载荷分配系数; $K_{F\beta}$ 为齿向载荷分布系数。

相应的齿根计算弯曲疲劳强度极限 $\sigma_{FlimC}$ 为

$$\sigma_{FlimC} = \sigma_{Flim} Y_{ST} Y_{NT} Y_{\delta rel T} Y_{R rel T} Y_X \quad (5)$$

式中: $\sigma_{Flim}$ 为试验齿轮齿根弯曲疲劳极限; $Y_{ST}$ 为应力修正系数; $Y_{NT}$ 为寿命系数; $Y_{\delta rel T}$ 为齿根圆角敏感系数;

$Y_{RelT}$  为齿根表面状况系数;  $Y_X$  为尺寸系数。

因此,由式(4)和(5)得齿轮齿根弯曲疲劳强度功能函数  $Z_2$  为

$$Z_2 = g_2(X) = \sigma_{F_{limC}} - \sigma_F = \sigma_{F_{lim}} Y_{ST} Y_{NT} Y_{\delta RelT} Y_{RelT} Y_X - \frac{F_t}{bm_n} Y_{Fa} Y_{sa} Y_{\varepsilon} Y_{\beta} K_A K_v K_{F\alpha} K_{F\beta} \quad (6)$$

为了求取某一失效模式的失效概率,通常使用验算点法,即改进的一次二阶矩可靠性方法。因此,将包含  $n$  个服从正态分布的随机变量  $X$  的齿轮传动结构功能函数  $Z = g(X) = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  在最大可能失效点(验算点)  $P^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  展开成 Taylor 级数,只取线性项,则功能函数  $Z$  的极限状态方程为

$$Z \approx g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} (X_i - x_i^*) = 0 \quad (7)$$

由式(7)求取功能函数的均值  $\mu_Z$  和标准差  $\sigma_Z$  分别为

$$\mu_Z = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} (\mu_{X_i} - x_i^*), \sigma_Z = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \right)^2} \quad (8)$$

最后得齿轮结构验算点  $P^*$  的坐标为

$$x_i^* = \mu_{X_i} + \beta \sigma_{X_i} \cos \theta_{X_i} \quad (9)$$

式中:  $\beta$  为可靠度指数,且有

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z}, \cos \theta_{X_i} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial X_i} \sigma_{X_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \right)^2}} \quad (10)$$

此时,对应的结构失效概率  $P_f$  和可靠度  $R$  分别为

$$P_f = \Phi(-\beta), R = \Phi(\beta) \quad (11)$$

式中:  $\Phi(\cdot)$  为标准正态分布函数。

值得注意的是结构功能函数一般为复杂的非线性函数,其不服从正态分布,故不能用式(11)直接求取相应的可靠性指标。但当用泰勒级数将结构功能函数展开至一次项时,因其只有常数项和线性项,其概率分布为正态分布。因此,此时可用可靠度指数  $\beta$  和正态分布函数  $\Phi(\beta)$  评估相关的结构可靠性。当然该法为一种近似迭代逼近计算方法,本文借助该方法求取结构最大可能失效点,即验算点。当某一随机变量  $X$  的分布函数为非正态分布时,其在验算点  $x^*$  的均值和标准差可用 JC 法<sup>[20-21]</sup>转换为当量正态分布均值和标准差。

## 1.2 齿轮结构功能函数在验算点处的前四阶矩推导

如前所述,一次四阶矩估计的优点是其不仅包括了随机变量的均值和方差,而且考虑了峰度和偏度的更高阶统计信息,但其未能给出结构的最大可能失效验算点。因此,结合验算点法,对齿轮功能函数在其各变量验算点  $x_i^*$  处展开成 Taylor 级数,则功能函数在验算点的一阶矩  $M_1$  为

$$M_1 = EZ \approx$$

$$E \left[ g(x_i^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} (X_i - x_i^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial X_i^2} \frac{(X_i - x_i^*)^2}{2} \right] = g(x_i^*) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial X_i^2} \sigma_{X_i}^2 \right) \quad (12)$$

在求取高阶矩时,为了简化计算,用 Taylor 级数近似功能函数时若只取至线性项,则功能函数在验算点处的二阶矩  $M_2$  为:

$$M_2 = EZ^2 - M_1^2 \approx E \left[ g(x_i^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} (X_i - x_i^*) \right]^2 - M_1^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 - g(x_i^*) \frac{\partial^2 g}{\partial X_i^2} \right] - \frac{1}{4} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial X_i^2} \sigma_{X_i}^2 \right) \right]^2 \quad (13)$$

相应的验算点三、四阶矩  $M_3$ 、 $M_4$  分别为

$$\begin{cases} M_3 = EZ^3 \approx E \left[ g(x_i^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} (X_i - x_i^*) \right]^3 = g^3(x_i^*) + 3g(x_i^*) \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \right)^2 \\ M_4 = EZ^4 \approx E \left[ g(x_i^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} (X_i - x_i^*) \right]^4 = g^4(x_i^*) + 6g^2(x_i^*) \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \right)^2 \end{cases} \quad (14)$$

## 1.3 分类变差系数法

在计算齿轮结构的最大可能失效点时,求取其功能函数的均值和标准差是关键。但当随机变量  $X$  的个数增加时,求取均值和标准差的计算量也随之加大。如式(3)有 19 个变量,为了简化计算量,可对其归类综合。如  $K_A$ 、 $K_v$ 、 $K_{H\alpha}$ 、 $K_{H\beta}$  等 4 个变量为描述齿轮工作情况的载荷系数,可整理为综合变量

$$K_1 = K_A K_v K_{H\alpha} K_{H\beta} \quad (15)$$

然后采用变差系数法求其标准差。该方法如下:对于具有均值  $\mu_X$  和标准差  $\sigma_X$  的随机变量  $X$ ,定义变差系数为  $C_X = \sigma_X / \mu_X$ 。为了求式(15)的标准差,由式(8)及变差系数的定义得

$$\begin{aligned} \sigma_{K_1} &= \left[ (K_v K_{H\alpha} K_{H\beta})^2 \sigma_{K_A}^2 + (K_A K_{H\alpha} K_{H\beta})^2 \sigma_{K_v}^2 + \right. \\ &\quad \left. (K_A K_v K_{H\beta})^2 \sigma_{K_{H\alpha}}^2 + (K_A K_v K_{H\alpha})^2 \sigma_{K_{H\beta}}^2 \right]^{1/2} = \\ &\quad \mu_{K_A} \mu_{K_v} \mu_{K_{H\alpha}} \mu_{K_{H\beta}} \left[ \left( \sigma_{K_A} / \mu_{K_A} \right)^2 + \left( \sigma_{K_v} / \mu_{K_v} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left( \sigma_{K_{H\alpha}} / \mu_{K_{H\alpha}} \right)^2 + \left( \sigma_{K_{H\beta}} / \mu_{K_{H\beta}} \right)^2 \right]^{1/2} = \\ &\quad \mu_{K_1} [C_{K_A}^2 + C_{K_v}^2 + C_{K_{H\alpha}}^2 + C_{K_{H\beta}}^2]^{1/2} \end{aligned}$$

所以

$$C_{K_1} = \sigma_{K_1} / \mu_{K_1} = [C_{K_A}^2 + C_{K_v}^2 + C_{K_{H\alpha}}^2 + C_{K_{H\beta}}^2]^{1/2} \quad (16)$$

式(16)乘以其均值即可得其标准差,即  $\sigma_{K_1} = C_{K_1} \cdot \mu_{K_1}$ 。该方法可扩展至更多个随机变量之间为乘除及幂函数关系的情况,使用该方法求取综合变量的标准差时,可将随机变量的乘除及幂函数关系转换为变差系数间简单的相加关系,显著地简化计算过程,且

不易出错。

1.4 齿轮失效模式间相关系数及结构失效概率的计算

通常情况下,齿轮失效模式并非单一。其有可能发生齿面接触疲劳失效,也可能发生齿根弯曲疲劳失效,或有可能两种失效同时发生。此时,可将这种多失效模式处理成串联系统失效模式,其中任一种失效模式发生,齿轮即发生失效。事实上,齿轮的失效模式有齿根断裂、齿面磨损、点蚀、胶合及塑性变形等多种形式。但为了简化问题,通常只考虑齿根断裂和齿面点蚀这两种主要失效形式。另一方面,由式(3)和(6)可见,两失效模式对应的功能函数具有某些共同的基本随机变量,如端面切向力  $F_t$ 、工况系数  $K_A$ 、动载系数  $K_v$  等,表明齿轮的两种失效模式具有一定的相关性,其相关性可用相关系数  $\rho_{12}$  来表示,其值可结合式(8)由下式给出。

$$\rho_{12} = \rho_{Z_1 Z_2} = \frac{\text{cov}(Z_1, Z_2)}{\sigma_{Z_1} \sigma_{Z_2}} = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g_1}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \right)_{x_i^*} \left( \frac{\partial g_2}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \right)_{x_i^*}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g_1}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \right)_{x_i^*}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g_2}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \right)_{x_i^*}^2}} \quad (17)$$

最后可由下式给出齿轮结构总体失效概率  $P_f$  为<sup>[22]</sup>

$$P_f = P_{f_1} + (1 - \lambda_{12}) P_{f_2} \quad (18)$$

其中

$$\lambda_{12} = \Phi \left( \frac{-\beta_1 + \rho_{12} \delta_2}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2 \delta_2^2 (-\beta_2 + \delta_2)}} \right) \quad (19)$$

$$\delta_2 = [\varphi(-\beta_2) / \Phi(-\beta_2)] \quad (20)$$

式中:  $\beta_1$ 、 $\beta_2$  分别为两种失效模式下,齿轮的可靠度指

数。  $P_{f_1}$ 、 $P_{f_2}$  分别为发生两种失效模式的概率,可结合 Hermite 多项式和四阶矩方法按下式给出<sup>[10]</sup>:

$$P_{f_{FM}} = \Phi(-\beta) - \varphi(-\beta) \left[ \frac{1}{6} \theta_1 H_2(-\beta) + \frac{1}{24} (\theta_2 - 3) H_3(-\beta) + \frac{1}{72} \theta_1^2 H_5(-\beta) \right] \quad (21)$$

其中:  $\theta_1$  和  $\theta_2$  分别为偏度系数和峰度系数,其值分别为

$$\theta_1 = M_3 / M_2^{3/2}, \theta_2 = M_4 / M_2^2$$

$H(x)$  为 Hermite 多项式,其值分别为

$$H_2(x) = x^2 - 1, H_3(x) = x^3 - 3x, \\ H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x$$

2 实例分析

某数控车床主轴箱部件采用串联分级变速齿轮的方式扩大无极变速范围,现选取靠近主轴前端的一对齿轮进行可靠性分析。其中:小齿轮齿数为 20,模数为 8 mm,材质为 40Cr,调质后表面淬火至 280 HBS;大齿轮齿数为 38,材料为 45 钢,调质后表面淬火至 250 HBS。7 级精度,齿宽为 48 mm。经计算知传递的扭矩为 1 698.375 N·m,周向力为 12 381 N。齿轮分度圆直径、齿宽、齿数比、模数、节点区域系数等,均属于和齿轮几何尺寸有关的参数,它们只能在精度等级允许的公差范围内变化,取值区间较小,为简化问题,视为常量处理。即取  $Z_H = 2.5$ ,  $Z_\varepsilon = 0.872$ ,  $Z_\beta = 1$ ,  $m_n = 8$  mm,  $d_1 = 160$  mm,  $b = 48$  mm,  $u = 1.9$ ,  $Z_X = 1$ ,  $Y_\varepsilon = 0.686$ ,  $Y_\beta = 1$ ,  $Y_X = 1$ 。其余变量均为随机变量,其均值、标准差和变差系数一般可由统计资料获得,分别如表 1 和表 2 所示。

表 1 齿面接触疲劳强度各随机变量均值、标准差和变差系数

Tab. 1 Mean, standard deviation and variation coefficient of random variables for tooth surface contact fatigue strength												
随机变量	$\sigma_{Hlim}$	$Z_N$	$Z_R$	$Z_v$	$Z_W$	$Z_L$	$Z_E$	$F_t$	$K_A$	$K_v$	$K_{H\alpha}$	$K_{H\beta}$
均值	800	1.15	1.03	1.04	1	0.92	189.8	12 381	1.25	1.07	1	1.22
标准差	72	0.046	0.021	0.021	0.03	0.018	4.745	185.715	0.063	0.12	0.03	0.061
变差系数	0.09	0.04	0.02	0.02	0.03	0.02	0.025	0.015	0.05	0.112	0.03	0.05

表 2 齿根弯曲疲劳强度各随机变量均值、标准差和变差系数

Tab. 2 Mean, standard deviation and variation coefficient of random variables for tooth root bending fatigue strength												
随机变量	$\sigma_{Flim}$	$Y_{ST}$	$Y_{NT}$	$Y_{\delta relT}$	$Y_{RelT}$	$F_t$	$Y_{Fa}$	$Y_{sa}$	$K_A$	$K_v$	$K_{F\alpha}$	$K_{F\beta}$
均值	350	1.5	0.86	0.99	1.01	12 381	2.8	1.55	1.25	1.07	1	1.15
标准差	70	0.050	0.034	0.03	0.033	185.715	0.092	0.062	0.063	0.12	0.03	0.058
变差系数	0.2	0.033	0.04	0.03	0.033	0.015	0.033	0.04	0.05	0.112	0.03	0.05

表中,除齿轮接触疲劳极限  $\sigma_{Hlim}$  和齿轮弯曲疲劳极限  $\sigma_{Flim}$  服从自然对数正态分布外,其余变量均服从正态分布。因此  $\sigma_{Hlim}$  当量正态分布均值、标准差分别为 796.773 MPa, 71.855 MPa;  $\sigma_{Flim}$  当量正态分布均值、

标准差分别为 343.136 MPa, 69.315 MPa。

因此,齿轮齿面接触疲劳强度功能函数  $Z_1$  为

$$Z_1 = g_1(X) = \sigma_{Hlim} Z_N Z_R Z_v Z_W Z_L - \\ 3.073 \times 10^{-2} Z_E \sqrt{F_t K_A K_v K_{H\alpha} K_{H\beta}}$$

但是,上式对齿轮的某些功能参数做常量处理后,仍有12个变量,为简化计算量,可用分类变差系数法对其进行归类综合简化。其中 $Z_N$ 、 $Z_R$ 、 $Z_v$ 、 $Z_W$ 、 $Z_L$ 这5个变量为计算齿轮强度的修正系数,可综合为 $Z_C = Z_N \cdot Z_R \cdot Z_v \cdot Z_W \cdot Z_L$ ;  $K_A$ 、 $K_v$ 、 $K_{H\alpha}$ 、 $K_{H\beta}$ 这4个变量为描述齿轮工作情况的载荷系数,可整理为 $K_1 = K_A \cdot K_v \cdot K_{H\alpha} \cdot K_{H\beta}$ 。因此,综合后的功能函数变量由12个减小为5个,如下式所示:

$$Z_1 = g_1(X) = \sigma_{H\lim} Z_C - 3.073 \times 10^{-2} Z_E \sqrt{F_t K_1}$$

所以,得 $Z_C = (1.133, 0.069, 0.061)$ ,  $K_1 = (1.632, 0.222, 0.136)$ , 括号中数值依次分别为均值、标准差、变差系数。

表3 综合后齿轮疲劳强度随机变量均值、标准差及变差系数

Tab.3 Mean, standard deviation and variation coefficient of random variables for gear fatigue strength after synthesis

	齿面接触疲劳强度随机变量					齿根弯曲疲劳强度随机变量				
	$\sigma_{H\lim}$	$Z_C$	$Z_E$	$F_t$	$K_1$	$\sigma_{F\lim}$	$Y_1$	$F_t$	$Y_2$	$K_2$
均值	796.773	1.133	189.8	12 381	1.632	343.136	1.29	12 381	4.34	1.538
标准差	71.855	0.069	4.745	185.715	0.222	69.315	0.088	185.715	0.225	0.209
变差系数	0.09	0.061	0.025	0.015	0.136	0.2	0.068	0.015	0.052	0.136

首次使用一次二阶矩验算点法求取可靠度指数 $\beta_H$ 和 $\beta_F$ 时,因验算点未知,可用各基本随机变量均值代替后逐次求解,迭代计算过程分别如表4和表5所示。

表4 齿面接触疲劳强度可靠度指数 $\beta_H$ 迭代求解过程

Tab.4 Iterative solution process of reliability index  $\beta_H$  for tooth contact fatigue strength

迭代次数	$\sigma_{H\lim}$	$Z_C$	$Z_E$	$F_t$	$K_1$	$\beta_H$
1	796.773	1.133	189.800	12 381.000	1.632	0.639
2	764.369	1.112	190.345	12 387.397	1.701	0.624
3	764.994	1.113	190.356	12 387.543	1.700	0.624

从表4和表5可见,用一次二阶矩验算点法计算单失效模式齿轮的可靠度时,经过3次和4次迭代后齿面接触疲劳强度可靠度指数 $\beta_H$ 及齿根弯曲疲劳强度可靠度指数 $\beta_F$ 分别达到精确解,其值分别为 $\beta_H = 0.624$ ,  $\beta_F = 3.180$ ,对应的可靠度分别为 $R_H = \Phi(\beta_H) = 0.734$ ,  $R_F = \Phi(\beta_F) = 0.999$ 。可见齿轮齿面接触疲劳

同理,应用分类变差系数法,齿根齿根弯曲疲劳强度功能函数 $Z_2$ 可简化为

$$Z_2 = g_2(X) = \sigma_{F\lim} Y_1 - 1.786 \times 10^{-3} F_t Y_2 K_2$$

同样,综合后的变量由12个减少为5个,其中 $Y_1$ 、 $Y_2$ 、 $K_2$ 分别为弯曲强度系数、应力系数和载荷系数,其均值、标准差、变差系数分别为

$$Y_1 = Y_{ST} Y_{NT} Y_{\delta rel T} Y_{R rel T} = (1.290, 0.088, 0.068),$$

$$Y_2 = Y_{Fa} Y_{sa} = (4.340, 0.225, 0.052),$$

$$K_2 = K_A K_v K_{F\alpha} K_{F\beta} = (1.538, 0.209, 0.136)$$

综合后的齿轮疲劳强度各随机变量均值、标准差及变差系数如表3所示。

表5 齿根弯曲疲劳强度可靠度指数 $\beta_F$ 迭代求解过程

Tab.5 Iterative solution process of reliability index  $\beta_F$  for root bending fatigue strength

迭代次数	$\sigma_{F\lim}$	$Y_1$	$F_t$	$Y_2$	$K_2$	$\beta_F$
1	343.136	1.290	12 381.000	4.340	1.538	3.048
2	148.033	1.206	12 393.943	4.394	1.670	3.189
3	131.831	1.248	12 397.479	4.408	1.693	3.180
4	131.393	1.254	12 397.231	4.407	1.689	3.180

强度可靠度低于齿根弯曲疲劳强度可靠度,表明该对齿轮副失效形式以齿轮齿面接触疲劳失效为主,齿根弯曲疲劳断裂为辅,这是因为主轴箱齿轮传动为闭式传动,两种失效模式中,齿面接触疲劳失效最为显著。

当不考虑失效模式相关,用一次四阶矩法分别计算齿面和齿根两种失效模式下各功能函数的前四阶矩及可靠度,结果如表6所示。

表6 未考虑两种失效模式相关时的四阶矩计算结果

Tab.6 Calculation results of fourth-moment for two failure modes without considering failure correlation

失效模式	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$\theta_1$	$\theta_2$	$R$
齿面失效模式	76.104	9 787.740	2 628 039.928	357 735 639.439	0.413	0.308	0.669
齿根失效模式	295.046	9 372.832	3 629 662.392	614 949 841.187	4.000	7.000	1

和一次二阶矩法所给结果相一致,该结果仍显示在两种失效模式中,齿面接触疲劳失效更为突出。进一步对比分析后发现用一次二阶矩法给出的齿轮齿面接触疲劳强度可靠度为0.734,而用一次四阶矩法给出的可靠度为0.669,两者结果有差异,前者偏大。但两

种方法给出的齿根弯曲疲劳强度可靠度估计值大致相当,前者为0.999,后者为1。这是因为本案例中,齿根弯曲疲劳强度功能函数的二阶偏导数均为零,使得两种方法给出的均值和方差相同。

考虑齿面和齿根两种失效模式的相关性,求取相

关参数 则  $\rho_{12} = 0.099$   $\delta_2 = 3.451$   $\lambda_{12} = 0.388$  ,最后得齿轮结构可靠度为 0.658 ,对应的一次二阶矩法给出的齿轮可靠度分别为 0.733。可见 ,忽略三、四阶矩信息的二阶矩法给出的齿轮可靠度偏于乐观 ,两者相对误差为 9.72%。

本案例中 ,齿轮结构可靠度较低 ,只有 0.658。其中 ,齿根可靠性尚可 ,主要是齿面可靠性较差 ,影响其可靠性的因素较多 ,有内部因素 ,也有外部因素。其中 ,内部因素包括齿轮齿宽、法向模数、重合度、齿形、齿轮接触疲劳极限、齿面粗糙度、齿面硬度等;外部因素包括端面切向力、速度、齿面润滑情况、工况、动载、齿间载荷、齿向载荷分布等。因此 ,为了提高其可靠性 ,应采取多种措施。如提高齿面硬度、降低齿面粗糙度、注意保持润滑油清洁、采用正变位齿轮、减小滑动速度等均可提高齿面接触疲劳强度从而提高其可靠性。另一方面 ,应严格控制载荷和强度的分散性 ,即减小其标准差以提高可靠性。若保持齿轮齿面接触疲劳强度均值 796.773 MPa 不变 ,减小其标准差 71.855 MPa 至 61.855 MPa ,则齿轮接触疲劳强度可靠度可由目前的 0.734 提高至 0.747;当标准差降至 21.855 MPa 时 ,其可靠度可达 0.793;相反 ,如图 1 所示 ,若扩大标准差 ,则其可靠度随之降低 ,当标准差增大至 121.855 MPa 时 ,其可靠度降低至 0.675。

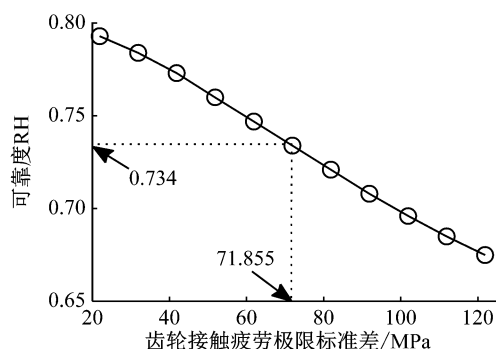


图1 齿面接触疲劳强度标准差对其可靠度影响

Fig.1 Influence of standard deviation of tooth surface contact fatigue strength on its reliability

### 3 结 论

在改进的一次二阶矩验算点可靠性方法基础上 ,应用基于 Taylor 级数展开和 Hermite 多项式近似的一次四阶矩方法 ,分析了具有齿根断裂和齿面点蚀两种主要相关失效模式齿轮传动的可靠性 ,给出了这两种相关失效模式的相关系数和齿轮的可靠度。提出了一种分类变差系数验算点一次四阶矩可靠性方法 ,该方法对齿轮功能函数的不同基本随机变量进行分类综合 ,减少了设计变量 ,使计算量明显减小 ,解决了用矩方法分析结构可靠性时计算量偏大且易出错的难题。

得出以下结论:

(1) 主轴箱齿轮齿根弯曲疲劳强度和齿面接触疲劳强度有一定的相关性;本文虽仅分析了两种相关失效模式 ,但所用方法仍可扩展至多种相关失效模式的结构可靠性分析。

(2) 一次四阶矩估计不仅包括了随机变量的均值和方差 ,而且考虑了峰度和偏度等更高阶的统计信息 ,且避免了二阶矩方法中的随机变量为正态分布假设偏差 ,最终提高了结构可靠性计算精度。

### 参 考 文 献

- [1] ZHOU D , ZHANG X F , ZHANG Y M. Dynamic reliability analysis for planetary gear system in shearer mechanisms [J]. Mechanism and Machine Theory , 2016 , 105( 11) : 244-259.
- [2] 黄贤振 , 赵庆栋 , 李少东 , 等. 渐开线圆柱齿轮系统运动精度可靠性分析 [J]. 计算机集成制造系统 , 2014 , 20( 9) : 2210-2214.  
HUANG Xianzhen , ZHAO Qingdong , LI Shaodong , et al. Reliability analysis for kinematic accuracy of involute cylindrical gear systems [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems , 2014 , 20( 9) : 2210-2214.
- [3] HUANG X Z , HU S , ZHANG Y M , et al. A method to determine kinematic accuracy reliability of gear mechanisms with truncated random variables [J]. Mechanism and Machine Theory , 2015 , 92( 10) : 200-212.
- [4] 王正 , 王增全. 具有多种失效模式机械零部件的寿命概率分布特征计算方法 [J]. 机械工程学报 , 2017 , 53( 2) : 175-182.  
WANG Zheng , WANG Zengquan. Method for calculating the life probability distribution characteristic of mechanical components with multiple failure modes [J]. Journal of Mechanical Engineering , 2017 , 53( 2) : 175-182.
- [5] 刘喆 , 陶凤和 , 贾长治. 多种失效模式履带车辆扭力轴可靠性稳健设计 [J]. 北京航空航天大学学报 , 2016 , 42( 4) : 815-820.  
LIU Zhe , TAO Fenghe , JIA Changzhi. Reliability robust design of tracked vehicle torque axis with multiple failure modes [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics , 2016 , 42( 4) : 815-820.
- [6] 涂宏茂 , 孙志礼 , 姬广振 , 等. 考虑失效模式相关性的机械系统可靠性分析 [J]. 东北大学学报( 自然科学版) , 2017 , 38( 10) : 1453-1458.  
TU Hongmao , SUN Zhili , JI Guangzhen , et al. Reliability analysis for mechanical system with correlated failure modes [J]. Journal of Northeastern University( Nature Science) , 2017 , 38( 10) : 1453-1458.
- [7] 周志刚 , 徐芳. 考虑强度退化和失效相关性的风电齿轮传动系统动态可靠性分析 [J]. 机械工程学报 , 2016 , 52( 11) : 80-87.  
ZHOU Zhigang , XU Fang. Dynamic reliability analysis of gear transmission system of wind turbine considering strength degradation and dependent failure [J]. Journal of Mechanical Engineering , 2016 , 52( 11) : 80-87.
- [8] WEI J , PAN Z , LIN X , et al. Copula-function-based analysis model and dynamic reliability of a gear transmission system considering failure correlations [J]. Fatigue and Fracture of

- Engineering Materials and Structures, 2019, 42 ( 1 ): 114-128.
- [9] ZHAO Y G, ONO T. Moment methods for structural reliability [J]. Structural Safety, 2001, 23( 1 ): 47-75.
- [10] STROMBERG N. Reliability-based design optimization using SORM and SQP [J]. Structural & Multidisciplinary Optimization, 2017, 56( 12 ): 631-645.
- [11] LIN W G, HUANG W J, GUO J W, et al. Reliability-based robust design for flange based on OSAM and SORM [J]. Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering, 2016, 16( 4 ): 943-953.
- [12] 赵威, 王伟. 偏最小二乘回归在响应面法可靠度分析中的应用 [J]. 工程力学, 2013, 30( 2 ): 272-277.  
ZHAO Wei, WANG Wei. Application of partial least squares regression in response surface for analysis of structural reliability [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30 ( 2 ): 272-277.
- [13] 赵薇, 张义民. 具有随机路径的振动传递路径系统的随机响应分析 [J]. 振动与冲击, 2009, 28( 2 ): 99-101.  
ZHAO Wei, ZHANG Yimin. Response of vibration transfer path systems with uncertain paths [J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28( 2 ): 99-101.
- [14] 阚琳洁, 张建国, 邱继伟. 柔性机构时变可靠性分析的时变随机响应面法 [J]. 振动与冲击, 2019, 38( 2 ): 253-258.  
KAN Linjie, ZHANG Jianguo, QIU Jiwei. Time-varying stochastic response surface method for the time-varying reliability analysis of flexible mechanisms [J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38( 2 ): 253-258.
- [15] 王杰方, 安伟光, 宋向华. 基于逐步等效平面法的可靠性敏感度分析方法 [J]. 哈尔滨工程大学学报, 2014, 35( 8 ): 942-947.  
WANG Jiefang, AN Weiguang, SONG Xianghua. Reliability sensitivity analysis based on the step-by-step equivalent plane method [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2014, 35( 8 ): 942-947.
- [16] ZHANG G Y, WANG G Q, LI X F, et al. Global optimization of reliability design for large ball mill gear transmission based on the Kriging model and genetic algorithm [J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 69 ( 6 ): 321-336.
- [17] 刘宇, 李天翔, 刘阔, 等. 基于四阶矩法车削颤振可靠性研究 [J]. 机械工程学报, 2016, 52( 20 ): 193-200.  
LIU Yu, LI Tianxiang, LIU Kuo, et al. Chatter reliability of turning processing system based on fourth moment method [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52( 20 ): 193-200.
- [18] 王伟, 王进, 陆国栋. 基于四阶矩估计的机器人运动可靠性分析 [J]. 浙江大学学报(工学版), 2018, 52( 1 ): 1-7.  
WANG Wei, WANG Jin, LU Guodong. Reliability analysis of manipulator based on fourth-moment estimation [J]. Journal of Zhejiang University ( Engineering Science ), 2018, 52( 1 ): 1-7.
- [19] ZHAO Y D, ZHANG Y M. Reliability design and sensitivity analysis of cylindrical worm pairs [J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 82( 24 ): 218-230.
- [20] YANG Z, ZHANG Y M, HUANG X Z, et al. Reliability-based robust optimization design of automobile components with non-normal distribution parameters [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2013, 26( 4 ): 823-830.
- [21] 刘华汉, 蒋玮, 杨光辉, 等. 随机变量非正态分布且相关的机械零件单模失效可靠度分析 [J]. 大连理工大学学报, 2015, 55( 1 ): 22-30.  
LIU Huahan, JIANG Wei, YANG Guanghui, et al. Single failure mode reliability analysis of mechanical components under dependent random variables with non-normal distribution [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2015, 55( 1 ): 22-30.
- [22] CAI L G, ZHANG Z L, CHENG Q, et al. An approach to optimize the machining accuracy retainability of multi-axis NC machine tool based on robust design [J]. Precision Engineering, 2016, 43( 1 ): 370-386.

(上接第13页)

- [25] ZHANG B, LI Z, MAO Z. Study on chaos and stability in permanent-magnet synchronous motors [J]. Journal of South China University of Technology, 2000, 28( 12 ): 125-130.
- [26] WEI D Q, LUO X S, ZHANG B. Chaos in complex motor networks induced by Newman—Watts small-world connections [J]. Chinese Physics B, 2011, 20( 12 ): 128903.
- [27] WEI D Q, ZHANG B, LUO X S, et al. Effects of couplings on the collective dynamics of permanent-magnet synchronous motors [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2013, 60( 10 ): 692-696.
- [28] RULKOV N F, SUSHCHIK M M, TSIMRING L S, et al. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems [J]. Physical Review E, 1995, 51( 2 ): 980-994.
- [29] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络理论及其应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.