DOI:10.3785/j.issn. 1006-754X.2015.05.004

# 基于 Copula 函数的 2.5 MW 风电齿轮箱齿轮可靠性分析

陈文华1,郑朝朋1,李奇志1,潘 骏1,贺青川1,潘晓东2

(1. 浙江理工大学 浙江省机电产品可靠性技术研究重点实验室,浙江 杭州 310018;

2. 杭州前进齿轮箱集团股份有限公司,浙江 杭州 311203)

摘 要:针对 2.5 MW 风电齿轮箱齿轮可靠性分析时,需考虑其接触疲劳和弯曲疲劳失效的相关性问题,根据风场长年监测数据,利用雨流计数法得到了其载荷谱,利用 Romax Designer 软件建立了 2.5 MW 风电齿轮箱的传动系统模型;利用其齿轮部件分析模块计算并统计得到了各齿轮的接触应力与弯曲应力分布;应用应力—强度干涉模型并基于 Copula 函数建立了考虑接触疲劳和弯曲疲劳相关性的齿轮疲劳可靠性计算模型;应用蒙特卡罗法对应力和疲劳强度抽样,并利用离差平方和最小值原理和 MATLAB 优化工具箱估计了 Copula 函数的参数,并计算出各齿轮的疲劳可靠度. 研究结果为改进 2.5 MW 风电齿轮箱设计、提高其可靠性提供理论依据.

关键词:风电齿轮箱;疲劳可靠性;载荷谱;Copula函数

中图分类号: TH 132, 425; TK 83

文献标志码:A

文章编号:1006-754X(2015)05-0425-06

# Gear reliability analysis of 2, 5 MW wind turbine gearbox based on Copula function

CHEN Wen-hua<sup>1</sup>, ZHENG Chao-peng<sup>1</sup>, LI Qi-zhi<sup>1</sup>, PAN Jun<sup>1</sup>, HE Qing-chuan<sup>1</sup>, PAN Xiao-dong<sup>2</sup> (Key Laboratory of Reliability Technology for Mechanical and Electrical Product of Zhejiang Province,

Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China;

2. Hangzhou Advance Gearbox Group Co., Ltd., Hangzhou 311203, China)

Abstract: In order to research gear reliability of 2.5 MW wind turbine gearbox considering relativity of contact fatigue and bending fatigue, based on the many years monitoring data of experiment wind load, the Load Duration Distribution (LDD) was determined with the Rain-flow Method. The transmission system model of 2.5 MW wind turbine was obtained based on Romax Designer software. Contact stress and bending stress were calculated by taking LDD into the transmission system model. So the distribution of contact and bending stress were determined with statistic method. Based on the Copula function the gear reliability calculation model which took the correlation of contact and bending fatigue into consideration was determined under the dependency between contact fatigue and bending fatigue with the use of stress-strength interference model. Stress and fatigue strength sampling was generated by Monte Carlo sampling method. Copula function parameter was estimated by Residual Square Sum(RSS) and optimized by MATLAB toolbox. Then each gear fatigue reliability was calculated. It provides the theoretical basis to improve the reliability of 2.5 MW wind turbine gearbox.

Key words: wind turbine gearbox; fatigue reliability; load spectrum; Copula function

目前,在各种新能源中,风电是经济上可行、技术上最成熟的可再生清洁能源.风电机组安装在海

上、高山等偏远地区. 齿轮箱是风电机组的关键部件,维修不便且所需成本高昂,因此一般要求使用寿

收稿日期:2015-06-09.

本刊网址・在线期刊:http://www.journals.zju.edu.cn/gcsjxb

基金项目:国家国际科技合作专项项目资助(2015DFA71400);浙江省重点科技创新团队项目(2010R50005).

作者简介:陈文华(1963—),男,浙江杭州人,教授,博士生导师,博士,从事机电产品可靠性研究,E-mail;chenwh@zstu.edu.cn.

命为 20 年. 在运行时,随机风载变化大,造成齿轮箱 故障频发,严重影响了风电机组的稳定可靠运行.

秦大同等[1]针对 1.5 MW 风电齿轮箱,利用集 中参数法建立了齿轮传动系统齿轮轴承耦合动力 学模型,根据随机风速模型和空气动力学理论得到 随机风引起的系统外部载荷激励,对系统进行仿真 计算得到齿轮动态啮合力,在此基础上应用应力— 强度干涉模型计算各级齿轮的可靠性. 林腾蛟等[2] 针对风电齿轮箱的输出级齿轮副,利用 ANSYS 软 件建立了三维接触有限元模型,在静载荷作用下计 算齿轮副的应力与应变,针对 20 种工况的载荷历程 进行雨流计数得到载荷循环数均值与幅值的关系, 并以此为依据计算输出级齿轮的寿命. 德国劳氏船 级社风机认证指导书[3] 中规定用 LDD(load duration distribution)计算齿轮、轴承及轴的负载. 张红 磊[4] 在进行齿轮箱齿轮疲劳计算时,利用 Romax Designer 软件建立 750 kW 风电齿轮箱传动系统模 型,基于 Romax 公司风电机组设计所采用的载荷谱 (LDD)计算得到各级齿轮的疲劳寿命.

徐芳等人<sup>[5-6]</sup>在研究风电齿轮传动系统可靠性时,将齿轮接触疲劳与弯曲疲劳看做是相互独立的串联系统进行可靠度计算. 谢里阳等<sup>[7]</sup>考虑到齿轮的接触疲劳与弯曲疲劳的失效是串联系统,同时它们具有相关性,采用次序统计的方法计算齿轮的可靠度. 王明清等<sup>[8]</sup>基于一次二阶矩方法推导齿面接触疲劳失效和齿根弯曲疲劳失效的时变概率计算公式,并推导出这 2 种失效模式的联合失效概率密度函数的解析公式. 在金融<sup>[9-10]</sup>、水文分析<sup>[11-12]</sup>等领域已经广泛使用 Copula 函数解决相关性问题. Copula 函数解决相关性问题具有灵活、简单的特点<sup>[13]</sup>,因此作者采用Copula 函数作为连接函数求解齿轮可靠度.

本文以 2 5 MW 风电齿轮箱为研究对象,首先利用 Romax Designer 建立三维模型;然后结合实测载荷谱,利用雨流计数法得到其 LDD 载荷谱,并统计计算出各齿轮接触应力与弯曲应力分布;最后根据 Sklar 定理<sup>[14]</sup>,基于 Copula 函数,建立考虑齿轮接触疲劳和弯曲疲劳失效相关的可靠性分析模型,并计算出各齿轮的可靠度. 研究结果为改进 2 5 MW 风电齿轮箱设计、提高其可靠性提供理论依据和技术支撑.

#### 1 风电齿轮箱结构、参数及工况

# 1.1 2.5 MW 风电齿轮齿轮箱结构

图 1 所示为某齿轮箱厂生产的 2 5 MW 风电齿轮箱. 该齿轮箱采用行星差动和固定轴齿轮组合传动方式,如图 2 所示. 第 1 级是固定轴齿轮分流传动;第

2 级是行星差动齿轮传动;第 3 级是平行轴斜齿轮传动. 从输入轴传来的功率分为 2 路: 一路由一级内齿圈 1,通过圆周均匀分布的 6 个固定轴齿轮 2 传至一级双联齿轮 3-3′,再由二级内齿圈 3′传至二级行星轮4;另一路由输入轴直接传至二级行星架 H,并在二级4 个行星齿轮 4 处与前一路的功率汇合,并通过二级太阳轮 5 和三级平行轴斜齿轮传至输出轴.



图 1 2.5 MW 风电齿轮箱

Fig. 1 2. 5 MW wind turbine gearbox

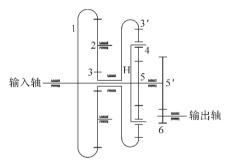


图 2 风电齿轮箱传动系统简图

Fig. 2 Diagram of the transmission system in wind turbine gearbox

齿轮箱各齿轮的齿数为:  $Z_1 = 142$ ,  $Z_2 = 37$ ,  $Z_3 = 66$ ;  $Z_{3'} = 138$ ,  $Z_4 = 55$ ,  $Z_5 = 26$ ;  $Z_{5'} = 27$ ,  $Z_6 = 131$ . 所有齿轮的压力角均为  $25^\circ$ ; 第 1 级和第 2 级齿轮均为直齿轮,第 3 级齿轮为斜齿轮,螺旋角为 12.  $5^\circ$ . 1 级、2 级各个齿轮的模数为 11. 25 mm, 3 级 2 个齿轮模数为 7. 95 mm.

#### 1.2 载荷谱

风电机组建在高山、沙漠或者海上,环境比较恶劣,受季节、天气和昼夜变化的影响很大,因此载荷谱的差异很大. 载荷谱中包含了惯性力和重力载荷、空气动力载荷、冲击载荷等. 本文针对风场长年监测数据,利用雨流计数法得到了其 LDD 载荷谱,如图 3 所示. 从图中可以看出,在 20 年的运行中,输入轴扭矩是变化的,并且不同扭矩作用下主轴的转数也是不同的. 输入轴扭矩分布为双峰分布,出现峰值位置分别是: 当扭矩为  $375~\mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}$  时,主轴总转数为  $3.~18 \times 10^6$  转,当扭矩为  $1~845~\mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}$  时,主轴总转数为  $3.~86 \times 10^6$  转.

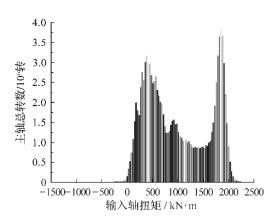


图 3 输入轴扭矩分布

Fig. 3 Torque distribution of input shaft

#### 1.3 齿轮接触疲劳强度与弯曲疲劳强度

由图 3 可知每个扭矩下输入轴的转数,据此可以通过累加计算出主轴 20 年内总的转数是  $1.15 \times 10^8$  转. 在风电齿轮箱中计算齿轮的可靠性时,弯曲疲劳强度  $\sigma_{\text{Him}}$  可以根据材料和齿面硬度查标准  $[^{15}]$  得到. 齿轮 2、齿轮 3、二级行星齿轮 4、二级太阳轮 5、三级主动齿轮 5'、三级从动齿轮 6 材料是 18CrNiMo7-6,加工工艺为调质、机加工、渗碳淬硬、精加工;一级内齿轮 1 与二级内齿轮 3'材料是 31CrMoV9,加工工艺为调质、机加工、高温去应力、精加工、氮化. 假设接触强度、弯曲强度都服从正态分布. 零件接触疲劳极限、弯曲疲劳极限的均值与方差如表 1 所示.

表 1 各齿轮接触疲劳极限强度与弯曲疲劳极限强度分布
Table 1 Contact fatigue strength distribution and bending fatigue stress distribution of each gear

| 零件名称        | 接触强度/MPa |    | 弯曲强度/MPa |    |
|-------------|----------|----|----------|----|
|             | 均值       | 方差 | 均值       | 方差 |
|             | 1 350    | 50 | 375      | 24 |
| 齿轮 2        | 1 275    | 50 | 275      | 24 |
| <b>齿轮</b> 3 | 1 275    | 50 | 275      | 24 |
| 齿轮 3′       | 1 350    | 50 | 375      | 24 |
| 齿轮 4        | 1 275    | 50 | 275      | 24 |
| 齿轮 5        | 1 275    | 50 | 275      | 24 |
| 齿轮 5′       | 1 275    | 50 | 275      | 24 |
| 齿轮 6        | 1 275    | 50 | 275      | 24 |

# 2 齿轮接触应力与弯曲应力分布

#### 2.1 Romax Designer 中建立传动系统模型

根据 2.5 MW 风电齿轮箱的结构尺寸参数,在 Romax Designer 软件中建立齿轮箱传动系统的模型.齿轮、轴与轴承直接在 Romax Designer 软件中建立,在建模过程中,选择 ISO-6336 作为齿轮接触 应力和弯曲应力的计算标准. 其中行星架部件需要 先在 Pro/E 软件中建立三维模型(如图 4 所示),再 在 HyperMesh 划分网格(如图 5 所示)并保存为 "bdf"格式,再导入 Romax Designer 软件中. 图 6 所 示为齿轮箱传动系统的三维模型.



图 4 二级行星架三维模型

Fig. 4 Three-dimensional model of secondary planetary carrier

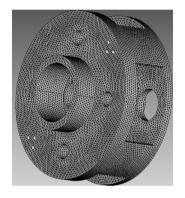


图 5 二级行星架有限元模型

Fig. 5 Finite element model of secondary planetary carrier

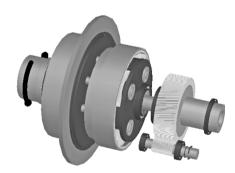


图 6 在 Romax Designer 中建立的传动系统三维模型

Fig. 6 Three-dimensional model of the transmission system in Romax Designer

#### 2.2 接触应力和弯曲应力计算

LDD(载荷区间分布谱)中每一个扭矩下的转数,代表的含义是在当前扭矩附近一个区间内的转数.为了得到更准确的应力分布,利用 MATLAB 生成区间内随机数的方法来解决. MATLAB 中Unifrnd命令可以生成区间内均匀分布随机数,这里按照每个区间的转数来生成相应区间内的随机数.将各个区间

内的随机数汇总到一个数列  $T_i(i=1,2\cdots,n)$ ,将这个数列  $T_i(i=1,2\cdots,n)$ 作为主轴输入扭矩,分别计算出各级齿轮接触应力  $S_H(i)$   $(i=1,2\cdots,n)$ 和弯曲应力  $S_F(i)$   $(i=1,2\cdots,n)$ . 将离散的接触应力和弯曲应力统计可以得到弯曲应力和接触应力的分布. 如图 7 至图 10 所示,分别为齿轮 3 的弯曲应力分布、接触应力分布和二级太阳轮 5 的弯曲应力分布、接触应力分布. 分析可知,弯曲应力与接触应力的概率密度曲线均为双峰,齿轮 3 与齿轮 5 的应力分布相似,但齿轮 5 的最大应力值大于齿轮 3 的最大应力值,并且齿轮弯曲应力与接触应力具有非线性相关性.

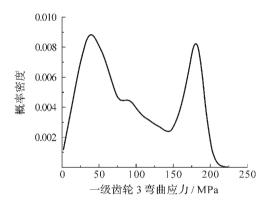


图 7 齿轮 3 弯曲应力分布

Fig. 7 Bending stress distribution of Gear 3

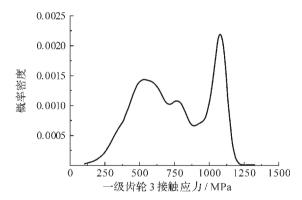


图 8 齿轮 3 接触应力分布

Fig. 8 Contact stress distribution of Gear 3

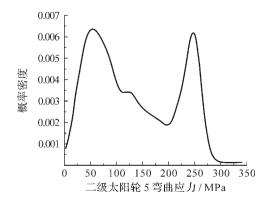


图 9 二级太阳轮弯曲应力分布

Fig. 9 Bending stress distribution of secondary sun-wheel

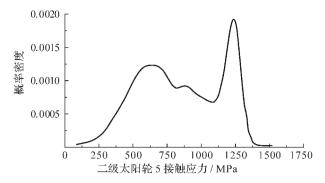


图 10 二级太阳轮接触应力分布

Fig. 10 Contact stress distribution of secondary sun-wheel

### 3 考虑相关性的齿轮可靠度

# 3.1 齿轮可靠度计算模型

齿轮失效模式主要是接触疲劳与弯曲疲劳,2 种失效模式具有相关性,在计算齿轮的可靠度时也 必须考虑到.采用 Copula 函数作为连接函数求解齿 轮可靠度.

记  $\sigma_{\text{Flim}}$  为齿轮弯曲极限强度, $\sigma_{\text{Hlim}}$  为齿轮接触极限强度, $S_{\text{F}}$  为齿轮弯曲应力, $S_{\text{H}}$  为齿轮接触应力. 基于 Copula 理论及 Sklar 定理可知,2 种失效模式的功能函数为:

$$g_1 = \sigma_{\text{Flim}} - S_{\text{F}}, \qquad (1)$$

$$g_2 = \sigma_{\text{Hlim}} - S_{\text{H}}. \tag{2}$$

令  $H(g_1,g_2)$  为 2 种失效模式失效概率的联合分布函数, $g_1,g_2$  边缘分布函数分别为  $F_1,F_2$ ,则存在唯一的 Copula 函数 C 使得对于任意的  $\forall (\sigma_{Flim},S_F,\sigma_{Hlim},S_H)^T$  有

$$H(g_1, g_2) = C(F_1, F_2).$$
 (3)

齿轮的接触疲劳和弯曲疲劳两种失效模是串联系统,也就是说任意一个失效模式出现就认为齿轮失效.  $P_1$  为弯曲疲劳失效概率, $P_2$  为接触疲劳失效概率, $C(P_1,P_2)$  为构造的 Copula 函数,则齿轮失效概率为

$$P = P_{(g_1 \leq 0 \cup g_2 \leq 0)} = P_{(g_1 \leq 0)} + P_{(g_1 \leq 0)} - P_{(g_1 \leq 0)} \leq 0 = P_1 + P_2 - C(P_1, P_2).$$
(4)

齿轮可靠度为

$$R = 1 - P = 1 - \lceil P_1 + P_2 - C(P_1, P_2) \rceil.$$
 (5)

# 3.2 Copula 函数的选择

目前有很多 Copula 函数族,这些函数族有 1 个或者多个参数. 选择合适的 Copula 函数是解决相关性的关键,由于 Copula 函数族类型很多,不同的函数族所含有的信息有很大不同. 因此,选择能够准确

反映变量之间相关模式的 Copula 函数很重要. 在计算机械零件可靠性时,很难用单一的 Copula 函数来描述它们之间的关系,此时可通过几个不同的 Copula 函数线性组合构造一个比较满意的函数. 本文利用 Archimedean Copula 函数和 Clayton Copula 函数构造混合 Copula 函数. 应用到本文齿轮可靠性计算,混合 Copula 函数的形式为

$$C(F_{1}, F_{2}) = \varepsilon C_{1}(F_{1}, F_{2}, \alpha) + (1 - \varepsilon) C_{2}(F_{1}, F_{2}, \theta),$$
(6)

其中:  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\varepsilon > 2$  个 Copula 函数的加权系数;  $C_1(F_1, F_2, \alpha)$  是 Archimedean Copula 函数,具体表达式为

$$C_1(F_1, F_2, \alpha) = \exp\{-\left[\left(-\ln F_1\right)^{\alpha} + \left(-\ln F_2\right)^{\alpha}\right]^{1/\alpha}\},$$
(7)

 $\alpha \in [1,\infty)$ ,当  $\alpha \to 1$  时,随机变量趋近于独立,当  $\alpha \to \infty$ 时,随机变量趋近于完全相关:

 $C_2(F_1,F_2,\theta)$  是 Clayton Copula 函数,具体表达式为

$$C_2(F_1,F_2,\theta) = (F_1^{-\theta} + F_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta},$$
 (8)  $\theta \in (0,\infty)$ , 当  $\theta \rightarrow 0$  时,随机变量  $F_1,F_2$  趋于独立,当  $\theta \rightarrow \infty$ 时,随机变量  $F_1,F_2$  趋近于完全相关.

#### 3.3 各级齿轮可靠度计算

根据各个齿轮强度分布及应力分布,利用蒙特卡罗法对  $\sigma_{\text{Flim}}$ , $S_{\text{F}}$ , $\sigma_{\text{Hlim}}$ , $S_{\text{H}}$  进行 100~000 次抽样,第  $i(i=1,\cdots,n)$  次抽样结果为:

$$g_{1}(i) = \sigma_{\text{Flim}}(i) - S_{F}(i),$$
 (9)

$$g_{2(i)} = \sigma_{\text{Hlim}(i)} - S_{\text{H}(i)}.$$
 (10)

利用 MATLAB 软件将功能函数序列值  $g_1(i)$ 和  $g_2(i)$ 统计,得出相应的经验分布  $F_1(i)$ , $F_2(i)$ 及它们的联合经验分布  $F_{emp}[F_1(i),F_2(i)]$ 。同时可以得到各齿轮弯曲疲劳失效概率  $P_1$ 、接触疲劳失效概率  $P_2$ .  $C(F_1,F_2)=\epsilon C_1(F_1,F_2,\alpha)+(1-\epsilon)C_2(F_1,F_2,\theta)$  的参数采用离差平法和最小准则 (RSS)估计,

RSS =

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(F_{\text{emp}}\left[F_{1}\left(i\right),F_{2}\left(i\right)\right]-C\left[F_{1}\left(i\right),F_{2}\left(i\right)\right]\right)^{2}}.$$

利用 MATLAB 中 Fmincon 函数先求出参数  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  和  $\theta$ , 再将参数代入式(4)至式(8)中,可计算出 各齿轮的可靠度,如表 2 所示. 分析可知,二级太阳轮 5 的可靠度比较小,原因是二级太阳轮处于功率 汇合处,接触应力及弯曲应力均较大.

表 2 各齿轮的可靠度

Table 2 The reliability of the gear

| 零件名称         | 各齿轮疲劳可靠度 $/\%$ |
|--------------|----------------|
| 齿轮 1         | 100            |
| 齿轮 2         | 99. 99         |
| <b>齿轮</b> 3  | 99. 68         |
| <b>齿轮</b> 3' | 99. 46         |
| 齿轮 4         | 98. 23         |
| 齿轮 5         | 93. 52         |
| <b>齿轮</b> 5′ | 98. 37         |
| <b>齿轮</b> 6  | 98. 43         |

#### 4 结 论

本文以 2.5 MW 风电齿轮箱为研究对象,利用Romax Designer 建立了三维模型;结合长年监测载荷谱,统计计算出各齿轮接触应力与弯曲应力分布;基于 Copula 函数,建立了考虑齿轮接触疲劳和弯曲疲劳失效相关的可靠性分析模型,并计算出各齿轮的可靠度.为改进 2.5 MW 风电齿轮箱设计、提高其可靠性提供理论依据和技术支撑.

#### 参考文献:

- [1] 秦大同,周志刚,杨军,等. 随机风载作用下风力发电机 齿轮传动系统动态可靠性分析 [J]. 机械工程学报, 2012,48(3):1-7.
  - QIN Da-tong, ZHOU Zhi-gang, YANG Jun, et al. Time-dependent reliability analysis of gear transmission system of wind turbine under stochastic wind load [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(3): 1-7
- [2] 林腾蛟,沈亮,赵俊渝. 风电增速箱输出级齿轮副疲劳寿命有限元分析[J]. 重庆大学学报,2012,35(1):1-6. LIN Teng-jiao,SHEN Liang,ZHAO Jum-yu. Fatigue life finite element analysis of output gear pair of wind turbine spee-increase gearbox[J]. Journal of Chongqing University,2012,35(1):1-6.
- [3] LLOYD G. Guideline for the certification of offshore wind turbines [M]. Uetersen: Germanischer Lloyd WindEnergie GmbH, 2005;22-45.
- [4] 张红磊. 大型风电机组齿轮箱疲劳特性数值模拟[D]. 北京: 华北电力大学能源动力与机械工程学院, 2010: 56-77.

ZHANG Hong-lei. Numerical simulation of the fatigue characteristic for large Wind turbine gearbox[D]. Beijing: North China Electric Power University, School of Energy, Power and Mechanical Engineering, 2010: 56-77.

- [5] 徐芳,周志刚,李迎春,等.基于动力学的风电增速箱多级齿轮传动系统可靠性评估[J].中国机械工程,2014,25(9):1219-1224.
  - XU Fang,ZHOU Zhi-gang,LI Ying-chun, et al. Reliability assessment of multistage gears transmission system of wind power growth gearbox based on dynamics[J]. China Mechanical Engineering, 2014, 25(9):1219-1224.
- [6] 秦大同,邢子坤,王建宏.基于动力学和可靠性的风力发电齿轮传动系统参数优化设计[J].机械工程学报,2008,44(7):24-31.
  - QIN Datong, XING Zi-kun, WANG Jian-hong. Optimization design of system parameters of the gear transmission of wind turbine based on dynamics and reliability [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44 (7):24-31.
- [7] 谢里阳,姜永军. 齿轮失效概率分析的串联系统相关失效模型[J]. 失效分析与预防,2006,1(1);25-27.

  XIE Li-yang, JIANG Yong-jun. A series system dependent failure model for gear failure probability analysis[J].

  Failure Analysis & Prevention,2006,1(1):25-27.
- 析[J]. 机械传动,2011,35(4):50-53.
  WANG Ming-qing,CHEN Zuo-yue. Analysis of time variant reliability for gear with multi-failure mode [J].
  Journal of Mechanical Transmission,2011,35(4):50-53.

[8] 王明清,陈作越. 齿轮传动多模式失效的时变可靠性分

- [9] RODRIGUEZ J C. Measuring financial contagion: a copula approach[J]. Journal of Empirical Finance, 2007, 14 (3): 401-423.
- [10] 操颖,方兆本. 基于混合 Copula 函数的沪深股市与香港股市一体化趋势分析[J]. 中国科学技术大学学报,2014,44(6):508-515.

CAO Ying, FANG Zhao-ben. An analysis of the integration trend of Shanghai & Shenzhen stock markets and Hong Kong stock market based on the mixed-Copula[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2014, 44(6):508-515.

报

- [11] De MICHLE C, SALVADORI G, PASSONI G, et al. A multivariate model of sea storms using Copulas [J]. Coastal Engineering, 2007, 54(10):734-751.
- [12] 熊立华,郭生练,肖义,等. Copula 联结函数在多变量水 文频率分析中的应用[J]. 武汉大学学报: 工学版, 2005,38(6):16-19.
  - XIONG Li-hua, GUO Sheng-lian, XIAO Yi, et al. Application of Copulas to multivariate hydrological frequency analysis[J]. Engineering Journal of Wuhan University: Engineering Science, 2005, 38(6):16-19.
- [13] AAS K, CZADO C, FRIGESSI A, et al. Pair-Copula constructions of multiple dependence [J]. Insurance Mathematics & Economics, 2009, 44(2):182-198.
- [14] NELSEN R B. An introduction to copulas[M]. New-York: Springer, 2006: 23-60.
- [15] 唐定国,鄂中凯,朱孝禄,等. GB/T3480—1997 渐开线 圆柱齿轮承载能力计算方法[S]. 北京:中国标准出版 社,1997;56-89.
  - TANG Ding-guo, E Zhong-kai, ZHU Xiao-lu, et al. GB/T3480—1997 Calculation methods of load capacity for involute cylindrical gears [S]. Beijing: Standards Press of China, 1997: 56-89.

