

分类号_____

密级_____

UDC _____

编号_____



河南科技大学

硕士学位论文

基于蒙特卡罗法的螺旋锥齿轮疲劳强度的可靠性分析

学位申请人: _____ 石佩斐

指导教师: _____ 魏冰阳

学科专业: _____ 机械设计及理论

学位类别: _____ 工学硕士

2014 年 5 月

论文题目: 基于蒙特卡罗法的螺旋锥齿轮疲劳强度的可靠性分析
专 业: 机械设计及理论
研 究 生: 石佩斐
指导教师: 魏冰阳

摘要

螺旋锥齿轮是齿轮传动中最具代表性的一种类型,广泛应用于车辆、铁路机车、航空航海、矿山能源等领域的动力传输。这些齿轮产品通常不具备大样本试验的条件,所面临的可靠性分析、乏信息评价问题非常突出。本文研究了基于蒙特卡罗法数值模拟的螺旋锥齿轮疲劳强度的可靠性分析和计算方法,探讨了齿轮疲劳强度灰色模型的预测和评价方法。主要研究内容和结论如下:

1 研究了应力-强度干涉模型在齿轮可靠度分析上的应用方法,以及蒙特卡罗法在 MATLAB 软件上的实现方法。

2 对影响强度几何系数的随机变量的分布类型进行了假设分析。基于 MATLAB 软件编程,生成随机数组,利用蒙特卡罗法对几何系数进行了数值模拟,完成了分布拟合检验,随机因素的敏感性分析。证明几何系数符合正态或对数正态分布,且蒙特卡罗数值模拟具有较高的可靠性。

3 利用蒙特卡罗法对齿轮接触应力和弯曲应力,及其许用应力进行了数值模拟。在得出应力和强度结果数组的基础上,根据应力-强度干涉模型,利用统计法和数值积分法分别对接触疲劳强度和弯曲疲劳强度进行了可靠性分析。最后,对影响疲劳强度分布和可靠度的随机因素进行了敏感性分析。

4 利用灰色 GM(1, 1)模型,对齿轮的小样本疲劳寿命数据进行了预测评价,探讨了灰色系统理论用于齿轮疲劳寿命试验数据预测的可行性。为齿轮疲劳寿命的预测和评价提供了新的方法。

在实际工况条件下,齿轮的可靠性是诸多随机因素耦合作用的结果,其分析也是一个相当复杂的过程,而且需要试验数据的支撑才会更加可信。齿轮疲劳强度的可靠性分析,尚需大量的研究工作。

关 键 词: 弧齿锥齿轮, 可靠度, 疲劳寿命, 灰色理论

论文类型: 应用研究

Subject: Fatigue Strength Reliability Analysis of Spiral Bevel Gear
Base on Monte Carlo Method

Specialty: Mechanical Design and Theory

Name: Shi Peifei

Supervisor: Wei Bingyang

ABSTRACT

Spiral bevel gear is the most representative type in gear transmission. Spiral bevel gear is widely used in power transmission in the field of vehicles, railway locomotives, aviation navigation and mining energy. There are not usually the conditions of the large sample test on the gear products, so that the problem of reliability analysis and the lack of information evaluation is very outstanding. The reliability analysis and calculation method of spiral bevel gear fatigue strength which is based on Monte Carlo numerical simulation method is studied in this paper. The discussion of the prediction and evaluation method of the gear fatigue strength grey model is held. The main research contents and conclusions are as follows:

1 The methods of the stress-strength interference model used in the gear reliability analysis, and the Monte Carlo method used in MATLAB software are studied.

2 The distribution types of the random variable which affect the strength geometrical coefficient is assumed. The random number group is generated based on MATLAB software programming, then the simulation of geometric coefficient is done by using Monte Carlo method, the distribution fitting test is completed and the analysis of the sensitivity of random factors is finished. It is proved that the geometric factor submits to the normal or lognormal distribution, and Monte Carlo simulation has high reliability .

3 Based on Monte Carlo method the numerical simulation on the contact stress and bending stress and their permissible stress have respectively been done. After obtaining the stress and strength results array, according to the stress and strength interference model, the calculation of reliability is respectively done by using statistical method and numerical integral method. Finally, the sensitivity analysis are made on the stochastic factors influencing the fatigue strength distribution and the reliability.

4 The forecast evaluation of the small sample data of the gear fatigue life is

studied by using the grey GM (1, 1) model. The discussion of the feasibility of using grey system theory to predict the gear fatigue life test data is held. A new method is put forward for the prediction and the evaluation of the gear.fatigue life.

In the actual working condition, the gear reliability is the result of the coupled action of many random factors. And the analysis is also a very complicated process, and only with the support of the test data, can it be more believable. The reliability analysis of the gear fatigue strength still needs a lot of research work.

KEY WORDS: Spiral bevel gear, reliability, fatigue life, the grey theory

Dissertation Type: Applied Research

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究的背景和意义	1
1.2 可靠性工程概述	2
1.2.1 可靠性的定义和要点	2
1.2.2 机械可靠性的发展	2
1.2.3 机电产品可靠性研究的发展趋势	4
1.3 齿轮疲劳强度的研究现状	5
1.3.1 齿轮疲劳强度的计算与计算机协同仿真	5
1.3.2 齿轮疲劳强度可靠性分析	6
1.4 蒙特卡罗 (Monte Carlo) 法的产生与发展	6
1.5 主要研究内容	7
第 2 章 可靠度的计算原理与方法	9
2.1 应力-强度干涉理论	9
2.1.1 零件可靠度计算流程	9
2.1.2 应力-强度干涉模型	9
2.2 可靠度计算方法	12
2.2.1 数值积分法	12
2.2.2 图解法	15
2.2.3 蒙特卡罗模拟法	16
2.3 蒙特卡罗法在 MATLAB 上的实现	18
2.4 本章小结	19
第 3 章 弧齿锥齿轮疲劳强度几何系数的分析	21
3.1 锥齿轮强度标准概述	21
3.2 随机变量的分布类型	22
3.3 接触强度几何系数分析	24
3.3.1 接触强度几何系数中随机变量分布类型的确定	24
3.3.2 接触强度几何系数的计算	27
3.4 弯曲强度几何系数分析	31
3.4.1 弯曲强度几何系数的随机变量分布类型的确定	31
3.4.2 弯曲强度几何系数的计算	31

3.5 敏感性分析.....	33
3.6 本章小结.....	35
第 4 章 弧齿锥齿轮疲劳强度的可靠性分析.....	37
4.1 接触强度的可靠性分析.....	37
4.1.1 接触强度随机变量分布类型的确定.....	37
4.1.2 应力和强度分布类型的确定.....	41
4.1.3 可靠度的计算.....	42
4.2 弯曲强度的可靠性分析.....	43
4.2.1 影响弯曲强度的随机变量分布类型的确定.....	43
4.2.2 应力和强度分布类型的确定.....	44
4.2.3 可靠度的计算.....	46
4.3 敏感性分析.....	47
4.3.1 弯曲应力均值和标准差对可靠度的影响.....	47
4.3.2 材料许用弯曲应力对弯曲强度分布以及可靠度的影响.....	48
4.4 产品应用.....	49
4.5 本章小结.....	50
第 5 章 齿轮疲劳寿命的灰色 GM(1, 1)模型.....	51
5.1 灰色模型.....	51
5.2 应用实例.....	52
5.2.1 应用实例一.....	52
5.2.2 应用实例二.....	54
5.3 本章小结.....	56
第 6 章 结论与展望.....	57
6.1 结论.....	57
6.2 展望.....	57
参考文献.....	59
致 谢.....	63
攻读硕士学位期间的研究成果.....	65

第1章 绪论

1.1 研究的背景和意义

在低碳经济背景下，齿轮传动逐渐向轻量化高功率密度方向发展，其面临的强度和可靠性问题更加突出。至今存在着齿轮强度随机变量分布类型不统一，小样本试验的预测与评价方法匮乏，导致齿轮产品的可靠度分析和预测难以逾越的瓶颈。

螺旋锥齿轮（弧齿锥齿轮与轴线偏置的准双曲面齿轮）是齿轮传动中最具代表性的一种类型。弧齿锥齿轮广泛应用于航空直升机、航海舰船、坦克车、铁路机车、矿山能源等领域的动力传输，而准双曲面齿轮则广泛应用于重载卡车、高速大巴等各种车辆驱动桥主减速器传动。

这些齿轮产品通常不具备大样本试验的条件，只能进行小样本的疲劳性能试验，所面临的乏信息系统评价、可靠性问题愈加突出。尤其随着航空航天、新能源、新材料、高速铁路机车与重载交通运输机械的快速发展，动力传输机械的极端工况对相关齿轮的疲劳寿命与可靠度提出了更高的要求。使传统方法评估齿轮疲劳性能问题面临新的挑战。例如，其概率分布类型未知，特征数据少，而且几乎没有相关性能的概率分布和变化趋势的先验资料。齿轮零件之间极端的啮合冲击、摩擦、磨损、振动和温升等呈现不确定和多变的非线性特征，使齿轮性能及其变化趋势随时间和工况发生改变，很难建立全面、合理且有效的几何、动力学或统计学理论模型。以齿轮的疲劳性能为例，长期以来，齿轮疲劳性能评价主要依靠经典力学、疲劳寿命试验，并以威布尔、指数分布或对数正态分布为假设，尚无有统一的模型，进行可靠性分析。但以大样本经典统计理论为基础的疲劳性能实验显然已无法适应新材料、新工艺快速发展的特殊要求，迫使人们不得不寻求一种新的小样本预测评价或数值模拟方法替代大样本数据试验。而蒙特卡罗法由于可以把试验的次数降到最低限度，仅把试验作为验证提出的数学模型是否正确以及测量一些参数的手段。其分析方法简单，精度相对较高，收敛速度与问题的维数无关^[2-3]，而且对零件的可靠性问题具有同样的适用性。因此，蒙特卡罗法伴随机械、电子产品的可靠性分析技术而快速发展。

基于上述思路，本文利用蒙特卡罗法来解决齿轮传动领域所面临的可靠性分析问题，对指导现代齿轮系统的动态设计、实验评估与性能分析具有重要的科学意义和广泛的应用前景。

1.2 可靠性工程概述

1.2.1 可靠性的定义和要点

可靠性可定义为产品在规定条件下和规定时间内能够完成规定功能的能力^[4-5]。可靠度就是用“概率”来度量这一“能力”，用 $R(t)$ 表示。这一定义同样适用于机械产品。

可靠性定义的要点如下：

1 产品

产品包括零件、设备和系统，可以从一个很小的零件到一个很大的机电一体化的系统。不仅如此，包括操作人员在内的人机系统也可看作是产品，这时系统里也包括了人的因素。实际上，系统的失效常常是由于人的不可靠引起的。

2 规定条件

规定条件主要指工作环境，以及在工作环境下出现的使用和维修条件，操作工人的技术水平等人为条件等。

3 规定时间

可靠度是时间性的质量指标。任何产品只能够在一定的时间内达到目标可靠度。因此，对时间的规定一定要明确。时间可能是区间 $(0, t)$ ，也可能是区间 (t_1, t_2) 。

4 规定功能

功能通常是指产品的工作性能，但是可靠性工程师的工作重点不是产品的功能，而是产品的失效或故障，即产品丧失了规定功能。

5 概率

概率是可以度量的，其值为 0 与 1 之间，所以 $0 \leq R(t) \leq 1$ 。产品从零开始工作了 t_1 小时之后的可靠度为 $R(t=t_1)$ ；产品从 t_1 开始工作了 t_2 之后的可靠度为 $R(t_1, t_2)$ ，显然 $R(t_1, t_2)$ 为条件可靠度。

1.2.2 机械可靠性的发展

1 国外概况

最早有关可靠性指标的要求见于 1939 年英国的《飞机适航性注释》，它要求飞机的事故率小于 10^{-5} 。在 1940 年初，德国此时正在研究 V-1 火箭。德国科学家提出了计算串联系统可靠度可以等同于计算各单元可靠度的连乘积。在可靠性工程方面，包括机械可靠性领域，美国都一直处于领先地位。

1947 年，美国 A.M.Freudenthal 在土木工程师学会（ASCE）刊物上发表的

“结构与安全”中首次提出了“应力/强度分布干涉”理论。1954 年，他在《应用物理》上发表了“疲劳中的失效和存活”，1957 年，出版了《飞机结构的疲劳》。可见他从事的领域是结构可靠性，研究方向是疲劳。

20 世纪 60 年代初，在机械可靠性领域，D.Kececioglu 最先研究了应力-强度干涉理论，并发表了论文。1965 年，在可靠性与维修年会的 88 篇论文中，有关机械可靠性的论文只有 2 篇。1967 年，机械可靠性领域的另一个代表人物 C.Lipson，他也想 Rome 航空发展中心提交了研究报告：“可靠性预测-机械应力/强度干涉”。C.Lipson 的代表作是 1973 年出版的《Statistical Design and Analysis of Engineering Experiments》。其中给出了许多机械零件，尤其是汽车零件可靠性的实例。1980 年，可靠性著述最多的 B.S.Dhillon 对应力-强度分布干涉理论作了进一步的阐述，将其应用扩展到冗余系统。

在 1960 年到 1980 年间，D.Kececioglu 在机械可靠性领域做出了很多贡献，主要包括以下方面：

- 1) 研究了应力-强度干涉理论。并以 NASA 的研究项目为基础，以干涉理论为根据，总结出了一套比较完整的机械可靠性的研究方法和步骤。这一方法在工程中得到了广泛应用。

- 2) 通过实验，指出了通常对数正态分布或威布尔分布能很好地表示零件失效循环次数的分布。阐明了把不同应力水平下的失效循环次数分布转化为规定寿命下强度分布的方法和步骤。

- 3) 对于顺序加载下的累积疲劳，提出了用“条件可靠度-等效寿命”，进行可靠度计算的方法。

- 4) 提出了 Kececioglu 曲线。这条曲线是疲劳强度数据的最佳拟合线。

- 5) 1970 年后，对应力和强度都为二维分布的情况建立了干涉模型。

20 世纪 80 年代开始，加拿大的一些专家对冗余系统、共因失效、具有部分故障的系统等一些专题进行了研究。进入 21 世纪以来，机械可靠性的发展比较缓慢，没有引人注目的发展。

在英国，A.D.S.Carter 是机械可靠性领域的先驱者和代表人物，其主要著作是《机械可靠性》（1972、1986、1997）。他研究的领域主要是磨损、维修等方面对可靠性的影响。1997 年，A.D.S.Carter 在其新作《机械可靠性与设计》中对磨损的可靠性作了进一步的阐述。

日本是可靠性工程应用最成功的国家，尤其是在民用工业中。在汽车、工程机械、机器人等机械和电子机械领域，对可靠性的研究也相当成功。日本的经验从一个侧面说明了理论必须与实践相结合，而有时“经验比理论更重要”。20 世纪 90 年代初，额田启三曾三度访华，介绍有关机械可靠性方面的经验，对当

时国内机械可靠性的推广应用，有很大帮助。

2 国内概况

国内最早的可靠性研究机构是 1965 年受命于钱学森，由何国伟负责筹建的航天可靠性与质量控制研究所。20 世纪 70 年代，可靠性领域的代表人屈指可数。在 1978 年举行的全国科学大会上，仅有 2 人。国内机械可靠性的发展和国外一样起步较晚。1983 年 3 月，在北京召开了第一次《机械可靠性座谈会》，由航天部质量司何国伟总工程师作了主题报告。1984 年，原机械工业部科技司长姚福生率团付日本考察机电产品的可靠性。1986、1987、1988 连续 3 年召开了三次机械工业部可靠性工作会议。1986 年和 1987 年原机械工业部先后发出了《关于加强机电产品可靠性工作的通知》和《关于限期考核机电产品可靠性指标的清单》。同期，我国先后成立了机械可靠性中心、可靠性工程学会、可靠性工程研究所等可靠性机构，并在央视开办电视讲座和函授班。这些活动为推动机电产品可靠性工作在国内的开展和普及起到了至关重要的作用。

近十几年来，由于我国高科技，尖端产品日强，在机械和结构可靠性领域新人辈出，他们已将可靠性理论和实践推向了新的高度，更多地出现在国际学术会议上，并在多种国际刊物中发表了许多有影响的学术论文，其中最具代表性的是谢里阳（东北大学）、熊俊江、张建国（北航）等。

1.2.3 机电产品可靠性研究的发展趋势

机电产品可靠性研究有以下几个方面：

1 计算机辅助可靠性设计。由于对软件的依靠增加了，所以对软件可靠性的研究日益得到了重视。最新的发展史试图把硬件可靠性和软件可靠性综合到整个系统的可靠性量度中去。可以期望未来的 CAD 系统将能够提供考虑了所有因素的机械设计和电路设计解决方案。CAD 数据库将提供可靠性预计、分配、FMECA、FTA、潜在电路分析和其他要求的分析。

2 进一步完善现有的概率设计方法。主要包括以下几个方面：

1) 当应力分布和强度分布不属于同一分布类型时，改进合成两种不同分布的方法。

2) 当零部件的失效模式不止一种时，其可靠度的确定方法。

3) 对冗余系统建立应力-强度干涉模型和进行概率分析。

4) 具有共因失效系统的概率分析。

5) 随机载荷下零部件的载荷谱分析和强度分析的确定等。

3 其他应用科学的理论和方法在可靠性工程中的进一步结合应用，如概率断裂力学、摩擦学、随机振动学、Monte Carlo 模拟、虚拟样机技术、稳健设计

等。

4 可靠性与产品性能的综合研究,如性能可靠性、贮存可靠性等、

5 进一步改进和完善可靠性数据库,编制出有实用价值的非电子产品可靠性手册。

1.3 齿轮疲劳强度的研究现状

齿轮作为一种经典的机械传动类型,目前在几何设计、啮合理论与制造技术方面发展相对较成熟,相应的研究成果也较多。但是以齿轮传动性能评价为目标的理论分析、计算方法的研究,则因需要大量的实验工作投入,人力物力耗费巨大,发展相对滞后。

1.3.1 齿轮疲劳强度的计算与计算机协同仿真

目前,计算齿轮强度的方法一般都是按照经典力学中的一些假设得来的。由于结果又很大程度的近似性,只能用于粗略分析。例如强度计算所涉及很多变量、系数,仅仅依靠有限的一些图表或经验公式,其计算的精确度、可靠性和应用范围有很大的局限性。随着计算机技术的发展,用 CAD 对齿轮参数化建模、运动仿真以及用 ANSYS 进行有限元分析的研究逐渐深入。袁菲、徐颖强通过对齿轮原始载荷历程进行插值修正和雨流计数,运用三维有限元分析方法,探讨了齿间载荷分布对齿轮弯曲疲劳寿命预测结果的影响^[6]。程文冬、曹岩利用 UG 进行了齿根弯曲疲劳强度与齿面接触疲劳强度的力学仿真^[7]。张景柱、崔清斌等运用协同仿真技术,结合动力学载荷谱分析与有限元静强度分析,构建了齿轮疲劳寿命预测协同仿真平台^[8]。Shuting Li 利用有限元仿真研究了加工安装误差、轮齿修形对大重合度圆柱齿轮载荷分担比、传动误差、承载能力的影响^[9-10]。B.A. Shaw、C. Aylott 等研究了表面残余压缩应力对齿轮接触疲劳强度的影响^[11]。S. Glodez、M. Sraml 等给出了一个确定齿轮弯曲疲劳寿命的计算模型,利用有限元应变-寿命法计算出萌生疲劳裂纹的应力循环次数 N_i ; 利用简化 Paris 方程对疲劳裂纹的生长进行了仿真; 利用有限元位移协变法确定了应力集中系数和裂纹长度之间的函数关系与渗碳淬火 42CrMo4 合金钢齿轮的工作寿命^[12-16]。An Ural、Gerd Heber、Paul A. 等基于线弹性断裂力学、并行有限元、塑性蠕变裂纹闭合,在计及载荷作用过程下对某螺旋锥齿轮的小轮的疲劳裂纹演化行为进行了仿真,与实验观察结果达到了较好的一致性^[17]。该方法比利用边界单元法进行仿真的精度和效率更高。

由于螺旋锥齿轮几何形状的复杂性,其损伤机理以及疲劳强度预测与圆柱齿轮相比有其特殊性。目前国内外对其疲劳行为及其疲劳寿命预测仿真尚未具维

形。

1.3.2 齿轮疲劳强度可靠性分析

传统的齿轮强度计算(AGMA、ISO 标准)一般采用安全系数作为衡量标准,无法计及影响齿轮疲劳寿命参数的随机性与分布规律,已无法满足现代机械科学技术的发展要求。但可靠性分析必须以齿轮应力和强度的分布或大样本数据为基础,而实际工程中进行大样本齿轮疲劳寿命试验难以实现。对此国内一些相关学者,做了大量的探索性工作^[18-25]。例如,张洪才、陈举华等研究了以小子样机械系统寿命序列为代表的时间序列系统的混沌特性,阐述了灰色关联分析和灰色模型在机械产品可靠性分析与预测中的应用方法^[27]。张延化、王优强等则把灰色 GM(1, 1) 模型的原理应用于齿轮疲劳寿命预测中,通过具体实例建立了齿轮疲劳寿命 GM(1, 1) 模型^[28-29]。李阳星、李光煜针对模糊可靠性设计中隶属函数特征值确定困难的问题,引入熵理论,对齿轮可靠性的模糊程度进行了数值计算,为机械模糊可靠性设计提供了新方法^[30]。王明清、陈作越提出了一种在多种失效模式下的齿轮传动时变可靠性计算方法,建立了同时考虑齿面接触疲劳失效和齿根弯曲疲劳失效的可靠性分析模型^[31]。

上述研究成果为齿轮疲劳性能预测与评价、可靠性分析奠定了一定的理论基础,做出了有益的探索。但由于齿轮疲劳强度具有多变性、非线性、多样性以及影响因素的复杂性,用现有几何、力学与统计学方法尚难以把握现代齿轮性能的总体演变规律。

1.4 蒙特卡罗 (Monte Carlo) 法的产生与发展

早在 18 世纪,法国学者 Buffon 已通过随机投针试验,发现了计算圆周率的方法。这种随机试验法是最早的近似地用频率估计概率的方法。实际上,这就是古代的蒙特卡罗法。

在二十一世纪初,随着人们生活水平的提高和工业水平的进步,人们越来越重视采用概率论的思想,来解决生活中的数理问题。进而,蒙特卡罗法也就随之演变成了一个学科。

在二十世纪中叶,著名物理学家维纳曼等人,在计算机领域上,采用随机抽样的方法,成功实现了粒子的持续反应过程,并将这种思想归结为蒙特卡罗法。近年来,随着计算机物理等相关科学技术的高速发展,人们对计算机的依赖程度也越来越高,计算机技术也越来越被人们所重视,由计算机延伸出的一些列科学计算技术,共同构成了蒙特卡罗体系。

在 1995 年后,我国开始正式成立的蒙特卡罗学术工作小组。开始对蒙特卡

罗法进行科学、系统地研究。通过近二十年的相关研究，在原子核技术、太空技术、医疗技术等方面，取得了重大的突破，达到了前所未有的高度，并且通过蒙特卡罗体系，解决了大量的之前无法解决的工程实际应用问题。

另外，蒙特卡罗法也对我国在计算机等相关领域的发展起到了一定的激励和促进作用。譬如，概率论运算方法，在计算机科学技术中，就被充分地运用，在这种学科间充分融合的过程当中，就需要进行在不同环境和因素下进行模拟对比。在这样大工作量的运算条件下，由于蒙特卡罗体系本身的优势，在实验当中的不可替代性，从而为后期的分析研究工作节约了大量的人力物力。

近年来，蒙特卡罗法开始应用于齿轮的强度的可靠性分析。例如，陈文华、朱海峰、樊晓燕针对齿轮系统中各项误差具有不同概率分布规律的特点，提出了齿轮系统传动误差的蒙特卡罗模拟分析方法，为准确估计齿轮系统的传动精度提供了理论手段^[32]。郭耀斌、张文明等利用蒙特卡罗法对某汽车的后桥主减速器螺旋锥齿轮接触疲劳应力、强度的分布规律进行了模拟计算与分析，对相关的可靠性指标进行了模拟求解^[33]。但总的来说，蒙特卡罗法在齿轮强度分析方面的应用研究还相对少而肤浅^[34-37]。

目前，我国标准圆柱齿轮的弯曲疲劳试验数据仅有十几种，试验数据严重不足。而螺旋锥齿轮疲劳强度的评价方法和技术更加滞后，基础数据几近空白，缺乏指导性的评价标准。在设计和强度计算方面则较多地依靠类比或完全照搬 AGMA 标准，致使我国该类齿轮产品要么寿命不足，要么“以大保强”。这些都会造成能源、材料上的极大浪费。因此，亟需利用现代实验科学和信息技术手段开发新的有关齿轮强度的计算、分析的新方法。

1.5 主要研究内容

本文拟以螺旋锥齿轮为研究对象，探索基于蒙特卡罗法的齿轮疲劳强度的计算方法，从而确定螺旋锥齿轮的强度分布类型，获得可靠性分析模型。这可以为螺旋锥齿轮疲劳性能的统计分析提供新的思路，为齿轮传动可靠性分析与设计奠定一定的理论和技术基础。本文的主要研究内容如下：

1 研究齿轮可靠度的计算分析方法

研究应力-强度干涉模型，蒙特卡罗法和其在 MATLAB 软件上的简化过程的实现方法。

2 用蒙特卡罗法对影响强度的几何系数进行分析

对随机变量的分布进行假设分析，用蒙特卡罗法生成随机数组代入几何系数的功能函数计算结果数组。利用 MATLAB 进行数据处理，进行分布拟合检验。并计算出统计参数，最后对影响几何系数的随机因素进行敏感性分析。

3 对接触疲劳强度和弯曲疲劳强度的可靠性进行分析

用蒙特卡罗法对接触疲劳强度和弯曲疲劳强度分别进行分析。在得出应力和强度结果数组以后，根据应力-强度干涉模型，应用统计法和数值积分法分别计算出可靠度。并对影响强度分布和可靠度的随机因素进行敏感性分析。

4 齿轮寿命评价和预测的灰色理论的研究

用灰色理论对齿轮疲劳寿命的评价和预测的方法进行了探索，对已知少量疲劳寿命数据（3~5 组）利用灰色理论，建立相关的灰色 $G(1, 1)$ 模型，为小样本齿轮寿命预测与评价提供借鉴。

第2章 可靠度的计算原理与方法

机械零件的可靠度计算是机械系统可靠性分析的基础环节。无论是齿轮传动件，还是其它的机械基础件，其可靠度的计算方法都是相通的。本章将对应力分布和强度分布的干涉理论和分析方法做简要的介绍^[38-40]。

2.1 应力-强度干涉理论

2.1.1 零件可靠度计算流程

一般地，在进行零件可靠度计算时，应首先确定其应力和强度的分布规律，然后对这两个分布加以综合，从而计算出零件的可靠度。其计算流程如图 2-1 所示。

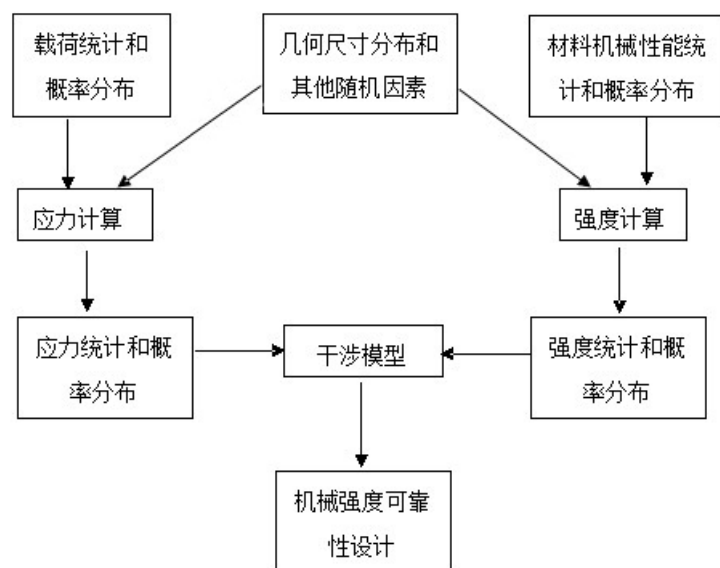


图 2-1 零件可靠度计算流程图

Fig. 2-1 The calculating flow chart of parts reliability

2.1.2 应力-强度干涉模型

由应力-强度干涉理论可知，“强度大于应力的概率 P ”即为可靠度。可表示为

$$R(t) = P(\delta > S) = P(\delta - S > 0) = P\left(\frac{\delta}{S} > 1\right) \quad (2-1)$$

满足式 (2-1) 则可保证零件不失效。如图 2-2 所示, 在时间为 t_0 时, 两分布之间有一定的安全裕度。但随着时间的推移, 强度恶化, 导致在时间 t_1 时两布发生干涉, 产生失效。

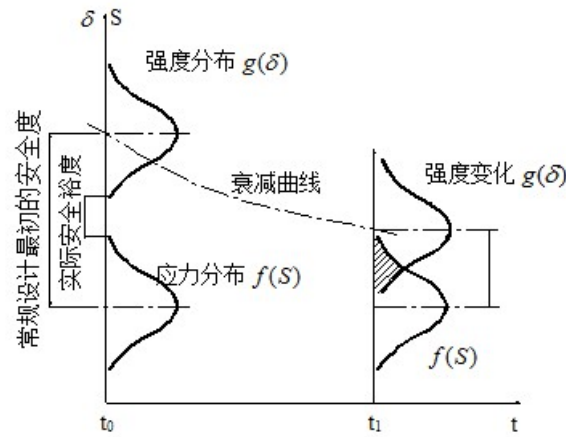


图 2-2 应力强度分布与时间关系

Fig. 2-2 Relationship of stress intensity distribution to time

需要对两个分布发生干涉的部分进行研究。因此, 如图 2-3 所示, 对时间为 t_1 时的应力-强度分布干涉模型进行分析。零件的工作应力为 S , 强度为 δ 。假定应力和强度都呈正态分布状态, 当两个分布发生干涉时, 图中阴影部分表示零件的失效概率。失效概率即不可靠度。由于零件失效与不失效为互逆事件, 故

$$R(t) = 1 - P_r = 1 - F(t) \quad (2-2)$$

式中, P_r —失效概率; $F(t)$ —不可靠度。

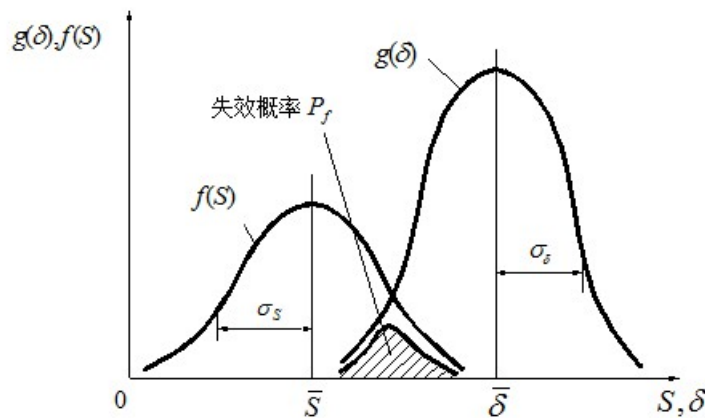


图 2-3 时间为 t 时的应力-强度分布干涉模型

Fig.2-3 The interference model of stress to strength distribution under time being t

为了计算零件的可靠度, 把图 2-3 中的干涉部分放大表示为图 2-4。

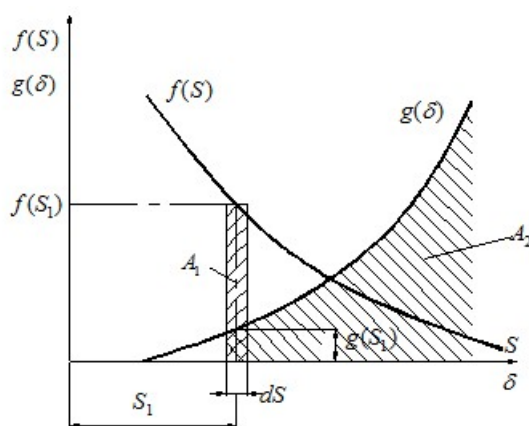


图 2-4 强度值大于应力值时，应力和强度的概率面积

Fig. 2-4 Probability area under the strength value is greater than the stress value

我们通常所说的可靠度即为强度值大于应力值的概率。也就是说，同一时刻强度值 δ 比应力值 S 大时，不失效概率存在。

由图 2-4 可知，面积 A_1 为应力值 S_1 存在于区间 $\left[S_1 - \frac{dS}{2}, S_1 + \frac{dS}{2}\right]$ 内的概率，即

$$P\left(S_1 - \frac{dS}{2} \leq S_1 \leq S_1 + \frac{dS}{2}\right) = f(S_1)dS = A_1 \quad (2-3)$$

面积 A_2 为强度值 δ 超过应力值 S_1 的概率，即

$$P(\delta > S_1) = \int_{S_1}^{\infty} g(\delta)d\delta = A_2 \quad (2-4)$$

式 (2-3) 和式 (2-4) 表示的是两个独立的事件各自发生的概率。若这两个独立事件同时发生，可应用概率乘法定理计算应力值为 S_1 时的可靠度

$$dR = A_1 A_2 = f(S_1)dS \times \int_{S_1}^{\infty} g(\delta)d\delta \quad (2-5)$$

由于零件的可靠度等于强度值 δ 大于所有可能的应力值 S 的概率，故

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(S) \left[\int_S^{\infty} g(\delta)d\delta \right] dS \quad (2-6)$$

根据以上方法，让应力值小于已知的强度值 δ_1 来研究。相应的把图 2-4 中的 S_1 改为 δ_1 ， dS 改为 $d\delta$ ， $g(S_1)$ 改为 $g(\delta_1)$ ， $f(S_1)$ 改为 $f(\delta_1)$ ，则强度值 δ_1 存在于区间 $\left[\delta_1 - \frac{d\delta}{2}, \delta_1 + \frac{d\delta}{2}\right]$ 内的概率为

$$P(\delta_1 - \frac{d\delta}{2} \leq \delta_1 \leq \delta_1 + \frac{d\delta}{2}) = g(\delta_1)d\delta = A_1' \quad (2-7)$$

同时，应力值 S 小于强度值 δ_1 的概率表示为

$$P(S < \delta_1) = \int_{-\infty}^{\delta_1} f(S)dS = A_2' \quad (2-8)$$

式 (2-7) 和式 (2-8) 表示的也是两个同时发生的独立的事件，则强度值为 δ_1 时的不失效概率为这两个概率的成绩，得

$$dR = A_1' \cdot A_2' = g(\delta_1)d\delta \times \int_{-\infty}^{\delta_1} f(S)dS \quad (2-9)$$

则零件的可靠度所有可能的强度值的不失效概率，即

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\delta) \left[\int_{-\infty}^{\delta_1} f(S)dS \right] d\delta \quad (2-10)$$

式 (2-6) 和式 (2-10) 即为可靠度的一般表达式。

式 (2-6) 可以表示为更一般的形式：

$$R(t) = \int_a^b f(S) \left[\int_S^c g(\delta)d\delta \right] dS \quad (2-11)$$

2.2 可靠度计算方法

2.2.1 数值积分法

在已知应力和强度的概率密度函数 $f(S)$ 和 $f(\delta)$ 时，可对式 (2-6) 和 (2-11) 进行数值积分，求出可靠度 $R(t)$ 。若假设应力和强度的分布都为正态分布或对数正态分布，则相应的有简单的可靠度计算方法。

1 应力和强度分布都为正态分布

已知可靠度可表示为式 (2-1)，如令 $\zeta = S - \delta$ ，则可靠度为 $\zeta > 0$ 的概率，表示为 $R(t) = P(\zeta > 0)$ 。

令 $h(\zeta)$ 为 $f(S)$ 和 $g(\delta)$ 之差的分布函数。根据概率统计理论，由于 $f(S)$ 和 $g(\delta)$ 都为正态分布，故 $h(\zeta)$ 也为正态分布函数，即

$$h(\zeta) = \frac{1}{\sigma_\zeta \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{\sigma_\zeta} \right)^2} \quad (2-12)$$

其中，

$$\bar{\zeta} = \bar{\delta} - \bar{S} \quad (2-13)$$

$$\sigma_{\zeta} = (\sigma_s^2 + \sigma_{\delta}^2)^{1/2} \quad (2-14)$$

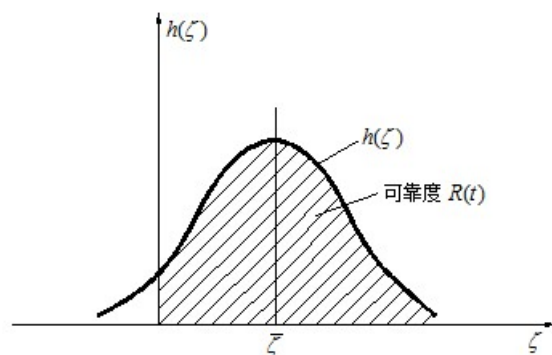


图 2-5 强度与应力之差 ζ 的概率密度函数

Fig. 2-5 The probability density function of ζ -the difference between strength and stress

如图 2-5 所示, ζ 为正值时的概率即为可靠度, 表示为

$$\begin{aligned} R(t) &= \Gamma(\zeta > 0) = \int_0^{\infty} h(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{\sigma_{\zeta} \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{\sigma_{\zeta}} \right)^2} d\zeta \end{aligned} \quad (2-15)$$

若将 $h(\zeta)$ 化为标准正态分布, 则

$$R(t) = \int_0^{\infty} h(\zeta) d\zeta = \int_z^{\infty} \phi(z) dz \quad (2-16)$$

其中,

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (2-17)$$

$$z = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{\sigma_{\zeta}} \quad (2-18)$$

由上式可知,

当 $\zeta = \infty$ 时,

$$z = \frac{\infty - \bar{\zeta}}{\sigma_{\zeta}} = \infty \quad (2-19)$$

当 $\zeta = 0$ 时,

$$z = \frac{0 - \bar{\zeta}}{\sigma_{\zeta}} = -\frac{\bar{\delta} - \bar{S}}{(\sigma_{\delta}^2 + \sigma_s^2)^{1/2}} \quad (2-20)$$

式中, z —联结系数, 也称可靠性系数或安全指数或概率安全裕度。

故当已知应力和强度的均值和标准差时，即可根据式（2-16）和（2-20）计算出可靠度。

2 应力分布和强度分布都为对数正态分布时的可靠度计算

令 $\frac{\delta}{S} = \xi$ ，则 $R(t) = P(\xi > 1)$ ，由图 2-6 可知

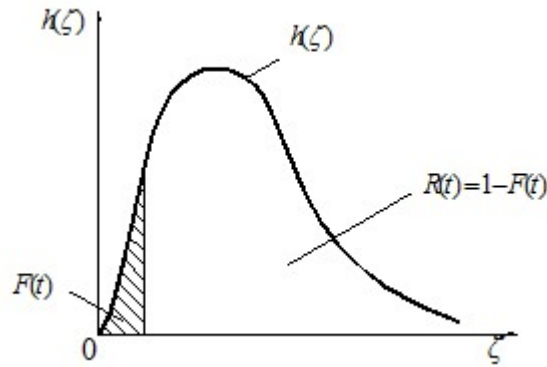


图 2-6 强度与应力比值 ξ 的概率密度函数

Fig. 2-6 The probability density function of ξ - ratio of strength to stress

$$R(t) = \int_1^{\infty} h\left(\frac{\delta}{S}\right) d\left(\frac{\delta}{S}\right) = \int_1^{\infty} h(\xi) d\xi \quad (2-21)$$

对 $\xi = \frac{\delta}{S}$ 两边取对数，得

$$\lg \xi = \lg \delta - \lg S \quad (2-22)$$

因 δ 和 S 服从对数正态分布，所以 $\lg \delta$ 和 $\lg S$ 服从正态分布，其差值 $\lg \xi$ 亦服从正态分布，其分布参数为

$$\overline{\lg \xi} = \overline{\lg \frac{\delta}{S}} = \overline{\lg \delta} - \overline{\lg S} \quad (2-23)$$

$$\sigma_{\lg \xi} = (\sigma_{\lg \delta}^2 + \sigma_{\lg S}^2)^{1/2} \quad (2-24)$$

令 $\lg \xi = \xi'$ ，其分布曲线如图 2-7 所示，则

$$R(t) = \int_1^{\infty} h(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} h(\xi') d\xi' = \int_z^{\infty} \phi(z) dz \quad (2-25)$$

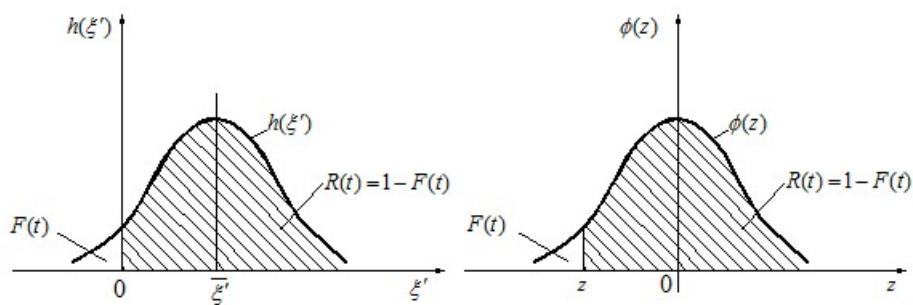


图 2-7 概率密度函数 $h(\xi')$ 与标准正态分布函数 $\phi(z)$

Fig. 2-7 Probability density function and the standard normal distribution function

因为,

$$z = \frac{\lg \xi - \overline{\lg \xi}}{\sigma_{\lg \xi}} \quad (2-26)$$

则当 $\xi = 1$,

$$z = \frac{\lg 1 - \overline{\lg \xi}}{\sigma_{\lg \xi}} = -\frac{\overline{\lg \xi}}{\sigma_{\lg \xi}} = -\frac{\overline{\lg \delta} - \overline{\lg S}}{(\sigma_{\lg \delta}^2 + \sigma_{\lg S}^2)^{1/2}} \quad (2-27)$$

当 $\xi = \infty$,

$$z = \frac{\lg \infty - \overline{\lg \xi}}{\sigma_{\lg \xi}} = \infty \quad (2-28)$$

2.2.2 图解法

当应力和强度分布为正态分布或对数正态分布时,也可用图解法来近似地计算可靠度。

令

$$G = \int_S^\infty g(\delta) d\delta = 1 - G_\delta(S) \quad (2-29)$$

$$H = \int_0^\delta f(S) dS = F_S(S) \quad (2-30)$$

式中, $G_\delta(S)$ —强度的累积分布函数; $F_S(S)$ —应力的累积分布函数。

由累积分布函数的性质可知, G 和 H 的最大范围是从 0 到 1。

则可靠度的一般表达式 (2-6) 可以重写为

$$R = \int_0^1 G dH \quad (2-31)$$

式中, $dH = f(S)dS$ 。

式(2-31)说明, 区间 $[0, 1]$ 内曲线 $G = \varphi(H)$ 下的面积即为零件的可靠度, 可设计成图 2-8 所示的 G 和 H 的关系曲线。根据应力 S 和强度 δ 的数据, 便不难确定在不同 S 值下的 $G_\delta(S)$ 和 $F_\delta(S)$ 值, 由此得到 G 和 H 的值。画出 $G-H$ 曲线然后量出曲线下的面积, 即可得到所求的可靠度。

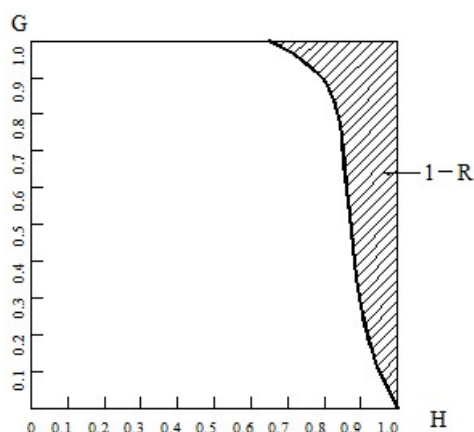


图 2-8 $G-H$ 曲线

Fig. 2-8 The $G-H$ curve

2.2.3 蒙特卡罗模拟法

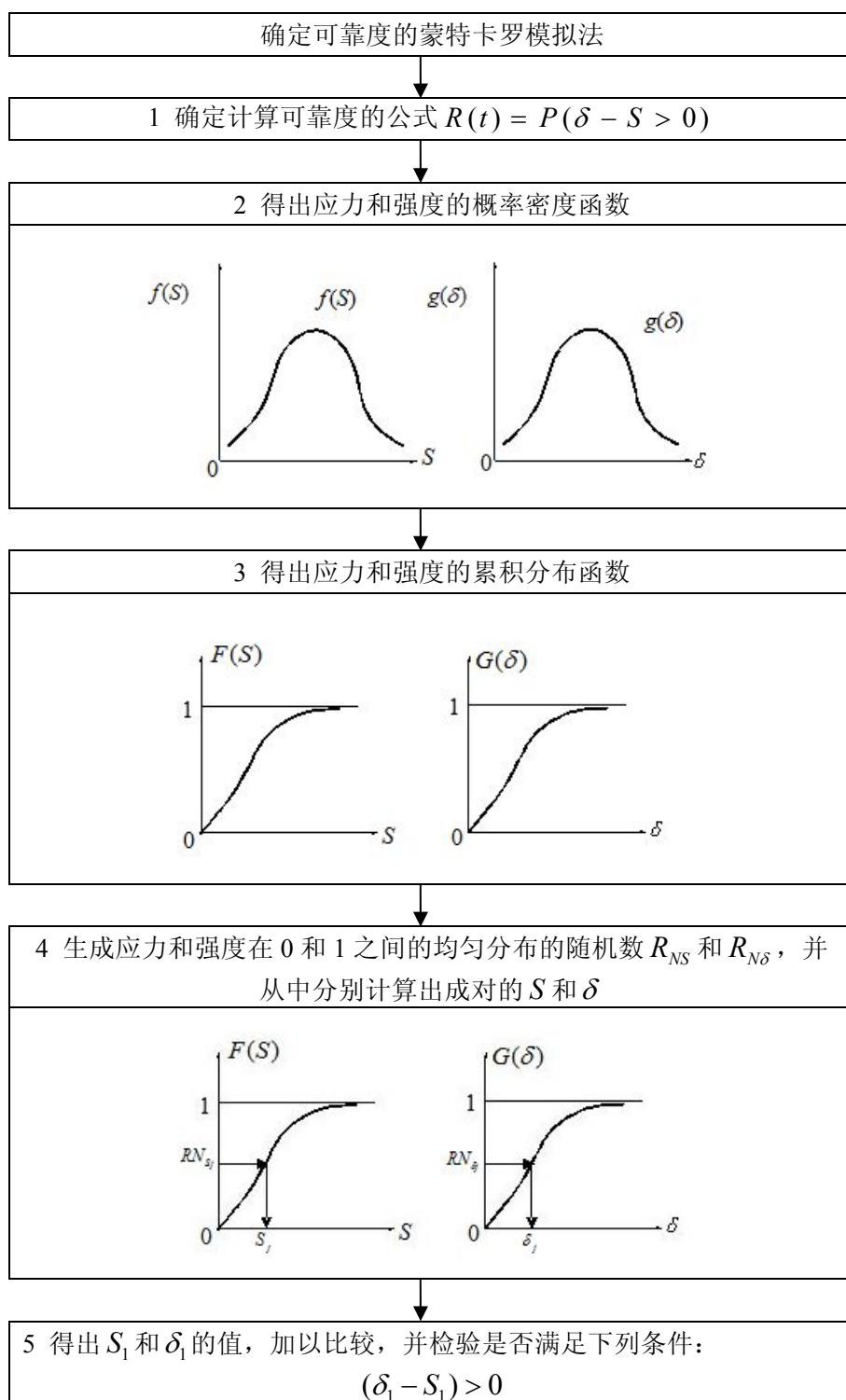
蒙特卡罗模拟法又称为统计模拟试验法, 统计试验法, 随机模拟法, 简称蒙特卡罗法。它是以统计抽样理论为基础、以计算机为计算手段, 通过对有关随机变量的统计抽样试验或随机模拟, 从而估计和描述函数的统计量, 求解工程技术问题近似解的一种数值计算方法。由于其方法简单、便于编制程序, 能保证依概率收敛, 适用于各种分布, 且迅速、经济, 因此在工程中得到广泛应用。

蒙特卡罗模拟法可以用来综合两种不同的分布。因此, 考虑用它来综合应力分布和强度分布。这种方法的实质是从一个分布中随机选取一样本, 并将其与取自另一分布的样本相比较, 然后对比较结果进行统计, 并算出统计概率。这一统计概率就是所求的可靠度。

用蒙特卡罗法计算可靠度的模拟流程如图 2-9 所示。其流程主要包括:

- 1 确定计算可靠度的公式 $R(t) = P(\delta - S > 0)$;
- 2 得出应力和强度的概率密度函数 $f(S)$ 和 $g(\delta)$;
- 3 得出应力和强度的累积分布函数 $F(S)$ 和 $G(\delta)$;
- 4 生成应力和强度在 0 和 1 之间的均匀分布的随机数 R_{NS} 和 $R_{N\delta}$, 并从中分别计算出成对的 S 和 δ ;

- 5 得出 S_1 和 δ_1 的值, 加以比较, 并检验是否满足条件 $(\delta_1 - S_1) > 0$, 如果满足上式, 记住 1; 如果不满足, 记住 0;
- 6 重复 4、5 两步, 最好超过 1000 次;
- 7 得出满足 $(\delta_1 - S_1) > 0$ 的次数, 记为 $N_{(\delta-S)>0}$, 总数 N_T ;
- 8 计算可靠度 $R(t) = \frac{N_{(\delta-S)>0}}{N_T}$ 。



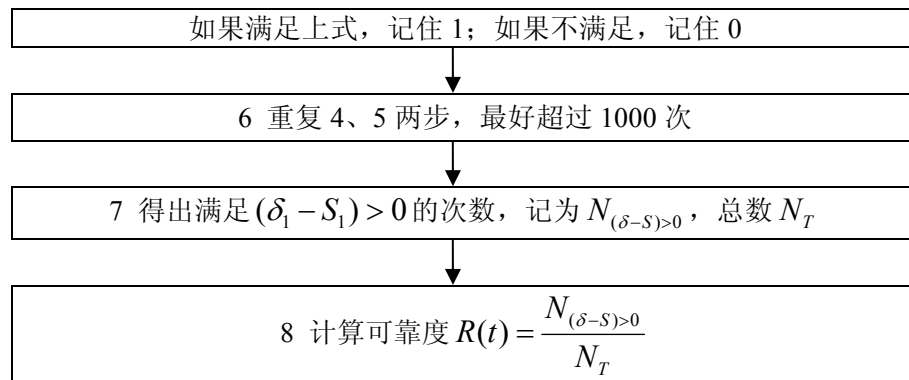


图 2-9 蒙特卡罗法计算可靠度的模拟流程图

Fig. 2-9 Process of the reliability calculated by the Monte Carlo simulation

由以上三种计算方法可知，其中数值积分法和图解法在运用时，首先要已知应力和强度的分布类型，但螺旋锥齿轮由于实验数据少，还不能确定应力和强度的分布，故将在文中采用蒙特卡罗模拟法计算可靠度。

2.3 蒙特卡罗法在 MATLAB 上的实现

根据传统的蒙特卡罗模拟法，若想知道随机变量的分布类型，必须先求得相应累积分布函数函数的反函数，即 $x = F^{-1}(r)$ 。然后再将随机变量 x 代入目标函数求解^[41]。

而 MATLAB 工具箱提供了强大的数据处理功能。仅概率分布方面，就给出了 20 多种概率密度分布和其累加分布函数，以及这些概率分布的随机发生函数。通过随机数发生指令，即可直接产生一定数量的服从特定分布的随机变量，这就省去了求反函数这一步。使程序编写过程大大简化，同时也提高了运算效率。表 2-1 列出了常见分布类型的随机数生成函数的调用指令^{[42]-[43]}。

假设随机变量为 $x_i (i=1,2,\dots,n)$ ， x_i 服从任意分布类型。现有目标函数 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，若要求目标函数的分布类型，则首先要调用随机数生成指令，产生 $m' \times n'$ 的随机变量数组 $x_i(k, l)$ ， $(i=1,2,\dots,n; k=1,2,\dots,m'; l=1,2,\dots,n')$ 。然后领用 MATLAB 中的数组运算指令，将各数组同时代入目标函数进行运算，这样就可以不用使用循环语句，使软件执行效率更高。最后，得到目标函数的结果数组，再用拟合检验指令对数据进行拟合，得出目标函数的分布类型。

表 2-1 常见分布随机数生成函数的调用格式

Tab. 2-1 The calls format of common distribution random number generating function

函数	分布	调用格式
exprnd	指数分布	exprnd(mu, m, n)
lognrnd	对数正态分布	lognrnd(mu, sigma, m, n)
normrnd	正态分布	normrnd(mu, sigma, m, n)
poissrnd	泊松分布	poissrnd(lambda, m, n)
weibrnd	威布尔分布	weibrnd(A, B, m, n)

2.4 本章小结

本章主要介绍了可靠度的计算原理应力-强度干涉理论，以及根据此理论计算可靠度的三种方法，数值积分法，图解法和蒙特卡罗模拟法。其中数值积分法和图解法在运用时，首先要已知应力和强度的分布类型，但螺旋锥齿轮由于实验数据少，还不能确定应力和强度的分布，故将在文中采用蒙特卡罗模拟法计算可靠度。最后，将蒙特卡罗法在 MATLAB 软件上的实现及简化应用做了说明。

第3章 弧齿锥齿轮疲劳强度几何系数的分析

几何系数是用来评价齿轮几何要素对轮齿应力的影响最重要的系数之一^[44]。在强度计算时，各种系数的选取需要查表格或大量的繁琐的计算，尤其是几何系数的选取对强度计算结果影响很大。几何系数的计算也一直是螺旋锥齿轮强度设计的一个瓶颈。为了减小查表或插值的方法对强度计算的影响，为锥齿轮可靠性分析奠定基础。本章就强度几何系数的计算过程进行分析，探究其分布规律^[45]。

3.1 锥齿轮强度标准概述

目前，关于齿轮强度的研究，国内外已有很多成果。其中，美国齿轮制造者协会（AGMA），日本齿轮工业协会（JGMA）以及国际标准化组织（ISO）都制定了强度计算标准。其中 AGMA 标准是从 Gleason 公司的锥齿轮相关技术发展而来的。其具有长期的工程实践基础，在强度计算方法上充分考虑了螺旋锥齿轮设计制造的特点，因而得到了广泛应用^[46-51]。

AGMA 发布的技术出版物一直在实践过程中不断地修订、完善，废止旧的版本。ANSI/AGMA 2003 标准的初稿 A86 是 1980 年 5 月完成的。1985 年 6 月经 AGMA 会员核准，1986 年 5 月 2 日被批准为美国国家标准，但直到 1987 年初才出版。

本文的计算均采用 ANSI/AGMA 2003-B97 标准，为 AGMA 最新标准。此标准的公式建立了展成直齿锥齿轮、零度锥齿轮和弧齿锥齿轮，以及曲齿和螺旋锥齿轮的抗点蚀能力和弯曲强度的统一的计算方法。

本文以某煤矿运输机用齿轮箱中的弧齿锥齿轮为例进行数值计算和分析。该弧齿锥齿轮的主要参数如表 3-1 所示。

表 3-1 弧齿锥齿轮参数

Tab. 3-1 Parameters of spiral bevel gear

基本参数	数值
齿数比	37/14
大端模数/mm	5.4
螺旋角	35°
压力角	20°

基本参数	数值
轴交角	90°
齿宽/mm	35
齿高系数	2.0
齿顶高系数	0.252
顶隙系数	0.125
刀盘半径/mm	152.4
齿轮材料	20CrNiMoA
小轮转速/r/min	1480
传递功率	40KW

3.2 随机变量的分布类型

在顺序加工一批工件时，若误差的大小和方向呈无规律的变化，这类误差称为随机性误差。如毛坯误差的复映、定位误差、夹紧误差、内应力引起的误差、多次调整的误差等都是随机性误差^[52]。

在进行大批量加工时，由于环境、操作等各种因素都是相互独立的，而且没有优势倾向，认为其分布是服从正态分布的。这时的分布曲线称为正态分布曲线，如图 3-1 所示。

从正态分布曲线图上可看出下列特征：

- 1 直线 $x = u$ 为曲线的对称轴，越接近 u 的工件尺寸出现概率越大。
- 2 u 的正偏差和负偏差概率相等。
- 3 曲线与 t 轴所围面积等于 1。

可计算得出， $u \pm \sigma$ 区间的面积占全部总面积的 68.27%； $u \pm 2\sigma$ 区间的面积占全部总面积的 95.45%； $u \pm 3\sigma$ 区间占全部总面积的 99.73%，因此可以认为随机变量的值落在 $u \pm 3\sigma$ 中几乎是一必然事件。通常情况下，把正态分布的这种概率法则叫做“ 3σ 法则”^[29]。

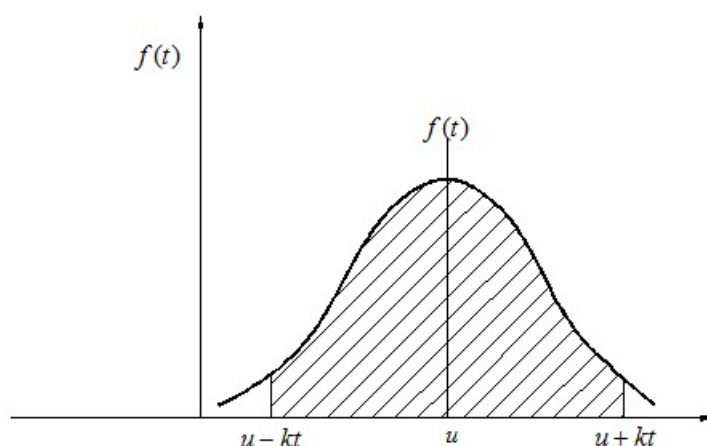


图 3-1 正态分布曲线

Fig. 3-1 Normal distribution curve

随机变量也会因为工作环境等其他因素的影响，服从对数正态分布和威布尔分布等，具体情况应考虑多方面的因素。

由于对齿轮进行大量疲劳破坏实验耗时耗材，目前条件尚不能满足，故实验数据的采集是关键问题。本文利用蒙特卡罗法产生伪随机数，进行模拟分析。

在弧齿锥齿轮接触疲劳和弯曲疲劳的可靠性模型中，影响可靠性的随机变量主要有齿宽 b ，大端端面模数 m_{et} ，法向压力角 α_n 和中点螺旋角 β_m 。它们的概率分布对弧齿锥齿轮可靠性的计算影响很大，现对此分别加以讨论^[53]。

1 齿宽 b

齿轮在加工中，由于加工的诸因素影响，实际加工值不可能等于齿宽的公称尺寸值，存在误差。对于批量生产的齿轮齿宽则存在一公差范围，假设齿宽的公差是 $\pm \Delta b$ （一般 b 服从正态分布），其统计参数为

$$\begin{aligned} u_b &= \bar{b} \\ \sigma_b &= \frac{\Delta b}{3} \end{aligned} \quad (3-1)$$

2 齿轮的大端端面模数模数 m_{et}

齿轮的法向模数 m_{et} 也是一个随机变量，它的数值大小受到加工方法的影响，对于不同精度等级要求的齿轮，给出了不同的精度，即误差范围，若设计精度要求的模数 m_{et} 取值范围为 $m_{et} \pm \Delta m_{et}$ ，那么通过合理的管理及控制技术可以使加工出的模数误差小于 $\pm \Delta m_{et}$ 。由正态分布的“ 3σ ”法则，其统计参数为

$$\begin{aligned} u_{m_{et}} &= \bar{m}_{et} \\ \sigma_{m_{et}} &= \frac{\Delta m_{et}}{3} \end{aligned} \quad (3-2)$$

3 法向压力角 α_n

压力角影响到齿轮设计性能的多个方面。较小的压力角能增加端面重合度，减小轴向、径向分力，增加齿顶和齿槽底部宽度，同时也会增加根切的危险；对于较大的压力角情况则相反。压力角对弯曲强度的影响情况十分复杂。

由于在批量加工过程中，压力角的大小通常会偏向标准值的某一侧，因此对于压力角误差的分布类型，本文做了正态分布假设外，还做了对数正态分布假设。

压力角的公差是 $\pm\Delta\alpha_n$ ，若 α_n 服从正态分布，则其统计参数为

$$\begin{aligned} u_{\alpha_n} &= \bar{\alpha}_n \\ \sigma_{\alpha_n} &= \frac{\Delta\alpha_n}{3} \end{aligned} \quad (3-3)$$

4 中点螺旋角 β_m

螺旋角的误差和压力角有一定的相似之处。因此，也做出了两种假设：正态分布与对数正态分布。

螺旋角的公差是 $\pm\Delta\beta_m$ ，若 β_m 服从正态分布，其统计参数为

$$\begin{aligned} u_{\beta_m} &= \bar{\beta}_m \\ \sigma_{\beta_m} &= \frac{\Delta\beta_m}{3} \end{aligned} \quad (3-4)$$

3.3 接触强度几何系数分析

接触强度几何系数 Z_I 是评价轮齿几何要素对轮齿接触应力的影响。它重点考虑了齿面计算点处的诱导法曲率半径和相邻齿对间的载荷分担对接触应力的影响。

3.3.1 接触强度几何系数中随机变量分布类型的确定

接触强度几何系数的计算公式为

$$Z_I = \frac{g_c \rho_{y0} \cos \beta_m \cos \alpha_n}{bd_{e1} Z_i \varepsilon_{NI}} \frac{m_{mt}}{m_{et}} \quad (3-5)$$

式中， g_c —接触线长度，mm； ρ_{y0} —齿廓诱导法曲率半径，mm； β_m —中点螺旋角； α_n —法向压力角； b —最小齿宽（小轮、大轮齿宽中的较小值），mm； d_{e1} —小轮大端节圆直径，mm； ε_{NI} —载荷分担比； Z_i —低重合度齿轮的惯性系数； m_{mt} —中点端面模数，mm； m_{et} —大端端面模数，mm。

1 接触线长度 g_c 的计算

$$g_c = \frac{bg_{an}g_{\eta l} \cos \beta_{mb}}{g_{\eta}^2} \quad (3-6)$$

其中,

$$g_{an} = g_{an1} + g_{an2} \quad (3-7)$$

其中,

$$g_{an1} = \sqrt{r_{mne1}^2 - r_{mbn1}^2} - r_{mpn1} \sin \alpha_n \quad (3-8)$$

$$g_{an2} = \sqrt{r_{mne2}^2 - r_{mbn2}^2} - r_{mpn2} \sin \alpha_n \quad (3-9)$$

其中,

$$r_{mne1} = r_{mpn1} + h_{am1}, \quad r_{mne2} = r_{mpn2} + h_{am2} \quad (3-10)$$

$$r_{mbn1} = r_{mpn1} \cos \alpha_n, \quad r_{mbn2} = r_{mpn2} \cos \alpha_n \quad (3-11)$$

$$r_{mpn1} = \frac{r_{mpt1}}{\cos^2 \beta_m}, \quad r_{mpn2} = \frac{r_{mpt2}}{\cos^2 \beta_m} \quad (3-12)$$

其中,

$$h_{am1} = m_{mn}(k_{hap} + x_{hm1}), \quad h_{am2} = m_{mn}(k_{hap} + x_{hm2}) \quad (3-13)$$

$$r_{mpt1} = \frac{d_{e1}}{2 \cos \delta_1} \frac{R_m}{R_e}, \quad r_{mpt2} = \frac{d_{e2}}{2 \cos \delta_2} \frac{R_m}{R_e} \quad (3-14)$$

$$\cos \beta_{mb} = \cos \alpha_n \sqrt{\cos^2 \beta_m + \tan^2 \alpha_n} \quad (3-15)$$

其中,

$$m_{mn} = 2R_m \sin \delta_2 \cos \beta_m / z_2 \quad (3-16)$$

$$k_{hap} = \frac{k_d}{2}, \quad x_{hm1} = kd(\frac{1}{2} - c_{ham}) \quad (3-17)$$

$$R_m = R_e - 0.5b, \quad R_e = \frac{d_{e1}}{2 \sin \delta_1}, \quad d_{e1} = m_{et} z_1 \quad (3-18)$$

$$\delta_1 = \arctan\left(\frac{\sin \Sigma}{\cos \Sigma + u}\right), \quad \delta_2 = \Sigma - \delta_1, \quad u = \frac{z_2}{z_1} \quad (3-19)$$

影响 g_c 数值的诸因素均为随机变量, 而且主要受加工精度的影响。根据第一节中分析的 α_n , β_m , m_{et} , b 的分布类型, 可通过 MATLAB 的随机数发生指令, 生成各变量的随机数数组, 再根据数组运算指令, 将各变量的随机数数组代入目标函数 g_c , 即可得到 g_c 的结果数组, 进而计算出统计参数。

2 齿廓相对曲率半径 ρ_{y0} 的计算

$$\rho_{y0} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (3-20)$$

其中,

$$\rho_1 = \rho_{m1} + g_{y0}, \quad \rho_2 = \rho_{m2} - g_{y0} \quad (3-21)$$

其中,

$$\rho_{m1} = \frac{r_{mpt1} \sin \alpha_n}{\cos^2 \beta_{mb}}, \quad \rho_{m2} = \frac{r_{mpt2} \sin \alpha_n}{\cos^2 \beta_{mb}} \quad (3-22)$$

$$g_{y0} = \frac{g_{an}}{2} + \frac{g_{an}^2 y_l \cos^2 \beta_{mb}}{g_\eta^2} + \frac{b g_{an} g_{\eta l} k' \sin \beta_{mb}}{g_\eta^2} - g_{an2} \quad (3-23)$$

其中,

$$g_\eta^2 = g_{an}^2 \cos^4 \beta_{mb} + b^2 \sin^2 \beta_{mb} \quad (3-24)$$

$$y_l = \frac{g_{an}}{2} - p_{mbn}, \quad k' = \frac{z_2 - z_1}{3.2z_2 + 4.0z_1}, \quad g_{\eta l}^2 = g_\eta^2 - 4y_l^2 \quad (3-25)$$

$$p_{mbn} = \frac{R_m}{R_e} P_e \cos \beta_{bm} \cos \alpha_n, \quad P_e = \pi m_{et} \quad (3-26)$$

影响 ρ_{y0} 数值的随机变量主要为 α_n , β_m , m_{et} , b 可参照计算变量 g_c 的方法, 得到 ρ_{y0} 的结果数组, 进而计算出统计参数。

3 惯性系数 Z_i 的计算

惯性系数考虑低重合度的动态负载齿轮作用不平稳性, 由下面公式给出:

当 $\varepsilon_0 < 2.0$, $Z_i = \frac{2.0}{\varepsilon_0}$; 否则 $Z_i = 1.0$ 。

对稳定载荷齿数如车辆驱动轴的差速器齿轮, $Z_i = 1.0$, 甚至当 ε_0 小于 2.0 时, 也取 $Z_i = 1.0$ 。

4 载荷分担比 ε_{NI} 的计算

载荷分担比用于计算所分析的轮齿上承担总载荷的比例, 由下列公式给出:

$$g_{\eta l}^3 = g_{\eta l}^3 + \sum_{k=1}^{k=x} \sqrt{[g_{\eta l}^2 - 4kp_{mbn}(kp_{mbn} + 2y_l)]^3} + \sum_{k=1}^{k=y} \sqrt{[g_{\eta l}^2 - 4kp_{mbn}(kp_{mbn} + 2y_l)]^3} \quad (3-27)$$

以上公式中 k 取从 1 到 x 或 y 的连续正整数, 每个级数项均取实数项 (根号内项为正值), 虚数项 (根号内项为负值) 应忽略。对大多数设计, x 和 y 值不大于 2。

载荷分担比,

$$\varepsilon_{NI} = \frac{g_{\eta I}^3}{g_{\eta I}^{'3}} \tag{3-28}$$

将影响载荷分担比 ε_{NI} 的各变量统计参数代入目标函数式（3-28），即可得到 ε_{NI} 的统计参数。

5 对中点端面模数 m_{mt} 的计算

$$m_{mt} = \frac{R_m}{R_e} m_{et} \tag{3-29}$$

影响 m_{mt} 的随机变量为 m_{et} 。将服从正态分布的 m_{et} 的统计参数代入 m_{mt} 的目标函数式（3-29），即可得到其统计参数。

3.3.2 接触强度几何系数的计算

将影响接触强度几何系数 Z_I 的随机变量 $g_c, \rho_{y0}, \beta_m, \alpha_n, b, d_{e1}, \varepsilon_{NI}, Z_i, m_{mt}, m_{et}$ 的随机数组代入几何系数功能函数式（3-5），即可求出几何系数 Z_I 的结果数组，进而计算出统计参数。

1 计算实例 1——随机变量为正态分布

几何系数中的 4 个随机变量 $\beta_m, \alpha_n, b, m_{et}$ 均取为正态分布，其数值分布如表 3-2 所示。

表 3-2 随机变量分布表

Tab. 3-2 Random variable distribution

变量	分布参数		分布
$\beta_m / ^\circ$	$\mu=35$	$\sigma=0.03$	normal
$\alpha_n / ^\circ$	$\mu=20$	$\sigma=0.03$	normal
b / mm	$\mu=35$	$\sigma=0.05$	normal
m_{et} / mm	$\mu=5.4$	$\sigma=0.05$	normal

在 MATLAB 中将以上随机变量的随机数组代入式（3-5），即可得到接触强度几何系数的结果数组，利用 hist(Z_I)指令做出频率直方图，并用 dfittool 指令进行拟合检验^[54]。共进行三组模拟试验，每组进行 10,000 次随机模拟，所得的数据频率直方图如图 3-2 所示，a)、b)与 c)三组模拟结果非常接近，计算均值都为 0.1068，三组模拟数据标准差接近 2×10^{-4} ，故数据离散范围很小，计算结果可靠。

用三种常见的分布函数（正态分布、对数正态分布、威布尔分布）对所生成的几何系数直方图进行拟合检验，结果如图 3-3 所示。用三种分布拟合后，各自的统计参数如表 3-3 所示。

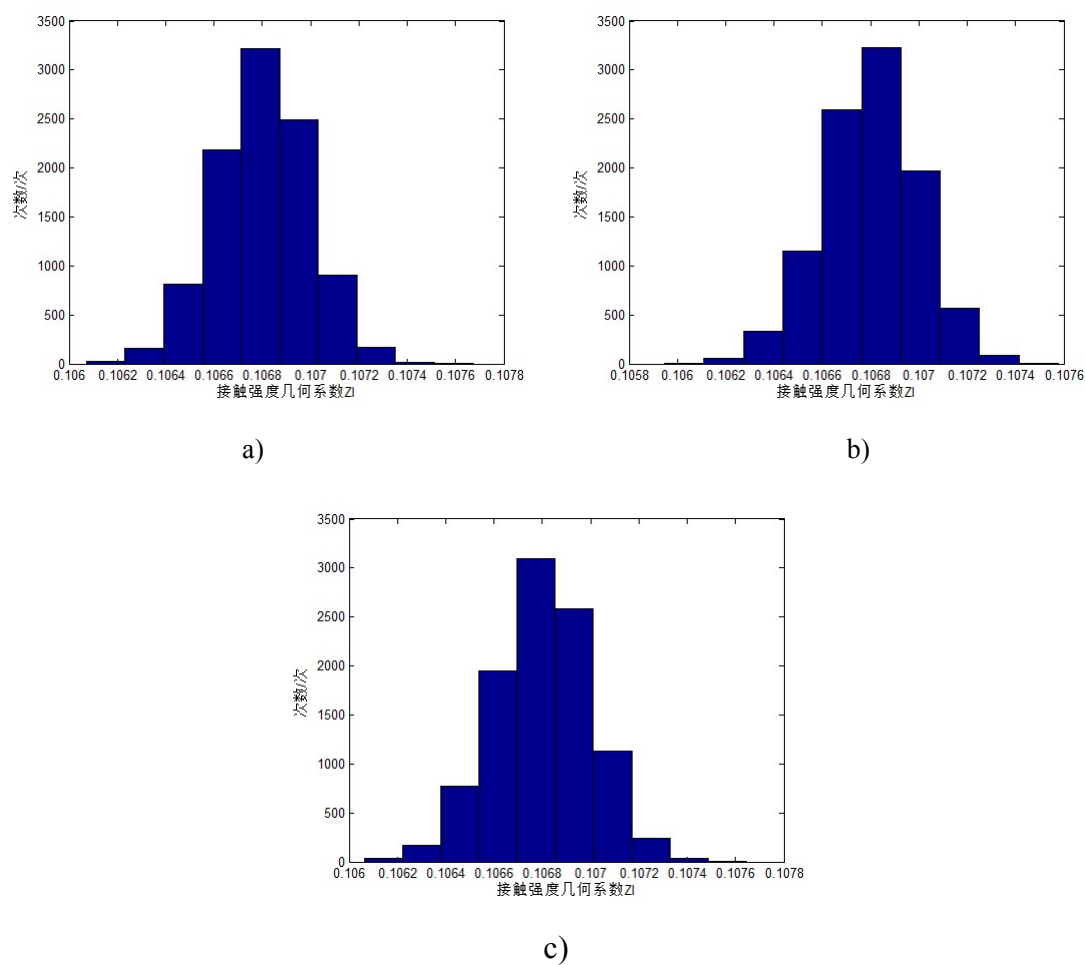


图 3-2 模拟接触强度几何系数 Z_I 的频率直方图

Fig. 3-2 The simulated frequency histogram of the geometrical factor Z_I of contact strength

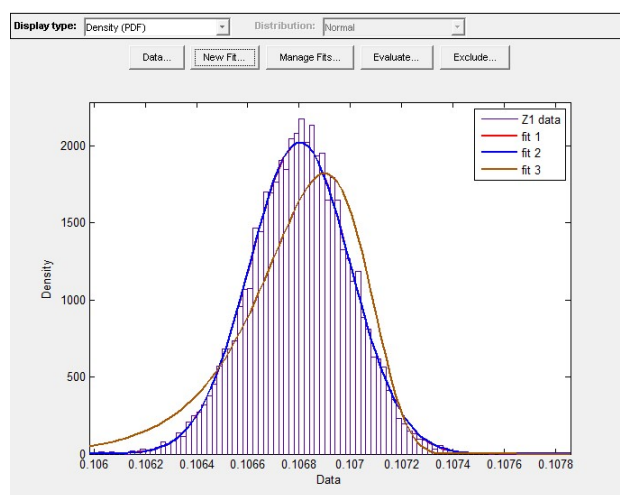


图 3-3 接触强度几何系数分布的拟合检验图

Fig. 3-3 Fitting inspection of contact strength geometric factor

表 3-3 接触强度几何系数分布拟合检验的统计参数

Tab. 3-3 Statistical parameters of fitting test of contact strength geometric factor

分布类型	分布参数		Log likelihood:
正态分布 fit 1	$\mu=0.106803$	$\sigma=0.00019771$	71128.2
对数正态分布 fit 2	$\mu=-2.23677$	$\sigma=0.00184579$	71127.3
威布尔分布 fit 3	$a=0.106901$	$b=529.715$	70259.7

图 3-3 中, fit1 是正态分布曲线, fit2 是对数正态分布曲线, fit3 是威布尔分布曲线。图 3-3 中曲线拟合的置信度为 95%。从图中可看出, 正态分布和对数正态分布两条曲线基本重合, 表 3-3 中的相似度也较高, 威布尔分布曲线的拟合度较差。说明几何系数的分布类型应近似为正态分布或对数正态分布。

2 计算实例 2——随机变量为正态分布或对数正态分布

改变几何系数中随机变量的分布类型, 对结果进行比较。几何系数中的 4 个随机变量 β_m , α_n , b , m_{et} 前 2 个取为对数正态分布, 后 2 个取为正态分布, 其参数分布如表 3-4 所示。拟合检验图如图 3-4 所示。用三种分布拟合后, 各自的统计参数如表 3-5 所示。

表 3-4 随机变量分布表

Tab. 3-4 Random variable distribution

变量	分布参数		分布
$\beta_m / ^\circ$	$\mu=-0.4929$	$\sigma=0.0009$	lognormal
$\alpha_n / ^\circ$	$\mu=-1.0525$	$\sigma=0.0015$	lognormal
b/mm	$\mu=35$	$\sigma=0.05$	normal
m_{et}/mm	$\mu=5.4$	$\sigma=0.05$	normal

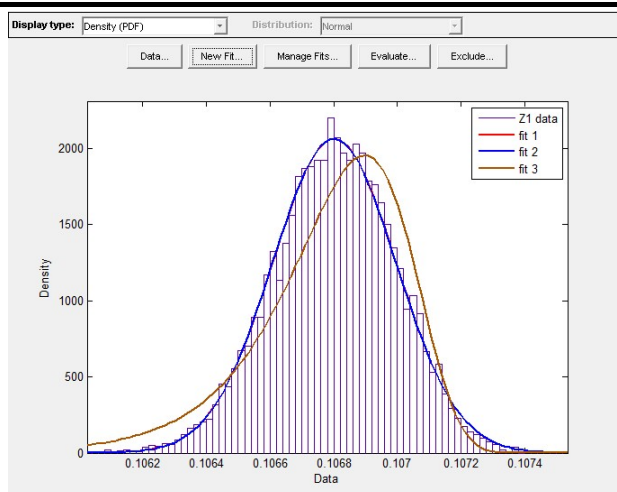


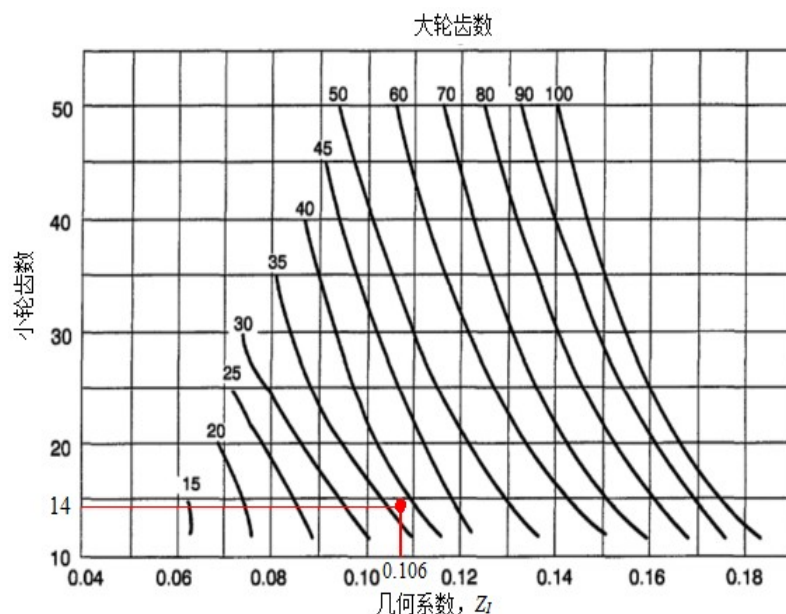
图 3-4 接触强度几何系数分布的拟合检验图

Fig. 3-4 Fitting inspection of contact strength geometric factor

表 3-5 接触强度几何系数分布拟合检验的统计参数

Tab. 3-5 Statistical parameters of fitting test of contact strength geometric factor

分布类型	分布参数		Log likelihood:
正态分布 fit 1	$\mu=0.106802$	$\sigma=0.00019783$	71164.4
对数正态分布 fit 2	$\mu=-2.23678$	$\sigma=0.0018525$	71163.6
威布尔分布 fit 3	$a=0.106897$	$b=567.898$	70394.9

图 3-5 压力角 20° 螺旋角 35° 轴交角 90° 的弧齿锥齿轮接触强度几何系数Figure. 3-5 Spiral bevel gear contact strength coefficient of geometry with pressure angle 20° spiral angle 35° shaft angle 90°

从图 3-4 依然可以看出，正态分布曲线和对数正态分布曲线拟合相似度比较高。对比表 3-3 和 3-5，可看出在公差范围内改变随机变量的分布类型，对结果的影响不大，均值的相对误差不超过 0.001。

图 3-5 为 AGMA 标准中的接触强度几何系数图，可读出当小轮齿数为 14，大轮齿数为 37 时， $Z_t = 0.106$ 。与两次分布假设计算的结果对比，误差均不超过 0.75%，说明蒙特卡罗法模拟结果正确，且因经由随机数发生上万次模拟计算得到，故其精度、可靠性更高。

综上所述，经蒙特卡罗法模拟发现，四个随机变量齿宽、模数、螺旋角、压力角，选用的不同的分布类型对接触强度几何系数的影响不大，接触强度几何系数的分布类型应不外乎正态分布或对数正态分布。蒙特卡罗模拟法具有较高的可信度。

3.4 弯曲强度几何系数分析

弯曲强度几何系数考虑轮齿形状、最危险加载位置，由于齿根圆角几何形状决定的应力集中，相邻齿对间的载荷分担，相配轮齿的齿厚均衡和轮齿纵向修形的有效齿宽，以及一个齿轮齿宽延长的拱承作用，并且包括了轮齿载荷的切向（弯曲）和径向（压缩）两个分量。

3.4.1 弯曲强度几何系数的随机变量分布类型的确定

弯曲强度几何系数的计算公式为

对于小轮：

$$Y_{J1} = \frac{Y_{K1}}{\varepsilon_{NJ} Y_i} \frac{r_{myo1}}{r_{mpt1}} \frac{b_1' m_{mt}}{b m_{et}} \quad (3-30)$$

对于大轮：

$$Y_{J2} = \frac{Y_{K2}}{\varepsilon_{NJ} Y_i} \frac{r_{myo2}}{r_{mpt2}} \frac{b_2' m_{mt}}{b m_{et}} \quad (3-31)$$

式中， Y_{K1} 、 Y_{K2} —包括应力集中系数的小齿轮、大齿轮的齿形系数； ε_{NJ} —载荷分担比； Y_i —低重合度齿轮的惯性系数； b_1' 、 b_2' —小轮、大轮有效齿宽，mm； r_{myo1} 、 r_{myo2} —小轮、大轮中点载荷作用点半径，mm； r_{mpt1} 、 r_{mpt2} —小轮、大轮中点端面节圆半径，mm。

3.4.2 弯曲强度几何系数的计算

与弯曲强度几何系数有关的以上参量是由 m_{et} 、 z_1 、 z_2 、 α_n 、 β_m 、 b 、 Σ 、 k_d 、 k_c 以及小齿轮、大齿轮的刀尖圆角半径 ρ_{ao1} 、 ρ_{ao2} ，和刀盘半径 r_{co} 计算得到的。在本次分析过程中，认为 α_n 、 β_m 、 b 、 r_{co} 服从正态分布。

利用蒙特卡罗法模拟式（3-30）和（3-31）中的小轮和大轮的弯曲强度几何系数概率分布，做出频率直方图并进行拟合检验。选用三种模型进行拟合检验，结果分别如图 3-6，3-7 所示。fit 1 是正态分布曲线，fit 2 是对数正态分布曲线，fit 3 是威布尔分布曲线。三种分布类型拟合后，得到的小轮和大轮弯曲强度几何系数的统计参数分别如表 3-6，表 3-7 所示。从图 3-6、图 3-7 正态分布曲线和对数正态分布曲线拟合良好。从表 3-6、表 3-7 中也可以看出，正态分布曲线和对数正态分布曲线拟合的相似度较高。弯曲强度几何系数同接触强度几何系数分布类型相似，可以认为其符合正态分布或对数正态分布。

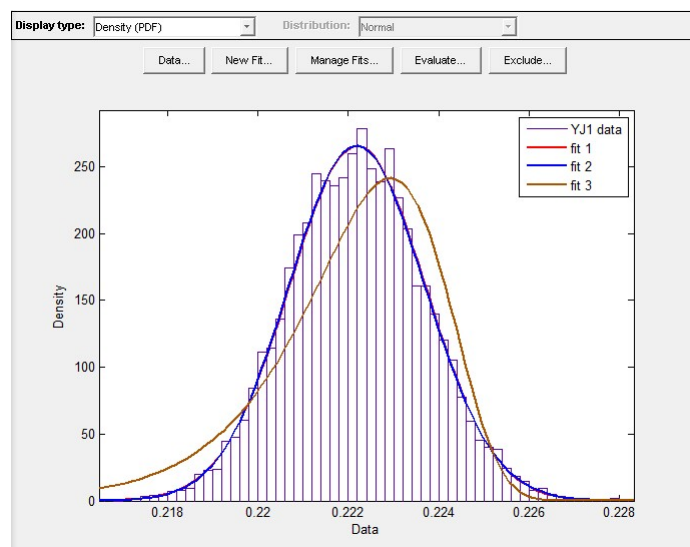


图 3-6 小轮弯曲强度几何系数分布的拟合检验图

Fig. 3-6 Fitting inspection of small wheel bending strength geometric factor

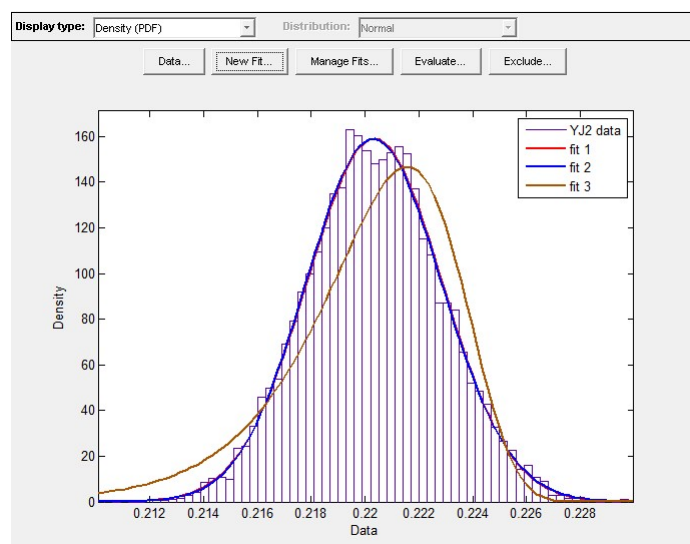


图 3-7 大轮弯曲强度几何系数分布的拟合检验图

Fig. 3-7 Fitting inspection of big wheel bending strength geometric factor

表 3-6 小轮弯曲强度几何系数分布拟合检验的统计参数

Tab. 3-6 Statistical parameters of fitting test of small wheel bending strength geometric factor

Y_{J1}	分布参数		Log likelihood
正态分布 fit 1	$\mu=0.222197$	$\sigma=0.00150113$	50826.5
对数正态分布 fit 2	$\mu=-1.50421$	$\sigma=0.00675504$	50827.9
威布尔分布 fit 3	$a=0.222946$	$b=146.333$	49946.4

表 3-7 大轮弯曲强度几何系数分布拟合检验的统计参数

Tab. 3-7 Statistical parameters of fitting test of big wheel bending strength geometric factor

Y_{J2}	分布参数		Log likelihood:
正态分布 fit 1	$\mu=0.22035$	$\sigma=0.00250856$	45691.6
对数正态分布 fit 2	$\mu=-1.5126$	$\sigma=0.0113841$	45692.5
威布尔分布 fit 3	$a=0.221594$	$b=88.3948$	44912.1

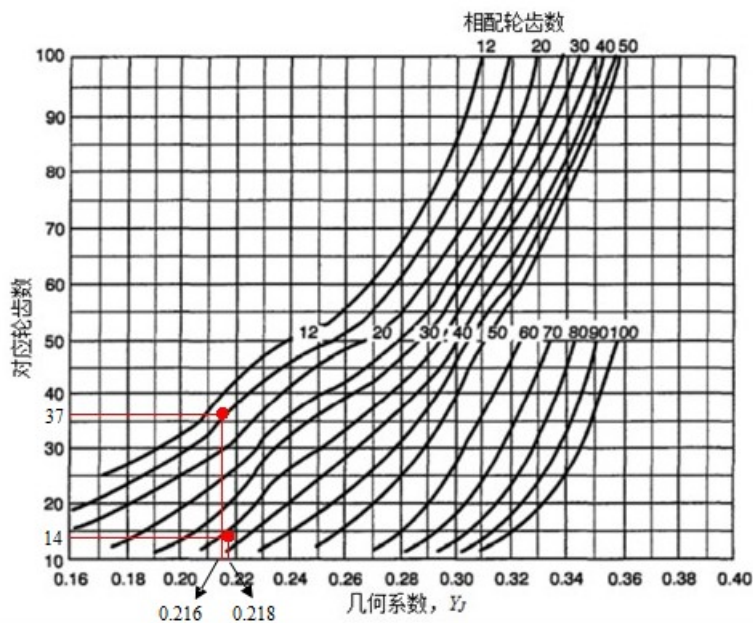


图 3-8 压力角 20° 螺旋角 35° 轴交角 90° 的弧齿锥齿轮弯曲强度几何系数

Fig. 3-8 Spiral bevel gear bending strength coefficient of geometry with pressure angle 20° spiral angle 35° shaft angle 90°

图 3-8 为 AGMA 标准中的弧齿锥齿轮弯曲强度几何系数图，从图中可读出小轮弯曲强度几何系数为 $Y_{J1} = 0.218$ ，大轮弯曲强度几何系数为 $Y_{J2} = 0.216$ 。与蒙特卡罗法模拟出小轮和大轮的均值误差分别为 0.0193，0.0199。

尽管得出的几何系数相差不大，但蒙特卡罗法是经过上万次模拟得到的结果，而且计算中考虑了齿轮制造过程中可能产生的误差，因此，可以认为蒙特卡罗法模拟出的结果更加接近工程实际。而且蒙特卡罗法模拟计算适用于非标准参数设计，其优越性是显而易见的。

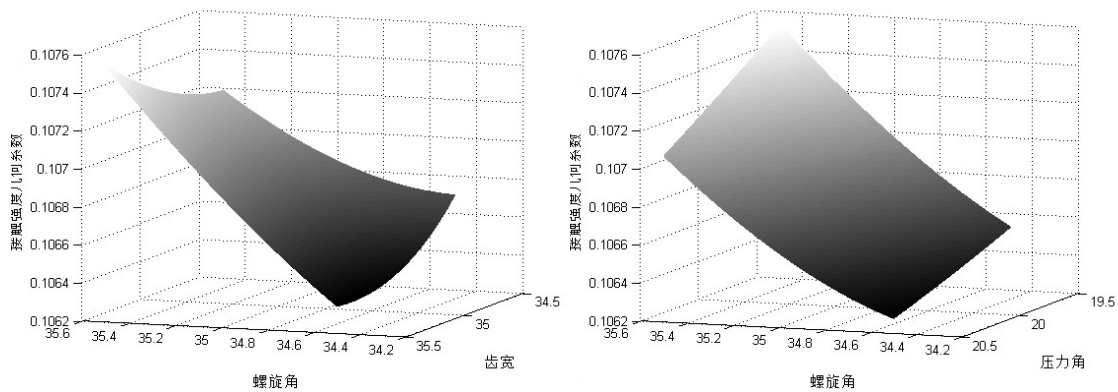
3.5 敏感性分析

由以上分析可知受齿宽、压力角、螺旋角、刀盘半径等的影响，几何系数近似服从正态分布和对数正态分布。下面通过敏感性分析，观察影响几何系数的主要因素，以便对齿轮设计、制造有所指导。

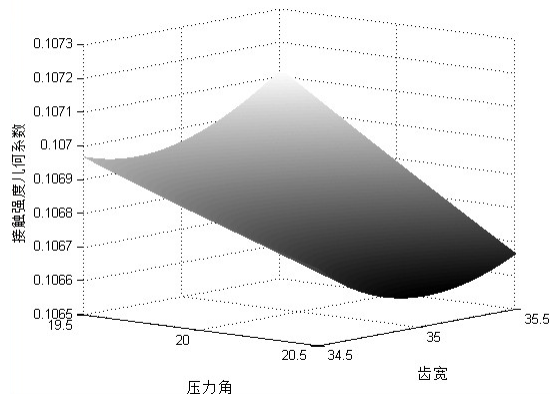
本文以齿宽、压力角、螺旋角任意两参数的变化分析几何系数的变化情况，

得到了比较有代表性的敏感性分析图。

接触强度几何系数随三个参数的变化情况如图 3-9，a)、b)、c)分别表示螺旋角和齿宽、螺旋角和压力角、压力和齿宽对弯曲强度几何系数的影响。由图 3-9 可知，螺旋角对接触强度几何系数的影响较明显，且其随着螺旋角的增大而增大，随压力角的增大而减小，但是齿宽的影响呈现的是非单调趋势。这提醒设计者在齿宽选取上应更加慎重。此外螺旋角、齿宽对接触强度系数的影响具有一定的相关性，并非单调的变化。



a)螺旋角和齿宽对接触强度几何系数的影响 b)螺旋角和压力角对接触强度几何系数的影响



c) 压力角和齿宽对接触强度几何系数的影响

图 3-9 接触强度几何系数随三参数的变化情况

Fig. 3-9 The changes of contact strength geometry coefficient with the change of the three parameters

弯曲强度几何系数随三个参数的变化情况如图 3-10 所示，a)、b)、c)分别表示螺旋角和齿宽、螺旋角和压力角、压力和齿宽对弯曲强度几何系数的影响。从图中可以看出压力角对弯曲强度几何系数的影响更为明显，且其随压力角的增大而增大，随螺旋角的增大而减小，随齿宽的增大而增大。但螺旋角同齿宽对弯曲强度几何系数的影响有一定的相关性，并非单调的变化，这点同对接触强度几何

系数的影响相似。这可能是因为螺旋角、齿宽与轮齿的重合度密切相关的缘故。

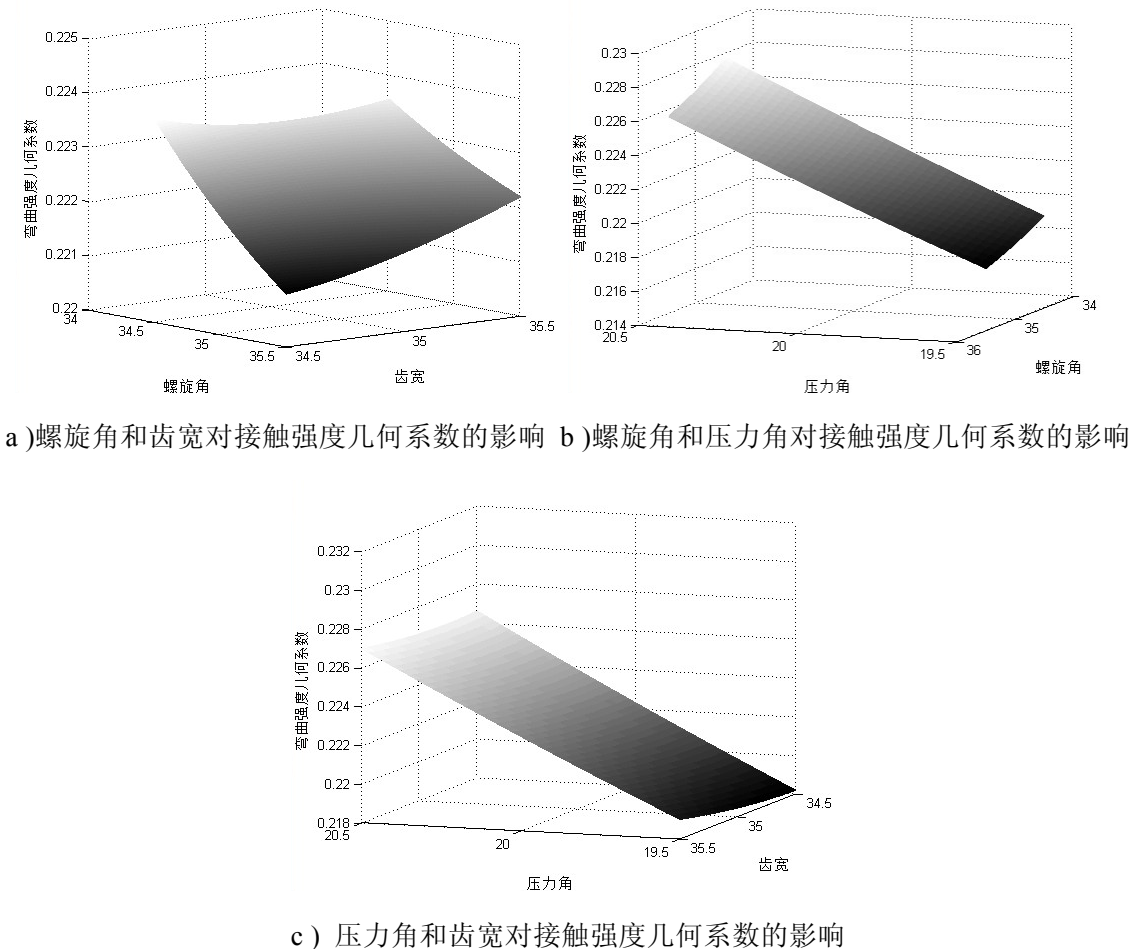


图 3-10 弯曲强度几何系数随任意二参数的变化情况

Fig. 3-10 The changes of bending strength geometry coefficient with the change of any two parameters

从上述分析看，强度几何系数随齿轮几何参数的变化关系较复杂，几何参数对接触和弯曲强度几何系数的影响不同，在几何设计上应综合考虑对接触和弯曲两种几何系数影响的几何因素的相关性，才可能寻找到最佳的设计方案。

3.6 本章小结

用蒙特卡罗法产生伪随机数对弧齿锥齿轮强度几何系数进行了数值模拟，与传统代数法相比精度和可靠性均有所提高。

从模拟结果可以看出，在允许的加工误差范围内，接触与弯曲强度几何系数应近似服从正态分布或对数正态分布，且其几何参数的分布类型对模拟结果影响不大，其均值与无偏差参数计算出的结果一致。有望解决螺旋锥齿轮由齿面多样性、复杂性，导致的强度几何系数的离散和不确定性问题，为今后蒙特卡罗法模

拟齿轮强度分布及可靠性分析提供了更加准确的方法。

通过对影响几何系数的随机变量的敏感性分析可知，随机变量对接触强度和弯曲强度几何系数的影响敏感性不同，且主要几何参数具有一定的相关性。因此通过优化设计的方法，选取合适的几何参数对齿轮强度的改善将会大有补益。

第4章 弧齿锥齿轮疲劳强度的可靠性分析

齿轮的失效形式有多种, 诸如轮齿折断、工作齿面磨损、点蚀、胶合及塑性变形等, 其中工作齿面点蚀和轮齿折断在硬齿面螺旋锥齿轮中最为常见, 这些失效形式与齿轮的接触强度与弯曲强度密切相关。本章就针对齿面接触疲劳强度和齿根弯曲疲劳强度进行可靠性分析。

4.1 接触强度的可靠性分析

4.1.1 接触强度随机变量分布类型的确定

1 基本接触应力公式

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{\frac{2000T_1}{bd_{e1}2Z_I} K_A K_V K_{H\beta} Z_X Z_{XC}} \quad (4-1)$$

式中, σ_H —计算接触应力数值, MPa; Z_E —弹性系数; T_1 —小轮工作转矩, Nm; K_A —过载系数; K_V —动载系数; b —较窄齿轮的齿宽, mm; d_{e1} —小齿轮大端节圆直径, mm; $K_{H\beta}$ 为载荷分布系数; Z_{XC} 为鼓形系数; Z_X 为尺寸常数; Z_I 为抗点蚀几何系数。

2 工作许可接触应力公式

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{H\lim} Z_{NT} Z_W}{S_H K_\theta Z_Z} \quad (4-2)$$

式中, σ_{HP} —工作许可接触应力数值, MPa; $\sigma_{H\lim}$ —许用接触应力, MPa; Z_{NT} —寿命系数; Z_W —抗点蚀硬度比系数; S_H —抗点蚀安全系数; K_θ —温度系数; Z_Z —可靠性系数。

下面就上述式中影响接触应力的各个变量进行分析讨论。

1) 小轮工作转矩 T_1

工作转矩 $T = \frac{9550P}{n_1}$ 是由主动轴所需功率 P 和轴的转速 n_1 决定的, 轴的转速

n_1 受驱动机的转速以及载荷大小、传动是否平稳等的影响。假定驱动机转速服从正态分布。 n_1 公差为 $\pm \Delta n_1$, 则

$$\begin{aligned} u_{n_1} &= \bar{n} \\ \sigma_{n_1} &= \frac{\Delta n_1}{3} \end{aligned} \quad (4-3)$$

将 n_1 的统计参数代入式 (4-3)，则可计算出 T_1 的统计参数。

2) 弹性系数 Z_E

齿轮材料的弹性系数取决于杨氏弹性模量和泊松比。弹性系数 Z_E 由如下公式给出：

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)}} \quad (4-3)$$

式中，对于钢 $Z_E = 190(\text{N/mm}^2)^{0.5}$ ； ν_1 、 ν_2 为小齿轮和大齿轮材料的泊松比（本文中的所定义材料取 0.3）； E_1 、 E_2 为小齿轮、大齿轮材料的杨氏弹性模量 (N/mm^2)。

一般地，合理的生产管理和控制技术可以使材料的弹性模量变异系数 C_E 和泊松比变异系数 C_ν 控制在 $C_E = 3\%$ 和 $C_\nu = 6\%$ 左右，它们的统计参数分别为

$$\begin{aligned} u_E &= \bar{E} & u_\nu &= \bar{\nu} \\ \sigma_E &= \frac{\Delta E}{3} & \sigma_\nu &= \frac{\Delta \nu}{3} \end{aligned} \quad (4-4)$$

式中， \bar{E} 和 $\bar{\nu}$ 一般为材料的名义值，可查表得到。

在已知 E 和 ν 的统计参数后，就可由式 (4-4) 确定 Z_E 的统计参数。

3) 过载系数 K_A

过载系数考虑任何外部因素引起的超过名义载荷的过载情况。 K_A 的精确计算方法是利用载荷谱加以计算的，但一般情况下载荷谱由机器实测得到十分困难，在计算中常常借鉴经验数据。参照表 4-1，文中过载系数 K_A 取 1.25 到 1.50 之间的均匀分布。

表 4-1 过载系数

Tab. 4-1 Overload coefficient

原动机特性	从动机特性			
	均匀	轻微冲击	中等冲击	严重冲击
均匀	1.00	1.25	1.50	≥ 1.75
轻微冲击	1.10	1.35	1.60	≥ 1.85
中等冲击	1.25	1.50	1.75	≥ 2.00
严重冲击	1.50	1.75	2.00	≥ 2.25

表中数据适用于减速传动。如果为增速传动，表中数据增加 $0.01(Z_2/Z_1)^2$

4) 动载系数 K_v

动载系数要考虑与速度和载荷有关的轮齿质量的影响。一般认为，这五种因素（设计因素、制造因素、传动误差、动态响应、共振）都可能影响轮齿内部动态载荷。文中所选齿轮精度等级达到 AGMA 标准 11 级（对应 ISO 标准约 6

级)，而且可以保证精确的安装和充分的润滑条件。故动载系数 K_v 可取 1.0~1.1。文中令其符合均值为 1.05 的正态分布。

5) 小齿轮大端节圆直径 d_{e1}

$$d_{e1} = m_{et} z_1 \quad (4-5)$$

则影响 d_{e1} 的随机变量为 m_{et} ， m_{et} 服从正态分布。则 d_{e1} 也服从正态分布。

6) 载荷分布系数 $K_{H\beta}$

载荷分布系数在应力计算公式中反映载荷沿齿长的非均匀分布状况。载荷分布系数 $K_{H\beta}$ 是由下式确定的：

$$K_{H\beta} = K_{mb} + 5.6 \times 10^{-6} b^2 \quad (4-6)$$

式中， K_{mb} 为载荷分布修正系数，当两轮跨式安装时， $K_{mb} = 1.0$ ；一轮跨式安装时， $K_{mb} = 1.1$ ；两轮悬臂安装时， $K_{mb} = 1.25$ 。

则影响 $K_{H\beta}$ 的随机变量为 b ， b 服从正态分布。则 $K_{H\beta}$ 也服从正态分布。

7) 鼓形系数 Z_{xc}

大多数锥齿轮沿齿长方向都加工成鼓形以补偿安装变形。轻载下滚检时产生局部接触印痕。在设计载荷下，接触印痕应扩展到整个齿面而边缘无印痕集中。考虑到接触印痕的这种变化，引入鼓形系数。鼓形系数 Z_{xc} 取值如下：

$Z_{xc} = 1.5$ 对适当的鼓形齿；

$Z_{xc} = 2.0$ 或更大，对非鼓形齿。

8) 尺寸系数 Z_x

尺寸系数反映材料性能的不均匀性。由于缺乏足够的试验数据来确定锥齿轮抗点蚀尺寸系数 Z_x ，通常根据齿面宽确定。

对于齿宽 $12.7\text{mm} \leq b \leq 114.3\text{mm}$

$$Z_x = 0.00492b + 0.4375 \quad (4-7)$$

当齿宽 $b < 12.7\text{mm}$ 时，尺寸系数取 $Z_x = 0.5$ ；

当齿宽 $b > 114.3\text{mm}$ 时，尺寸系数取 $Z_x = 1.0$ 。

故在 $12.7\text{mm} \leq b \leq 114.3\text{mm}$ 时，尺寸系数 Z_x 可按正态分布计算。

9) 抗点蚀几何系数 Z_I

根据第三章计算出的 Z_I 的统计参数代入计算。

10) 许用接触强度 $\sigma_{H\lim}$

许用接触强度根据材料的机械性能确定。一般认为对数正态分布类型更为可信。本文按对数正态分布。

11) 应力循环系数 Z_{NT}

应力循环系数用来校正齿轮设计寿命内工作循环次数对许用强度的影响。应力循环系数与载荷循环次数的关系为 $Z_{NT} = 3.4822n_L^{-0.0602}$ ，如图 4-1 所示。

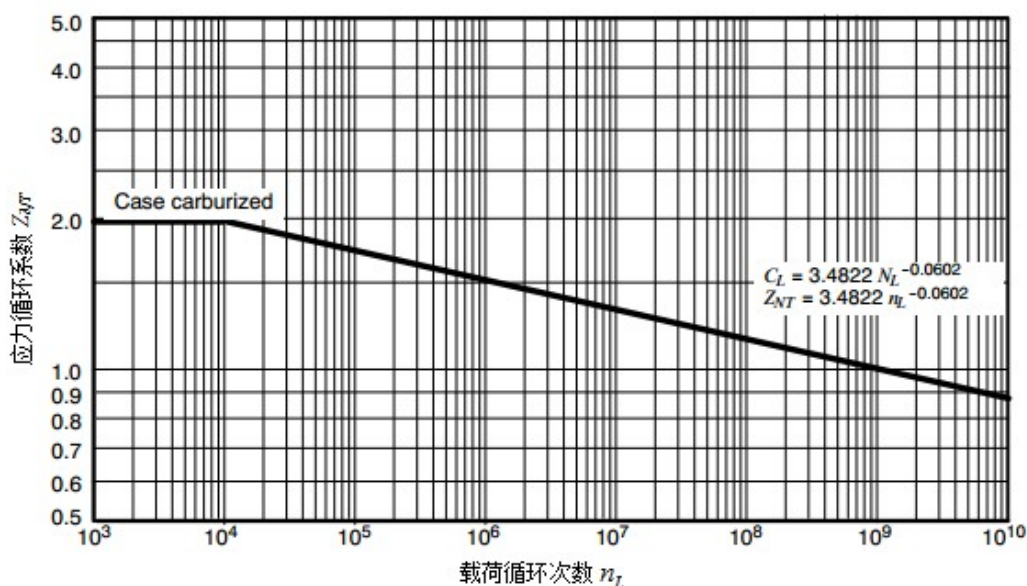


图 4-1 抗点蚀应力循环系数 Z_{NT} (适用于渗碳钢硬齿面锥齿轮)

Fig. 4-1 Pitting stress cycle coefficient

其中载荷循环次数服从对数正态分布，则 Z_{NT} 的分布类型可由计算得出，为正态分布。

12) 抗点蚀安全系数 S_H

抗点蚀安全系数 S_H 取为定值 1.1。

13) 抗点蚀硬度比系数 Z_w

抗点蚀硬度比系数取决于传动比和小齿轮与大齿轮材料的相对硬度。由于文中采用的一对弧齿锥齿轮材料硬度接近相同，取 $Z_w = 1.0$ 定值。

14) 温度系数 K_θ

正常情况下轮体温度在 0~120°C 之间，抗点蚀和弯曲强度的温度系数都取为定值 1.0。

15) 可靠性系数 Z_z

可靠性系数考虑材料试验中材料失效概率分布的影响。文中取为定值 1.0。

16) 抗点蚀几何系数 Z_I

根据第三章计算出的 Z_I 的统计参数，采用正态分布。

17) 许用接触应力 $\sigma_{H\lim}$

许用接触应力根据材料的机械性能确定。文中按照对数正态分布取值。

综上所述，各随机变量的统计参数，如表 4-2 所示，其中小轮转矩 T 、转速 n 、中点螺旋角 β_m 、压力角 α_n 、齿宽 b 、动载系数 K_v 、几何系数 Z_I 服从正态分布，接触许用强度 $\sigma_{H\lim}$ 服从对数正态分布，过载系数 K_A 服从均匀分布，其他参数均取定值。

表 4-2 随机变量的分布表

Tab. 4-2 The distribution and values of random variables

随机变量	分布参数		分布类型
$T_1 / \text{N} \cdot \text{m}$	$\mu=283.92$	$\sigma=5$	normal
$n / \text{r/min}$	$\mu=1480$	$\sigma=10$	normal
$\beta_m / ^\circ$	$\mu=35$	$\sigma=0.03$	normal
$\alpha_n / ^\circ$	$\mu=20$	$\sigma=0.03$	normal
b / mm	$\mu=35$	$\sigma=0.05$	normal
K_V	$\mu=1.05$	$\sigma=0.01$	normal
Z_I	$\mu=0.106803$	$\sigma=0.00019771$	normal
$\sigma_{H\text{lim}} / \text{MPa}$	$\mu=7.16940$	$\sigma=0.0386$	lognormal
K_A	$a=1.25$	$b=1.50$	uniformal

4.1.2 应力和强度分布类型的确定

利用表 4-2 中各变量的统计参数生成随机数组，和温度系数等定值参数共同代入式 (4-1) 和 (4-2) 即可得到 σ_H 和 σ_{HP} 的结果数组。

将结果数组生成频率直方图，并用正态分布、对数正态分布、威布尔分布曲线进行拟合检验，结果如图 4-2。计算所得的分布参数如表 4-3 所示。

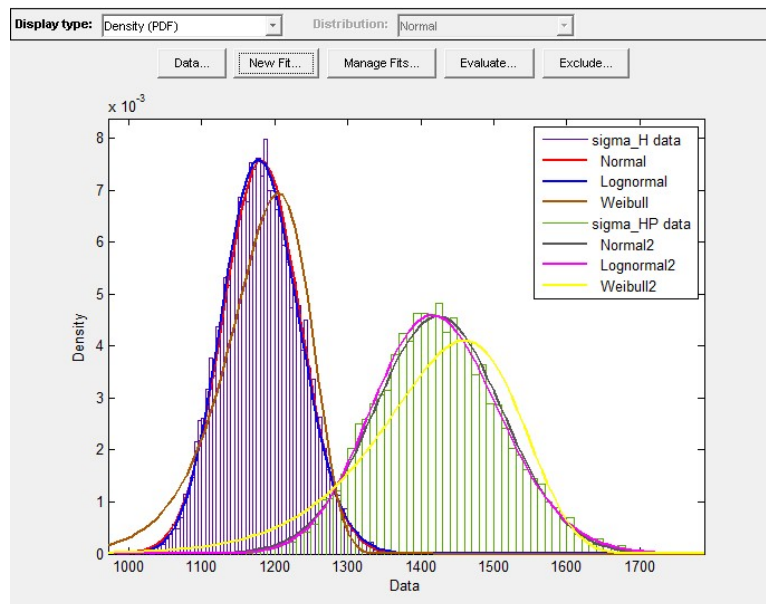


图 4-2 接触应力和强度的分布拟合检验

Fig.4-2 The distribution of contact stress and strength of the fitting test

由图 4-2 可知，左侧分布为接触应力直方图，右侧分布为接触强度直方图，从图中看出，正态分布曲线和对数正态分布曲线拟合度较高，威布尔曲线有较大

偏离。从表 4-3 也可看出，正态分布曲线和和对数正态分布曲线的拟合相似度较高。其中，对数正态分布的拟合度更高。

表 4-3 a) 接触应力分布拟合检验的分布参数

Tab. 4-3 a) The distribution parameters on contact stress distribution fitting inspection

分布参数	分布参数		Log likelihood
正态分布	$\mu=21181.53$	$\sigma=51.7563$	-53654.4
对数正态分布	$\mu=27.0736$	$\sigma=0.0438645$	-53628.4
威布尔分布	$a=1206.38$	$b=23.5995$	-54544.5

表 4-3 b) 许用接触强度分布拟合检验的分布参数

Tab. 4-3 b) The distribution parameters on contact strength distribution fitting inspection

分布参数	分布参数		Log likelihood
正态分布	$\mu=1423.44$	$\sigma=88.3806$	-59005.4
对数正态分布	$\mu=7.2589$	$\sigma=0.0620551$	-58980.6
威布尔分布	$a=1465.4$	$b=16.0784$	-59794.6

4.1.3 可靠度的计算

从图 4-2 中可以看出，接触应力和接触强度的频率直方图发生了干涉，可通过蒙特卡罗法统计出强度值比应力值大的个数 r ，则可计算出齿轮强度的可靠度近似值 $R = r / n$ 。

按照接触应力和接触强度均服从正态分布，依据表 4-3 中计算出的均值和标准差，再根据 $z = -\frac{\bar{\delta} - \bar{S}}{(\sigma_{\delta}^2 + \sigma_S^2)^{1/2}}$ 计算出联结系数 z ，最后通过 $R(t) = \int_z^{\infty} \phi(z) dz$ 计算可靠度。用两种模型计算的可靠度结果列入表 4-4。对比两种模型的计算结果可知，可靠度数值相差很小，且均达到了 0.99 以上。

表 4-4 可靠度计算结果

Tab. 4-4 Reliability calculation results

组数	1	2	3	4	5
蒙特卡罗法	0.9944	0.9929	0.9941	0.9930	0.9934
数值积分法	0.9914	0.9916	0.9914	0.9916	0.9912

4.2 弯曲强度的可靠性分析

4.2.1 影响弯曲强度的随机变量分布类型的确定

ANSI/AGMA 强度评价中的弧齿锥齿轮的弯曲应力计算公式如下:

1 基本弯曲应力公式

$$\sigma_F = \frac{2000T_1}{bd_{e1}} \frac{K_A K_V}{m_{et}} \frac{Y_X K_{H\beta}}{Y_\beta Y_J} \quad (4-8)$$

式中, σ_F —齿根计算弯曲应力数值, MPa; T_1 —小轮工作转矩, Nm; b —较窄齿轮的齿宽, mm; d_{e1} —小齿轮大端节圆直径, mm; K_A —过载系数; K_V —动载系数; m_{et} —大端端面模数, mm; Y_X —尺寸系数; $K_{H\beta}$ —载荷分布系数; Y_β —轮齿纵向曲率系数; Y_J —弯曲强度几何系数。

2 工作许用弯曲强度公式

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{F\lim} Y_{NT}}{S_F K_\theta Y_Z} \quad (4-9)$$

式中, $\sigma_{F\lim}$ —许用弯曲应力, MPa; Y_{NT} —寿命系数; S_F —弯曲强度安全系数; K_θ —温度系数; Y_Z —可靠性系数。

下面就 Y_X , Y_β , Y_J , $\sigma_{F\lim}$ 进行分析。

1) 尺寸系数 Y_X

由于缺乏足够的实验数据来确定锥齿轮弯曲强度尺寸系数 Y_X , 因此其值通常只能根据大端模数确定。

对于大端端面模数 $1.6\text{mm} \leq m_{et} \leq 50\text{mm}$, 齿轮尺寸系数由下式计算:

$$Y_X = 0.4867 + 0.008399m_{et} \quad (4-10)$$

当大端端面模数 $m_{et} < 1.6\text{mm}$ 时, 尺寸系数取 $Y_X = 0.5$ 。

故对于 $1.6\text{mm} \leq m_{et} \leq 50\text{mm}$, Y_X 的结果数组应服从正态分布。

2) 轮齿纵向曲率系数 Y_β

纵向曲率系数 Y_β 取决于螺旋角与轮齿纵向曲率。

纵向曲率系数 Y_β 由下面公式给出:

对弧齿锥齿轮

$$Y_{\beta}=0.211\left(\frac{r_c}{R_m}\right)^q+0.789 \tag{4-11}$$

$$q=\frac{0.279}{\lg(\sin \beta_m)} \tag{4-12}$$

式中， r_c —刀盘半径，mm； R_m —点锥距，mm； β_m —中点螺旋角。

注意：当 Y_{β} 计算值大于 1.15 时，取 Y_{β} =1.15；当 Y_{β} 计算值小于 1.0 时，取 Y_{β} =1.0。

故对于 $1.0 \leq Y_{\beta} \leq 1.15$ 时的分布类型，应由 b ， m_{et} ， β_m ， Σ ， r_c 共同决定的。

3) 弯曲强度几何系数 Y_f

由第三章计算结果直接代入式（4-8）即可求出 σ_F 的结果数组。

4) 许用弯曲应力 $\sigma_{F\lim}$

许用弯曲应力根据材料的机械性能确定。文中按照对数正态分布取值。

综上所述，分析出各随机变量的统计参数，如表 4-5 所示，各变量的分布类型与接触强度各参数的分布相同。

表 4-5 随机变量的分布表
Tab. 4-5 The distribution and values of random variables

随机变量	分布参数		分布类型
$T_1/\text{N}\cdot\text{m}$	$\mu=283.92$	$\sigma=5$	normal
$n/\text{r/min}$	$\mu=1480$	$\sigma=10$	normal
$\beta_m/^\circ$	$\mu=35$	$\sigma=0.03$	normal
$\alpha_n/^\circ$	$\mu=20$	$\sigma=0.03$	normal
b/mm	$\mu=35$	$\sigma=0.05$	normal
K_v	$\mu=1.05$	$\sigma=0.01$	normal
Y_{J1}	$\mu=0.222197$	$\sigma=0.00150113$	normal
$\sigma_{F\lim}/\text{MPa}$	$\mu=5.3210$	$\sigma=0.0741$	lognormal
K_A	$a=1.25$	$b=1.50$	uniformal

4.2.2 应力和强度分布类型的确定

将各变量的随机数组代入式（4-8）和（4-9）即可得到 σ_F 和 σ_{FP} 的结果数组。将所得的结果数组用根据 MATLAB 中的 hist 指令，生成的频率直方图为图 4-3，分别计算出三次模拟的均值和标准差，如表 4-6 所示。

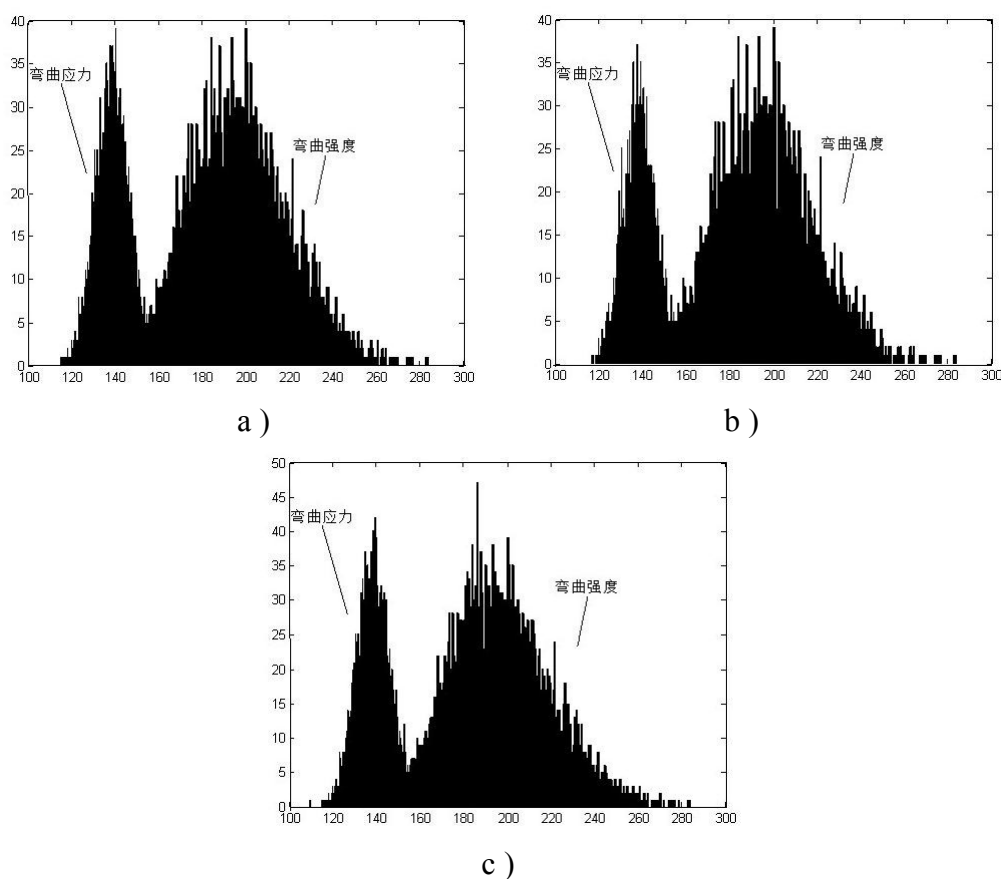


图 4-3 弯曲应力和强度数据频率直方图模拟

Fig. 4-3 Bending stress and the intensity data frequency histogram simulation

表 4-6 弯曲应力和强度的均值和标准差模拟

Table. 4-6 The mean and standard deviation of the bending stress and strength simulation

组数	弯曲应力		弯曲强度	
	均值 μ/MPa	标准差 σ_s	均值 μ/MPa	标准差 σ_s
第一组	138.0065	7.0892	196.3636	20.7723
第二组	138.3138	7.1779	196.6599	21.6562
第三组	138.1853	7.2610	196.1730	20.6863

从图 4-3 中可以看出，图左侧为弯曲应力直方图，右侧为弯曲强度直方图，弯曲应力和强度直方图发生了干涉。从表 4-6 可看出，三组模拟结果相似度很高，通过计算可知均值相对误差不超过 0.005。

用 dfittool 指令对弯曲应力和弯曲强度直方图分别进行正态分布、对数正态分布、威布尔分布的拟合检验，如图 4-4 所示。并分别计算出分布参数，如表 4-7。

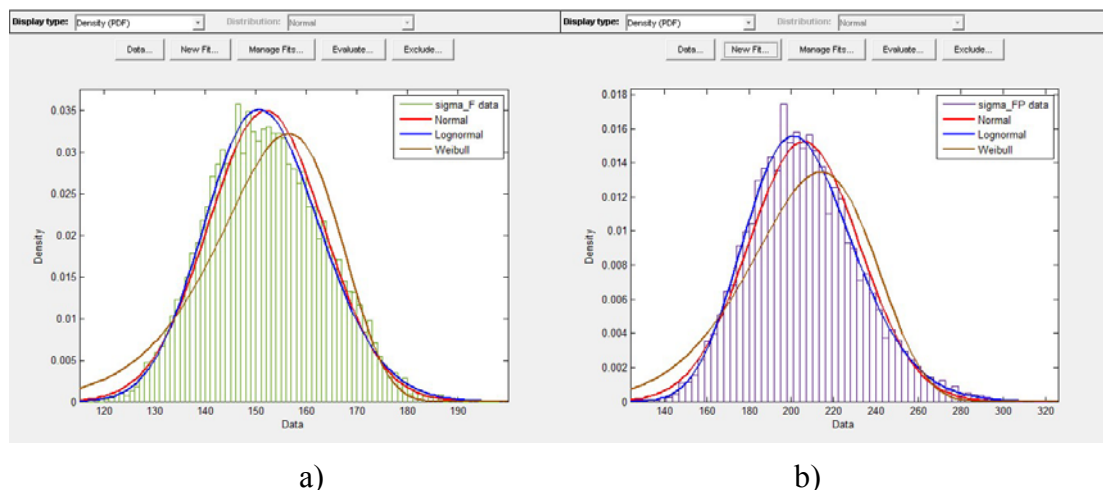


图 4-4 弯曲应力和弯曲强度分布的拟合检验

Fig.4-4 Bending stress and bending strength distribution fitting inspection

表 4-7 a) 弯曲应力拟合检验的分布参数

Table 4-7 a) Distribution parameter of bending stress fitting inspection

分布参数		分布参数		Log likelihood
正态分布	$\mu=151.968$	$\sigma=11.3969$		--38522.3
对数正态分布	$\mu=5.02086$	$\sigma=0.075018$		-38496.9
威布尔分布	$a=157.312$	$b=13.7723$		-39129.1

表 4-7 b) 弯曲强度拟合检验的分布参数

Table. 4-7 b) Distribution parameter of bending strength fitting inspection

组数	分布参数		Log likelihood
正态分布	$\mu=205.95$	$\sigma=26.169$	-46834.7
对数正态分布	$\mu=5.31964$	$\sigma=0.126394$	-46701.8
威布尔分布	$a=217.675$	$b=7.90094$	-47532.9

从图 4-4 及表 4-7 中的相似度可看出，对于三种分布拟合的结果，依然是正态分布和对数正态分布曲线的拟合度较高。对于弯曲应力，正态分布曲线和对数正态分布曲线的相似度极高，但对于弯曲强度，两曲线已发生明显的偏离，对数正态分布曲线的拟合度更高。

4.2.3 可靠度的计算

从图 4-3 中可以看出，三组计算弯曲应力和弯曲强度的频率直方图都发生了干涉，可通过蒙特卡罗统计强度比应力大的个数 r ，则可计算出齿轮强度的可靠度近似值 $R = r / n^{[35]}$ 。

按照弯曲应力和弯曲强度均近似服从对数正态分布，利用表 4-7 计算出的均值和标准差，再根据 $z = -\frac{\overline{\lg \delta} - \overline{\lg S}}{(\sigma^2_{\lg \delta} + \sigma^2_{\lg S})^{1/2}}$ 计算出联结系数 z ，最后通过 $R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) dz$ 计算可靠度^[36]。用两种模型进行可靠度的计算结果如表 4-8 所示。对比两种模型的计算结果可知，可靠度数值相差很小，均达到了 0.99 以上。

表 4-8 可靠度计算结果

Tab. 4-8 Reliability calculation results

组数	1	2	3	4	5
蒙特卡罗法	0.9936	0.9922	0.9925	0.9935	0.9934
数值积分法	0.9923	0.9918	0.9921	0.9921	0.9923

4.3 敏感性分析

敏感性分析原指某个或某几个敏感性较强的因素对规划和决策过程中的工程项目的经济效果带来的影响及其影响程度的分析。这种理论同样可以用于机械行业中零件设计。而且对随机参数进行敏感性分析是可靠性研究的一个重要方面。

这里，主要研究研究弯曲应力均值和标准差对可靠度的影响以及许用弯曲应力对弯曲强度分布以及可靠度的影响。

4.3.1 弯曲应力均值和标准差对可靠度的影响

图 4-5 给出了可靠度 R 随弯曲应力的均值和标准差的变化情况。

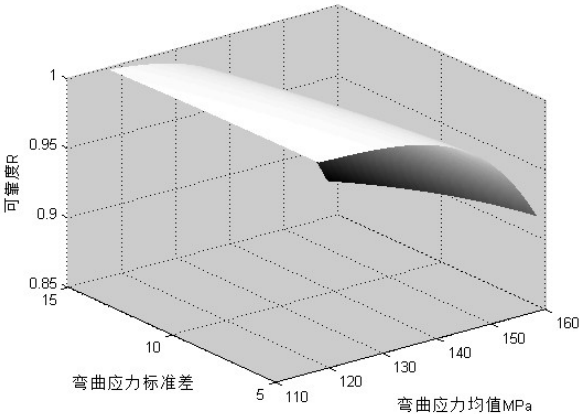


图 4-5 可靠度随弯曲应力均值和标准差之间的变化

Figure. 4-5 Reliability along with the change of bending stress between the mean and standard deviation

从图 4-5 中可以看出，在一定的范围内，弯曲疲劳可靠度随应力标准差的变化较小，随应力均值的变化明显。因此，在选择齿轮材料时，要选择材料疲劳极限应力较高的。

4.3.2 材料许用弯曲应力对弯曲强度分布以及可靠度的影响

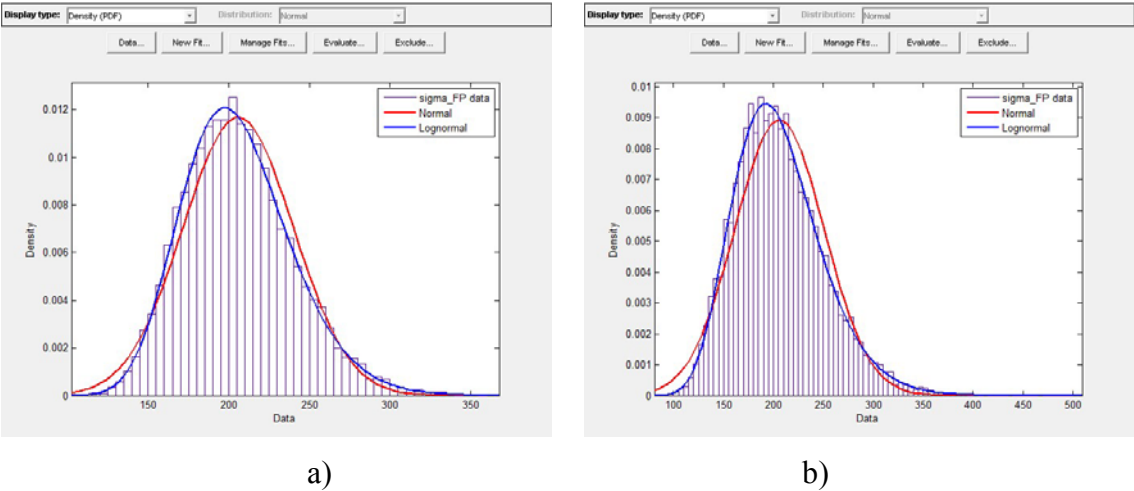
由图 4-5 拟合分布检验图中可以看出正态分布曲线和对数正态分布曲线出现了明显的偏离。现在分析这种偏离的原因。

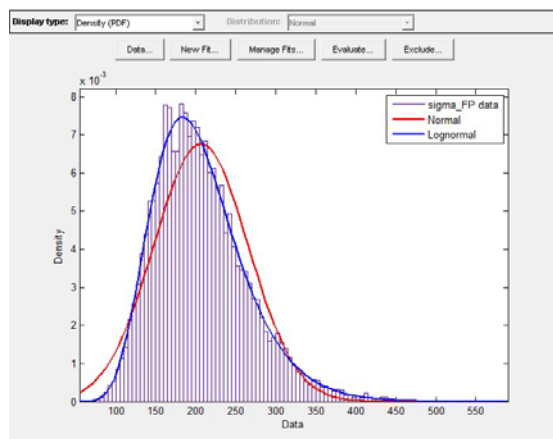
由第三章对几何系数的分布分析可知，当随机变量在误差范围内取值时，随机变量分布类型的变化对几何系数分布的影响并不明显。

对影响弯曲强度的随机变量分析，由于安全系数，温度系数，可靠性系数均取的定值，且寿命系数经计算服从正态分布，又因为材料许用强度服从对数正态分布，故影响这种偏离的因素是材料许用弯曲应力。为了易于观察，取三组不同的材料许用弯曲应力分布参数，计算弯曲强度值。对这三组弯曲强度分布进行拟合检验如图 4-6 所示，并计算分布参数及可靠度，如表 4-9 所示。

可以看出随着材料许用弯曲应力参数中标准差的变大，正态分布和对数正态分布的拟合曲线的标准差都发生了变化，且都呈增大趋势，与此同时，可靠度则呈下降趋势。

说明，在用蒙特卡罗法生成伪随机数进行可靠性分析时，如果对随机变量参数的选取根据实际情况控制在一定范围内，那么计算结果将于实际相符。





c)

图 4-6 材料许用弯曲应力的分布参数变化对弯曲强度分布的影响

Fig. 4-6 The influence on the bending strength distribution with the change of distribution parameters of material allowable bending stress

表 4-9 拟合检验的分布参数和可靠度

Tab. 4-9 Distribution parameters of fitting test and the reliability

组数	材料许用弯曲应力参数		正态分布参数		对数正态分布参数		可靠度
	μ	σ	μ	σ	μ	σ	
1	5.30	0.1502	205.211	34.8835	5.30979	0.168787	0.9426
2	5.30	0.2060	205.945	45.4643	5.30389	0.217737	0.8918
3	5.30	0.2695	206.721	59.5038	5.30168	0.281495	0.8249

4.4 产品应用

本文所设计的锥齿轮为煤矿运输机配套的 44kw 减速器的主减速弧齿锥齿轮。减速器整机如图 4-7 所示。设计按照《刮板输送机用减速器》MT/T148-1997、煤矿用带式输送机减速器技术条件》MT/T681-1997 执行。

减速器的主要设计条件如下：

额定功率：44 千瓦；

输入轴转速： ≤ 1500 转/分，电机输入为主，原动机工作平稳，从动机中等冲击；

减速比： 25 ± 0.5 ；

工作寿命：5 年，其中满载工作时间 1000 小时（试验）。

目前共生产 6 台样机，已完成一年中试，锥齿轮工作性能可靠。且没有任何部件有发生失效的趋势。



图 4-7 煤矿运输机配套的减速器整机

Fig. 4-7 The reducer machine matching with the coal conveyer

4.5 本章小结

本章利用蒙特卡罗法对弧齿锥齿轮进行了应力强度可靠性分析研究，克服了传统齿轮可靠性设计中寿命数据不足的问题。

根据所选取的实例模拟出了应力和强度数组和分布规律，通过统计法和数值积分计算出的可靠度值相差很小，且可靠度均大于 0.99。

通过对影响弯曲应力的分布参数进行敏感性分析，可知应力均值对弯曲疲劳可靠度的影响较大。

通过对影响弯曲强度的随机变量进行分析，可知材料许用强度对强度的分布类型影响较大，且在选用随机变量的分布参数时要保证随机变量的取值范围在误差范围内。

第5章 齿轮疲劳寿命的灰色 GM(1, 1)模型

由于零件的可靠性可以从强度和寿命两方面判别。在前述章节中，对弧齿锥齿轮强度进行了蒙特卡罗模拟，得出了其分布类型和可靠度。但对于数据较少的疲劳寿命数据如何进行分析，仍然是齿轮强度分析中需要探讨的问题。尤其是螺旋锥齿轮所进行的疲劳强度试验极少，所能获取的寿命数据极其匮乏。这是关于乏信息评价中所应用的飞统计学原理。在乏信息评价中的灰色理论则可以对小样本实验数据进行分析。本章引入了灰色 GM(1, 1)模型，对齿轮的小样本疲劳寿命数据进行了预测评价，探讨了将灰色系统理论用于齿轮疲劳寿命试验数据预测的可行^[55]。

5.1 灰色模型

齿轮的疲劳寿命是一个随机变量，工程上通常假设它服从三参数威布尔分布或混合威布尔分布，其分布参数可利用齿轮可靠性试验数据来估计。但需要通过较多的样本试验。随机分布参数的点估计有图解法和解析法。图解法简单直观，但精度不高；解析法的计算烦琐，但工作量较大。将灰色理论中的灰色预测模型引入可靠性工程领域，将可靠性寿命试验系统看成是一个含未知信息的灰色系统，将试验数据看成灰色变量。寿命试验数据由小到大排列并进行一次累加生成处理后，所得数据列将呈现指数变化规律，就可采用灰色预测 GM(1, 1)模型来拟合和预测齿轮的寿命试验数据。

GM(1, 1)建模的关键在于小样本数据累加生成的新序列呈近似指数规律，或称灰指数律。GM(1, 1)建模过程和机理如下：

记原始数据序列有小到达 $X^{(0)}$ 为非负序列：

$$X^{(0)} = [x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n)]$$

其中，

$$x^{(0)}(k) \geq 0, (k = 1, 2, \dots, n)$$

其相应的累加生成数据序列为 $X^{(1)}$

$$X^{(1)} = [x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), x^{(1)}(3), \dots, x^{(1)}(n)] \quad (5-1)$$

其中，

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列

$$Z^{(1)} = [z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n)] \quad (5-2)$$

其中,

$$Z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1), \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

称 $x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$ 为 GM(1, 1) 模型, 其中 a, b 是需要通过建模求解的参数。若 $\hat{a} = [a, b]^T$ 为参数列, 且

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \dots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \dots & \dots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$$

则求微分方程 $x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$ 的最小二乘估计系数列, 满足

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (5-3)$$

称 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 为灰微分方程 $x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$ 的白化方程, 也叫影子方程。

如上所述, 则有

1 白化方程 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 的解或称时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(t) = (x^{(1)}(0) - \frac{b}{a})e^{-at} + \frac{b}{a} \quad (5-4)$$

2 GM(1,1) 灰微分方程 $x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$ 的时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = (x^{(1)}(0) - \frac{b}{a})e^{-ak} + \frac{b}{a}, \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (5-5)$$

3 取 $x^{(1)}(0) = x^{(0)}(1)$, 则

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = (x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-ak} + \frac{b}{a}, \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (5-6)$$

4 还原值

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = (\hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)), \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (5-7)$$

5.2 应用实例

5.2.1 应用实例一

某车桥锥齿轮的疲劳寿命试验。在特定的载荷作用下, 5 个试件的疲劳寿命的应力循环次数分别为 26.26, 20.01, 30.64, 23.53, 28.77 (单位: 10^4 次)。由此

建立 GM(1, 1)模型，并检验。

1 建立 GM(1, 1)模型

由试验数据有小到达排序得原始数据列

$$X^0 = [20.01, 23.53, 26.26, 28.77, 30.64]$$

经式 (5-2)、(5-3) 计算确定白化方程

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} - 0.0866x^{(1)} = 21.0937 \quad (5-8)$$

利用式 (5-4)、(5-5) 可得时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 263.4604e^{0.0866k} - 243.4504 \quad (5-9)$$

由式 (5-6) 求 $X^{(1)}$ 的模拟值

$$\hat{X}^{(1)} = [\hat{x}^{(1)}(1), \hat{x}^{(1)}(2), \hat{x}^{(1)}(3), \hat{x}^{(1)}(4), \hat{x}^{(1)}(5)] \quad (5-10)$$

由式 (5-10) 可得: $\hat{X}^{(1)} = [20.0100, 43.8575, 69.8637, 98.2238, 129.1510]$

还原出 $X^{(0)}$ 的模拟值, 由式 (5-7) 得

$$\hat{X}^{(0)} = [\hat{x}^{(0)}(1), \hat{x}^{(0)}(2), \hat{x}^{(0)}(3), \hat{x}^{(0)}(4), \hat{x}^{(0)}(5)] \quad (5-11)$$

由式 (5-11) 可得: $\hat{X}^{(0)} = [20.0100, 23.8475, 26.0061, 28.3601, 30.9272]$

2 误差检验

由 $\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$ 得

$$\varepsilon(k) = [\varepsilon(1), \varepsilon(2), \varepsilon(3), \varepsilon(4)] \quad (5-12)$$

由式 (5-12) 可得: $\varepsilon(k) = [-0.3175, 0.2539, 0.4099, 0.2872]$

残差平方和

$$s = \varepsilon^T \varepsilon \quad (5-13)$$

由式 (5-13) 可得: $s = 0.4158$

平均相对误差

$$\Delta = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \Delta(k) \quad (5-14)$$

式中,

$$\Delta(k) = \left| \frac{\varepsilon(k)}{x^{(0)}(k)} \right| = [\Delta(1), \Delta(2), \Delta(3), \Delta(4)] \quad (5-15)$$

由式 (5-15) 可得: $\Delta(k) = [1.3495\%, 0.9668\%, 1.4247\%, 0.9373\%]$

由式 (5-14) 可得: $\Delta = 1.1695\%$

计算原始数据序列 X 同预测数据序列 \hat{X} 的灰色关联度:

$$\varepsilon = \frac{1 + |S| + |\hat{S}|}{1 + |S| + |\hat{S}| + |\hat{S} - S|} \quad (5-16)$$

式中,

$$|S| = \left| \sum_{k=2}^4 [x(k) - x(1)] + \frac{1}{2} [x(5) - x(1)] \right|$$

$$|\hat{S}| = \left| \sum_{k=2}^4 [\hat{x}(k) - \hat{x}(1)] + \frac{1}{2} [\hat{x}(5) - \hat{x}(1)] \right|$$

由式 (5-16) 可得: $\varepsilon = 0.9958 > 0.90$

从两组数据序列的灰色关联度来看, 精度远超一级, 因此可以用 GM(1,1)模型:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(1)}(k+1) &= 263.4604 \cdot e^{0.0866k} - 243.4504 \\ \hat{x}^{(0)}(k+1) &= \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) \end{aligned} \quad (5-17a)$$

或者写作

$$\dot{x}^{(1)}(k) = 20.051578 e^{0.0866k} \quad (5-17b)$$

进行该车桥锥齿轮疲劳寿命预测。计算结果如表 5-1 所示。

表 5-1 实验数据分析一 (寿命循环次数 $\times 10^4$)

Tab. 5-1 Experiment data analysis

序列	实验数据	GM(1,1)模型		误差检验	
		5 数据	3 数据	平均相对误差	灰色关联度
1	20.01	20.0100	21.0100		
2	23.53	23.8475	23.5051	1.1695% (5 数据)	0.9958 (5 数据)
3	26.26	26.0061	26.2293		
4	28.77	28.3601	29.2693	4.1675% (3 数据)	0.9923 (3 数据)
5	30.64	30.9272	32.6615		

如果利用前 3 个数据建立灰色 GM(1,1)模型

$$\dot{x}^{(1)}(k) = 18.8761 \cdot e^{0.10966k} \quad (5-13)$$

预测出后两个的数据为 29.2693、32.6615 与原始数据 28.77、30.64 的相对误差为 1.735%、6.6%, 灰色关联度仍然达到 0.99 以上, 结果也相当精确。

5.2.2 应用实例二

利用上述灰色理论对一种材料为 20CrNi2Mo 的圆柱齿轮的疲劳试验数据进

行分析，数据来源于北京科技大学朱孝录教授所进行的在硬齿面齿轮技术的研究。其中接触疲劳试验寿命的两组数据如表 5-2 所示。

表 5-2 接触疲劳试验寿命数据（寿命循环次数 $\times 10^6$ ）

Tab. 5-2 The life data of contact fatigue test

序列		1	2	3	4	5
应力水平	2077	1.83	2.19	3.23	4.10	6.40
/MPa	1968	5.01	7.91	8.4	10.4	11.1

采用实例一中方法，对以上两组数据建立灰色 GM(1,1)模型并进行疲劳寿命预测，计算结果分别如表 5-3 和 5-4 所示。从表 5-3 和 5-4 中可以看出，在对 5 个数据进行分析时，原始数据与预测数据的灰色关联度达到 98%以上，精度远超一级。利用前三个数据建立灰色 GM(1,1)模型，预测出的数据平均相对误差分别为 5.8533%和 7.2525%，灰色关联度也达到了 90%以上。

表 5-3 实验数据分析二（寿命循环次数 $\times 10^6$ ）

Tab. 5-3 Experiment data analysis

序列	实验数据	GM(1,1)模型		误差检验	
		5 数据	3 数据	平均相对误差	灰色关联度
1	1.83	1.8300	1.8300		
2	2.19	2.1115	2.1573	4.8941%	0.9808
3	3.23	3.0082	3.1665	(5 数据)	(5 数据)
4	4.10	4.2858	4.6478	5.8533%	0.9530
5	6.40	6.1060	6.8220	(3 数据)	(3 数据)

表 5-4 实验数据分析三（寿命循环次数 $\times 10^6$ ）

Tab. 5-4 Experiment data analysis

序列	实验数据	GM(1,1)模型		误差检验	
		5 数据	3 数据	平均相对误差	灰色关联度
1	5.01	5.0100	5.0100		
2	7.91	7.7809	7.9075	2.9932%	0.9959
3	8.4	8.7947	8.3972	(5 数据)	(5 数据)
4	10.4	9.9407	8.9173	7.2525%	0.9078
5	11.1	11.2360	9.4695	(3 数据)	(3 数据)

结果表明，用原始试验数据建立 GM(1,1)模型可以预测圆柱齿轮或锥齿轮的疲劳寿命试验数据，可以得到较精确的预测数据序列。即使原始数据少至 3 个，

GM(1,1)模型的预测结果也相当精确。从而为齿轮疲劳寿命分析奠定了基础。

故可以用本章提出的灰色建模方法，预测齿轮的疲劳寿命。

5.3 本章小结

应用灰色系统理论建立了齿轮疲劳寿命 GM(1,1)模型，通过残差检验，得到其灰色系统预测序列，拟合精度好，预测结果可靠。利用灰色系统进行预测的最大优点是：数学模型简单易于建立，试验数据少，采用该方法可缩短齿轮疲劳试验时间，节约疲劳寿命试验费用，是一个较有研究价值的方法。因此，可以将其用于齿轮疲劳寿命的预测，为可靠度计算提供新的方法。

第6章 结论与展望

6.1 结论

本文以螺旋锥齿轮为研究对象，探索了基于蒙特卡罗法的弧齿锥齿轮疲劳强度的可靠性分析的方法，从而确定了弧齿锥齿轮的强度分布类型，建立了可靠性分析模型，一定程度上，解决了齿轮可靠性分析中疲劳寿命实验数据不足的问题。论文的主要研究成果和结论如下：

1 用蒙特卡罗法产生伪随机数对弧齿锥齿轮强度几何系数公式进行了模拟，与传统代数法相比效率和精度均有所提高。

在允许的加工误差范围内，几何系数近似服从正态分布或对数正态分布，且其均值与无偏差参数计算出的结果一致。解决了弧齿锥齿轮由于齿面的多样性，几何系数分散性的问题。

通过对影响几何系数的随机变量的敏感性分析可知，随机变量对接触强度和弯曲强度几何系数的影响敏感性不同，而且有一定的相关性。因此通过优化设计的方法，选取合适的几何参数对齿轮的强度将会大有补益。

2 利用蒙特卡罗法对弧齿锥齿轮进行了应力强度可靠性分析研究，克服了传统齿轮可靠性设计中寿命数据不足的问题。根据模拟出的应力和强度数组和分布规律，通过统计法和数值积分计算出的可靠度值相差很小，且可靠度均大于0.99。

通过对影响弯曲应力的分布参数进行敏感性分析，可知应力均值对弯曲疲劳可靠度的影响较大。通过对影响弯曲强度的随机变量进行分析，可知材料许用应力对强度的分布类型影响较大，且在选用随机变量的分布参数时要保证随机变量的取值范围在误差范围内。

3 引入了灰色 GM(1, 1)模型，对齿轮的小样本疲劳寿命数据进行了预测评价，探讨了灰色系统理论用于齿轮疲劳寿命试验数据预测的可行性。用灰色 GM(1, 1)模型预测齿轮疲劳寿命的方法准确可靠。为齿轮疲劳寿命的预测和评价提供了新的方法。

6.2 展望

在实际工况条件下，齿轮的可靠性是诸多随机因素耦合作用的结果，其分析也是一个相当复杂的过程，而且需要试验数据的支撑才会更加可靠。本文仅对接

触疲劳强度和弯曲疲劳强度的可靠度进行了分析，尚需大量的研究工作进行充实和完善。

论文的主要不足和尚待开展得工作如下：

1 论文采用的强度计算标准仍然属于经典的传统的计算方法，结果有较大的近似性。更进一步可以借助有限元精确建模的方法完善齿轮应力-强度的分析。

2 当应力分布和强度分布不属于同一分布类型时，探讨和改进两种不同分布的合成方法。

3 齿轮疲劳寿命的分布类型可通过蒙特卡罗法进行模拟。弯曲强度和接触强度的可靠度的综合分析尚待进一步探讨。

4 用灰色理论探讨齿轮的疲劳寿命的分布类型和在一定应力下的可靠度的计算方法，并用蒙特卡罗模拟方法相结合。

参考文献

- [1] 邓效忠, 魏冰阳. 锥齿轮设计的新方法[M]. 北京: 科学出版社. 2012, 1-121.
- [2] 徐钟济. 蒙特卡罗方法[M]. 上海: 科学技术出版社, 1985, 1-144.
- [3] A.杜比. 蒙特卡罗方法在系统工程中的应用[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2007, 1-85.
- [4] 刘维信. 机械可靠性设计[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996, 1-280.
- [5] 牟志忠. 机械可靠性[M]. 北京: 机械工业出版社, 2011: 96-99, 1-135.
- [6] 袁菲, 徐颖强. 考虑齿间载荷分布的齿轮弯曲疲劳寿命估算[J]. 机械设计. 2006, 23(4): 35-38.
- [7] 程文冬, 曹岩. 直齿轮啮合疲劳强度的有限元仿真与失效分析[J]. 西安工业大学学报. 2010, 30(3): 239-242.
- [8] 张景柱, 崔清斌, 徐诚. 基于协同仿真的传动箱齿轮疲劳寿命预测方法[J]. 兵工学报. 2007, 28(12): 1424-1427.
- [9] Shuting Li. Effects of machining errors, assembly errors and tooth modifications on loading capacity, load-sharing ratio and transmission error of a pair of spur gears[J]. Mechanism and Machine Theory. 2007, 42: 698-726.
- [10] Shuting Li. Mesh stiffness and its non-linearity of a pair of spur gears with machining errors, assembly errors and tooth modifications, in Motion and Power Transmission symposium (MPT2004), JSME. 2004, pp. 202-205.
- [11] B.A. Shaw, C. Aylott, P.O.Hara, K. Brimble. The role of residual stress on the fatigue strength of high performance gearing, International Journal of Fatigue. 2003, 25: 1279-1283.
- [12] Glodez S, Sraml M, Kramberger J. A computational model for determination of service life of gears[J]. International Journal of Fatigue. 2002, 24: 1013-1020.
- [13] V. Spitas, C. Spitas. Numerical and experimental comparative study of strength-optimised AGMA and FZG spur gears. Acta Mechanica. 2007, 193: 113-126.
- [14] J. Kramberger, M. Sraml, S. Glodez. Computational model for the analysis of bending fatigue in gears[J]. Computers and Structures. 2004, 82: 2261-2269.
- [15] J. Kramberger, M. Sraml, I. Potrc. Numerical calculation of bending fatigue life of thin-rim spur gears[J]. Engineering Fracture Mechanics. 2004, 71: 647-656.

- [16]Spievak Le, Wawrzynek Pa, Ingrassia Ar, Lewicki Dg. Simulating fatigue crack growth in spiral bevel gears[J]. Engng Fract Mech. 2001, 68: 53–76.
- [17]An Ural, Gerd Heber, Paul A. Three-dimensional, parallel, finite element simulation of fatigue crack growth in a spiral bevel pinion gear [J]. Engineering Fracture Mechanics. 2005, 72: 1148–1170.
- [18]龙双丽, 聂宏, 王旭亮. 灰色模型在不确定性疲劳寿命预测中的研究[J]. 中国机械工程. 2010, Vol.21(9). 1093-1097.
- [19]NIE HONG. Fatigue Life Prediction of Aircraft landing Gears Based on Multi - body System Simulation and the Local Strain Method[J]. Cambridge. 2000: 439-448.
- [20]NIE HONG. Biaxial Stress Fatigue Life Prediction by the Local Strain Method[J]. International Journal of Fatigue. 1997, 19(6): 512-522.
- [21]WANG XULIANG, NIE HONG. Miners Rule Considering the Fuzziness of Stress Damage Under Different Load sequences[J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics. 2008, 25(3): 182-185.
- [22]XIA XINTAO, WANG ZHONGYU. Grey relation between nonlinear characteristic and dynamic uncertainty of rolling bearing friction torque. Chinese Journal of Mechanical Engineering. 2009, 22(2): 244-249.
- [23]XIA XINTAO, LV TAOMEI, MENG FANNIAN. Gray chaos evaluation model for prediction of rolling bearing friction torque. Journal of Testing and Evaluation. 2010, 38(3): 291-300.
- [24]XIA XINTAO, CHEN JIANFENG. Fuzzy hypothesis testing and time series analysis of rolling bearing quality. Journal of Testing and Evaluation. 2011, 39(5): 1144-1151.
- [25]夏新涛. 滚动轴承乏信息试验评估方法及其应用技术研究[D]. 上海: 上海大学, 2008, 1-14.
- [26]卢曦, 郑松林. 轿车主减速器齿轮疲劳寿命的试验研究[J]. 机械强度. 2008, 30(4), 664-667.
- [27]张洪才, 陈举华, 黄克正等. 基于小子样机械零件全寿命试验数据的处理方法[J]. 机械科学与技术. 2003, 22(6): 942-944.
- [28]张延化, 王优强, 卞荣. 灰色 GM(1, 1)模型在齿轮疲劳寿命预测中的应用[J]. 机械传动. 2009, 33(3): 100-103.
- [29]张怀亮, 谭冠军, 邱显焱. 灰色 GM(1, 1) 模型在机械产品寿命试验数据预测

- 中的应用[J]. 机械科学与技术. 2002, 21(3): 448-450.
- [30]李阳星, 李光煜. 基于熵理论的齿轮强度的模糊可靠性设计[J]. 机械设计. 2004, 21(2): 38-41.
- [31]王明清, 陈作越. 齿轮传动多模式失效的时变可靠性分析[J]. 机械传动. 2011, 35(4): 50-53.
- [32]陈文华, 朱海峰, 樊晓燕. 齿轮系统传动误差的蒙特卡罗模拟分析[J]. 仪器仪表学报. 2004, 25(4): 435-437.
- [33]郭耀斌, 张文明, 张国芬. 基于蒙特卡罗法的螺旋锥齿轮接触疲劳可靠性分析[J]. 农业机械学报. 2008, 39(4): 157-160.
- [34]连克难. 蒙特卡罗方法在机械零件可靠度计算中的应用[J]. 机械. 2003, 30: 49-50.
- [35]李宪珊. 蒙特卡罗(Monte Carlo)法在可靠性分析中的应用[J]. 宇航学报. 1983, 2(4): 69-73.
- [36]张广军, 宁仲良. 蒙特卡罗法在零件可靠性设计中的应用[J]. 西安科技学院学报. 2003, 23(1): 59-61.
- [37]李亚东. 重要抽样模拟及其在结构可靠度计算中的应用[J]. 西南交通大学学报. 1992, 4: 105-110.
- [38]陈继平, 李元科. 现代设计方法[M]. 华中科技大学出版社. 2006, 88-121.
- [39]刘惟信. 机械可靠性设计[M]. 北京: 清华大学出版社. 1996, 1-280.
- [40]吴波, 黎明发. 机械零件与系统可靠性模型[M]. 北京: 化学工业出版社, 2003, 28-31.
- [41]冯晓波, 杨桦. 用 MATLAB 实现蒙特卡罗法计算结构可靠度[J]. 中国农村水利水电. 2002, 8: 50-51.
- [42]苏金明, 张莲花, 刘波. MATLAB 工具箱应用[M]. 北京: 电子工业出版社. 2004, 1-91
- [43]阳明盛, 熊西文, 林建华. MATLAB 基础及数学软件[M]. 山东: 大连理工大学出版社. 2003, 1-171.
- [44]ANSI/AGMA 2003-B97 Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel, Zerol Bevel and Spiral Bevel Gear Teeth[S]. 2003:54-63.
- [45]魏冰阳, 石佩斐. 基于蒙特卡罗法的弧齿锥齿轮强度几何系数的分析[J]. 机械传动. 2013, 37(12): 139-142.
- [46]李艳, 张祖明. 齿轮接触疲劳寿命、强度及应力最佳分布类型的确定. 北京

印刷学院学报. 1999, 7(3): 4-9.

- [47]魏丕勇. 圆柱齿轮强度可靠性计算分析[J]. 焦作大学学报 (综合版). 1995, 4(1): 62-68
- [48]周红桥, 周子瑾, 陈继红, 等. 圆弧齿轮传动的模糊可靠性优化设计[J]. 武汉大学学报 (工业版). 2004(37): 81-84.
- [49]徐楠, 李乃根, 孙鹏. 应力疲劳寿命可靠性分析通用模型研究[J]. 山东建筑大学学报. 2008, 23(2): 31-34.
- [50]陈历祥. 齿轮强度的可靠性设计方法[J]. 华中工学院学报. 1982, Vol.10(3): 121-130.
- [51]牟世学, 陈胜军. 齿轮强度模糊可靠性设计的实用新方法[J]. 现代机械. 2004, 6, 55-71.
- [52]赵雪松, 赵晓芬. 机械制造技术基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2006, 250-260.
- [53]孙淑霞, 李良巧, 孙志礼. 齿轮可靠度计算中随机因素影响程度的计算分析[J]. 机械传动. 2008, 32(3): 80-82.
- [54]郝静如, 米洁. 机械可靠性设计中的分布拟合检验[J]. 机械设计与制造. 1997, 6: 6-8.
- [55]魏冰阳, 石佩斐. 锥齿轮疲劳寿命预测的灰色 GM(1, 1)模型[J]. 机械传动. 2013, 37(11): 24-26.

致 谢

本文的研究工作是在导师魏冰阳教授的悉心指导下完成的，在我学业和论文的研究过程中，时时刻刻都倾注了导师辛勤的汗水和心血。在魏老师的引导下，通过查阅相关资料，我逐渐了解到论文的构成，我发现论文重要的不仅是计算结果，更重要的是如何对自己的研究成果进行分析。在初次接触 MATLAB 的过程中，编写的程序总是漏洞百出，一遍一遍地修改，但结果总是与实际不符，但魏老师犀利的眼睛总是能找到问题的所在，帮我指点迷津。这三年中最大的感触就是，迷茫之时一经魏老师指点，就会豁然开朗。魏老师严谨的治学态度、渊博的专业学识、废寝忘食的工作精神、平易近人的长者风范使我终身受益。在此，谨向魏老师表示衷心的感谢！

同时感谢学校给我良好的学习环境，感谢本专业所有授课老师的和蔼与敬业，感谢同一课题组的师兄弟们给我良好的学习氛围，以及徐林林同学在论文格式方面对我的帮助。

此外，感谢父母对我的关怀、对我学业无条件的支持！感谢所有关心帮助过我的亲朋好友！

为了不辜负他们的关心和期望，我将会在以后的工作中努力进取，争创佳绩，为我国教育事业做出有益的更大的贡献将是我对每一位最好的报答与感谢。

最后，衷心的感谢在百忙之中抽出宝贵时间来评阅论文和参加答辩的各位专家、教授等。

攻读硕士学位期间的研究成果

一、攻读硕士学位期间发表的与学位论文相关的学术论文及专著

- [1] 魏冰阳, 石佩斐. 锥齿轮疲劳寿命预测的灰色 GM (1,1) 模型[J]. 机械传动, 2013, 37(11): 24-26.
- [2] 魏冰阳, 石佩斐. 基于蒙特卡罗法的弧齿锥齿轮强度几何系数的分析[J]. 机械传动, 2013, 37(12): 139-142.
- [3] 魏冰阳, 石佩斐, 邱明. 基于蒙特卡罗法的弧齿锥齿轮弯曲强度可靠性分析[J]. 矿山机械, 2014, 42(4):101-103.