1. 据统计互联网上垃圾邮件和正常邮件的比例为1:3，其中在40%的垃圾邮件中会出现符号“$”，而只有10%的正常邮件中会出现符号“$”．现随机选择一封邮件，试求：

（1）此邮件中出现符号“$”的概率．

（2）若邮件中出现了符号“$”，则该邮件为垃圾邮件的概率是多少？

分类

考点：全概率与Bayes公式 → $P(B|A)$：结果 → 原因

↓

$P(A)$：由原因 → 结果

解：设 A="出现$"　B="邮件为垃圾邮件"

由题意：$P(B)=\frac{1}{4}$　$P(A|B)=40\%$　$P(A|\bar{B})=10\%$

(1) 由全概率公式

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

$$=\frac{1}{4}\times 40\%+\left(1-\frac{1}{4}\right)\times 10\%=0.175$$

(2) 由Bayes公式

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}\times 40\%}{0.175}=\frac{4}{7}$$

2. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases} kx, & 0<x<2; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

（1）求常数 k.

（2）设 $Y=X(2-X)$，试求 Y 的概率密度函数.

考点：密度性质 . 随机变量的函数分布 < 公式法 / 分布函数法 .

(1) 由正则性 $\underbrace{1=\int_R p_X(x)\,dx}=\int_0^2 kx\,dx=2k \Rightarrow k=\frac{1}{2}$

(2) 公式法

令 $f(x)=x(2-x)$ $\cancel{x\in R}$ $\underline{x\in(0,2)\quad p_X(x)\neq 0}$ $\underline{Y=f(X)}$

则 $f(x)$ 严格单调区间为 $(0,1)$ 和 $(1,2)$

令 $f_1(x)=2x-x^2$ $\underline{x\in(0,1)}$, 其反函数为 $g_1(y)=1-\sqrt{1-y}$ $\underline{y\in(0,1)}$, $g_1'(y)=\frac{1}{2\sqrt{1-y}}$

$f_2(x)=2x-x^2$ $x\in(1,2)$, ～ $g_2(y)=1+\sqrt{1-y}$ $y\in(0,1)$, $g_2'(y)=-\frac{1}{2\sqrt{1-y}}$

则 $p_Y(y)=\sum_{i=1}^{2} p_X(g_i(y))|g_i'(y)|$ ← $g_i(y)$有意义才求和

当 $y\in(0,1)$, $p_Y(y)=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-y})\left|\frac{1}{2\sqrt{1-y}}\right|+\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-y})\left|-\frac{1}{2\sqrt{1-y}}\right|=\frac{1}{\sqrt{1-y}}$

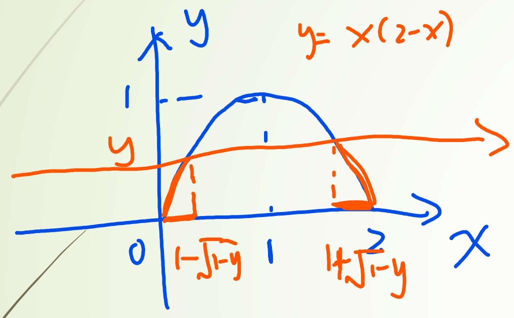
$\underline{\text{对于其他 } y,\ p_Y(y)=0.}$

$p_Y(y)=\{$ ～

分布函数法：

$$F_Y(y) = P(Y\le y) = P(f(X)\le y) = P(X\in I = \{x: f(x)\le y\})$$

解：令 $f(x)=x(2-x)$，$x\in(0,2)$



① 当 $y\le 0$，$F_Y(y)=P(f(x)\le y)=P(\phi)=0$

$\Rightarrow p_Y(y)=F_Y'(y)=0$

② 当 $0<y<1$ 时，

$F_Y(y)=P(0<X<1-\sqrt{1-y}$ 或 $1+\sqrt{1-y}<X<2)$

$=\int_0^{1-\sqrt{1-y}} p_X(x)\,dx + \int_{1+\sqrt{1-y}}^{2} p_X(x)\,dx$　不建议求积分

$\Rightarrow p_Y(y)=F_Y'(y)$

$= p_X(1-\sqrt{1-y})\dfrac{1}{2\sqrt{1-y}} - p_X(1+\sqrt{1-y})\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{1-y}}\right)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1-y}}$

③ 当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=P(f(x)\le y)=P(\Omega)=1$

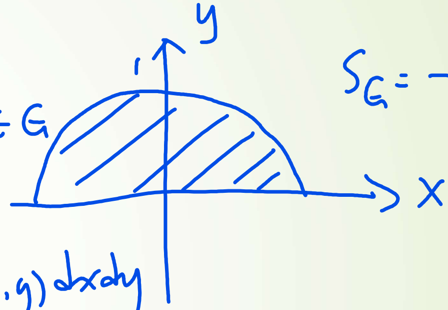
$\Rightarrow p_Y(y)=F_Y'(y)=0$

$p_Y(y)=\begin{cases} \sim \end{cases}$

3. 设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 $G=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$ 上的均匀分布，求 $R=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的密度函数.

考点：二维随机变量函数分布
- 卷积公式 $Z=X+Y$ ← 边际密度.
- 增补变量法：$Z=aX+bY$，$Z=XY$，$Z=\frac{X}{Y}$
- 分布函数法：不满足上述两条件时

均匀分布 ⟷ 几何概率

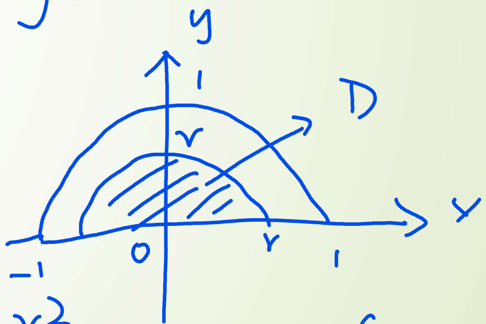


$S_G=\frac{\pi}{2}$

解：$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_G} & (x,y)\in G\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\pi}, & (x,y)\in G\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$F_R(r)=P(\sqrt{X^2+Y^2}\le r)=\iint\limits_{x^2+y^2\le r} p(x,y)\,dxdy$

$=\frac{2}{\pi}\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le r\\ x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0}} dxdy$



① $r\le 0$, $F_R(r)=0 \Rightarrow p_R(r)=0$

② $0<r<1$, $F_R(r)=\frac{2}{\pi}S_D=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi r^2}{2}=r^2$

$\Rightarrow p_R(r)=F_R'(r)=2r$

③ $r>1$, $F_R(r)=1 \Rightarrow p_R(r)=0$

$p_R(r)=\{$

4. 设随机变量 X 和 Y 独立且都服从二项分布 $b(1,p)$，其中 $0<p<1$．定义：

$$Z=\begin{cases}1, & X+Y\text{ 为偶数;}\\ 0, & X+Y\text{ 为奇数.}\end{cases}$$

考点：联合分布列．独立定义性质

(1) 写出 (X,Z) 的联合分布律.

(2) 问 p 为何值时，X 与 Z 相互独立.

解：

X	0	1
p	$1-p$	p

Y	0	1
p	$1-p$	p

(1) Z 的取值 0, 1

$$Z=\begin{cases}1, & X=Y=0 \text{ 或 } X=Y=1\\ 0, & X=0, Y=1 \text{ 或 } X=1, Y=0\end{cases}$$

$X \backslash Z$	0	1	$P(X=x)$
0	$p(1-p)$	$(1-p)^2$	$1-p$
1	$p(1-p)$	p^2	p
$P(Z=z)$	$2p(1-p)$	$p^2+(1-p)^2$	$\checkmark$

$P(X=0,Z=0)=P(X=0, Y=1)=P(X=0)P(Y=1)=p(1-p)$

(2) X 与 Z 独立，则 $P(X=0, Z=0)=P(X=0)P(Z=0)$

$\Rightarrow p(1-p)=(1-p)\cdot 2p(1-p)$

由 $0<p<1 \Rightarrow p=\frac{1}{2}$

5. 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3/4, & -1\le y\le 1,\ y^2\le x\le 1;\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

（1）边际密度函数 $p_X(x)$ 与 $p_Y(y)$.

（2）求条件密度函数 $p_{X|Y}(x|y)$.

（3）计算概率 $P\left\{X<\frac{1}{2}\middle|Y=\frac{1}{4}\right\}$.

考点：边际密度、条件密度

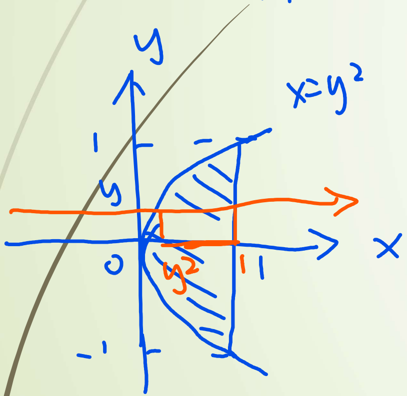
$p_X(x)=\int_R p(x,y)\,dy$ $\quad p(x|y)=\dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)}\ (p_Y(y)>0)$

$p_Y(y)=\int_{y^2}^{1}\frac{3}{4}\,dx=\frac{3}{4}(1-y^2)$ X

X $-1<y<1$, $p_Y(y)=\int_{y^2}^{1}\frac{3}{4}\,dx=\frac{3}{4}(1-y^2)\ (y\in(-1,1))$

$p_Y(y)$: $y\in R$.

(1) $p_Y(y)=\int_R p(x,y)\,dx$



① 当 $-1<y<1$ 时

$p_Y(y)=\int_{y^2}^{1}\frac{3}{4}\,dx=\frac{3}{4}(1-y^2)$

② 对其他 y, $p_Y(y)=0$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}(1-y^2), & -1<y<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

①画错图，② $y\in(0,1)$, $y\in(-1,0)$ 讨论 不必要

③不画图 直接看区域 $p_X(x)=\int_{-1}^{1}\frac{3}{4}\,dy$ X

④ 积分区域不对

(2) $p(x|y)=\dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)}$ $(p_Y(y)>0)$

当 $y\in(-1,1)$ 时，$p_Y(y)>0$

$p(x|y)=\dfrac{p(x,y)}{\frac{3}{4}(1-y^2)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}(1-y^2)}=\dfrac{1}{1-y^2}, & y^2<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

条件分布函数

对于其他 y，$p(x|y)$ 无定义.

(3) $P(X<\frac{1}{2}|Y=\frac{1}{4})$ " " $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

$p(x|Y=\frac{1}{4})=\begin{cases}\frac{16}{15}, & \frac{1}{16}<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$P(X<\frac{1}{2}|Y=\frac{1}{4})=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}p(x|Y=\frac{1}{4})dx=\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{2}}\frac{16}{15}dx=\frac{7}{15}$

$\times\begin{cases}P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)} \times\\ =\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{1-(\frac{1}{4})^2}dx\end{cases}$

$\times\begin{cases}?\ ?\ ?\ p_Y(y)>0\\ p(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y^2}, & -1<y<1,\ y^2<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}\\ p_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}(1-y^2), & -1\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}\\ \Downarrow\\ 当 -1<y<1,\ p(x|y)=\dfrac{1}{1-y^2}\end{cases}$

6. 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$．在 $X=x$ 的条件下，随机变量 Y 服从正态分布 $N(x,1)$．求：

（1）二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数 $p(x,y)$．

（2）随机变量 Y 的期望 $E(Y)$ 与方差 $\mathrm{Var}(Y)$．

$p(y|x)$

考点：二维正态分布 性质．条件密度．重期望公式

(1) $p(y|x)=\dfrac{p(x,y)}{p_X(x)} \Rightarrow p(x,y)=p_X(x)p(y|x)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{2x^2-2xy+y^2}{2}}$, $x,y\in R$

(2) ① 利用 $N(\mu,\sigma^2)$ 正则，期望，方差 求积分．

$$p_Y(y)=\int_R p(x,y)dx=\int_R \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{2(x-\frac{y}{2})^2+\frac{y^2}{2}}{2}}dx$$

$$=\int_R e^{-\frac{(x-\frac{y}{2})^2}{2\times\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}}dx \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{y^2}{2\cdot 2}}$$

$N(\frac{y}{2},\frac{1}{2})$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{y^2}{2\cdot 2}} \Rightarrow Y\sim N(0,2)$$

$\Rightarrow EY=0,\ \mathrm{Var}Y=2.$

② 重期望：给定 $X=x$，$Y \sim N(x,1)$

$E[Y \mid X=x]=x$，$E[Y^2 \mid X=x]=1+x^2$

则 $EY=E[E[Y \mid X]] = \int_R E[Y \mid X=x]\, p_X(x)\,dx = \int_R x\, p_X(x)\,dx = EX = 0$

$\mathrm{Var}\,Y = EY^2 = E[E[Y^2 \mid X]] = \int_R E[Y^2 \mid X=x]\, p_X(x)\,dx$

$= \int_R (1+x^2)\, p_X(x)\,dx$

$= E(1+X^2) = 1+1=2$

7. 保险公司推出一项针对某类人群的人身意外保险业务，保费为每人每年 200 元．若顾客死亡则保险公司需要赔偿其保险受益人 1 万元．假设现有 10000 人购买了这个保险，每一名投保人在一年里意外死亡的概率为 0.01．根据中心极限定理计算（取 $\sqrt{99}\approx 10$）：

（1）此项保险业务一年的利润不小于 95 万的概率约为多少？

（2）以 95%的概率保证此项保险业务一年的利润不小于多少？

标准正态分布函数值：

$\Phi(0.25)=0.5987$，$\Phi(0.5)=0.6915$，$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$

考点：中心极限定理．

① 独立同分布 $\{X_i\}$ 且 $S=\sum_{i=1}^{n} X_i$ 或 $S\sim b(n,p)$

② 利用中心极限定理估计 S 的分布 $S\sim N(ES, \mathrm{Var}S)$

③ 考虑概率

先②再③．

建议不做修正．

解：设一年内死亡人数为 S，则 $S\sim b(10000, 0.01)$

则由中心极限定理可用 $N(ES,\mathrm{Var}S)=N(100, 99)$ 来估计 S 分布

(1) $P(10000\times 200-10000\times S\geq 95\times 10^4)=P(S\leq 105)=\Phi\left(\frac{105-100}{\sqrt{99}}\right)$

$=\Phi(0.5)=0.6915$

(2) 利润为 a 万，$P(10000\times 200-10000\times S\geq a\times 10^4)=P(S\leq 200-a)$

$=\Phi\left(\frac{200-a-100}{\sqrt{99}}\right)=95\%$

$\Rightarrow \frac{100-a}{10}=\Phi^{-1}(0.95)=1.645\Rightarrow a=83.55$

对随机事件 A, B, C，且 $0 < P(C) < 1$．若成立

$$P(A|C) \geq P(B|C) \text{ 且 } P(A|\overline{C}) \geq P(B|\overline{C}),$$

试证明 $P(A) \geq P(B)$ 成立．

~~$P(AB) = P(B) \Rightarrow B \subseteq A$~~

考点：条件概率　概率性质

~~$P(A|\overline{C}) = 1 - P(A|C)$~~

证明：$P(A|C) \geq P(B|C) \Leftrightarrow \dfrac{P(AC)}{P(C)} \geq \dfrac{P(BC)}{P(C)} \xRightarrow{0<P(C)<1} P(AC) \geq P(BC)$ ①

$P(A|\overline{C}) \geq P(B|\overline{C}) \Leftrightarrow \dfrac{P(A-C)}{P(\overline{C})} \geq \dfrac{P(B-C)}{P(\overline{C})} \xRightarrow{0<P(C)<1} P(A-C) \geq P(B-C)$

$\Rightarrow P(A) - P(AC) \geq P(B) - P(BC)$ ②

① + ② 可得 $P(A) \geq P(B)$