2022년 1학기 물리학 I: Quiz 10

김현철[a1,†] and Lee Hui-Jae[1,‡]
[1]*Hadron Theory Group, Department of Physics,*
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea
(Dated: Spring semester, 2022)

문제 1. (30pt) 그림 3에서처럼 $\theta = 30.0°$만큼 기울어져 있는 면 위에 질량이 12.0 kg인 나무토막이 놓여있다. 이 토막 아래에는 270. N의 힘을 받으면 2.00 cm만큼 압축되는 용수철이 놓여있다. 이 토박을 가만히 놓으면, 비탈면으로 내려와서 용수철을 5.50 cm 압축시킨다.

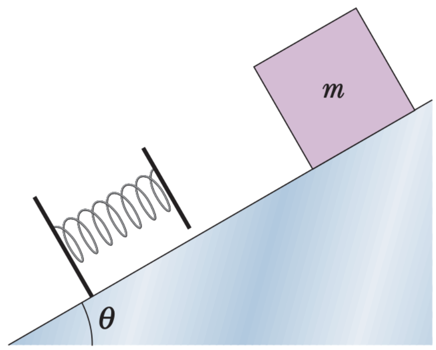

FIG. 1. 문제 1

(가) 정지 상태에서 용수철을 압축시켜 멈추게 될 때까지 이 나무토막은 얼마나 내려왔는가?

(나) 나무토막이 용수철에 닿는 순간의 속력은 얼마인가?

풀이 :

(가) 나무 토막 비탈면을 내려올 때와 용수철을 압축시켜 정지해 있을 때의 자유 물체 다이어그램을 그려보자. 나무

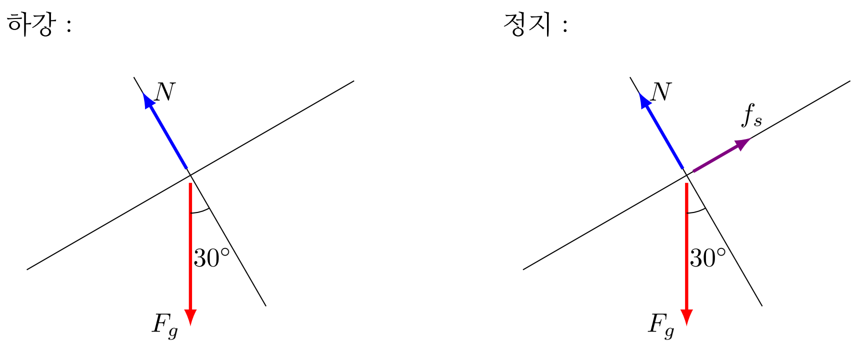

FIG. 2. 자유 물체 다이어그램

토막은 처음에 정지해 있었으므로 초기에 가지고 있던 역학적 에너지를 E_i, 나무토막이 비탈면을 내려온 거리를 d라 하자. 즉 d는 나무토막이 정지해 있던 지점에서 용수철에 의해 정지한 지점까지의 직선 거리이다. 그러면,

$$E_i = mgh = mgd\sin\theta, \quad m = 12.0\,\text{kg}. \tag{1}$$

---

[a] Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00∼20:00)
† hchkim@inha.ac.kr
‡ hjlee6674@inha.edu

나무토막이 용수철을 압축시켜 정지하였으므로 나무토막이 가지고 있던 모든 역학적 에너지가 용수철의 탄성 위치에너지로 전환되었다. 용수철이 압축된 길이를 x_f라고 하면,

$$E_i = mgd\sin\theta = \frac{1}{2}kx_f^2, \;\; x_f = 5.50\,\mathrm{cm} = 5.50\times 10^{-2}\mathrm{m}. \tag{2}$$

용수철은 270 N의 힘을 받을 때 2.00 cm만큼 압축되므로 용수철 상수 k는,

$$k = \frac{F}{x} = \frac{270\,\mathrm{N}}{2.00\,\mathrm{cm}} = \frac{270\,\mathrm{N}}{2.00\times 10^{-2}\,\mathrm{m}}. \tag{3}$$

식 (2)에 의해 나무토막이 내려온 거리 d는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d &= \frac{kx_f^2}{2mg\sin\theta} = \frac{(270\,\mathrm{N})(5.50\times 10^{-2}\mathrm{m})^2}{2(2.00\times 10^{-2}\,\mathrm{m})(12.0\,\mathrm{kg})(9.80\,\mathrm{m/s^2})\sin 30.0^\circ} \\ &= 3.47\times 10^{-1}\mathrm{m} \\ &= 34.7\,\mathrm{cm}. \end{aligned} \tag{4}$$

(나) 용수철에 닿는 순간의 역학적 에너지를 E_s, 이 때와 나무토막이 정지한 지점 사이의 직선 거리를 d_s라고 하면,

$$E_s = \frac{1}{2}mv^2 + mgd_s\sin\theta, \;\; d_s = 5.50\,\mathrm{cm} = 5.50\times 10^{-2}\mathrm{m}. \tag{5}$$

역학적 에너지는 보존되어야 하므로 이 에너지는 처음 역학적 에너지 E_i와 같다. 따라서,

$$E_s = E_i, \;\; \frac{1}{2}mv^2 + mgd_s\sin\theta = mgd\sin\theta. \tag{6}$$

따라서 이 때의 속력은,

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2gd\sin\theta - 2gd_s\sin\theta} = \sqrt{2g(d-d_s)\sin\theta} \\ &= \sqrt{2(9.80\,\mathrm{m/s^2})\left((3.47\times 10^{-1}\mathrm{m}) - (5.50\times 10^{-2}\mathrm{m})\right)\sin 30.0^\circ} \\ &= 1.69\,\mathrm{m/s}. \end{aligned} \tag{7}$$

문제 2. (50 pt)(난이도 상) 어떤 아이가 그림 3처럼 반지름이 R인 반구 모양의 얼음 위에 앉아 있다가 무시할 수 있는 아주 작은 처음속력으로 미끄러지기 시작한다.

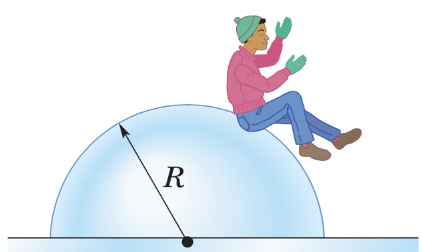

FIG. 3. 문제 2

얼음과 아이 사이에 쓸림이 없다고 가정한다면, 아이가 얼음에서 떠나는 높이는 어디인가?

풀이 : 아이의 얼음을 떠나는 순간의 자유 물체 다이어그램은 다음과 같다. 아이는 얼음 위에서 원궤도를 그리며 떨어지므로 원심력 F_c가 존재한다. 중심 방향으로 작용하는 중력의 크기가 원심력보다 작아질 때 아이는 얼음을 떠난다. 즉,

$$F_g\cos\theta \le F_c, \;\; F_g = mg \tag{8}$$

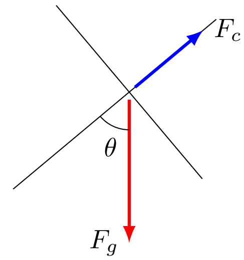

FIG. 4. 얼음을 떠날 때의 다이어그램

일 때 아이는 얼음을 떠난다. 역학적 에너지 보존 법칙을 이용하기 위해 아이의 처음 역학적 에너지를 E_i라 하자. 아이는 처음에 정지해 있었으므로,

$$E_i = mgR. \tag{9}$$

얼음에서 떠나는 순간의 역학적 에너지를 E_f, 그 때의 높이와 속력을 R_f, v_f라 하면 아이가 얼음을 떠나는 순간 지면에서의 높이 R_f를 얼음의 반지름 R과 θ의 삼각비로 표현할 수 있다.

$$E_f = mgR_f + \frac{1}{2}mv_f^2, \;\; R_f = R\cos\theta. \tag{10}$$

역학적 에너지는 보존되므로,

$$mgR = mgR_f + \frac{1}{2}mv_f^2. \tag{11}$$

이 때 작용하는 원심력 F_c는,

$$F_c = \frac{mv_f^2}{R} = \frac{2mg(R-R_f)}{R} = 2mg\left(1-\cos\theta\right), \tag{12}$$

이므로 식 (8)에 의해,

$$mg\cos\theta \le 2mg\left(1-\cos\theta\right), \;\; \cos\theta \le \frac{2}{3}. \tag{13}$$

따라서,

$$R_f = R\cos\theta \le \frac{2}{3}R, \tag{14}$$

아이의 높이가 $\frac{2}{3}R$인 순간 부터 얼음을 벗어난다.

문제 3. (20 pt) 그림 5의 암모니아 분자(NH_3)는 세 개의 수소원자(H)가 정삼각형의 꼭지점에 있고 정삼각형의 중심은 수소원자로부터 $d = 9.40 \times 10^{-11}$ m만큼 떨어져 있다. 질소원자(N)는 수소원자들이 바닥을 이루는 피라미드의 꼭지점에 있다. 질소 대 수소의 원자질량 비율은 13.9이고, 질소에서 수소까지의 거리는 $L = 10.14 \times 10^{-11}$ m이다.

암모니아분자의 질량중심의

(가) x 좌표

(나) y 좌표는 각각 무엇인가?

풀이 :

(가) 정삼각형의 중심을 원점, x축 위에 위치한 수소 원자 부터 반시계 방향으로 1, 2, 3번 수소라 하자. 질량 중심의 x 좌표를 x_{cm}이라 하면 x_{cm}은,

$$x_{cm} = \frac{m_N x_N + m_H x_{H1} + m_H x_{H2} + m_H x_{H3}}{m_N + m_H + m_H + m_H}. \tag{15}$$

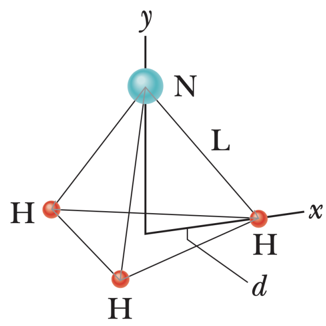

FIG. 5. 문제 3

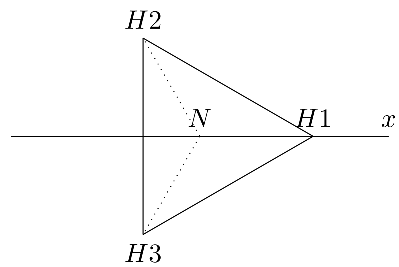

FIG. 6. 위에서 내려다 본 원자들의 위치

질소 원자의 x 좌표는 0 이고 각 수소들은 정삼각형의 꼭짓점에 위치하므로,

$$\begin{aligned} x_{H1} &= d \\ x_{H2} &= d\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}d \\ x_{H3} &= d\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}d. \end{aligned} \tag{16}$$

x_{cm}의 분모는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} m_N x_N + m_H x_{H1} + m_H x_{H2} + m_H x_{H3} &= m_H\left(d - \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}d\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

따라서 x_{cm}은 0 이다.

(나) 질량 중심의 y 좌표를 y_{cm}이라 하면 y_{cm}은,

$$y_{cm} = \frac{m_N y_N + m_H y_{H1} + m_H y_{H2} + m_H y_{H3}}{m_N + m_H + m_H + m_H}. \tag{18}$$

모든 수소 원자들은 $y=0$평면에 위치해 있으므로 y 좌표가 0 이다. 즉,

$$y_{H1} = y_{H2} = y_{H3} = 0. \tag{19}$$

그림 5로 부터 질소 원자의 y 좌표는,

$$y_N = \sqrt{L^2 - d^2}, \tag{20}$$

이고 질소 대 수소의 원자질량 비율이 13.9 이므로,

$$\frac{m_N}{m_H} = 13.9, \;\; m_N = 13.9 m_H. \tag{21}$$

따라서 y_{cm}의 분모는 다음과 같다.

$$m_N y_N + m_H y_{H1} + m_H y_{H2} + m_H y_{H3} = 13.9 m_H \sqrt{L^2 - d^2}. \tag{22}$$

y_{cm}은,

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{13.9 m_H \sqrt{L^2 - d^2}}{13.9 m_H + 3 m_H} = \frac{13.9 \sqrt{(10.14 \times 10^{-11}\,\mathrm{m})^2 - (9.40 \times 10^{-11}\,\mathrm{m})^2}}{13.9 + 3} \\ &= 3.13 \times 10^{-11} \mathrm{m}. \end{aligned} \tag{23}$$

질량중심의 y 좌표는 3.13×10^{-11} m이다.