

2022년 2학기 물리학 II

김현철^{a1, †}

¹*Hadron Theory Group, Department of Physics,
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*
(Dated: Autumn Semester, 2022)

Due date: 2022년 9월 19일 15:30-16:15

QUIZ 6

문제 1 [20pt]. 그림 1처럼 평행판 축전기 한 판의 변의 길이는 각각 10 cm이고, 판 사이의 거리는 $d = 4.0$ mm이다. 이 축전기에 들어있는 유전 물질의 유전상수는 $\kappa = 2.0$ 이다.

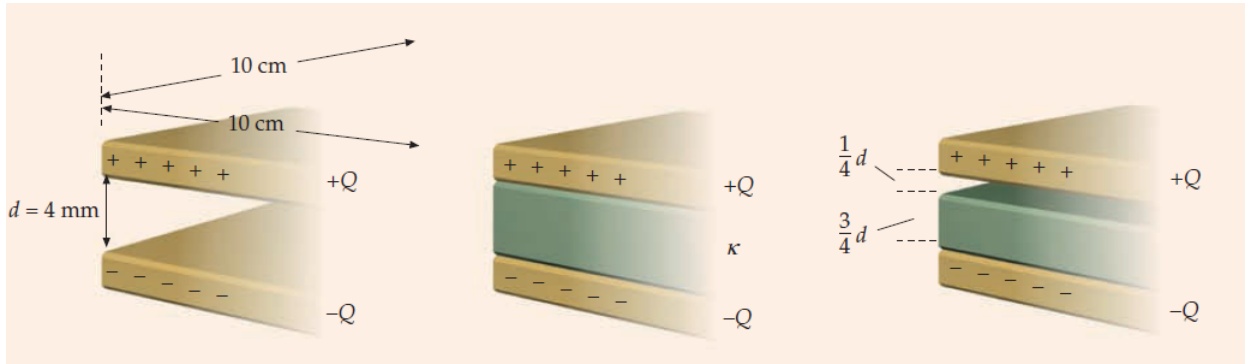


FIG. 1. 문제 1

(가) 우선 평행판 축전기의 전기용량을 구하여라.

(나) 유전물질이 들어있지 않을 때 전기용량은 얼마인가?

(다) 만약에 양 판 사이에 유전물질이 가득 차 있다면, 이 축전기의 전기용량은 얼마인가?

(라) 이 두 판 사이에 크기가 $10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 3.0\text{ mm}$ 인 유전물질을 넣었다. 이 축전기의 전기용량은 얼마인가?

여기서 $\epsilon_0 = 8.85\text{ pF/m}$ 이다.

풀이 :

(가) 평행판 축전기의 전기용량은 평행판 사이 전위차로 구할 수 있다. 우선 크기가 같고 부호가 반대인 두 도체 사이에 V 만큼의 전위차가 존재한다고 가정하자. 이 때 전위차 V 와 도체가 가진 전하량 Q 는 비례하는 관계에 있다. 즉,

$$Q = CV \quad (1)$$

^a Office: 5S-436D (면담시간 매주 수요일-16:15~19:00)

[†] hchkim@inha.ac.kr

이고 C 는 앞으로 전기용량이라 부르게 될 비례상수이다. 이제 두 도체가 평행판의 형태로 서로에 대해 평행하게 배열되어 있다고 하자. 두 평행판 사이의 거리는 d 이고 평행판의 면적은 A 로 서로 같다. 평행판에 의해 평행판 사이에 생성되는 전기장 E 의 크기는

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad (2)$$

와 같다. σ 는 면전하밀도로 평행판이 가진 전하량 Q 를 평행판의 면적 A 로 나눈 값이다. 평행판 사이가 진공이라 가정하여 진공 유전율 ϵ_0 에 반비례한다. 평행판 사이 전기장 E 도 알고 거리 d 도 알고 있으니 평행판 사이 전위차 V 를 구할 수 있다. 전기장 E 가 평행판 사이에서는 일정하므로 전위차 V 는 전기장 E 와 거리 d 의 곱과 같다.

$$V = - \int_d^0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \int_0^d ds = Ed. \quad (3)$$

여기에 식 (2)를 대입하여 평행판 사이 전위차 V 를 얻을 수 있다.

$$V = Ed = \frac{Q}{\epsilon_0 A} d. \quad (4)$$

이를 다시 식 (1)에 대입하면

$$Q = C \frac{Q}{\epsilon_0 A} d \quad (5)$$

를 얻는다. 우리가 구하고자 하는 것은 전기용량 C 이므로 식 (5)를 전기용량 C 에 대해 정리하여

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (6)$$

평행판 축전기의 전기용량 C 를 얻었다.

(나) 식 (6)으로부터, 면적이 A , 판 사이 거리 d 이고 판 사이가 진공인 평행판 축전기의 전기용량 C 는 다음과 같다.

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}. \quad (7)$$

$A = (10 \text{ cm})^2 = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^2$, $d = 4.0 \text{ mm} = 4.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ 이고 $\epsilon_0 = 8.85 \text{ pF/m}$ 이므로 평행판 축전기의 전기용량 C 는

$$C = (8.85 \text{ pF/m}) \frac{1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^2}{4.0 \times 10^{-3} \text{ m}} = 22 \text{ pF} \quad (8)$$

이다.

(다) 유전체의 유전상수는 유전체의 유전율과 진공의 유전율의 비로 주어진다. 즉,

$$\epsilon = \kappa \epsilon_0 \quad (9)$$

이다. ϵ 는 유전체의 유전상수이다. 이 식으로부터 평행판 축전기의 사이에 유전체가 차있는 경우와 진공인 경우의 유전상수 비를 구할 수 있다. 진공인 경우의 유전상수를 C_0 , 유전체가 차있는 경우의 유전상수를 C 라고 한다면 C/C_0 는

$$\frac{C}{C_0} = \left(\epsilon \frac{A}{d} \right) \left(\epsilon_0 \frac{A}{d} \right)^{-1} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa \quad (10)$$

유전체의 유전상수와 같다. 따라서 유전체가 가득 찬 평행판 축전기의 전기용량 C 는

$$C = \kappa C_0 = (2.0)(22 \text{ pF}) = 44 \text{ pF} \quad (11)$$

44 pF이다.

- (라) 유전 물질이 그림 1과 같이 평행판 축전기 사이 일부분에 평평하게 채워져 있다면, 평행판 사이가 진공인 축전기와 유전 물질이 전부 채워진 축전기의 직렬 연결로 생각할 수 있다. 평행판 사이가 진공인 축전기는 판 사이 거리가 $d_1 = 1/4d$, 면적은 A 이고 유전 물질로 전부 채워진 축전기는 판 사이 거리가 $d_2 = 3/4d$, 면적은 동일하게 A 이다. 두 축전기의 전기용량을 C_1 , C_2 라 한다면 두 전기용량은 다음과 같다.

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{A}{d_1} = \epsilon_0 \frac{4A}{d}, \quad C_2 = \epsilon \frac{A}{d_2} = \kappa \epsilon_0 \frac{4A}{3d}. \quad (12)$$

두 축전기는 직렬로 연결되어 있으므로 본래 축전기의 전기용량인 두 축전기의 합성 전기용량 C_{tot} 는

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{tot}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d}{4\epsilon_0 A} + \frac{3d}{4\kappa\epsilon_0 A} = \frac{(\kappa + 3)d}{4\kappa\epsilon_0 A} \\ \Rightarrow C_{tot} &= \frac{4\kappa\epsilon_0 A}{(\kappa + 3)d} \end{aligned} \quad (13)$$

이다. $A = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^2$, $d = 4.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ 이고 $\epsilon_0 = 8.85 \text{ pF/m}$, $\kappa = 2.0$ 이므로

$$C_{tot} = \frac{4(2.0)(8.85 \text{ pF/m})(1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^2)}{(2.0 + 3)(4.0 \times 10^{-3} \text{ m})} = 35.4 \text{ pF} \quad (14)$$

을 얻는다. 따라서 유전 물질이 일부만 채워진 축전기의 전기용량은 35.4 pF이다.

문제 2 [20pt]. 100 W 전구를 120 V 전원에 켜었다.

- (가) 전구를 계속해서 켜두려면, 31일 동안의 비용은 얼마인가? 전기에너지의 가격은 60 원 / kW·h라고 가정한다.
 (나) 전구의 저항은 얼마인가?
 (다) 전구에 흐르는 전류는 얼마인가?

풀이 :

- (가) 100 W 전구를 31일 동안 켜두었을 때 소모되는 전기 에너지 W 는

$$W = (100 \text{ W})(31 \text{ 일}) = (100 \text{ W})(31 \text{ 일}) \left(\frac{24 \text{ h}}{1 \text{ 일}} \right) = 74000 \text{ W} \cdot \text{h} = 74 \text{ kW} \cdot \text{h} \quad (15)$$

이다. 따라서 31일 동안 켜두었을 때 지불해야할 비용 A 는

$$A = (60 \text{ 원/kW} \cdot \text{h})(74 \text{ kW} \cdot \text{h}) = 4440 \text{ 원} \quad (16)$$

4400원이다.

- (나) 줄의 법칙에 의해 전구의 일률 $P = 100 \text{ W}$ 는 전구에 걸리는 전압 $V = 120 \text{ V}$ 와 전구의 저항 R 에 대해 다음의 관계에 있다.

$$P = \frac{V^2}{R}. \quad (17)$$

따라서 전구의 저항 R 은

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{(120 \text{ V})^2}{100 \text{ W}} = 144 \Omega \quad (18)$$

144 Ω 이다.

- (다) 전구에 흐르는 전류 I 는 옴의 법칙을 통해 구할 수 있다. 옴의 법칙으로부터 전구에 흐르는 전류 I 는

$$I = \frac{V}{R} = \frac{120 \text{ V}}{144 \Omega} = 0.83 \text{ A} \quad (19)$$

0.83 A이다.

문제 3 [20pt]. 그림 2에 주어진 a 와 b 사이에 연결되어 있는 이 축전기들의 등가 전기용량을 구하여라.

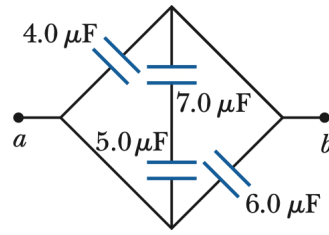


FIG. 2. 문제 3

풀이 :

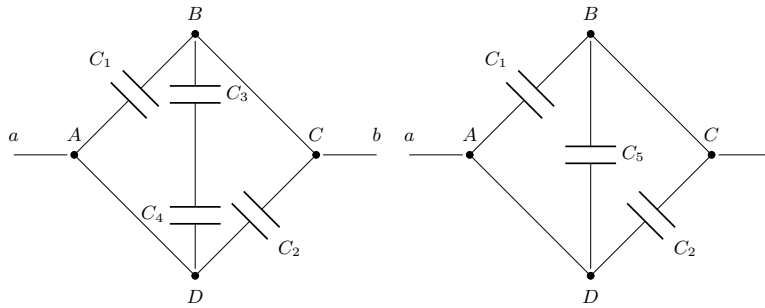


FIG. 3. C_3, C_4 의 합성

먼저 각 전선들이 만나는 마디들을 FIG. 3와 같이 A, B, C, D 라 하고 각 축전기들의 전기용량을 C_1, C_2, C_3, C_4 라고 하자. 직렬로 연결된 축전기의 전기용량 C_3, C_4 를 합성한 전기용량 C_5 는 다음과 같이 구할 수 있다(FIG. 3).

$$\frac{1}{C_5} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \Rightarrow C_5 = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}. \quad (20)$$

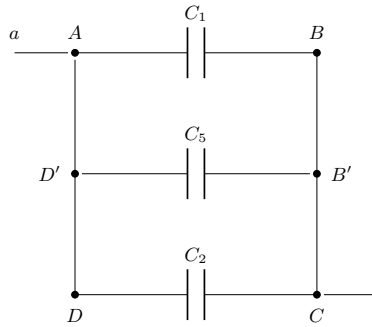


FIG. 4. fig 3의 병렬화

이제 축전기 C_5 가 연결된 마디 B 와 D 를 이동시켜 축전기 C_5 새로운 마디 B' 와 D' 에 연결되어 있다고 생각하자 (FIG. 4). 마디는 같은 도선 내에서 움직인 것이므로 마디를 이동시키기 전의 회로와 후의 회로는 동일하다. 이 회로는 축전기 C_1, C_5, C_2 가 병렬로 연결된 회로이므로 세 축전기의 합성 전기용량 C_{tot} 는

$$C_{tot} = C_1 + C_5 + C_2 = C_1 + C_2 + \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} \quad (21)$$

이다. 각각의 전기용량들은 $C_1 = 4.0 \mu\text{F}$, $C_2 = 6.0 \mu\text{F}$, $C_3 = 7.0 \mu\text{F}$, $C_4 = 6.0 \mu\text{F}$ 로 주어졌으므로 C_{tot} 의 값은

다음과 같이 계산하여 얻을 수 있다.

$$C_{tot} = 4.0 \mu\text{F} + 6.0 \mu\text{F} + \frac{(7.0 \mu\text{F})(6.0 \mu\text{F})}{(7.0 \mu\text{F}) + (6.0 \mu\text{F})} = 13 \mu\text{F}. \quad (22)$$

따라서 회로의 등가 전기용량 C_{tot} 는 $13 \mu\text{F}$ 이다.

문제 4 [20pt]. 가벼운 전기자동차가 있다. 이 차는 12.0 V의 배터리를 직렬로 연결해서 힘을 얻는다. 이 각각의 배터리 내부 저항은 무시할 수 있다. 각각의 배터리는 다시 충전하기 전까지 $160 \text{ A} \cdot \text{h}$ 의 전하를 자동차에 전달한다. 이 자동차가 80.0 km/h 의 속력으로 갈 때 이 자동차가 받는 공기 저항과 구름마찰력(rolling friction)은 1.20 kN 이다.

- (가) 만약에 자동차가 80.0 km/h 로 가고 있을 때 전기 모터가 자동차에 전해주는 최소 일률은 얼마인가?
- (나) 충전이 필요하기 전까지 이 직렬로 연결되어 있는 열 개의 배터리가 전달하는 총전하는 얼마인가?(coulomb의 단위를 써서 나타내어라.)
- (다) 재충전이 필요하기 전까지 열 개의 배터리가 전달하는 총 전기에너지는 얼마인가?
- (라) 배터리가 재충전을 필요로 하기 전까지 이 자동차는 얼마나 멀리 갈 수 있는가?(자동차의 속력은 80.0 km/h 로 일정하다.)
- (마) 배터리를 충전하는 데 $1 \text{ kW} \cdot \text{h}$ 당 100원이 든다면, 킬로미터 당 전기료는 얼마가 필요한가?

풀이 :

- (가) 전기자동차가 움직일 때 공기 저항과 구름마찰력이 존재하므로 이 힘들에 대항하여 전기 모터가 일을 해주어야 한다. F 만큼의 힘에 대하여 v 의 속력으로 움직일 때 필요한 일률 W 는

$$W = Fv \quad (23)$$

이므로 전기 모터가 공기 저항과 구름마찰력 F_f 에 대하여 전기자동차를 속력 v 로 움직이게 하는데 필요한 일률 W_E 는 다음과 같다.

$$W_E = F_f v = (1.20 \text{ kN})(80.0 \text{ km/h}) = (1.20 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2)(8.00 \times 10^4 \text{ m/h}) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) = 2.67 \times 10^4 \text{ W}. \quad (24)$$

전기 모터는 전기자동차에게 $2.67 \times 10^4 \text{ W}$ 만큼의 일률을 공급해주어야 한다.

- (나) 같은 축전기 10개가 직렬로 연결되어 있으므로 전압은 증가하지만 축전기가 전달하는 총 전하량은 일정하다. 따라서 축전기가 전달하는 총 전하량 Q 는

$$Q = 160 \text{ A} \cdot \text{h} = (160 \text{ A} \cdot \text{h}) \left(\frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \right) = 5.76 \times 10^5 \text{ A} \cdot \text{s} = 5.76 \times 10^5 \text{ C} \quad (25)$$

$5.76 \times 10^5 \text{ C}$ 이다.

- (다) 축전기 10개를 직렬 연결하였으므로 전하량은 일정하지만 전압은 10배로 늘어난다. 그러므로, 축전기 10개의 총 전기에너지 E_e 는

$$E_e = \frac{1}{2} Q(10V) = 5QV \quad (26)$$

와 같다. $Q = 5.76 \times 10^5 \text{ C}$, $V = 12.0 \text{ V}$ 이므로

$$E_e = 5(5.76 \times 10^5 \text{ C})(12.0 \text{ V}) = 3.46 \times 10^7 \text{ J} \quad (27)$$

을 얻는다. 즉, 열 개의 배터리가 전달하는 총 전기에너지 E_e 는 $3.46 \times 10^7 \text{ J}$ 이다.

- (라) 배터리를 재충전하기 까지 배터리는 전기자동차에 총 전기에너지 E_e 만큼을 공급한다. 이 에너지는 전기자동차가 공기 저항과 구름마찰력 F_f 에 대하여 속력 $v = 80.0 \text{ km/h}$ 으로 움직이게 해준다. 따라서 일-에너지 정리에 의해 총 전기에너지 E_e 는

$$E_e = F_f d \quad (28)$$

와 같다. d 는 전기자동차가 이동한 거리이다. 계산해보면

$$d = \frac{E_e}{F_f} = \frac{3.46 \times 10^7 \text{ J}}{1.20 \times 10^3 \text{ N}} = 2.88 \times 10^4 \text{ m} = 28.8 \text{ km} \quad (29)$$

이다. 배터리를 재충전하기 전까지 전기자동차는 28.8 km 이동할 수 있다.

- (마) 배터리를 모두 소모했을 때 갈 수 있는 거리 d 를 전기자동차의 배터리를 모두 충전하는데 드는 비용 M 로 나누어 킬로미터 당 전기료 N 을 구하자. d 는 식 (29)에서 구하였고 M 은 배터리의 총 전기에너지 E_e 로부터 구할 수 있다. 배터리 충전에 1 kW · h 당 100원이 필요하므로 총 전기에너지 E_e 를 충전하는데 필요한 비용 M 은

$$\begin{aligned} M &= E_e \left(\frac{100 \text{ 원}}{1 \text{ kW} \cdot \text{h}} \right) = 5(5.76 \times 10^5 \text{ C})(12.0 \text{ V}) \left(\frac{100 \text{ 원}}{1 \text{ kW} \cdot \text{h}} \right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) \left(\frac{1 \text{ kW} \cdot \text{s}}{1000 \text{ J}} \right) \\ &= 960 \text{ 원} \end{aligned} \quad (30)$$

과 같다. 배터리를 한번 충전하는데 960 원이 필요하고 배터리를 한번 충전하면 28.8 km를 갈 수 있으므로 킬로미터 당 전기료 N 은 다음과 같다.

$$N = \frac{M}{d} = \frac{960 \text{ 원}}{28.8 \text{ km}} = 33.3 \text{ 원/km}. \quad (31)$$

킬로미터 당 전기료는 33.3 원이다.