2022년 2학기 물리학 II

김현철[a1,†] and HuiJae-Lee[1,‡]
[1]*Hadron Theory Group, Department of Physics, Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*
(Dated: Autumn Semester, 2022)

QUIZ 3

문제 1 [10pt]. 아래 질문에 답하세요.

(가) 점전하가 만드는 전기장을 이용해서 가우스 법칙을 유도하세요.

(나) 도체 내부에서 전기장이 0이 됨을 설명하세요.

(다) 면전하밀도 σ로 대전되어 있고 무한히 큰 평면이 만드는 전기장의 크기는 $\sigma/2\varepsilon_0$입니다. 각각 양전하와 음전하로 대전되어 있는 무한히 큰 평면 두 개가 거리 d 만큼 떨어져서 나란히 마주 보고 있을 때, 이 두 평면 사이에서 전기장을 구하세요.

풀이 :

(가) 점전하의 전하를 q라 하고 이 점전하는 원점에 위치해 있다고 하자. 쿨롱의 법칙에 의해 이 점전하가 만드는 전기장 $\vec{E}$는

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \tag{1}$$

이다. 여기서 $\hat{r}$은 단위 벡터이다. 가우스 법칙을 유도하기 위해 중심이 원점이고 반지름이 a인 구를 통과하는 전기장의 플럭스 Φ_E를 구해볼 것이다. 중심이 원점이고 반지름이 a인 구에 대해 면적분하여 구를 통과하는 전기장 $\vec{E}$의 플럭스 Φ_E는 정의에 의해

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\, d\vec{A} \tag{2}$$

으로 쓸 수 있다. $d\vec{A}$는 구에 대한 미소 면적으로 구면 좌표계를 도입하여 쓰면

$$d\vec{A} = a^2 \sin\theta\, d\theta d\phi\, \hat{r} \tag{3}$$

이다. θ는 $\hat{r}$과 z축이 이루는 각도이고 ϕ는 $\hat{r}$을 xy평면에 정사영 내린 것과 x축이 이루는 각도이다. 적분범위는 구를 이루어야 하므로 $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$이다. 따라서 플럭스 Φ_E에 대한 식 (2)는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a^2}a^2\sin\theta\, d\theta d\phi\, (\hat{r}\cdot\hat{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(2\pi)(2) = \frac{q}{\epsilon_0}.\end{aligned} \tag{4}$$

이것이 가우스 법칙이다.

(나) 도체에는 수많은 자유전자들이 존재하는데 자유전자들은 전기력에 의해 서로에게 척력을 작용한다. 자유전자들이 서로를 밀어내기 때문에 모든 자유전자들은 결국 표면에 존재하게 되어 도체 내부의 전기력은 0이 된다.

---

[a] Office: 5S-436D (면담시간 매주 수요일-16:15∼18:00)
[†] hchkim@inha.ac.kr
[‡] hjlee6674@inha.edu

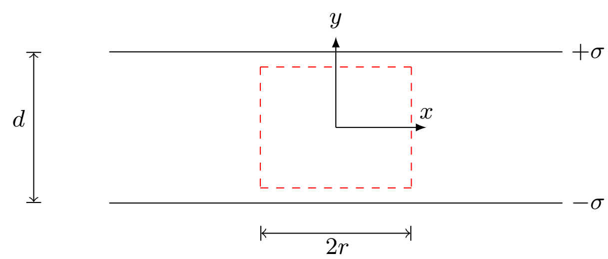

FIG. 1. 면전하밀도 σ로 대전되어 있는 무한히 큰 두 평면

(다) 중심축이 각 평면에 수직이고 밑변의 반지름이 r인 원통을 생각하자. 이 원통의 표면을 가우스면으로 하여 가우스 법칙을 이용해 전기장을 구할 것이다. 먼저 전기장의 방향을 생각해보자. 도체의 전기장은 항상 표면의 수직된 방향이므로 평면 사이 공간에서 평면과 평행한 방향의 전기장은 존재하지 않는다. 즉, x방향의 전기장은 존재하지 않는다. 가우스면을 세 부분으로 나누어보자. 반지름이 r인 원형의 면이 위, 아래로 있어 이 면들을 각각 A_t, A_b이라 하고 원통의 옆면을 A_s

문제 2 [10pt]. 한 모서리의 길이가 1.40 m인 정육면체가 그림 2처럼 균일한 전기장 아래 놓여있다. 만약 전기장이 N/C의 단위로

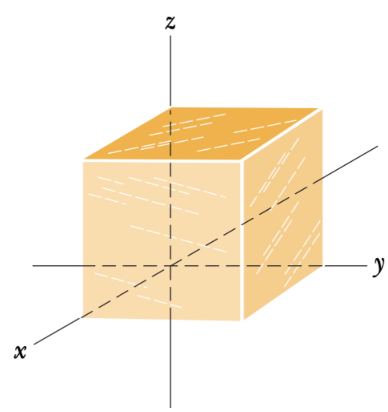

FIG. 2. **문제 2**

(가) $6.00\,\hat{\boldsymbol{i}}$,

(나) $-2.00\,\hat{\boldsymbol{j}}$,

(다) $-3.00\,\hat{\boldsymbol{i}}+4.00\,\hat{\boldsymbol{j}}$ 라면 오른쪽 면을 통과하는 전기장 다발은 각각 얼마인가?

(라) 정육면체를 통과하는 알짜 전기장 다발(net electric flux)을 구하여라.

풀이 : 플럭스의 정의로부터 오른쪽 면에 대한 면벡터를 $\vec{A}$라 하면 오른쪽 면을 통과하는 플럭스 Φ_E와 면벡터 $\vec{A}$는

$$\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{A},\quad \vec{A} = (1.40\ \text{m})^2\,\hat{\boldsymbol{j}} \tag{5}$$

이다.

(가) $\vec{E} = 6.00\ \text{N/C}\,\hat{\boldsymbol{i}}$이므로 플럭스 Φ_E는

$$\Phi_E = (6.00\ \text{N/C})(1.40\ \text{m})^2(\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}) = \vec{0} \tag{6}$$

이다.

(나) $\vec{E} = -2.00\ \mathrm{N/C}\,\hat{\boldsymbol{j}}$이므로 플럭스 Φ_E는

$$\Phi_E = -(2.00\ \mathrm{N/C})(1.40\ \mathrm{m})^2(\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}) = 3.92\ \mathrm{N\cdot m^2/C} \tag{7}$$

이다.

(다) $\vec{E} = [-3.00\,\hat{\boldsymbol{i}} + 4.00\,\hat{\boldsymbol{j}}]\ \mathrm{N/C}$이므로 플럭스 Φ_E는

$$\begin{aligned}\Phi_E &= -(3.00\ \mathrm{N/C})(1.40\ \mathrm{m})^2(\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}) + (4.00\ \mathrm{N/C})(1.40\ \mathrm{m})^2(\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}})\\ &= 7.84\ \mathrm{N\cdot m^2/C}\end{aligned} \tag{8}$$

이다.

(라) 일반적인 전기장 $E_x\,\hat{\boldsymbol{i}} + E_y\,\hat{\boldsymbol{j}} + E_z\,\hat{\boldsymbol{k}}$와 정육면체의 6개 면에 대응되는 면벡터 $\vec{A}_{\pm x}$, $\vec{A}_{\pm y}$, $\vec{A}_{\pm z}$을 이용하여 플럭스 Φ_E를 생각해보자. 예를 들어, 면벡터 $\vec{A}_{+x}$와 $\vec{A}_{-z}$는

$$\vec{A}_{+x} = (1.40\ \mathrm{m})^2\,\hat{\boldsymbol{i}},\ \ \vec{A}_{-z} = -(1.40\ \mathrm{m})^2\,\hat{\boldsymbol{k}} \tag{9}$$

이다. 따라서 정육면체를 통과하는 알짜 전기장 다발, 모든 플럭스의 합 $\sum\Phi_E$은

$$\sum\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{A}_{+x} + \vec{E}\cdot\vec{A}_{-x} + \vec{E}\cdot\vec{A}_{+y} + \vec{E}\cdot\vec{A}_{-y} + \vec{E}\cdot\vec{A}_{+z} + \vec{E}\cdot\vec{A}_{-z} \tag{10}$$

라고 할 수 있는데 전기장이 일정하므로

$$\sum\Phi_E = \vec{E}\cdot\left(\vec{A}_{+x} + \vec{A}_{-x} + \vec{A}_{+y} + \vec{A}_{-y} + \vec{A}_{+z} + \vec{A}_{-z}\right) \tag{11}$$

로 쓸 수 있다. 전기장이 일정하지 않았다면 각 면을 통과하는 전기장의 크기가 달랐을 것이므로 위와 같이 쓸 수 없다. 그런데, 서로 평행한 면의 면벡터는 크기가 같고 방향이 반대이다. 즉,

$$\vec{A}_{+x} = -\vec{A}_{-x},\ \ \vec{A}_{+y} = -\vec{A}_{-y},\ \ \vec{A}_{+z} = -\vec{A}_{-z} \tag{12}$$

이므로 식 (11)의 면벡터의 합은 0이 된다. 따라서 알짜 전기장 다발 $\sum\Phi_E$은 0이다.

$$\sum\Phi_E = 0. \tag{13}$$

문제 3 [20pt]. 그림 3처럼 질량이 1 mg이고 전하가 $q = 2.0\times10^{-8}$ C로 균일하게 분포되어 있는 작은 부도체 공이 얇고 전하가 균일하게 대전된 부도체 면과 $\theta = 30°$의 각을 이루며 부도체 실에 매달려 있다. 이 절연체 판이 무한히

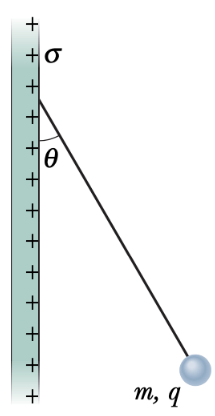

FIG. 3. **문제 3**

크다고 가정하자. 이와 같은 평형을 만들 수 있는 면전하밀도 σ를 구하여라.

풀이 :

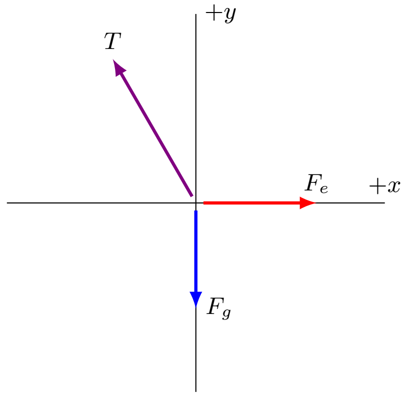

FIG. 4. 자유 물체 다이어그램

우선 부도체 공에 대한 자유 물체 다이어그램을 그려보자. T는 장력, F_g는 공에 작용하는 중력이고 F_e는 절연체 판에 의해 공에 작용하는 전기력이다. 공의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\sum F_x = F_e - T\sin\theta, \tag{14}$$

$$\sum F_y = T\cos\theta - F_g. \tag{15}$$

무한히 큰 판에 의한 전기장의 크기 E는

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{16}$$

이고 공에 작용하는 전기력 F_e는

$$F_e = qE = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \tag{17}$$

이다. 이를 x방향 운동방정식 (14)에 대입하면

$$\frac{q\sigma}{2\epsilon_0} - T\sin\theta = 0 \tag{18}$$

을 얻는다. 이 식에서 장력 T만 구하면 면전하밀도 σ를 구할 수 있다. y방향 운동방정식 (15)으로부터 장력 T를 다른 변수들로 표현하고

$$T\cos\theta = F_g \Longrightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta} \tag{19}$$

이를 식 (18)에 대입하면

$$\frac{q\sigma}{2\epsilon_0} - mg\tan\theta = 0 \Longrightarrow \sigma = \frac{2\epsilon_0 mg}{q}\tan\theta \tag{20}$$

으로 면전하밀도 σ에 대한 식을 얻는다. 공의 질량 m은 1 mg $= 1\times10^{-6}$ kg이므로 면전하밀도 σ는

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{2(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(1\times10^{-6}\ \mathrm{kg})(9.81\ \mathrm{m/s^2})}{2.0\times10^{-8}\ \mathrm{C}}\tan 30^\circ \\ &= 5.01\ \mathrm{C/m^2}\end{aligned} \tag{21}$$

이다. 즉, 평형을 만들 수 있는 면전하밀도 σ는 5.01 $\mathrm{C/m^2}$이다.

문제 4 [50pt]. 그림 5에서 상자 모양의 가우스 면이 $+24.0\varepsilon_0$ C의 알짜전하를 포함하고 전기장 $\vec{E} = [(10.0+2.00x)\,\hat{\boldsymbol{i}} - 3.00\,\hat{\boldsymbol{j}} + bz\,\hat{\boldsymbol{k}}]$ N/C 안에 놓여 있다. x, z은 미터 단위로 주어지고, b는 상수이다. 밑면은 xz평면이고, 윗면은 $y_2 = 1.00$ m를 지나는 수평면이다. $x_1 = 1.00$ m, $x_2 = 4.00$ m, $z_1 = 1.00$ m, $z_2 = 3.00$ m일 때, 상수 b는 얼마인가?

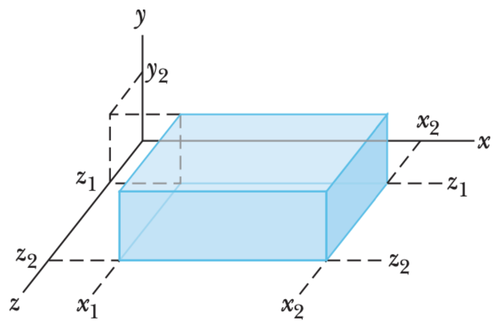

FIG. 5. **문제 4**

풀이 : 가우스 법칙에 의하면 폐곡면을 지나는 플럭스의 총합은 내부 전하량에 비례한다:

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}. \tag{22}$$

이 경우는 전기장이 x와 z에 의존하므로 각 면에 대한 플럭스를 하나씩 구해야 한다. 직육면체에 존재하는 면 6개에 대응하는 면벡터를 각각 $\vec{A}_{\pm x}$, $\vec{A}_{\pm y}$, $\vec{A}_{\pm z}$라 하자. 예를 들어 $\vec{A}_{+x}$와 $\vec{A}_{-z}$는 각각

$$\begin{aligned}\vec{A}_{+x} &= \left.(y_2-y_1)(z_2-z_1)\right|_{x=x_2}\hat{\boldsymbol{i}} = [2.00\,\hat{\boldsymbol{i}}]\ \mathrm{m}^2\\ \vec{A}_{-z} &= -\left.(x_2-x_1)(y_2-y_1)\right|_{z=z_1}\hat{\boldsymbol{k}} = [-3.00\,\hat{\boldsymbol{k}}]\ \mathrm{m}^2\end{aligned} \tag{23}$$

이다. 또한 각 면벡터는 해당 방향 성분의 전기장과만 연산이 된다. 즉,

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{A} = \left(\int E_x\,dA_{+x} - \int E_x\,dA_{-x}\right) + \left(\int E_y\,dA_{+y} - \int E_y\,dA_{-y}\right) + \left(\int E_z\,dA_{+z} - \int E_z\,dA_{-z}\right) \tag{24}$$

을 계산하면 된다. x방향의 계산을 먼저 해보면

$$\begin{aligned}\int E_x\,dA_{+x} - \int E_x\,dA_{-x} &= \left.\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2} E_x\,dydz\right|_{x=x_2} - \left.\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2} E_x\,dydz\right|_{x=x_1}\\ &= \left[\int_{1.00\ \mathrm{m}}^{3.00\ \mathrm{m}}\int_{0\ \mathrm{m}}^{1.00\ \mathrm{m}} 18.0\,dydz\right]\ \mathrm{N/C} - \left[\int_{1.00\ \mathrm{m}}^{3.00\ \mathrm{m}}\int_{0\ \mathrm{m}}^{1.00\ \mathrm{m}} 12.0\,dydz\right]\ \mathrm{N/C}\\ &= 12.0\ \mathrm{N/C}\end{aligned} \tag{25}$$

이므로 x방향으로 흐르는 플럭스의 총합은 12 N/C이다. y방향의 계산은

$$\begin{aligned}\int E_y\,dA_{+y} - \int E_y\,dA_{-y} &= \left.\int_{z_1}^{z_2}\int_{x_1}^{x_2} E_y\,dxdz\right|_{y=y_2} - \left.\int_{z_1}^{z_2}\int_{x_1}^{x_2} E_y\,dxdz\right|_{y=y_1}\\ &= -\left[\int_{1.00\ \mathrm{m}}^{3.00\ \mathrm{m}}\int_{1.00\ \mathrm{m}}^{4.00\ \mathrm{m}} 3.00\,dxdz\right]\ \mathrm{N/C} + \left[\int_{1.00\ \mathrm{m}}^{3.00\ \mathrm{m}}\int_{1.00\ \mathrm{m}}^{4.00\ \mathrm{m}} 3.00\,dxdz\right]\ \mathrm{N/C}\\ &= 0\ \mathrm{N/C}\end{aligned} \tag{26}$$

이다. 이는 y방향으로 흐르는 플럭스의 총합은 모두 상쇄되기 때문이다. z방향의 계산은

$$\begin{aligned}\int E_z\,dA_{+z} - \int E_z\,dA_{-z} &= \left.\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} E_z\,dxdy\right|_{z=z_2} - \left.\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} E_z\,dxdy\right|_{z=z_1}\\ &= \left[\int_{0\ \mathrm{m}}^{1.00\ \mathrm{m}}\int_{1.00\ \mathrm{m}}^{4.00\ \mathrm{m}} 3.00b\,dxdy\right]\ \mathrm{N/C} - \left[\int_{0\ \mathrm{m}}^{1.00\ \mathrm{m}}\int_{1.00\ \mathrm{m}}^{4.00\ \mathrm{m}} 1.00b\,dxdy\right]\ \mathrm{N/C}\\ &= 6.00b\ \mathrm{N/C}\end{aligned} \tag{27}$$

로 z방향으로 흐르는 플럭스의 총합이 $6.00b$ N/C이라는 사실을 얻는다. 이 결과들과 직육면체 내부에 포함된 알짜 전하 $+24.0\varepsilon_0$ C를 고려하여 식 (22)을 이용하면

$$12.0\ \mathrm{N/C} + 0\ \mathrm{N/C} + 6.00b\ \mathrm{N/C} = 24.0\ \mathrm{N/C} \Longrightarrow b = 2 \tag{28}$$

와 같이 $b = 2$를 얻는다.