2022년 2학기 물리학 II

Hui-Jae Lee[1,*] and 김현철[†1,‡]

[1]*Hadron Theory Group, Department of Physics, Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*

(Dated: Autumn Semester, 2022)

Quiz 15

문제 1 [20pt]. 어떤 렌즈 앞에 물체를 놓았더니 4배 크기의 실상이 생겼고, 이 물체를 렌즈에서 4.00 cm 더 멀리 하였더니 2배 크기의 실상이 생겼다. 이 렌즈의 초점거리는 얼마인가?

풀이 : 렌즈에서 물체까지의 거리를 p, 렌즈에서 상까지의 거리를 q, 렌즈의 초점거리를 f라 하면 다음의 얇은 렌즈 방정식이 성립한다.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}. \tag{1}$$

또한 상의 배율 M은

$$M=-\frac{q}{p} \tag{2}$$

이므로 식 (1)에 대입하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{M}\right)=\frac{1}{f} \tag{3}$$

처음 렌즈와 물체 사이의 거리를 p_1이라 하면 4배 크기의 실상이 생겼으므로

$$\frac{1}{p_1}\left(1-\frac{1}{-4}\right)=\frac{5}{4p_1}=\frac{1}{f} \tag{4}$$

이다. 볼록렌즈에 의해 생기는 실상은 도립 실상 뿐이므로 배율의 부호가 −이다. 물체를 렌즈로부터 4.00 cm 멀리 하였을 때 2배 크기의 실상이 생겼으므로

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p_1+4.00\ \text{cm}}\left(1-\frac{1}{-2}\right)=\frac{3}{2p_1+8.00\ \text{cm}}=\frac{1}{f}\\&\Longrightarrow 3f=2p_1+8.00\ \text{cm}\end{aligned} \tag{5}$$

로 쓸 수 있다. 식 (4)와 식 (5)을 연립하면

$$3f=\frac{5}{2}f+8.00\ \text{cm}\Longrightarrow f=4.00\ \text{cm} \tag{6}$$

초점거리 4.00 cm를 얻을 수 있다.

문제 2 [30pt]. 굴절율이 1.62인 유리로 만든 얇은 렌즈가 있다. 이 렌즈의 한쪽 면은 오목하며 곡률 반지름이 100 cm이고, 다른 한쪽 면은 볼록하며 곡률 반지름이 40.0 cm이다. 이 렌즈의 초점거리를 구하여라.

[†] Office: 5S-436D (면담시간 매주 수요일-16:15∼19:00)

[*]Electronic address: hjlee6674@inha.edu

[‡]Electronic address: hchkim@inha.ac.kr

풀이 : 렌즈의 굴절률을 n, 렌즈의 앞면 곡률 반지름을 R_1, 뒷면 곡률 반지름을 R_2라 하면 렌즈의 초점거리 f는 렌즈 제작자의 공식에 의해 다음과 같다.

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{7}$$

렌즈의 볼록한 면을 앞면이라 하자. 두 면의 곡률 중심이 렌즈 뒤에 있으므로 R_1, R_2의 부호는 +이고 식 (7)에 대입하여

$$\begin{aligned} &\frac{1}{f} = (1.62-1)\left(\frac{1}{40.0 \text{ cm}} - \frac{1}{100.0 \text{ cm}}\right) = \frac{0.62 \times 3}{200.0 \text{ cm}} \\ &\Longrightarrow f = 108 \text{ cm} \end{aligned} \tag{8}$$

초점거리 108 cm를 얻을 수 있다.

문제 3 [50pt]. 너비 a와 간격이 d인 이중실틈(doubleslit)에 파장이 λ인 결맞은 빛을 비춘다. 실틈에서부터 D만큼 떨어진 화면에 나타나는 밝은 간섭무늬 사이의 거리는 얼마인가?
풀이 : 두 슬릿의 양 끝에서 출발하는 네개의 파동 ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4이 스크린의 한 부분에서 만난다고 가정하자. ψ_1, ψ_2는 a만큼, ψ_1, ψ_4는 $2a+d$만큼 떨어져 있다. ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4는 각각

$$\begin{aligned} &\psi_1 = A\sin(\omega t - kr_1), \;\; \psi_2 = A\sin(\omega t - kr_2), \\ &\psi_3 = A\sin(\omega t - kr_3), \;\; \psi_4 = A\sin(\omega t - kr_4) \end{aligned} \tag{9}$$

로 쓸 수 있다. ψ_1, ψ_2의 합과 ψ_3, ψ_4의 합은 각각

$$\begin{aligned} &\psi_{12} = 2A\sin\left(\omega t - \frac{k}{2}(r_1+r_2)\right)\cos\frac{\phi}{2}, \\ &\psi_{34} = 2A\sin\left(\omega t - \frac{k}{2}(r_3+r_4)\right)\cos\frac{\phi'}{2} \end{aligned} \tag{10}$$

이다. 여기서 $\phi = k(r_1 - r_2)$이고 $\phi' = k(r_3 - r_4)$이다. 이 둘이 서로 같아

$$\phi \approx \phi' = \frac{2\pi}{\lambda} a\sin\theta \tag{11}$$

라고 가정하자. 그러면 ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4의 전체 합을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \psi_{1234} = \psi_{12} + \psi_{34} &= 2A\cos\frac{\phi}{2}\left\{\sin\left(\omega t - \frac{k}{2}(r_1+r_2)\right) + \sin\left(\omega t - \frac{k}{2}(r_3+r_4)\right)\right\} \\ &= 4A\cos\frac{\phi}{2}\sin\left(\omega t - \frac{k}{4}(r_1+r_2+r_3+r_4)\right)\cos\frac{\phi''}{2}. \end{aligned} \tag{12}$$

여기서 $\phi'' = k(r_1 + r_2 - (r_3 + r_4))$이다. 스크린에서 빛의 세기 I는 $|\psi^2|$에 비례하므로

$$I \sim 16A^2\cos^2\frac{\phi}{2}\sin^2\left(\omega t - \frac{k}{4}(r_1+r_2+r_3+r_4)\right)\cos^2\frac{\phi''}{2} \tag{13}$$

이고 시간에 대한 평균 $\langle I\rangle$를 계산하면 $\sin^2(\omega t - C)$에 대한 평균은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\left\langle \sin^2(\omega t - C)\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t - C)\,dt = \frac{1}{2}. \tag{14}$$

C는 시간에 대한 상수이다. 따라서 $\langle I\rangle$는

$$\begin{aligned} \langle I\rangle &= 16A^2\cos^2\frac{\phi}{2}\left\langle \sin^2\left(\omega t - \frac{k}{4}(r_1+r_2+r_3+r_4)\right)\right\rangle\cos^2\frac{\phi''}{2} \\ &= 8A^2\cos^2\frac{\phi}{2}\cos^2\frac{\phi''}{2} \end{aligned} \tag{15}$$

와 같다. 가정 $\phi \approx \phi'$에 의해

$$\begin{aligned} \phi \approx \phi' &\Longrightarrow r_1 - r_2 \approx r_3 - r_4 \\ &\Longrightarrow \phi'' \approx 2\phi \end{aligned} \tag{16}$$

이고 식 (15)은

$$\langle I \rangle = 8A^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \cos^2 \phi \tag{17}$$

이다. $\cos^2 \frac{\phi}{2}$의 주기는 2π이고 $\cos^2 \phi$의 주기는 π이므로 $\langle I \rangle$의 주기는 2π이고 빛의 세기의 최댓값 또한 같은 주기를 가진다. ϕ는

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta \tag{18}$$

이고 $\theta << 1$이라 하면

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{y}{D} \tag{19}$$

이다. y는 스크린의 중심으로부터 빛의 세기가 첫번째로 최댓값이 되는 지점까지의 거리이다. ϕ가 2π만큼 변할 때 마다 빛의 세기가 최댓값을 가지므로 y는

$$2\pi = \frac{2\pi a}{\lambda D} y \Longrightarrow y = \frac{a}{D}\lambda \tag{20}$$

이다.

문제 4 [50pt]. 폭이 a인 단일슬릿에서부터 L만큼 떨어진 곳에 스크린을 두었다. 단일슬릿 앞에서 파장이 λ인 빛을 쪼였다. $a \ll L$ 이라고 하자. 만약에 회절 무늬에서 어두운 부분을 나타내는 두 최소점 $m = m_1$과 $m = m_2$ 사이의 거리를 Δy라고 둔다면, 이 슬릿의 폭 a는 얼마인가?
풀이 : 단일 슬릿의 경우 중심에서부터 어두운 부분까지의 거리를 y_m이라 하면

$$y_m = \frac{m\lambda L}{a}, \;\; m = 1, 2, 3, \cdots \tag{21}$$

로 쓸 수 있고 두 중심에서 두 최소점 까지의 거리 y_1, y_2는

$$y_1 = \frac{m_1 \lambda L}{a}, \;\; y_2 = \frac{m_2 \lambda L}{a} \tag{22}$$

이다. 따라서 Δy는

$$\Delta y = y_2 - y_1 = \frac{m_2 \lambda L}{a} - \frac{m_1 \lambda L}{a} \tag{23}$$

이고 a는

$$a = \frac{(m_2 - m_1)\lambda L}{\Delta y} \tag{24}$$

이다.