2022년 1학기 물리학 I: Quiz 12

김현철[a1,†] and Lee Hui-Jae[1,‡]
[1]*Hadron Theory Group, Department of Physics,*
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea
(Dated: Spring semester, 2022)

문제 1. (20 pt) 아래 그림과 같이 끈의 길이가 l로 같은 두 진자의 끝에 질량이 각각 m, M인 두 공이 달려 있다. 질량이 m인 공을 d만큼 높은 위치까지 들어올렸다가 놓았다. 여기서 끈의 질량은 무시한다. 완전 비 탄성충돌이 일어나는 경우 충돌 직후에 합쳐진 물체의 속력은 얼마인가?

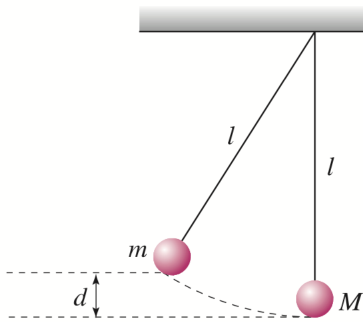

FIG. 1. 문제 1

풀이 : 맨처음 두 진자가 가지고 있는 역학적 에너지의 합을 E_i라 하자. E_i는,

$$E_i = mgd. \tag{1}$$

질량이 M인 진자는 충돌 직전까지 정지해 있었으므로 충돌 직전 E_i는 모두 질량이 m인 진자의 운동에너지로 전환되었다. 충돌 직전 질량이 m인 진자의 속력을 v_0라고 하면,

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_i}{m}} = \sqrt{2gd}. \tag{2}$$

두 진자는 완전 비탄성 충돌을 한다. 충돌 직후 두 진자의 속력을 v_1이라 하면,

$$mv_0 = (m+M)v_1, \quad v_1 = \frac{m}{m+M}v_0. \tag{3}$$

따라서 충돌 직후 합쳐진 물체의 속력 v_1은 다음과 같다.

$$v_1 = \frac{m\sqrt{2gd}}{m+M}. \tag{4}$$

문제 2. (40 pt) 다음 그림과 같이 길이가 L인 기차의 왼쪽 벽($x = 0$)에 질량이 m인 철수가 서 있다. 철수와 기차는 모두 정지해 있다. 이제, 철수가 기차의 오른쪽 벽으로 이동한다. 기차의 질량이 M이고 기차와 선로 사이에는 마찰이 없다.

(가) 철수가 기차의 왼쪽 벽에 서 있을 때(즉 철수의 위치가 $x = 0$일 때) 기차와 철수를 합한 전체 계의 질량중심의 좌표 $x_{\rm cm}$ 을 구하여라.

---

[a] Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00∼20:00)
[†] hchkim@inha.ac.kr
[‡] hjlee6674@inha.edu

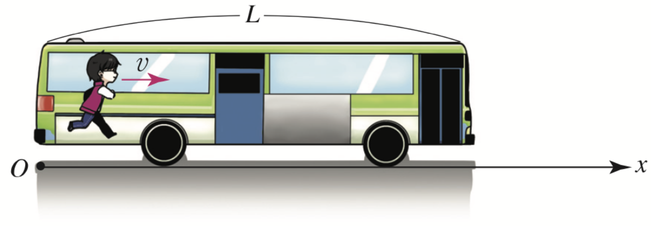

FIG. 2. 문제 2

(나) 초기에 정지해 있던 철수가 속력 v로 움직일 때 기차와 철수를 합한 전체의 선운동량은 얼마인가? (단, 이 경우 철수의 속력 v는 외부에 정지한 관측자가 본 속력이다.)

(다) 철수가 속력 v로 움직이는 동안 기차가 움직이는 속력은 얼마인가?

(라) 철수가 기차의 오른쪽 벽까지 갔을 때 기차와 철수를 합한 전체의 질량중심의 좌표는 얼마이어야 하는가?

(마) 철수가 이동하는 동안 기차도 움직였다면, 철수가 기차의 오른쪽 벽까지 갔을 때 기차가 움직인 거리는 얼마인가?

풀이 :

(가) 철수는 $x = 0$에 위치해 있으므로 철수의 질량중심은 0이다. 기차의 질량중심을 x_t라고 하자. 기차의 질량이 균일하게 분포해있다고 하면,

$$x_t = \frac{1}{M}\int r\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L r\rho\,dr. \tag{5}$$

기차의 밀도 ρ는 질량에 길이를 나눈 것이므로,

$$x_t = \frac{1}{M}\int_0^L \frac{M}{L} r\,dr = \frac{1}{2}L. \tag{6}$$

따라서 전체 질량중심 x_{cm}은 다음과 같다.

$$x_{cm} = \frac{0 + Mx_t}{m + M} = \frac{ML}{2(m+M)}. \tag{7}$$

(나) 계의 총 선운동량은 외력에 의존한다. 철수가 v로 움직일 때 전체 계에 외력이 작용하지 않으므로 전체의 선운동량은 변하지 않는다. 처음에 철수와 기차 모두 정지해 있었으므로 전체의 선운동량은 0이다.

(다) 총 선운동량이 0이므로 철수의 운동량과 기차의 운동량의 합은 0이다. 기차의 속력을 v_t라고 하면 기차와 철수의 운동 방향이 반대이므로,

$$mv + (-Mv_t) = 0, \;\; v_t = \frac{m}{M}v. \tag{8}$$

이다.

(라) 전체의 선운동량이 변하지 않으므로 전체의 질량중심 또한 변하지 않는다. 철수가 오른쪽 벽까지 갔을때 전체의 질량중심의 좌표는,

$$x_{cm} = \frac{ML}{2(m+M)}. \tag{9}$$

이다.

(마) 기차가 거리 d만큼 움직였다고 하자. 전체의 질량중심은 변하지 않고 철수가 $x = L - d$에 위치하므로 이 때 기차의 질량중심의 좌표 x_{t2}는,

$$x_{t2} = \frac{L}{2} - d. \tag{10}$$

식 (7)에 의해,

$$x_{cm} = \frac{ML}{2(m+M)} = \frac{m(L-d) + Mx_{t2}}{m+M} = \frac{1}{m+M}\left(m(L-d) + M\left(\frac{L}{2} - d\right)\right). \tag{11}$$

따라서 기차가 움직인 거리 d는,

$$\frac{1}{2}ML = mL + \frac{1}{2}ML - (m+M)d, \;\; d = \frac{mL}{m+M}, \tag{12}$$

이다.

문제 3. (30pt) 그림 3에서처럼 질량 m_1인 물체 1이 정지상태에서 출발한 뒤, 마찰이 없는 비탈을 따라 높이 $h = 2.50\,\mathrm{m}$를 미끄러져 내려와 질량 $m_2 = 2.00m_1$인 정지해 있는 물체 2와 충돌하였다. 충돌 뒤, 물체 2는 운몽마찰계수가 $\mu_k = 0.500$인 영역으로 들어와서 거리 d만큼 가다가 멈췄다.

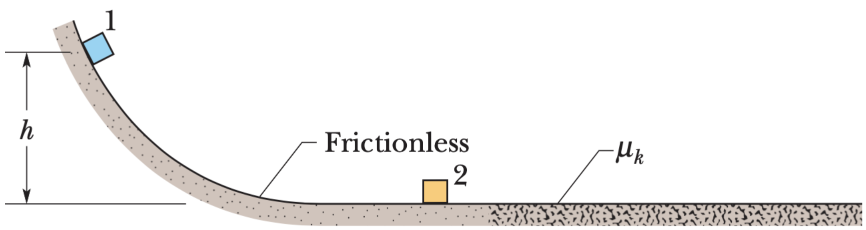

FIG. 3. 문제 3

(가) 탄성출동일 때와

(나) 비탄성충돌일 때 d는 각각 얼마인가?

풀이 :

(가) 처음 역학적 에너지를 E_i라고 하면 E_i는 물체 1이 가진 위치에너지 뿐이므로,

$$E_i = m_1 gh. \tag{13}$$

E_i는 충돌 직전 시점에 물체 1의 운동에너지로 전환되었다. 충돌 직전 물체 1의 속력을 v라고 하면,

$$\frac{1}{2}m_1 v = E_i = m_1 gh, \;\; v = \sqrt{2gh}. \tag{14}$$

두 물체가 탄성충돌 하므로 충돌 이후 물체 1의 속도를 v_1, v_2라고 하면,

$$\begin{aligned} m_1 v &= m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{1}{2}m_1 v^2 &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2. \end{aligned} \tag{15}$$

식 (14)에 의해,

$$m_1\sqrt{2gh} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \tag{16}$$

$$m_1 gh = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2. \tag{17}$$

식 (16)에 의해,

$$m_2 v_2 = m_1(\sqrt{2gh} - v_1), \tag{18}$$

이고, 식 (17)에 2를 곱하고 식 (18)를 대입하면,

$$2m_1 gh = m_1 v_1^2 + m_1(\sqrt{2gh} - v_1)v_2. \tag{19}$$

우변의 첫 항을 좌변으로 옮기고 인수분해하면 다음과 같다.

$$m_1(\sqrt{2gh} + v_1)(\sqrt{2gh} - v_1) = m_1(\sqrt{2gh} - v_1)v_2. \tag{20}$$

따라서,

$$v_2 = \sqrt{2gh} + v_1. \tag{21}$$

v_2를 다시 (16)에 대입하여 다음을 얻을 수 있다.

$$m_1\sqrt{2gh} = m_2\sqrt{2gh} + (m_1 + m_2)v_1, \ \ v_1 = \frac{\sqrt{2gh}(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}. \tag{22}$$

따라서 v_2는,

$$v_2 = \frac{2m_1\sqrt{2gh}}{m_1 + m_2}. \tag{23}$$

물체 2가 마찰력인 존재하는 영역에서 운동하면 마찰력에 의해 운동에너지를 잃고 정지한다. 물체 2에 작용하는 마찰력 f_k와 마찰력이 물체 2가 멈출 때 까지 한 일 W_k는,

$$f_k = \mu_k N = \mu_k m_2 g, \ \ W_k = -f_k d = -\mu_k m_2 g d. \tag{24}$$

마찰력과 물체가 움직이는 방향이 반대이기 때문에, W_k의 부호는 $-$이다. 마찰력이 물체 2에 한 일은 물체 2의 운동에너지 변화량과 같다. 즉,

$$W_k = -\mu_k m_2 g d = \Delta E_k = 0 - \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = -\frac{1}{2}m_2 v_2^2, \ \ d = \frac{v_2^2}{2\mu_k g}. \tag{25}$$

식 (23)에 의해,

$$\begin{aligned} d &= \frac{4m_1^2 h}{(m_1 + m_2)^2 \mu_k} = \frac{4m_1^2(2.50\,\mathrm{m})}{(3.00\,m_1)^2(0.500)} \\ &= \frac{4(2.50\,\mathrm{m})}{9.00(0.500)} \\ &= 2.22\,\mathrm{m}. \end{aligned} \tag{26}$$

탄성충돌한 물체 2는 2.22 m만큼 움직인다.

(나) 공이 완전 비탄성충돌한다고 하자. 충돌 후 속력을 v_0라고 하면 식 (16)으로 부터,

$$m_1\sqrt{2gh} = (m_1 + m_2)v_0. \tag{27}$$

따라서 v_0는,

$$v_0 = \frac{m_1\sqrt{2gh}}{m_1 + m_2}. \tag{28}$$

완전 비탄성충돌한 물체에 작용하는 마찰력 f_k와 마찰력이 물체가 멈출 때 까지 한 일 W_k는,

$$f_k = \mu_k N = \mu_k(m_1 + m_2), \ \ W_k = -f_k d = -\mu_k(m_1 + m_2)gd. \tag{29}$$

W_k는 물체의 운동에너지 변화량과 같다. 따라서,

$$-\mu_k(m_1+m_2)gd = \Delta E_k = 0 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_0^2 = -\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1\sqrt{2gh}}{m_1+m_2}\right)^2. \tag{30}$$

양변을 (m_1+m_2)로 나누고 d에 대해 정리하면,

$$\begin{aligned} d &= \frac{m_1^2 h}{(m_1+m_2)^2\mu_k} = \frac{m_1^2(2.50\,\mathrm{m})}{(3.00m_1)^2(0.500)} \\ &= 0.556\,\mathrm{m}. \end{aligned} \tag{31}$$

완전 비탄성충돌한 물체는 0.556 m만큼 움직인다.

문제 4. (40pt) 질량 m, 반지름 r ($r \ll R$)인 공이 그림 4과 같이 미끄러지지 않고 굴러내려오고 있다. 이 공이 반지름 R인 원형경로 밑바닥에서부터 높이 h인 위치에 공의 가장 낮은 지점이 닿아있다. 공을 정지상태에서 놓으면

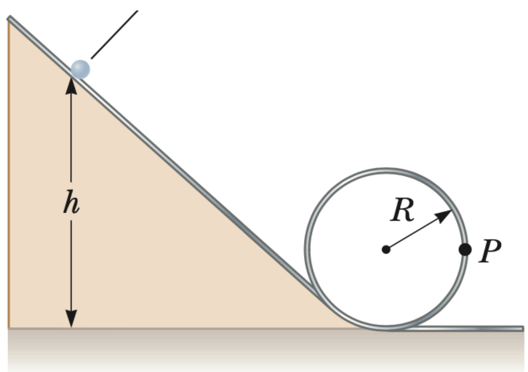

FIG. 4. 문제 4

(가) 공이 원형궤도를 완전히 한바퀴돌 수 있는 h의 최소값은 얼마인가? r과 R로 표현하여라.

(나) $h = 3R$이면, P점에서 공에 작용하는 힘의 성분들은 얼마인가?

풀이 :

(가) 처음 공이 가지고 있는 역학적 에너지 E_i는 다음과 같다.

$$E_i = mg(h+r). \tag{32}$$

공이 원형궤도를 완전히 한바퀴 돌기 위해 원형궤도의 꼭대기 지점에서 속력이 충분히 커야한다. 꼭대기 지점에서 공의 자유 물체 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.

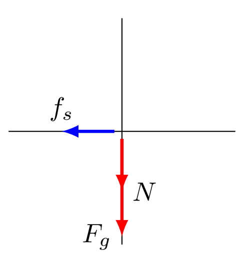

FIG. 5. 자유 물체 다이어그램

초기 높이 h에 따라 공이 꼭대기에 위치할 때 속력이 달라진다. h가 크면 역학적 에너지 보존에 의해 꼭대기에서의 공의 속력 또한 커진다. 꼭대기에서 공의 속력을 v라고 하자. 운동방정식은,

$$\sum F_y = -N - F_g = -\frac{mv^2}{R-r} \tag{33}$$

N은 궤도가 공에 주는 수직항력이다. 수직항력과 중력의 합이 구심력이 되어 공이 원궤도를 돌 수 있게 해준다. h가 커질 수록 v도 커지고 수직항력 N 또한 커진다. h가 최소일 때는 공이 중력만을 구심력으로 삼아 원형궤도를 돌아야 하는 순간이다. 즉 $N = 0$인 순간이다. 그 때 공의 속력을 v_0라 하면,

$$\sum F_y = -F_g = -\frac{mv_0^2}{R-r}, \tag{34}$$

이고 v_0는 원형궤도를 돌 수 있는 속력의 최소값이므로,

$$\sqrt{g(R-r)} \leq v, \;\; \sqrt{g(R-r)} = v_0. \tag{35}$$

한편, 에너지 보존 법칙에 의해 꼭대기 지점에서 공의 역학적 에너지의 합은,

$$E_d = E_i = mg(h+r) = mg(2R-r) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \;\; \omega = \frac{v}{r}. \tag{36}$$

공의 관성 모멘트 I는,

$$I = \frac{2}{5}mr^2. \tag{37}$$

따라서,

$$\begin{aligned} mg(h+r) &= mg(2R-r) + \frac{1}{2}\left(m + \frac{2}{5}m\right)v^2 \\ &= mg(2R-r) + \frac{7}{10}mv^2, \end{aligned} \tag{38}$$

이다. v는,

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}g(h - 2(R-r))}, \tag{39}$$

이다. 식 (35)과 (44)에 의해,

$$g(R-r) \leq \frac{10}{7}g(h-2(R-r)), \;\; \frac{27}{10}(R-r) \leq h, \tag{40}$$

이다. $r \ll R$이므로 원형궤도를 돌기 위한 h의 최소값은 다음과 같다.

$$\frac{27}{10}(R-r) = \frac{27}{10}R \leq h. \tag{41}$$

h의 최소값은 $2.7R$ 이다.

(나) 공이 점 P에 있을 때 자유 물체 다이어그램을 그려보면 다음과 같다. N은 공에 작용하는 수직항력, F_g는 공에 작용하는 중력이다.

공은 시계 방향으로 자전하면서 궤도를 돈다. 공이 미끄러지지 않으므로 공과 궤도 사이에 정지 마찰력 f_s가 수직 위 방향으로 작용한다. 따라서 각 방향으로 작용하는 합력을 구해보면 다음과 같다.

$$\sum F_x = -N = -\frac{mv^2}{R-r} \tag{42}$$

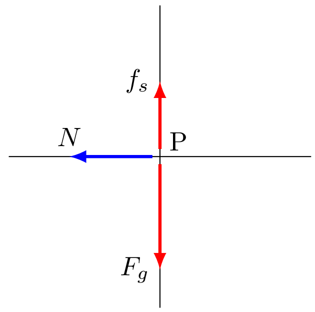

FIG. 6. 자유 물체 다이어그램

N은 궤도가 공에게 작용하는 수직항력이고 v는 점 P에서 공의 속력이다. 에너지 보존 법칙에 의해,

$$\begin{aligned} mg(3R+r) &= mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2 \\ &= mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2. \end{aligned} \tag{43}$$

따라서 v^2는 다음과 같다.

$$v^2 = \frac{10}{7}(2R+r)g \tag{44}$$

식 (44)를 (42)에 대입하여 힘의 x성분을 얻을 수 있다.

$$\sum F_x = -\frac{10(2R+r)mg}{7(R-r)} = -\frac{20}{7}mg. \tag{45}$$

y축 방향으로 작용하는 힘은,

$$\sum F_y = f_s - mg = -mr\alpha. \tag{46}$$

α는 공의 각가속도이다. f_s는,

$$f_s = mg - mr\alpha. \tag{47}$$

이다. 이제 공의 자전에 대해 생각해보자. 공이 시계방향으로 자전하므로 공의 토크가 존재하여,

$$\sum \tau = I\alpha = \frac{2}{5}mr^2\alpha, \tag{48}$$

이다. 중력은 공의 질량중심에서 작용하는 것으로 간주할 수 있으므로 회전에 관여하는 힘은 f_s뿐이다. 따라서 토크 τ의 합은,

$$\sum \tau = f_s r = \frac{2}{5}mr^2\alpha. \tag{49}$$

식 (47)와 (49)에 의해,

$$mgr - mr^2\alpha = \frac{2}{5}mr^2\alpha, \;\; \alpha = \frac{5g}{7r}, \tag{50}$$

이고 식 (46)에 대입하여 y축 힘의 성분을 구할 수 있다.

$$\sum F_y = -\frac{5}{7}mg. \tag{51}$$