2022년 2학기 물리학 II

Hui-Jae Lee[1,*] and 김현철[†1,‡]
[1]Hadron Theory Group, Department of Physics,
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea
(Dated: Autumn Semester, 2022)

Quiz 17

문제 1 [30pt]. S 관성좌표계에서 $\vec{v}$의 속도로 움직이고 있는 입자가 있다.

(가) S 좌표계에 대해 x 방향으로 상대속도 u로 움직이고 있는 관성좌표계 S'에서 이 입자의 속도의 각 성분을 구하여라.

(나) $v_x = c$일 때, $v'_x = c$임을 보여라.

풀이.

(가) S' 관성좌표계에서 관측한 입자의 속도를 $\vec{v}'$라고 하자. 이 좌표계는 S 관성좌표계에 대해 x축 방향으로 u의 상대속도로 움직이고 있으므로 로렌츠의 속도 변환 공식에 의해 속도 $\vec{v}$, $\vec{v}'$의 성분들은 다음과 같은 관계에 있다.

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - v_x u/c^2}, \\ v'_y &= \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x u/c^2)}, \\ v'_z &= \frac{v_z}{\gamma(1 - v_x u/c^2)}. \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 γ는 로렌츠 인자로 $\gamma = (1 - v_x^2/c^2)^{-1/2}$이다.

(나) 식 (1)의 x방향 성분 변환 관계로부터 $v_x = c$이면

$$v'_x = \frac{c - u}{1 - cu/c^2} = \frac{c - u}{1 - u/c} = c\frac{1 - u/c}{1 - u/c} = c \tag{2}$$

$v'_x = c$임을 알 수 있다.

문제 2 [70pt]. 로렌츠 변환을 자세히 유도하여라. 즉,

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{3}$$

임을 자세히 보여라.
풀이. 두 관성좌표계 S와 S'으로부터 각각 (x, y, z, t), (x', y', z', t')만큼 떨어진 지점에 사건 A가 발생하였다고 하자. 사건 A의 발생이 S의 원점에 위치한 관측자에 도달하는 시간 t와 S'의 원점에 위치한 관측자에 도달하는 시간 t'는 다음과 같다.

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2, \;\; c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \tag{4}$$

---

† Office: 5S-436D (면담시간 매주 수요일-16:15∼19:00)
*Electronic address: hjlee6674@inha.edu
‡Electronic address: hchkim@inha.ac.kr

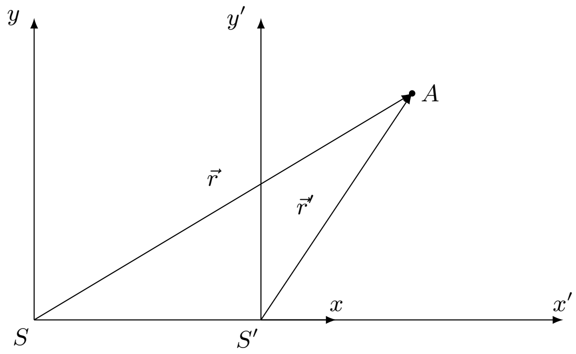

FIG. 1: 두 관성좌표계 S, S'

이 때 $y = y'$, $z = z'$이다. 관성좌표계 S'이 S에 대해 x축 방향으로 상대속도 u로 움직인다고 가정하자. 로렌츠 변환은 다음과 같이 (x, t)와 (x', t')의 변환을 가정하면서 시작한다.

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ t' = a(t - bx) \end{cases} \tag{5}$$

식 (4)에 대입하면 $y = y'$, $z = z'$이므로

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \gamma^2(x - ut)^2 + y^2 + z^2 = c^2a^2(t - bx)^2 \tag{6}$$

으로 쓸 수 있고 오른쪽 두 항을 풀어 쓰면

$$\gamma^2(x^2 - 2uxt + u^2t^2) + y^2 + z^2 = c^2a^2(t^2 - 2xbt + b^2x^2) \tag{7}$$

이다. x^2, xt, t^2끼리 묶으면

$$(\gamma^2 - c^2a^2b^2)x^2 - 2(\gamma^2u - a^2bc^2)xt + y^2 + z^2 = (c^2a^2 - \gamma^2u^2)t^2 \tag{8}$$

로 식 (4)와 비교할 수 있는 형태을 얻는다.

$$\begin{cases} (\gamma^2 - c^2a^2b^2)x^2 - 2(\gamma^2u - a^2bc^2)xt + y^2 + z^2 = (c^2a^2 - \gamma^2u^2)t^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \end{cases} \tag{9}$$

각 계수가 같아야 하므로

$$\begin{cases} \gamma^2 - c^2a^2b^2 = 1 \\ \gamma^2u - a^2bc^2 = 0 \\ c^2a^2 - \gamma^2u^2 = c^2 \end{cases} \tag{10}$$

이다. 두번째 식으로부터 얻을 수 있는

$$a^2 = \frac{\gamma^2u}{bc^2}, \quad b = \frac{\gamma^2u}{a^2c^2} \tag{11}$$

를 첫번째 식과 세번째 식에 대입해 a와 b를 소거하자. 세번째 식에 a^2을 대입하면

$$b = \frac{\gamma^2u}{c^2 + u^2\gamma^2} \tag{12}$$

를 얻고 이를 첫번째 식에 대입하여

$$\gamma^2c^2 = c^2 + u^2\gamma^2 \tag{13}$$

γ를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\gamma^2(c^2-u^2)=c^2 \Longrightarrow \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{14}$$

이를 식 (12)에 대입하여

$$b=\frac{u}{c^2} \tag{15}$$

b를 구할 수 있고 식 (11)에 대입하여

$$a^2=\gamma^2 \Longrightarrow a=\gamma \tag{16}$$

를 얻는다. 따라서 식 (5)는

$$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\ \ t'=a\frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{17}$$

인 로렌츠 변환이 된다.

문제 3 [30pt]. 정지길이가 30.0 cm인 막대자가 진행방향인 x축에 대해 30.0° 기울어진 채 x방향으로 $v=0.990c$의 속도로 움직이고 있다. 정지해 있는 관찰자가 측정한 이 자의 길이는 얼마인가?
풀이. 막대자가 기울어져 있으므로 길이 수축은 x축 방향으로의 길이에만 일어난다. 막대자의 x축 방향 길이 L_x는

$$L_x=L\cos 30.0^\circ \tag{18}$$

이고 수축이 일어난 x축 방향 길이 L'_x는

$$L'_x=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}L_x \tag{19}$$

이다. L_x =30.0 cm, $v=0.990c$이므로

$$L'_x=\sqrt{1-(0.990)^2}(30.0\ \text{cm})\cos 30.0^\circ=3.67\ \text{cm} \tag{20}$$

로 막대자의 수축된 x축 방향 길이를 구할 수 있다. 따라서 정지해 있는 관찰자가 측정한 막대자의 총 길이 L'은

$$L'=\sqrt{L'^2_x+L'^2_y}=\sqrt{(3.67\ \text{cm})^2+((30.0\ \text{cm})\sin 30.0^\circ)^2}=15.4\ \text{cm} \tag{21}$$

15.4 cm이다.

문제 4 [30pt]. 정지상태에서 중간자는 생성 후 2.0 μs만에 소멸된다. 이 중간자가 실험실에서 $0.990c$의 속력으로 움직이면, 실험실 시계로 중간자 수명은 얼마인가?
풀이. 중간자가 소멸되는데 걸리는 시간을 t라 하면 시간 팽창을 고려하여 실험실에서 관측한 시간 t'를 구할 수 있다. 시간 팽창에 의해

$$t'=\frac{t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{22}$$

$t=2.0\ \mu s$이고 $u=0.990c$이므로

$$t'=\frac{2.0\ \mu s}{\sqrt{1-(0.990)^2}}=14\ \mu s \tag{23}$$

실험실 시계로 관측한 중간자 수명은 14 μs이다.