2022년 1학기 물리학 I: Quiz 4

김현철[a1,†]

[1] *Hadron Theory Group, Department of Physics, Inha University, Incheon 402-751, Republic of Korea*

(Dated: Spring semester, 2022)

[a] Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00∼20:00)

문제 1 [10pt] 그림 1과 같이 어떤 사람이 건물 꼭대기에서 수평에서부터 30°의 각도로, 20.0 m/s의 속도로 공을 던졌다. 건물 바닥에서 공을 던진 곳까지 높이는 45.0 m이다.

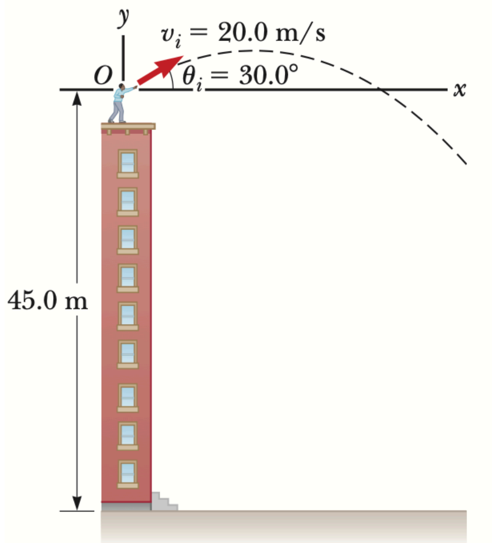

FIG. 1. 문제 2

(가) 공이 지면에 닿을 때까지 걸린 시간을 구하여라.

(나) 공이 지면에 닿을 때 속력을 구하여라. (이 문제에서는 계산기를 쓰셔도 무방합니다.)

풀이: 초기 위치는 $x_i = y_i = 0$, y 성분의 나중 위치는 $y_f = -45.0$ m이고, $a_y = -g$, $v_i = 20.0$ m/s이다. 따라서 속도는 각각

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i = (20.0\,\mathrm{m/s})(\cos 30.0°) = 17.3\,\mathrm{m/s},$$
$$v_{yi} = v_i \sin\theta_i = (20.0\,\mathrm{m/s})(\sin 30.0°) = 10.0\,\mathrm{m/s} \tag{1}$$

가 된다. 이제 y_f는

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

가 된다. 이 식은 아래와 같이 t에 대한 이차 방정식으로 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_{yi}t + (y_f - y_i) = \left(\frac{9.80\,\mathrm{m/s^2}}{2}\right)t^2 - (10.0\,\mathrm{m/s})t - 45.0\,\mathrm{m} \tag{3}$$

† hchkim@inha.ac.kr

이므로, 근의 해 공식을 쓰자.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4}$$

여기서

$$a = 4.90\,\mathrm{m/s^2}, \quad b = -10.0\,\mathrm{m/s}, \quad c = -45.0\,\mathrm{m} \tag{5}$$

이므로,

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-(10.0\,\mathrm{m/s}) + \sqrt{(-10.0\,\mathrm{m/s})^2 - 4(4.90\,\mathrm{m/s^2})(-45.0\,\mathrm{m})}}{2(4.90\,\mathrm{m/s^2})} = 4.22\,\mathrm{s}, \\ t_2 &= \frac{-(10.0\,\mathrm{m/s}) - \sqrt{(-10.0\,\mathrm{m/s})^2 - 4(4.90\,\mathrm{m/s^2})(-45.0\,\mathrm{m})}}{2(4.90\,\mathrm{m/s^2})} = -2.18\,\mathrm{s}, \end{aligned} \tag{6}$$

여기서 $t_2 < 0$은 우리가 원하는 시간이 아니다. 따라서 답은

$$t = 4.22\,\mathrm{s} \tag{7}$$

이다.

(나) 공이 땅에 닿을 때 속도의 각각의 성분은

$$v_{xf} = v_{xi}, \quad v_{yf} = v_{yi} - gt \tag{8}$$

이다. 여기에 앞에서 구한 수치를 대입하면,

$$v_{xf} = 17.3\,\mathrm{m/s}, \quad v_{yf} = 10.0\,\mathrm{m/s} - (9.8\,\mathrm{m/s^2})(4.218\,\mathrm{s}) = -31.3\,\mathrm{m/s} \tag{9}$$

가 되고, 속력은

$$v = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(17.3\,\mathrm{m/s})^2 + (-31.3\,\mathrm{m/s})^2} = 35.8\,\mathrm{m/s} \tag{10}$$

가 된다.

주의! 수치 계산을 할 때, 유효숫자는 가장 마지막에 따져주는 게 좋다.

문제 2 [20pt] 초기 위치 x_0, 초기 속력 v_0이 주어졌을 때, 아래의 식

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \tag{11}$$

을 다음과 같이 유도해보자. 순간 가속도는

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{12}$$

와 같이 주어진다. (12)의 양변에 속력 v를 곱한 식에서부터 (11)을 유도하여라. (적분을 이용하여야 한다는 점을 명심하여라.)

풀이: a와 v를 곱한 양을 우선 적으면,

$$av = a\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dt} \tag{13}$$

이 된다. 양변에 dt를 곱해주면,

$$adx = vdv \tag{14}$$

가 되고, a는 일정한 가속도이므로 양변을 적분하면,

$$a\int_{x_0}^{x} dx' = a(x - x_0) = \int_{v_0}^{v} v'dv' = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) \tag{15}$$

을 얻고,

$$v^2 - v_0^2 = a(x - x_0) \tag{16}$$

를 얻는다.

문제 3 [10pt] 스키 점프 선수가 트랙의 수평면에 도달해서 수평방향으로 도약을 했다. 이때 속력은 20.0 m/s였다. 그리고 수평면과 경사면 사이의 각은 35.0°였다. 이 선수는 어느 지점에 착지했을까?

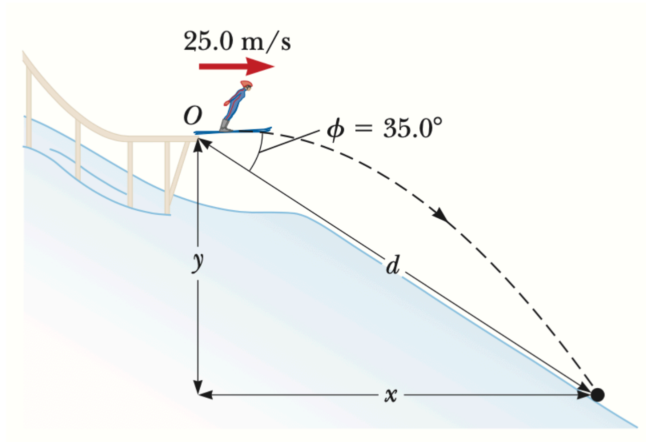

FIG. 2. 문제 3

풀이: 초기 속도는 $v_{xi} = 25.0\,\mathrm{m/s}$, $v_{yi} = 0$이고, 스키 선수가 착지하는 지점의 위치는

$$x_f = d\cos\phi, \quad y_f = -d\sin\phi \tag{17}$$

이다. 여기서 y_f가 음의 값이 되는 이유는 스키선수가 점프하는 순간의 지점을 원점으로 잡았기 때문이다. 따라서

$$x_f = v_{xi}t, \quad y_f = v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{18}$$

이 되므로,

$$d\cos\phi = v_{xi}t, \quad -d\sin\phi = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{19}$$

이 된다. 여기서 d를 구하기 위해 t를 소거하면,

$$d = \frac{2v_{xi}^2\sin\phi}{g\cos^2\phi} = \frac{2(25.0\,\mathrm{m/s})^2\sin 35.0^\circ}{(9.80\,\mathrm{m/s^2})\cos^2 35.0^\circ} = 109\,\mathrm{m} \tag{20}$$

가 된다. 따라서

$$\begin{aligned} x_f &= d\cos\phi = (109\,\mathrm{m})\cos 35.0^\circ = 89.3\,\mathrm{m}, \\ y_f &= -d\sin\phi = -(109\,\mathrm{m})\sin 35.0^\circ = -62.5\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{21}$$

가 바로 스키 선수가 착지하는 위치다.

문제 4 [10pt] 높이가 $y_0 = 15.0$ m인 건물이 있다. 이 건물 꼭대기에서 $v_0 = 10.0$ m/s의 속력으로 위로 공을 쏘아올렸다. 그림 3에 보여주는 y_{max}를 구하여라.

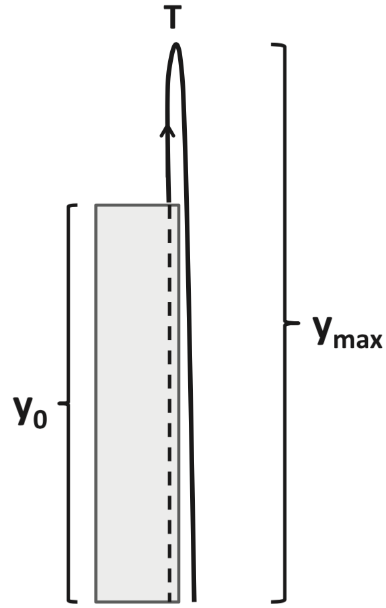

FIG. 3. 문제 4

풀이: 물체는 아래 방향으로 일정한 중력가속도 g를 받고 있으므로, 위로 쏘아 올려진 물체의 속도와 높이는 다음과 같이 나타 낼 수 있다.

$$v_y(t) = v_0 - gt \tag{22}$$
$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{23}$$

물체가 최고높이에 도달한 순간 물체의 속력은 0 m/s가 되므로 최고높이에 도달할때의 시간을 T라 하면, 최고높이는 다음과 같이 나타 낼 수 있다.

$$v_y(T) = 0 = v_0 - gT \to T = \frac{v_0}{g} \tag{24}$$
$$y(T) = y_{\text{max}} = y_0 + v_0 T - \frac{1}{2}gT^2 = y_0 + \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = y_0 + \frac{v_0^2}{2g}. \tag{25}$$

주어진 값을 대입하여 y_{max}를 구하면 다음과 같다.

$$y_{\text{max}} = 15.0 \text{ m} + \frac{(10.0 \text{ m/s})^2}{2(9.8 \text{ m/s}^2)} = 20.1 \text{ m} \tag{26}$$