

2022년 2학기 물리학 II

김현철^{a,†} and HuiJae-Lee^{1,‡}

¹Hadron Theory Group, Department of Physics,
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea

(Dated: Autumn Semester, 2022)

QUIZ 3

문제 1 [10pt]. 아래 질문에 답하세요.

(가) 점전하가 만드는 전기장을 이용해서 가우스 법칙을 유도하세요.

(나) 도체 내부에서 전기장이 0이 됨을 설명하세요.

(다) 면전하밀도 σ 로 대전되어 있고 무한히 큰 평면이 만드는 전기장의 크기는 $\sigma/2\epsilon_0$ 입니다. 각각 양전하와 음전하로 대전되어 있는 무한히 큰 평면 두 개가 거리 d 만큼 떨어져서 나란히 마주 보고 있을 때, 이 두 평면 사이에서 전기장을 구하세요.

풀이 :

(가) 점전하의 전하를 q 라 하고 이 점전하는 원점에 위치해 있다고 하자. 쿨롱의 법칙에 의해 이 점전하가 만드는 전기장 \vec{E} 는

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (1)$$

이다. 여기서 \hat{r} 은 단위 벡터이다. 가우스 법칙을 유도하기 위해 중심이 원점이고 반지름이 a 인 구를 통과하는 전기장의 플럭스 Φ_E 를 구해볼 것이다. 중심이 원점이고 반지름이 a 인 구에 대해 면적분하여 구를 통과하는 전기장 \vec{E} 의 플럭스 Φ_E 는 정의에 의해

$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{A} \quad (2)$$

으로 쓸 수 있다. $d\vec{A}$ 는 구에 대한 미소 면적으로 구면 좌표계를 도입하여 쓰면

$$d\vec{A} = a^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} \quad (3)$$

이다. θ 는 \hat{r} 과 z 축이 이루는 각도이고 ϕ 는 \hat{r} 을 xy 평면에 정사영 내린 것과 x 축이 이루는 각도이다. 적분범위는 구를 이루어야 하므로 $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$ 이다. 따라서 플럭스 Φ_E 에 대한 식 (2)는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} a^2 \sin \theta d\theta d\phi (\hat{r} \cdot \hat{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (2\pi)(2) = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (4)$$

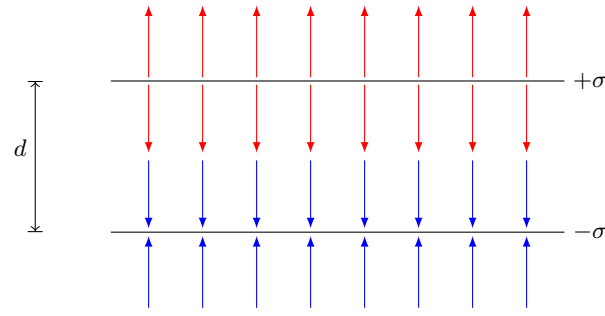
이것이 가우스 법칙이다.

(나) 도체에는 수많은 자유전자들이 존재하는데 자유전자들은 전기력에 의해 서로에게 척력을 작용한다. 자유전자들이 서로를 밀어내기 때문에 모든 자유전자들은 결국 표면에 존재하게 되어 도체 내부의 전기력은 0이 된다.

^a Office: 5S-436D (면담시간 매주 수요일-16:15~18:00)

[†] hchkim@inha.ac.kr

[‡] hjlee6674@inha.edu

FIG. 1. 면전하밀도 σ 로 대전되어 있는 무한히 큰 두 평면

(다) $+\sigma$ 로 대전된 평면에 의한 전기장을 \vec{E}_+ , $-\sigma$ 로 대전된 평면에 의한 전기장을 \vec{E}_- 라 하자. 평면에 수직인 방향을 y 방향이라 하면 평면 사이에서 두 전기장의 방향은 $-y$ 방향이다. 중첩의 원리에 의해 두 평면 사이 전기장 \vec{E}_{tot} 는

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{j} \quad (5)$$

이다. 따라서 평면 사이에서 계산한 전기장은 $\sigma/\epsilon_0 \hat{j}$ 이다.

문제 2 [10pt]. 한 모서리의 길이가 1.40 m인 정육면체가 그림 2처럼 균일한 전기장 아래 놓여있다. 만약 전기장이 N/C의 단위로

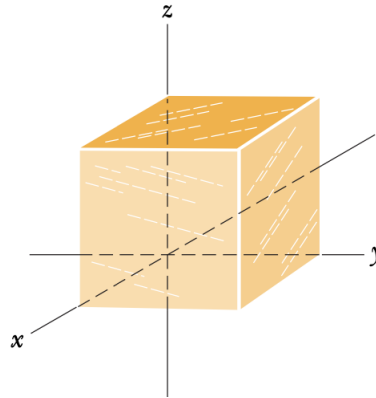


FIG. 2. 문제 2

(가) $6.00 \hat{i}$,

(나) $-2.00 \hat{j}$,

(다) $-3.00 \hat{i} + 4.00 \hat{j}$ 라면 오른쪽 면을 통과하는 전기장 다발은 각각 얼마인가?

(라) 정육면체를 통과하는 알짜 전기장 다발(net electric flux)을 구하여라.

풀이 : 플럭스의 정의로부터 오른쪽 면에 대한 면벡터를 \vec{A} 라 하면 오른쪽 면을 통과하는 플럭스 Φ_E 와 면벡터 \vec{A} 는

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}, \quad \vec{A} = (1.40 \text{ m})^2 \hat{j} \quad (6)$$

이다.

(가) $\vec{E} = 6.00 \text{ N/C} \hat{i}$ 이므로 플럭스 Φ_E 는

$$\Phi_E = (6.00 \text{ N/C})(1.40 \text{ m})^2(\hat{j} \cdot \hat{i}) = 0 \quad (7)$$

이다.

(나) $\vec{E} = -2.00 \text{ N/C} \hat{j}$ 이므로 플럭스 Φ_E 는

$$\Phi_E = -(2.00 \text{ N/C})(1.40 \text{ m})^2(\hat{j} \cdot \hat{j}) = 3.92 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C} \quad (8)$$

이다.

(다) $\vec{E} = [-3.00 \hat{i} + 4.00 \hat{j}] \text{ N/C}$ 이므로 플럭스 Φ_E 는

$$\begin{aligned} \Phi_E &= -(3.00 \text{ N/C})(1.40 \text{ m})^2(\hat{j} \cdot \hat{i}) + (4.00 \text{ N/C})(1.40 \text{ m})^2(\hat{j} \cdot \hat{j}) \\ &= 7.84 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C} \end{aligned} \quad (9)$$

이다.

(라) 일반적인 전기장 $E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$ 와 정육면체의 6개 면에 대응되는 면벡터 $\vec{A}_{\pm x}, \vec{A}_{\pm y}, \vec{A}_{\pm z}$ 을 이용하여 플럭스 Φ_E 를 생각해보자. 예를 들어, 면벡터 \vec{A}_{+x} 와 \vec{A}_{-z} 는

$$\vec{A}_{+x} = (1.40 \text{ m})^2 \hat{i}, \quad \vec{A}_{-z} = -(1.40 \text{ m})^2 \hat{k} \quad (10)$$

이다. 따라서 정육면체를 통과하는 알짜 전기장 다발, 모든 플럭스의 합 $\sum \Phi_E$ 은

$$\sum \Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}_{+x} + \vec{E} \cdot \vec{A}_{-x} + \vec{E} \cdot \vec{A}_{+y} + \vec{E} \cdot \vec{A}_{-y} + \vec{E} \cdot \vec{A}_{+z} + \vec{E} \cdot \vec{A}_{-z} \quad (11)$$

라고 할 수 있는데 전기장이 일정하므로

$$\sum \Phi_E = \vec{E} \cdot (\vec{A}_{+x} + \vec{A}_{-x} + \vec{A}_{+y} + \vec{A}_{-y} + \vec{A}_{+z} + \vec{A}_{-z}) \quad (12)$$

로 쓸 수 있다. 전기장이 일정하지 않았다면 각 면을 통과하는 전기장의 크기가 달랐을 것이므로 위와 같이 쓸 수 없다. 그런데, 서로 평행한 면의 면벡터는 크기가 같고 방향이 반대이다. 즉,

$$\vec{A}_{+x} = -\vec{A}_{-x}, \quad \vec{A}_{+y} = -\vec{A}_{-y}, \quad \vec{A}_{+z} = -\vec{A}_{-z} \quad (13)$$

이므로 식 (12)의 면벡터의 합은 0이 된다. 따라서 알짜 전기장 다발 $\sum \Phi_E$ 은 0이다.

$$\sum \Phi_E = 0. \quad (14)$$

문제 3 [20pt]. 그림 3처럼 질량이 1 mg 이고 전하가 $q = 2.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ 로 균일하게 분포되어 있는 작은 부도체 공이 얇고 전하가 균일하게 대전된 부도체 면과 $\theta = 30^\circ$ 의 각을 이루며 부도체 실에 매달려 있다. 이 절연체 판이 무한히 크다고 가정하자. 이와 같은 평형을 만들 수 있는 면전하밀도 σ 를 구하여라.

풀이 :

우선 부도체 공에 대한 자유 물체 다이어그램을 그려보자. T 는 장력, F_g 는 공에 작용하는 중력이고 F_e 는 절연체 판에 의해 공에 작용하는 전기력이다. 공의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\sum F_x = F_e - T \sin \theta, \quad (15)$$

$$\sum F_y = T \cos \theta - F_g. \quad (16)$$

무한히 큰 판에 의한 전기장의 크기 E 는

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (17)$$

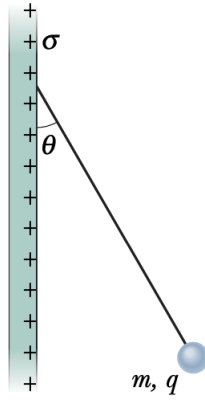


FIG. 3. 문제 3

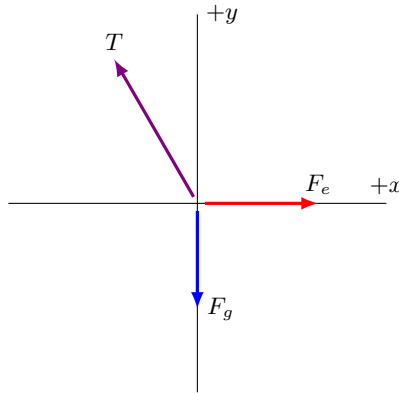


FIG. 4. 자유 물체 다이어그램

이고 공에 작용하는 전기력 F_e 는

$$F_e = qE = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \quad (18)$$

이다. 이를 x 방향 운동방정식 (15)에 대입하면

$$\frac{q\sigma}{2\epsilon_0} - T \sin \theta = 0 \quad (19)$$

을 얻는다. 이 식에서 장력 T 만 구하면 면전하밀도 σ 를 구할 수 있다. y 방향 운동방정식 (16)으로부터 장력 T 를 다른 변수들로 표현하고

$$T \cos \theta = F_g \implies T = \frac{mg}{\cos \theta} \quad (20)$$

이를 식 (19)에 대입하면

$$\frac{q\sigma}{2\epsilon_0} - mg \tan \theta = 0 \implies \sigma = \frac{2\epsilon_0 mg}{q} \tan \theta \quad (21)$$

으로 면전하밀도 σ 에 대한 식을 얻는다. 공의 질량 m 은 $1 \text{ mg} = 1 \times 10^{-6} \text{ kg}$ 이므로 면전하밀도 σ 는

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(1 \times 10^{-6} \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)}{2.0 \times 10^{-8} \text{ C}} \tan 30^\circ \\ &= 5.01 \text{ C/m}^2 \end{aligned} \quad (22)$$

이다. 즉, 평형을 만들 수 있는 면전하밀도 σ 는 5.01 C/m^2 이다.

문제 4 [50pt]. 그림 5에서 상자 모양의 가우스 면이 $+24.0\epsilon_0$ C의 알짜전하를 포함하고 전기장 $\vec{E} = [(10.0+2.00x)\hat{i} - 3.00\hat{j} + bz\hat{k}]$ N/C 안에 놓여 있다. x, z 은 미터 단위로 주어지고, b 는 상수이다. 밑면은 xz 평면이고, 윗면은 $y_2 = 1.00$

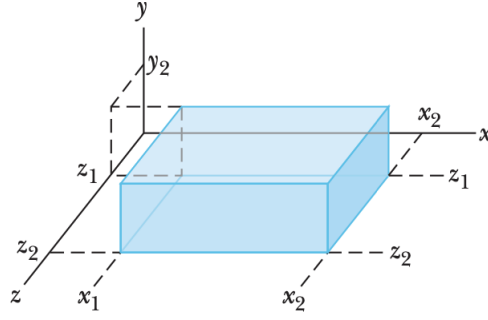


FIG. 5. 문제 4

m를 지나는 수평면이다. $x_1 = 1.00$ m, $x_2 = 4.00$ m, $z_1 = 1.00$ m, $z_2 = 3.00$ m일 때, 상수 b 는 얼마인가?

풀이 : 가우스 법칙에 의하면 폐곡면을 지나는 플럭스의 총합은 내부 전하량에 비례한다:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}. \quad (23)$$

이 경우는 전기장이 x 와 z 에 의존하므로 각 면에 대한 플럭스를 하나씩 구해야 한다. 직육면체에 존재하는 면 6개에 대응하는 면벡터를 각각 $\vec{A}_{\pm x}$, $\vec{A}_{\pm y}$, $\vec{A}_{\pm z}$ 라 하자. 예를 들어 \vec{A}_{+x} 와 \vec{A}_{-z} 는 각각

$$\begin{aligned} \vec{A}_{+x} &= (y_2 - y_1)(z_2 - z_1)|_{x=x_2} \hat{i} = [2.00\hat{i}] \text{ m}^2 \\ \vec{A}_{-z} &= -(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)|_{z=z_1} \hat{k} = [-3.00\hat{k}] \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (24)$$

이다. 또한 각 면벡터는 해당 방향 성분의 전기장과만 연산이 된다. 즉,

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \left(\int E_x dA_{+x} - \int E_x dA_{-x} \right) + \left(\int E_y dA_{+y} - \int E_y dA_{-y} \right) + \left(\int E_z dA_{+z} - \int E_z dA_{-z} \right) \quad (25)$$

을 계산하면 된다. x 방향의 계산을 먼저 해보면

$$\begin{aligned} \int E_x dA_{+x} - \int E_x dA_{-x} &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} E_x dydz \Big|_{x=x_2} - \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} E_x dydz \Big|_{x=x_1} \\ &= \left[\int_{1.00 \text{ m}}^{3.00 \text{ m}} \int_0^{1.00 \text{ m}} 18.0 dydz \right] \text{ N/C} - \left[\int_{1.00 \text{ m}}^{3.00 \text{ m}} \int_0^{1.00 \text{ m}} 12.0 dydz \right] \text{ N/C} \\ &= 12.0 \text{ N/C} \end{aligned} \quad (26)$$

이므로 x 방향으로 흐르는 플럭스의 총합은 12 N/C이다. y 방향의 계산은

$$\begin{aligned} \int E_y dA_{+y} - \int E_y dA_{-y} &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} E_y dx dz \Big|_{y=y_2} - \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} E_y dx dz \Big|_{y=y_1} \\ &= - \left[\int_{1.00 \text{ m}}^{3.00 \text{ m}} \int_{1.00 \text{ m}}^{4.00 \text{ m}} 3.00 dx dz \right] \text{ N/C} + \left[\int_{1.00 \text{ m}}^{3.00 \text{ m}} \int_{1.00 \text{ m}}^{4.00 \text{ m}} 3.00 dx dz \right] \text{ N/C} \\ &= 0 \text{ N/C} \end{aligned} \quad (27)$$

이다. 이는 y 방향으로 흐르는 플럭스의 총합은 모두 상쇄되기 때문이다. z 방향의 계산은

$$\begin{aligned} \int E_z dA_{+z} - \int E_z dA_{-z} &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} E_z dx dy \Big|_{z=z_2} - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} E_z dx dy \Big|_{z=z_1} \\ &= \left[\int_0^{1.00 \text{ m}} \int_{1.00 \text{ m}}^{4.00 \text{ m}} 3.00b dx dy \right] \text{ N/C} - \left[\int_0^{1.00 \text{ m}} \int_{1.00 \text{ m}}^{4.00 \text{ m}} 1.00b dx dy \right] \text{ N/C} \\ &= 6.00b \text{ N/C} \end{aligned} \quad (28)$$

로 z 방향으로 흐르는 플럭스의 총합이 $6.00b \text{ N/C}$ 이라는 사실을 얻는다. 이 결과들과 직육면체 내부에 포함된 알짜 전하 $+24.0\epsilon_0 \text{ C}$ 를 고려하여 식 (23)을 이용하면

$$12.0 \text{ N/C} + 0 \text{ N/C} + 6.00b \text{ N/C} = 24.0 \text{ N/C} \implies b = 2 \quad (29)$$

와 같이 $b = 2$ 를 얻는다.