# 2022년 2학기 물리학 II

Hui-Jae Lee[1,*] and 김현철[†1,‡]
[1]*Hadron Theory Group, Department of Physics, Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*
(Dated: Autumn Semester, 2022)

## Quiz 11

**문제 1 [20pt].** 최대전압이 220 V인 교류전원에 10.0 Ω의 저항을 연결하였을 때, 저항에 흐르는 유효전류와 평균 소비전력을 구하여라.
**풀이 :** 교류전원의 최대 전압을 $\mathcal{E}_0$라고 하면 저항에 걸리는 유효전압 $\mathcal{E}_{rms}$와 저항에 흐르는 유효전류 $I_{rms}$는 다음의 관계에 있다.

$$\mathcal{E}_{rms} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}, \ \ \mathcal{E}_{rms} = I_{rms}R. \tag{1}$$

$R$은 저항의 저항값이다. 또한 평균 소비전력 $\langle P \rangle$는

$$\langle P \rangle = I_{rms}^2 R \tag{2}$$

이다. 따라서 유효전류 $I_{rms}$는

$$I_{rms} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}R} = \frac{220 \ \mathrm{V}}{\sqrt{2} \times 10.0 \ \Omega} = 15.6 \ \mathrm{A} \tag{3}$$

이고 평균 소비전력 $\langle P \rangle$는

$$\langle P \rangle = \frac{\mathcal{E}_0^2}{\sqrt{2}R} = \frac{(220 \ \mathrm{V})^2}{\sqrt{2} \times 10.0 \ \Omega} = 3420 \ \mathrm{W} \tag{4}$$

이다.

**문제 2 [20pt].** 어떤 축전기의 양단에 진동수가 60.0 Hz이고 240.0 V의 최대 전압진폭을 가지는 전원이 연결되어 축전기에 1.20 A의 전류가 흐른다. 전기용량은 얼마인가?
**풀이 :** 전원의 진동수와 최대 전압을 $\omega$, $\mathcal{E}_0$, 축전기에 흐르는 전류를 $I$, 축전기의 전기용량을 $C$라 하자. 전원에 의한 교류 전압 $\mathcal{E}(t)$는 시간에 대한 함수로 표현이 가능하다.

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t. \tag{5}$$

또한 축전기에 쌓이는 전하량을 $Q(t)$라 하면 전원에 의한 전압 $\mathcal{E}(t)$에 의해

$$\mathcal{E}(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0 \tag{6}$$

이 성립한다. 따라서 $Q(t)$는

$$Q(t) = C\mathcal{E}(t) = C\mathcal{E}_0 \sin \omega t \tag{7}$$

---

[†] Office: 5S-436D (면담시간 매주 수요일-16:15∼19:00)
[*]Electronic address: hjlee6674@inha.edu
[‡]Electronic address: hchkim@inha.ac.kr

이고 전류 $I(t)$는 전하 $Q(t)$의 시간 당 변화량이므로

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\omega\mathcal{E}_0 \cos\omega t = I_0 \cos\omega t \tag{8}$$

로 쓸 수 있다. $I_0$는 최대 전류이다. 축전기에 흐르는 유효 전류 $I_{rms}$의 크기가 1.20 A이므로

$$I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{C\omega\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} \tag{9}$$

이고 따라서 전기용량 $C$는

$$C = \frac{\sqrt{2}I_{rms}}{\omega\mathcal{E}_0} = \frac{\sqrt{2}(1.20\ \mathrm{A})}{(60.0\ \mathrm{Hz})(240.0\ \mathrm{V})} = 1.18 \times 10^{-4}\ \mathrm{F} \tag{10}$$

이다.

**문제 3 [50pt].** 그림 1과 같이 저항과 인덕터가 병렬로 연결되어 있고, 여기에 교류전압 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max}\cos\omega t$가 걸려 있다.

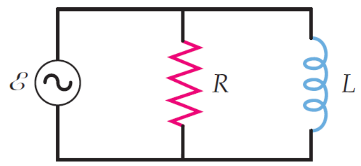


FIG. 1: **문제 3**

(가) 저항에 흐르는 전류가 $I_R = (\mathcal{E}_{\text{peak}}/R)\cos\omega t$와 같이 주어짐을 보여라. 여기서 $\mathcal{E}_{\text{peak}}$은 주기함수가 최대가 되는 지점에서 $\mathcal{E}(t)$ 값이다.

(나) 인덕터에 흐르는 전류는 $I_L = (\mathcal{E}_{\text{peak}}/X_L)\cos(\omega t - 90°)$임을 보여라.

(다) 교류 전압의 기전력이 걸려 있는 데서 $I = I_R + I_L = I_{\text{peak}}\cos(\omega t - \delta)$의 전류가 흐름을 보여라. 여기서 $I_{\text{peak}} = (\mathcal{E}_{\text{peak}}/Z)$이다.

**풀이 :**

(가) 저항과 코일이 병렬로 연결되어 있으므로 저항과 코일에 걸리는 전압은 교류전압 $\mathcal{E}$와 같다. 따라서 저항에 흐르는 전류 $I_R$은

$$I_R = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{R}\cos\omega t \tag{11}$$

이고 주기함수가 최대가 되는 지점에서 $\mathcal{E}(t)$는 $\mathcal{E}_{\max}$이므로

$$I_R = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{R}\cos\omega t = \frac{\mathcal{E}_{\text{peak}}}{R}\cos\omega t \tag{12}$$

로 쓸 수 있다.

(나) 인덕터에 흐르는 전류 $I_L$을 구하기 위해 우선 인덕터에 걸리는 전압 $\mathcal{E}_L$을 구하자. (가)에서 말한 바와 같이 $\mathcal{E}_L$은 교류전압 $\mathcal{E}$와 같으므로

$$\mathcal{E}_L = \mathcal{E}_{\max}\cos\omega t \tag{13}$$

인덕터 회로의 경우

$$\mathcal{E}_L - L\frac{dI_L}{dt} = 0 \tag{14}$$

이다. $L$은 인덕턴스이다. 따라서 $I_L$은

$$I_L = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{L}\int_0^t \cos\omega t'\,dt' = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\omega L}\sin\omega t \tag{15}$$

이고 $X_L = \omega L,\ \sin\omega t = \cos(\omega t - 90°)$ 이므로

$$I_L = \frac{\mathcal{E}_{\text{peak}}}{X_L}\cos(\omega t - 90°) \tag{16}$$

와 같다.

(다) 식 (12), (16)로부터 $I = I_R + I_L$은

$$I = I_R + I_L = \frac{\mathcal{E}_{\text{peak}}}{R}\cos\omega t + \frac{\mathcal{E}_{\text{peak}}}{X_L}\sin\omega t \tag{17}$$

인데 $A\cos x + B\sin x$꼴은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} A\cos x + B\sin x &= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x\right) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}(\cos\delta\cos x + \sin\delta\sin x) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\cos(x-\delta). \end{aligned} \tag{18}$$

$A = \mathcal{E}_{\text{peak}}/R,\ B = \mathcal{E}_{\text{peak}}/X_L$이고 $x = \omega t$라 하면

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}_{\text{peak}}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_{\text{peak}}}{X_L}\right)^2}\cos(\omega t - \delta) \\ &= \mathcal{E}_{\text{peak}}\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}}\cos(\omega t - \delta) \end{aligned} \tag{19}$$

으로 쓸 수 있다. 저항과 코일이 병렬로 연결되어 있으므로 임피던스 $Z$는

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L}\right)^2} \tag{20}$$

로 정의되므로 전류 $I$는

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{peak}}}{Z}\cos(\omega t - \delta) \tag{21}$$

와 같다.

**문제 4 [50pt].** $RLC$ 직렬회로에 교류전원을 연결하고 출력 전압은 $R$과 $L$을 연결한 조합의 양단에서 얻는다. 출력 전압과 입력전압의 비를 각진동수 $\omega$의 함수로 구하라. 매우 높은 진동수에서는 이 값이 1에 가까워 짐을 보여라.
**풀이 :** 입력전압을 $\mathcal{E}$, 저항, 코일, 축전기에 가해지는 전압을 $\mathcal{E}_R,\ \mathcal{E}_L,\ \mathcal{E}_C$라고 하면

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_R - \mathcal{E}_L - \mathcal{E}_C = \mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \tag{22}$$

를 만족한다. $R$, $L$, $C$는 각각 저항, 리액턴스, 전기용량이다. 입력전압을

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0\cos\omega t \tag{23}$$

라고 가정하자. 저항, 코일, 축전기가 모두 연결되어 있으므로 회로에 흐르는 전류 $I(t)$에 $\phi$만큼의 위상차가 존재한다고 하면

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}\cos(\omega t - \phi),\ \ Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{24}$$

로 쓸 수 있다. $Z$는 회로의 임피던스이다. 저항에서 전압강하의 위상은 $I(t)$와 같으므로

$$\mathcal{E}_R = IR = \frac{\mathcal{E}_0 R}{Z}\cos(\omega t - \phi) \tag{25}$$

이고 코일에서 전압강하의 위상은 $\pi/2$만큼 빠르다. 반면에 축전기에서의 위상은 $\pi/2$만큼 느리므로 식 (22)로 부터 $\mathcal{E}_L$, $\mathcal{E}_C$는

$$\mathcal{E}_L = \frac{\mathcal{E}_0 \omega L}{Z}\sin(\omega t - \phi), \ \ \mathcal{E}_C = -\frac{\mathcal{E}_0}{Z\omega C}\sin(\omega t - \phi) \tag{26}$$

와 같다. 출력전압 $\mathcal{E}_{out}$은 저항과 코일을 연결한 조합의 양단에서 얻으므로

$$\mathcal{E}_{out} = \mathcal{E}_R + \mathcal{E}_L = \mathcal{E} - \mathcal{E}_C \tag{27}$$

이다. 따라서 입력전압 $\mathcal{E}$와 출력전압 $\mathcal{E}_{out}$의 비는

$$\frac{\mathcal{E}_{out}}{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_C}{\mathcal{E}} = 1 + \frac{\sin(\omega t - \phi)}{Z\omega C\cos\omega t} \tag{28}$$

로 표현할 수 있다. 이제 $\omega$가 매우 크다고 가정하자. 식 (28)의 마지막 항은

$$\frac{\sin(\omega t - \phi)}{Z\omega C\cos\omega t} = \frac{1}{C}\frac{\sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{\omega^2 R^2 + \left(\omega^2 L - \frac{1}{C}\right)^2}\cos\omega t} \tag{29}$$

로 쓸 수 있는데 $\omega$가 매우 크므로

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 + \left(\omega^2 L - \frac{1}{C}\right)^2}} \longrightarrow 0 \tag{30}$$

이고 위상차 $\phi$는

$$\tan\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \longrightarrow \infty \tag{31}$$

$\omega$가 커짐에 따라 같이 커진다. 따라서 $\phi = \pi/2$로 볼 수 있고

$$\frac{\sin(\omega t - \phi)}{\cos\omega t} = 1 \tag{32}$$

이 된다. 최종적으로 $\omega$가 매우 클 때 입력전압과 출력전압의 비는

$$\frac{\mathcal{E}_{out}}{\mathcal{E}} = 1 + \frac{1}{C}\frac{1}{Z}\frac{\sin(\omega t - \phi)}{\cos\omega t} = 1 \tag{33}$$

1이 된다는 사실을 확인할 수 있다.