2022년 1학기 물리학 I: Quiz 13

김현철[1] and Lee Hui-Jae[1,*]

[1]*Hadron Theory Group, Department of Physics, Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*

(Dated: Spring semester, 2022)

문제 1. (20 pt) 발사체를 지구 탈출속력의 1/2배의 속력으로 지표면에서 연직 위로 발사 한다. 지구의 반지름이 $R_\oplus$ 라면 발사체가 도달하는 최고높이는 얼마인가?

풀이 : 우선 지구 탈출속력을 구해보자. 탈출속력을 v_e, 지구의 질량을 $M_\oplus$, 발사체의 질량을 m이라고 하면 발사체가 지구 표면에 있을 때의 역학적 에너지 E는,

$$E = -\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus} + \frac{1}{2}mv_e^2 = 0. \tag{1}$$

따라서 탈출속력 v_e는 다음과 같다.

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}}. \tag{2}$$

발사체가 탈출속력의 1/2배의 속력으로 지구를 떠난다면 발사체가 지구 표면에 있을 때의 역학적 에너지 E_1는,

$$E_1 = -\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus} + \frac{1}{8}mv_e^2 = -\frac{3GM_\oplus m}{4R_\oplus}. \tag{3}$$

발사체가 최대높이 h에 있을 때 발사체의 속력은 0이다. 따라서 역학적 에너지 E_2는,

$$E_2 = -\frac{GM_\oplus m}{R+h}. \tag{4}$$

에너지 보존 법칙에 의해,

$$E_1 = E_2, \quad -\frac{3GM_\oplus m}{4R_\oplus} = -\frac{GM_\oplus m}{R+h}. \tag{5}$$

그러므로 최대높이 h는 다음과 같다.

$$h = \frac{1}{3}R_\oplus. \tag{6}$$

발사체의 최대 높이 h가 지구의 반지름 $R_\oplus$에 비해 무시할 수 있을 만큼 작다고 가정하여 근사를 취해보자. 식 (5)로부터,

$$\frac{3}{4R_\oplus} = \frac{1}{R_\oplus + h} = \frac{1}{R_\oplus}\left(\frac{1}{1+h/R_\oplus}\right). \tag{7}$$

$\frac{1}{1+h/R}$을 급수로 전개하면,

$$\frac{1}{1+h/R_\oplus} \approx 1 - \frac{h}{R_\oplus} + \left(\frac{h}{R_\oplus}\right)^2 - \left(\frac{h}{R_\oplus}\right)^3 + \left(\frac{h}{R_\oplus}\right)^4 - \cdots. \tag{8}$$

$h/R_\oplus$에 대한 1차항만을 고려하였을 때 h는,

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{h}{R_\oplus}, \quad h = \frac{1}{4}R_\oplus. \tag{9}$$

* hchkim@inha.ac.kr; hjlee6674@inha.edu

$\frac{1}{3}R_\oplus$보다 작다. 2차항까지 고려한다면,

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{h}{R_\oplus} + \left(\frac{h}{R_\oplus}\right)^2, \;\; h = \frac{1}{2}R_\oplus. \tag{10}$$

이번에는 $\frac{1}{3}R_\oplus$보다 큰 값이 나온다. 3차항까지 고려한다면,

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{h}{R_\oplus} + \left(\frac{h}{R_\oplus}\right)^2 - \left(\frac{h}{R_\oplus}\right)^3, \;\; h \approx 0.31945R_\oplus \tag{11}$$

다시 이번에는 $\frac{1}{3}R_\oplus$보다 작다. 항을 계속 추가하여 고려하면 h는 $\frac{1}{3}R_\oplus$보다 커졌다 작아지면서 수렴한다. FIG. 1은 1차항 부터 10차항 까지 고려하였을 때 h와 $R_\oplus$의 비율을 나타낸 것이다. 항을 더 많이 고려할 수록 $\frac{1}{3}$에 진동하며 수렴하는 형태를 볼 수 있다.

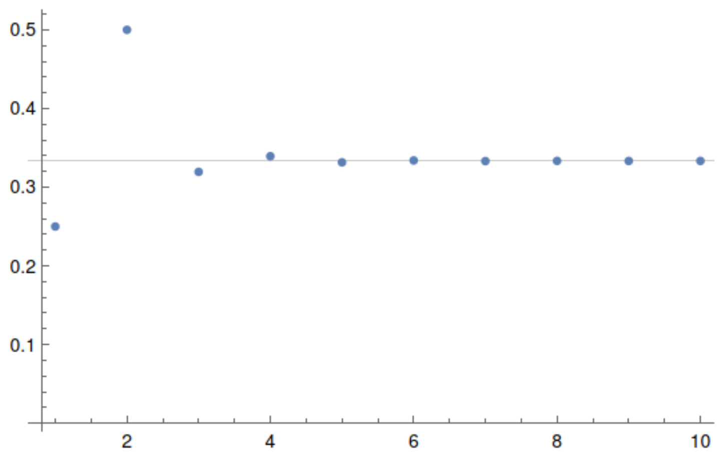

FIG. 1. h와 $R_\oplus$의 비율

문제 2. (40 pt) 그림 2는 반지름이 $R = 4.00$ cm인 납덩어리 공 내부에 공 모양의 공동이다. 공동의 표면은 안으로는 공의 중심을 지나고 밖으로는 공의 표면에 접한다. 공동을 만들기 전에 납덩어리 공의 질량은 $M = 2.95$ kg이었다. 질량이 $m = 0.431$ kg인 작은 공이 납덩어리의 중심에서 $d = 9.00$ cm만큼 떨어져 있다. 두 공의 중심선이 공동의 중심을 지날 때 m에 미치는 중력을 구하여라.

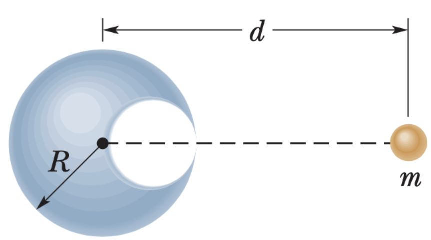

FIG. 2. 문제 2

풀이 : 중첩 원리에 의해 물체 m에 작용하는 중력의 크기는 속이 찼을 때 작용하는 중력에 공동 만큼의 물체에 의한 중력을 뺀 값과 같다. 물체 M의 밀도를 ρ라고 하면,

$$M = \frac{4}{3}R^3\rho, \;\; \rho = \frac{3M}{4R^3}. \tag{12}$$

공동 만큼의 물체의 질량을 M'이라고 하면,

$$M' = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}R\right)^3 \rho = \frac{1}{8}M. \tag{13}$$

속이 찼을 때 중력을 F_1라고 하자. F_1은,

$$F_1 = \frac{GMm}{d^2} \tag{14}$$

공동 만큼의 중력을 F_2라고 하면 F_2는,

$$F_2 = \frac{GM'm}{(d-\frac{1}{2}R)^2} = \frac{GMm}{2(2d-R)^2}. \tag{15}$$

위에서 말했듯이 실제 중력 F은 속이 찼을 때의 중력 F_1에 공동 만큼의 물체에 의한 중력 F_2를 뺀 값과 같다.

$$F = F_1 - F_2. \tag{16}$$

따라서,

$$F = GMm\left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{2(2d-R)^2}\right). \tag{17}$$

$\mathrm{G} = 6.67430 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ 이므로 수치들을 모두 대입하고 계산해보자.

$$\begin{aligned} F &= \left(6.67430 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}\right)(2.95\,\mathrm{kg})(0.431\,\mathrm{kg})\left(\frac{1}{(9.00\,\mathrm{cm})^2} - \frac{1}{2(2(9.00\,\mathrm{cm}) - (4.00\,\mathrm{cm}))^2}\right) \\ &= 8.31 \times 10^{-9}\,\mathrm{N}. \end{aligned} \tag{18}$$

물체 m에 미치는 중력은 $8.31 \times 10^{-9}\,\mathrm{N}$이다.

문제 3. (40pt) 두 중성자별이 1.0×10^{10} m 떨어져 있다. 각각의 질량은 1.0×10^{30} kg이고, 반지름은 1.0×10^{5} m 이다. 두 별은 처음에 서로에 대해 정지해 있었다.

(가) 두 별 사이의 거리가 처음의 반으로 줄어들 때 속력은 얼마인가?

(나) 충돌하기 직전의 속력은 얼마인가?

풀이 :

(가) 중성자별 질량을 m, 반지름을 r, 별이 서로 떨어진 거리를 d라 하자. 계가 가진 처음 역학적 에너지를 E_1라고 하면,

$$E_1 = -\frac{Gm^2}{d}. \tag{19}$$

거리가 처음의 반이 되었을 때 계의 역학적 에너지는 다음과 같다.

$$E_2 = -\frac{2Gm^2}{d} + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{2Gm^2}{d} + mv^2. \tag{20}$$

에너지 보존 법칙에 계의 역학적 에너지는 보존되므로,

$$E_1 = E_2,\ \ -\frac{Gm^2}{d} = -\frac{2Gm^2}{d} + mv^2. \tag{21}$$

속력 v_2에 대해 정리하여 속력 v_2를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{\frac{Gm}{d}} = \sqrt{\frac{(6.67430 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(1.0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg})}{(1.0 \times 10^{10}\,\mathrm{m})}} \\ &= 8.2 \times 10^4 \mathrm{m/s}. \end{aligned} \tag{22}$$

각 별의 속력은 $8.2 \times 10^4 \mathrm{m/s}$이다. 혹은, $10^{10}\sqrt{G}$이다.

(나) 충돌 직전이면 두 별 사이 거리가 $2r$인 상태이다. 이 때 별의 속력을 v_f라 하면 계의 역학적 에너지 E_f는,

$$E_f = -\frac{Gm^2}{2r} + mv_f^2 \tag{23}$$

에너지 보존 법칙에 의해 처음 역학적 에너지와 나중 역학적 에너지가 같으므로,

$$E_1 = E_f, \quad -\frac{Gm^2}{d} = -\frac{Gm^2}{2r} + mv_f^2 \tag{24}$$

속력 v_f는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} v_f &= \sqrt{Gm\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{d}\right)} = \sqrt{Gm\left(\frac{d-2r}{2rd}\right)} \\ &= \sqrt{(6.6743 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(1.0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg})\left(\frac{(1.0 \times 10^{10}\,\mathrm{m}) - 2(1.0 \times 10^5\,\mathrm{m})}{2(1.0 \times 10^5\,\mathrm{m})(1.0 \times 10^{10}\,\mathrm{m})}\right)} \\ &= 1.8 \times 10^7\,\mathrm{m/s}. \end{aligned} \tag{25}$$

별끼리 충돌 직전일 때 별의 속력은 $1.8 \times 10^7\,\mathrm{m/s}$이다. 혹은, $10^{10}\sqrt{49\,999G}$이다.

문제 4. (40pt) 그림 3에서 상자 1은 질량이 $m_1 = 460$ g, 상자 2는 $m_2 = 500$ g이다. 이 두 상자는 그림에서처럼 반지름이 $R = 5.00$ cm에 걸려 있는, 마찰이 없는 줄의 양끝에 매달려 있다. 정지 상태에 있던 이 두 상자를 놓으면, 상자 2는 5.00 초 동안 75.0 cm 떨어진다. 이때 도르래에 걸려있는 줄은 미끄러지지 않는다.

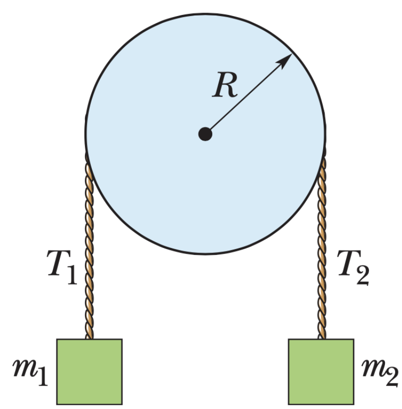

FIG. 3. 문제 4

(가) 이 상자의 가속도의 크기는 얼마인가?

(나) 상자 1과 2에 걸리는 장력 T_1과 T_2를 구하여라.

(다) 이 도르래의 각가속도의 크기는 얼마인가? 얼마인가?

(라) 도르래의 회전관성을 구하여라.

풀이 : 각 물체에 대한 자유 물체 다이어그램을 그리고 운동 방정식을 세워보자.

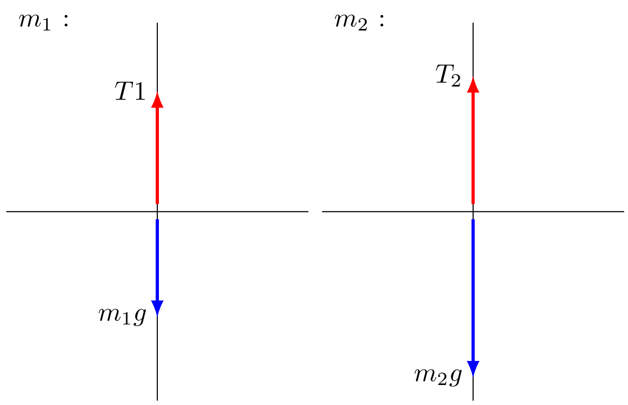

FIG. 4. 자유 물체 다이어그램

$$\begin{aligned} m_1 &: \sum F = m_1 a_1 = T_1 - m_1 g, \\ m_2 &: \sum F = m_2 a_2 = m_2 g - T_2. \end{aligned} \tag{26}$$

두 상자는 한 줄로 연결되어 있으므로,

$$a_1 = a_2. \tag{27}$$

식 (26)로 부터 각 상자의 가속도는 다음과 같다.

$$a_1 = \frac{T_1 - m_1 g}{m_1}, \quad a_2 = \frac{m_2 g - T_2}{m_2} \tag{28}$$

(가) 상자 1은 이동거리가 $s = 75.0$ cm, 걸린 시간 $t = 5.00$ 초, 초기 속력 $v_0 = 0$ m/s인 등가속도 운동을 하였으므로 다음과 같이 가속도를 구할 수 있다.

$$s = \frac{1}{2} a_1 t^2, \quad a_1 = \frac{2s}{t^2}. \tag{29}$$

따라서 상자1 의 가속도 a_1은,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2(75.0\,\mathrm{cm})}{(5.00\,\mathrm{s})^2} \\ &= 6.00\,\mathrm{cm/s^2} = 6.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s^2}. \end{aligned} \tag{30}$$

(나) 식 (26)으로 부터 다음과 같이 장력을 구할 수 있다.

$$T_1 = m_1 (a_1 + g), \quad T_2 = m_2 (g - a_2). \tag{31}$$

$m_1 = 460\,\mathrm{g}$이므로,

$$\begin{aligned} T_1 &= (460\,\mathrm{g})((6.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s^2}) + (9.80\,\mathrm{m/s^2})) \\ &= (0.460\,\mathrm{kg})(9.86\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 4.54\,\mathrm{N}. \end{aligned} \tag{32}$$

$m_2 = 500\,\mathrm{g}$이므로,

$$\begin{aligned} T_2 &= (500\,\mathrm{g})((9.80\,\mathrm{m/s^2}) - (6.00\times10^{-2}\,\mathrm{m/s^2})) \\ &= (0.500\,\mathrm{kg})(9.74\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 4.87\,\mathrm{N}. \end{aligned} \tag{33}$$

(다) 줄의 가속도를 a라고 하자. 줄이 미끄러지지 않으므로 도르래는 줄과 함께 회전하므로 도르래의 각가속도 α는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\alpha = \frac{a_1}{R}. \tag{34}$$

따라서,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(6.00\times10^{-2}\,\mathrm{m/s^2})}{(5.00\,\mathrm{cm})} = \frac{(6.00\times10^{-2}\,\mathrm{m/s^2})}{(5.00\times10^{-2}\,\mathrm{m})} \\ &= 1.20\,\mathrm{rad/s^2}. \end{aligned} \tag{35}$$

(라) 도르래에 감긴 줄에 작용하는 합력을 구하자. 자유 물체 다이어그램을 그려보면 다음과 같다. 줄에 작용하는

줄에 작용하는 합력 :

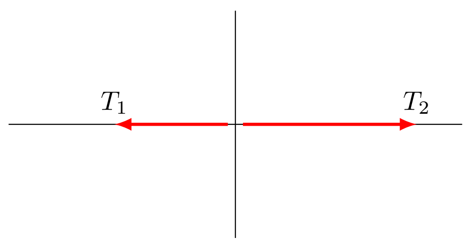

FIG. 5. 자유 물체 다이어그램

합력 T는,

$$T = T_2 - T_1. \tag{36}$$

도르래에 작용하는 돌림힘 τ은,

$$\tau = TR. \tag{37}$$

돌림힘과 각가속도를 알고 있으므로 도르래의 회전관성을 구할 수 있다. 도르래의 회전관성 I는,

$$\tau = I\alpha, \;\; I = \frac{\tau}{\alpha} = \frac{TR}{\alpha}. \tag{38}$$

식 (31), (34)과 식 (36)로 부터,

$$\begin{aligned} I &= \frac{(T_2 - T_1)R^2}{a_1} = \frac{(m_2\,(g - a_2) - m_1\,(a_1 + g))R^2}{a_1} = \frac{((m_2 - m_1)g - (m_2 + m_1)a_1)R^2}{a_1} \\ &= \frac{(((500\,\mathrm{g}) - (460\,\mathrm{g}))(9.80\,\mathrm{m/s^2}) - ((500\,\mathrm{g}) + (460\,\mathrm{g}))(6.00\times10^{-2}\,\mathrm{m/s^2}))(5.00\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2}{6.00\times10^{-2}\,\mathrm{m/s^2}} \\ &= 13.9\,\mathrm{g\cdot m^2} = 1.39\times10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2}. \end{aligned} \tag{39}$$

도르래의 회전관성은 $1.39\times10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$이다.