

2022년 1학기 물리학 I: Quiz 17

김현철^{a,†} and Lee Hui-Jae^{1,‡}

¹Hadron Theory Group, Department of Physics,
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea

(Dated: Spring semester, 2022)

문제 1. (40 pt) 태풍이 불 때 어떤 집의 지붕 위에서 바람(공기의 밀도 1.20 kg/m^3)의 속력은 100 km/h 였다.

(가) 지붕의 안과 밖의 압력차는 얼마인가?

(나) 지붕의 면적이 100 m^2 일 때, 바람이 지붕을 들어올리는 힘은 얼마인가?

풀이 :

(가) 지붕의 두께는 무시할 수 있을 정도로 작다고 가정하자. 베르누이 방정식을 이용해 압력차를 구할 수 있다. 베르누이 방정식은

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \quad (1)$$

이다. 지붕의 두께를 0이라 하면 $y_1 = y_2 = 0$ 이고 집 내부 공기가 일정한 방향으로 흐르지 않는다고 하면 $v_2 = 0$ 이다. 베르누이 방정식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2. \quad (2)$$

ρ , P_1 , v_1 은 각각 공기의 밀도, 지붕 위에서 공기에 의한 압력, 지붕 위에서 공기의 속력이다. P_2 는 집 안에서 공기에 의한 압력이다. 따라서 압력차 ΔP 는

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \quad (3)$$

이다. 수치를 대입하면,

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{1}{2}(1.20 \text{ kg/m}^3)(100 \text{ km/h})^2 = (0.60 \text{ kg/m}^3) \left((100 \text{ km/h}) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) \right)^2 \\ &= 4.63 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

이다. 지붕의 안과 밖의 압력차는 $463 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ 이고 지붕 안의 압력이 더 크다.

(나) 지붕에 작용하는 힘은 지붕의 면적과 지붕에 작용하는 압력을 곱한 값과 같다. 지붕에 작용하는 총 압력은 아래로 작용하는 P_1 과 위로 작용하는 P_2 의 차이이고 이는 압력차 ΔP 와 같다. 면적이 100 m^2 라면 지붕에 작용하는 힘은

$$\begin{aligned} F &= \Delta P A = \frac{1}{2}\rho v_1^2 A \\ &= (0.60 \text{ kg/m}^3) \left((100 \text{ km/h}) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) \right)^2 (100 \text{ m}^2) \\ &= 4.60 \times 10^4 \text{ N} \end{aligned} \quad (5)$$

이다. 압력은 위로 작용하므로 이 힘은 지붕을 들어올리는 힘이 된다.

문제 2. (60 pt) 관의 지름이 d 인 수도꼭지에서 물이 초기속도 v 로 끊임없이 흘러나와서 아래로 떨어지고 있다(즉, 수도꼭지에서 나오는 물줄기의 지름이 d 이고, 수도꼭지는 아래 방향을 향하고 있다). 수도꼭지에서 h 만큼 떨어진 곳에

^a Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00~20:00)

[†] hchkim@inha.ac.kr

[‡] hjlee6674@inha.edu

서 물줄기의 지름은 얼마인가? 단, 공기의 저항은 무시하고, 물줄기는 끊어지거나 물방울이 되지 않는다고 가정한다.

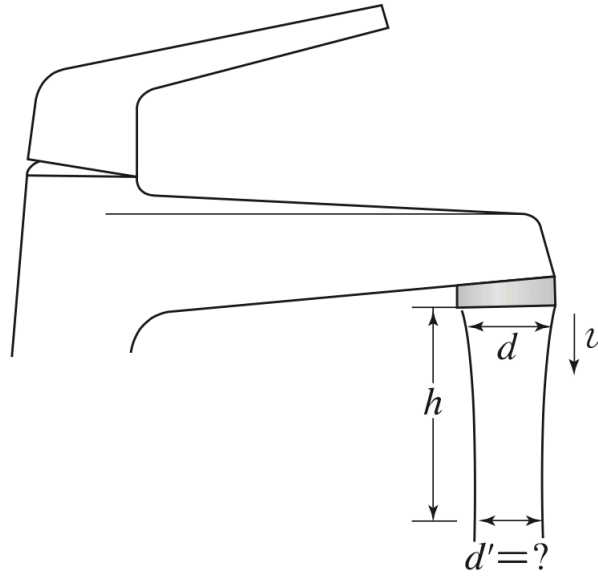


FIG. 1. 문제 2

풀이 : 관에서 나온 물에 대해 연속 방정식을 적용할 수 있다. 연속 방정식은

$$Av = A'v' \quad (6)$$

이다. A 와 v 는 관에서의 물줄기의 단면적과 속력이고 A' 와 v' 는 h 만큼 낙하한 물줄기의 단면적과 속력이다. 물은 낙하하면서 떨어진 높이만큼의 중력 퍼텐셜 에너지를 운동 에너지로 전환받으므로

$$\frac{1}{2}\rho v'^2 = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh \implies v'^2 = v^2 + 2gh \quad (7)$$

이다. 또한 A 와 A' 는 단면적이므로

$$A = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2, \quad A' = \pi\left(\frac{d'}{2}\right)^2 \quad (8)$$

이다. 식 (6)에 식 (7), (8)을 대입하면

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 v = \pi\left(\frac{d'}{2}\right)^2 \sqrt{v^2 + 2gh} \quad (9)$$

이고 우리가 구하고자 하는 d' 에 대해 정리하면 다음을 얻을 수 있다.

$$d' = d \left(\frac{v^2}{v^2 + 2gh} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (10)$$

문제 3. (50pt) 질량 0.500 kg인 물체가 가벼운 용수철(용수철 상수 2.40×10^3 N/m)에 매달려 마루 위에 있다.

용수철을 평형지점에서 8.00 cm 압축하였다가 놓았을 때

(가) 운동방정식을 세워라.

(나) 초기위상은 얼마인가?

- (다) $t = 0.25$ s일 때 물체의 위치를 구하여라.
 (라) 이 계의 총 에너지를 구하여라.
 (마) $x = +5.0$ cm와 $x = -5.0$ cm일 때의 속도를 각각 구하여라.
 (바) 물체의 최대속도를 구하여라. 어느 지점에서 나타나는가?

풀이 :

- (가) 용수철이 평형지점으로부터 x 만큼 압축되거나 늘어나면 훅의 법칙에 의해 kx 만큼의 복원력이 평형지점 방향으로 작용한다. 따라서 운동방정식은

$$ma = -kx \quad (11)$$

이다. 훅은 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (12)$$

- (나) 초기위상을 구하기 위해 식 (12)의 해를 구해보자. x 를 두번 미분해서 x 에 $-\omega^2$ 가 곱해진 형태를 얻는 x 는 삼각함수 혹은 지수함수의 형태라고 가정할 수 있다. 즉,

$$x(t) = c \cos(\omega t + \phi) \quad (13)$$

라고 가정할 수 있다. 해를 어떻게 구할 수 있을지 다루어보자. 용수철을 평형지점에서 A 만큼 압축하였다가 놓았다는 것은 $t = 0$ 일 때 $x(0) = A$ 이고 $x'(0) = 0$ 이라는 뜻이다. $x(0) = A$ 이므로 c 는 $c = A / \cos \phi$ 이고 $x'(0) = 0$ 이므로

$$x'(0) = -\frac{A\omega}{\cos \phi} \sin \phi = 0 \quad (14)$$

이다. 식 (14)가 0이기 위해서는 $\phi = 0$ 이어야 한다. 따라서 $x(t)$ 에 대한 표현은

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (15)$$

이고 초기위상 ϕ 는 0이다.

- (다) $A = 8.00$ cm이고 $m = 0.500$ kg, $k = 2.40 \times 10^3$ N/m이다. $t = 0.25$ s일 때 물체의 위치를 알고 싶으므로 수치들을 식 (15)에 대입하면

$$\begin{aligned} x(0.25 \text{ s}) &= (8.00 \text{ cm}) \cos \left(\sqrt{\frac{2.40 \times 10^3 \text{ N/m}}{0.500 \text{ kg}}} (0.25 \text{ s}) \right) \\ &= 0.334 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (16)$$

이다. $t = 0.25$ s일 때 물체의 위치는 평형점으로부터 0.334 cm만큼 떨어진 곳이다.

- (라) 계의 역학적 에너지를 구해보자. 식 (15)으로부터 탄성 퍼텐셜에너지 E_p 와 운동에너지 E_k 를 구할 수 있다.

$$E_p = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega t, \quad E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2 \omega t. \quad (17)$$

$m\omega^2 = k$ 이므로 두 에너지의 합은

$$E_p + E_k = \frac{1}{2} k A^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \frac{1}{2} k A^2 \quad (18)$$

이다. 따라서 E_p 는

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (2.40 \times 10^3 \text{ N/m}) (8.00 \times 10^{-2} \text{ m})^2 \\ &= 7.68 \text{ J} \end{aligned} \quad (19)$$

이다.

(마) 식 (15)으로부터,

$$x'(t) = -\omega A \sin \omega t = -\omega \sqrt{A^2 - (x(t))^2} \quad (20)$$

이다. $x = +5.0 \text{ cm}$ 와 $x = -5.0 \text{ cm}$ 일 때 $x'(t)$ 는

$$x' = - \left(\sqrt{\frac{2.40 \times 10^3 \text{ N/m}}{0.500 \text{ kg}}} (0.25 \text{ s}) \right) \sqrt{(8.00 \times 10^{-2} \text{ m})^2 - (\pm 5.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2} \quad (21)$$

1.1 m/s.

이다. 이는 속력이 1.1 m/s임을 의미한다.

(바) 식 (20)으로부터 물체의 속도는 $\omega t = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi, \dots$ 일 때 최대이다. 즉, 물체의 속도가 최대가 되는 조건은

$$\omega t = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

이다. 물론 물체의 속력만을 고려한다면 부호를 따지지 않아도 되기 때문에 $\omega t = \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi, \dots$ 인 순간에도 속력이 최대가 된다. 속도가 최대일 때 물체의 위치 $x(t)$ 는

$$x(t) = A \cos \left(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi \right) = 0 \quad (23)$$

이다. 따라서 물체의 속도가 최대일 때 물체는 항상 평형점에 위치한다.

문제 4. (40pt) 그림 2와 같이 반지름이 R 이고 질량이 M 인 원판, 링, 속이 짝 찬 공, 속이 텅빈 공을 길이가 L 인 질량을 무시할 수 있는 실에 매달아 각 θ 까지 들어올렸다가 단진동을 시킨다.

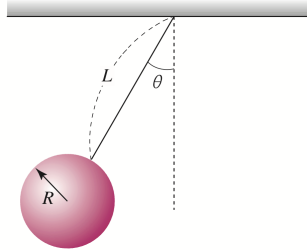


FIG. 2. 문제 4

(가) 단진동 주기가 가장 긴 것은 어느 것인가?

(나) 제일 아래 점에서 질량중심의 속력이 가장 큰 것은 어느 것인가?

(다) 이러한 진자를 달로 가져가서 똑같은 실험을 하면 주기는 어떻게 되겠는가?

(라) 제일 아래 점에서 물체의 각속력을 ω 라 할 때 실의 장력은?

풀이 :

(가) 단진동 주기를 구하기 위해 진자의 운동방정식을 세워보자. 진자는 실과 벽이 연결된 지점을 축으로 하여 회전운동 하는 것으로 생각할 수 있다. 이 때 진자에 대한 돌림힘 τ 는 진자에 작용하는 중력으로부터 발생한다. 따라서 진자의 중심에 작용하는 돌림힘 τ 는

$$\tau = -Mg(L + R) \sin \theta \quad (24)$$

이다. 이 식은 $\theta \ll 1$ 이라고 근사하여 간단하게 풀 수 있다. $\theta \ll 1$ 이면 $\sin \theta \approx \theta$ 이고 $\tau = I\alpha$ 이므로

$$\tau = I\alpha = -Mg(L+R)\theta \quad (25)$$

이고 이는 θ 에 대한 미분방정식이다.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mg}{I}(L+R)\theta. \quad (26)$$

따라서 이 진자의 각진동수 ω 는

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg}{I}(L+R)} \quad (27)$$

이고 주기 T 는

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mg}\left(\frac{1}{L+R}\right)} \quad (28)$$

이다. 주기가 회전관성 I 에 의존하므로 각 경우에 대한 회전관성을 고려하여 주기를 구해보자.

$$\text{원판인 경우 : } I = \frac{1}{2}MR^2 + M(L+R)^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{R^2}{2g} + \frac{(L+R)^2}{g}\right)\left(\frac{1}{L+R}\right)},$$

$$\text{링인 경우 : } I = MR^2 + M(L+R)^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{R^2}{g} + \frac{(L+R)^2}{g}\right)\left(\frac{1}{L+R}\right)},$$

$$\text{속이 짝 찬 공인 경우 : } I = \frac{2}{5}MR^2 + M(L+R)^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{2R^2}{5g} + \frac{(L+R)^2}{g}\right)\left(\frac{1}{L+R}\right)},$$

$$\text{속이 텅 빈 공인 경우 : } I = \frac{2}{3}MR^2 + M(L+R)^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{2R^2}{3g} + \frac{(L+R)^2}{g}\right)\left(\frac{1}{L+R}\right)}.$$

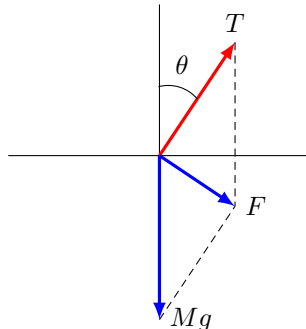
주기가 가장 긴 경우는 링인 경우이다.

(나) 식 (28)로부터 각진동수 ω 는 주기 T 에 반비례함을 알 수 있다. (가)에서 주기가 가장 긴 경우는 링이고 가장 짧은 경우는 속이 짝 찬 공임을 알 수 있으므로 각속도가 가장 큰 경우는 속이 짝 찬 공이다.

(다) 식 (28)로부터 주기 T 가 $\sqrt{1/g}$ 에 비례하므로 중력가속도 g 가 줄어들면 주기 T 가 늘어남을 알 수 있다. 달에서의 중력가속도 g_m 은 지구에서의 중력가속도 g 의 1/6배이므로 달에서의 주기를 T_m 이라 하면

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{6I}{Mg}\left(\frac{1}{L+R}\right)} = \sqrt{6}T \quad (29)$$

이다. 따라서 달에서의 주기는 지구에서의 주기의 $\sqrt{6}$ 배이다.



(라) 장력 T 를 구하기 위해 운동방정식을 세워보자. 다만 x, y 축이 아니라 물체의 운동방향과 그에 수직인 방향으로 성분을 나눌 것이다. 이는 물체의 회전축을 원점으로 하여 극좌표를 생각하는 것과 같다. 물체의 운동방향 힘을 F_θ , 수직인 방향 힘을 F_r 이라고 하면 운동방정식은 다음과 같이 세울 수 있다.

$$\sum F_r = T - Mg \cos \theta = \frac{Mv^2}{L+R}, \quad (30)$$

$$\sum F_\theta = Ma_\theta = Mg \sin \theta. \quad (31)$$

식 (30)의 우변은 구심력이다. 속도는 각속도와 회전 반지름을 곱한 것이므로

$$v = (L+R)\omega \quad (32)$$

이고 장력 T 는 다음과 같다.

$$T = Mg \cos \theta + M(L+R)\omega^2. \quad (33)$$