2022년 1학기 물리학 I: 제3차 시험

김현철[a1,†] and Lee Hui-Jae[1,‡]

[1]*Hadron Theory Group, Department of Physics,*
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea

(Dated: Spring semester, 2022)

1번 풀이 : 질량이 m인 물체가 정삼각형의 각 꼭짓점에 놓여 있을 때 계의 총 중력 퍼텐셜에너지는

$$E_p = -3G\frac{m^2}{a} \tag{1}$$

이고 한 물체를 무한히 먼 곳에 이동시켜 계에 두 물체만 남았다면 계의 총 중력 퍼텐셜에너지는

$$E'_p = -G\frac{m^2}{a} \tag{2}$$

이다. 외부에서 해준 일은 계의 총 에너지 변화량과 같으므로

$$W = E'_p - E_p = 2G\frac{m^2}{a} \tag{3}$$

이다.

2번 풀이 : 줄의 장력 T가 도르래에 돌림힘으로 작용하여 도르래를 회전시킨다. 따라서,

$$TR = I\alpha = \frac{1}{2}MRa \Longrightarrow T = \frac{1}{2}Ma \tag{4}$$

이고 장력과 중력이 작용하여 중력이 $M/2$인 물체를 움직이도록 한다. 도르래와 물체가 줄로 연결되어 있으므로 가속도의 크기는 같다.

$$\frac{1}{2}Ma = \frac{1}{2}Mg - T. \tag{5}$$

두 식을 연립하면 장력 T는

$$T = \frac{1}{4}Mg \tag{6}$$

이다.

3번 풀이 : 가장 멀리있을 때 거리, 속력을 r_1, v_1이라 하고 가장 가까이 있을 때 거리, 속력을 r_2, v_2라고 하면, 각운동량 보존법칙에 의해

$$mv_1r_1 = mv_2r_2 \tag{7}$$

이다. $r_1 = 2r_2$이므로

$$2v_1r_2 = v_2r_2 \Longrightarrow 2v_1 = v_2 \tag{8}$$

이다. 따라서 최대 선속력은 최소 선속력의 2배이다.

[a] Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00∼20:00)
[†] hchkim@inha.ac.kr
[‡] hjlee6674@inha.edu

4번 풀이 : 팽창 전 별의 회전 운동에너지는

$$E_R = \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{9}$$

이다. 팽창 후 별의 회전관성은 3배 늘어난다. 외력이 작용하지 않았으므로 각운동량이 보존된다. 팽창 후의 각속도를 ω'이라고 하면 각운동량 보존 법칙에 의해

$$I\omega = 3I\omega' \Longrightarrow \omega' = \frac{1}{3}\omega \tag{10}$$

이다. 따라서 팽창 후의 별의 회전 운동에너지 E'_R은

$$E'_R = \frac{3}{2} I\omega'^2 = \frac{1}{6} I\omega^2 \tag{11}$$

이다. 따라서 팽창 후 회전 운동에너지는 팽창 전 회전 운동에너지의 $\frac{1}{3}$배가 된다.

5번 풀이 : 액체의 밀도를 ρ_l이라 하면 잠긴 부피 만큼의 물의 질량과 물체의 질량이 같으므로

$$L\rho_l = L_0\rho \tag{12}$$

이고 ρ_l은

$$\rho_l = \frac{L_0}{L}\rho \tag{13}$$

이다.

6번 풀이 : 베르누이 방정식에 의해

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{14}$$

이므로 P_2는

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - v_2^2\right) \tag{15}$$

이다. 연속방정식을 이용해 v_2를 구해보자.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{16}$$

이고 A_1의 반지름이 A_2의 반지름보다 2배 더 길다. 따라서 $A_1 = 4A_2$이고 연속방정식으로부터

$$4v_1 = v_2 \tag{17}$$

임을 알 수 있다. 이를 식 (15)에 대입하면

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - 16v_1^2\right) = P_1 - \frac{15}{2}\rho v_1^2 \tag{18}$$

을 얻는다.

7번 풀이 : 막대의 회전에 대한 운동방정식은

$$I\alpha = -MgL\sin\theta \approx -MgL\theta \tag{19}$$

이다. 각 θ가 매우 작을 때 근사를 취하였다. 따라서

$$\frac{1}{3}ML^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -MgL\theta \Longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{L}\theta = -\omega^2\theta \tag{20}$$

이므로 각진동수 ω는

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \tag{21}$$

임을 알 수 있다. 주기 T는

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3g}} \tag{22}$$

이다. 이로부터 주기는 질량이 2배 늘어나고 길이도 2배 늘어나면 늘어나기 전 주기의 $\sqrt{2}$배가 된다.

8번 풀이 : 그림이 주어지지 않아 풀 수 없음.

9번 풀이 : 정상파의 기본진동수의 파형이라면 줄의 길이 L은 정상파의 파장 λ의 절반이다. 즉,

$$L = \frac{1}{2}\lambda \tag{23}$$

이다. 정상파의 파수를 k라 하면 정상파의 파장 λ은

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{24}$$

이므로 줄의 길이 L은

$$L = \frac{\pi}{k} = 3\,\mathrm{m} \tag{25}$$

이다.

10번 풀이 : 원래 음원의 진동수보다 관측자가 듣는 음원의 진동수가 감소한느 경우는 관측자와 음원이 서로 멀어지는 경우이다. 따라서 답은 (2), (4)번이다.

11번 풀이 :

(a) 물리진자에 작용하는 돌림힘 τ는

$$\tau = -mgh\sin\theta \tag{26}$$

이다. θ가 매우 작다면 $\sin\theta \approx \theta$로 근사할 수 있으므로

$$\tau \approx -mgh\theta \tag{27}$$

이다.

(b) 문제 7번과 같이 각진동수 ω를 구하면

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}} \tag{28}$$

이고 주기 T는

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \tag{29}$$

이다.

12번 풀이 : 중첩된 파동의 방정식은

$$y(x,t) = A\sin(kx-\omega t) + A\cos(kx-\omega t) \tag{30}$$

이다. 삼각함수 덧셈공식 $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$를 생각하자. $a = kx-\omega t,\ b = \pi/4$라고 생각하면

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{A}{\cos\frac{\pi}{4}}\sin(kx-\omega t)\cos\frac{\pi}{4} + \frac{A}{\sin\frac{\pi}{4}}\cos(kx-\omega t)\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \sqrt{2}A\sin(kx-\omega t+\frac{\pi}{4}) \end{aligned} \tag{31}$$

이므로 진폭은 $\sqrt{2}A$이다.

주관식 1번 풀이 :

(가) 그림과 같이 놓인 원판의 질량중심을 지나는 회전축에 대한 회전관성 I_{cm}은

$$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2 \tag{32}$$

이다. 질량중심과 회전축까지의 거리 h는 $h = R$이므로 평행축 정리를 이용하면

$$I = I_{cm} + Mh^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 \tag{33}$$

이다. 따라서 주어진 회전축에 대한 회전관성 I는 $\frac{3}{2}MR^2$이다.

(나) 그림이 주어지지 않아 풀 수 없음.

주관식 2번 풀이 :

(가) 그림으로부터 $x = 0$인 지점의 변위와 속도가 0초일 때 이후로 10초일 때 같아지므로 주기 T는 10 s이다. 전파 속도 v는

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.2\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}} = 0.02\,\mathrm{m/s} \tag{34}$$

이고 파동의 최대변위가 0.5 m이므로 진폭 A는 0.5 m이다. 그래프를 통해 $y(x=0,t)$는

$$y(0,t) = A\sin\omega t = (0.5\,\mathrm{m})\sin\left(\frac{2\pi}{10}t\right) \tag{35}$$

임을 알 수 있고 $t =$ 2.5 s일 때 변위 y는

$$y = (0.5\,\mathrm{m})\sin\left(\left(\frac{2\pi}{10}\right)(2.5)\right) = (0.5\,\mathrm{m})\sin\frac{\pi}{2} = 0.5\,\mathrm{m} \tag{36}$$

이다.

(나) 이 파동의 완전한 함수식을 알기 위해 파수 k와 각진동수 ω를 구해야한다. 파수 k와 각진동수 ω는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},\ \ \omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{37}$$

따라서 T와 ω는

$$k = \frac{2\pi}{0.2\,\mathrm{m}} = 10\pi\,\mathrm{m}^{-1},\ \ \omega = \frac{2\pi}{10\,\mathrm{s}} = \frac{\pi}{5}\,\mathrm{m}^{-1} \tag{38}$$

이고 $+x$축으로 진행하는 파동의 파동함수 $y(x,t)$는

$$y(x,t) = A\sin(kx-\omega t) = (0.5\,\mathrm{m})\sin\Big((10\pi\,\mathrm{m}^{-1})x - (\frac{\pi}{5}\,\mathrm{m}^{-1})t\Big) \tag{39}$$

이다.

(다) 진폭이 $0.5\,\mathrm{m}$, 파장이 $0.2\,\mathrm{m}$인 한파장의 사인함수가 그려진다.

주관식 3번 풀이 : Quiz 13 참조. 중첩 원리에 의해 물체 m에 작용하는 중력의 크기는 속이 찼을 때 작용하는 중력에 공동 만큼의 물체에 의한 중력을 뺀 값과 같다. 물체 M의 밀도를 ρ라고 하면

$$M = \frac{4}{3}R^3\rho,\ \ \rho = \frac{3M}{4R^3} \tag{40}$$

이고 공동 만큼의 물체의 질량을 M'이라고 하면

$$M' = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}R\right)^3\rho = \frac{1}{8}M \tag{41}$$

이다. 속이 찼을 때 중력을 F_1라고 하자. F_1은

$$F_1 = \frac{GMm}{d^2} \tag{42}$$

이다. 공동 만큼의 중력을 F_2라고 하면 F_2는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F_2 = \frac{GM'm}{(d-\frac{1}{2}R)^2} = \frac{GMm}{2(2d-R)^2}. \tag{43}$$

위에서 말했듯이 실제 중력 F은 속이 찼을 때의 중력 F_1에 공동 만큼의 물체에 의한 중력 F_2를 뺀 값과 같다. 즉,

$$F = F_1 - F_2 \tag{44}$$

이다. 따라서 m에 미치는 중력 F는

$$F = GMm\left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{2(2d-R)^2}\right) \tag{45}$$

이다.