

2022년 2학기 물리학 II

김현철^{*1,†} and HuiJae-Lee^{1,‡}

¹Hadron Theory Group, Department of Physics,
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea
(Dated: Autumn Semester, 2022)

Due date: 2022년 9월 26일 15:30-16:15

Quiz 8

문제 1 [20pt]. 반지름이 R 인 원형고리에 전류 I 가 흐르고 있다. 고리 중심에서의 자기장의 크기를 구하여라.

풀이 : 비오-사바르 법칙을 이용해 원형 고리 전류에 의한 자기장을 구해보자. 전류가 흐르는 지점으로부터 r 만큼 떨어진 곳에 생성되는 자기장 \vec{B} 는

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (1)$$

이다. I 은 전류, $d\vec{l}$ 는 도선을 따르는 미소길이이고 \hat{r} 는 방향 벡터이다.

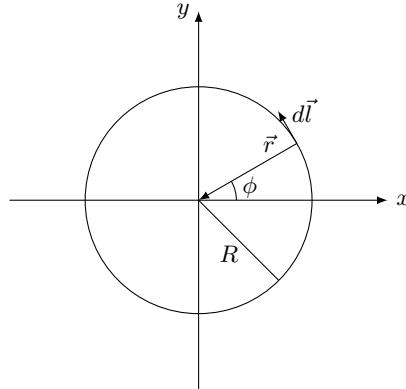


FIG. 1: xy 평면에 놓여있는 원형도선

이제 반지름이 R 이고 전류 I 가 흐르는 원형 도선을 생각하자. \vec{r} 은 도선 위의 한 점에서 도선의 중심으로 향하는 벡터이고 ϕ 는 \vec{r} 과 x 축이 이루는 각도이다. 여기서 전류는 시계 반대 방향으로 흐른다. 이 경우 벡터 \vec{r} 과 $d\vec{l}$ 로부터 $d\vec{l} \times \hat{r}$ 을 다음과 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= -R \cos \phi \hat{i} - R \sin \phi \hat{j}, \quad d\vec{l} = Rd\phi(-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}) \\ \implies d\vec{l} \times \hat{r} &= Rd\phi(-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}) \times (-\cos \phi \hat{i} - \sin \phi \hat{j}) = Rd\phi(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \hat{k} \end{aligned} \quad (2)$$

따라서 미소 벡터 $d\vec{l} \times \hat{r}$ 는

$$d\vec{l} \times \hat{r} = Rd\phi \hat{k} \quad (3)$$

* Office: 5S-436D (면담시간 매주 수요일-16:15~19:00)

†Electronic address: hchkim@inha.ac.kr

‡Electronic address: hjlee6674@inha.edu

이고 도선이 완전한 원형이므로 식 (1)의 적분구간은 $0 < \phi < 2\pi$ 임에 유의하여 자기장 \vec{B} 를 구할 수 있다.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} R \hat{k} d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} (2\pi R) \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{k}. \quad (4)$$

원형 도선에 의해 도선 중심에서 생성되는 자기장 \vec{B} 는 크기 $\frac{\mu_0 I}{2R}$ 를 가지고 z 축 방향을 향한다.

문제 2 [20pt]. 반지름이 a 인 원통형 금속막대가 있고 그 바깥에 (같은 축을 가지며) 안쪽 반지름이 b 이고 바깥쪽 반지름이 c 인 원형 금속관이 있다. 가운데 있는 금속막대와 바깥의 관에 크기가 같고 방향이 반대인 전류가 흐르고 있다면

(가) 축으로부터의 거리 r 이 a 보다 작은 경우,

(나) $a < r < b$ 인 경우,

(다) $r > c$ 인 경우의 자기장을 각각 구하여라.

풀이 : 앙페르 법칙을 이용해 각 경우의 자기장을 구해보자. 앙페르 법칙은 폐곡선을 따라 생성되는 자기장은 폐곡선 내부의 전류에 비례한다는 법칙으로

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (5)$$

로 쓸 수 있다.

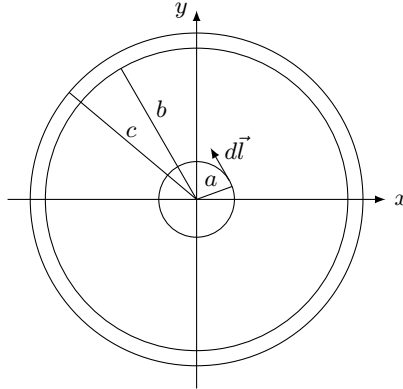


FIG. 2: 반지름이 a 인 금속막대와 안쪽 반지름 b , 바깥쪽 반지름이 c 인 원형 금속관의 단면

(가) 축으로부터의 거리 r 이 a 보다 작은 경우, 반지름이 r 인 원형 폐곡선을 따라 생성되는 자기장을 구하자. 폐곡선 내부의 면적 A_{in} 에 흐르는 전류 I_{in} 은 반지름이 a 인 금속막대에 흐르는 전류 I 와 다음의 관계가 있다.

$$I_{in} = \frac{A_{in}}{A} I = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I = \frac{r^2}{a^2} I. \quad (6)$$

식 (5)에 의하면

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in} = \mu_0 \frac{r^2}{a^2} I \quad (7)$$

이다. 자기장 \vec{B} 는 원형 도선이 만드는 자기장이므로 \vec{B} 의 방향은 $d\vec{l}$ 과 평행하다. 따라서

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = |\vec{B}| 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{a^2} I \Rightarrow |\vec{B}| = \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2} \quad (8)$$

를 얻는다. 자기장의 방향은 $d\vec{l}$ 와 일치하고 $d\vec{l}$ 는 각벡터 방향을 향하므로 자기장 \vec{B} 는

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2} \hat{\phi} \quad (9)$$

이다.

(나) $a < r < b$ 인 경우, 폐곡선이 반지름이 a 인 금속막대의 단면을 모두 포함하므로 식 (5)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = |\vec{B}| 2\pi r = \mu_0 I \implies |\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (10)$$

이 경우 역시 자기장의 방향은 $d\vec{l}$ 와 일치하므로

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (11)$$

를 얻는다.

(다) 앙페르 법칙을 이용해 $r > c$ 인 원을 그려 그 원 안에 흐르는 알짜 전류 I_{in} 을 구하자. 우선 반지름이 a 인 금속막대에 흐르는 전류를 I 라고 하면 바깥쪽 원형 금속과에 흐르는 전류 또한 I 이다. 다만, 두 전류는 흐르는 방향이 다르므로

$$I_{in} = I + (-I) = 0 \quad (12)$$

을 얻는다. 이는 알짜 전류가 흐르지 않는다는 뜻이고 식 (5)에 의해 자기장은 $\vec{0}$ 이다.

문제 3 [30pt]. 그림 3처럼 생긴 도선에 전류 i 가 흐른다. 이 전류는 모양이 똑같이 생긴 두 개의 반원형의 도선으로 나뉘어, 다시 합친다. 이 원형 모양의 도선 중심 C 에서 자기장을 구하여라.

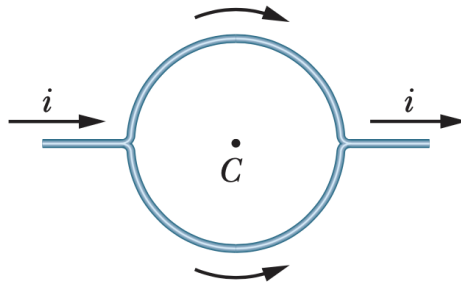


FIG. 3: 문제 3

풀이 : 도선을 두 부분으로 나누어 각각에 의한 자기장을 생각해보자. 먼저 도선 중심 C 를 기준으로 왼쪽과 오른쪽에 존재하는 도선에 의한 자기장은 도선의 미소길이 방향 $d\vec{l}$ 과 미소 도선부터 C 까지의 단위벡터 \hat{r} 이 평행하므로

$$d\vec{l} \parallel \hat{r} \implies d\vec{l} \times \hat{r} = 0 \quad (13)$$

이고 비오-사바르 법칙에 의해 자기장도 0이다. 이제 원형 도선에 의한 자기장만 따져주면 되는데 위 도선과 아랫 도선의 전류 방향이 각각 시계 방향, 시계 반대 방향으로 반대이다. 위 도선의 미소길이 방향을 $d\vec{l}_u$, 아랫 도선의 미소길이 방향을 $d\vec{l}_d$ 라 하면 각 도선에 의한 자기장 \vec{B}_u 와 \vec{B}_d 는 식 (1)과 (3)에 의해

$$\begin{aligned} \vec{B}_u &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^\pi (d\vec{l}_u \times \hat{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi d\phi \hat{k} = -\frac{\mu_0 I}{4R} \hat{k}, \\ \vec{B}_d &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_\pi^{2\pi} (d\vec{l}_d \times \hat{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_\pi^{2\pi} d\phi \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4R} \hat{k} \end{aligned} \quad (14)$$

이다. R 은 C 를 중심으로 하는 도선으로 구성된 원의 반지름이다. 윗도선에 의한 자기장 \vec{B}_u 는 $d\vec{l}_u$ 의 방향이 $d\vec{l}_d$ 와 반대로 시계 방향이기 때문에 $d\vec{l}_u \times \hat{r}$ 을 계산하면서 -부호가 붙는다. 중첩의 원리에 의해 총 자기장 \vec{B}_{tot} 는 두 자기장을 더한 것이므로

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_u + \vec{B}_d = \vec{0} \quad (15)$$

을 얻는다. 따라서 도선 중심 C 에서의 자기장은 $\vec{0}$ 이다.

문제 4 [50pt]. 그림 4은 반지름이 $a = 4.00$ cm인 긴 원통형 도체에 반지름이 $b = 1.50$ cm의 긴 원통형 구멍이 도체의 축과 평행하게 나 있는 걸 보여주는 단면이다. 이 구멍의 중심은 원형 도체의 중심에서부터 $d = 2.00$ cm 떨어져 있다. 이 원통형 도체에는 전류 $i = 5.25$ A가 균일하게 흐르고 있다고 하자.

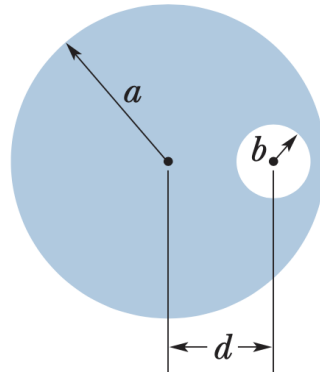


FIG. 4: 문제 4

(가) 이 구멍의 중심에서 자기장은 얼마인가?

(나) $b = 0$ 일 때와 $d = 0$ 일 때의 결과를 구하고 논하여라.

풀이 :

(가) 중첩의 원리를 이용하기 위해 구멍이 뚫리지 않은 반지름이 a 인 도선에 의한 자기장 \vec{B}_a 와 반지름이 b 인 도선에 의한 자기장 \vec{B}_b 를 구하자. 도선에 구멍이 뚫린 상황은 구멍이 뚫리지 않은 도선에 전류가 흐를 때 구멍이 존재해야 하는 영역에 반대 방향으로 전류가 흐르는 상황과 같다. 따라서 자기장 \vec{B}_a 와 \vec{B}_b 는 서로 반대 방향으로 흐르는 전류에 의해 생성되는 자기장이다. 먼저 반지름이 a 인 도선에 흐르는 전류밀도 J_a 는

$$J_a = \frac{i}{\pi(a^2 - b^2)} \quad (16)$$

이고 반지름이 b 인 도선에 흐르는 전류밀도 J_b 는

$$J_b = J_a = \frac{i}{\pi(a^2 - b^2)} \quad (17)$$

이다. 구멍의 중심에 작용하는 자기장 \vec{B}_a 는 식 (9)로부터 구할 수 있다. 도선의 중심으로부터 자기장을 구하고자 하는 지점 사이의 거리 r 이 $r = d$ 이므로 자기장 \vec{B}_a 는 다음과 같다.

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 d}{2\pi a^2} \frac{a^2 i}{a^2 - b^2} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 d i}{2\pi(a^2 - b^2)} \hat{\phi}. \quad (18)$$

한편, 구멍의 중심에 작용하는 자기장 \vec{B}_b 또한 식 (9)로 구할 수 있는데 중심으로부터의 거리 r 이 $r = 0$ 이므로 자기장 또한 $\vec{0}$ 이다. 즉,

$$\vec{B}_b = \vec{0} \quad (19)$$

를 얻는다. 그러므로 구멍의 중심에서의 자기장 \vec{B} 는 계산하면

$$\vec{B} = \vec{B}_a + \vec{B}_b = \frac{\mu_0 di}{2\pi(a^2 - b^2)} \hat{\phi} \quad (20)$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(2.00 \times 10^{-2} \text{ m})(5.25 \text{ A})}{2\pi((4.00 \times 10^{-2} \text{ m})^2 - (1.50 \times 10^{-2} \text{ m})^2)} \hat{\phi} \quad (21)$$

$$= (1.53 \times 10^{-5} \hat{\phi}) \text{ T} \quad (22)$$

를 얻는다.

(나) 먼저 $b = 0$ 인 경우부터 살펴보자. $b = 0$ 이면 구멍의 지름이 0이 되고 도선은 구멍이 없는 단면을 가진다. 식 (20)에 $b = 0$ 을 대입하면

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 di}{2\pi a^2} \hat{\phi} \quad (23)$$

가 되고 이는 구멍이 없는 도선의 자기장에 대한 식 (9)와 일치한다. 이제 $d = 0$ 인 경우를 살펴보자. 이는 반지름이 b 인 구멍이 도선의 중심으로 옮겨간 경우와 같다. 이 또한 식 (20)에 $d = 0$ 을 대입하여 알 수 있는데 $d = 0$ 이면

$$\vec{B} = \vec{0} \quad (24)$$

으로 자기장이 작용하지 않는다는 사실을 알 수 있다.