2022년 1학기 물리학 I: Quiz 14

김현철[a1,†] and Hui-Jae Lee[1,‡]
[1] *Hadron Theory Group, Department of Physics, Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*
(Dated: Spring semester, 2022)

문제 1. (30 pt) 그림 1에서 크기가 10 N인 힘이 질량 10 kg이고 반지름이 0.30 m인 바퀴에 수평방향으로 작용하고 있다. 바퀴는 수평면에 대하여 유연한 굴림 운동을 하며 질량중심에 대한 가속도의 크기는 0.60 m/s^{2}이다.

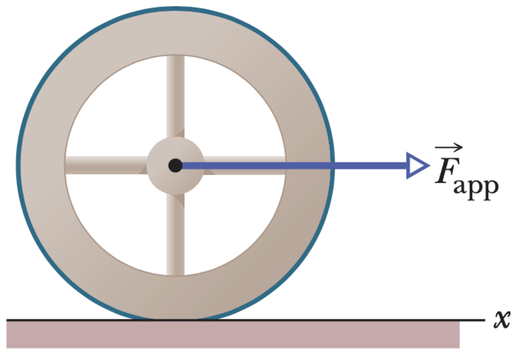

FIG. 1. 문제 1

(가) 바퀴에 작용하는 마찰력을 단위벡터로 표기하여라.

(나) 질량중심을 지나는 회전축에 대한 바퀴의 회전관성은 얼마인가?

풀이 : 바퀴에 작용하는 중력을 F_g, 수직항력을 N, 마찰력을 F_s라 하자. 바퀴가 지면에 닿는 지점에 대한 자유 물체 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.

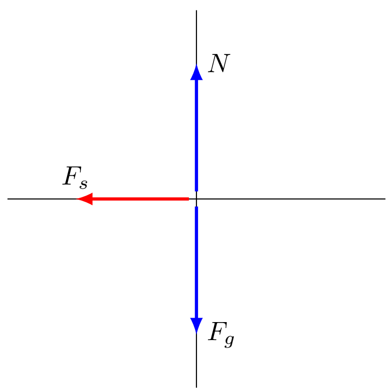

FIG. 2. 자유 물체 다이어그램

(가) 바퀴가 회전하도록 하는 힘은 바퀴에 작용하는 마찰력이다. 바퀴의 질량을 m, 반지름을 r, 바퀴 중심에 대한 바퀴 끝 부분의 가속도를 a라 하면 각가속도 α와, 돌림힘 τ를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\alpha = \frac{a}{r}, \quad \tau = F_s r = I\alpha. \tag{1}$$

---

[a] Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00∼20:00)
[†] hchkim@inha.ac.kr
[‡] hjlee6674@inha.edu

마찰력은 반대방향으로 작용하므로,

$$\vec{F}_s = -\frac{I\alpha}{r}\hat{\boldsymbol{i}}. \tag{2}$$

(나) 바퀴의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\sum F = ma = F_{app} - F_s. \tag{3}$$

마찰력은,

$$F_s = \frac{I\alpha}{r} = \frac{Ia}{r^2} = F_{app} - ma. \tag{4}$$

따라서 회전관성 I는 다음과 같다.

$$I = \frac{(F_{app} - ma)r^2}{a} \tag{5}$$

수치를 대입하면,

$$\begin{aligned} I &= \frac{(10\,\mathrm{N} - (10\,\mathrm{kg})(0.60\,\mathrm{m/s^2}))(0.30\,\mathrm{m})^2}{(0.60\,\mathrm{m/s^2})} \\ &= 0.6\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2. \end{aligned} \tag{6}$$

문제 2. (30 pt) 그림 3는 질량이 m, 반지름이 R인 원형고리와 질량이 m, 길이 R인 네 개의 가느다란 막대로 만들어진 정사각형 강체이다. 강체는 주기가 2.5 초인 일정한 속력으로 수직축에 대하여 회전한다. $R = 0.50$ cm, $m = 2.0$ kg이라고 할 때,

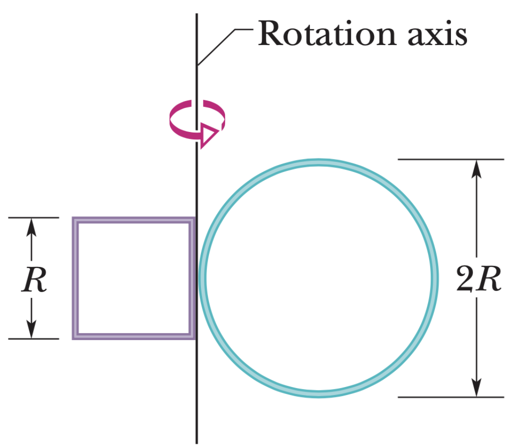

FIG. 3. 문제 2

(가) 회전축에 대한 강체의 회전관성과

(나) 회전축에 대한 각운동량을 각각 구하여라.

풀이 :

(가) 정사각형일 경우 회전축에 수평한 막대, 수직인 막대를 나누어 생각하자. ρ를 고리의 밀도라 하면 수평한 막대의

회전관성 I_p는,

$$I_p = \int r^2\,dm = \rho \int_0^R R^2\,dz + 0 = \rho R^3. \tag{7}$$

수직인 막대의 회전관성 I_o는 다음과 같다.

$$I_0 = \int r^2\,dm = \rho \int_0^R r^2\,dr + \rho \int_0^R r^2\,dr = \frac{2}{3}\rho R^3. \tag{8}$$

정사각형 고리의 회전관성은 I_p 와 I_o 를 합한 것이므로,

$$I_p + I_0 = \frac{5}{3}\rho R^3 = \frac{5}{3}\left(\frac{m}{R}\right)R^3 = \frac{5}{3}mR^2. \tag{9}$$

평행축 정리를 이용하여 원형고리의 회전관성을 구하자. 평행축 정리는 다음과 같다. I는 축을 이동한 후의 회전관성이고 I_{cm}은 축을 이동하기 전의 회전관성이다.

$$I = I_{cm} + mh^2. \tag{10}$$

원형고리의 회전관성 I_{cir}은,

$$I_{cir} = I_{cm} + mR^2 \tag{11}$$

원형고리일 경우 밀도 ρ는,

$$\rho = \frac{m}{2\pi R}. \tag{12}$$

미소질량 dm'을 생각하면,

$$dm' = \rho R\,d\theta = \frac{m}{2\pi}\,d\theta. \tag{13}$$

θ는 축과 중심을 잇는 선, 중심과 dm'을 잇는 선이 이루는 각이다. $r = R\sin\theta$ 이므로 I_{cm}은,

$$I_{cm} = \int r^2\,dm' = \frac{m}{2\pi}R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,d\theta = \frac{m}{2\pi}R^2\pi = \frac{1}{2}mR^2. \tag{14}$$

식 (10)에 의해 I_{cir}은 다음과 같다.

$$I_{cir} = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2. \tag{15}$$

총 회전관성 I는 정사각형 고리의 회전관성과 원형고리의 회전관성을 합한 것이므로,

$$I = I_p + I_o + I_{cir} = \frac{5}{3}mR^2 + \frac{3}{2}mR^2 = \frac{19}{6}mR^2. \tag{16}$$

수치를 대입하자.

$$\begin{aligned} I &= \frac{19}{6}(2.0\,\mathrm{kg})(0.50\,\mathrm{cm})^2 \\ &= 1.6\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{cm}^2 \\ &= 1.6\times10^{-4}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2. \end{aligned} \tag{17}$$

(나) 정의에 따르면 각속도 ω는,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{18}$$

각운동량 L은 다음과 같다.

$$L = I\omega = \frac{2\pi I}{T} = \frac{19\pi mR^2}{3T}. \tag{19}$$

수치를 대입하여 값을 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L &= \frac{19\pi(2.0\,\mathrm{kg})(0.50\,\mathrm{cm})^2}{3(2.5\,\mathrm{s})} \\ &= 4.0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{cm}^2/\mathrm{s} \\ &= 4.0\times10^{-4}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}. \end{aligned} \tag{20}$$

문제 3. (40pt) 질량이 4.0 kg이고 길이가 0.50 m인 가늘고 균일한 막대가 수평면에서 중심을 지나는 수직축에 대하여 회전할 수 있다. 질량이 3.0 g인 총알이 막대의 회전면에서 정지하고 있는 막대의 왼쪽 끝을 향하여 발사되었다. 위에서 보았을 때 총알의 경로는 그림 4처럼 막대와 $\theta = 60°$의 각도를 이룬다. 총알이 막대에 박히고 충돌 직후 막대의 가속도가 10 rad/s이라면 충돌 직전 총알의 속력은 얼마인가?

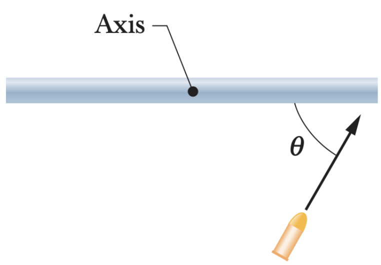

FIG. 4. 문제 3

풀이 : 막대 질량 m_1, 막대 길이 d, 총알 질량 m_2 총알 속력 v_2. 운동량 보존 법칙 초기 운동량 L_1,

$$L_1 = |\vec{r}\times\vec{p}| = \frac{1}{2}m_2v_2d\sin\theta. \tag{21}$$

나중 각운동량 L_2,

$$L_2 = I_1\omega + I_2\omega. \tag{22}$$

I_1 막대 회전관성, I_2 총알 회전관성. I_1은,

$$I_1 = \int r^2\,dm = \rho\int_{-\frac{1}{2}d}^{\frac{1}{2}d} r^2\,dr = \left(\frac{m_1}{d}\right)\left(\frac{1}{24}d^3 - \left(-\frac{1}{24}d^3\right)\right) = \frac{1}{12}m_1d^2. \tag{23}$$

I_2는,

$$I_2 = mr^2 = \frac{1}{4}m_2d^2. \tag{24}$$

L_2는,

$$L_2 = \left(\frac{1}{12}m_1 + \frac{1}{4}m_2\right)\omega d^2. \tag{25}$$

운동량 보존 법칙 $L_1 = L_2$,

$$\frac{1}{2}m_2v_2d\sin\theta = \left(\frac{1}{12}m_1 + \frac{1}{4}m_2\right)\omega d^2. \tag{26}$$

v_2는,

$$v_2 = \left(\frac{1}{6}m_1 + \frac{1}{2}m_2\right)\frac{\omega d}{m_2 \sin\theta} \tag{27}$$

수치를 대입해보면,

$$\begin{aligned} v_2 &= \left(\frac{1}{6}(4.0\,\mathrm{kg}) + \frac{1}{2}(3.0\times10^{-3}\,\mathrm{kg})\right)\frac{(10\,\mathrm{rad/s})(0.50\,\mathrm{m})}{(3.0\times10^{-3}\,\mathrm{kg})\sin 60^\circ} \\ &= 1.3\times10^{3}\,\mathrm{m/s}. \end{aligned} \tag{28}$$

총알의 속력은 $1.3\times10^{3}\,\mathrm{m/s}$이다.

문제 4. (60pt) 난이도 상: 그림 5에서 질량 30 kg의 아이가 질량이 100 kg, 반지름이 2.0 m인 정지해 있는 원판의 가장자리에 서 있다. 원판의 중심에 있는 회전축에 대한 회전관성은 $150\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$이다. 이때 친구가 던진 질량이 1.0 kg인 공을 아이가 잡았다. 공을 잡기 직전에 수평방향인 공의 속도 $\vec{v}$의 크기는 12 m/s이고 원판의 가장자리의 접선과 $\vec{v}$가 이루는 각도는 37°이다. 아이가 공을 잡은 직후 원판의 각속력을 구하여라.

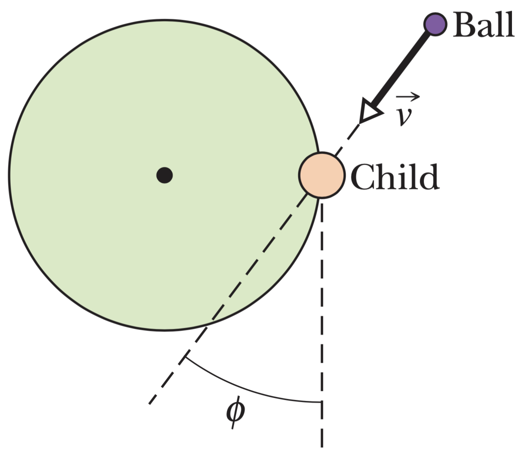

FIG. 5. 문제 4

풀이 : 원판 질량 m_1, 원판 반지름 R, 원판의 회전관성 I_1, 아이 질량 m_2, 공 질량 m_3, 공 속력 v_3. 각운동량 보존 법칙, 공을 잡기 직전 각운동량 L_i

$$L_i = |\vec{r}\times\vec{p}| = m_3 v_3 R \sin(270^\circ - \phi)\,. \tag{29}$$

공을 잡은 후 아이와 공의 회전관성 I_2,

$$I_2 = mr^2 = (m_2 + m_3)R^2. \tag{30}$$

전체 회전관성 I,

$$I = I_1 + I_2 = I_1 + (m_2 + m_3)R^2. \tag{31}$$

공을 잡은 후 각운동량 L_f,

$$L_f = I\omega = (I_1 + (m_2 + m_3)R^2)\omega. \tag{32}$$

각운동량 보존 법칙에 의해 $L_i = L_f$,

$$m_3 v_3 R \sin(270^\circ - \phi) = (I_1 + (m_2 + m_3)R^2)\omega. \tag{33}$$

각속도 ω,

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{m_3 v_3 R}{2(I_1 + (m_2 + m_3)R^2)} \sin(270^\circ - \phi) \\ &= \frac{(1.0\,\mathrm{kg})(12\,\mathrm{m/s})(2.0\,\mathrm{m})}{(150\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2) + ((30\,\mathrm{kg}) + (1.0\,\mathrm{kg}))(2.0\,\mathrm{m})^2} \sin 233^\circ - 0.070\,\mathrm{rad/s}.\end{aligned} \tag{34}$$