2022년 2학기 물리학 II

Byeong-woo Han[1,*] and 김현철[†1,‡]

[1]*Hadron Theory Group, Department of Physics,*
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea

(Dated: Autumn Semester, 2022)

Due date: 2022년 8월 31일 15:30-16:15

Quiz 2

문제 1 [20pt]. 반지름이 a인 원형고리가 원점을 중심으로 $x-y$ 평면에 놓여 있다. 이 중심에서부터 z축으로 z만큼 떨어진 P점에서 이 원형고리가 생성시키는 전기장의 크기와 방향을 구하려고 한다.

- 원점에서부터 원형고리를 따라 있는 미소길이 ds까지의 거리 벡터 $\vec{r}'$을 구하여라.
- 원점에서부터 P점까지 거리 벡터 $\vec{r}$을 구하여라.
- $|\vec{r}-\vec{r}'|$을 구하여라.
- 위 문제에 대한 전기장을 표현하여라.
- P점에서 전기장을 구하여라.
- 결과를 토론하여라. (예: 전기장의 방향은 왜 z축 방향만 있는가? $z \gg a$ 일 때 전기장은? 등등)

풀이 : 먼저 미소거리 ds까지의 거리 벡터$\vec{r}'$을 구해보자. ds까지의 거리벡터 $\vec{r}'$와 x축과의 각도를 ϕ라고 하자. 그러면

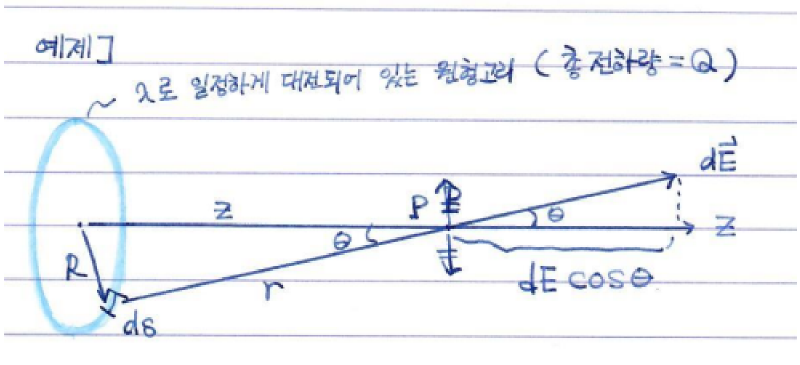

FIG. 1: **문제 1**

$\vec{r}'$을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\vec{r}' = (a\cos\phi, a\sin\phi, 0)\,. \tag{1}$$

[†] Office: 5S-436D (면담시간 매주 수요일-16:15~18:00)
[*]Electronic address: 12191964@inha.edu
[‡]Electronic address: hchkim@inha.ac.kr

또한, 원점에서 P점까지의 거리 벡터 $\vec{r}$ 역시 쉽게 쓸 수 있다.

$$\vec{r} = (0, 0, z)\,. \tag{2}$$

따라서, $|\vec{r} - \vec{r}'|$은 다음과 같다.

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = |(-a\cos\phi, -a\sin\phi, z)| \tag{3}$$
$$= \sqrt{a^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi + z^2}. \tag{4}$$

$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$이므로,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2} \tag{5}$$

이다. 이제 전기장을 표현하기 위하여 전하를 알아보자. 전하밀도가 균일하므로 전하밀도는 상수이다. 이 전하밀도를 λ라고 하자. 전체 전하를 Q라고 하였을 때 λ와 Q사이의 관계는 다음과 같다.

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi a}. \tag{6}$$

이제 미소길이 ds에 의한 미소 전기장을 구해보자. ds에 의한 전기장은 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}(\vec{r} - \vec{r}')\,. \tag{7}$$

여기서 $dq = \lambda ds = \frac{Q}{2\pi a} a d\phi$ 이고, $|\vec{r} - \vec{r}'|$과 $(\vec{r} - \vec{r}')$는 이미 구했으므로 미소 전기장에 대한 식은 쉽게 알 수 있다.

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2\pi a}\frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}}(-a\cos\phi\hat{x} - a\sin\phi + z\hat{z})\,d\phi. \tag{8}$$

이제 총 전기장을 구하기 위해 0부터 2π까지 적분하자.

$$\vec{E} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2\pi a}\frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}}(-a\cos\phi\hat{x} - a\sin\phi\hat{y} + z\hat{z})\,d\phi \tag{9}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2\pi}\frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}}(-a\sin\phi\hat{x} + a\cos\phi\hat{y} + \phi z\hat{z})\,|_0^{2\pi} \tag{10}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}\hat{z}. \tag{11}$$

이다. 강의노트에서는 대칭성이 존재함을 전제로 하여서 cos성분만 이용하여서 전기장을 구하였지만 여기에서의 풀이과정에서는 벡터의 방향을 모두 고려하여 계산을 하였다. 그럼에도 불구하고 같은결과가 나왔는데, 이러한 결과가 나온 이유는 언급하였다 싶이 원이 원점을 기준으로 z축에 대한 대칭성이 존재하기 때문이다. 또한 만약에 $z \gg a$일 때 전기장을 구해보면, $1 \gg \frac{a}{z}$ 이므로, Taylor근사가 가능하다. 따라서,

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}\hat{z} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qz}{z^3\left[1 + \left(\frac{a}{z}\right)^2\right]^{3/2}}\hat{z} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{z^2}\left[1 + \left(\frac{a}{z}\right)^2\right]^{-3/2}\hat{z} \\
&\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{z^2}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{z^2}\right)\hat{z} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{z^2}\hat{z} + O\left(\frac{a^2}{z^4}\right)\hat{z} \\
&\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{z^2}\hat{z}
\end{aligned} \tag{12}$$

를 얻는다. 따라서, $z \gg a$일 때, 전하밀도가 일정한 원형고리는 점전하로 근사가 가능하다.
이제 $z \to 0$일때의 전기장을 구해보자. 이때의 전기장은,

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(a^2+z^2)^{3/2}} \hat{z} = \vec{0} \tag{13}$$

이므로, $z = 0$ 일 때, 전기장은 $\vec{0}$이다. 이러한 이유는 원의 중심에서 원의 대칭성에 의해서 전기장이 서로 상쇄되기 때문에, 전기장이 $\vec{0}$이 되기 때문이다.

문제 2 [5pt].크기가 1.00×10^3 N/C인 균일한 전기장 안에 전자를 가만히 놓았다. 전자가 1.00 cm를 진행했을 때,

(가) 전자의 속력은 얼마인가?

(나) 전자의 운동에너지는 얼마인가?

(다) 시간은 얼마나 지났는가?

풀이 :

(가) 전자가 받는 힘은 $e\vec{E}$이므로 뉴턴의 제 2법칙에 의해

$$\vec{F} = m_e\vec{a} = e\vec{E} \tag{14}$$

전자의 가속도는 $\frac{e\vec{E}}{m_e}$로 일정하다. 여기서 e는 전자의 전하량, $\vec{E}$는 전기장, m_e는 전자의 질량이다. 이는 등가속도 운동이므로, 등가속도운동에서의 방정식

$$2as = v^2 - v_0^2 \tag{15}$$

이 성립한다. 여기서

$$\vec{a} = \frac{e\vec{E}}{m_e} = \frac{1.60 \times 10^{-19}\text{C} \times 1.00 \times 10^3 \ \text{N/C}}{9.11 \times 10^{-31} \ \text{kg}} = 1.76 \times 10^{14} \ \text{m/s}^2 \tag{16}$$

이고, 전자를 가만히 놓았다고 하였으므로, $v_0 = 0$, 마지막으로, $s = 1.00 \ \text{cm} = 0.01 \ \text{m}$이므로, 전자의 속력은,

$$v = \sqrt{2 \times 0.01 \ \text{m} \times 1.76 \times 10^{14} \ \text{m/s}^2} \approx 1.88 \times 10^6 \ \text{m/s} \tag{17}$$

이다.

(나) 일-에너지 정리에 의해서, 전자에 가해진 일의 크기는 운동에너지의 변화량과 같다, 처음의 전자가 정지해 있었으므로, 가해진 일의 크기가 운동에너지 이다. 전자의 가해진 일의 크기는,

$$F \cdot s = e\vec{E} \cdot \vec{s} = (1.60 \times 10^{-19} \ \text{C})(1.00 \times 10^3 \ \text{N/C})(0.01 \ \text{m}) = 1.60 \times 10^{-18} \ \text{J} \tag{18}$$

이다.

(다) 등가속도 운동에서,

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{19}$$

이다. 여기서, $s_0 = 0$으로 설정하고, 전자를 가만히 놓았다고 하였으므로, $v_0 = 0$이다. 따라서, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$s = \frac{1}{2}at^2 \tag{20}$$

이를 변형하면,

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \tag{21}$$

이고, $s = 0.01\ \text{m}, a = 1.76 \times 10^{14}\ \text{m/s}^2$ 이므로, 시간 t는

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 0.01}{1.76 \times 10^{14}\ \text{m/s}^2}} = 1.14 \times 10^{-16} s \tag{22}$$

이다.

문제 3 [10pt]. 그림 2처럼 각각 전하가 q, $-q$인 두 입자가 전기 쌍극자를 이루고 있다. $x \gg a$일 때 x 축 위에서 전기장 E_x를 구하여라.

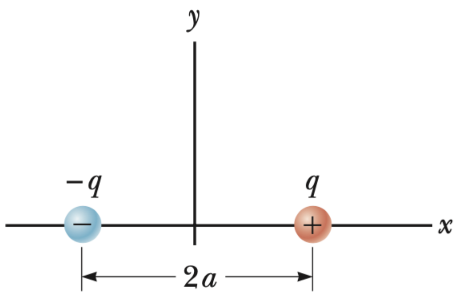

FIG. 2: **문제 3**

풀이: 먼저 양전하에 의한 전기장을 구하자. x축 위에서의 양전하에 의한 전기장 E_q는,

$$E_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(x-a)^2} \tag{23}$$

이고, x축 위에서의 음전하에 의한 전기장 E_{-q}는,

$$E_{-q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{(x+a)^2} \tag{24}$$

전기장은 중첩의 원리가 적용되므로, 중첩의 원리를 적용하면 전기장 E_x는

$$E_x = E_q + E_{-q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(x-a)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{(x+a)^2} \tag{25}$$

이제 $x \gg a$ 라고 가정하면, $1 \gg \frac{a}{x}$ 이므로, Taylor 근사를 사용할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2\left(1-\frac{a}{x}\right)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2\left(1+\frac{a}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{-2} \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2}\left[\left(1+\frac{2a}{x}\right) - \left(1-\frac{2a}{x}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4qa}{x^3} \end{aligned} \tag{26}$$

이다. 여기서 $p = 2qa$라고 정의하면 x축 위의 전기장은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{p}{x^3} \tag{27}$$

여기서의 p의 값을 쌍극자 모멘트라고 한다.

문제 4 [10pt]. 그림 3처럼 한 변의 길이가 a인 정사각형의 꼭짓점에 네 개의 전하가 각각 놓여있다.

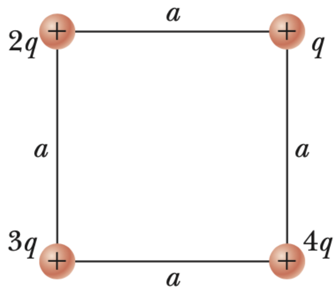

FIG. 3: **문제 4**

(a) 전하 q의 위치에서 전기장을 구하여라.

(b) q에 작용하는 총 정전기력을 구하여라.

풀이 :

(a) q에서의 전기장을 구하기 위해 $q, 2q, 3q, 4q$에 의한 전기장을 구하자

(a-1) q의 위치에서 q에 의한 전기장은, 거리가 0이므로, 전기장은 0이다

(a-2) q의 위치에서 $2q$에 의한 전기장은 거리가 a이고, 방향이 x축 방향이므로, 전기장 $\vec{E}_{2q}$는 다음과 같다.

$$\vec{E}_{2q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{a^2}\hat{x}. \tag{28}$$

(a-3) q의 위치에서 $3q$에 의한 전기장은 거리가 피타고라스 정리에 의해서 $\sqrt{2}a$이고, $\hat{x}+\hat{y}$의 방향이므로, 전기장 $\vec{E}_{3q}$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\vec{E}_{3q} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3q}{2\sqrt{2}a^3}a\left(\hat{x}+\hat{y}\right) &(29)\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3q}{2\sqrt{2}a^2}\left(\hat{x}+\hat{y}\right). &(30)\end{aligned}$$

(a-4) q의 위치에서 $4q$에 의한 전기장은 a이고, 방향이 y축 방향이므로, 전기장 $\vec{E}_{4q}$는 다음과 같다.

$$\vec{E}_{4q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4q}{a^2}\hat{y}. \tag{31}$$

이다. 전기장은 중첩의 원리가 성립하므로, q의 위치에서의 전기장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\vec{E}_{tot} &= \vec{E}_{2q}+\vec{E}_{3q}+\vec{E}_{4q}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{a^2}\hat{x}+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3q}{2\sqrt{2}a^2}\left(\hat{x}+\hat{y}\right)+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4q}{a^2}\hat{y}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a^2}\left(\frac{4\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}\hat{x}+\frac{8\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}\hat{y}\right).\end{aligned} \tag{32}$$

(b) 전기장의 정의는 단위 전하당 전기력의 크기이다. 따라서, 총 정전기력은 정의에 따라서 위에서 구한 전기장에 전하를 곱해주면 된다. 따라서 정전기력은

$$\vec{F}_{tot} = q\vec{E}_{tot} = = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{4\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{8\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}\hat{y}\right) \tag{33}$$

이다.

문제 5 [20pt]. 그림 2과 같이 x-축을 따라 두 전하 q_1과 q_2가 각각 a, b 위치에 놓여 있다. 여기서 q_2는 음전하이다.

(가) y-축 위의 점 P에서 두 전하가 만드는 전기장을 구하여라.

(나) $|q_1| = |q_2|$, $a = b$일 때, P 점에서 전기장을 구하여라.

(다) 원점에서 P 점까지의 거리가 a보다 매우 클 때 $(y \gg a)$, 이 전기 쌍극자에 의한 전기장을 P 점에서 구하여라.

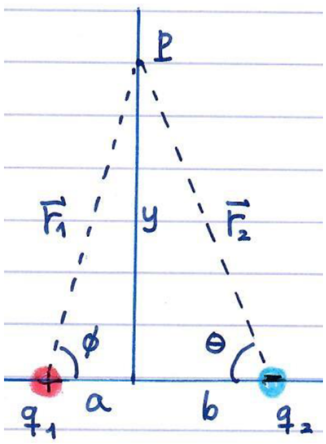

FIG. 4: **문제 5**

풀이 :

(가) 먼저 q_1이 만드는 점 P에서의 전기장 $\vec{E}_{q_1}$을 구하자. 이에 대한 식은 피타고라스의 정리를 이용하면 다음과 같다.

$$\vec{E}_{q_1} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2+y^2}\frac{a\hat{x}+y\hat{y}}{\sqrt{a^2+y^2}} \tag{34}$$

같은 방법으로 q_2가 점 P에서 전기장 $\vec{E}_{q_2}$를 구해보면,

$$\vec{E}_{q_2} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{b^2+y^2}\frac{-b\hat{x}+y\hat{y}}{\sqrt{a^2+y^2}} \tag{35}$$

그런데 여기서 벡터부분을 삼각함수의 꼴로 변경할 수 있다. 즉,

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}, \qquad \sin\phi = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}, \tag{36}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2+y^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{b^2+y^2}} \tag{37}$$

이다. 이 형태를 식 (34), (35)에 대입하여 다음과 같이 바꿔 쓸 수 있다.

$$\vec{E}_{q_1} = \frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2+y^2}\left(\cos\phi\hat{x}+\sin\phi\hat{y}\right) \tag{38}$$

$$\vec{E}_{q_2} = \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{b^2+y^2}\left(\cos\theta\hat{x}-\sin\theta\hat{y}\right). \tag{39}$$

따라서 점 P에서 두 전하가 만드는 전기장은,

$$\begin{aligned}\vec{E}_{tot} &= \vec{E}_{q_1}+\vec{E}_{q_2}\\ &= \frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2+y^2}\left(\cos\phi\hat{x}+\sin\phi\hat{y}\right)+\frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{b^2+y^2}\left(\cos\theta\hat{x}-\sin\theta\hat{y}\right)\\ &= \left(\frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2+y^2}\cos\phi+\frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{b^2+y^2}\cos\theta\right)\hat{x}\\ &+\left(\frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2+y^2}\sin\phi-\frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{b^2+y^2}\sin\theta\right)\hat{y}\end{aligned} \tag{40}$$

이다.

(나) 먼저 $a=b$인 경우를 생각하여 보자. 이 경우 식 (36)에 의해서, $\theta=\phi$가 된다. 또한, $|q_1|=|q_2|$ 까지 만족 할 경우, 식 (40)에 의해서, y축 성분의 전기장이 사라지게 된다. 이때의 전하를 $|q_1|=|q_2|=|q|$이라고 한다면, P 점에서의 전기장은

$$\begin{aligned}\vec{E}_{tot} &= \vec{E}_{q_1}+\vec{E}_{q_2}\\ &= \left(\frac{|q|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2+y^2}\cos\phi+\frac{|q|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2+y^2}\cos\phi\right)\hat{x}\\ &+\left(\frac{|q|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2+y^2}\sin\phi-\frac{|q|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2+y^2}\sin\phi\right)\hat{y}\\ &= \frac{2\,|q|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2+y^2}\cos\phi\hat{x}\\ &= \frac{2a\,|q|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}}\hat{x}\end{aligned} \tag{41}$$

이다.

(다) $y\gg a$ 라면, $1\gg\frac{a}{y}$ 이므로 Taylor 근사를 쓸 수 있다. 따라서, 식 (41)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\vec{E}_{tot} &= \frac{2a\,|q|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}}\hat{x}\\ &= \frac{2a\,|q|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{y^3}\left[1+\left(\frac{a}{y}\right)^2\right]^{-3/2}\hat{x}\\ &\approx \frac{2a\,|q|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{y^3}\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{a}{y}\right)^2\right]\hat{x}\\ &= \frac{2a\,|q|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{y^3}\hat{x}+O\left(\frac{a^3}{y^5}\right).\end{aligned} \tag{42}$$

여기서 첫번째 항만 남기고, $\vec{p}=2\,|q|\,a\hat{x}$라고 정의하면, 다음을 얻는다.

$$\vec{E}_{tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}}{y^3}. \tag{43}$$

여기서 $\vec{p}$를 쌍극자 모멘트라고 부른다.