2022년 1학기 물리학 I: 제1차 시험

김현철[a1,†] and Lee Hui-Jae[1,‡]
[1] *Hadron Theory Group, Department of Physics, Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*
(Dated: Spring semester, 2022)

문제 (300pt) 그림 1처럼 스키 점프대를 만들었다. 비탈면은 평지에서부터 32°의 각으로 기울어져 있다. 그리고 비탈면의 길이는 $d_1 = 100$ m이고, 비탈면이 끝나고 지면과 나란한 지점부터 스키 선수가 점프하는 지점까지 거리는 $d_2 = 2$ m이다. 우선 지면과 스키 사이에 쓸림이 없고, 스키 선수가 정지상태에 있다가 미끄러져 내려오고 있다고

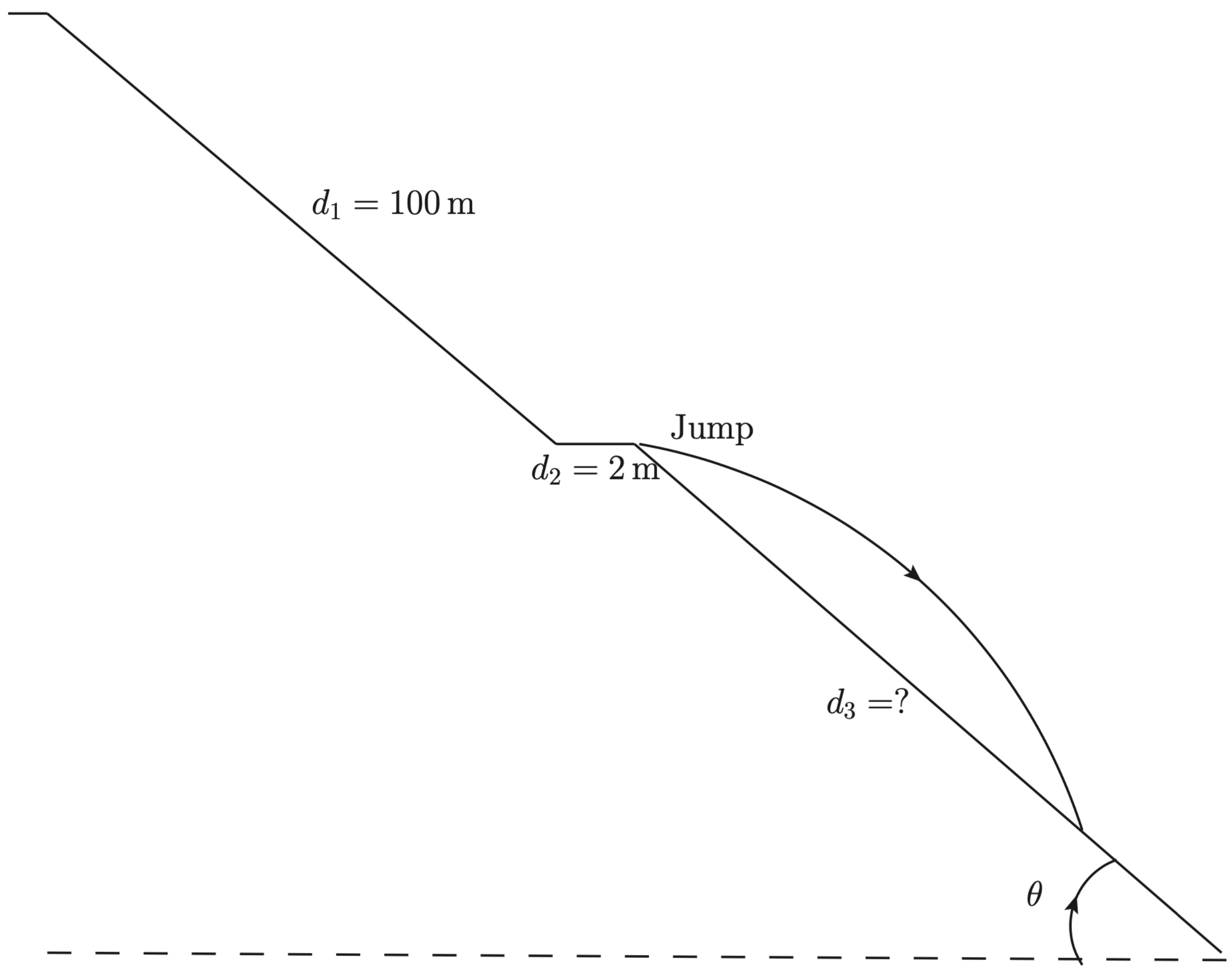

FIG. 1. 스키 점프대

하자. 스키를 포함하여 스키 선수의 무게는 700 N이다.

(1) 스키가 점프하는 위치에서 스키 점프대를 떠날 때, 속력을 구하여라.

(2) 스키 선수가 도착하는 지점인 d_3를 구하여라.

(3) d_3지점에서 스키 선수의 속력을 구하여라.

---

[a] Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00∼20:00)
[†] hchkim@inha.ac.kr
[‡] hjlee6674@inha.edu

(4) 에너지 보존 법칙을 이용해서 구한 속력과 (1)에서 구한 결과와 비교하여라.

이제 비탈면의 눈과 스키 사이의 운동마찰계수를 $\mu_k = 0.1$이라고 하자.

(5) 표면과 스키 사이의 쓸림힘을 고려하여 스키가 점프하는 위치에서 스키 점프대를 떠날 때, 속력을 구하여라.

(6) 스키 선수가 도착하는 지점인 d_3를 구하여라.

(7) 마찰력에 의해 잃는 에너지를 구하여라.

(8) 이 경우에 운동에너지 보존은 어떻게 되는가?

이제 스키 선수가 점프했을 때부터 공기저항 때문에 속도가 줄어든다고 하자. 이때 공기저항에 의한 힘을 $\vec{F}_d = 100\,\hat{\boldsymbol{i}}$N이라고 하고, 이 힘의 방향은 지면과 나란하고 방향은 스키 선수의 속도의 수평 성분과 반대 방향이라고 하자.

(9) 스키 선수가 도착하는 지점인 d_3를 구하여라.

(10) d_3지점에서 스키 선수의 속력을 구하여라.

풀이:

(1) 스키 점프 선수가 구간 d_1, d_2에서 움직일 때의 자유 물체 다이어그램을 그려보면 다음과 같다. 스키 점프 선

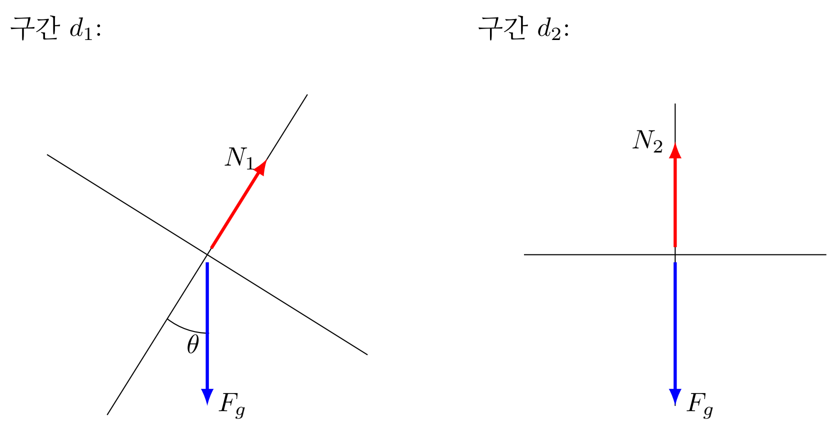

FIG. 2. 자유 물체 다이어그램

수가 움직이는 방향을 x방향, 그에 수직한 방향을 y방향이라고 하자. 스키 점프 선수가 받는 중력의 크기를 F_g라 하면 x방향의 운동 방정식은,

$$\sum F_x = ma_x, \;\; F_g = mg = 700\,\mathrm{N} \tag{1}$$

이다. 운동 방향으로 작용하는 힘은 중력의 운동방향 성분 뿐이므로,

$$ma_x = F_g \sin\theta = mg\sin\theta. \tag{2}$$

따라서 a_x는 다음과 같다.

$$a_x = \frac{F_g \sin\theta}{m} = g\sin\theta. \tag{3}$$

마찰이 없고 중력의 영향을 받으므로 d_1지점을 지나는 동안 스키 점프 선수는 등가속도 운동을 한다. 따라서 d_1지점을 통과하고 스키 점프대를 떠날 때 속력을 v_2라고 하면 처음 속력 v_i는 0이고 움직인 거리는 d_1이므로,

$$v_2^2 - v_i^2 = v_2^2 = 2a_x s, \;\; v_2 = \sqrt{2a_x d_1} = \sqrt{2gd_1\sin\theta}. \tag{4}$$

이다. 따라서 v_2는,

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{2gd_1 \sin\theta} \\ &= \sqrt{2(9.8\,\mathrm{m/s^2})(100\,\mathrm{m})\sin 32^\circ} \\ &= 32\,\mathrm{m/s}. \end{aligned} \tag{5}$$

(2) 스키 점프 선수가 스키 점프대를 떠날 때의 위치를 원점으로 잡고 그 때의 속력을 초기 속력이라고 하자. 각 방향으로의 초기 속력은 $v_{xi} = v_2 = 32\,\mathrm{m/s}$, $v_{yi} = 0$이다. 스키 점프 선수의 착지 위치의 좌표를 x_f, y_f라고 하면,

$$x_f = d_3 \cos\theta, \;\; y_f = -d_3 \sin\theta, \;\; \theta = 32^\circ. \tag{6}$$

y_f가 음수인 이유는 점프하는 순간의 위치를 원점으로 잡았기 때문이다. x방향으로는 등속 운동, y방향으로는 중력에 의한 등가속도 운동을 하므로,

$$x_f = d_3 \cos\theta = v_{xi} t = v_2 t \tag{7}$$

$$y_f = -d_3 \sin\theta = -\frac{1}{2} g t^2. \tag{8}$$

식 (7)에 의해 t를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$t = \frac{d_3 \cos\theta}{v_2}. \tag{9}$$

이를 식 (8)에 대입하면,

$$-d_3 \sin\theta = -\frac{1}{2} g \left(\frac{d_3 \cos\theta}{v_2} \right)^2, \;\; d_3 = \frac{2v_2^2 \sin\theta}{g \cos^2\theta}. \tag{10}$$

따라서 d_3는 다음과 같다.

$$d_3 = \frac{2v_2^2 \sin\theta}{g \cos^2\theta} = \frac{2(32\,\mathrm{m/s})^2 \sin 32^\circ}{(9.8\,\mathrm{m/s^2}) \cos^2 32^\circ} = 154\,\mathrm{m}. \tag{11}$$

d_3는 $154\,\mathrm{m}$이고 식 (6)에 의해 착지 위치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_f &= (154\,\mathrm{m}) \cos 32^\circ = 131\,\mathrm{m} \\ y_f &= -(154\,\mathrm{m}) \sin 32^\circ = -82\,\mathrm{m}. \end{aligned} \tag{12}$$

(3) 스키 점프 선수는 지점 d_2를 떠난 이후로 x방향으로는 등속 직선 운동, y방향으로는 등가속도 운동한다. 착지할 때 x방향의 속력을 v_x, y방향의 속력을 v_y라고 하면,

$$\begin{aligned} v_x &= v_2 = 32\,\mathrm{m/s} \\ v_y &= -gt. \end{aligned} \tag{13}$$

식 (9)과 식 (11)에 의해 v_y는,

$$v_y = -\frac{g d_3 \cos\theta}{v_2} \tag{14}$$

이다. 따라서 착지할 때 속력 v는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_2^2+\left(-\frac{gd_3\cos\theta}{v_2}\right)^2}\\ &= \sqrt{(32\,\mathrm{m/s})^2+\left(-\frac{(9.8\,\mathrm{m/s^2})(154\,\mathrm{m})\cos 32^\circ}{32\,\mathrm{m/s}}\right)^2}\\ &= 51\,\mathrm{m/s}.\end{aligned} \tag{15}$$

(4) 초기 역학적 에너지를 E_i, d_2지점에서의 역학적 에너지를 E_2라고 하자. E_i는,

$$E_i = mgh = mg\,(d_1+d_3)\sin\theta, \tag{16}$$

이고 d_2지점에서의 속력을 v_2라고 하면 E_2는,

$$E_2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mgd_3\sin\theta + \frac{1}{2}mv_2^2. \tag{17}$$

역학적 에너지는 보존되어야 하므로 $E_i = E_2$이다. 따라서,

$$mg\,(d_1+d_3)\sin\theta = mgd_3\sin\theta + \frac{1}{2}mv_2^2,\ \ v_2 = \sqrt{2gd_1\sin\theta}. \tag{18}$$

v_2는 다음과 같다.

$$v_2 = \sqrt{2(9.8\,\mathrm{m/s^2})(100\,\mathrm{m})\sin 32^\circ} = 32\,\mathrm{m/s}. \tag{19}$$

(1) 의 결과와 동일함을 확인할 수 있다.

(5) 마찰력이 작용하는 순간의 자유 물체 다이어그램을 그려보자. 각 구간에 작용하는 마찰력을 고려한다면 각 구

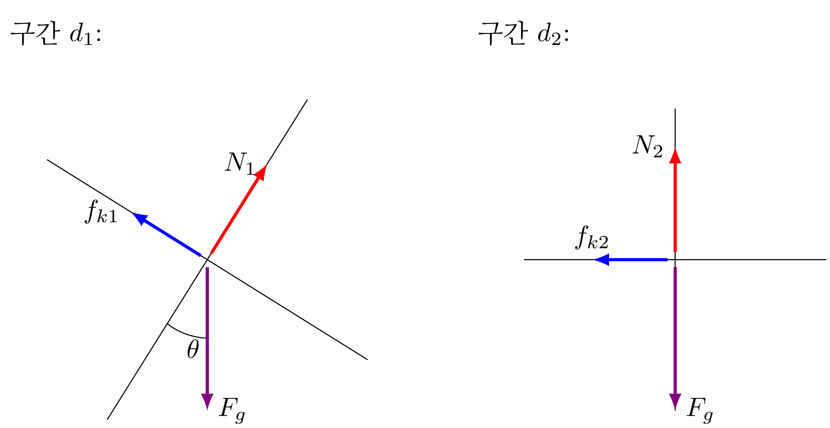

FIG. 3. 자유 물체 다이어그램

간에서 스키 점프 선수가 받는 알짜힘을 구할 수 있다. 구간 d_1에서 작용하는 마찰력을 f_{k1}이라 하고 구간 d_2에 작용하는 마찰력을 f_{k2}라 하면 각 구간에서 받는 알짜일 W_1, W_2는,

$$W = W_1 + W_2 = F_g d_1\sin\theta - f_{k1}d_1 - f_{k2}d_2, \tag{20}$$

$f_{k1} = \mu_k N_1$, $f_{k2} = \mu_k N_2$이다. N_1, N_2은 각 구간에서 스키 점프 선수에게 작용하는 수직항력이다. 수직항력의 방향과 중력의 방향을 고려했을 때,

$$N_1 = F_g\cos\theta,\ \ N_2 = F_g,\ \ F_g = mg \tag{21}$$

이므로,

$$W = F_g d_1 \sin\theta - \mu_k F_g d_1 \cos\theta - \mu_k F_g d_2 \\ = mg\left(d_1 \sin\theta - \mu_k(d_1\cos\theta + d_2)\right), \tag{22}$$

이다. 중력이 해준 일은 운동 에너지의 변화량과 같으므로 스키 점프대를 떠날 때의 속력을 v_2라 하면,

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0 = mg\left(d_1\sin\theta - \mu_k(d_1\cos\theta - d_2)\right), \;\; v_2 = \sqrt{2g\left(d_1\sin\theta - \mu_k(d_1\cos\theta + d_2)\right)}. \tag{23}$$

따라서 스키 점프대를 떠날 때 속력은,

$$v_2 = \sqrt{2g\left(d_1\sin\theta - \mu_k(d_1\cos\theta + d_2)\right)} \\ = \sqrt{2(9.8\,\mathrm{m/s^2})\left((100\,\mathrm{m})\sin 32^\circ - (0.1)((100\,\mathrm{m})\cos 32^\circ + (2\,\mathrm{m})\right)} \\ = 29\,\mathrm{m/s}. \tag{24}$$

(6) 식 (11)에 의해 구간 d_1, d_2에서 마찰력을 받은 경우 d_3는

$$d_3 = \frac{2v_2^2\sin\theta}{g\cos^2\theta} = \frac{2(29\,\mathrm{m/s})^2\sin 32^\circ}{(9.8\,\mathrm{m/s^2})\cos^2 32^\circ} = 126\,\mathrm{m}, \tag{25}$$

이고 식 (7), (8)에 의해 착지 위치는 다음과 같다.

$$x_f = d_3\cos\theta = \frac{2v_2^2\sin\theta}{g\cos\theta} = \frac{2(29\,\mathrm{m/s})^2\sin 32^\circ}{(9.8\,\mathrm{m/s^2})\cos 32^\circ} = 107\,\mathrm{m} \\ y_f = -d_3\sin\theta = \frac{2v_2^2\sin^2\theta}{g\cos^2\theta} = \frac{2(29\,\mathrm{m/s})^2\sin^2 32^\circ}{(9.8\,\mathrm{m/s^2})\cos^2 32^\circ} = -67\,\mathrm{m}. \tag{26}$$

(7) 스키 점프 선수는 두 구간 d_1과 d_2에서 마찰력을 받는다. 마찰력에 의해 잃는 힘을 W_f라고 하면,

$$W_f = f_{k1}d_1 + f_{k2}d_2 = \mu_k(N_1 d_1 + N_2 d_2), \tag{27}$$

이고 식 (21)에 의해,

$$W_f = \mu_k mg(d_1\cos\theta + d_2) \\ = (0.1)(700\,\mathrm{N})\left((100\,\mathrm{m})\cos 32^\circ + 2\,\mathrm{m}\right) \\ = 6076\,\mathrm{J}. \tag{28}$$

마찰에 의해 잃은 일은 6076 J이다.

(8) 마찰에 의해 운동 에너지의 일부가 다른 형태의 에너지로 변형되었으므로 운동 에너지 보존은 지켜지지 않는다. 그 때 변형된 에너지의 양은 6076 J이다.

(9) 공기저항이 작용한다 하면 스키 점프 선수가 공중에 머무를 때의 자유 물체 다이어그램은 다음과 같다. 오른쪽을

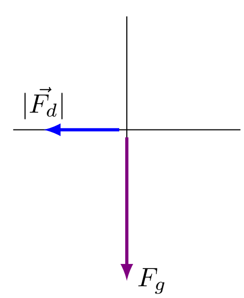

FIG. 4. 자유 물체 다이어그램

$+x$방향이라 하자. 운동 방정식을 세워보면 각 방향으로 스키 점프 선수가 받는 힘은,

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_x = -|\vec{F}_d| = -100\,\mathrm{N} \\ \sum F_y &= ma_y = F_g = mg\end{aligned} \tag{29}$$

이다. 각 방향으로 힘이 일정하게 작용하므로 스키 점프 선수는 x방향과 y방향으로 등가속도 운동한다. 스키 점프 선수가 점프대를 떠날 때 y방향의 속력은 0이므로 그때의 속력을 $v_{xi} = v_2$라고 하면 각 방향으로의 착지 위치 x_f, y_f는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x_f = d_3 \cos\theta = v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = v_2 t + \frac{1}{2}a_x t^2, \;\; a_x = -\frac{|\vec{F}_d|}{m} \tag{30}$$

$$y_f = -d_3 \sin\theta = -\frac{1}{2}a_y t^2 = -\frac{1}{2}gt^2. \tag{31}$$

식 (31)으로 부터 t는,

$$t = \sqrt{\frac{2d_3 \sin\theta}{g}}, \tag{32}$$

이고 이를 식 (30)에 대입하면,

$$d_3 \cos\theta = v_2\sqrt{\frac{2d_3 \sin\theta}{g}} + \frac{a_x d_3 \sin\theta}{g} = v_2\sqrt{\frac{2d_3 \sin\theta}{g}} - \frac{|\vec{F}_d| d_3 \sin\theta}{mg}. \tag{33}$$

이 식을 d_3에 대해 정리해보자.

$$\left(1 + \frac{|\vec{F}_d| \sin\theta}{mg\cos\theta}\right) d_3 = v_2\sqrt{\frac{2d_3 \sin\theta}{g\cos^2\theta}}, \tag{34}$$

양변을 $\sqrt{d_3}$로 나누고 좌항에 d_3만 남기면,

$$\sqrt{d_3} = \left(\frac{mg\cos\theta}{mg\cos\theta + |\vec{F}_d|\sin\theta}\right)\sqrt{\frac{2v_2^2 \sin\theta}{g\cos^2\theta}}. \tag{35}$$

따라서 d_3는,

$$d_3 = \left(\frac{mg\cos\theta}{mg\cos\theta + |\vec{F}_d|\sin\theta}\right)^2 \frac{2v_2^2 \sin\theta}{g\cos^2\theta}, \tag{36}$$

이다. 최종적으로 d_3을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d_3 &= \left(\frac{(700\,\mathrm{N})\cos 32^\circ}{(700\,\mathrm{N})\cos 32^\circ + (100\,\mathrm{N})\sin 32^\circ}\right)^2 \frac{2(29\,\mathrm{m/s})^2 \sin 32^\circ}{(9.8\mathrm{m/s^2})\cos^2 32^\circ} \\ &= 107\,\mathrm{m}. \end{aligned} \tag{37}$$

이 결과를 식 (30), (31)에 대입하면,

$$\begin{aligned} x_f &= d_3\cos\theta = (107\,\mathrm{m})\cos 32^\circ = 91\,\mathrm{m} \\ y_f &= -d_3\sin\theta = (107\,\mathrm{m})\sin 32^\circ = -57\,\mathrm{m}, \end{aligned} \tag{38}$$

스키 점프 선수의 착지 위치를 구할 수 있다.

(10) 지점 d_3에서의 각 방향에 대한 속력을 v_{xf}, v_{yf}라 하면,

$$\begin{aligned} v_{xf} &= v_{xi} - a_x t = v_2 - \frac{|\vec{F}_d|}{m}t, \quad m = \frac{F_g}{g} \\ v_{yf} &= -gt \end{aligned} \tag{39}$$

식 (32)을 대입하면 x방향 속력은,

$$\begin{aligned} v_{xf} &= v_2 - \frac{|\vec{F}_d|g}{F_g}\sqrt{\frac{2d_3\sin\theta}{g}} \\ &= (29\,\mathrm{m/s}) - \frac{(100\,\mathrm{N})(9.8\,\mathrm{m/s^2})}{(700\,\mathrm{N})}\sqrt{\frac{2(107\,\mathrm{m})\sin 32^\circ}{(9.8\,\mathrm{m/s^2})}} \\ &= 24\,\mathrm{m/s}, \end{aligned} \tag{40}$$

이고, y방향 속력은,

$$\begin{aligned} v_{yf} &= -\sqrt{2d_3 g\sin\theta} \\ &= -\sqrt{2(107\,\mathrm{m})(9.8\,\mathrm{m/s^2})\sin 32^\circ} \\ &= -33\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{41}$$

이다. 따라서 지점 d_3에서의 속력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(24\,\mathrm{m/s})^2 + (33\,\mathrm{m/s})^2} \\ &= 41\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{42}$$