

2022년 1학기 물리학 I: Quiz 19

김현철^{a,†} and Lee Hui-Jae^{1,‡}

¹*Hadron Theory Group, Department of Physics,
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*

(Dated: Spring semester, 2022)

풀이 : 온도가 20 °C일 때 강철자의 길이를 L_{st} , 물체의 길이를 L' 이라 하자. 선팽창계수를 고려하면 강철자가 늘어난 길이 ΔL_{st} 와 물체가 늘어난 길이 $\Delta L'$ 은

$$\Delta L_{st} = L_{st}\alpha_{st}\Delta T, \quad \Delta L' = L'\alpha'\Delta T \quad (1)$$

이다. α_{st} 와 α' 은 각각 강철과 물체의 선팽창계수이다. 강철자의 길이가 20 °C에서 1 cm라고 생각해보자. 오븐의 넣기 전 강철자로 잴 막대의 길이가 20.05 cm이므로

$$\frac{L'}{L_{st}} = \frac{20.05 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 20.05 \implies L' = 20.05L_{st} \quad (2)$$

이고 오븐에 넣고서 강철자로 잴 막대의 길이가 20.11 cm이므로

$$\frac{L' + \Delta L'}{L_{st} + \Delta L_{st}} = 20.11 \implies L' + \Delta L' = (20.11)(L_{st} + \Delta L_{st}) \quad (3)$$

이다. 식 (1)과 (2)를 식 (3)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L'(1 + \alpha'\Delta T) &= L_{st}(20.05)(1 + \alpha'\Delta T) = L_{st}(20.11)(1 + \alpha_{st}\Delta T) \\ \implies \alpha' &= \frac{1}{\Delta T} \left(\frac{20.11}{20.05}(1 + \alpha_{st}\Delta T) - 1 \right). \end{aligned} \quad (4)$$

따라서 물체의 열팽창계수 α' 는

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{1}{250^\circ\text{C}} \left(\frac{20.11}{20.05} (1 + (11 \times 10^{-6}^\circ\text{C}^{-1})(250^\circ\text{C})) - 1 \right) \\ &= 2.3 \times 10^{-5}^\circ\text{C}^{-1} \end{aligned} \quad (5)$$

이다.

풀이 : 비열이 c 이고 질량이 m 인 물질의 온도를 아주 작은 dT 만큼 올리는데 필요한 에너지 dQ 는

$$dQ = cm dT \quad (6)$$

이다. 이 물질의 온도를 T_1 에서 T_2 까지 가열한다고 할 때 필요한 에너지 Q 는

$$\begin{aligned} Q &= m \int_{T_1}^{T_2} c dT = m \int_{T_1}^{T_2} 0.20 + 0.14T + 0.023T^2 dT \\ &= m \left(0.20(T_2 - T_1) + 0.07(T_2^2 - T_1^2) + \frac{0.023}{3}(T_2^3 - T_1^3) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

^a Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00~20:00)

[†] hchkim@inha.ac.kr

[‡] hjlee6674@inha.edu

이다. $m=2.0$ g, $T_1=5.0$ °C이고 $T_2=15$ °C이므로 에너지 Q 를 다음과 같이 얻는다.

$$Q = (2.0 \text{ g}) \left((0.20)(10^\circ\text{C}) + (0.07) ((15^\circ\text{C})^2 - (5.0^\circ\text{C})^2) + \frac{0.023}{3} ((15^\circ\text{C})^3 - (5.0^\circ\text{C})^3) \right) \\ = 82 \text{ cal.} \quad (8)$$

풀이 :

- (1) 물과 얼음의 처음 온도를 T_w , T_i 라 하고 물이 방출한 열을 Q_w , 얼음이 흡수한 열을 Q_i 라고 하자. Q_w 과 Q_i 는

$$Q_w = c_w m_w \Delta T_w, \quad Q_i = c_i m_i \Delta T_i \quad (9)$$

이다. 문제에 주어진 상황으로부터 열평형에 도달하면 가능한 열평형 상태는 세가지이다.

1. 모두 물이 된다.
2. 모두 얼음이 된다.
3. 물과 얼음이 공존하는 상태가 된다.

세가지 중 어느 경우에 도달하는지 알아보자. 물이 방출한 열은 모두 얼음이 흡수하므로 $Q_w = Q_i$ 이고 열평형 온도를 T_e 라고 하면

$$c_w m_w (T_w - T_e) = c_i m_i (T_e - T_i) \quad (10)$$

이다. 물과 얼음의 비열은 각각 $c_w = 4.186 \text{ J/g} \cdot \text{K}$, $c_i = 2.090 \text{ J/g} \cdot \text{K}$ 임을 이용하면 T_e 는

$$T_e = \frac{c_i m_i T_i + c_w m_w T_w}{c_i m_i + c_w m_w} = \frac{(2.090 \text{ J/g} \cdot \text{K})(100 \text{ g})(-15^\circ\text{C}) + (4.186 \text{ J/g} \cdot \text{K})(200 \text{ g})(25^\circ\text{C})}{(2.090 \text{ J/g} \cdot \text{K})(100 \text{ g}) + (4.186 \text{ J/g} \cdot \text{K})(200 \text{ g})} \\ = 17^\circ\text{C} \quad (11)$$

이다. 사실 이 답은 틀렸다. 얼음이 물로 상변이할 때 필요한 잠열을 고려하지 않았기 때문이다. 다만 이 결과를 통해 1번째 경우와 3번째 경우 중에 답이 있음을 알 수 있다. 얼음이 물로 변하기 위해 필요한 잠열을 L 이라고 하면 질량 M 만큼의 얼음이 물로 변하기 위해 필요한 총 열 Q_t 는

$$Q_t = ML \quad (12)$$

이다. 물이 방출한 열이 상변이에 쓰이므로 식 (10)는 다음과 같이 수정되어야한다.

$$Q_w = Q_i + Q_t \implies c_w m_w (T_w - T'_e) = c_i m_i (T'_e - T_i) + ML. \quad (13)$$

T'_e 는 새로운 열평형 온도이다. 3번째 경우는 간단하게 확인할 수 있으므로 $T'_e = 0^\circ\text{C}$ 라고 해보자. $L = 3.33 \times 10^2 \text{ J/g}$ 임을 고려하면 M 은

$$M = \frac{c_i m_i T_i + c_w m_w T_w}{L} = \frac{(2.090 \text{ J/g} \cdot \text{K})(100 \text{ g})(-15^\circ\text{C}) + (4.186 \text{ J/g} \cdot \text{K})(200 \text{ g})(25^\circ\text{C})}{(3.33 \times 10^2 \text{ J/g})} \\ = 53 \text{ g} \quad (14)$$

이다. 이는 열평형 온도가 0°C 이고 얼음이 53 g만큼 녹은 시점이라는 의미이다.

- (2) (가)의 결과로부터 얼음 50 g이 사라지면 1번째 경우에 해당함을 알 수 있다. 얼음과 물의 비열이 다르기 때문에, 얼음의 질량을 m'_i 라 하여 얼음 50 g이 0°C 가 되기까지 필요한 열 Q_1 과 상전이에 필요한 열 $m'_i L$, 얼음이 녹은 물이 흡수한 열 Q_2 를 모두 따져보자. 열평형을 이루었을 때의 온도를 T_f 라 하면

$$Q_1 = c_i m'_i (0^\circ\text{C} - T_i), \quad m'_i L = m'_i (3.33 \times 10^2 \text{ J/g}), \quad Q_2 = c_w m'_i (T_f - 0^\circ\text{C}) \quad (15)$$

이고 이 열들의 합은 물이 방출한 열 Q'_w 와 같다. Q'_w 는

$$Q'_w = c_w m_w (T_w - T_f) \quad (16)$$

이다. 따라서

$$Q'_w = Q_1 + Q_2 + m'_i L \quad (17)$$

이고 상평형 온도 T_f 는

$$c_w m_w (T_w - T_f) = -c_i m'_i T_i + c_w m'_i T_f + m'_i L \implies T_f = \frac{c_w m_w T_w + c_i m'_i T_i - m'_i L}{c_w m_w + c_w m'_i} \quad (18)$$

이므로 계산해보면 T_f 는

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{(4.186 \text{ J/g} \cdot \text{K})(200 \text{ g})(25^\circ \text{C}) + (2.090 \text{ J/g} \cdot \text{K})(50 \text{ g})(-15^\circ \text{C}) - (50 \text{ g})(3.33 \times 10^2 \text{ J/g})}{(4.186 \text{ J/g} \cdot \text{K})((200 \text{ g}) + (50 \text{ g}))} \\ &= 2.6^\circ \text{C} \end{aligned} \quad (19)$$

이다.

풀이 : 열역학 제 1법칙은 다음과 같다.

$$dU = dQ - PdV. \quad (20)$$

(가) 경로 ab 는 등압과정, 경로 ca 는 등적과정이다. 경로 ab 를 거치면서 내부에너지가 $+3.0 \text{ J}$ 만큼 변화였고 외부에 5.0 J 만큼 일을 해주었다. 식 (20)에 의해 경로 ab 를 따라가는 동안 기체에 전달된 열의 크기 Q 는

$$Q = 3.0 \text{ J} + 5.0 \text{ J} = 8.0 \text{ J} \quad (21)$$

이다.

(나) 전체 과정을 한번 순환하면 기체의 내부에너지의 변화는 없으므로 순환경로 $abca$ 를 한번 따라가면서 기체에 전달된 열에너지는 모두 기체가 외부에 한 일로 변환된다. 기체에 전달된 열에너지의 합은

$$Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{ca} = 8.0 \text{ J} + Q_{bc} + 2.5 \text{ J} \quad (22)$$

이고 기체가 외부에 한 일의 합은

$$W_{ab} + W_{bc} + W_{ca} = 1.2 \text{ J} \quad (23)$$

이다. 따라서 경로 bc 를 따라갈 때 기체에 전달된 열에너지 Q_{bc} 는

$$Q_{bc} = 1.2 \text{ J} - (8.0 \text{ J} + 2.5 \text{ J}) = -9.3 \text{ J} \quad (24)$$

이다. -부호는 기체로부터 열에너지가 빠져나갔음을 의미한다.