2022년 2학기 물리학 II

김현철[a1,†] and Hui-Jae Lee[1,‡]

[1] *Hadron Theory Group, Department of Physics, Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*

(Dated: Autumn Semester, 2022)

Date: 2022년 8월 29일 15:30-16:15

QUIZ 1

문제 1 [**10pt**] 다음 질문에 답하세요.

(가) 전하의 종류를 적으세요 (2pt).

(나) 전하량을 유효숫자 두 자리까지 적으세요 (2pt).

(다) 아래에 주어진 과정 중에서 틀린 과정을 고르세요 (2pt).

1. $e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$
2. $\pi^0 + p \to \pi^+ + n$
3. $p + n \to p + p$
4. $\Lambda^0 \to p + e^- + \bar{\nu}_e$

(라) 쿨롱의 법칙을 식으로 나타내고 설명하세요 (4pt).

풀이 :

(가) 전하의 종류는 양전하와 음전하로 2가지 존재한다.

(나) 전자 1개의 전하량을 유효숫자 두 자리가지 적으면 1.6×10^{-19} C이며 C는 전하량의 단위로 쿨롱이라 읽는다.

(다) e는 전자, γ는 광자, π는 π 중간자(π meson), p와 n은 양성자, 중성자이며 Λ와 $\bar{\nu}_e$는 각각 Λ 중입자 (Λ baryon)와 전자 반중성미자(electron antineutrino)이다.
전하량 보존 법칙에 따라 과정 전 전하의 총합과 과정 후 전하의 총합은 같아야 한다.

1. 과정 전 전하의 합은 $1+(-1) = 0$이고 과정 후 전하의 합 또한 $0+0 = 0$이므로 전하량 보존 법칙에 비추어 보았을 때 과정은 틀리지 않았다.
2. 과정 전 전하의 합은 $0 + 1 = 1$이고 과정 후 전하의 합은 $1 + 0 = 1$이므로 전하량 보존 법칙에 비추어 보았을 때 과정은 틀리지 않았다.
3. 과정 전 전하의 합은 $1 + 0 = 1$이고 과정 후 전하의 합은 $1 + 1 = 2$이므로 전하량 보존 법칙에 비추어 보았을 때 과정은 틀렸다.
4. 과정 전 전하의 합은 0이고 과정 후 전하의 합은 $1+(-1)+0 = 0$이므로 전하량 보존 법칙에 비추어 보았을 때 과정은 틀리지 않았다.

틀린 과정은 3번 과정이다.

---

[a] Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00∼18:00)
[†] hchkim@inha.ac.kr
[‡] hjlee6674@inha.edu

(라) 쿨롱의 법칙은 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{1}$$

이는 전하를 띈 두 입자 사이에 작용하는 힘의 크기에 대한 법칙으로 두 전하 사이에 작용하는 힘은 두 전하가 떨어진 거리의 제곱에 반비례함을 의미한다. k는 쿨롱 상수로 그 크기는 $8.988 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}$ 이다.

문제 2 [10pt] 전자와 양성자가 대략 보어 반지름, 즉 0.530×10^{-10} m 정도 떨어져 있다. 전자와 양성자 사이의 전기력과 중력을 각각 구하고, 구한 전기력과 중력의 비를 구하여라.

풀이 : 전자와 양성자의 전하량을 q_1, q_2라 하고 둘 사이 거리를 r이라 하자. 쿨롱의 법칙에 의해 전자와 양성자 사이 작용하는 전기력 F_e는

$$\begin{aligned} F_e &= k\frac{q_1 q_2}{r^2} = (8.988 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}})\frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})}{(0.530 \times 10^{-10}\mathrm{m})^2} \\ &= 8.19 \times 10^{-8}\ \mathrm{N} \end{aligned} \tag{2}$$

이고, 전자와 양성자의 질량을 m_1, m_2라고 하면 전자와 양성자 사이 작용하는 중력 F_g는

$$\begin{aligned} F_g &= G\frac{m_1 m_2}{r^2} = (6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}})\frac{(9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})(1.67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})}{(0.530 \times 10^{-10}\mathrm{m})^2} \\ &= 3.61 \times 10^{-47}\mathrm{N} \end{aligned} \tag{3}$$

이다. 전자와 양성자 사이에 작용하는 두 힘의 비는 다음과 같다.

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{8.19 \times 10^{-8}\ \mathrm{N}}{3.61 \times 10^{-47}\mathrm{N}} = 2.27 \times 10^{39}. \tag{4}$$

전자와 양성자 사이 작용하는 전기력이 중력보다 무려 10^{39}배 만큼 크다.

문제 3 [10pt] 일직선상에 세 점전하가 간격 d를 두고 놓여 있다. 전하량은 순서대로 $-q$, $+q$, $-q$이다. 각 전하에 작용하는 힘을 구하여라.

풀이 : 가운데 놓여있는 점전하 $+q$를 원점으로 하고 오른쪽을 양의 방향으로 하자. 중첩의 원리에 의해 각 점전하가 받는 전기력은 나머지 두 점전하로부터 받는 전기력의 합과 같다. 왼쪽에 있는 전하부터 순서대로 1, 2, 3번 전하라고

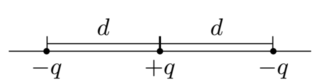

FIG. 1. 일직선 위의 세 점전하

하겠다. 먼저 원점에 있는 2번 전하가 받는 힘을 구해보자. $\vec{F}_{ij}$는 i번 전하가 j번 전하로부터 받는 전기력으로

$$\vec{F}_{ij} = k\frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{5}$$

2번 전하가 받는 전기력 $\vec{F}_2$는

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} \tag{6}$$

이다. 각각의 전하로부터 d만큼 떨어져 있으므로 각 힘을 계산하여

$$\vec{F}_{21} = k\frac{(+q)(-q)}{d^3}(0-(-d))\hat{x} = -\frac{kq^2}{d^2}\hat{x}, \quad \vec{F}_{23} = k\frac{(+q)(-q)}{d^3}(0-d)\hat{x} = \frac{kq^2}{d^2}\hat{x} \tag{7}$$

를 얻는다. 식 6에 대입하여 2번 입자에 작용하는 전기력을 구하면

$$\vec{F}_2 = -\frac{kq^2}{d^2}\hat{x} + \frac{kq^2}{d^2}\hat{x} = \vec{0} \tag{8}$$

이다. 작용과 반작용에 의하면 i번 전하가 j번 전하로부터 받는 전기력은 j번 전하가 i번 전하로부터 받는 전기력과 크기는 같고 방향만 반대이다. 따라서

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \tag{9}$$

임을 알 수 있다. 이제 나머지 1번, 3번 점전하에 작용하는 전기력을 구해보자. 1번 전하에 작용하는 전기력 $\vec{F}_1$은

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{21} + \vec{F}_{13} \tag{10}$$

$\vec{F}_{13}$을 계산하면 구할 수 있다. 1번 전하와 3번 전하는 $2d$만큼 떨어져 있으므로

$$\vec{F}_{13} = k\frac{(-q)(-q)}{(2d)^3}((-d)-d)\hat{x} = -\frac{kq^2}{4d^2}\hat{x} \tag{11}$$

를 얻는다. 그러므로 $\vec{F}_1$은

$$\vec{F}_1 = -\left(-\frac{kq^2}{d^2}\hat{x}\right) + \left(-\frac{kq^2}{4d^2}\hat{x}\right) = \frac{3kq^2}{4d^2}\hat{x} \tag{12}$$

를 얻는다. 같은 방법으로 $\vec{F}_3$은

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = -\vec{F}_{13} - \vec{F}_{23} \tag{13}$$

이고 $\vec{F}_{13}$과 $\vec{F}_{23}$은 위에서 이미 구해 놓았다.

$$\vec{F}_3 = -\left(-\frac{kq^2}{4d^2}\hat{x}\right) - \frac{kq^2}{d^2}\hat{x} = -\frac{3kq^2}{4d^2}\hat{x}. \tag{14}$$

$\vec{F}_3$과 $\vec{F}_1$은 크기는 같고 방향만 다르다.

문제 4 [10pt]. 질량이 $m = 3.00 \times 10^{-2}$ kg이고 대전된 전하량이 같은 작은 공 두 개가 그림 2와 같이 길이가 $L = 0.150$ cm인 줄에 매달려 있다. 각 θ는 5.00°이다. 각각의 공에 대전된 전하량을 구하여라.

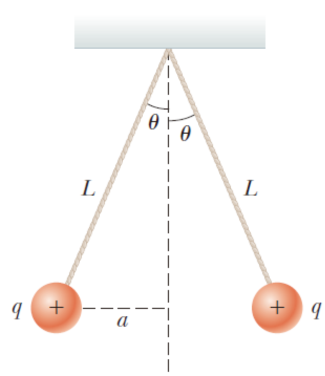

FIG. 2. **문제 4**

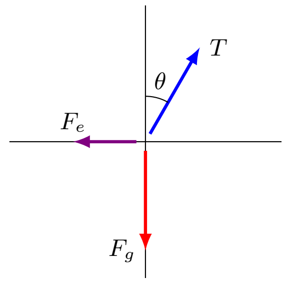

FIG. 3. 왼쪽 공의 다이어그램

풀이 : 먼저 정지해있는 왼쪽 공의 자유 물체 다이어그램을 그려보자. 공에 작용하는 장력을 T, 중력을 F_g, 전기력을 F_e라고 하면 세 힘이 평형을 이루어 공이 정지해 있다고 생각할 수 있다.

x방향과 y방향의 운동방정식을 다음과 같이 세울 수 있다. 공이 정지해 있으므로 모든 방향에서의 합력은 0이다.

$$F_x = -F_e + T\sin\theta = 0, \tag{15}$$

$$F_y = T\cos\theta - F_g = 0. \tag{16}$$

먼저 y방향 합력으로부터 장력 T를 구하자. 공의 질량을 m이라 하면 $F_g = mg$이므로

$$F_g = mg \Longrightarrow mg - T\cos\theta = 0,\ \ T = \frac{mg}{\cos\theta} \tag{17}$$

를 얻는다. 한편 공 두개가 대전된 전하량이 같으므로 쿨롱의 법칙에 의해 공에 작용하는 전기력 F_e는

$$F_e = k\frac{q^2}{(2a)^2} \tag{18}$$

인데 a는 줄의 길이 L의 삼각비로 표현할 수 있다.

$$a = L\sin\theta. \tag{19}$$

따라서 식 15에 식 17과 식 19를 대입하면

$$-k\frac{q^2}{(2L\sin\theta)^2} + mg\tan\theta = 0 \tag{20}$$

을 얻는다. $m = 3.00\times10^{-2}\ \text{kg},\ L = 1.50\times10^{-3}\ \text{m}$이고 $\theta = 5.00°$이므로 전하량 q는

$$\begin{aligned} q &= 2L\sin\theta\sqrt{\frac{mg\tan\theta}{k}} = 2(1.50\times10^{-3}\ \text{m})\sin 5.00°\sqrt{\frac{(3.00\times10^{-2}\ \text{kg})(9.807\ \text{m/s}^2)\tan 5.00°}{(8.988\times10^{9}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2})}} \\ &= 4.42\times10^{-10}\ \text{C} \end{aligned} \tag{21}$$

임을 알 수 있다.

문제 5 [10pt]. 질량이 m이고 전하 q로 대전된 두 부도체를 길이가 L_0이고 용수철 상수가 k인 용수철에 연결하였더니 용수철의 길이가 $4L_0/3$로 늘어나 평형상태가 되었다. 이제 두 대전된 부도체 중 하나를 $x=0$에 고정시키고 용수철에 연결된 또 다른 부도체가 단순조화운동을 하게 한다면, 각진동수 ω는 $\sqrt{k/m}$의 몇 배인가?

풀이 : 평형상태의 부도체에 작용하는 힘에는 용수철에 의한 복원력과 부도체끼리 밀어내려는 전기력이 있다. 두 힘의 크기가 같아 평형상태를 이루므로 훅의 법칙과 쿨롱의 법칙을 이용하여

$$\sum F = -k\frac{1}{3}L_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2} = 0 \Longrightarrow k\frac{1}{3}L_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2},\ \ k = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{27}{16L_0^3} \tag{22}$$

를 얻는다. 평형상태에 있는 부도체를 단순조화운동시키기 위해 길이 x_0만큼 잡아당겼다고 가정하자. 이 때 용수철의 길이는 $\frac{4}{3}L_0 + x_0$가 되고 용수철의 길이가 $\frac{4}{3}L_0$일 때 새로운 평형이 이루어진 것이므로 늘어난 길이는 x_0가 된다. 늘어난 길이에서의 전기력과 용수철의 복원력을 고려하여 훅의 법칙을 다시 쓰면

$$\sum F = ma = -k\left(\frac{1}{3}L_0 + x_0\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\left(\frac{4}{3}L_0 + x_0\right)^2} \tag{23}$$

이다. 잡아당긴 길이 x_0가 L_0에 비해 무시할 수 있을만큼 작다고 가정하면, 즉, $x_0/L_0 << 1$이라고 하면 우변의 마지막 항을 근사할 수 있다.

$$\frac{1}{(1+\epsilon)^2} \approx 1 - 2\epsilon \Longrightarrow \frac{1}{\left(\frac{4}{3}L_0 + x_0\right)^2} = \frac{9}{16L_0^2}\frac{1}{\left(1 + \frac{3x_0}{4L_0}\right)^2} \approx \frac{9}{16L_0^2}\left(1 - \frac{3x_0}{2L_0}\right). \tag{24}$$

이 결과와 식 22를 식 23에 대입하여 다시쓰면

$$\begin{aligned} ma &= -k\left(\frac{1}{3}L_0 + x_0\right) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{9}{16L_0^2}\left(1 - \frac{3x_0}{2L_0}\right) = -k\left(\frac{1}{3}L_0 + x_0\right) + kL_0\frac{1}{3}\left(1 - \frac{3x_0}{2L_0}\right) \\ &= -k\left(\frac{1}{3}L_0 + x_0\right) + k\left(\frac{1}{3}L_0 - \frac{1}{2}x_0\right) = -k\frac{3}{2}x_0 \end{aligned} \tag{25}$$

이다. 따라서 각진동수 ω는

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{26}$$

으로 $\sqrt{k/m}$의 $\sqrt{3/2}$배이다. 즉, 전기력이 없을 때에 비해 약 1.22배 빠르게 진동한다.