

2022년 1학기 물리학 I: Quiz 16

김현철^{a,†} and Lee Hui-Jae^{1,‡}

¹*Hadron Theory Group, Department of Physics,
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*

(Dated: Spring semester, 2022)

문제 1. (40 pt) 높이가 5 m인 큰 수족관에 2.00 m의 깊이로 민물이 채워져 있다. 폭이 8.00 m인 수족관의 한쪽 벽은 두꺼운 플라스틱으로 만들어져 있다. 물을 더 채워 수심이 4.00 m가 되었다면, 벽에 가해지는 전체 힘은 얼마나 증가하겠는가?

풀이 : 벽이 받는 전체 힘을 F , 민물에 의한 압력을 P , 민물과 벽이 닿는 면적을 A 라 하자. F 는

$$F = \int P dA, \quad P = \rho gh \quad (1)$$

이다. h 는 민물의 깊이이다. 폭을 a 라 하면 미소면적 dA 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$dA = a dh \quad (2)$$

처음 높이를 h_1 라 하면 처음 힘 F_1 은

$$F_1 = \int_0^{h_1} a \rho gh dh = \frac{1}{2} a \rho g h_1^2 \quad (3)$$

이다. 같은 방법으로 나중 높이 h_2 라 하면 나중 힘 F_2 은

$$F_2 = \int_0^{h_2} a \rho gh dh = \frac{1}{2} a \rho g h_2^2 \quad (4)$$

이다. 수심이 바뀌었을 때 힘의 변화량을 ΔF 은 다음과 같이 구할 수 있다,

$$\Delta F = F_2 - F_1 = \frac{1}{2} a \rho g (h_2^2 - h_1^2). \quad (5)$$

수치를 넣어 계산하면,

$$\begin{aligned} \Delta F &= \frac{1}{2} (8.00 \text{ m}) (998 \text{ kg/m}^3) (9.80 \text{ m/s}^2) ((4.00 \text{ m})^2 - (2.00 \text{ m})^2) \\ &= 4.69 \times 10^5 \text{ N} \end{aligned} \quad (6)$$

이다. 벽에 가해지는 전체 힘은 $4.69 \times 10^5 \text{ N}$ 만큼 증가한다.

문제 2. (100 pt) 난이도 상: 그림 1에서처럼 폭이 $W = 314 \text{ m}$ 인 댐의 상류 쪽에 깊이 $S = 35.0 \text{ m}$ 만큼 물이 차 있다.

(가) 물의 계기압력(gauge pressure of the water)으로부터 댐에 가해지는 알짜힘을 구하라.

(나) 그 힘에 의해 생기는 알짜 돌림힘을 점 O 를 지나고 댐의 폭에 평행인 축에 대해 구하여라.

(다) 돌림힘의 모멘트팔을 구하여라.

풀이 :

^a Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00~20:00)

[†] hchkim@inha.ac.kr

[‡] hjlee6674@inha.edu

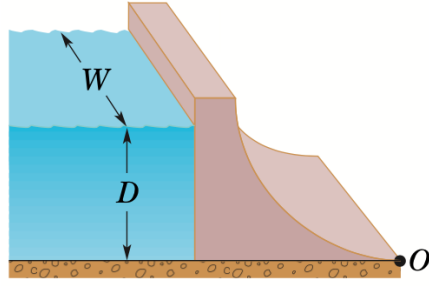


FIG. 1. 문제 2

(가) 깊이 h 에서 물의 계기압력 P_{gauge} 는

$$P_{\text{gauge}} = \rho gh \quad (7)$$

이다. 물과 댐이 닿는 면적을 A , 계기압력에 의해 댐에 가해지는 힘을 F_{gauge} 라 하면 F_{gauge} 는

$$F_{\text{gauge}} = \int P_{\text{gauge}} dA \quad (8)$$

이다. 폭을 W 라 하면 미소면적 dA 는

$$A = Wh, \quad dA = Wdh \quad (9)$$

이고 힘 F_{gauge} 는

$$F_{\text{gauge}} = \int_0^S P_{\text{gauge}} dA = \int_0^S \rho g W h dh = \frac{1}{2} \rho g W S^2 \quad (10)$$

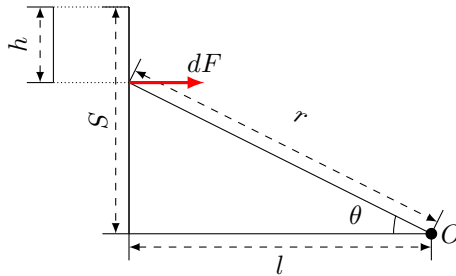
이다. 따라서,

$$\begin{aligned} F_{\text{gauge}} &= \frac{1}{2} (998 \text{ kg/m}^3) (9.80 \text{ m/s}^2) (314 \text{ m}) (35.0 \text{ m})^2 \\ &= 1.88 \times 10^9 \text{ N} \end{aligned} \quad (11)$$

을 얻는다. 계기압력으로부터 댐에 가해지는 알짜힘은 $1.88 \times 10^9 \text{ N}$ 이다.

(나) 물에 닿는 면적에 대해 힘이 연속적으로 작용하므로 각 높이에 작용하는 미소힘에 의한 미소돌림힘 $d\tau$ 를 찾으면

$$d\tau = r \sin \theta dF, \quad dF = \rho g W h dh \quad (12)$$



$r \sin \theta = S - h$ 이므로

$$d\tau = r \sin \theta dF = \rho g W (S - h) h dh \quad (13)$$

따라서 총 돌림힘은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\tau &= \int_0^S \rho g W (S - h) h \, dh = \rho g W \left(\frac{1}{2} S^3 - \frac{1}{3} S^3 \right) = \frac{1}{6} \rho g W S^3 \\ &= \frac{1}{6} (998 \text{ kg/m}^3) (9.80 \text{ m/s}^2) (314 \text{ m}) (35.0 \text{ m})^3 \\ &= 2.19 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}.\end{aligned}\quad (14)$$

총 돌림힘은 $2.19 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}$ 이다.

(다) 모멘트팔의 길이를 l 이라고 하면,

$$\tau = l F_{\text{gauge}}, \quad l = \frac{\tau}{F_{\text{gauge}}} \quad (15)$$

이다. 식 (10), (14)로부터 l 은

$$l = \frac{S}{3} = \frac{35.0 \text{ m}}{3} = 11.7 \text{ m} \quad (16)$$

이다. 즉, 돌림힘의 모멘트팔은 11.7 m이다.

문제 3. (60pt) 그림 2처럼 용수철 상수가 $3.00 \times 10^4 \text{ N/m}$ 인 용수철이 단단한 들보와 유압지렛대의 출력 피스톤 사이에 연결되어 있다. 질량을 무시할 수 있는 빈 통이 입력 피스톤 위에 놓여 있다. 입력 피스톤의 단면적은 A_i 이고

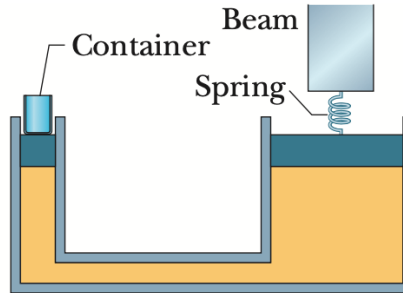


FIG. 2. 문제 3

출력 피스톤의 단면적은 $18.0A_i$ 이다. 처음에 용수철은 늘어나지 않은 길이이다. 천천히 빈 통에 모래를 부어서 몇 kg을 넣어야 용수철이 5.00 cm만큼 수축하겠는가?

풀이 : 모래를 m 만큼 넣었을 때 입력 피스톤에 작용하는 압력 P_{in}

$$P_{in} = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A_i} \quad (17)$$

유체가 출력 피스톤에 작용하는 압력 P_{out} , 출력 피스톤이 올라가 스프링을 압축시키면 스프링은 출력 피스톤에 복원력 F_{out} 을 가한다. 출력 피스톤이 스프링을 압축시키는 힘과 스프링의 복원력이 평형을 이루면 출력 피스톤과 스프링은 정지한다. 이 때 P_{out} 과 F_{out} 는 다음 관계에 있다.

$$P_{out} = \frac{F_{out}}{18A_i} \quad (18)$$

또한 스프링에 의한 복원력 F_{out} 은

$$F_{out} = kx = kh_2, \quad (19)$$

이고 압력 P_{out} 은

$$P_{out} = \frac{kh_2}{18A_i} \quad (20)$$

이다. 압력은 유체의 어디에서나 같으므로 $P_{in} = P_{out}$ 이다. 따라서,

$$\frac{mg}{A_i} = \frac{kh_2}{18A_i}, \quad m = \frac{kh_2}{18g} \quad (21)$$

우리가 구하고자 하는 것은 $h_2 = 5.00 \text{ cm}$ 일 때 모래의 질량 m 이므로

$$m = \frac{(3.00 \times 10^4 \text{ N/m})(5.00 \times 10^{-2} \text{ m})}{18(9.80 \text{ m/s}^2)} = 8.50 \text{ kg} \quad (22)$$

를 얻을 수 있다.

문제 4. (40pt) 속이 비어있는 쇠공이 물에 거의 잠긴 채 떠 있다. 바깥 반지름이 60.0 cm 이고, 쇠의 밀도가 7.87 g/cm^3 일 때 안쪽 반지름을 구하여라.

풀이 : 쇠공은 자신이 물속에서 차지한 부피를 가진 물의 무게를 부력으로 받는다. 쇠공이고 물에 거의 잠겨있으므로 바깥쪽 반지름을 b 라고 하면 부력 F_b 는

$$F_b = V\rho_0g = \frac{4}{3}\pi b^3\rho_0g \quad (23)$$

이다. ρ_0 는 물의 밀도이다. 쇠공의 안쪽 반지름을 a , 쇠의 밀도를 ρ 라 하면 쇠공이 받는 중력 F_g 는 다음과 같다.

$$F_g = mg = \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)\rho g. \quad (24)$$

쇠공이 정지해있는 이유는 쇠공의 위로 작용하는 부력 F_b 와 아래로 작용하는 중력 F_g 가 같아 평형을 이루기 때문이다. 즉, $F_b = F_g$ 이고

$$\frac{4}{3}\pi b^3\rho_0g = \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)\rho g \quad (25)$$

이다. 안쪽 반지름을 구하기 위해 a 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$a^3 = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)b^3, \quad a = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}b \quad (26)$$

수치를 대입해서 안쪽 반지름을 구해보자.

$$a = \left(1 - \frac{0.998 \text{ g/cm}^3}{7.87 \text{ g/cm}^3}\right)^{\frac{1}{3}}(60.0 \text{ cm}) = 57.3 \text{ cm}. \quad (27)$$

안쪽 반지름은 57.3 cm 이다.