

# 2022년 2학기 물리학 II

김현철<sup>\*1,†</sup> and Byeong-woo Han<sup>1,‡</sup>

<sup>1</sup>*Hadron Theory Group, Department of Physics,  
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*  
(Dated: Autumn Semester, 2022)

**Due date:** 2022년 8월 31일 15:30-16:15

## Quiz 2

**문제 1 [20pt].** 반지름이  $a$ 인 원형고리가 원점을 중심으로  $x-y$  평면에 놓여 있다. 이 중심에서부터  $z$ 축으로  $z$ 만큼 떨어진  $P$ 점에서 이 원형고리가 생성시키는 전기장의 크기와 방향을 구하려고 한다.

- 원점에서부터 원형고리를 따라 있는 미소길이  $ds$ 까지의 거리 벡터  $\vec{r}'$ 을 구하여라.
- 원점에서부터  $P$ 점까지 거리 벡터  $\vec{r}$ 을 구하여라.
- $|\vec{r} - \vec{r}'|$ 을 구하여라.
- 위 문제에 대한 전기장을 표현하여라.
- $P$ 점에서 전기장을 구하여라.
- 결과를 토론하여라. (예: 전기장의 방향은 왜  $z$ 축 방향만 있는가?  $z \gg a$  일 때 전기장은? 등등)

**풀이 :** 먼저 문제를 풀기 위한 좌표계를 설정하자 반지름이  $a$ 인 원형고리가  $x-y$ 평면위에 있고,  $z$ 축으로  $z$ 만큼 떨어진



FIG. 1: 문제 1

어져 있으므로, 그림 (??)과 같은 원통좌표계를 사용하는 것이 좋을 것이다. 먼저 미소거리  $ds$ 까지의 거리 벡터  $\vec{r}'$ 을 구해보자.  $ds$ 까지의 거리벡터  $\vec{r}'$ 와  $x$ 축과의 각도를  $\theta$ 라고 하자. 그러면  $\vec{r}'$ 을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\vec{r}' = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0). \quad (1)$$

또한, 원점에서  $P$ 점까지의 거리 벡터  $\vec{r}$  역시 쉽게 쓸 수 있다.

$$\vec{r} = (0, 0, z). \quad (2)$$

따라서,  $|\vec{r} - \vec{r}'|$ 은 다음과 같다.

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = |(-a \cos \theta, -a \sin \theta, z)| \quad (3)$$

$$= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta + z^2}. \quad (4)$$

---

\* Office: 5S-436D (면담시간 매주 수요일-16:15~18:00)

<sup>†</sup>Electronic address: hchkim@inha.ac.kr

<sup>‡</sup>Electronic address: 12191964@inha.edu

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2} \quad (5)$$

이다. 이제 전기장을 표현하기 위하여 전하를 알아보자. 전하밀도가 균일하므로 전하밀도는 상수이다. 이 전하밀도를  $\lambda$ 라고 하자. 전체 전하를  $Q$ 라고 하였을 때  $\lambda$ 와  $Q$ 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi a}. \quad (6)$$

이제 미소길이  $ds$ 에 의한 미소 전기장을 구해보자.  $ds$ 에 의한 전기장은 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (7)$$

여기서  $dq = \lambda ds = \frac{Q}{2\pi a} a d\theta$  이고,  $|\vec{r} - \vec{r}'|$ 과  $(\vec{r} - \vec{r}')$ 는 이미 구했으므로 미소 전기장에 대한 식은 쉽게 알 수 있다.

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2\pi a} \frac{a d\theta}{(a^2 + z^2)^{3/2}} (-a \cos \theta \hat{x} - a \sin \theta \hat{y} + z \hat{z}). \quad (8)$$

이제 총 전기장을 구하기 위해 0부터  $2\pi$ 까지 적분하자.

$$\vec{E} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2\pi a} \frac{a d\theta}{(a^2 + z^2)^{3/2}} (-a \cos \theta \hat{x} - a \sin \theta \hat{y} + z \hat{z}) \quad (9)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} (-a \sin \theta \hat{x} + a \cos \theta \hat{y} + \theta z \hat{z}) \Big|_0^{2\pi} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}. \quad (11)$$

이다. 우리는 여기서 당연하면서도 재밌는 결과를 얻을 수 있는데, 강의노트에서는 대칭성이 존재함을 전제로 하여서 cos성분만 이용하여서 전기장을 구하였지만 풀이과정에서는 벡터의 방향을 모두 고려하여 계산을 하였다. 그럼에도 불구하고 같은결과가 나왔는데, 이러한 결과가 나온 이유는 언급하였다 싶이 원이 원점을 기준으로  $z$ 축에 대한 대칭성이 존재하기 때문이다. 또한 만약에  $z \gg a$ 일 때 전기장을 구해보면,  $1 \gg \frac{a}{z}$  이므로, Taylor전개가 가능하다. 따라서,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{z^3 \left[1 + \left(\frac{a}{z}\right)^2\right]^{3/2}} \hat{z} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \left[1 + \left(\frac{a}{z}\right)^2\right]^{-3/2} \hat{z} \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a^2}{z^2}\right) \hat{z} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \hat{z} + O\left(\frac{a^2}{z^4}\right) \hat{z} \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \hat{z} \end{aligned} \quad (12)$$

를 얻는다. 따라서,  $z \gg a$ 일 때, 전하밀도가 일정한 원형고리는 점전하로 근사가 가능하다.

**문제 2 [5pt].** 크기가  $1.00 \times 10^3$  N/C인 균일한 전기장 안에 전자를 가만히 놓았다. 전자가 1.00 cm를 진행했을 때,

(가) 전자의 속력은 얼마인가?

(나) 전자의 운동에너지는 얼마인가?

(다) 시간은 얼마나 지났는가?

풀이 :

(가) 전자가 받는 힘은  $e\vec{E}$ 이므로 뉴턴의 제 2법칙에 의해

$$\vec{F} = m_e \vec{a} = e\vec{E} \quad (13)$$

전자의 가속도는  $\frac{e\vec{E}}{m_e}$ 로 일정하다. 여기서  $e$ 는 전자의 전하량,  $\vec{E}$ 는 전기장,  $m_e$ 는 전자의 질량이다. 이는 등가속도 운동이므로, 등가속도운동에서의 방정식

$$2as = v^2 - v_0^2 \quad (14)$$

이 성립한다. 여기서

$$\vec{a} = \frac{e\vec{E}}{m_e} = \frac{1.60 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1.00 \times 10^3 \text{ N/C}}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}} = 1.76 \times 10^{14} \text{ m/s}^2 \quad (15)$$

이고, 전자를 가만히 놓았다고 하였으므로,  $v_0 = 0$ , 마지막으로,  $s = 1.00 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$ 이므로, 전자의 속력은,

$$v = \sqrt{2 \times 0.01 \text{ m} \times 1.76 \times 10^{14} \text{ m/s}^2} \approx 1.88 \times 10^6 \text{ m/s} \quad (16)$$

이다.

(나) 일-에너지 정리에 의해서, 전자에 가해진 일의 크기는 운동에너지의 변화량과 같다, 처음의 전자가 정지해 있었으므로, 가해진 일의 크기가 운동에너지 이다. 전자의 가해진 일의 크기는,

$$F \cdot s = e\vec{E} \cdot \vec{s} = (1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(1.00 \times 10^3 \text{ N/C})(0.01 \text{ m}) = 1.60 \times 10^{-18} \text{ J} \quad (17)$$

이다.

(다) 등가속도 운동에서,

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (18)$$

이다. 여기서,  $s_0 = 0$ 으로 설정하고, 전자를 가만히 놓았다고 하였으므로,  $v_0 = 0$ 이다. 따라서, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \quad (19)$$

이를 변형하면,

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \quad (20)$$

이고,  $s = 0.01 \text{ m}$ ,  $a = 1.76 \times 10^{14} \text{ m/s}^2$  이므로, 시간  $t$ 는

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 0.01}{1.76 \times 10^{14} \text{ m/s}^2}} = 1.14 \times 10^{-16} \text{ s} \quad (21)$$

이다.

**문제 3 [10pt].** 그림 ??처럼 각각 전하가  $q$ ,  $-q$ 인 두 입자가 전기 쌍극자를 이루고 있다.  $x \gg a$ 일 때  $x$  축 위에서 전기장  $E_x$ 를 구하여라.

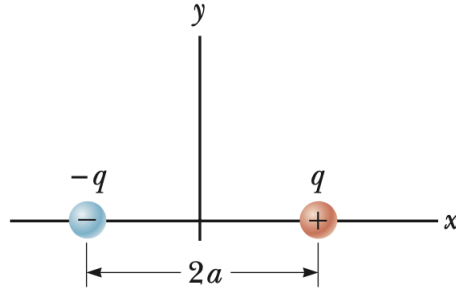


FIG. 2: 문제 3

**풀이:** 먼저 양전하에 의한 전기장을 구하자.  $x$ 축 위에서의 양전하에 의한 전기장  $E_q$ 는,

$$E_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x-a)^2} \quad (22)$$

이고,  $x$ 축 위에서의 음전하에 의한 전기장  $E_{-q}$ 는,

$$E_{-q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{(x+a)^2} \quad (23)$$

전기장은 중첩의 원리가 적용되므로, 중첩의 원리를 적용하면 전기장  $E_x$ 는

$$E_x = E_q + E_{-q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x-a)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{(x+a)^2} \quad (24)$$

이제  $x \gg a$  라고 가정하면,  $1 \gg \frac{a}{x}$  이므로, Taylor 근사를 사용할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 \left(1 - \frac{a}{x}\right)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 \left(1 + \frac{a}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} \left(1 - \frac{a}{x}\right)^{-2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{-2} \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} \left[ \left(1 + \frac{2a}{x}\right) - \left(1 - \frac{2a}{x}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4qa}{x^3} \end{aligned} \quad (25)$$

이다. 여기서  $p = 2qa$ 라고 정의하면  $x$ 축 위의 전기장은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3} \quad (26)$$

여기서의  $p$ 의 값을 쌍극자 모멘트라고 한다.

**문제 4 [10pt].** 그림 ??처럼 한 변의 길이가  $a$ 인 정사각형의 꼭짓점에 네 개의 전하가 각각 놓여있다.

- (a) 전하  $q$ 의 위치에서 전기장을 구하여라.
- (b)  $q$ 에 작용하는 총 정전기력을 구하여라.

**풀이 :**

- (a)  $q$ 에서의 전기장을 구하기 위해  $q, 2q, 3q, 4q$ 에 의한 전기장을 구하자

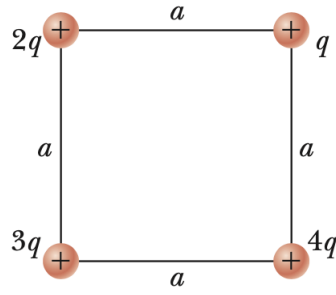


FIG. 3: 문제 4

(a-1)  $q$ 의 위치에서  $q$ 에 의한 전기장은, 거리가 0이므로, 전기장은 0이다

(a-2)  $q$ 의 위치에서  $2q$ 에 의한 전기장은 거리가  $a$ 이고, 방향이  $x$ 축 방향이므로, 전기장  $\vec{E}_{2q}$ 는 다음과 같다.

$$\vec{E}_{2q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{a^2} \hat{x}. \quad (27)$$

(a-3)  $q$ 의 위치에서  $3q$ 에 의한 전기장은 거리가 피타고라스 정리에 의해서  $\sqrt{2}a$ 이고,  $\hat{x} + \hat{y}$ 의 방향이므로, 전기장  $\vec{E}_{3q}$ 은 다음과 같다.

$$\vec{E}_{3q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q}{2\sqrt{2}a^2} a (\hat{x} + \hat{y}) \quad (28)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q}{2\sqrt{2}a^2} (\hat{x} + \hat{y}). \quad (29)$$

(a-4)  $q$ 의 위치에서  $4q$ 에 의한 전기장은  $a$ 이고, 방향이  $y$ 축 방향이므로, 전기장  $\vec{E}_{4q}$ 는 다음과 같다.

$$\vec{E}_{4q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q}{a^2} \hat{y}. \quad (30)$$

이다. 전기장은 중첩의 원리가 성립하므로,  $q$ 의 위치에서의 전기장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{E}_{tot} &= \vec{E}_{2q} + \vec{E}_{3q} + \vec{E}_{4q} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{a^2} \hat{x} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q}{2\sqrt{2}a^2} (\hat{x} + \hat{y}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q}{a^2} \hat{y} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \left( \frac{4\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}} \hat{x} + \frac{8\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}} \hat{y} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

(b) 전기장의 정의는 단위 전하당 전기력의 크기이다. 따라서, 총 정전기력은 정의에 따라서 위에서 구한 전기장에 전하를 곱해주면 된다. 따라서 정전기력은

$$\vec{F}_{tot} = q\vec{E}_{tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \left( \frac{4\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}} \hat{x} + \frac{8\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}} \hat{y} \right) \quad (32)$$

이다.

**문제 5 [20pt].** 그림 ??과 같이  $x$ -축을 따라 두 전하  $q_1$ 과  $q_2$ 가 각각  $a, b$  위치에 놓여 있다. 여기서  $q_2$ 는 음전하이다.

(가)  $y$ -축 위의 점  $P$ 에서 두 전하가 만드는 전기장을 구하여라.

(나)  $|q_1| = |q_2|$ ,  $a = b$ 일 때,  $P$  점에서 전기장을 구하여라.

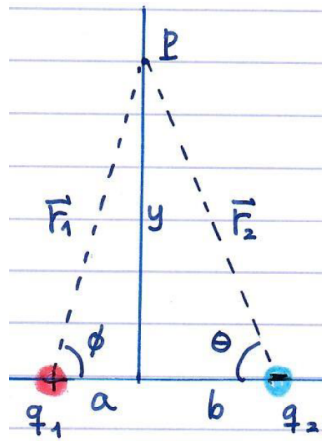


FIG. 4: 문제 5

(다) 원점에서  $P$  점까지의 거리가  $a$ 보다 매우 클 때 ( $y \gg a$ ), 이 전기 쌍극자에 의한 전기장을  $P$  점에서 구하여라.

풀이 :

(가) 먼저  $q_1$ 이 만드는 점  $P$ 에서의 전기장  $\vec{E}_{q_1}$ 을 구하자. 이에 대한 식은 피타고라스의 정리를 이용하면 다음과 같다.

$$\vec{E}_{q_1} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2 + y^2} \frac{a\hat{x} + y\hat{y}}{\sqrt{a^2 + y^2}} \quad (33)$$

같은 방법으로  $q_2$ 가 점  $P$ 에서 전기장  $\vec{E}_{q_2}$ 를 구해보면,

$$\vec{E}_{q_2} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^2 + y^2} \frac{-b\hat{x} + y\hat{y}}{\sqrt{a^2 + y^2}} \quad (34)$$

그런데 여기서 벡터부분을 삼각함수의 꼴로 변경할 수 있다. 즉,

$$\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}, \quad \sin \phi = \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}, \quad (35)$$

$$\cos \theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{b^2 + y^2}} \quad (36)$$

이다. 이 형태를 식 (??), (??)에 대입하여 다음과 같이 바꿔 쓸 수 있다.

$$\vec{E}_{q_1} = \frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2 + y^2} (\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) \quad (37)$$

$$\vec{E}_{q_2} = \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^2 + y^2} (\cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{y}). \quad (38)$$

따라서 점  $P$ 에서 두 전하가 만드는 전기장은,

$$\begin{aligned} \vec{E}_{tot} &= \vec{E}_{q_1} + \vec{E}_{q_2} \\ &= \frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2 + y^2} (\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) + \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^2 + y^2} (\cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{y}) \\ &= \left( \frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2 + y^2} \cos \phi + \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^2 + y^2} \cos \theta \right) \hat{x} \\ &\quad + \left( \frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2 + y^2} \sin \phi - \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^2 + y^2} \sin \theta \right) \hat{y} \end{aligned} \quad (39)$$

이다.

(나) 먼저  $a = b$ 인 경우를 생각하여 보자. 이 경우 식 (??)에 의해서,  $\theta = \phi$ 가 된다. 또한,  $|q_1| = |q_2|$  까지 만족 할 경우, 식 (??)에 의해서,  $y$ 축 성분의 전기장이 사라지게 된다. 이때의 전하를  $|q_1| = |q_2| = |q|$ 이라고 한다면,  $P$  점에서의 전기장은

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{tot} &= \vec{E}_{q_1} + \vec{E}_{q_2} \\
 &= \left( \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2 + y^2} \cos \phi + \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2 + y^2} \cos \phi \right) \hat{x} \\
 &\quad + \left( \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2 + y^2} \sin \phi - \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2 + y^2} \sin \phi \right) \hat{y} \\
 &= \frac{2|q|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2 + y^2} \cos \phi \hat{x} \\
 &= \frac{2a|q|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \hat{x}
 \end{aligned} \tag{40}$$

이다.

(다)  $y \gg a$  라면,  $1 \gg \frac{a}{y}$  이므로 Taylor 근사를 쓸 수 있다. 따라서, 식 (??)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{tot} &= \frac{2a|q|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \hat{x} \\
 &= \frac{2a|q|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3} \left[ 1 + \left( \frac{a}{y} \right)^2 \right]^{-3/2} \hat{x} \\
 &\approx \frac{2a|q|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3} \left[ 1 - \left( \frac{3}{2} \right) \left( \frac{a}{y} \right)^2 \right] \hat{x} \\
 &= \frac{2a|q|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3} \hat{x} + O\left( \frac{a^3}{y^5} \right).
 \end{aligned} \tag{41}$$

여기서 첫번째 항만 남기고,  $\vec{p} = 2|q|a\hat{x}$ 라고 정의하면, 다음을 얻는다.

$$\vec{E}_{tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{y^3}. \tag{42}$$

여기서  $\vec{p}$ 를 쌍극자 모멘트라고 부른다.