2021년 1학기 물리학 I: Quiz 9

김현철[a1,†] and Lee Hui-Jae[1,‡]
[1] *Hadron Theory Group, Department of Physics, Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*
(Dated: Spring semester, 2021)

문제 1. (30pt)
풀이 :

(가) 깡통 바닥의 중심을 원점으로 하자. A를 깡통 옆면의 넓이라고 하면 깡통 옆면의 질량 중심의 높이는,

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dM = \frac{1}{A}\int z\,dA, \;\; A = 2\pi R z, \tag{1}$$

를 통해 계산할 수 있다. R은 깡통 바닥의 반지름이다. V를 콜라의 부피라고 하면 콜라의 질량 중심의 높이는,

$$z_{cm} = \frac{1}{m}\int z\,dm = \frac{1}{V}\int z\,dV, \;\; V = \pi R^2 z, \tag{2}$$

를 통해 계산할 수 있다. 따라서 M을 깡통의 질량, m을 콜라의 질량이라 하면 전체 질량 중심의 높이 h는,

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{M+m}\left(\frac{M}{A}\int z\,dA + \frac{m}{V}\int z\,dV\right) \\ &= \frac{1}{M+m}\left(\frac{M}{2\pi R H}\int_0^H 2\pi R z\,dz + \frac{m}{\pi R^2 H}\int_0^H \pi R^2 z\,dz\right) \\ &= \frac{1}{M+m}\left(\frac{M}{H}\int_0^H z\,dz + \frac{m}{H}\int_0^H z\,dz\right) \\ &= \frac{1}{M+m}\left(\frac{M}{H}\frac{1}{2}H^2 + \frac{m}{H}\frac{1}{2}H^2\right) \\ &= \frac{1}{2}H, \end{aligned} \tag{3}$$

이다. $H = 12$ cm이므로 전체 질량 중심의 높이는 6 cm 이다.

(나) 콜라가 모두 빠져 나갔으므로 h는,

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{V}\int z\,dV = \frac{1}{2\pi R H}\int_0^H 2\pi R z\,dz \\ &= \frac{1}{H}\int_0^H z\,dz \\ &= \frac{1}{2}H, \end{aligned} \tag{4}$$

이다. 따라서 콜라가 모두 빠져나가도 전체 질량 중심의 높이는 6 cm 이다.

(다) 콜라가 빠져나갈 때 콜라의 높이를 x라고 하자. 콜라의 높이는 더 이상 H가 아니고 깡통 안에 남은 콜라의 질량 m도 상수가 아니다. 콜라가 가득 차 있을 때의 질량을 m_0, 콜라의 밀도를 ρ라고 하면,

$$\rho = \frac{m_0}{\pi R^2 H} \tag{5}$$

---

[a] Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00∼20:00)
[†] hchkim@inha.ac.kr
[‡] hjlee6674@inha.edu

이고 깡통 안에 남은 콜라의 질량 m은,

$$m = \rho\pi R^2 x = \frac{m_0 x}{H} \tag{6}$$

이다. 전체 질량 중심의 높이 h는,

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{M+m}\left(\frac{M}{A}\int z\,dA + \frac{M}{V}\int z\,dV\right) \\ &= \frac{1}{M+m}\left(\frac{M}{2\pi RH}\int_0^H 2\pi Rz\,dz + \frac{m}{\pi R^2 x}\int_0^x \pi R^2 z\,dz\right) \\ &= \frac{1}{M+m}\left(\frac{M}{H}\int_0^H z\,dz + \frac{m}{x}\int_0^x z\,dz\right) \\ &= \frac{1}{M+m}\left(\frac{MH}{2} + \frac{mx}{2}\right) = \frac{MH+mx}{2(M+m)} \end{aligned} \tag{7}$$

식 (6)에 의해,

$$h = \frac{MH+mx}{2(M+m)} = \frac{MH^2+m_0x^2}{2(MH+m_0x)}. \tag{8}$$

이다. $x = H$일 때와 $x = 0$일 때 $h = \frac{1}{2}H$임을 확인할 수 있다. $M = 1.40\times10^3\,\mathrm{g}$, $H = 12\,\mathrm{cm}$, $m_0 = 2.10\times10^3\,\mathrm{g}$일 때의 그래프는 다음과 같다.

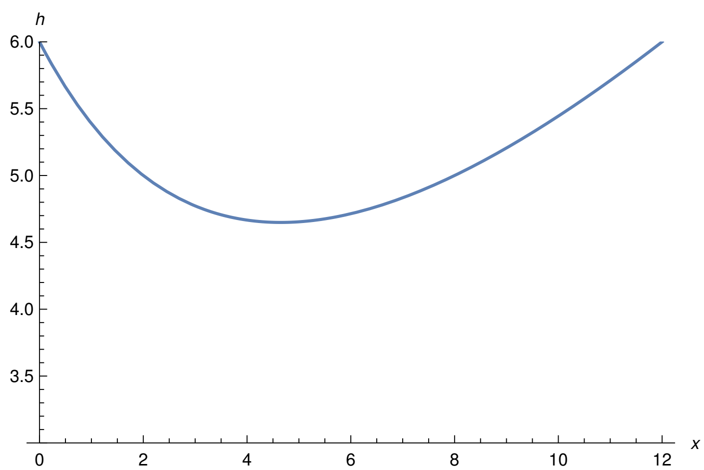

FIG. 1. x에 따른 h의 그래프

(라) 질량 중심이 가장 낮은 점에 있을 때를 찾기 위해 식(8)을 x에 대해 미분하여 0이 되도록 하는 x를 찾자. 즉,

$$\frac{dh}{dx} = \frac{MH^2m_0 - 2MHm_0x - m_0^2x^2}{2(MH+m_0x)^2} = 0 \tag{9}$$

을 만족하는 x를 구해야 한다. 이는 x에 대한 2차 방정식인,

$$m_0^2x^2 + 2MHm_0x - MH^2m_0 = 0 \tag{10}$$

을 푸는 것과 같다. 근의 공식을 이용하면,

$$x = \frac{-MHm_0 \pm \sqrt{M^2H^2m_0^2 + MH^2m_0^3}}{m_0^2} = \frac{-MH \pm H\sqrt{M(M+m_0)}}{m_0}. \tag{11}$$

$M = 1.40 \times 10^3\,\mathrm{g},\ H = 12\,\mathrm{cm},\ m_0 = 2.10 \times 10^3\,\mathrm{g}$ 이므로,

$$x_1 = \frac{-(1.40 \times 10^3\,\mathrm{g})(12\,\mathrm{cm}) - (12\,\mathrm{cm})\sqrt{(1.40 \times 10^3\,\mathrm{g})((1.40 \times 10^3\,\mathrm{g}) + 2.10 \times 10^3\,\mathrm{g})}}{2.10 \times 10^3\,\mathrm{g}} = -21\,\mathrm{cm}$$
$$x_2 = \frac{-(1.40 \times 10^3\,\mathrm{g})(12\,\mathrm{cm}) + (12\,\mathrm{cm})\sqrt{(1.40 \times 10^3\,\mathrm{g})((1.40 \times 10^3\,\mathrm{g}) + 2.10 \times 10^3\,\mathrm{g})}}{2.10 \times 10^3\,\mathrm{g}} = 4.6\,\mathrm{cm} \tag{12}$$

여기서 $x_1 < 0$은 우리가 원하는 길이가 아니다. 따라서 답은,

$$x = 4.6\,\mathrm{cm} \tag{13}$$

이다.

문제 2. (50 pt)
풀이 :

문제 3. (20 pt)
풀이 :

문제 4. (20 pt)
풀이 :

(가) 공이 가진 초기 역학적 에너지를 E_i, 충돌 전 최저점에서 공의 역학적 에너지를 E_f라고 하자. 최저점에서 공의 위치에너지를 0이라고 하면,

$$E_i = mgh,\ \ E_f = \frac{1}{2}mv^2. \tag{14}$$

역학적 에너지는 보존되어야 하므로,

$$E_i = E_f,\ \ mgh = \frac{1}{2}mv^2 \tag{15}$$

이다. 공과 토막은 탄성충돌하였으므로 운동량과 에너지가 보존된다. 탄성충돌 이후 공의 속력과 질량을 v_1, m_1 토막의 속력과 질량을 v_2, m_2 라고 하자. 운동량 보존 법칙에 의해,

$$m_1 v + 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2,\ \ m_1(v - v_1) = m_2 v_2 \tag{16}$$

이고 에너지 보존 법칙에 의해,

$$\frac{1}{2}m_1 v^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2,\ \ m_1(v^2 - v_1^2) = m_2 v_2^2 \tag{17}$$

이다. 식 (16)를 식 (17)에 대입하면,

$$m_1(v^2 - v_1^2) = m_1(v - v_1)(v + v_1) = m_2 v_2 (v + v_1) = m_2 v_2^2 \tag{18}$$

이고 따라서,

$$v + v_1 = v_2 \tag{19}$$

이다. 식 (16)에 대입하여,

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2(v + v_1) \tag{20}$$

을 얻고 v_1에 대해 정리하면,

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v. \tag{21}$$

이다. 식 (15)에 의해,

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{22}$$

따라서 v_1은 다음과 같다.

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh} \tag{23}$$

$m_1 = 0.500\,\mathrm{kg},\ m_2 = 2.50\,\mathrm{kg},\ h = 7.00 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}$ 이므로 v_1은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(0.500\,\mathrm{kg} - 2.50\,\mathrm{kg})}{(0.500\,\mathrm{kg} + 2.50\,\mathrm{kg})} \sqrt{2(9.80\,\mathrm{m/s^2})(7.00 \times 10^{-1}\,\mathrm{m})} \\ &= -2.47\,\mathrm{m/s}. \end{aligned} \tag{24}$$

(나) 식 (19)에 의해,

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{2gh} + v_1 \\ &= \sqrt{2(9.80\,\mathrm{m/s^2})(7.00 \times 10^{-1}\,\mathrm{m})} - 2.47\,\mathrm{m/s} \\ &= 1.23\,\mathrm{m/s}. \end{aligned} \tag{25}$$

탄성충돌 후 토막은 $1.23\,\mathrm{m/s}$의 속력으로 움직인다.