

# 2022년 2학기 물리학 II

김현철<sup>\*1,†</sup> and HuiJae-Lee<sup>1,‡</sup>

<sup>1</sup>Hadron Theory Group, Department of Physics,  
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea  
(Dated: Autumn Semester, 2022)

**Due date:** 2022년 9월 26일 15:30-16:15

## Quiz 8

**문제 1 [20pt].** 반지름이  $R$ 인 원형고리에 전류  $I$ 가 흐르고 있다. 고리 중심에서의 자기장의 크기를 구하여라.

**풀이 :** 비오-사바르 법칙을 이용해 원형 고리 전류에 의한 자기장을 구해보자. 전류가 흐르는 지점으로부터  $r$ 만큼 떨어진 곳에 생성되는 자기장  $\vec{B}$ 는

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (1)$$

이다.  $I$ 은 전류,  $d\vec{l}$ 는 도선을 따르는 미소길이이고  $\hat{r}$ 는 방향 벡터이다.

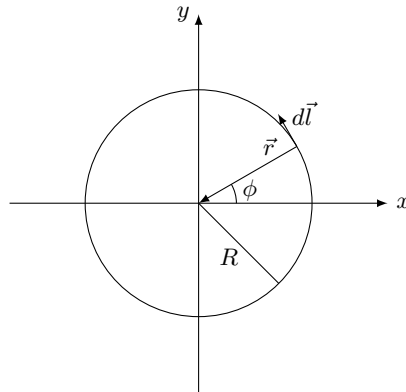


FIG. 1:  $xy$ 평면에 놓여있는 원형도선

이제 반지름이  $R$ 이고 전류  $I$ 가 흐르는 원형 도선을 생각하자.  $\vec{r}$ 은 도선 위의 한 점에서 도선의 중심으로 향하는 벡터이고  $\phi$ 는  $\vec{r}$ 과  $x$ 축이 이루는 각도이다. 여기서 전류는 시계 반대 방향으로 흐른다. 이 경우 벡터  $\vec{r}$ 과  $d\vec{l}$ 로부터  $d\vec{l} \times \hat{r}$ 을 다음과 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= -R \cos \phi \hat{i} - R \sin \phi \hat{j}, \quad d\vec{l} = Rd\phi(-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}) \\ \implies d\vec{l} \times \hat{r} &= Rd\phi(-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}) \times (-\cos \phi \hat{i} - \sin \phi \hat{j}) = Rd\phi(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \hat{k} \end{aligned} \quad (2)$$

따라서 미소 벡터  $d\vec{l} \times \hat{r}$ 는

$$d\vec{l} \times \hat{r} = Rd\phi \hat{k} \quad (3)$$

\* Office: 5S-436D (면담시간 매주 수요일-16:15~19:00)

<sup>†</sup>Electronic address: hchkim@inha.ac.kr

<sup>‡</sup>Electronic address: hjlee6674@inha.edu

이고 도선이 완전한 원형이므로 식 (1)의 적분구간은  $0 < \phi < 2\pi$ 임에 유의하여 자기장  $\vec{B}$ 를 구할 수 있다.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} R \hat{k} d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} (2\pi R) \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{k}. \quad (4)$$

원형 도선에 의해 도선 중심에서 생성되는 자기장  $\vec{B}$ 는 크기  $\frac{\mu_0 I}{2R}$ 를 가지고  $z$ 축 방향을 향한다.

**문제 2 [20pt].** 반지름이  $a$ 인 원통형 금속막대가 있고 그 바깥에 (같은 축을 가지며) 안쪽 반지름이  $b$ 이고 바깥쪽 반지름이  $c$ 인 원형 금속관이 있다. 가운데 있는 금속막대와 바깥의 관에 크기가 같고 방향이 반대인 전류가 흐르고 있다면

(가) 축으로부터의 거리  $r$ 이  $a$ 보다 작은 경우,

(나)  $a < r < b$ 인 경우,

(다)  $r > c$ 인 경우의 자기장을 각각 구하여라.

**풀이 :**

앙페르 법칙을 이용해 각 경우의 자기장을 구해보자. 앙페르 법칙은 폐곡선을 따라 생성되는 자기장은 폐곡선 내부의 전류에 비례한다는 법칙으로

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (5)$$

로 쓸 수 있다.

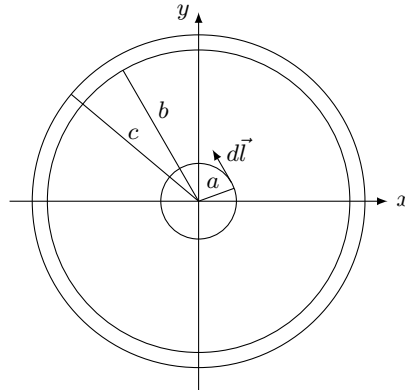


FIG. 2: 반지름이  $a$ 인 금속막대와 안쪽 반지름  $b$ , 바깥쪽 반지름이  $c$ 인 원형 금속관의 단면

(가) 축으로부터의 거리  $r$ 이  $a$ 보다 작은 경우, 반지름이  $r$ 인 원형 폐곡선을 따라 생성되는 자기장을 구하자. 폐곡선 내부의 면적  $A_{in}$ 에 흐르는 전류  $I_{in}$ 은 반지름이  $a$ 인 금속막대에 흐르는 전류  $I$ 와 다음의 관계가 있다.

$$I_{in} = \frac{A_{in}}{A} I = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I = \frac{r^2}{a^2} I. \quad (6)$$

식 (5)에 의하면

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in} = \mu_0 \frac{r^2}{a^2} I \quad (7)$$

이다. 자기장  $\vec{B}$ 는 직선 도선이 만드는 자기장이므로  $\vec{B}$ 의 방향은  $d\vec{l}$ 과 평행하다. 따라서

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = |\vec{B}| 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{a^2} I \Rightarrow |\vec{B}| = \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2} \quad (8)$$

를 얻는다. 자기장의 방향은  $d\vec{l}$ 와 일치하고  $d\vec{l}$ 는 각벡터 방향을 향하므로 자기장  $\vec{B}$ 는

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2} \hat{\phi} \quad (9)$$

이다.

(나)  $a < r < b$ 인 경우, 폐곡선이 반지름이  $a$ 인 금속막대의 단면을 모두 포함하므로 식 (5)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = |\vec{B}| 2\pi r = \mu_0 I \implies |\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (10)$$

이 경우 역시 자기장의 방향은  $d\vec{l}$ 와 일치하므로

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (11)$$

를 얻는다.

(다) 이 경우, 자기장에 중첩의 원리가 적용된다는 사실을 이용하자. 반지름이  $c$ 인 단면과  $a$ 인 단면에 같은 방향으로 전류가 흐르고 반지름이  $b$ 인 단면에 반대 방향으로 전류가 흐른다 하여 문제를 풀자. 먼저, 반지름이  $c$ 인 단면에 흐르는 총 전류는 원형 금속관일 때 전류가  $I$ 만큼 흐른다는 사실로부터 전류밀도를 구하고 면적을 곱해 구할 것이다. 반지름이  $c$ 인 단면에 흐르는 면적 당 전류밀도  $J_c$ 는

$$J_c = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \quad (12)$$

이고 이 단면에 흐르는 총 전류  $I_c$ 는

$$I_c = \pi c^2 J_c = \frac{c^2}{c^2 - b^2} I \quad (13)$$

임을 알 수 있다. 반지름이  $b$ 인 단면에 반대 방향으로 흐르는 전류의 전류밀도  $J_b$ 는 반지름이  $c$ 인 단면과 겹치는 부분을 상쇄해야 하므로 반지름이  $c$ 인 단면의 전류밀도  $J_c$ 와 같다.

$$J_b = J_c. \quad (14)$$

따라서, 반지름이  $b$ 인 단면에 흐르는 전류  $I_b$ 는

$$I_b = \pi b^2 J_b = \frac{b^2}{c^2 - b^2} I \quad (15)$$

이다. 우리가 구한 두 전류  $I_b$ ,  $I_c$ 는 각각 반지름이  $b$ ,  $c$ 인 원통형 금속막대에 흐르는 전류이므로 식 (11)을 이용해 각 전류에 의해 생성되는 자기장  $\vec{B}_b$ ,  $\vec{B}_c$ 를 구할 수 있다.

$$\vec{B}_b = -\frac{\mu_0 I_b}{2\pi r} \hat{\phi} = -\frac{\mu_0 b^2 I}{2\pi r(c^2 - b^2)} \hat{\phi}, \quad (16)$$

$$\vec{B}_c = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi r} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 c^2 I}{2\pi r(c^2 - b^2)} \hat{\phi}. \quad (17)$$

$\vec{B}_b$ 는 전류의 방향이 반대이므로  $-$ 부호가 붙는다. 반지름이  $a$ 인 단면에 의해 생성되는 자기장  $\vec{B}_a$ 는 식 (11)이고 총 자기장  $\vec{B}$ 는 이들을 모두 합한 값이다.

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{B}_a + \vec{B}_b + \vec{B}_c = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left[ 1 - \frac{b^2}{c^2 - b^2} + \frac{c^2}{c^2 - b^2} \right] \hat{\phi} \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi r} \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (18)$$

$r > c$ 인 경우에 생성되는 자기장은 각벡터 방향이고 크기는  $\frac{\mu_0 I}{\pi r}$ 이다.

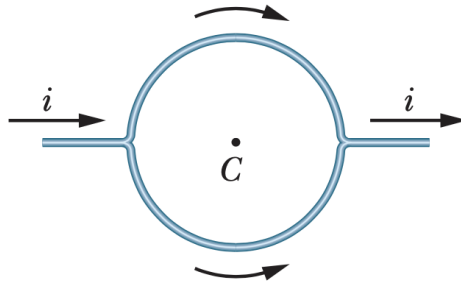


FIG. 3: 문제 3

**문제 3 [30pt].** 그림 3처럼 생긴 도선에 전류  $i$ 가 흐른다. 이 전류는 모양이 똑같이 생긴 두 개의 반원형의 도선으로 나뉘어, 다시 합친다. 이 원형 모양의 도선 중심  $C$ 에서 자기장을 구하여라.

**풀이 :** 도선을 두 부분으로 나누어 각각에 의한 자기장을 생각해 보자. 먼저 도선 중심  $C$ 를 기준으로 왼쪽과 오른쪽에 존재하는 도선에 의한 자기장은 도선의 미소길이 방향  $d\vec{l}$ 과 미소 도선부터  $C$ 까지의 단위벡터  $\hat{r}$ 이 평행하므로

$$d\vec{l} \parallel \hat{r} \implies d\vec{l} \times \hat{r} = 0 \quad (19)$$

이고 비오-사바르 법칙에 의해 자기장도 0이다. 이제 원형 도선에 의한 자기장만 따져주면 되는데 윗 도선과 아랫 도선의 전류 방향이 각각 시계 방향, 시계 반대 방향으로 반대이다. 즉,  $d\vec{l}$ 이 반대이다. 윗 도선의 미소길이 방향을  $d\vec{l}_u$ , 아랫 도선의 미소길이 방향을  $d\vec{l}_d$ 라 하면

$$\begin{aligned} d\vec{l}_u &= -Rd\phi(-\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}), \\ d\vec{l}_d &= Rd\phi(-\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}) \end{aligned} \quad (20)$$

이다.  $R$ 은 두 도선으로 이루어진 원형 도선의 반지름이다. 따라서 두 도선에 의한 자기장은 서로 크기는 같고 방향만 반대가 된다. 중첩의 원리에 의해 총 자기장은 두 자기장을 더한 것이므로 서로 상쇄되고 총 자기장은  $\vec{0}$ 이다.

**문제 4 [50pt].** 그림 4은 반지름이  $a = 4.00$  cm인 긴 원통형 도체에 반지름이  $b = 1.50$  cm의 긴 원통형 구멍이 도체의 축과 평행하게 나 있는 걸 보여주는 단면이다. 이 구멍의 중심은 원형 도체의 중심에서부터  $d = 2.00$  cm 떨어져 있다. 이 원통형 도체에는 전류  $i = 5.25$  A가 균일하게 흐르고 있다고 하자.

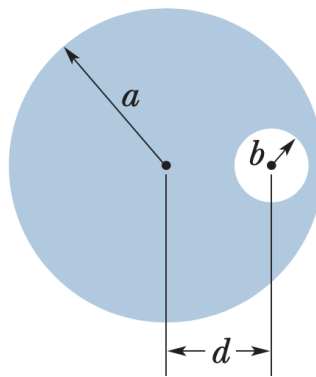


FIG. 4: 문제 4

(가) 이 구멍의 중심에서 자기장은 얼마인가?

(나)  $b = 0$ 일 때와  $d = 0$ 일 때의 결과를 구하고 논하여라.

풀이 :