

2022년 1학기 물리학 I: 제1차 시험

김현철^{a,†} and Lee Hui-Jae^{1,‡}

¹*Hadron Theory Group, Department of Physics,
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*

(Dated: Spring semester, 2022)

문제 (300pt) 그림 1처럼 스키 점프대를 만들었다. 비탈면은 평지로부터 32° 의 각으로 기울어져 있다. 그리고 비탈면의 길이는 $d_1 = 100$ m이고, 비탈면이 끝나고 지면과 나란한 지점부터 스키 선수가 점프하는 지점까지 거리는 $d_2 = 2$ m이다. 우선 지면과 스키 사이에 슬립이 없고, 스키 선수가 정지상태에 있다가 미끄러져 내려오고 있다고

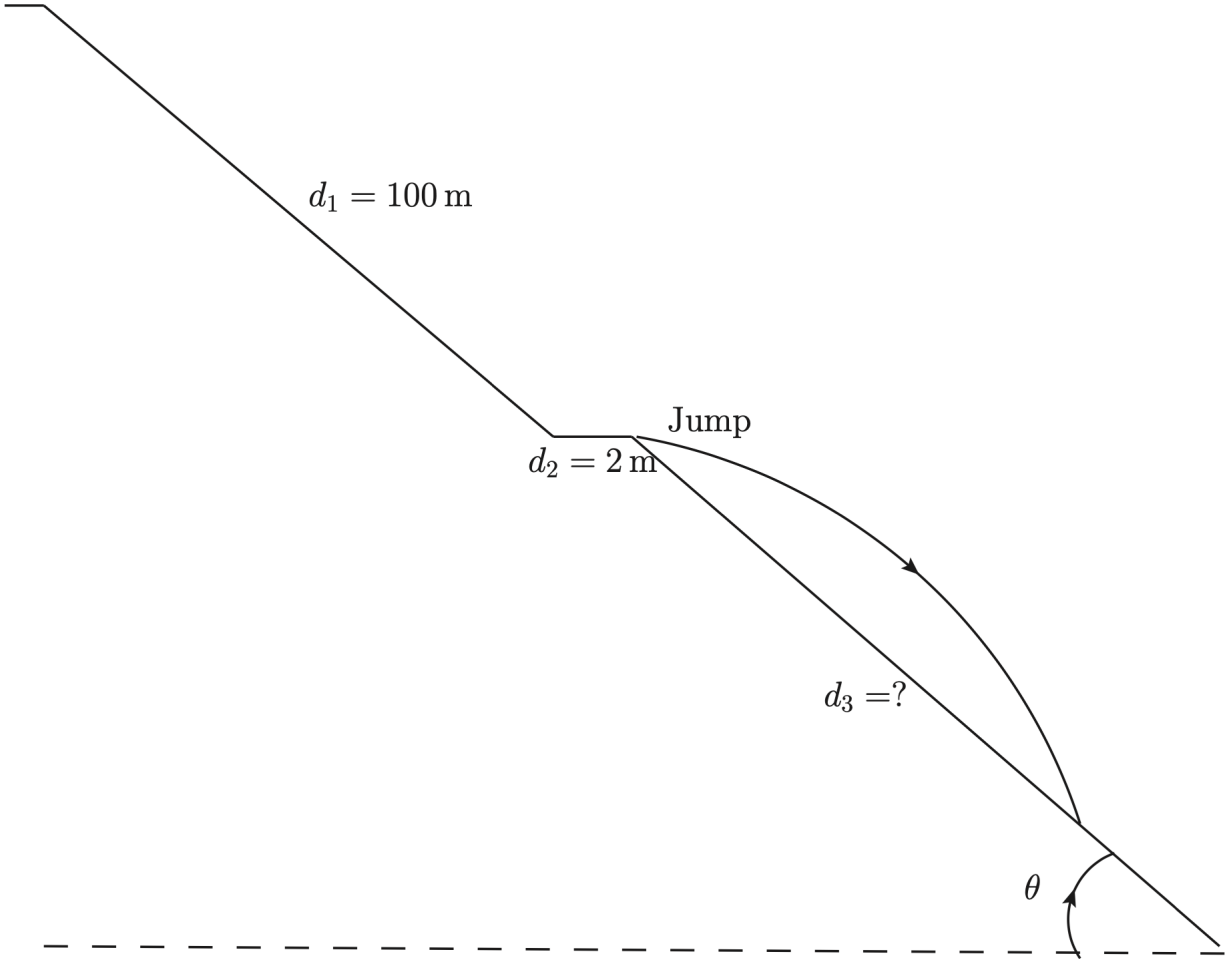


FIG. 1. 스키 점프대

하자. 스키를 포함하여 스키 선수의 무게는 700 N이다.

- (1) 스키가 점프하는 위치에서 스키 점프대를 떠날 때, 속력을 구하여라.
- (2) 스키 선수가 도착하는 지점인 d_3 를 구하여라.
- (3) d_3 지점에서 스키 선수의 속력을 구하여라.

^a Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00~20:00)

[†] hchkim@inha.ac.kr

[‡] hjlee6674@inha.edu

(4) 에너지 보존 법칙을 이용해서 구한 속력과 (1)에서 구한 결과와 비교하여라.

이제 비탈면의 눈과 스키 사이의 운동마찰계수를 $\mu_k = 0.1$ 이라고 하자.

(5) 표면과 스키 사이의 쓸림힘을 고려하여 스키가 점프하는 위치에서 스키 점프대를 떠날 때, 속력을 구하여라.

(6) 스키 선수가 도착하는 지점인 d_3 를 구하여라.

(7) 마찰력에 의해 잃는 에너지를 구하여라.

(8) 이 경우에 운동에너지 보존은 어떻게 되는가?

이제 스키 선수가 점프했을 때부터 공기저항 때문에 속도가 줄어든다고 하자. 이때 공기저항에 의한 힘을 $\vec{F}_d = 100\hat{i}$ N이라고 하고, 이 힘의 방향은 지면과 나란하고 방향은 스키 선수의 속도의 수평 성분과 반대 방향이라고 하자.

(9) 스키 선수가 도착하는 지점인 d_3 를 구하여라.

(10) d_3 지점에서 스키 선수의 속력을 구하여라.

풀이

(1) 스키 점프 선수가 움직이는 방향을 x 방향, 그에 수직인 방향을 y 방향이라고 하자. 스키 점프 선수가 받는 중력의 크기를 F_g 라 하면 x 방향의 운동 방정식은,

$$\sum F_x = ma_x, \quad F_g = mg = 700 \text{ N} \quad (1)$$

이다. 운동 방향으로 작용하는 힘은 중력의 운동 방향 성분 뿐이므로,

$$ma_x = F_g \sin \theta = mg \sin \theta. \quad (2)$$

따라서 a_x 는 다음과 같다.

$$a_x = \frac{F_g \sin \theta}{m} = g \sin \theta. \quad (3)$$

마찰이 없고 중력의 영향을 받으므로 d_1 지점을 지나는 동안 스키 점프 선수는 등가속도 운동을 한다. 따라서 d_1 지점을 통과하고 스키 점프대를 떠날 때 속력을 v_2 라고 하면 처음 속력 v_i 는 0 이고 움직인 거리는 d_1 이므로,

$$v_2^2 - v_i^2 = v_2^2 = 2a_x s, \quad v_2 = \sqrt{2a_x d_1} = \sqrt{2gd_1 \sin \theta}. \quad (4)$$

이다. 따라서 v_2 는,

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{2gd_1 \sin \theta} \\ &= \sqrt{2(9.8 \text{ m/s}^2)(100 \text{ m}) \sin 32^\circ} \\ &= 32 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (5)$$

(2) 스키 점프 선수가 스키 점프대를 떠날 때의 위치를 원점으로 잡고 그 때의 속력을 초기 속력이라고 하자. 각 방향으로의 초기 속력은 $v_{xi} = v_2 = 32 \text{ m/s}$, $v_{yi} = 0$ 이다. 스키 점프 선수의 착지 위치의 좌표를 x_f, y_f 라고 하면,

$$x_f = d_3 \cos \theta, \quad y_f = -d_3 \sin \theta, \quad \theta = 32^\circ. \quad (6)$$

y_f 가 음수인 이유는 점프하는 순간의 위치를 원점으로 잡았기 때문이다. x 방향으로의 등속 운동, y 방향으로의 중력에 의한 등가속도 운동을 하므로,

$$x_f = d_3 \cos \theta = v_{xi} t = v_2 t \quad (7)$$

$$y_f = -d_3 \sin \theta = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (8)$$

식 (7) 에 의해 t 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$t = \frac{d_3 \cos \theta}{v_2}. \quad (9)$$

이를 식 (8) 에 대입하면,

$$-d_3 \sin \theta = -\frac{1}{2}g \left(\frac{d_3 \cos \theta}{v_2} \right)^2, \quad d_3 = \frac{2v_2^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta}. \quad (10)$$

따라서 d_3 는 다음과 같다.

$$d_3 = \frac{2v_2^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta} = \frac{2(32 \text{ m/s})^2 \sin 32^\circ}{(9.8 \text{ m/s}^2) \cos^2 32^\circ} = 154 \text{ m}. \quad (11)$$

d_3 는 154 m 이고 식 (6) 에 의해 착지 위치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_f &= (154 \text{ m}) \cos 32^\circ = 131 \text{ m} \\ y_f &= -(154 \text{ m}) \sin 32^\circ = -82 \text{ m}. \end{aligned} \quad (12)$$

- (3) 스키 점프 선수는 지점 d_2 를 떠난 이후로 x 방향으로는 등속 직선 운동, y 방향으로는 등가속도 운동한다. 착지할 때 x 방향의 속력을 v_x , y 방향의 속력을 v_y 라고 하면,

$$\begin{aligned} v_x &= v_2 = 32 \text{ m/s} \\ v_y &= -gt. \end{aligned} \quad (13)$$

식 (9) 과 식 (11) 에 의해 v_y 는,

$$v_y = -\frac{gd_3 \cos \theta}{v_2} \quad (14)$$

이다. 따라서 착지할 때 속력 v 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_2^2 + \left(-\frac{gd_3 \cos \theta}{v_2} \right)^2} \\ &= \sqrt{(32 \text{ m/s})^2 + \left(-\frac{(9.8 \text{ m/s}^2)(154 \text{ m}) \cos 32^\circ}{32 \text{ m/s}} \right)^2} \\ &= 51 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (15)$$

- (4) 초기 역학적 에너지를 E_i , d_2 지점에서의 역학적 에너지를 E_2 라고 하자. E_i 는,

$$E_i = mgh = mg(d_1 + d_3) \sin \theta, \quad (16)$$

이고 d_2 지점에서의 속력을 v_2 라고 하면 E_2 는,

$$E_2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mgd_3 \sin \theta + \frac{1}{2}mv_2^2. \quad (17)$$

역학적 에너지는 보존되어야 하므로 $E_i = E_2$ 이다. 따라서,

$$mg(d_1 + d_3) \sin \theta = mgd_3 \sin \theta + \frac{1}{2}mv_2^2, \quad v_2 = \sqrt{2gd_1 \sin \theta}. \quad (18)$$

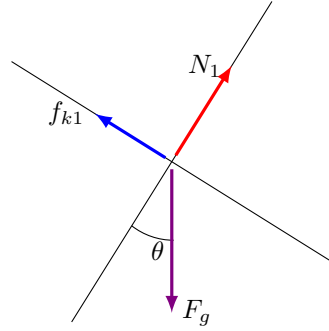
v_2 는 다음과 같다.

$$v_2 = \sqrt{2(9.8 \text{ m/s}^2)(100 \text{ m}) \sin 32^\circ} = 32 \text{ m/s}. \quad (19)$$

(1) 의 결과와 동일함을 확인할 수 있다.

(5) 마찰력이 작용하는 순간의 자유 물체 다이어그램을 그려보자. 각 구간에 작용하는 마찰력을 고려한다면 각 구

구간 d_1 :



구간 d_2 :

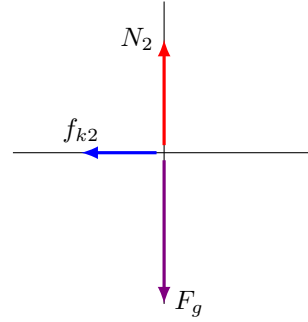


FIG. 2. 자유 물체 다이어그램

간에서 스키 점프 선수가 받는 알짜힘을 구할 수 있다. 구간 d_1 에서 작용하는 마찰력을 f_{k1} 이라 하고 구간 d_2 에 작용하는 마찰력을 f_{k2} 라 하면 각 구간에서 받는 알짜일 W_1 , W_2 는,

$$W = W_1 + W_2 = F_g d_1 \sin \theta - f_{k1} d_1 - f_{k2} d_2, \quad (20)$$

$f_{k1} = \mu_k N_1$, $f_{k2} = \mu_k N_2$ 이다. N_1 , N_2 은 각 구간에서 스키 점프 선수에게 작용하는 수직항력이다. 수직항력의 방향과 중력의 방향을 고려했을 때,

$$N_1 = F_g \cos \theta, \quad N_2 = F_g, \quad F_g = mg \quad (21)$$

이므로,

$$\begin{aligned} W &= F_g d_1 \sin \theta - \mu_k F_g d_1 \cos \theta - \mu_k F_g d_2 \\ &= mg (d_1 \sin \theta - \mu_k (d_1 \cos \theta + d_2)), \end{aligned} \quad (22)$$

이다. 중력이 해준 일은 운동 에너지의 변화량과 같으므로 스키 점프대를 떠날 때의 속력을 v_2 라 하면,

$$W = \frac{1}{2} m v_2^2 - 0 = mg (d_1 \sin \theta - \mu_k (d_1 \cos \theta + d_2)), \quad v_2 = \sqrt{2g (d_1 \sin \theta - \mu_k (d_1 \cos \theta + d_2))}. \quad (23)$$

따라서 스키 점프대를 떠날 때 속력은,

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{2g (d_1 \sin \theta - \mu_k (d_1 \cos \theta + d_2))} \\ &= \sqrt{2(9.8 \text{ m/s}^2) ((100 \text{ m}) \sin 32^\circ - (0.1)((100 \text{ m}) \cos 32^\circ + (2 \text{ m})))} \\ &= 29 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (24)$$

(6) 식 (11) 에 의해 구간 d_1 , d_2 에서 마찰력을 받은 경우 d_3 는

$$d_3 = \frac{2v_2^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta} = \frac{2(29 \text{ m/s})^2 \sin 32^\circ}{(9.8 \text{ m/s}^2) \cos^2 32^\circ} = 126 \text{ m}, \quad (25)$$

이고 식 (7), (8) 에 의해 착지 위치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_f &= d_3 \cos \theta = \frac{2v_2^2 \sin \theta}{g \cos \theta} = \frac{2(29 \text{ m/s})^2 \sin 32^\circ}{(9.8 \text{ m/s}^2) \cos 32^\circ} = 107 \text{ m} \\ y_f &= -d_3 \sin \theta = \frac{2v_2^2 \sin^2 \theta}{g \cos^2 \theta} = \frac{2(29 \text{ m/s})^2 \sin^2 32^\circ}{(9.8 \text{ m/s}^2) \cos^2 32^\circ} = -67 \text{ m}. \end{aligned} \quad (26)$$

(7) 스키 점프 선수는 두 구간 d_1 과 d_2 에서 마찰력을 받는다. 마찰력에 의해 잃는 힘을 W_f 라고 하면,

$$W_f = f_{k1}d_1 + f_{k2}d_2 = \mu_k(N_1d_1 + N_2d_2), \quad (27)$$

이고 식 (21) 에 의해,

$$\begin{aligned} W_f &= \mu_k mg(d_1 \cos \theta + d_2) \\ &= (0.1)(700 \text{ N})((100 \text{ m}) \cos 32^\circ + 2 \text{ m}) \\ &= 6076 \text{ J}. \end{aligned} \quad (28)$$

마찰에 의해 잃은 일은 6076 J 이다.

(8) 마찰에 의해 운동 에너지의 일부가 다른 형태의 에너지로 변형되었으므로 운동 에너지 보존은 지켜지지 않는다. 그 때 변형된 에너지의 양은 6076 J 이다.

(9) 공기저항이 작용한다 하면 스키 점프 선수가 공중에 머무를 때의 자유 물체 다이어그램은 다음과 같다. 오른쪽을

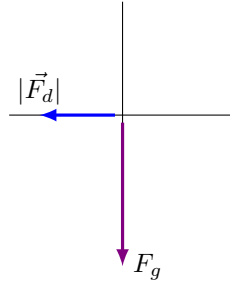


FIG. 3. 자유 물체 다이어그램

$+x$ 방향이라 하자. 운동 방정식을 세워보면 각 방향으로 스키 점프 선수가 받는 힘은,

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x = -|\vec{F}_d| = -100 \text{ N} \\ \sum F_y &= ma_y = F_g = mg \end{aligned} \quad (29)$$

이다. 각 방향으로 힘이 일정하게 작용하므로 스키 점프 선수는 x 방향과 y 방향으로 등가속도 운동한다. 스키 점프 선수가 점프대를 떠날 때 y 방향의 속력은 0 이므로 그때의 속력을 $v_{xi} = v_2$ 라고 하면 각 방향으로의 착지 위치 x_f, y_f 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x_f = d_3 \cos \theta = v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = v_2 t + \frac{1}{2}a_x t^2, \quad a_x = -\frac{|\vec{F}_d|}{m} \quad (30)$$

$$y_f = -d_3 \sin \theta = -\frac{1}{2}a_y t^2 = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (31)$$

식 (31) 으로 부터 t 는,

$$t = \sqrt{\frac{2d_3 \sin \theta}{g}}, \quad (32)$$

이고 이를 식 (30)에 대입하면,

$$d_3 \cos \theta = v_2 \sqrt{\frac{2d_3 \sin \theta}{g}} + \frac{a_x d_3 \sin \theta}{g} = v_2 \sqrt{\frac{2d_3 \sin \theta}{g}} - \frac{|\vec{F}_d| d_3 \sin \theta}{mg}. \quad (33)$$

이 식을 d_3 에 대해 정리해보자.

$$\left(1 + \frac{|\vec{F}_d| \sin \theta}{mg \cos \theta}\right) d_3 = v_2 \sqrt{\frac{2d_3 \sin \theta}{g \cos^2 \theta}}, \quad (34)$$

양변을 $\sqrt{d_3}$ 로 나누고 좌항에 d_3 만 남기면,

$$\sqrt{d_3} = \left(\frac{mg \cos \theta}{mg \cos \theta + |\vec{F}_d| \sin \theta} \right) \sqrt{\frac{2v_2^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta}}. \quad (35)$$

따라서 d_3 는,

$$d_3 = \left(\frac{mg \cos \theta}{mg \cos \theta + |\vec{F}_d| \sin \theta} \right)^2 \frac{2v_2^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta}, \quad (36)$$

이다. 최종적으로 d_3 을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d_3 &= \left(\frac{(700 \text{ N}) \cos 32^\circ}{(700 \text{ N}) \cos 32^\circ + (100 \text{ N}) \sin 32^\circ} \right)^2 \frac{2(29 \text{ m/s})^2 \sin 32^\circ}{(9.8 \text{ m/s}^2) \cos^2 32^\circ} \\ &= 107 \text{ m}. \end{aligned} \quad (37)$$

이 결과를 식 (30), (31) 에 대입하면,

$$\begin{aligned} x_f &= d_3 \cos \theta = (107 \text{ m}) \cos 32^\circ = 91 \text{ m} \\ y_f &= -d_3 \sin \theta = (107 \text{ m}) \sin 32^\circ = -57 \text{ m}, \end{aligned} \quad (38)$$

스키 점프 선수의 착지 위치를 구할 수 있다.

(10) 지점 d_3 에서의 각 방향에 대한 속력을 v_{xf} , v_{yf} 라 하면,

$$\begin{aligned} v_{xf} &= v_{xi} - a_x t = v_2 - \frac{|\vec{F}_d|}{m} t, \quad m = \frac{F_g}{g} \\ v_{yf} &= -gt \end{aligned} \quad (39)$$

식 (32) 을 대입하면 x 방향 속력은,

$$\begin{aligned} v_{xf} &= v_2 - \frac{|\vec{F}_d|g}{F_g} \sqrt{\frac{2d_3 \sin \theta}{g}} \\ &= (29 \text{ m/s}) - \frac{(100 \text{ N})(9.8 \text{ m/s}^2)}{(700 \text{ N})} \sqrt{\frac{2(107 \text{ m}) \sin 32^\circ}{(9.8 \text{ m/s}^2)}} \\ &= 24 \text{ m/s}, \end{aligned} \quad (40)$$

이고, y 방향 속력은,

$$\begin{aligned} v_{yf} &= -\sqrt{2d_3 g \sin \theta} \\ &= -\sqrt{2(107 \text{ m})(9.8 \text{ m/s}^2) \sin 32^\circ} \\ &= -33 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (41)$$

이다. 따라서 지점 d_3 에서의 속력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(24 \text{ m/s})^2 + (33 \text{ m/s})^2} \\ &= 41 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (42)$$