

2022년 2학기 물리학 II

김현철^{*1,†} and Hui-Jae Lee^{1,‡}

¹*Hadron Theory Group, Department of Physics,
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*
(Dated: Autumn Semester, 2022)

Quiz 11

문제 1 [20pt]. 최대전압이 220 V인 교류전원에 10.0 Ω 의 저항을 연결하였을 때, 저항에 흐르는 유효전류와 평균 소비전력을 구하여라.

풀이 : 교류전원의 최대 전압을 \mathcal{E}_0 라고 하면 저항에 걸리는 유효전압 \mathcal{E}_{rms} 와 저항에 흐르는 유효전류 I_{rms} 는 다음의 관계에 있다.

$$\mathcal{E}_{rms} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{E}_{rms} = I_{rms}R. \quad (1)$$

R 은 저항의 저항값이다. 또한 평균 소비전력 $\langle P \rangle$ 는

$$\langle P \rangle = I_{rms}^2 R \quad (2)$$

이다. 따라서 유효전류 I_{rms} 는

$$I_{rms} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}R} = \frac{220 \text{ V}}{\sqrt{2} \times 10.0 \Omega} = 15.6 \text{ A} \quad (3)$$

이고 평균 소비전력 $\langle P \rangle$ 는

$$\langle P \rangle = \frac{\mathcal{E}_0^2}{\sqrt{2}R} = \frac{(220 \text{ V})^2}{\sqrt{2} \times 10.0 \Omega} = 3420 \text{ W} \quad (4)$$

이다.

문제 2 [20pt]. 어떤 축전기의 양단에 진동수가 60.0 Hz이고 240.0 V의 최대 전압진폭을 가지는 전원이 연결되어 축전기에 1.20 A의 전류가 흐른다. 전기용량은 얼마인가?

풀이 : 전원의 진동수와 최대 전압을 ω , \mathcal{E}_0 , 축전기에 흐르는 전류를 I , 축전기의 전기용량을 C 라 하자. 전원에 의한 교류 전압 $\mathcal{E}(t)$ 는 시간에 대한 함수로 표현이 가능하다.

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t. \quad (5)$$

또한 축전기에 쌓이는 전하량을 $Q(t)$ 라 하면 전원에 의한 전압 $\mathcal{E}(t)$ 에 의해

$$\mathcal{E}(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (6)$$

이 성립한다. 따라서 $Q(t)$ 는

$$Q(t) = C\mathcal{E}(t) = C\mathcal{E}_0 \sin \omega t \quad (7)$$

* Office: 5S-436D (면담시간 매주 수요일-16:15~19:00)

[†]Electronic address: hchkim@inha.ac.kr

[‡]Electronic address: hjlee6674@inha.edu

이고 전류 $I(t)$ 는 전하 $Q(t)$ 의 시간 당 변화량이므로

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\omega\mathcal{E}_0 \cos \omega t = I_0 \cos \omega t \quad (8)$$

로 쓸 수 있다. I_0 는 최대 전류이다. 축전기에 흐르는 유효 전류 I_{rms} 의 크기가 1.20 A이므로

$$I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{C\omega\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

이고 따라서 전기용량 C 는

$$C = \frac{\sqrt{2}I_{rms}}{\omega\mathcal{E}_0} = \frac{\sqrt{2}(1.20 \text{ A})}{(60.0 \text{ Hz})(240.0 \text{ V})} = 1.18 \times 10^{-4} \text{ F} \quad (10)$$

이다.

문제 3 [50pt]. 그림 1과 같이 저항과 인덕터가 병렬로 연결되어 있고, 여기에 교류전압 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \cos \omega t$ 가 걸려 있다.

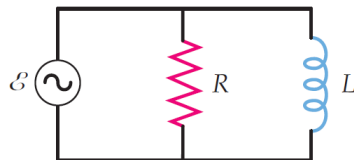


FIG. 1: 문제 3

- (가) 저항에 흐르는 전류가 $I_R = (\mathcal{E}_{\text{peak}}/R) \cos \omega t$ 와 같이 주어짐을 보여라. 여기서 $\mathcal{E}_{\text{peak}}$ 은 주기함수가 최대가 되는 지점에서 $\mathcal{E}(t)$ 값이다.
- (나) 인덕터에 흐르는 전류는 $I_L = (\mathcal{E}_{\text{peak}}/X_L) \cos(\omega t - 90^\circ)$ 임을 보여라.
- (다) 교류 전압의 기전력이 걸려 있는 데서 $I = I_R + I_L = I_{\text{peak}} \cos(\omega t - \delta)$ 의 전류가 흐름을 보여라. 여기서 $I_{\text{peak}} = (\mathcal{E}_{\text{peak}}/Z)$ 이다.

풀이 :

- (가) 저항과 코일이 병렬로 연결되어 있으므로 저항과 코일에 걸리는 전압은 교류전압 \mathcal{E} 와 같다. 따라서 저항에 흐르는 전류 I_R 은

$$I_R = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{R} \cos \omega t \quad (11)$$

이고 주기함수가 최대가 되는 지점에서 $\mathcal{E}(t)$ 는 \mathcal{E}_{\max} 이므로

$$I_R = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{R} \cos \omega t = \frac{\mathcal{E}_{\text{peak}}}{R} \cos \omega t \quad (12)$$

로 쓸 수 있다.

- (나) 인덕터에 흐르는 전류 I_L 을 구하기 위해 우선 인덕터에 걸리는 전압 \mathcal{E}_L 을 구하자. (가)에서 말한 바와 같이 \mathcal{E}_L 은 교류전압 \mathcal{E} 와 같으므로

$$\mathcal{E}_L = \mathcal{E}_{\max} \cos \omega t \quad (13)$$

인덕터 회로의 경우

$$\mathcal{E}_L - L \frac{dI_L}{dt} = 0 \quad (14)$$

이다. L 은 인덕턴스이다. 따라서 I_L 은

$$I_L = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{L} \int_0^t \cos \omega t' dt' = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\omega L} \sin \omega t \quad (15)$$

이고 $X_L = \omega L$, $\sin \omega t = \cos(\omega t - 90^\circ)$ 이므로

$$I_L = \frac{\mathcal{E}_{\text{peak}}}{X_L} \cos(\omega t - 90^\circ) \quad (16)$$

와 같다.

(다) 식 (12), (16)로부터 $I = I_R + I_L$ 은

$$I = I_R + I_L = \frac{\mathcal{E}_{\text{peak}}}{R} \cos \omega t + \frac{\mathcal{E}_{\text{peak}}}{X_L} \sin \omega t \quad (17)$$

인데 $A \cos x + B \sin x$ 꼴은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} A \cos x + B \sin x &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x \right) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \delta \cos x + \sin \delta \sin x) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x - \delta). \end{aligned} \quad (18)$$

$A = \mathcal{E}_{\text{peak}}/R$, $B = \mathcal{E}_{\text{peak}}/X_L$ 이고 $x = \omega t$ 라 하면

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}_{\text{peak}}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_{\text{peak}}}{X_L}\right)^2} \cos(\omega t - \delta) \\ &= \mathcal{E}_{\text{peak}} \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}} \cos(\omega t - \delta) \end{aligned} \quad (19)$$

으로 쓸 수 있다. 저항과 코일이 병렬로 연결되어 있으므로 임피던스 Z 는

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L}\right)^2} \quad (20)$$

로 정의되므로 전류 I 는

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{peak}}}{Z} \cos(\omega t - \delta) \quad (21)$$

와 같다.

문제 4 [50pt]. RLC 직렬회로에 교류전원을 연결하고 출력 전압은 R 과 L 을 연결한 조합의 양단에서 얻는다. 출력 전압과 입력전압의 비를 각진동수 ω 의 함수로 구하라. 매우 높은 진동수에서는 이 값이 1에 가까워 짐을 보여라.

풀이 : 입력전압을 \mathcal{E} , 저항, 코일, 축전기에 가해지는 전압을 \mathcal{E}_R , \mathcal{E}_L , \mathcal{E}_C 라고 하면

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_R - \mathcal{E}_L - \mathcal{E}_C = \mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \quad (22)$$

를 만족한다. R , L , C 는 각각 저항, 리액턴스, 전기용량이다. 입력전압을

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (23)$$

라고 가정하자. 저항, 코일, 축전기가 모두 연결되어 있으므로 회로에 흐르는 전류 $I(t)$ 에 ϕ 만큼의 위상차가 존재한다고 하면

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \cos(\omega t - \phi), \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (24)$$

로 쓸 수 있다. Z 는 회로의 임피던스이다. 저항에서 전압강하의 위상은 $I(t)$ 와 같으므로

$$\mathcal{E}_R = IR = \frac{\mathcal{E}_0 R}{Z} \cos(\omega t - \phi) \quad (25)$$

이고 코일에서 전압강하의 위상은 $\pi/2$ 만큼 빠르다. 반면에 축전기에서의 위상은 $\pi/2$ 만큼 느리므로 식 (22)로 부터 \mathcal{E}_L , \mathcal{E}_C 는

$$\mathcal{E}_L = \frac{\mathcal{E}_0 \omega L}{Z} \sin(\omega t - \phi), \quad \mathcal{E}_C = -\frac{\mathcal{E}_0}{Z \omega C} \sin(\omega t - \phi) \quad (26)$$

와 같다. 출력전압 \mathcal{E}_{out} 은 저항과 코일을 연결한 조합의 양단에서 얻으므로

$$\mathcal{E}_{out} = \mathcal{E}_R + \mathcal{E}_L = \mathcal{E} - \mathcal{E}_C \quad (27)$$

이다. 따라서 입력전압 \mathcal{E} 와 출력전압 \mathcal{E}_{out} 의 비는

$$\frac{\mathcal{E}_{out}}{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_C}{\mathcal{E}} = 1 + \frac{\sin(\omega t - \phi)}{Z \omega C \cos \omega t} \quad (28)$$

로 표현할 수 있다. 이제 ω 가 매우 크다고 가정하자. 식 (28)의 마지막 항은

$$\frac{\sin(\omega t - \phi)}{Z \omega C \cos \omega t} = \frac{1}{C} \frac{\sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{\omega^2 R^2 + (\omega^2 L - \frac{1}{C})^2} \cos \omega t} \quad (29)$$

로 쓸 수 있는데 ω 가 매우 크므로

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 + (\omega^2 L - \frac{1}{C})^2}} \rightarrow 0 \quad (30)$$

이고 위상차 ϕ 는

$$\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \rightarrow \infty \quad (31)$$

ω 가 커짐에 따라 같이 커진다. 따라서 $\phi = \pi/2$ 로 볼 수 있고

$$\frac{\sin(\omega t - \phi)}{\cos \omega t} = 1 \quad (32)$$

이 된다. 최종적으로 ω 가 매우 클 때 입력전압과 출력전압의 비는

$$\frac{\mathcal{E}_{out}}{\mathcal{E}} = 1 + \frac{1}{C} \frac{1}{Z} \frac{\sin(\omega t - \phi)}{\cos \omega t} = 1 \quad (33)$$

1이 된다는 사실을 확인할 수 있다.