2022년 2학기 물리학 II

김현철*[1,†] and HuiJae-Lee[1,‡]
[1] *Hadron Theory Group, Department of Physics, Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*
(Dated: Autumn Semester, 2022)

Due date: 2022년 9월 26일 15:30-16:15

Quiz 8

문제 1 [20pt]. 반지름이 R인 원형고리에 전류 I가 흐르고 있다. 고리 중심에서의 자기장의 크기를 구하여라.

풀이 : 비오-사바르 법칙을 이용해 원형 고리 전류에 의한 자기장을 구해보자. 전류가 흐르는 지점으로부터 r만큼 떨어진 곳에 생성되는 자기장 $\vec{B}$는

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,d\vec{l}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \tag{1}$$

이다. I은 전류, $d\vec{l}$는 도선을 따르는 미소길이이고 $\hat{\boldsymbol{r}}$는 방향 벡터이다.

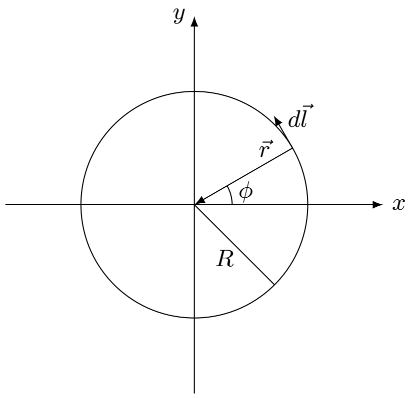

FIG. 1: xy평면에 놓여있는 원형도선

이제 반지름이 R이고 전류 I가 흐르는 원형 도선을 생각하자. $\vec{r}$은 도선 위의 한 점에서 도선의 중심으로 향하는 벡터이고 ϕ는 $\vec{r}$과 x축이 이루는 각도이다. 여기서 전류는 시계 반대 방향으로 흐른다. 이 경우 벡터 $\vec{r}$과 $d\vec{l}$로 부터 $d\vec{l}\times\hat{\boldsymbol{r}}$을 다음과 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\vec{r} = -R\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - R\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}},\quad d\vec{l} = Rd\phi(-\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \\
&\Longrightarrow d\vec{l}\times\hat{\boldsymbol{r}} = Rd\phi(-\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \times (-\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) = Rd\phi(\cos^2\phi + \sin^2\phi)\,\hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned} \tag{2}$$

따라서 미소 벡터 $d\vec{l}\times\hat{\boldsymbol{r}}$는

$$d\vec{l}\times\hat{\boldsymbol{r}} = Rd\phi\,\hat{\boldsymbol{k}} \tag{3}$$

---

* Office: 5S-436D (면담시간 매주 수요일-16:15∼19:00)
† Electronic address: hchkim@inha.ac.kr
‡ Electronic address: hjlee6674@inha.edu

이고 도선이 완전한 원형이므로 식 (1)의 적분구간은 $0 < \phi < 2\pi$임에 유의하여 자기장 $\vec{B}$를 구할 수 있다.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int_0^{2\pi} R\,\hat{\boldsymbol{k}}\,d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}(2\pi R)\,\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0 I}{2R}\,\hat{\boldsymbol{k}}. \tag{4}$$

원형 도선에 의해 도선 중심에서 생성되는 자기장 $\vec{B}$는 크기 $\frac{\mu_0 I}{2R}$를 가지고 z축 방향을 향한다.

문제 2 [20pt]. 반지름이 a인 원통형 금속막대가 있고 그 바깥에 (같은 축을 가지며) 안쪽 반지름이 b이고 바깥쪽 반지름이 c인 원형 금속관이 있다. 가운데 있는 금속막대와 바깥의 관에 크기가 같고 방향이 반대인 전류가 흐르고 있다면

(가) 축으로부터의 거리 r이 a보다 작은 경우,

(나) $a < r < b$인 경우,

(다) $r > c$인 경우의 자기장을 각각 구하여라.

풀이 : 앙페르 법칙을 이용해 각 경우의 자기장을 구해보자. 앙페르 법칙은 폐곡선을 따라 생성되는 자기장은 폐곡선 내부의 전류에 비례한다는 법칙으로

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I \tag{5}$$

로 쓸 수 있다.

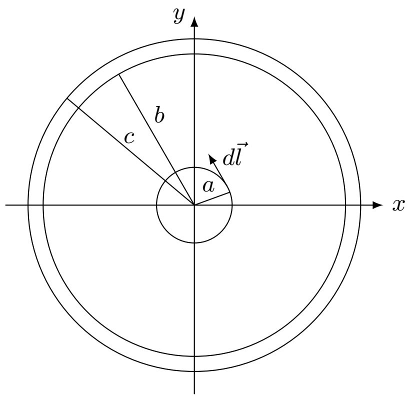

FIG. 2: 반지름이 a인 금속막대와 안쪽 반지름 b, 바깥쪽 반지름이 c인 원형 금속관의 단면

(가) 축으로부터의 거리 r이 a보다 작은 경우, 반지름이 r인 원형 폐곡선을 따라 생성되는 자기장을 구하자. 폐곡선 내부의 면적 A_{in}에 흐르는 전류 I_{in}은 반지름이 a인 금속막대에 흐르는 전류 I와 다음의 관계가 있다.

$$I_{in} = \frac{A_{in}}{A}I = \frac{\pi r^2}{\pi a^2}I = \frac{r^2}{a^2}I. \tag{6}$$

식 (5)에 의하면

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in} = \mu_0 \frac{r^2}{a^2}I \tag{7}$$

이다. 자기장 $\vec{B}$는 직선 도선이 만드는 자기장이므로 $\vec{B}$의 방향은 $d\vec{l}$과 평행하다. 따라서

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{l} = \left|\vec{B}\right| 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{a^2}I \Longrightarrow \left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2} \tag{8}$$

를 얻는다. 자기장의 방향은 $d\vec{l}$와 일치하고 $d\vec{l}$는 각벡터 방향을 향하므로 자기장 $\vec{B}$는

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{9}$$

이다.

(나) $a < r < b$인 경우, 폐곡선이 반지름이 a인 금속막대의 단면을 모두 포함하므로 식 (5)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{l} = \left|\vec{B}\right| 2\pi r = \mu_0 I \Longrightarrow \left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{10}$$

이 경우 역시 자기장의 방향은 $d\vec{l}$와 일치하므로

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{11}$$

를 얻는다.

(다) 이 경우, 자기장에 중첩의 원리가 적용된다는 사실을 이용하자. 반지름이 c인 단면과 a인 단면에 같은 방향으로 전류가 흐르고 반지름이 b인 단면에 반대 방향으로 전류가 흐른다 하여 문제를 풀자. 먼저, 반지름이 c인 단면에 흐르는 총 전류는 원형 금속관일 때 전류가 I만큼 흐른다는 사실로부터 전류밀도를 구하고 면적을 곱해 구할 것이다. 반지름이 c인 단면에 흐르는 면적 당 전류밀도 J_c는

$$J_c = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \tag{12}$$

이고 이 단면에 흐르는 총 전류 I_c는

$$I_c = \pi c^2 J_c = \frac{c^2}{c^2 - b^2} I \tag{13}$$

임을 알 수 있다. 반지름이 b인 단면에 반대 방향으로 흐르는 전류의 전류밀도 J_b는 반지름이 c인 단면과 겹치는 부분을 상쇄해야 하므로 반지름이 c인 단면의 전류밀도 J_c와 같다.

$$J_b = J_c. \tag{14}$$

따라서, 반지름이 b인 단면에 흐르는 전류 I_b는

$$I_b = \pi b^2 J_b = \frac{b^2}{c^2 - b^2} I \tag{15}$$

이다. 우리가 구한 두 전류 I_b, I_c는 각각 반지름이 b, c인 원통형 금속막대에 흐르는 전류이므로 식 (11)을 이용해 각 전류에 의해 생성되는 자기장 $\vec{B_b}$, $\vec{B_c}$를 구할 수 있다.

$$\vec{B_b} = -\frac{\mu_0 I_b}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\frac{\mu_0 b^2 I}{2\pi r(c^2 - b^2)}\hat{\boldsymbol{\phi}}, \tag{16}$$

$$\vec{B_c} = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\mu_0 c^2 I}{2\pi r(c^2 - b^2)}\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{17}$$

$\vec{B_b}$는 전류의 방향이 반대이므로 $-$부호가 붙는다. 반지름이 a인 단면에 의해 생성되는 자기장 $\vec{B_a}$는 식 (11)이고 총 자기장 $\vec{B}$는 이들을 모두 합한 값이다.

$$\begin{aligned}\vec{B} = \vec{B_a} + \vec{B_b} + \vec{B_c} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left[1 - \frac{b^2}{c^2 - b^2} + \frac{c^2}{c^2 - b^2}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi r}\hat{\boldsymbol{\phi}}.\end{aligned} \tag{18}$$

$r > c$인 경우에 생성되는 자기장은 각벡터 방향이고 크기는 $\frac{\mu_0 I}{\pi r}$이다.

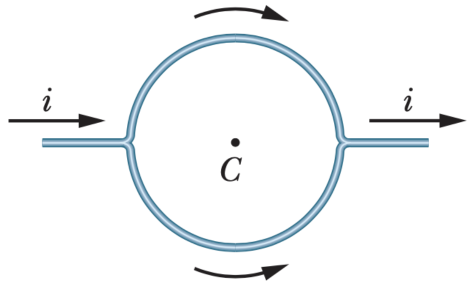

FIG. 3: **문제 3**

문제 3 [30pt]. 그림 3처럼 생긴 도선에 전류 i가 흐른다. 이 전류는 모양이 똑같이 생긴 두 개의 반원형의 도선으로 나뉜 뒤, 다시 합친다. 이 원형 모양의 도선 중심C에서 자기장을 구하여라.

풀이 : 도선을 두 부분으로 나누어 각각에 의한 자기장을 생각해보자. 먼저 도선 중심 C를 기준으로 왼쪽과 오른쪽에 존재하는 도선에 의한 자기장은 도선의 미소길이 방향 $d\vec{l}$과 미소 도선부터 C까지의 단위벡터 $\hat{\boldsymbol{r}}$이 평행하므로

$$d\vec{l} \parallel \hat{\boldsymbol{r}} \Longrightarrow d\vec{l} \times \hat{\boldsymbol{r}} = 0 \tag{19}$$

이고 비오-사바르 법칙에 의해 자기장도 0이다. 이제 원형 도선에 의한 자기장만 따져주면 되는데 윗 도선과 아랫 도선의 전류 방향이 각각 시계 방향, 시계 반대 방향으로 반대이다. 즉, $d\vec{l}$이 반대이다. 윗 도선의 미소길이 방향을 $d\vec{l}_u$, 아랫 도선의 미소길이 방향을 $d\vec{l}_d$라 하면

$$\begin{aligned} d\vec{l}_u &= -Rd\phi(-\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{i}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{j}}), \\ d\vec{l}_d &= Rd\phi(-\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{i}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{j}}) \end{aligned} \tag{20}$$

이다. R은 두 도선으로 이루어진 원형 도선의 반지름이다. 따라서 두 도선에 의한 자기장은 서로 크기는 같고 방향만 반대가 된다. 중첩의 원리에 의해 총 자기장은 두 자기장을 더한 것이므로 서로 상쇄되고 총 자기장은 $\vec{0}$이다.

문제 4 [50pt]. 그림 4은 반지름이 $a = 4.00$ cm인 긴 원통형 도체에 반지름이 $b = 1.50$ cm의 긴 원통형 구멍이 도체의 축과 평행되게 나 있는 걸 보여주는 단면이다. 이 구멍의 중심은 원형 도체의 중심에서부터 $d = 2.00$ cm 떨어져 있다. 이 원통형 도체에는 전류 $i = 5.25$ A가 균일하게 흐르고 있다고 하자.

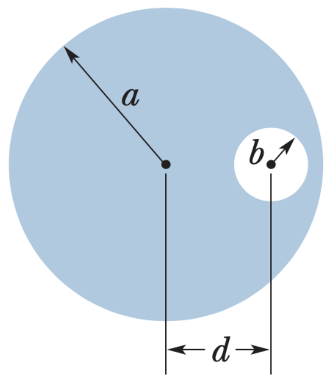

FIG. 4: **문제 4**

(가) 이 구멍의 중심에서 자기장은 얼마인가?

(나) $b = 0$일 때와 $d = 0$일 때의 결과를 구하고 논하여라.

풀이 :

(가) 중첩의 원리를 이용하기 위해 구멍이 뚫리지 않은 반지름이 a인 도선에 의한 자기장 $\vec{B}_a$와 반지름이 b인 도선에 의한 자기장 $\vec{B}_b$를 구하자. 도선에 구멍이 뚫린 상황은 구멍이 뚫리지 않은 도선에 전류가 흐를 때 구멍이 존재해야 하는 영역에 반대 방향으로 전류가 흐르는 상황과 같다. 따라서 자기장 $\vec{B}_a$와 $\vec{B}_b$는 서로 반대 방향으로 흐르는 전류에 의해 생성되는 자기장이다. 먼저 반지름이 a인 도선에 흐르는 전류밀도 J_a는

$$J_a = \frac{i}{\pi(a^2 - b^2)} \tag{21}$$

이고 반지름이 b인 도선에 흐르는 전류밀도 J_b는

$$J_b = J_a = \frac{i}{\pi(a^2 - b^2)} \tag{22}$$

이다. 구멍의 중심에 작용하는 자기장 $\vec{B}_a$는 식 (9)로부터 구할 수 있다. 도선의 중심으로부터 자기장을 구하고자 하는 지점 사이의 거리 r이 $r = d$이므로 자기장 $\vec{B}_a$는 다음과 같다.

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2}\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\mu_0 d}{2\pi a^2}\frac{a^2 i}{a^2 - b^2}\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\mu_0 d i}{2\pi(a^2 - b^2)}\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{23}$$

한편, 구멍의 중심에 작용하는 자기장 $\vec{B}_b$ 또한 식 (9)로 구할 수 있는데 중심으로부터의 거리 r이 $r = 0$이므로 자기장 또한 $\vec{0}$이다. 즉,

$$\vec{B}_b = \vec{0} \tag{24}$$

를 얻는다. 그러므로 구멍의 중심에서의 자기장 $\vec{B}$는 계산하면

$$\begin{aligned}
\vec{B} = \vec{B}_a + \vec{B}_b &= \frac{\mu_0 d i}{2\pi(a^2 - b^2)}\hat{\boldsymbol{\phi}} && (25)\\
&= \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})(2.00 \times 10^{-2}\ \mathrm{m})(5.25\ \mathrm{A})}{2\pi((4.00 \times 10^{-2}\ \mathrm{m})^2 - (1.50 \times 10^{-2}\ \mathrm{m})^2)}\hat{\boldsymbol{\phi}} && (26)\\
&= (1.53 \times 10^{-5}\hat{\boldsymbol{\phi}})\ \mathrm{T} && (27)
\end{aligned}$$

를 얻는다.

(나) 먼저 $b = 0$인 경우부터 살펴보자. $b = 0$이면 구멍의 지름이 0이 되고 도선은 구멍이 없는 단면을 가진다. 식 (25)에 $b = 0$을 대입하면

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 d i}{2\pi a^2}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{28}$$

가 되고 이는 구멍이 없는 도선의 자기장에 대한 식 (9)와 일치한다. 이제 $d = 0$인 경우를 살펴보자. 이는 반지름이 b인 구멍이 도선의 중심으로 옮겨간 경우와 같다. 이 또한 식 (25)에 $d = 0$을 대입하여 알 수 있는데 $d = 0$이면

$$\vec{B} = \vec{0} \tag{29}$$

으로 자기장이 작용하지 않는다는 사실을 알 수 있다.