2022년 1학기 물리학 I: Quiz 16

김현철[a1,†] and Lee Hui-Jae[1,‡]

[1] *Hadron Theory Group, Department of Physics, Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*

(Dated: Spring semester, 2022)

문제 1. (40 pt) 높이가 5 m인 큰 수족관에 2.00 m의 깊이로 민물이 채워져 있다. 폭이 8.00 m인 수족관의 한쪽 벽은 두꺼운 플라스틱으로 만들어져 있다. 물을 더 채워 수심이 4.00 m가 되었다면, 벽에 가해지는 전체 힘은 얼마나 증가하겠는가?

풀이 : 벽이 받는 전체 힘을 F, 민물에 의한 압력을 P, 민물과 벽이 닿는 면적을 A라 하자. F는

$$F = \int P\,dA, \;\; P = \rho g h + P_0 \tag{1}$$

이다. h는 민물의 깊이이고 P_0는 대기압이다. 대기압은 벽에 가해지는 전체 힘의 증가에 영향을 주지 않으므로 무시할 수 있다. 폭을 a라 하면 미소면적 dA는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$dA = a\,dh \tag{2}$$

처음 높이를 h_1라 하면 처음 힘 F_1은

$$F_1 = \int_0^{h_1} a\rho g h\,dh = \frac{1}{2} a\rho g h_1^2 \tag{3}$$

이다. 같은 방법으로 나중 높이 h_2라 하면 나중 힘 F_2은

$$F_2 = \int_0^{h_2} a\rho g h\,dh = \frac{1}{2} a\rho g h_2^2 \tag{4}$$

이다. 수심이 바뀌었을 때 힘의 변화량을 ΔF은 다음과 같이 구할 수 있다,

$$\Delta F = F_2 - F_1 = \frac{1}{2} a\rho g \left(h_2^2 - h_1^2\right). \tag{5}$$

수치를 넣어 계산하면,

$$\begin{aligned}\Delta F &= \frac{1}{2}(8.00\,\mathrm{m})(998\,\mathrm{kg/m^3})(9.80\,\mathrm{m/s^2})\left((4.00\,\mathrm{m})^2 - (2.00\,\mathrm{m})^2\right) \\ &= 4.69 \times 10^5\,\mathrm{N}\end{aligned} \tag{6}$$

이다. 벽에 가해지는 전체 힘은 $4.69 \times 10^5\,\mathrm{N}$만큼 증가한다.

문제 2. (100 pt) **난이도 상:** 그림 1에서처럼 폭이 $W = 314$ m인 댐의 상류 쪽에 깊이 $S = 35.0$ m만큼 물이 차 있다.

(가) 물의 계기압력(gauge pressure of the water)으로부터 댐에 가해지는 알짜힘을 구하라.

(나) 그 힘에 의해 생기는 알짜 돌림힘을 점 O를 지나고 댐의 폭에 형행인 축에 대해 구하여라.

(다) 돌림힘의 모멘트팔을 구하여라.

풀이 :

[a] Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00∼20:00)

† hchkim@inha.ac.kr

‡ hjlee6674@inha.edu

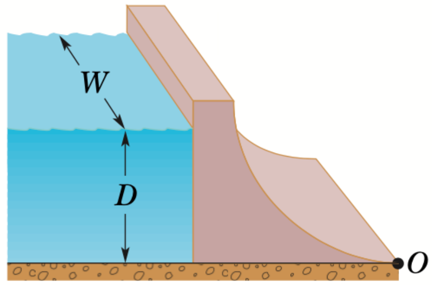


FIG. 1. 문제 2

(가) 깊이 h에서 물의 계기압력 P_{gauge}는

$$P_{\text{gauge}} = \rho g h \tag{7}$$

이다. 물과 댐이 닿는 면적을 A, 계기압력에 의해 댐에 가해지는 힘을 F_{gauge}라 하면 F_{gauge}는

$$F_{\text{gauge}} = \int P_{\text{gauge}}\, dA \tag{8}$$

이다. 폭을 W라 하면 미소면적 dA는

$$A = Wh, \quad dA = W dh \tag{9}$$

이고 힘 F_{gauge}는

$$F_{\text{gauge}} = \int_0^S P_{\text{gauge}}\, dA = \int_0^S \rho g W h\, dh = \frac{1}{2}\rho g W S^2 \tag{10}$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned} F_{\text{gauge}} &= \frac{1}{2}(998\,\mathrm{kg/m^3})(9.80\,\mathrm{m/s^2})(314\,\mathrm{m})(35.0\,\mathrm{m})^2 \\ &= 1.88 \times 10^9\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{11}$$

을 얻는다. 계기압력으로부터 댐에 가해지는 알짜힘은 $1.88 \times 10^9\,\mathrm{N}$이다.

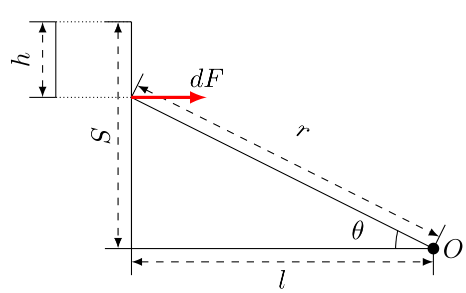
(나) 물에 닿는 면적에 대해 힘이 연속적으로 작용하므로 각 높이에 작용하는 미소힘에 의한 미소돌림힘 $d\tau$를 찾으면

$$d\tau = r\sin\theta dF, \quad dF = \rho g W h\, dh \tag{12}$$

이고 $r\sin\theta = S - h$ 이므로

$$d\tau = r\sin\theta dF = \rho g W(S-h)h\, dh \tag{13}$$

이다.



따라서 총 돌림힘은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\tau &= \int_0^S \rho g W(S-h)h\,dh = \rho g W\left(\frac{1}{2}S^3 - \frac{1}{3}S^3\right) = \frac{1}{6}\rho g W S^3 \\ &= \frac{1}{6}(998\,\mathrm{kg/m^3})(9.80\,\mathrm{m/s^2})(314\,\mathrm{m})(35.0\,\mathrm{m})^3 \\ &= 2.19\times 10^{10}\,\mathrm{N\cdot m}.\end{aligned} \tag{14}$$

총 돌림힘은 $2.19\times 10^{10}\,\mathrm{N\cdot m}$이다.

(다) 모멘트팔의 길이를 l이라고 하면,

$$\tau = lF_{gauge},\quad l = \frac{\tau}{F_{gauge}} \tag{15}$$

이다. 식 (10), (14)로부터 l은

$$l = \frac{S}{3} = \frac{35.0\,\mathrm{m}}{3} = 11.7\,\mathrm{m} \tag{16}$$

이다. 즉, 돌림힘의 모멘트팔은 $11.7\,\mathrm{m}$이다.

문제 3. (60pt) 그림 2처럼 용수철 상수가 3.00×10^4 N/m인 용수철이 단단한 들보와 유압지렛대의 출력 피스톤 사이에 연결되어 있다. 질량을 무시할 수 있는 빈 통이 입력 피스톤 위에 놓여 있다. 입력 피스톤의 단면적은 A_i이고

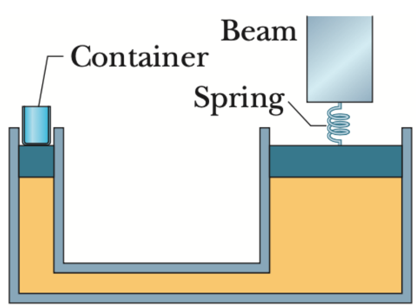


FIG. 2. 문제 3

출력 피스톤의 단면적은 $18.0A_i$이다. 처음에 용수철은 늘어나지 않은 길이이다. 천천히 빈 통에 모래를 부어서 몇 kg을 넣어야 용수철이 5.00 cm만큼 수축하겠는가?

풀이 : 모래를 m만큼 넣었을 때 입력 피스톤에 작용하는 압력 P_{in}은

$$P_{in} = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A_i} \tag{17}$$

이다. 유체가 출력 피스톤에 작용하는 압력 P_{out}에 대해 생각해보자. 출력 피스톤이 올라가 스프링을 압축시키면 스프링은 출력 피스톤에 복원력 F_{out}을 가한다. 출력 피스톤이 스프링을 압축시키는 힘과 스프링의 복원력이 평형을 이룰 때 출력 피스톤과 스프링은 정지한다. 이 때 P_{out}과 F_{out}는 다음 관계에 있다.

$$P_{out} = \frac{F_{out}}{18A_i} \tag{18}$$

또한 스프링에 의한 복원력 F_{out}은

$$F_{out} = kx = kh_2, \tag{19}$$

이고 압력 P_{out}은

$$P_{out} = \frac{kh_2}{18A_i} \tag{20}$$

이다. 압력은 유체의 어디에서나 같으므로 $P_{in} = P_{out}$이다. 따라서,

$$\frac{mg}{A_i} = \frac{kh_2}{18A_i}, \;\; m = \frac{kh_2}{18g} \tag{21}$$

우리가 구하고자 하는 것은 $h_2 = 5.00\,\mathrm{cm}$일 때 모래의 질량 m이므로

$$m = \frac{(3.00 \times 10^4\,\mathrm{N/m})(5.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})}{18(9.80\,\mathrm{m/s^2})} = 8.50\,\mathrm{kg} \tag{22}$$

를 얻을 수 있다.

문제 4. (40pt) 속이 비어있는 쇠공이 물에 거의 잠긴 채 떠 있다. 바깥 반지름이 60.0 cm이고, 쇠의 밀도가 $7.87\,\mathrm{g/cm^3}$일 때 안쪽 반지름을 구하여라.

풀이 : 쇠공은 자신이 물속에서 차지한 부피를 가진 물의 무게를 부력으로 받는다. 쇠공이고 물에 거의 잠겨있으므로 바깥쪽 반지름을 b라고 하면 부력 F_b는

$$F_b = V\rho_0 g = \frac{4}{3}\pi b^3 \rho_0 g \tag{23}$$

이다. ρ_0는 물의 밀도이다. 쇠공의 안쪽 반지름을 a, 쇠의 밀도를 ρ라 하면 쇠공이 받는 중력 F_g는 다음과 같다.

$$F_g = mg = \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)\rho g. \tag{24}$$

쇠공이 정지해있는 이유는 쇠공의 위로 작용하는 부력 F_b와 아래로 작용하는 중력 F_g가 같아 평형을 이루기 때문이다. 즉, $F_b = F_g$이고

$$\frac{4}{3}\pi b^3 \rho_0 g = \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)\rho g \tag{25}$$

이다. 안쪽 반지름을 구하기 위해 a에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$a^3 = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) b^3, \;\; a = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} b \tag{26}$$

수치를 대입해서 안쪽 반지름을 구해보자.

$$a = \left(1 - \frac{0.998\,\mathrm{g/cm^3}}{7.87\,\mathrm{g/cm^3}}\right)^{\frac{1}{3}} (60.0\,\mathrm{cm}) = 57.3\,\mathrm{cm}. \tag{27}$$

안쪽 반지름은 $57.3\,\mathrm{cm}$이다.