

2022년 1학기 물리학 I: Quiz 11

김현철^{a,†} and Lee Hui-Jae^{1,‡}

¹*Hadron Theory Group, Department of Physics,
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*

(Dated: Spring semester, 2022)

문제 1. (40 pt) (복습문제) 그림 1처럼 질량이 $m = 0.140$ kg, 높이 $H = 12$ cm인 금속 깡통은 균일한 물질로 되어 있다. 깡통 안에는 질량이 0.210 kg인 콜라가 채워져 있다. 이 깡통의 위쪽과 아래쪽에 작은 구멍을 뚫으면 콜라가

FIG. 1. 문제 1

빠진다. 구멍 때문에 손실된 금속의 질량은 무시할 만하다고 하자.

(가) 처음과

(나) 콜라가 모두 빠진 다음에 깡통과 콜라의 질량 중심의 높이 h 는 각각 얼마인가?

(다) 콜라가 빠지면서 h 는 어떻게 변화하는가?

(라) x 를 남아있는 콜라의 높이라고 하면, 질량중심이 가장 낮은 점에 있을 때의 x 값을 구하여라.

풀이 :

(가) 깡통 바닥의 중심을 원점으로 하자. A 를 깡통 옆면의 넓이라고 하면 깡통 옆면의 질량 중심의 높이는,

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \int z dM = \frac{1}{A} \int z dA, \quad A = 2\pi R z, \quad (1)$$

를 통해 계산할 수 있다. R 은 깡통 바닥의 반지름이다. V 를 콜라의 부피라고 하면 콜라의 질량 중심의 높이는,

$$z_{cm} = \frac{1}{m} \int z dm = \frac{1}{V} \int z dV, \quad V = \pi R^2 z, \quad (2)$$

를 통해 계산할 수 있다. 따라서 M 을 깡통의 질량, m 을 콜라의 질량이라 하면 전체 질량 중심의 높이 h 는,

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{M+m} \left(\frac{M}{A} \int z dA + \frac{m}{V} \int z dV \right) \\ &= \frac{1}{M+m} \left(\frac{M}{2\pi R H} \int_0^H 2\pi R z dz + \frac{m}{\pi R^2 H} \int_0^H \pi R^2 z dz \right) \\ &= \frac{1}{M+m} \left(\frac{M}{H} \int_0^H z dz + \frac{m}{H} \int_0^H z dz \right) \\ &= \frac{1}{M+m} \left(\frac{M}{H} \frac{1}{2} H^2 + \frac{m}{H} \frac{1}{2} H^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} H, \end{aligned} \quad (3)$$

이다. $H = 12$ cm이므로 전체 질량 중심의 높이는 6 cm 이다.

^a Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00~20:00)

[†] hchkim@inha.ac.kr

[‡] hjlee6674@inha.adu

(나) 콜라가 모두 빠져 나갔으므로 h 는,

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{V} \int z dV = \frac{1}{2\pi RH} \int_0^H 2\pi R z dz \\ &= \frac{1}{H} \int_0^H z dz \\ &= \frac{1}{2}H, \end{aligned} \quad (4)$$

이다. 따라서 콜라가 모두 빠져나가도 전체 질량 중심의 높이는 6 cm 이다.

(다) 콜라가 빠져나갈 때 콜라의 높이를 x 라고 하자. 콜라의 높이는 더 이상 H 가 아니고 깡통 안에 남은 콜라의 질량 m 도 상수가 아니다. 콜라가 가득 차 있을 때의 질량을 m_0 , 콜라의 밀도를 ρ 라고 하면,

$$\rho = \frac{m_0}{\pi R^2 H} \quad (5)$$

이고 깡통 안에 남은 콜라의 질량 m 은,

$$m = \rho \pi R^2 x = \frac{m_0 x}{H} \quad (6)$$

이다. 전체 질량 중심의 높이 h 는,

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{M+m} \left(\frac{M}{A} \int z dA + \frac{M}{V} \int z dV \right) \\ &= \frac{1}{M+m} \left(\frac{M}{2\pi RH} \int_0^H 2\pi R z dz + \frac{m}{\pi R^2 x} \int_0^x \pi R^2 z dz \right) \\ &= \frac{1}{M+m} \left(\frac{M}{H} \int_0^H z dz + \frac{m}{x} \int_0^x z dz \right) \\ &= \frac{1}{M+m} \left(\frac{MH}{2} + \frac{mx}{2} \right) = \frac{MH+mx}{2(M+m)} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (6)에 의해,

$$h = \frac{MH+mx}{2(M+m)} = \frac{MH^2+m_0x^2}{2(MH+m_0x)}. \quad (8)$$

이다. $x = H$ 일 때와 $x = 0$ 일 때 $h = \frac{1}{2}H$ 임을 확인할 수 있다. $M = 1.40 \times 10^3$ g, $H = 12$ cm, $m_0 = 2.10 \times 10^3$ g 일 때의 그래프는 다음과 같다.

FIG. 2. x 에 따른 h 의 그래프

(라) 질량 중심이 가장 낮은 점에 있을 때를 찾기 위해 식(8)을 x 에 대해 미분하여 0이 되도록 하는 x 를 찾자. 즉,

$$\frac{dh}{dx} = \frac{MH^2m_0 - 2MHm_0x - m_0^2x^2}{2(MH+m_0x)^2} = 0 \quad (9)$$

을 만족하는 x 를 구해야 한다. 이는 x 에 대한 2차 방정식인,

$$m_0^2x^2 + 2MHm_0x - MH^2m_0 = 0 \quad (10)$$

을 푸는 것과 같다. 근의 공식을 이용하면,

$$x = \frac{-MHm_0 \pm \sqrt{M^2H^2m_0^2 + MH^2m_0^3}}{m_0^2} = \frac{-MH \pm H\sqrt{M(M+m_0)}}{m_0}. \quad (11)$$

$M = 1.40 \times 10^3 \text{ g}$, $H = 12 \text{ cm}$, $m_0 = 2.10 \times 10^3 \text{ g}$ 이므로,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(1.40 \times 10^3 \text{ g})(12 \text{ cm}) - (12 \text{ cm})\sqrt{(1.40 \times 10^3 \text{ g})((1.40 \times 10^3 \text{ g}) + 2.10 \times 10^3 \text{ g})}}{2.10 \times 10^3 \text{ g}} = -21 \text{ cm} \\ x_2 &= \frac{-(1.40 \times 10^3 \text{ g})(12 \text{ cm}) + (12 \text{ cm})\sqrt{(1.40 \times 10^3 \text{ g})((1.40 \times 10^3 \text{ g}) + 2.10 \times 10^3 \text{ g})}}{2.10 \times 10^3 \text{ g}} = 4.6 \text{ cm} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $x_1 < 0$ 은 우리가 원하는 길이가 아니다. 따라서 x 는,

$$x = 4.6 \text{ cm}. \quad (13)$$

이고 h 는 식 (8)에 대입하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} h &= \frac{(1.40 \times 10^3 \text{ g})(12 \text{ cm})^2 + (2.10 \times 10^3 \text{ g})(4.6 \text{ cm})^2}{2((1.40 \times 10^3 \text{ g})(12 \text{ cm}) + (2.10 \times 10^3 \text{ g})(4.6 \text{ cm}))} \\ &= 4.6 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (14)$$

$h = 4.6 \text{ cm}$ 이다.

문제 2. (20 pt) 그림 3와 같이 질량 m 인 총알이 용수철에 달려있는 질량 M 인 나무토막에 속도 v 로 날아와 박혔다. 용수철 상수는 k 이고 용수철 끝은 벽에 고정되어 있으며, 나무토막과 바닥면 사이의 마찰은 무시한다. 이때, 용수철의 최대 압축거리를 구하여라.

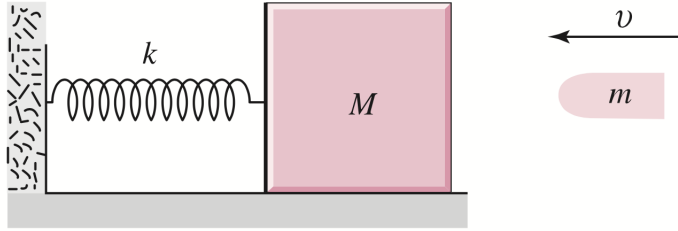


FIG. 3. 문제 2

풀이 : 날아오는 총알의 역학적 에너지 E_i 는,

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2. \quad (15)$$

총알은 오직 운동에너지만 가지고 있다. 총알이 날아와서 박히면 총알의 운동에너지가 토막의 운동에너지와 용수철의 탄성 위치에너지로 변환된다. 이 때 토막과 총알의 속력을 v' , 용수철이 압축된 거리를 x_1 이라 하자. 용수철, 토막, 총알이 가진 역학적 에너지의 합을 E_1 라고 하면,

$$E_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \quad (16)$$

용수철이 최대 압축되는 순간, 토막과 총알은 정지한다. 즉 총알과 토막의 운동에너지는 0이고 모든 에너지가 용수철의 탄성 위치에너지로 변환된다. 이 때 압축된 거리를 x , 용수철, 토막, 총알이 가진 역학적 에너지의 합을 E_f 라고 하면,

$$E_f = \frac{1}{2}kx^2 \quad (17)$$

이다. 역학적 에너지는 보존되어야 하므로,

$$E_i = E_1 = E_f \quad (18)$$

이고 식 (15)과 식 (17)에 의해,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2, \quad x = \sqrt{\frac{m}{k}}v. \quad (19)$$

용수철이 최대 압축되는 거리는,

$$x = \sqrt{\frac{m}{k}}v \quad (20)$$

이다.

문제 3. (40pt) 그림 4에서 질량이 2.00 kg인 토막 1이 오른쪽으로 10 m/s의 속력으로 움직이고 질량이 5.00 kg인 토막 2는 오른쪽으로 3.00 m/s의 속력으로 움직인다. 표면에는 마찰력이 없고, 토막 2에는 용수철 상수가 1.120×10^3 N/m인 용수철이 고정되어 있다. 이 두 토막이 충돌할 때, 용수철은 두 토막의 속도가 같아지는 순간에 최대 압축된다. 이 용수철의 최대 압축거리를 구하여라.

FIG. 4. 문제 3

풀이 : 토막 1의 질량과 초기 속력을 m_1, v_1 , 토막 2의 질량과 초기 속력을 m_2, v_2 라 하자. 용수철이 압축되기 전 두 토막의 역학적 에너지의 합 E_i 는 다음과 같다.

$$E_i = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2. \quad (21)$$

용수철이 최대 압축되었을 때 두 토막의 속력을 v , 압축된 거리를 x 라고 한다면 이 때 두 토막의 역학적 에너지와 용수철의 탄성 위치에너지의 합 E_f 는,

$$E_f = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (22)$$

이다. 역학적 에너지는 보존되어야 하므로,

$$E_i = E_f, \quad \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (23)$$

한편 운동량 또한 보존되어야 하므로,

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v + m_2v, \quad v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad (24)$$

이다. 식 (23)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left(\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{(m_1v_1 + m_2v_2)^2}{m_1 + m_2} + \frac{1}{2}kx^2. \end{aligned} \quad (25)$$

x 에 대해 정리하면,

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{\frac{1}{k} \left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2} \right)} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{k} \left(\frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2)}{m_1 + m_2} - \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2}{m_1 + m_2} \right)} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{k} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)} (v_1 - v_2).
 \end{aligned} \tag{26}$$

이다. $m_1 = 2.00 \text{ kg}$, $m_2 = 5.00 \text{ kg}$, $v_1 = 10 \text{ m/s}$, $v_2 = 3.00 \text{ m/s}$ 이고 $k = 1.120 \times 10^3 \text{ N/m}$ 이므로,

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{\frac{1}{1.120 \times 10^3 \text{ N/m}} \left(\frac{(2.00 \text{ kg})(5.00 \text{ kg})}{2.00 \text{ kg} + 5.00 \text{ kg}} \right)} (10 \text{ m/s} - 3.00 \text{ m/s}) \\
 &= 0.25 \text{ m}.
 \end{aligned} \tag{27}$$

용수철의 최대 압축거리는 0.25 m 이다.

문제 4. (20pt) 질량이 0.500 kg 의 강철공이 길이 70.0 cm 이고 한쪽 끝이 벽에 고정된 줄에 매달려 있다. 그림 5처럼 수평상태에서 공을 놓았다. 공이 내려오다가 최저점에서 질량이 2.50 kg 인 정지해있는 강철 토막과 충돌하였다. 토막과 공의 표면 사이에 쓸림이 없다고 하자. 탄성충돌할 때 충돌 직후의

FIG. 5. 문제 4

(가) 공과

(나) 토막의 속력을 각각 구하여라.

풀이 :

(가) 공이 가진 초기 역학적 에너지를 E_i , 충돌 전 최저점에서 공의 역학적 에너지를 E_f 라고 하자. 최저점에서 공의 위치에너지를 0이라고 하면,

$$E_i = mgh, \quad E_f = \frac{1}{2}mv^2. \tag{28}$$

역학적 에너지는 보존되어야 하므로,

$$E_i = E_f, \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 \tag{29}$$

이다. 공과 토막은 탄성충돌하였으므로 운동량과 에너지가 보존된다. 탄성충돌 이후 공의 속력과 질량을 v_1 , m_1 토막의 속력과 질량을 v_2 , m_2 라고 하자. 운동량 보존 법칙에 의해,

$$m_1 v + 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad m_1(v - v_1) = m_2 v_2 \tag{30}$$

이고 에너지 보존 법칙에 의해,

$$\frac{1}{2}m_1 v^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2, \quad m_1(v^2 - v_1^2) = m_2 v_2^2 \tag{31}$$

이다. 식 (30)를 식 (31)에 대입하면,

$$m_1(v^2 - v_1^2) = m_1(v - v_1)(v + v_1) = m_2 v_2(v + v_1) = m_2 v_2^2 \tag{32}$$

이고 따라서,

$$v + v_1 = v_2 \quad (33)$$

이다. 식 (30)에 대입하고 v_1 에 대해 정리하면,

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v. \quad (34)$$

이다. 식 (29)에 의해,

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (35)$$

따라서 v_1 은 다음과 같다.

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh}. \quad (36)$$

$m_1 = 0.500 \text{ kg}$, $m_2 = 2.50 \text{ kg}$, $h = 7.00 \times 10^{-1} \text{ m}$ 이므로 v_1 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(0.500 \text{ kg} - 2.50 \text{ kg})}{(0.500 \text{ kg} + 2.50 \text{ kg})} \sqrt{2(9.80 \text{ m/s}^2)(7.00 \times 10^{-1} \text{ m})} \\ &= -2.47 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (37)$$

(나) 식 (33)에 의해,

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{2gh} + v_1 \\ &= \sqrt{2(9.80 \text{ m/s}^2)(7.00 \times 10^{-1} \text{ m})} - 2.47 \text{ m/s} \\ &= 1.23 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (38)$$

탄성충돌 후 토막은 1.23 m/s 의 속력으로 움직인다.