2022년 1학기 물리학 I: Quiz 21

김현철*[1,†] and Lee Hui-Jae[1,‡]

[1]*Hadron Theory Group, Department of Physics, Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*

(Dated: Spring semester, 2022)

문제 1. (100 pt) 103.0 kPa의 계기압력에서 $0.140\,\mathrm{m}^3$의 부피를 갖는 101.3 kPa의 압력까지 등온 팽창한 다음, 일정 압력에서 처음부피가 될 때까지 냉각시켰다. 기체가 한 일을 계산하여라(계기압력은 실제압력과 대기압의 차이이다).

풀이 : 등온 팽창 과정에서 기체의 처음 부피, 압력, 온도를 V_1, P_1, T_1라 하고 기체의 나중 부피, 압력, 온도를 V_2, P_2, T_1라 하자. 등온 팽창 과정을 먼저 살펴보자. 등온 과정이므로 두 상태의 온도는 같고 문제에서 주어준 변수는 $P_1 = 103.0\,\mathrm{kPa}$, $V_2 = 0.140\,\mathrm{m}^3$,$P_2 = 101.3\,\mathrm{kPa}$이다. 이상기체 상태방정식으로부터

$$nRT_1 = P_1V_1 = P_2V_2 \tag{1}$$

임을 알 수 있다. 등온 팽창 과정 중 기체가 한 일을 W_1이라 하면

$$dW_1 = PdV = \frac{nRT}{V}\,dV \tag{2}$$

이므로 등온 과정에 대해 적분하면 온도가 상수이므로 적분 밖으로 꺼낼 수 있고

$$W_1 = nRT_1\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V}\,dV = P_2V_2\ln\frac{V_2}{V_1} \tag{3}$$

이다. 식 (1)로부터

$$W_1 = P_2V_2\ln\frac{P_1}{P_2} \tag{4}$$

라고 쓸 수 있다. 등온 팽창 과정 이후 등압 과정에서 기체의 나중 부피, 압력, 온도를 V_1, P_2, T_3라 하자. 처음 부피가 되었으므로 부피는 V_1이고 등압 과정이므로 압력은 P_2이다. 이 과정 중에 기체가 한 일 W_2는

$$W_2 = \int_{V_2}^{V_1} P_2\,dV = P_2(V_1 - V_2) \tag{5}$$

이고 V_1을 주어진 변수들로 표현하면

$$W_2 = P_2\left(\frac{P_2V_2}{P_1} - V_2\right) = P_2V_2\left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right) \tag{6}$$

---

* Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00~20:00)
[†]Electronic address: `hchkim@inha.ac.kr`
[‡]Electronic address: `hjlee6674@inha.edu`

이다. 전체 과정 중에 기체가 한 일 W은

$$\begin{aligned} W =& W_1 + W_2 = P_2V_2\left(\ln\frac{P_1}{P_2} + \frac{P_2}{P_1} - 1\right) \\ =&(101.3\,\mathrm{kPa})(0.140\,\mathrm{m}^3)\left(\ln\frac{(103.0\,\mathrm{kPa})}{(101.3\,\mathrm{kPa})} + \frac{(101.3\,\mathrm{kPa})}{(103.0\,\mathrm{kPa})} - 1\right) \\ =&0.00195\,\mathrm{kPa}\cdot\mathrm{m}^3 = 1.95\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{7}$$

임을 얻는다.

문제 2. (100 pt) $\gamma = 1.30$인 기체가 처음 상태 273 K, 1.00 atm에서 갑자기 처음부피의 절반으로 단열압축되었다.
(가) 나중 압력과
(나) 나중 온도를 구하여라.
(다) 그런 다음 기체가 일정한 압력에서 273 K까지 냉각되었다면, 나중부피는 얼마인가?

풀이 : 기체의 처음 부피, 압력, 온도를 V_1, P_1, T_1라 하고 기체의 나중 부피, 압력, 온도를 V_2, P_2, T_2라 하자.
(가) 단열과정이므로

$$P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma \tag{8}$$

를 만족하고 단열압축하여 처음부피의 절반이 되었다 하였으므로

$$V_2 = \frac{1}{2}V_1 \tag{9}$$

이다. 식 (9)를 식 (8)에 대입하여

$$P_1V_1^\gamma = P_2\left(\frac{1}{2}V_1\right)^\gamma \Longrightarrow P_2 = 2^\gamma P_1 \tag{10}$$

를 얻는다. 계산해보면

$$P_2 = 2^{1.30}(1.00\,\mathrm{atm}) = 2.46\,\mathrm{atm} \tag{11}$$

이다.
(나) 이상기체 상태방정식과 식 (9), (10)으로부터

$$T_2 = \frac{P_2V_2}{nR} = \frac{1}{nR}\left(2^\gamma P_1\right)\left(\frac{1}{2}V_1\right) = 2^{\gamma-1}\frac{P_1V_1}{nR} = 2^{\gamma-1}T_1 \tag{12}$$

이므로

$$T_2 = 2^{0.30}(273\,\mathrm{K}) = 336\,\mathrm{K} \tag{13}$$

이다.
(다) 등압과정을 거친 후 기체의 나중 부피, 압력, 온도를 V_3, P_2, T_1이라 하자. 등압과정이므로 기체의 압력은 P_2로 일정하고 기체의 온도가 처음 상태와 같으므로 온도는 T_1이다. 따라서

$$P_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{nRT_1}{V_3} \tag{14}$$

과 같이 쓸 수 있으며 식 (9), (12)을 대입하면 나중부피 V_3을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{T_1}{T_2}V_2 = \frac{T_1}{2^{\gamma-1}T_1}\left(\frac{1}{2}V_1\right) = 2^{-\gamma}V_1 \\ &= 2^{-1.30}V_1 = 0.406V_1. \end{aligned} \tag{15}$$

문제 3. (200pt) 그림 1은 1.00 몰의 단원자 이상적인 기체의 순환과정이다. 각각의 과정에서 온도는 $T_1 = 400$ K, $T_2 = 600$ K, $T_3 = 455$ K이다. $1 \rightarrow 2$ 과정에 대해

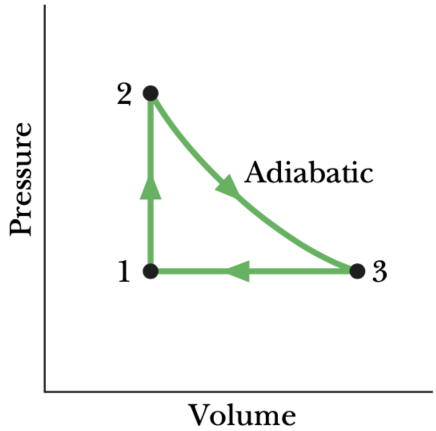

FIG. 1: 문제 3

(가) 열 Q

(나) 내부에너지 변화 ΔU

(다) 한 일은 각각 얼마인가?

(라) $2 \rightarrow 3$과정에 대하여 Q

(마) ΔU

(바) W는 각각 얼마인가?

(사) $3 \rightarrow 1$과정에서

(아) Q

(자) ΔU

(차) W는 얼마인가?

(카) 전체 순환 과정에 대해 Q

(타) ΔU

(파) W는 각각 얼마인가?

점 1에서 처음 압력은 1.00 기압 ($= 1.013 \times 10^5$ Pa)이다. 점 2에서

(하) 부피

(거) 압력을 구하여라.

점 3에서

(너) 부피

(더) 압력을 구하여라.

풀이 :

1 → 2 과정은 등적과정이므로 열역학 제 1법칙에 의해

$$dU = dQ - PdV = dQ \tag{16}$$

라고 쓸 수 있다. 즉, 내부에너지 변화량 dU와 기체가 외부로부터 받는 열 dQ가 같다. 내부에너지 U는

$$U = \frac{3}{2}nRT \tag{17}$$

이므로 식 (16)로부터

$$\Delta U_{1\to 2} = Q_{1\to 2} = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) \tag{18}$$

이다. 따라서 $1 \to 2$ 과정에 대한

(가) 열 $Q_{1\to 2}$는

$$\begin{aligned} Q_{1\to 2} &= \frac{3}{2}nR\left((600\,\mathrm{K}) - (400\,\mathrm{K})\right) = \frac{3}{2}(8.314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1})(200\,\mathrm{K}) \\ &= 2490\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{19}$$

이다.

(나) 내부에너지 변화량 $\Delta U_{1\to 2}$는 $Q_{1\to 2}$와 같으므로 2490 J이다.

(다) 등압과정이므로 기체가 한 일은 0이다.

$2 \to 3$ 과정은 단열과정이므로 $dQ = 0$이고 열역학 제 1법칙에 의해

$$dU = -PdV = -dW \tag{20}$$

를 따른다. 식 (17)로부터

$$\Delta U_{2\to 3} = \frac{3}{2}R(T_3 - T_2) \tag{21}$$

이다. 따라서 $2 \to 3$ 과정에 대한

(라) 열 $Q_{2\to 3}$는 0이고

(마) 내부에너지 변화량 $\Delta U_{2\to 3}$는

$$\begin{aligned} \Delta U_{2\to 3} &= \frac{3}{2}(8.314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1})((455\,\mathrm{K}) - (600\,\mathrm{K})) \\ &= -1810\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{22}$$

이다.

(바) 기체가 한 일 $W_{2\to 3}$는 1810 J이다.

$3 \to 1$ 과정은 등압과정이다. 열역학 제 1법칙에 의해

$$dU = dQ - dW \tag{23}$$

이고 식 (17)로부터

$$\Delta U_{3\to 1} = \frac{3}{2}R(T_1 - T_3) \tag{24}$$

이다. 또한 기체가 한 일 $W_{3\to 1}$은

$$W_{3\to 1} = P_1 \Delta V = P_1 V_1 - P_1 V_3 \tag{25}$$

인데 $P_1 = P_3$이므로 $W_{3\to 1}$을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$W_{3\to 1} = P_1 V_1 - P_3 V_3 = R(T_1 - T_3). \tag{26}$$

식 (23)에 의해 $Q_{3\to 1}$는

$$Q_{3\to 1} = \Delta U_{3\to 1} + W_{3\to 1} = \frac{5}{2}R(T_1 - T_3) \tag{27}$$

이다.

(사) 따라서 $2 \to 3$ 과정에 대한

(아) 열 $Q_{3\to 1}$은 식 (27)에 의해

$$\begin{aligned} Q_{3\to 1} &= \frac{5}{2}(8.314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1})((400\,\mathrm{K}) - (455\,\mathrm{K})) \\ &= -1140\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{28}$$

이고

(자) 내부에너지 변화량 $\Delta U_{3\to 1}$은 식 (24)에 의해

$$\begin{aligned} \Delta U_{3\to 1} &= \frac{3}{2}(8.314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1})((400\,\mathrm{K}) - (455\,\mathrm{K})) \\ &= -686\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{29}$$

이다.

(차) 기체가 한 일 $W_{3\to 1}$ 은 식 (26)에 의해

$$\begin{aligned} W_{3\to 1} = &= (8.314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1})((400\,\mathrm{K}) - (455\,\mathrm{K})) \\ &= -457\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{30}$$

이다.

(카) 전체 순환과정에 대한 열 Q는

$$\begin{aligned} Q &= Q_{1\to 2} + Q_{2\to 3} + Q_{3\to 1} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + 0 + \frac{5}{2}R(T_1 - T_3) \\ &= R\left(T_1 + \frac{3}{2}T_2 - \frac{5}{2}T_3\right) \\ &= (8.314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1})\left((400\,\mathrm{K}) + \frac{3}{2}(600\,\mathrm{K}) - \frac{5}{2}(455\,\mathrm{K})\right) \\ &= 1350\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{31}$$

이고

(타) 전체 순환과정에 대한 내부에너지 변화량 ΔU는

$$\begin{aligned}\Delta U &= \Delta U_{1\to2} + \Delta U_{2\to3} + \Delta U_{3\to1} \\ &= \frac{3}{2}R(T_2 - T_1 + T_3 - T_2 + T_1 - T_3) \\ &= 0\end{aligned} \tag{32}$$

이다.

(파) 전체 순환과정에 대한 일 W는

$$\begin{aligned}W &= W_{1\to2} + W_{2\to3} + W_{3\to1} = 0 + \frac{3}{2}R(T_2 - T_3) + R(T_1 - T_3) \\ &= R\left(T_1 + \frac{3}{2}T_2 - \frac{5}{2}T_3\right) \\ &= (8.314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1})\left((400\,\mathrm{K}) + \frac{3}{2}(600\,\mathrm{K}) - \frac{5}{2}(455\,\mathrm{K})\right) \\ &= 1350\,\mathrm{J}\end{aligned} \tag{33}$$

으로 전체 순환과정에 대한 열 Q와 같다.

$1 \to 2$ 과정은 등적과정이므로 $V_1 = V_2$이고 이상기체 상태방정식에 의해

$$P_1V_1 = RT_1 \Longrightarrow V_1 = R\frac{T_1}{P_1} \tag{34}$$

이다.

(하) 점 2에서의 부피 V_2는

$$\begin{aligned}V_2 = V_1 &= R\frac{T_1}{P_1} = (8.026\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{atm}\cdot\mathrm{K}^{-1})\frac{(600\,\mathrm{K})}{(1\,\mathrm{atm})} \\ &= 482\,\mathrm{m}^3\end{aligned} \tag{35}$$

이고

(거) 점 2에서의 압력 P_2는

$$\begin{aligned}P_2 &= R\frac{T_2}{V_2} = P_1\frac{T_2}{T_1} = (1\,\mathrm{atm})\frac{(600\,\mathrm{K})}{(400\,\mathrm{K})} \\ &= 1.5\,\mathrm{atm}\end{aligned} \tag{36}$$

이다.

$3 \to 1$ 과정은 등압과정이므로 $P_1 = P_3$이다. 따라서,

(너) 점 3에서의 부피 V_3는

$$P_3V_3 = RT_3 \Longrightarrow V_3 = R\frac{T_3}{P_1} \tag{37}$$

이므로

$$V_3 = (8.026\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{atm}\cdot\mathrm{K}^{-1})\frac{(455\,\mathrm{K})}{(1\,\mathrm{atm})} = 3650\,\mathrm{m}^3 \tag{38}$$

이고

(더) 점 3에서의 압력 P_3는 P_1과 같으므로

$$P_3 = 1\,\mathrm{atm} \tag{39}$$

이다.