2022년 1학기 물리학 I: Quiz 19

김현철[a1,†] and Lee Hui-Jae[1,‡]
[1]*Hadron Theory Group, Department of Physics, Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*
(Dated: Spring semester, 2022)

문제 1. (60 pt) 아래의 식과 같이 파동이 주어져 있다.

$$\psi(x,t) = 0.00327\sin(72.1x - 2.72t). \tag{1}$$

(가) 파동의 진폭을 구하여라.

(나) 파동의 파장, 주기, 진동수를 구하여라.

(다) 파동의 속력은 얼마인가?

풀이 : 파동의 진폭을 A, 파수를 k, 각속도를 ω라고 한다면 파동함수를

$$\psi(x,t) = A\sin(k(x - vt)) = A\sin(kx - \omega t) \tag{2}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

(가) 파동의 진폭 A는 0.00327이다.

(나) 파장은 파수로부터, 주기는 각속도로부터, 진동수는 주기로부터 구할 수 있다. 파동의 파장 λ는

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{72.1} = 0.0871 \tag{3}$$

이고 파동의 주기 T는

$$T = \frac{2\pi}{vk} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2.72} = 2.31 \tag{4}$$

이다. 주기 T를 이용해 진동수 f를 구할 수 있다.

$$f = \frac{1}{T} = 0.433. \tag{5}$$

(다) 파동의 속력 v는

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2.72}{72.1} = 0.0377 \tag{6}$$

이다.

문제 2. (150 pt) (난이도 상) 각진동수 1200 rad/s와 진폭이 3.00 mm인 파동을 선밀도가 2.00 g/m이고, 장력이 1200 N인 줄에 보냈다.

---

[a] Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00∼20:00)
[†] hchkim@inha.ac.kr
[‡] hjlee6674@inha.edu

(가) 줄의 반대끝으로 파동이 전달하는 에너지의 평균 전달률은 얼마인가?

(나) 만약에 똑같은 다른 파동이 인접한 같은 종류의 줄을 따라 동시에 진행한다면 전달되는 총 에너지의 평균 전달률은 얼마인가? 만약 하나의 같은 줄에 두 파동을 동시에 보낸다면 위상차가

(다) 0

(라) 0.4 rad

(마) π rad일 때, 파동이 전달하는 평균에너지 전달률은 각각 얼마인가?

풀이 :

(가) 에너지의 평균 전달률 P는 다음과 같이 주어진다.

$$P = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2. \tag{7}$$

μ는 선밀도, v는 파동의 속력, ω는 각진동수이고 y_m은 진폭이다. 줄의 장력을 F라 하면 파동의 속력 v는

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{8}$$

이므로 P는

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\omega^2 y_m^2 = \frac{1}{2}\sqrt{(2.00\times10^{-3}\,\mathrm{kg/m})(1\,200\,\mathrm{N})}(1\,200\,\mathrm{rad/s})^2(3.00\times10^{-3}\,\mathrm{m})^2 \\ &= 10.0\,\mathrm{W} \end{aligned} \tag{9}$$

이다.

(나) 인접한 같은 종류의 줄을 따라 동시에 파동이 진행한다면 전달되는 총 에너지의 평균 전달률은 파동 하나의 평균 전달률의 2배이다. 따라서 이 경우 평균 전달률은 20 W이다.

(다) 같은 줄을 통해 보낸 두 파동의 위상차가 0 이면 두 파동은 보강간섭을 일으킨다. 따라서 전달되는 파동의 진폭이 2배가 되고 에너지의 평균 전달률을 4배가 된다. 즉, 위상차가 0인 경우 평균에너지 전달률은 10 W이다.

(라) 두 파동의 위상차를 ϕ라 하자. 진폭이 같은 두 파동의 중첩은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} y_1(x,t) + y_2(x,t) &= A\sin(kx-\omega t) + A\sin(kx-\omega t+\phi) \\ &= 2A\cos\frac{1}{2}\phi\sin\left(kx-\omega t+\frac{1}{2}\phi\right). \end{aligned} \tag{10}$$

이를 통해 중첩된 파동의 진폭은 $2A\cos\frac{1}{2}\phi$임을 알 수 있다. $\phi =$ 0.4 rad이면, 새로운 진폭 y'_m은

$$y'_m = 2y_m\cos(0.2\,\mathrm{rad}) \tag{11}$$

이고 새로운 진폭 y'_m에 대한 전달률 P는

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\omega^2 y_m'^2 = \frac{1}{2}\sqrt{(2.00\times10^{-3}\,\mathrm{kg/m})(1\,200\,\mathrm{N})}(1\,200\,\mathrm{rad/s})^2 4(3.00\times10^{-3}\,\mathrm{m})^2(\cos(0.2\,\mathrm{rad}))^2 \\ &= 39\,\mathrm{W} \end{aligned} \tag{12}$$

이다.

(마) 위상차가 π만큼 난다면 식 (10)에 의해

$$y'_m = 2y_m\cos\frac{1}{2}\pi = 0 \tag{13}$$

이다. 따라서 전달률 또한 0이다.

문제 3. (60pt) 한쪽 끝은 $x = 0$, 다른 끝은 $x = 10.0$ m에 매어져 있는 질량 100 g의 줄에 250 N의 장력이 작용한다. $t = 0$일 때 $x = 10.0$ m인 끝점에서 펄스 1을 줄을 따라 보내고, $t = 30.0$ ms일 때 $x = 0$인 끝점에서 펄스 2를 보냈다. 어떤 점 x에서 두 펄스가 만나겠는가?

풀이 : 파동의 속력 v는 다음과 같이 주어진다.

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{Fl}{m}}. \tag{14}$$

l은 줄의 길이이고 m은 줄의 질량이다. 만나는 지점을 d라 하면 펄스 1이 움직인 거리는 $l - d$, 펄스 2가 움직인 거리는 d이다. 같은 줄에서 움직이기 때문에 두 펄스의 속력은 같고 펄스 1이 움직인 시간이 펄스 2보다 30.0 ms만큼 더 기므로

$$\frac{l-d}{v} - \frac{d}{v} = 3.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{s} \Longrightarrow d = \frac{1}{2}(l - (3.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{s})v) \tag{15}$$

이다. 식 (14)을 대입하여 d를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}\left(l - (3.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{s})\sqrt{\frac{Fl}{m}}\right) = \frac{1}{2}\left((10.0\,\mathrm{m}) - (3.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{s})\sqrt{\frac{(250\,\mathrm{N})(10.0\,\mathrm{m})}{(0.100\,\mathrm{kg})}}\right) \\ &= 2.63\,\mathrm{m}. \end{aligned} \tag{16}$$

펄스가 만나는 지점은 $x = 0$인 점으로부터 2.63 m만큼 떨어진 곳이다.

문제 4. (80pt) 아래 식으로 주어진 파동의 속력을 구하여라.

$$\psi(x,t) = (2.00\,\mathrm{mm})\sqrt{(20\,\mathrm{m}^{-1})x - (4.0\,\mathrm{s}^{-1})t}. \tag{17}$$

풀이 : 파동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \tag{18}$$

이를 이용해서 파동의 속력을 구해보자. $\psi = A\sqrt{kx - \omega t}$라 하고 ψ를 x와 t에 대해 각각 두번씩 편미분하면,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{4}Ak^2(kx - \omega t)^{-3/2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{1}{4}A\omega^2(kx - \omega t)^{-3/2} \tag{19}$$

이다. 따라서 속력 v는

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{4.0\,\mathrm{s}^{-1}}{20\,\mathrm{m}^{-1}} = 0.2\,\mathrm{m/s} \tag{20}$$

이다.