Heimaverkefni 4

TÖL301G Formleg mál og reiknanleiki

Hjörvar Sigurðsson

Verkefnið var rætt við Arnar Sigurðsson

1. A
   a. $A = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = a^i b^i, i \geq 0\}$
      $B = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = a^i b^i, i \geq 5\}$
      $A \cap B = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = a^i b^i, i \geq 0\}$
      Málið $A \cap B$ er augljóslega óreglulegt þar sem i hefur ekkert efra þak, og það krefst þess að fjöldi a-tákna er talin, en það er ekki hægt að útbúa stöðuvél sem getur gert það.

   b. $A = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = 0^i 1^i, i \geq 0\}$
      $B = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = a^i b^i, i \geq 5\}$
      $A \cap B = \emptyset$
      Málið $A \cap B$ er augljóslega reglulegt þar sem einfalt er að útbúa stöðuvél sem að samþykkir tómann streng.

2. Dælusetningin: Ef mál er reglulegt, þá má skipta nægilega löngum streng sem málið samþykkir í þrjá parta, xyz, þannig að miðjupartinn, y, má endurtaka aftur og aftur og lokastrengurinn verður enn í málinu. Þessi setning er notuð til þess að sýna að tiltekið mál uppfylli ekki nauðsynleg skilyrði setningarinnar og geti því ekki verið reglulegt.

3. Gerum ráð fyrir að A sé reglulegt mál og lát p vera gefið með dælusetningunni.

   Vel $s = 0^{2p}1^p$.

   Athuga allar skiptingar s í þrjá hluta x, y og z þannig að s = xyz, $|y| > 0$ og $|xy| \leq p$.

   Strengurinn xy^iz er ekki í A með i = 1 þar sem að ef x inniheldur bæði 0- og 1-tákn, y inniheldur eingöngu 1-tákn, og z er tómi strengurinn, þá er $|xy| \geq 3p > p$, en forsenda þrjú er því brotin. Einnig er forsenda 1 brotin, þar sem að um leið og $i \geq 1$, þá er strengurinn ekki lengur í málinu A.

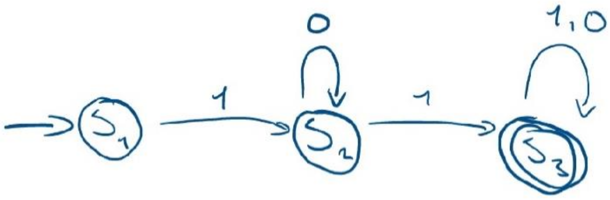
   Sú forsenda að A sé reglulegt mál leiðir því til mótsagnar, og niðurstaðan er því að A er ekki reglulegt mál.

4.

a.

i. Ef til er stöðuvél sem lýsir máli, þá er það reglulegt.

ii. Eftirfarandi stöðuvél lýsir máli B.*



iii. Þar sem i. og ii., þá er málið reglulegt.

* Um leið og stöðuvélin les inntakið ‚11‘, eða ‚10*1‘, þá hefur hún lesið streng sem má lýsa á forminu ‚1^k1^k‘ annars vegar, eða ‚$1^k0^*1^k$‘ hins vegar. Þegar það hefur gerst þá skiptir ekki máli hversu mörg 1 eða 0 strengur inniheldur í framhaldinu, þar sem strengnum er alltaf hægt að lýsa sem ‚1^ku | u inniheldur a.m.k. k 1-bita‘.

b.

i. Gerum ráð fyrir að B sé reglulegt mál og lát p vera gefið með dælusetningunni.

ii. Vel s = 1^p01^p. $s \in B$ *og* $|s| > p$.

iii. Athuga allar skiptingar s í þrjá hluta x, y og z þannig að s = xyz, $|y| > 0$ og $|xy| \leq p$.

iv. Allar skiptingar s í xyz brjóta nauðsynlegar forsendur dælusetningarinnar. Sjá má útreikninga sem sýna það á mynd 4.b fyrir neðan.

v. Sú forsenda að B sé reglulegt mál leiðir því til mótsagnar, og niðurstaðan er því að B er ekki reglulegt mál.

$s = 1^p 0 1^p$

$s \in B$ og $|s| > p$.

i.

$x = \{1\}$

$y = \{1\}$

$z = \{0, 1\}$

T.d. $\underbrace{1}_{x}\underbrace{1}_{y}\underbrace{101}_{z}$

Strengurinn xy^iz er ekki í máli B ef $i = 1$. Það með er skilyrði 1 brostið.

ii.

$x = \{1\}$

$y = \{10\}$

$z = \{1\}$

T.d. $\underbrace{1}_{x}\underbrace{10}_{y}\underbrace{101}_{z}$

Strengurinn xy^iz er ekki í máli B ef $i = 2$. Það með er skilyrði 1 brostið.

iii.

$x = \{1\}$

$y = \{0\}$

$z = \{1\}$

T.d. 1001

Strengurinn xy^iz getur ekki verið í málinu ef að $i \geq 1$ því sem að $|xy|$ verður þá alltaf $> p$, en því er skilyrði 3 brostið.

Um allar aðrar skiptingar s í xyz gildir að $|xy| > p$, og því er forsenda 3 brostin í þeim öllum.

Mynd 4.b.

5.

i. Vel $s = a^p b^p c^{2p}$

$s \in A$, $|s| > p$.

ii.

Skipting 1

x er tómi strengurinn,
y inniheldur bara a-tákn,
z inniheldur b- og c-tákn.

$\underbrace{aaa}_{y}\ \underbrace{bbcccc}_{z}$

Strengurinn er ekki í málinu A, og því er forsenda 1 brotin.

Skipting 2

x inniheldur bara a-tákn,
y inniheldur a- og b-tákn,
z inniheldur b- og c-tákn.

Strengurinn xyz er ekki í málinu A, og því er forsenda 1 brotin.

$\underbrace{aa}_{x}\underbrace{abab}_{y}\underbrace{bbcccc}_{z}$

Allar aðrar mögulegar skiptingar fela í sér að $|xy| > p$, en því höfum við sýnt fram á að sú forsenda að A sé reglulegt mál leiði til mótsagnar. Niðurstaðan er því að A er ekki reglulegt mál.

6.

i. Vel $s = b^p a^p$.

$s \in L$,

$|s| > p$

ii

Skipting 1

x inniheldur einungis b-tákn,
y inniheldur einungis b-tákn,
z inniheldur einungis a-tákn.

Þegar $i \geq 1$, þá er strengurinn xy^iz ekki lengur í málinu L. Forsenda 1 er þar með brotin.
T.d. ef $i = 2$, þá

$\underbrace{b}_{x}\underbrace{bb}_{y}\underbrace{a}_{z} \notin L$

Skipting 3

x inniheldur einungis b-tákn,
y inniheldur einungis a-tákn,
z inniheldur einungis a-tákn.

Þegar $i \geq 1$, þá er strengurinn xy^iz ekki lengur í málinu L. Forsenda 1 er þar með brotin.
T.d. ef $i = 2$, þá

$\underbrace{b}_{x}\underbrace{aa}_{y}\underbrace{a}_{z}$

Skipting 2

x inniheldur eingöngu b-tákn,
y inniheldur b- og a-tákn,
z inniheldur eingöngu a-tákn.

Þegar $i \geq 2$, þá er xy^iz ekki í málinu L. Forsenda 1 er því brotin.
T.d. ef $i = 2$, þá

$\underbrace{b}_{x}\underbrace{baba}_{y}\underbrace{a}_{z} \notin L$.

iii. Sú forsenda, að L sé reglulegt mál, leiðir til mótsagnar. Því vitum við að L er ekki reglulegt mál.