TÖL301G Formleg mál og reiknanleiki

Heimaverkefni 8

Hjörvar Sigurðsson

1.

Kóði:

```
# Athuga hvort talan sé frumtala.
def isGoldbachPrime (n):
  frumtala = True
  if (n < 1): return False
  for i in range(2, n):
    if (n % i) == 0:
      frumtala = False
      break
  return frumtala

x = -1
GoldbachsTheorem = True;

while (GoldbachsTheorem == True):

  x += 2

  GoldbachsTheorem = False
  for p in range(1, x + 1):
    if (isGoldbachPrime(p)):
      for i in range(0, x + 1):
        if ((2*(i**2) + p) == x):
          GoldbachsTheorem = True

if (GoldbachsTheorem == False):
  print(x)
```

Keyrsla:

```python
# Athuga hvort talan sé frumtala.
def isGoldbachPrime (n):
  frumtala = True
  if (n < 1): return False
  for i in range(2, n):
    if (n % i) == 0:
      frumtala = False
      break
  return frumtala

x = -1
GoldbachsTheorem = True;

while (GoldbachsTheorem == True):

  x += 2

  GoldbachsTheorem = False
  for p in range(1, x + 1):
    if (isGoldbachPrime(p)):
      for i in range(0, x + 1):
        if ((2*(i**2) + p) == x):
          GoldbachsTheorem = True

if (GoldbachsTheorem == False):
  print(x)
```

```
5777
```

<u>Svar:</u>
5777

2.

i. Ég nota þá staðreynd að DFA þekkir nákvæmlega mengið regluleg mál til þess að útbúa DFA, köllum hana R_{DFA}, sem þekkir reglulegu segðina R. Ég er þá með tvær DFA, A og R_{DFA}.

ii. Setning 4.5 segir að það að ákveða hvort tvær DFA þekki sama málið sé Turing-ákvarðanlegt. Með öðrum orðum, málið EQ_{DFA},

EQ_{DFA} = {<A,B> | A og B eru DFA og L(A) = L(B)}

er Turing-ákvarðanlegt.

iii. Þar með hef ég sýnt fram á að málið $EQ_{DFA,RS}$, eða $EQ_{DFA, RDFA}$ sbr. skrefi i, sé Turing-ákvarðanlegt.

3.

i. Ég útbý Turing-vél sem ítrar í gegnum öll ástönd staflavélarinnar P. Fyrir hvert ástand, S, útbýr vélin staflavél þar sem S er eina samþykktarástandið.

ii. Í hverri ítrun er athugað hvort staflavélin sem Turing-vélin bjó til sé tóm, en við vitum að það er ákvarðanlegt sbr. setningu 4.8.

iii. Ef að Turing-vélin býr til staflavél með samþykktarástand S þar sem staflavélin er tóm, þá vitum við að samþykktarástandið, S, sé gagnslaust þar sem eina útskýringin á því að staflavél með eitt samþykktarástand sé tóm er að samþykktarástandið sé þess eðlis að vélin fer aldrei í það, óháð inntaki.

4.

Aðferð 1:

i. Skilgreining 4.14 skilgreinir teljanlegt mengi sem mengi sem er annað hvort endanlegt eða hefur sömu stærð og mengi nátturulegra talna, $\mathbb{N}$.

ii. Skilgreining 4.12 segir að tvö mengi, A og B, séu af sömu stærð ef til er fall f: A -> B sem er bæði „one-to-one“ og „onto“. Slíkt fall er þess eðlis að hvert stak í mengi A samsvarar sérstöku staki í B, og sérhvert stak í B samsvarar sérstöku staki í A.

iii. Finnum fall f: (p, q) $\in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:
$f((a,b)) = 2^a 3^b$
Þetta fall er bæði „one-to-one“ og „onto“.

iv. Þar með hef ég sýnt að mengið $A = \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid p \leq q\}$ sé jafn stórt og mengi náttúrulegra talna, $\mathbb{N}$, en þar með er mengi A teljanlegt, sbr. i og skilgreiningu 4.14.

Aðferð 2:

Sjá meðfylgjandi mynd 4.1.

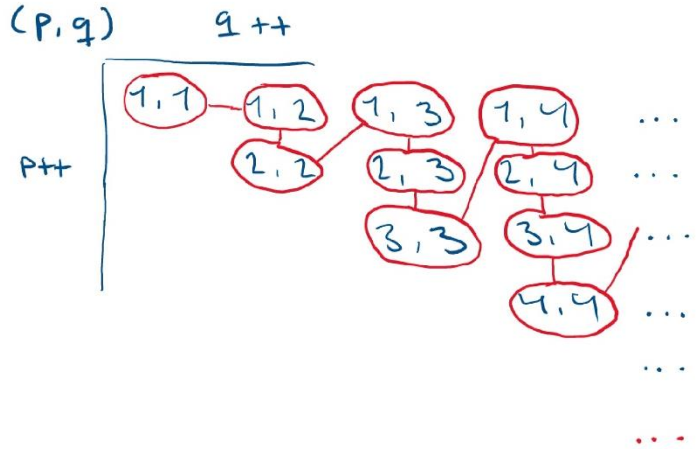
i. Ég byrja í (p,q) = (1,1), og tengi (1,1) við náttúrulegu töluna 1. M.ö.o. (1, 1) -> 1.

ii. Næst hækka ég p um 1 og ítra í gegnum allar tvenndir (p, q) þar til p == q. Í hverri ítrun tengi ég tvenndina (p, q) við næstu náttúrulegu tölu. T.d. (1, 2) -> 2, (2, 2) -> 3, o.s.frv.

iii. Ég endurtek skref ii endalaust.

iv. Þar sem hvert stak í menginu $A = \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid p \leq q\}$ má tengja við sérstakt stak í mengi náttúrulegra talna, $\mathbb{N}$, þá hef ég sýnt að mengi A og mengi náttúrulegra talna, $\mathbb{N}$, sé jafn stórt samkvæmt skilgreiningu 4.12.

v. Þar sem mengi A og mengi náttúrulegra talna, $\mathbb{N}$, er jafn stórt, þá er mengi A teljanlegt mengi samkvæmt skilgreiningu 4.14.



Mynd 4.1. Byrjað er í (1, 1), og síðan er fylgt rauðu línunni. Hver rauður hringur samsvarar sérstöku staki í mengi náttúrulegra talna, ℕ.

5.

Sjá meðfylgjandi mynd 5.1 .

i. Ég byrja á lægsta mögulega fjölda talna eftir kommuna 0. Í þessu tilfelli er það tveir þar sem talan þarf að innihalda bæði 3 og 7 eftir kommuna.

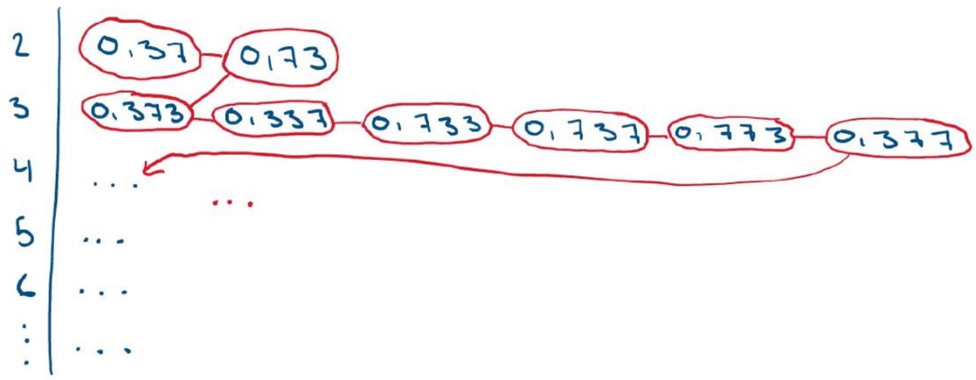
ii. Ég útlista allar mögulegar útfærslur á þeim fjölda talna eftir kommu sem tilgreint er í skrefi i, með því skilyrði að aðeins 3 og 7 koma við sögu. Hver útfærsla er pöruð við stak í mengi náttúrulegra talna, ℕ.

iii. Ég endurtek endalaust skref i – ii og hækka fjölda talna eftir kommuna um 1.

iv. Þar sem hvert stak í A, þar sem A er hlutmengi rauntalnanna milli 0 og 1 sem er þannig að framsetning talnanna í tugakerfinu inniheldur einungis tölustafina 3 og 7, má para við sérstakt gildi í mengi náttúrulegra talna, ℕ, þá getum við sagt að mengi A og mengi ℕ sé jafn stórt sbr. skilgreiningu 4.12.

v. Þar sem mengi A og mengi náttúrulegra talna, ℕ, er jafn stórt, þá vitum við að mengi A er teljanlegt sbr skilgreiningu 4.14.

Athugasemd: Ég gæti einnig farið í gegnum stökin á ská (e. diagonally) eins og lýst er í bókinni, en þar sem möguleikarnir eru endanlegir fyrir hvern fjölda talna eftir kommu, þá er það óþarfi.



Mynd 5.1. Y-ásinn tilgreinir fjölda talna eftir kommu. X-ásinn útlistar allar mögulegar útfærslur þess fjölda talna eftir kommu. Byrjað er í 0,37 og fylgt er rauðu línunni. Hver rauður hringur í línunni samsvarar sérstöku gildi í mengi náttúrulegra talna, $\mathbb{N}$.