TÖL301G Formleg mál og reiknanleiki

Heimaverkefni 11

Hjörvar Sigurðsson

Rætt var um verkefnið við Arnar Sigurðsson

1. Verkefni er í NP ef hægt er að leysa það með brigðgengri Turing-vél, eða sannreyna lausn með löggengri Turing-vél, í margliðutíma.

   a. Verkefnið er í NP.

   Eftirfarandi reiknirit sannreynir lausn á tíma O(x^2):

```
COMPOSITES(x) {
    for (int p = 2; p < x; p++) {
            for (int q = 2; q < x; q++) {
                    if ((p * q) == x) {
                            return true;
                    }
            }
    }
    return false;
}
```

   b. Verkefnið er í NP.

   Ég get sannreynt lausn í margliðutíma með því að ítra í gegnum öll k hlutmengi S og bera saman summu allra staka í hlutmenginu við T; ef summan er stærri en T, þá ákvarða ég að lausnin er ekki gild. Ef ég ítra í gegnum öll hlutmengin án þess að summan sé nokkru sinni stærri en T, þá ákvarða ég að lausnin sé gild lausn.

   c. Ég sé, út frá orðalagi verkefnalýsingarinnar, tvær mögulegar túlkanir á því á hvaða formi lausnin er sem skal sannreyna, en ég svara þeim báðum.

   i. *Lausnin er á forminu „já, það er til lausn á nxn Sudoku-þraut með vísbendingum B“, eða „nei, það er ekki til lausn á nxn Sudoku-þraut með vísbendingum B“:*

   Verkefnið er ekki í NP.

   Það er vegna þess að til að sannreyna lausn „það er til lausn á nxn Sudoku-þraut með vísbendingum B“ eða „það er ekki til lausn á nxn Sudoku-þraut með vísbendingum B“ þyrfti ég að prufa allar n tölurnar í öllum n-B reitum, en tímaflækja þess er O(n!).

ii. *Lausnin tekur form útfyllts nxn spjalds:*

Verkefnið er í NP.

Það er vegna þess að til að sannreyna lausnina þarf aðeins að athuga hvort hver lína, hver dálkur, og hver innri ferningur (t.d. 3x3 ferningur í 9x9 sudoku-þraut), innihaldi aldrei sama gildi oftar en einu sinni. Tímaflækja þess er $O(n^2)$.

d. Ég sleppi þessum lið sbr. fyrirmælum Steins á Ed.

2. Ég athuga með isHamPath hvort til sé hamilton vegur milli s og t. Ef svo er þá bæti ég s við breytu (t.d. lista) sem geymir hnúta hamilton vegsins og athuga, fyrir hvern hnút sem s hefur legg til, köllum þá c, hvort til sé hamilton vegur milli c og t (ef ég finn hamilton veg milli c og t, þá hætti ég við að ítra í gegnum restina af hnútunum sem s hefur legg til). Ef svo er þá bæti ég c við breytuna sem geymir hnúta hamilton vegsins, fjarlægi s úr netinu, og athuga fyrir hvern hnút sem c hefur legg til, o.s.frv. þangað til ég er kominn að hnút t. Að lokum bæti ég t við leiðina.

<u>Java-legur kóði</u>

```
HAMPATH(G, s, t) {
	if (!isHamPath(G, s, t) {
		return null;
	}
	else {
		path[] = [s];
		while (s != t) {
			for (int i = 0; i < s.numberOfChildNodes(); i++) {
				c = s.childNode(i)	// childNode vísar til hnúts sem s
							// hefur legg til.
				if (isHamPath(G, c, t)) {
					s.removeFromGraph(); // Fjarlægi s úr netinu.
					s = c;
					path.append(c);
				}
			}
		}
	}
}
```

3. S = pakkasendingar $\{(s_1, d_1), ..., (s_n, d_n)\}$

a.

i. Ég byrja á að finna stystu leið milli fyrirtækja (s og d) hvers staks í S, sem og milli allra staka í S.

ii. Ég athuga allar mögulegar samsetningar sendinganna í S:

$S_1S_2S_3S_4S_5S_6$, $S_1S_2S_3S_4S_6S_5$, ...

Fyrir hverja samsetningu athuga ég hvort fjöldi leggja er minni en 5n. Ef svo er, þá er það lausn á vandamálinu og reikniritið skilar því að það sé til lausn. Ef engin samsetning inniheldur fjölda leggja færri en 5n, þá skilar reikniritið því að ekki sé til lausn.

Tímaflækja skrefs i: Ég nota Dijkstra til að finna stystu leið, en tímaflækja Dijsktra er $O(V^2 \log v)$. Ég nota hana $|S| + |S|^2$ sinnum, en tímaflækjan í skrefi 1 er því $O(|S|^2 V^2 \log v)$.

Tímaflækja skrefs ii er $O(|S|!)$.

Heildartímaflækja reikniritsins er því $O(|S|!)$.

b. Ég sé, út frá orðalagi verkefnalýsingarinnar, tvær mögulegar túlkanir á því á hvaða formi lausnin er sem skal sannreyna, en ég svara þeim báðum.

i. *Lausnin er á forminu „já, það er til raðaður listi af pakkasendingum (s1, d1, s2, d2, ..., sn, dn) þannig að sendillinn getur klárað þær í mesta lagi á tíma 5n“, eða „nei, það er ekki til –“-„:*

Verkefnið er ekki í NP, þar sem til þess að ákvarða hvort til sé lausn eða ekki þyrfti að nota reiknirit með tímaflækju O(n!) sbr. lið a hér að ofan.

ii. *Lausnin tekur form tiltekinnar raðar S sendinga:*

Verkefnið er í NP þar sem hægt er að ákvarða hvort að tiltekin samsetning tiltekins S – þar sem hvert stak S_i má skipta í hnútana s_i, d_i – notar færri en 5n leggi eða ekki, þar sem n táknar fjölda sendinga

Það er gert með því að finna stystu leið milli allra hnúta í samsetningunni S (s_1, d_1, s_2, d_2, ..., s_n, d_n) með Dijsktra reikniritinu, og athuga svo hvort heildarfjöldi leggja sé færri en 5n.

4. Hver hnútur, V_i, í netinu er táknaður með eftirfarandi klasum:

$(V_{iR} \lor V_{iG} \lor V_{iB})$
$(\neg V_{iR} \lor \neg V_{iB})$
$(\neg V_{iR} \lor \neg V_{iG})$
$(\neg V_{iB} \lor \neg V_{iG})$

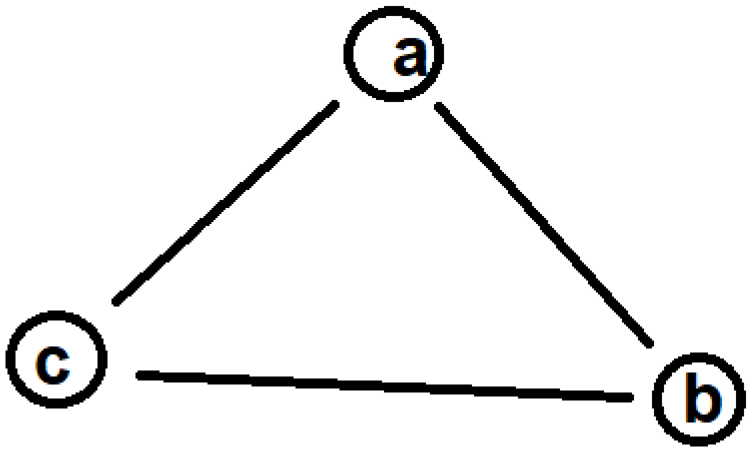
Passar að hnúturinn er litaður með einum lit.
R táknar rauðann, G táknar grænann, og B táknar bláann.
V_{iR} táknar þá að hnútur i sé litaður rauður.

$(\neg V_{iR} \lor \neg V_{xR})$
$(\neg V_{iB} \lor \neg V_{xB})$
$(\neg V_{iG} \lor \neg V_{xG})$

Fyrir hvern hnút V(x) sem hnútur V(i) er tengdur við með legg, eru þessar þrjár klausur bættar við Boolsegðina.

Að lokum eru allar klausurnar tengdar saman með og-virkjum.

Tökum sem dæmi eftirfarandi net:



Boolsegðin verður þá:

$(V_{aR} \lor V_{aG} \lor V_{aB}) \land (\neg V_{aR} \lor \neg V_{aB}) \land (\neg V_{aR} \lor \neg V_{aG}) \land (\neg V_{aB} \lor \neg V_{aG})$
$\land$
$(V_{bR} \lor V_{bG} \lor V_{bB}) \land (\neg V_{bR} \lor \neg V_{bB}) \land (\neg V_{bR} \lor \neg V_{bG}) \land (\neg V_{bB} \lor \neg V_{bG})$
$\land$
$(V_{cR} \lor V_{cG} \lor V_{cB}) \land (\neg V_{cR} \lor \neg V_{cB}) \land (\neg V_{cR} \lor \neg V_{cG}) \land (\neg V_{cB} \lor \neg V_{cG})$
$\land$
$(\neg V_{aR} \lor \neg V_{bR}) \land (\neg V_{aB} \lor \neg V_{bB}) \land (\neg V_{aG} \lor \neg V_{bG})$
$\land$
$(\neg V_{aR} \lor \neg V_{cR}) \land (\neg V_{aB} \lor \neg V_{cB}) \land (\neg V_{aG} \lor \neg V_{cG})$