TÖL301G Formleg mál og reiknanleiki

Heimaverkefni 13

Hjörvar Sigurðsson

1.

Verkefnið er í NP þar sem hægt er að sannreyna lausn í margliðutíma. Það væri hægt með því að lesa einu sinni í gegnum alla dálka og hafna ef dálkurinn inniheldur fleiri en eina tegund af spilapening. Síðan væri lesið í gegnum allar raðir og hafnað ef röð inniheldur engann spilapening. Að lokum væri staðfest. Þetta reiknirit keyrir á O(n).

3-SAT verkefnið er það verkefni að ákvarða hvort til sé lausn á Booljöfnu á CNF-formi þar sem hver klausa hefur að mesta leyti þrjár breytur (e. literals).

Við útbúum Booljöfnu b sem er sönn þ.þ.a. til sé lausn á einmenningsspilinu e.

Breyturnar í Booljöfnu b eru eftirfarandi:

D_{iR} táknar að dálkur i inniheldur rauða spilapeninga.
D_{iB} táknar að dálkur i inniheldur bláa spilapeninga.
R_{iR} táknar að röð j inniheldur a.m.k. einn rauðann spilapening.
R_{jB} táknar að röð j inniheldur a.m.k. einn bláann spilapening.

Fyrir hvern dálk i á spilaborðinu búum við til eftirfarandi bool-segð:

$(D_{iR} \lor D_{iB}) \land (\neg D_{iR} \lor \neg D_{iB})$.

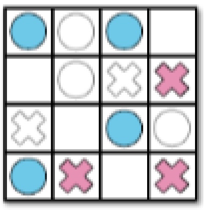
Þessi liður er aðeins sannur af dálkur i inniheldur aðeins rauða eða aðeins bláa spilapeninga.

Fyrir hverja línu á spilaborðinu búum við til eftirfarandi bool-segð:

$(R_{jR} \lor R_{jB})$.

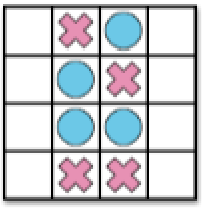
Þessi liður er aðeins sannur ef röð j inniheldur a.m.k. einn spilapening.

Dæmi:



Þetta spilaborð væri táknað með eftirfarandi Booljöfnu (rauður litur táknar FALSE, grænn táknar TRUE):

$(D_{1R} \lor D_{1B}) \land (\neg D_{1R} \lor \neg D_{1B}) \land (D_{2R} \lor D_{2B}) \land (\neg D_{2R} \lor \neg D_{2B})$.
$\land (D_{3R} \lor D_{3B}) \land (\neg D_{3R} \lor \neg D_{3B}) \land (D_{4R} \lor D_{4B}) \land (\neg D_{4R} \lor \neg D_{4B})$
$\land (R_{1R} \lor R_{1B}) \land (R_{2R} \lor R_{2B}) \land (R_{3R} \lor R_{3B}) \land (R_{4R} \lor R_{4B})$.



Þetta spilaborð væri táknað með eftirfarandi Booljöfnu (rauður litur táknar FALSE, grænn táknar TRUE):
$(D_{1R} \vee D_{1B}) \wedge (\neg D_{1R} \vee \neg D_{1B}) \wedge (D_{2R} \vee D_{2B}) \wedge (\neg D_{2R} \vee \neg D_{2B}).$
$\wedge (D_{3R} \vee D_{3B}) \wedge (\neg D_{3R} \vee \neg D_{3B}) \wedge (D_{4R} \vee D_{4B}) \wedge (\neg D_{4R} \vee \neg D_{4B})$
$\wedge (R_{1R} \vee R_{1B}) \wedge (R_{2R} \vee R_{2B}) \wedge (R_{3R} \vee R_{3B}) \wedge (R_{4R} \vee R_{4B}).$

2.

SUBSET-SUM verkefnið snýst um að ákvarða hvort til sé hlutmengi, H, í gefnu mengi, M, þar sem summa, S, staka hlutmengisins jafngildir einhverju gefnu gildi, G.

Við yfirfærum frá SUBSET-SUM yfir á RECTANGLE-TILING:

i. Við táknum G sem flatarmál ferhyrnings, F, og sýnum allar mögulegar útfærslur á ferhyrning F með flatarmál G. T.d. getur ferhyrningur með flatarmál 8 verið í laginu 1x8, 2x4, 4x2, og 8x1.
ii. Við ímyndum okkur ristir (e. grid) með víddir hverra útfærsla á F.
iii. Við táknum hvert stak í hlutmengi H sem flatarmál ferhyrnings, f, og sýnum allar mögulegar útfærslur á f.
iv. Við ímyndum okkur ristir með víddir hverra útfærsla á f.
v. Að lokum athugum við hvort til sé samsetning útfærslna á f sem passar í einhverja útfærslu á F. Þetta gerum við með því að ítra í gegnum útfærslur á F, og fyrir hverja útfærslu ítrum við í gegnum hverja útfærslu á f, og fyrir hverja útfærslu á f ítrum við í gegnum allar mögulegar staðsetningar f inni í rist útfærslunnar á F. Sé til samsetning útfærslna f sem passa nákvæmlega í rist útfærslu F, þá samþykkjum.

Þar með höfum við yfirfært SUBSET-SUM yfir á RECTANGLE-TILING svo að til sé lausn á SUBSET-SUM þ.þ.a. til sé lausn á RECTANGLE-TILING.

3.

Við ítrum í gegnum a#b#c. Í lokin samþykkjum við ef a x b == c, en höfnum ef að a x b != c.

Reikniritið felur í sér eina ítrun yfir a#b#c (það má ímynda sér a#b#c sem band á Turing-vél). Breyturnar a, b, og c eru tvíundartölur og því táknaðar með $\log_2 n$ bitum. Minnisnotkun verkefnisins er því O(log n) og verkefnið því í L.