8-1 [24分]

（1） $f(k)=\{1,-1,1,-1,1,\cdots\}$

解： $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1\cdot(1-(-\frac{1}{z})^k)}{1-(-\frac{1}{z})}=\frac{z}{z+1}$

收敛区为 $|z|>\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|f(k)|}=1$

（2） $f(k)=\{0,1,0,1,0,\cdots\}$

解： $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^k}{2}z^{-k}\right]=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-k}\right]=\frac{1}{2}(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z+1})=\frac{z}{z^2-1}$

收敛区为 $|z|>1$

（3） $f(k)=\delta(k-k_0)\ \ (k_0>0)$

解： $F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k-k_0)z^{-k}=z^{-k_0}$

该序列为有限长序列， $k_2=k_1>0$

因此收敛区为 $0<|z|\le\infty$，即除零点外的整个 z 平面。

（4） $f(k)=\delta(k+k_0)\ \ (k_0<0)$

解： $F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k+k_0)z^{-k}=z^{k_0}$

该序列为有限长序列， $k_2=k_1<0$

因此收敛区为 $0\le|z|<\infty$，即除+∞外的整个 z 平面。

（5） $f(k)=0.5^k\varepsilon(k-1)$

解： $F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}0.5^k z^{-k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{2z}\cdot(1-(\frac{1}{2z})^k)}{1-(\frac{1}{2z})}=\frac{1}{2z-1}$

收敛区为 $|z|>\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|f(k)|}=0.5$

（6） $f(k)=-\varepsilon(-k-1)$

解： $F(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}-z^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}-z^{k}=\frac{z}{z-1}$

收敛区为 $|z|<\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|f(k)|}=1$

补充题 [20 分]

解： $F(z)=\frac{0.2+0.5z^{-1}}{1-0.2z^{-1}+0.8z^{-2}}$

采用部分分式分解法得到

$$F(z)=\frac{(1-\frac{\sqrt{79}}{10}i)z}{z-(\frac{1}{10}+\frac{\sqrt{79}}{10}i)}-\frac{(1+\frac{\sqrt{79}}{10}i)z}{z-(\frac{1}{10}-\frac{\sqrt{79}}{10}i)}$$

采样频率 $\frac{1}{T_s}=1000Hz$ ， $\therefore T_s=\frac{1}{1000}$

令 $z_1=\frac{1}{10}+\frac{\sqrt{79}}{10}i$ ， $z_2=\frac{1}{10}-\frac{\sqrt{79}}{10}i$

计算得到 $|z_1|=|z_2|\approx 0.89$

$$\theta_1=\arctan\frac{\frac{\sqrt{79}}{10}}{\frac{1}{10}}=\arctan\sqrt{79}\approx 1.46$$

$$\theta_2 = \arctan\frac{-\frac{\sqrt{79}}{10}}{\frac{1}{10}} = \arctan -\sqrt{79} \approx -1.46$$

根据 s 平面到 z 平面的映射关系（见书 8.5 或 Lec13 的 PPT）

$\theta = \omega T_s$，$|z| = e^{\sigma T_s}$

求得 $\omega_1 = 1460$，$\omega_2 = -1460$

$\sigma_1 = \sigma_2 \approx -116.5$

又由 $s = \sigma + j\omega$ 得到：

$s_1 = -116.5 + 1460i$

$s_2 = -116.5 - 1460i$

则 $F(s) = \dfrac{1-\frac{\sqrt{79}}{10}i}{s-s_1} - \dfrac{1+\frac{\sqrt{79}}{10}i}{s-s_2}$

做拉普拉斯反变换得到 $f(t) = (1-\dfrac{\sqrt{79}}{10})e^{s_1 t}\varepsilon(t) - (1+\dfrac{\sqrt{79}}{10})e^{s_2 t}\varepsilon(t)$

求得 $F(j\omega) = \dfrac{-1.78i}{j\omega + 116.5}$

8-7　[18 分]

解：

（1）方法一：采用部分分式展开法

$$F(z)=\frac{10z^2}{(z-1)(z+1)}=5\cdot(\frac{z}{z-1}+\frac{1}{z+1})$$

$$\therefore f(k)=5\varepsilon(k)+5(-1)^k\varepsilon(k)$$

方法二：采用留数法

$$F(z)z^{k-1}=\frac{10z^{k+1}}{(z-1)(z+1)}$$

当 k≥0 时，有 $z_1=-1,z_2=1$两个极点

计算 $z_1=-1$处的留数：

$$Res\left[F(z)z^{k-1}\right]|_{z=-1}=\frac{10z^{k+1}}{(z-1)}|_{z=-1}=5(-1)^k$$

计算 $z_2=1$处的留数：

$$Res\left[F(z)z^{k-1}\right]|_{z=1}=\frac{10z^{k+1}}{(z+1)}|_{z=1}=5$$

得到 $f(k)=\sum Res\left[F(z)z^{k-1}\right]=5\varepsilon(k)+5(-1)^k\varepsilon(k)$

（2）方法一：采用部分分式展开法

$$F(z)=\frac{2z^2-3z+1}{z^2-4z-5}=2+\frac{6}{z-5}-\frac{1}{z+1}$$

$$\therefore f(k)=2\delta(k)+6\cdot5^{k-1}\varepsilon(k-1)-(-1)^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

方法二：采用留数法

$$F(z)z^{k-1}=\frac{2z^2-3z+1}{(z-5)(z+1)}z^{k-1}$$

当 k=0 时，有 $z_1=0, z_2=-1, z_3=5$ 三个极点

计算 $z_1=0$ 处的留数得到：

$$Res\left[F(z)z^{k-1}\right]|_{z=0}=\frac{2z^2-3z+1}{(z-5)(z+1)}|_{z=0}=-\frac{1}{5}$$

计算 $z_2=-1$ 处的留数得到：

$$Res\left[F(z)z^{k-1}\right]|_{z=-1}=\frac{2z^2-3z+1}{(z-5)z}|_{z=-1}=1$$

计算 $z_2=5$ 处的留数得到：

$$Res\left[F(z)z^{k-1}\right]|_{z=5}=\frac{2z^2-3z+1}{(z+1)z}|_{z=5}=\frac{6}{5}$$

$$\therefore f_1(k)=\sum \mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1}\right]=-\frac{1}{5}+1+\frac{6}{5}=2$$

当 k≥1 时，有 $z_1=-1, z_2=5$ 三个极点

计算 $z_1=-1$ 处的留数得到：

$$Res\left[F(z)z^{k-1}\right]|_{z=-1}=\frac{2z^2-3z+1}{(z-5)z}z^{k-1}|_{z=-1}=(-1)^k$$

计算 $z_2=5$ 处的留数得到：

$$Res\left[F(z)z^{k-1}\right]|_{z=5}=\frac{2z^2-3z+1}{(z+1)z}z^{k-1}|_{z=5}=6\cdot 5^{k-1}$$

$$\therefore f_2(k)=\sum \mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1}\right]=\left[(-1)^k+6\cdot 5^{k-1}\right]\varepsilon(k-1)$$

解得 $f(k)=f_1(k)+f_2(k)=2\delta(k)+\left[(-1)^k+6\cdot 5^{k-1}\right]\varepsilon(k-1)$

（3）方法一：采用部分分式展开法

$$F(z)=\frac{8(1-z^{-1}-z^{-2})}{2+5z^{-1}+2z^{-2}}=-4+\frac{20}{3}\frac{z}{z+2}+\frac{4}{3}\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$\therefore f(k) = -4\delta(k) + \left[\frac{20}{3}(-2)^k + \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^k\right]\varepsilon(k)$$

方法二：采用留数法

$$F(z)z^{k-1} = \frac{4(z^2 - z - 1)z^{k-1}}{(z+2)(z+\frac{1}{2})}$$

当 k=0 时，有 $z_1 = 0, z_2 = -\frac{1}{2}, z_3 = -2$三个极点

计算 $z_1 = 0$处的留数得到：

$$Res\left[F(z)z^{k-1}\right]|_{z=0} = -4$$

计算 $z_2 = -1$处的留数得到：

$$Res\left[F(z)z^{k-1}\right]|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

计算 $z_2 = 5$处的留数得到：

$$Res\left[F(z)z^{k-1}\right]|_{z=-2} = \frac{20}{3}$$

$$\therefore f_1(k) = \sum \mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1}\right] = -4 + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = 4$$

当 k≥1 时，有 $z_1 = -\frac{1}{2}, z_2 = -2$三个极点

计算 $z_1 = -\frac{1}{2}$处的留数得到：

$$Res\left[F(z)z^{k-1}\right]|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{2z^2 - 3z + 1}{(z-5)z} z^{k-1}|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{20}{3}(-2)^k$$

计算 $z_2 = -2$处的留数得到：

$$Res\left[F(z)z^{k-1}\right]|_{z=-2} = \frac{2z^2 - 3z + 1}{(z+1)z} z^{k-1}|_{z=-2} = \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^k$$

$$\therefore f_2(k) = \sum \mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1}\right] = \left[\frac{20}{3}(-2)^k + \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^k\right]\varepsilon(k-1)$$

解得 $f(k) = f_1(k) + f_2(k) = 4\delta(k) + \left[\frac{20}{3}(-2)^k + \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^k\right]\varepsilon(k-1)$

8-10　[18 分]

解：$F(z)=\frac{z+2}{2z^2-7z+3}=\frac{z+2}{(2z-1)(z-3)}$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z+2}{z(2z-1)(z-3)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore F(z)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z-3}-\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

（1）当收敛区为$|z|>3$时为右边序列：

$$f(k)=\frac{2}{3}\delta(k)+3^{k-1}\varepsilon(k)-(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)$$

（2）当收敛区为$|z|<\frac{1}{2}$时为左边序列：

$$f(k)=\frac{2}{3}\delta(k)-3^{k-1}\varepsilon(-k-1)+(\frac{1}{2})^k\varepsilon(-k-1)$$

（3）当收敛区为$\frac{1}{2}<|z|<3$时为双边序列：

$$f(k)=\frac{2}{3}\delta(k)-3^{k-1}\varepsilon(-k-1)-(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)$$

8-18　[20 分]

解：

（1） $y(k)+2y(k-1)=(k-2)\varepsilon(k), y(0)=1$

对方程左右两侧进行 z 变换得：

$$Y(z)+2\left[Y(z)z^{-1}+y(-1)\right]=\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{2z}{z-1}$$

由 $y(0)=1$和差分方程可求得 $y(-1)=-\dfrac{3}{2}$

$$\therefore \frac{Y(z)}{z}=\frac{z^2-3z+3}{(z-1)^2(z+2)}$$

$$Y(z)=-\frac{4}{9}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{13}{9}\cdot\frac{z}{z+2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\therefore y(k)=\left[-\frac{4}{9}+\frac{13}{9}(-2)^k+\frac{1}{3}k\right]\varepsilon(k)$$

（2） $y(k)+2y(k-1)+y(k-2)=\dfrac{4}{3}\cdot 3^k\varepsilon(k), y(-1)=0, y(0)=\dfrac{4}{3}$

对方程左右两侧进行 z 变换得：

$$Y(z)+2\left[Y(z)z^{-1}+y(-1)\right]+Y(z)z^{-2}+y(-1)z^{-1}+y(-2)=\frac{4}{3}\cdot\frac{z}{z-3}$$

由 $y(-1)=0, y(0)=\dfrac{4}{3}$和差分方程可求得 $y(-2)=0$

$$\therefore \frac{Y(z)}{z}=\frac{4}{3}\frac{z^2}{(z+1)^2(z-3)}$$

$$Y(z)=\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{(z+1)^2}+\frac{7}{12}\cdot\frac{z}{z+1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{z}{z-3}$$

$$\therefore y(k)=\left[-\frac{1}{3}k(-1)^{k-1}+\frac{7}{12}(-1)^k+\frac{3}{4}3^k\right]\varepsilon(k)$$

也可以写成 $y(k)=\left[(\dfrac{1}{3}k+\dfrac{7}{12})(-1)^k+\dfrac{3}{4}3^k\right]\varepsilon(k)$