

# 信号与系统

Lecture 14

第八章:离散时间系统的变换域分析(续)

§ 8.4 反z变换

§ 8.5 z变换与拉普拉斯变换的关系



- z变换的定义
- z变换的收敛区
- ■常用序列的z变换
- z变换的性质

# 本讲内容

- 反z变换的求解
- z变换与拉普拉斯变换的关系



## 收敛区域表征原函数时域分布特征

- 任何一个离散时间序列,只要存在z变换,其象函数收敛区一定分别是以下四种情况之一:
  - (1) z变换收敛区为有限z平面,这对应时域中有限长时间函数或序列。
  - (2) z变换收敛区为z平面中以原点为中心的某个圆的外部,这对应着时域中的右边时间函数或序列。
  - (3) z变换收敛区为z平面中以原点为中心的某个圆的内部,这对应着时域中的左边时间函数或序列。
  - (4) z变换收敛区为z平面中以原点为中心的内外半径有限的圆环,这对应着时域中的双边时间函数或序列。
- 前三种情况中,z平面的原点和无穷远点是否在收敛区内,根据时间序列在时域中的位置决定。



# § 8.4 反z变换

反z变换指由变换的象函数及收敛区求其原函数的过程。

# 反z变换解法

- 1. 幂级数展开法(长除法)
- 2. 部分分式展开法
- 3. 围线积分法(留数法)



#### 反z变换公式的推导

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n}$$

#### 回忆得到z变换的过程:

$$f(t) \to f(nT) \to f(n)$$

$$F(s) \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)z^{-n} \to F(z)$$

$$z = e^{sT}$$

$$e^{st} \to e^{snT} \to z^n$$

$$ds \to \frac{1}{T} \frac{dz}{z} \to \frac{dz}{z}$$

**2017/3/28 Tuesday** 反**z**变换 **z**变换与拉普拉斯变

$$\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \longrightarrow \oint_{\mathcal{C}}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

#### 反z变换:

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c} F(z) z^{n-1} dz$$

其中C为收敛区中以原点为中心的一个逆时针圆。



# 序列f(n)的z变换定义为z-1的幂级数:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n}$$

■ 一般而言,对于因果序列f(n)的单边z变换F(z):

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \cdots$$

$$f(0) = A_0, f(1) = A_1, f(2) = A_2, \cdots$$

■ 一般只能得到序列f(n)的前几项。



# 例1 设有z变换式:

$$F(z) = \frac{2z^2 - 0.5z}{z^2 - 0.5z - 0.5}$$

试用幂级数展开法进行反z变换。这里的f(k)

(1)为有始序列; (2)为左边序列。

解:要用展开F(z)为幂级数的方法求f(k),为 此将F(z)进行长除。

- (1)将F(z)的分子、分母按降幂排列,进行长除。
- (2)将F(z)的分子、分母按升幂排列,进行长除。

具体过程见P397 例题8-8。



回忆两个公式:

$$H(S) = \frac{1}{S - v} \qquad \Longrightarrow \qquad h(k) = v^{k-1}u(k-1)$$

$$H(S) = \frac{S}{S - v} \qquad \Longrightarrow \qquad h(k) = v^k u(k)$$

再回忆拉普拉斯反变换求解:

$$F(s) = B_0 + \frac{B_1}{s - v_1} + \frac{B_2}{s - v_2} + \frac{B_3}{(s - v_2)^2}$$

$$f(t) = B_0 \delta(t) + B_1 e^{v_1 t} u(t) + B_2 e^{v_2 t} u(t) + B_3 t e^{v_2 t} u(t)$$

2017/3/28 Tuesday 反z变换 z变换与拉普拉斯变



# 继续回忆:

$$f(k) = -v^k u(-k-1)$$
  $F(z) = \frac{z}{z-v}, |z| < |v|$ 

右边序列 <-> 收敛区: 圆外

左边序列 <-> 收敛区: 圆内

### ■ 部分分式展开法

当F(z)有n个单阶极点 $v_1, v_2, ..., v_n$ 时,

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{B_0}{z} + \frac{B_1}{z - v_1} + \frac{B_2}{z - v_2} + \dots + \frac{B_n}{z - v_n}$$

$$F(z) = B_0 + \frac{B_1 z}{z - v_1} + \frac{B_2 z}{z - v_2} + \dots + \frac{B_n z}{z - v_n}$$

若已知z变换的收敛区,或已知f(k)的类型,就可求解反z变换。

例如,若已知f(k)是因果序列,则

$$f(k) = B_0 \delta(k) + B_1 v_1^k u(k) + B_2 v_2^k u(k) + \dots + B_n v_n^k u(k)$$
 2017/3/28 Tuesday 反z变换 z变换与拉普拉斯变

10

例2 已知 
$$F(z) = \frac{3z^2 - 5z}{(z-1)(z-2)}$$
 ,收敛区

为 1 < |z| < 2 ,求原序列。

解: 
$$\frac{F(z)}{z} = \frac{3z-5}{(z-1)(z-2)} = \frac{2}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

$$\therefore F(z) = \frac{2z}{z-1} + \frac{z}{z-2}$$









右边序列

左边序列

$$\therefore f(k) = f_r(k) + f_l(k) = 2u(k) - 2^k u(-k-1)$$

2017/3/28 Tuesday 反z变换 z变换与拉普拉斯变

例2 已知 
$$F(z) = \frac{3z^2 - 5z}{(z-1)(z-2)}$$
 ,收敛区

为 1 < |z| < 2 ,求原序列。

解:

$$f(k) = 3\delta(k) + 2u(k-1) + ?$$

例3 求  $F(z) = \frac{z+2}{2z^2-7z+3}$  的原函数。

$$\mathbf{\widetilde{F}}: \frac{F(z)}{z} = \frac{z+2}{z(2z^2 - 7z + 3)} = \frac{1}{2} \frac{z+2}{z(z-\frac{1}{2})(z-3)} = \frac{\frac{2}{3}}{z} + \frac{-1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{z-3}$$

$$\therefore F(z) = \frac{2}{3} - \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \frac{z}{z - 3}$$

(1) 若f(k) 为右边序列,则

$$f(k) = \frac{2}{3}\delta(k) - (\frac{1}{2})^k u(k) + \frac{1}{3}3^k u(k)$$

其收敛区为 |z| > 3

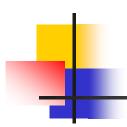


#### (2) 若f(k)为左边序列

$$F(z) = \frac{2}{3} - \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \frac{z}{z - 3}$$

$$f(k) = \frac{2}{3}\delta(k) + (\frac{1}{2})^k u(-k-1) - \frac{1}{3}3^k u(-k-1)$$

其收敛区为 
$$|z| < \frac{1}{2}$$



### (3) 若f(k) 为双边序列

$$F(z) = \frac{2}{3} - \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \frac{z}{z - 3}$$

$$f(k) = \frac{2}{3}\delta(k) - (\frac{1}{2})^k u(k) - \frac{1}{3}3^k u(-k-1)$$

其收敛区为  $\frac{1}{2} < |z| < 3$ 



# ■ 留数法(围线积分法)

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C} F(z)z^{k-1}dz$$

$$= \sum_{m} [F(z)z^{k-1} \text{ 在C内的留数}]$$

$$= \sum_{m} \text{Re} s[F(z)z^{k-1}]_{z=z_{m}}$$

式中Res表示极点的留数, $z_m$ 为 $F(z)z^{k-1}$ 的极点。如果 $F(z)z^{k-1}$ 在 $z=z_m$ 处有s阶极点,此时它的留数由下式确定:

$$\operatorname{Re}_{S}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_{m}} = \frac{1}{(s-1)!} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} [(z-z_{m})^{s} F(z)z^{k-1}]_{z=z_{m}}$$

# 若只含有一阶极点,即s=1,此式简化为

Res[
$$F(z)z^{k-1}$$
] <sub>$z=z_m$</sub>  = [ $(z-z_m)F(z)z^{k-1}$ ] <sub>$z=z_m$</sub> 

- 这种方法是借助于复变函数的留数定理,把反z变换的积分表示为围线C内包含的F(z)z<sup>n-1</sup>的各极点的留数之和。在使用这种方法时要注意以下两点:
  - 1、对于同一个表达式F(z),当给定的收敛区不同时,所选择的积分围线也不相同,最后将得到不同的逆变换序列f(n)。
- 2、应当注意收敛域内围线所包围的极点情况,特别要关 2017海烈士不同的加值,在不是处的极点可能具有不同的阶次。

17



# 例4 用留数法求解例1(1): $F(z) = \frac{2z^2 - 0.5z}{z^2 - 0.5z - 0.5}$

解:

$$F(z)z^{k-1} = \frac{(2z^2 - 0.5z)}{z^2 - 0.5z - 0.5}z^{k-1} = \frac{(2z - 0.5)z^k}{(z - 1)(z + 0.5)}$$

若已知f(k)为因果序列,则当k<0时,f(k)=0;

当k≥0时极点的情况:显然其极点在z=1和z=-0.5,那么 被积函数在这两个极点处的留数分别为

Re 
$$s[F(z)z^{k-1}]_{z=1} = \frac{(2z-0.5)z^k}{z+0.5}\Big|_{z=1} = 1$$

Re 
$$s[F(z)z^{k-1}]_{z=0.5} = \frac{(2z-0.5)z^k}{z-1}\Big|_{z=-0.5} = (-0.5)^k$$

所以  $f(k) = u(k) + (-0.5)^k u(k)$ 

此题若已知f(k)的收敛区为|z|<1,可知此序列为左边序列,此时不能简单地判断k<0时f(k)的取值。

k<0时极点的情况:这时除了在z=1和z=-0.5的两个极点外,在z=0处也会出现极点,且随着k值的不同,z=0处极点的阶数也不同,对留数的计算带来不便。

例如, 若k=-1,则z=0处极点为一阶,其留数为:

Re 
$$s[F(z)z^{-2}]_{z=0} = z \frac{(2z - 0.5)z^{-2}}{(z-1)(z+0.5)}\Big|_{z=0} = 1$$

例如, 若k=-2, 则z=0处极点为二阶, 其留数为:

$$\operatorname{Re} s[F(z)z^{-2}]_{z=0} = \frac{d}{dz} \left[ z^2 \frac{(2z-0.5)z^{-2}}{(z-1)(z+0.5)} \right]_{z=0} = -5$$



# § 8.5 z变换与拉普拉斯变换的关系

拉普拉斯变换和z变换是两种不同的变换,分别处理连续时间信号和离散时间信号。但是,在一定的条件下,两者也是相互联系的。

#### 下面分别讨论:

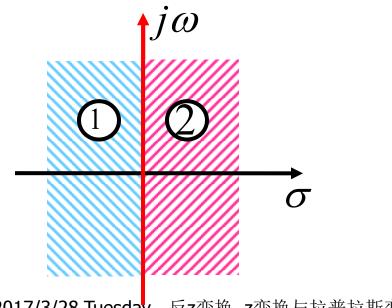
- 1、s平面与z平面的对应关系;
- 2、由z变换得到拉氏变换、傅氏变换;
- 3、由拉氏变换得到z变换。

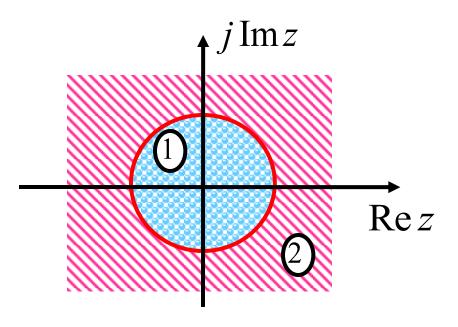


换

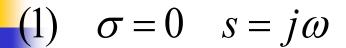
# 1、从s平面到z平面的映射

设 
$$s = \sigma + j\omega$$
  $z = re^{j\theta}$  
$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T}e^{j\omega T}$$
则  $|z| = r = e^{\sigma T}$   $\theta = \omega T$ 





2017/3/28 Tuesday 反z变换 z变换与拉普拉斯变



$$|z| = e^{\sigma T} = 1$$

(2) 
$$\sigma < 0$$
  $s = \sigma + j\omega$ .  $|z| < 1$ 

$$(3)\sigma > 0 \quad |z| > 1$$

$$(4)\sigma = constant > 0$$
$$|z| = R > 1$$

$$(5)\sigma = constant < 0$$

z=r<1 2017/3/28 Tuesday 反z变换 z变换与拉普拉斯变

换

Re[z]

 $j \operatorname{Im}[z]$ 

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

$$\theta = \omega T$$

 $j \operatorname{Im}[z]$ 

$$(6)\omega = 0$$
  $s = \sigma$ 

$$(7)\omega = constant = \omega_0$$
 ...

$$(8)\omega = \omega_1 \to \omega_2.$$

$$(9)\omega = \frac{\pi}{T}$$

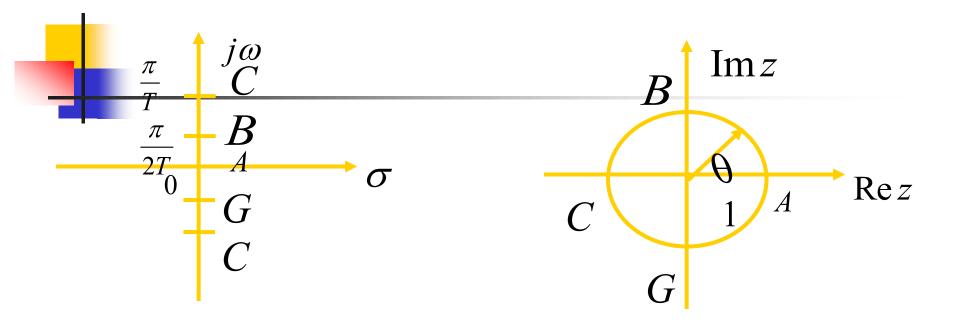
$$(10)\omega = 0 \to 2k\frac{\pi}{T} \ .$$

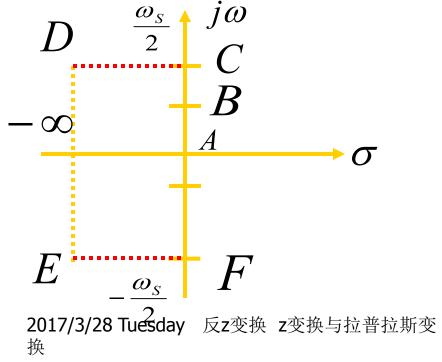


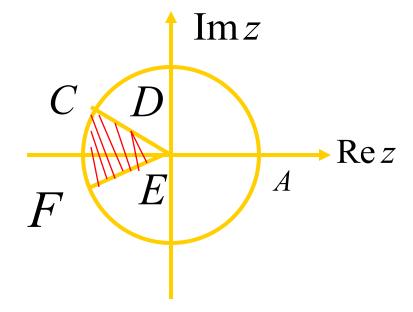
 $\mathcal{W}_1$ 

**2017/3/28 Tuesday** 反z变换 z变换与拉普拉斯变

Re[z]

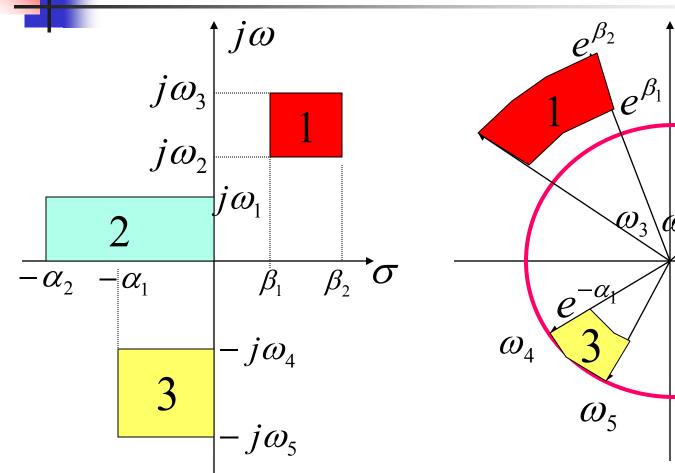








#### Z平面



$$e^{\beta_{2}} \int Im[z]$$

$$\omega_{3} \omega_{2} \omega_{1}$$

$$e^{-\alpha_{1}}$$

$$e^{-\alpha_{2}}$$

$$e^{-\alpha_{2}}$$

$$\omega_{4}$$

$$\omega_{5}$$

$$Re[z]$$

$$\frac{\pi}{2T} < \omega_2 < \omega_3 < \frac{\pi}{T}$$

 $\frac{\pi}{2T} < \omega_4 < \omega_5 < \frac{\pi}{T}$ 

**2017/3/28 Tuesday** 反**z**变换 **z**变换与拉普拉斯变换



s平面极点的位置、z平面极点的位置 和时域波形特征的对应关系, 其基本规 律遵从如下关系式:

$$z = e^{sT} = re^{j\theta} = e^{(\sigma + j\omega)T}$$

$$r = e^{\sigma T}$$

$$\theta = \omega T$$



# 当选定T之后有 $\omega_{s} = \frac{2\pi}{T}$ ,为简化表达式取

 $T=1, \omega_{\rm S}=2\pi$ .注意图中对应关系。

$$\omega = 0 \quad \omega = \frac{\omega_s}{8} \quad \omega = \frac{\omega_s}{4} \quad \omega = \frac{\omega_s}{2}$$

$$\theta = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \theta = \pi$$

将是周期重复,z-s映射并非单值而

2017/3/28 Tuesday 反复换工变换与拉普拉斯变

	s平面的位置	波形特征	z平面极点的位置
幅度	虚轴σ=0	等幅	r=1 单位圆
	右半平面σ>0	增幅	r>1 圆外
	左半平面σ<0	减幅	r<1 圆内
	实轴ω=0	无振荡	θ=0(正实轴)
	水平上下移	振荡频率个	呈扇形展开
频	(共轭)ω↑		θ 🕇
率	$\triangleq \omega = \frac{\omega_{\rm s}}{2} = \frac{\pi}{T}$	达到最高频率 此后将重复	θ=π负实轴

ZUI//3/28 Tuesday 及Z变换 Z变换与拉普拉斯变换

28

# 2、z变换 → 拉普拉斯变换

前面,我们借助理想抽样信号的单边拉氏变换引出了z变换,即

$$F(z)|_{z=e^{sT}}=F_{\delta}(s)$$

离散序列的Z变换

理想取样信号的L变换

$$F(z)|_{z=e^{j\omega T}} = F_{\delta}(j\omega)$$

理想取样信号的F变换



# 3、拉普拉斯变换 — z变换

$$F(s) \longrightarrow f(t) \longrightarrow f_{\delta}(n) \longrightarrow F(z)$$

为导出两者的关系,现在由拉普拉斯反变换开始:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds \Rightarrow f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{snT} ds$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)e^{snT}ds\right)z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)\sum_{n=0}^{\infty}(e^{sT}z^{-1})^nds$$

 $ROC: \left|e^{sT}z^{-1}\right| < 1 \Longrightarrow \left|z\right| > \left|e^{sT}\right|$  2017/3/28 Tuesday 反z变换 z变换与拉普拉斯变



$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{sT}z^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{sT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{sT}}$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \frac{F(s)}{1 - e^{sT} z^{-1}} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \frac{zF(s)}{z - e^{sT}} ds$$

$$F(z) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Re} s \left[ \frac{zF(s)}{z - e^{sT}} \right]_{s=p_i}$$



# 连续信号的拉氏变换与z变换的关系

$$F(z) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Re} s \left[ \frac{zF(s)}{z - e^{sT}} \right]_{s=p_i}$$

# 若F(s)只含一阶极点,则

$$F(s) = \sum_{i} \frac{A_{i}}{s - p_{i}}$$

$$F(z) = \sum_{i} \frac{zA_{i}}{z - e^{p_{i}T}}$$



# 小结

- 在进行反z变换时要注意收敛区的问题
- z变换与拉普拉斯变换的关系密切
  - 从s平面到z平面
  - 从L变换到z变换

# 课外作业

阅读:8.4-8.5; 预习:8.6-8.7

作业:8.7(6) 用部分分式展开法

8.11