3-3　[30 分]

解：

首先我们证明两相互正交的信号 $f_1(t)$与 $f_2(t)$同时作用于单位电阻上产生的功率，等于每一信号单独作用时产生的功率之和：

不妨设 $f_1(t)$与 $f_2(t)$同时作用于单位电阻上的开始和结束时间分别为 t_1 和 t_2 ,则两信号单独作用时的功率分别为：

$$P_1(t_1,t_2)=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f_1^{\,2}(t)dt$$

$$P_2(t_1,t_2)=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f_2^{\,2}(t)dt$$

而两信号同时作用的信号为： $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$，故同时作用时的功率为：

$$\begin{aligned}P_{add}(t_1,t_2)&=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f_1(t)+f_2(t)\right]^2dt\\&=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f_1^2(t)+f_2^2(t)+2f_1(t)f_2(t)\right]dt\\&=\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t)dt+2\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt+\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)dt\right]\end{aligned}$$

由于 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 相互正交，因此 $\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt=0$ 则

$$P_{add}(t_1,t_2)=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f_1^2(t)+f_2^2(t)\right]dt=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t)dt+\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)dt=P_1+P_2$$

故结论成立。

（1）用 $f_1(t)=\cos\omega t, f_2(t)=\sin\omega t$ 验证该结论：

单独作用时的功率分别为：

$$P_1=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1^{\,2}(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(\omega t)dt=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[1+\cos(2\omega t)\right]dt$$

$$=\frac{1}{4\pi}(2\pi-0)=\frac{1}{2}$$

$$P_2=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_2^{\,2}(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(\omega t)dt=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[1-\cos(2\omega t)\right]dt=\frac{1}{2}$$

同时作用时的功率为：

$$P_{add}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[f_1(t)+f_2(t)\right]^2dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[f_1^2(t)+f_2^2(t)+2f_1(t)f_2(t)\right]dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin\omega t+\cos\omega t)^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+\sin 2\omega t)dt=\frac{1}{2\pi}(2\pi-0)=1$$

$\therefore P_{\mathrm{add}}=P_1+P_2$，验证成立。

3-4 [40 分]

该信号有限傅里叶级数表达式为 $f(t)=\frac{A}{2}+\frac{4A}{\pi^2}\cos t$

解：

该信号数学表达式为 $f(t)=\begin{cases}A(1+\frac{t}{\pi}),-\pi\le t<0\\A(1-\frac{t}{\pi}),0\le t\le\pi\end{cases}$，$\because T=2\pi\ \therefore\Omega=\frac{2\pi}{T}=1$ $\because f(t)=f(-t)\ \therefore b_n=0$

则 $a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0A(1+\frac{t}{\pi})dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}A(1-\frac{t}{\pi})dt=\frac{1}{\pi}*\frac{\pi-(-\pi)}{2}A=A$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0A(1+\frac{t}{\pi})\cos ntdt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}A(1-\frac{t}{\pi})\cos ntdt$$

$=\frac{A}{\pi}\left[\frac{\cos nt}{\pi n^2}\Big|_{-\pi}^0-\frac{\cos nt}{\pi n^2}\Big|_0^{\pi}\right]=\begin{cases}0,n=2k\\\frac{4A}{(\pi n)^2},n=2k+1\end{cases}$，k∈N

∴该函数傅里叶级数表达式为

$$f(t)=A\left[\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}(\cos t+\frac{1}{3^2}\cos 3t+\frac{1}{5^2}\cos 5t+...+\frac{1}{n^2}\cos nt+...\right],n=2k+1$$

$$E=\int_0^T f^2(t)dt=\int_{-\pi}^0A^2(1+\frac{t}{\pi})^2dt+\int_0^{\pi}A^2(1-\frac{t}{\pi})^2dt=\frac{2}{3}\pi A^2$$

取直流项 a0=A 来近似，则 $\overline{\varepsilon_0^2(t)}=\frac{1}{T}\left[\int_0^T f^2(t)dt-c_1^2k_1\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{3}\pi A^2-(\frac{A}{2})^2\cdot 2\pi\right]=\frac{A^2}{12}$

$$\frac{\overline{\varepsilon_0^2(t)}}{E}=\frac{\frac{A^2}{12}}{\frac{2}{3}\pi A^2}=\frac{1}{8\pi}\approx 3.98\%>1\%$$，不满足近似的精度要求。

取直流项 a0=A 和基波分量 n=1 来近似，则

$$\overline{\varepsilon_0^2(t)}=\frac{1}{T}\left[\int_0^T f^2(t)dt-c_1^2k_1-c_2^2k_2\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{3}\pi A^2-(\frac{A}{2})^2\cdot 2\pi-(\frac{4A}{\pi^2})^2\cdot\pi\right]=\frac{A^2}{12}-\frac{8A^2}{\pi^4}$$

$$\frac{\overline{\varepsilon_0^2(t)}}{E}=\frac{\frac{A^2}{12}-\frac{8A^2}{\pi^4}}{\frac{2}{3}\pi A^2}\approx 0.058\%<1\%$$，满足近似的精度要求。

∴该信号有限傅里叶级数表达式为：

$$f(t)=\frac{A}{2}+\frac{4A}{\pi^2}\cos t$$

3-13 [10 分]

证明：

根据尺度变换性质，若 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，则 $f(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$

由题意得 $f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$，则 $f(-t)\leftrightarrow\frac{1}{|-1|}F(\frac{j\omega}{-1})$，即 $f(-t)\leftrightarrow F(-j\omega)$

$\because f_e(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]$

$\therefore F_e(j\omega)=\frac{1}{2}[F_e(j\omega)+F_e(-j\omega)]=\frac{1}{2}[R(\omega)+jX(\omega)+R(j\omega)-jX(\omega)]=R(\omega)$

同理，$\because f_o(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]$

$F_o(j\omega)=\frac{1}{2}[F_o(j\omega)-F_o(-j\omega)]=\frac{1}{2}[R(\omega)+jX(\omega)-R(j\omega)+jX(\omega)]=jX(\omega)$

证明成立。

附加题　[20 分]

解：

由图可知 $f(t)=\begin{cases} V, nT-\dfrac{\tau}{2}\le t\le nT+\dfrac{\tau}{2} \\ 0, nT-\dfrac{T}{2}\le t\le nT-\dfrac{\tau}{2} \parallel nT+\dfrac{\tau}{2}\le t\le nT+\dfrac{T}{2} \end{cases}$

指数形式为：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}dt, \omega_1=\frac{2\pi}{T}$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}Ve^{-jn\omega_1 t}dt=\frac{V\tau}{T}Sa(\frac{n\omega_1\tau}{2})$$，$Sa(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

$$f(t)=\frac{V\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa(\frac{n\omega_1\tau}{2})e^{jn\omega_1 t}, \omega_1=\frac{2\pi}{T}$$