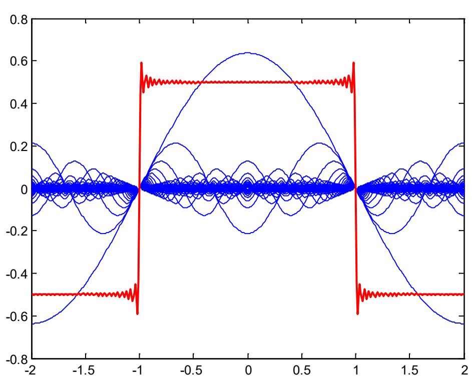
信号与系统

第4讲 系统零状态响应的卷积积分法

郭红星

华中科技大学计算机学院

April 23, 2020



上一讲内容回顾

- 连续时间系统的时域分析方法简介
- 连续时间LTI系统响应的经典解法
- 连续时间LTI系统响应的新解法
- 系统零输入响应的求解
- 系统零状态响应之单位冲激响应$h(t)$

本讲内容

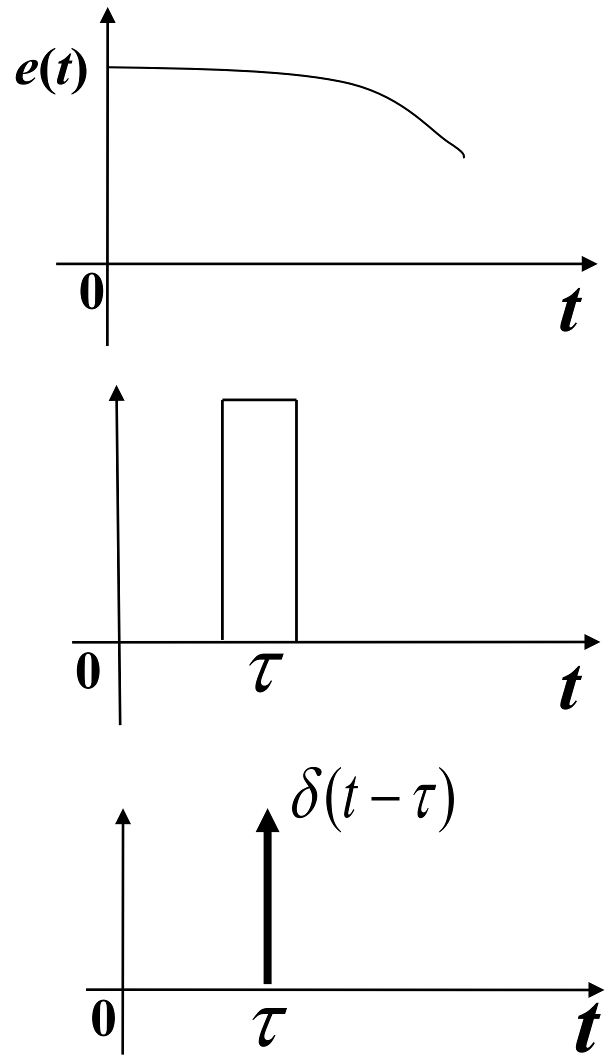
- 卷积积分的推导
- 卷积的图解说明
- 卷积的性质
  - 着重从系统层面，物理含义上理解
  - 系统与子系统间单位冲激响应的关系
- 卷积的计算

本讲要解决的问题：如何求一般激励信号作用下的系统的零状态响应？

4.1 零状态响应的卷积法

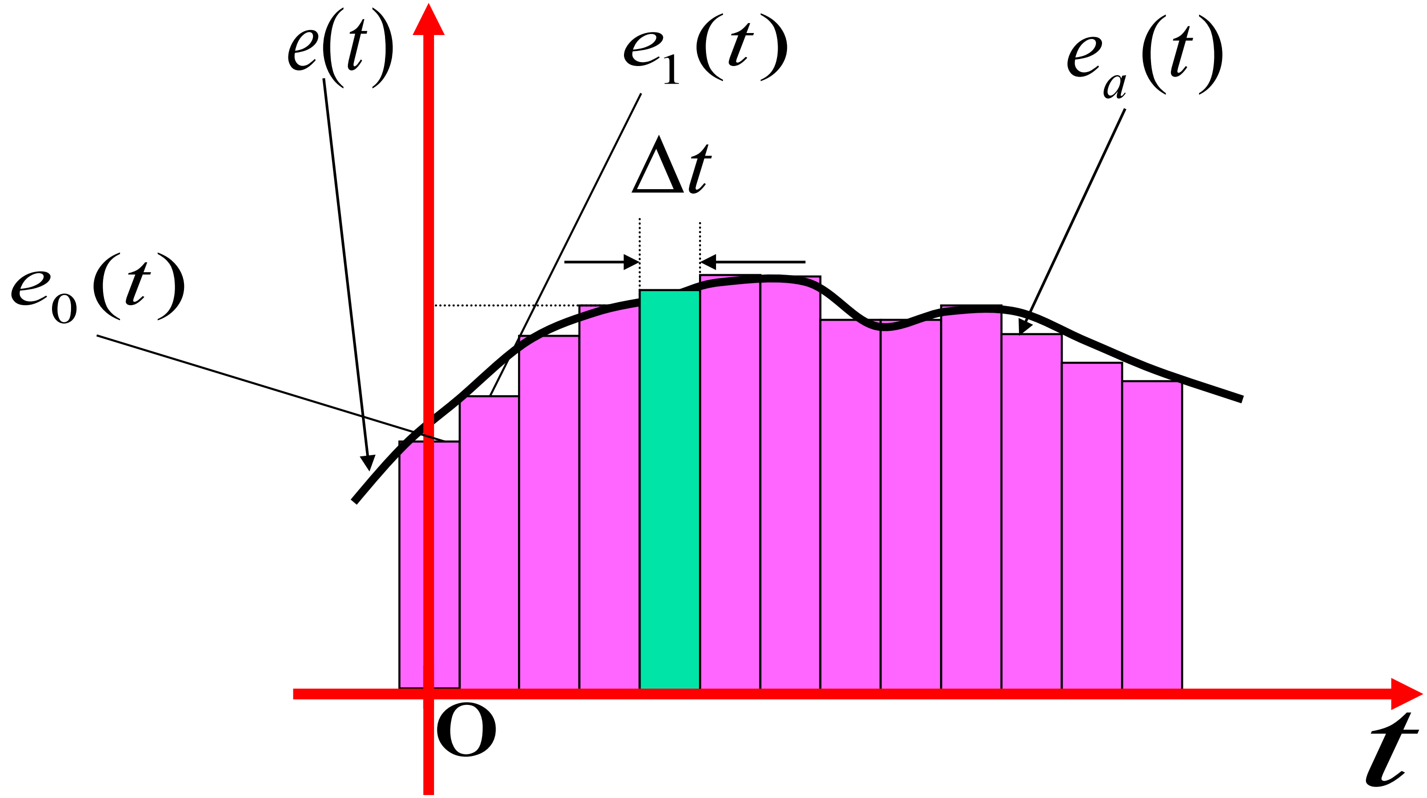
求一般激励信号的系统零状态响应

- **基本思路：**
  1. 能否用简单信号的组合来表示一般激励信号？
  2. 其中，用一系列脉冲近似激励信号是一种值得一试的方法！
  3. 这一系列脉冲还能演化成什么？
  4. 我们的想法能实现吗？



- **下面对上述问题进行研究**

一般信号分解成脉冲分量之和



$$e(t) \approx e_a(t) = \cdots + e(0)[u(t+\frac{\Delta t}{2}) - u(t-\frac{\Delta t}{2})] + e(\Delta t)[u(t-\frac{\Delta t}{2}) - u(t-\frac{3\Delta t}{2})] + \cdots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k\Delta t)[u(t-\frac{(2k-1)\Delta t}{2}) - u(t-\frac{(2k+1)\Delta t}{2})]$$

由脉冲分量之和演化为成冲激分量之和的过程

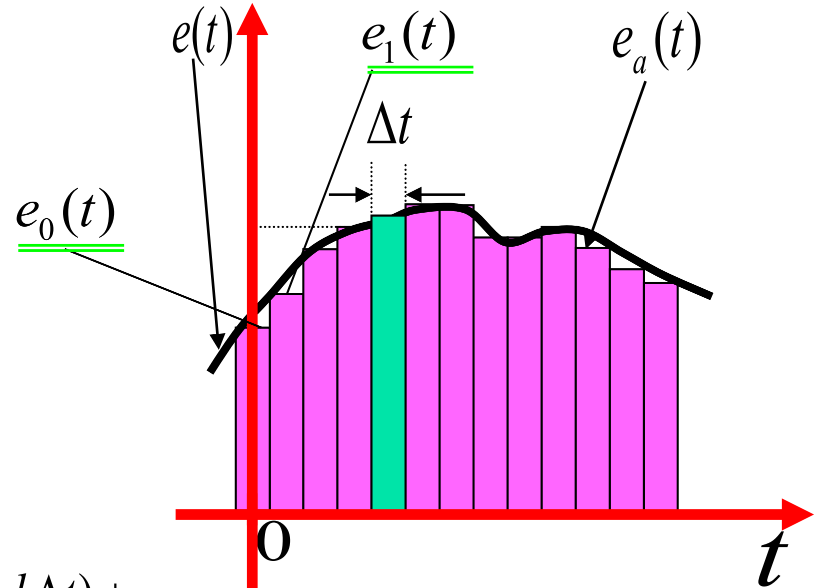
思考：当$\Delta t\rightarrow 0$时，$e_0(t)\rightarrow$？

$$\boxed{e_0(t)=e(0)\Delta t\delta(t)}$$

$$e_1(t)=e(\Delta t)\Delta t\delta(t-\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$e_k(t)=e(k\Delta t)\Delta t\delta(t-k\Delta t)$$



$$e(t)\approx e_a(t)$$

$$=\cdots+e(0)\Delta t\delta(t)+\cdots+e(k\Delta t)\Delta t\delta(t-k\Delta t)+\cdots$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e(k\Delta t)\Delta t\delta(t-k\Delta t)$$

由于Δt为无穷小量，即$\Delta t\rightarrow d\tau$，$k\Delta t\rightarrow\tau$

$$\therefore e(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

实际上是冲激信号的筛选性质！

似曾相识？

根据上述结果：对于求一般激励信号下的系统的零状态响应，你有什么好的想法吗？

借助于冲激响应求系统零状态响应

1. 所研究的问题:LTI系统对任意激励信号的零状态响应

2. 已知条件

- 激励信号的分解
- 系统的LTI性

3. 问题的转化:求解任意输入下的响应转换为求解系统对一系列冲激信号响应的迭加

系统零状态响应卷积积分公式的推导

a. 把激励表示成一系列冲激信号的线性组合

$$e(t) \approx e_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k\Delta t)\Delta t\delta(t-k\Delta t)$$

变量置换

$\Delta t \to 0 \to d\tau$

$k\Delta t \to \tau$

b. 求冲激序列的响应

$$\delta(t) \to h(t)$$

$$e(k\Delta t)\Delta t\delta(t-k\Delta t) \to e(k\Delta t)\Delta t \cdot h(t-k\Delta t)$$

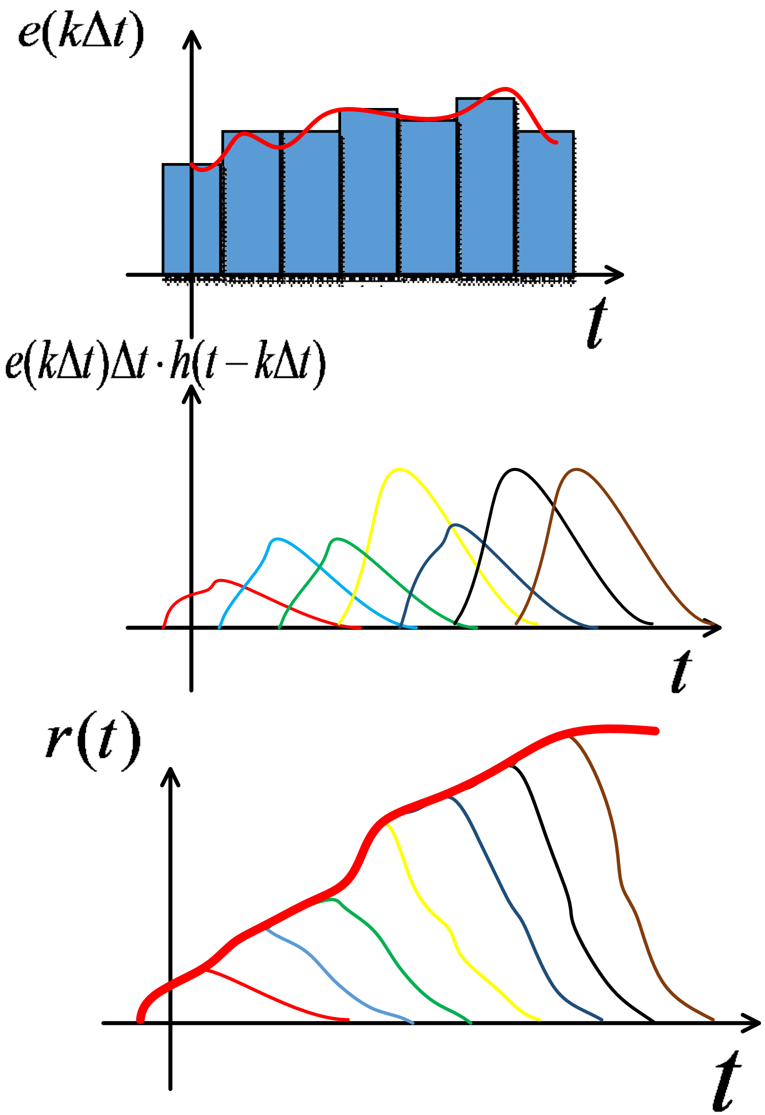
$$r(t) \approx r_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k\Delta t)\Delta t \cdot h(t-k\Delta t)$$

求和变积分

$$\boxed{r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

卷积积分公式

卷积公式的物理解释



$$e(k\Delta t)\Delta t\delta(t-k\Delta t)$$

$$e(k\Delta t)\Delta t\cdot h(t-k\Delta t)$$

$$r(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e(k\Delta t)\Delta t\cdot h(t-k\Delta t)$$

卷积积分计算的图解说明

$$r(t)=e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

① 将$e(t)$和$h(t)$中的**自变量由t改为τ**，τ成为函数的自变量

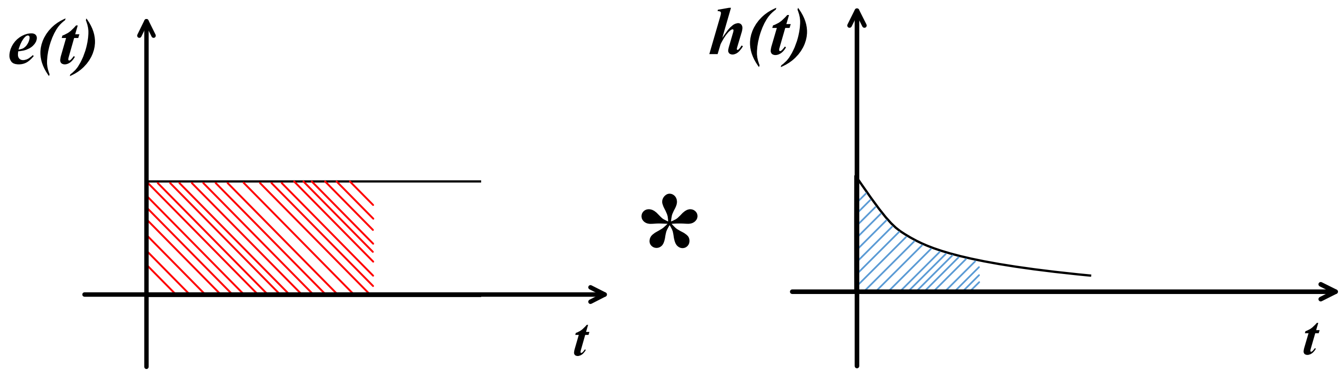
② 把其中一个信号**反褶、平移**

$$h(\tau)\xrightarrow{\text{反褶}}h(-\tau)\xrightarrow{\text{向右平移 }t}h(-(\tau-t))=h(t-\tau)$$

③ 将$e(\tau)$ 与$h(t-\tau)$**相乘**后积分

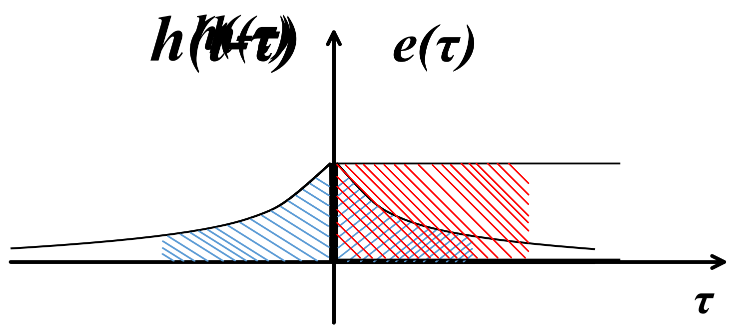
例题1：用图解法计算卷积

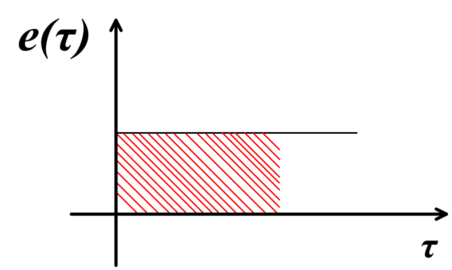
试计算$e(t)*h(t)$，其中$e(t)=u(t)$，$h(t)=e^{-t}u(t)$。



解: $r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$

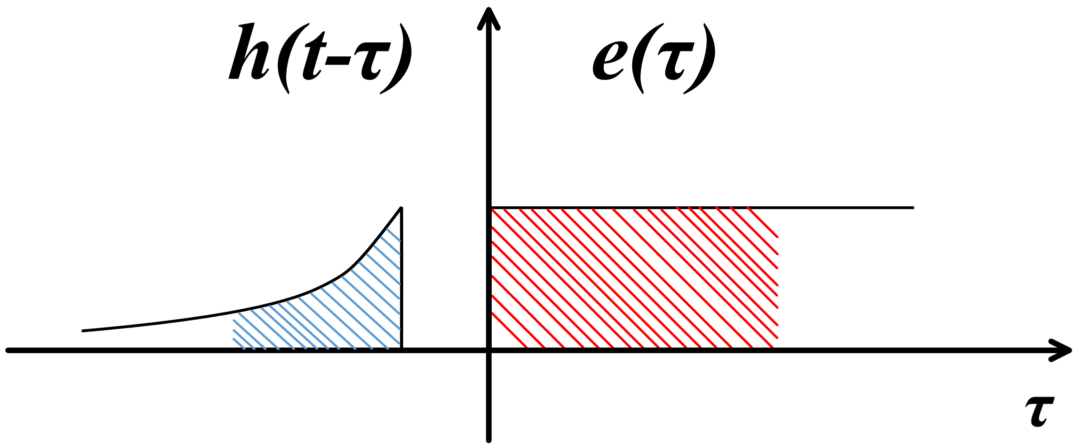
1. $-\infty \le t \le 0$　重合面积为零：$e(t)*h(t)=0$





例题1：用图解法计算卷积（续）

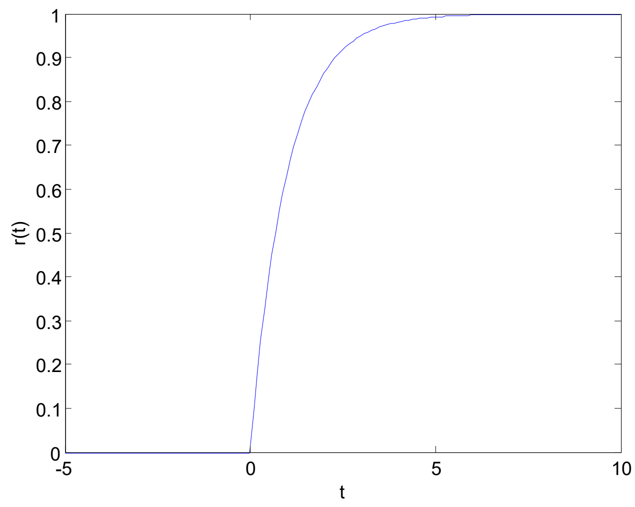
$$2.\ if \quad 0 < t \le \infty$$



请看演示

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} e^{-(t-\tau)}d\tau = 1 - e^{-t}$$

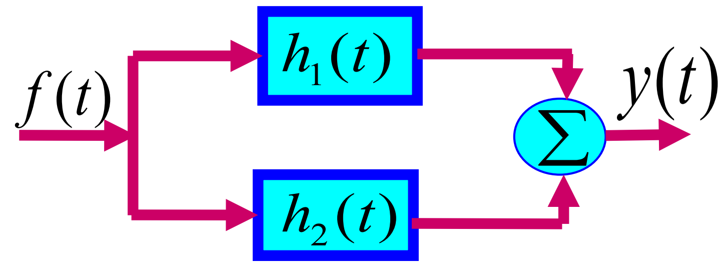


4.2 卷积的性质及应用

卷积的性质：卷积代数

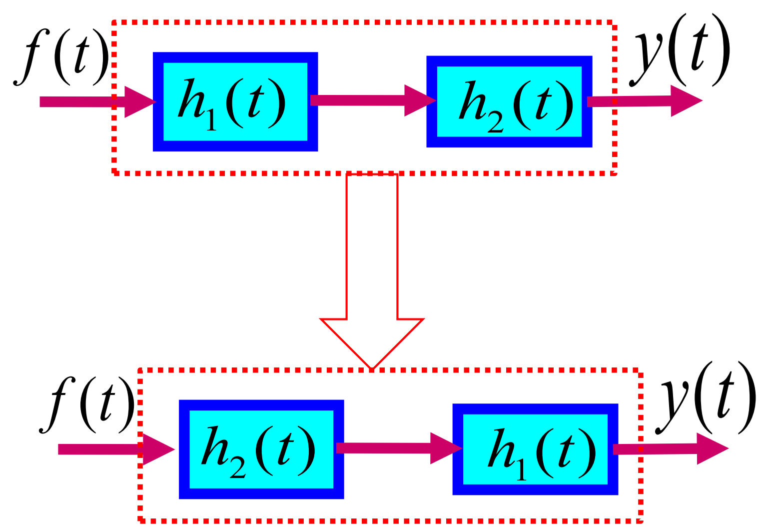
① **分配律(distributive law)**

$$f*[h_1+h_2]=f*h_1+f*h_2$$



② **结合律(associative law)**

$$[f*h_1]*h_2=f*[h_1*h_2]$$



③ **交换律(commutative law)**

$$h_1*h_2=h_2*h_1$$

卷积的移不变性及奇异信号的卷积特性

■移不变性

设 $f(t)*h(t)=r(t)$, 则 $f(t-t_0)*h(t)=r(t-t_0)$

■与δ(*t*)有关的卷积

$$1.\ f(t)*\delta(t)=f(t) \qquad f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

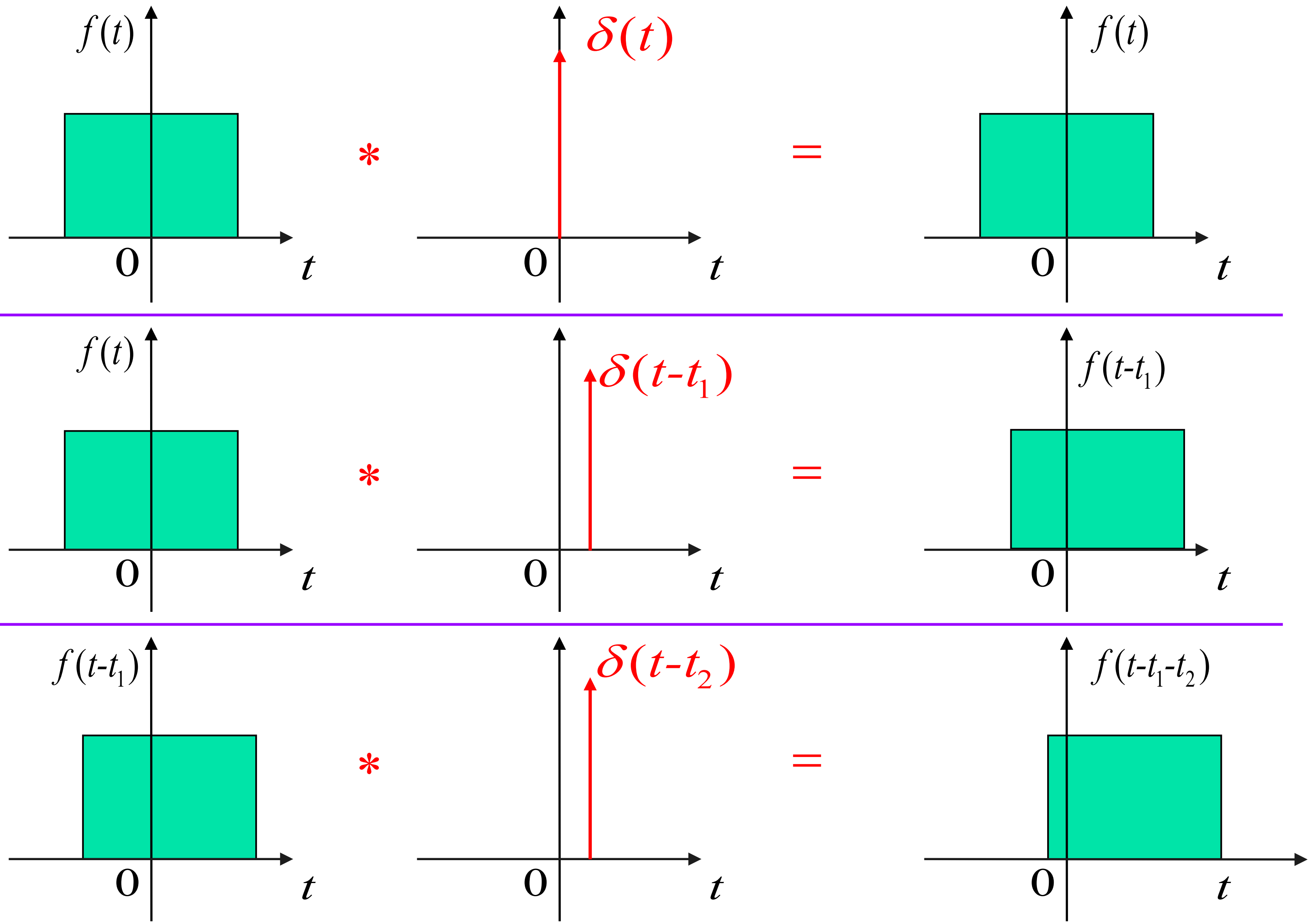
$$f(t-t_1)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0-t_1) \qquad \delta(t)*\delta(t)=\delta(t)$$

$$2.\ f(t)*\delta'(t)=f'(t)$$ 微分运算

$$3.\ f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$$ 积分运算

不用证明！
直观理解？

奇异信号的卷积特性的图解



卷积的微分和积分性质

1. 两函数相卷积后的导数等于两函数之一的导数与另一函数相卷积

$$\frac{d}{dt}[f_1 * f_2] = \frac{df_1}{dt} * f_2 = f_1 * \frac{df_2}{dt}$$

2. 两函数相卷积后的积分等于两函数之一的积分与另一函数相卷积

$$\int_{-\infty}^{t} [f_1 * f_2] dt = f_1 * \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau) d\tau$$

卷积的微分和积分性质的推广

若 $f_1 * f_2 = s(t)$，则：

$$f_1^{(m)}(t) * f_2^{(n)}(t) = s^{(m+n)}(t)$$

$$f_1 * f_2 = \frac{df_1}{dt} * \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)d\tau = \frac{d^2 f_1}{dt^2} * \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)d\tau$$

与典型奇异信号相关的几个特例

$$f(t) * \delta^{(k)}(t) = f^{(k)}(t)$$

$$f(t) * \delta^{(k)}(t - t_0) = f^{(k)}(t - t_0)$$

$$f(t) = f(t) * \delta'(t) * u(t) = f'(t) * u(t)$$

卷积积分的计算方法

① 用**图解法**计算卷积

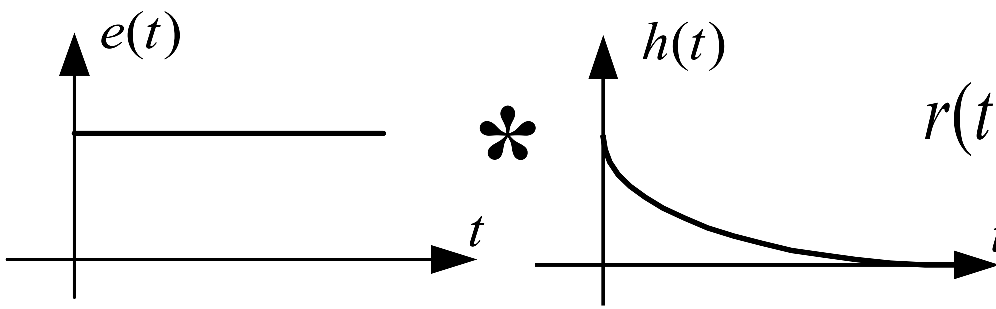
② 用**函数式**计算卷积

③ 利用**性质**计算卷积

④ 数值解法

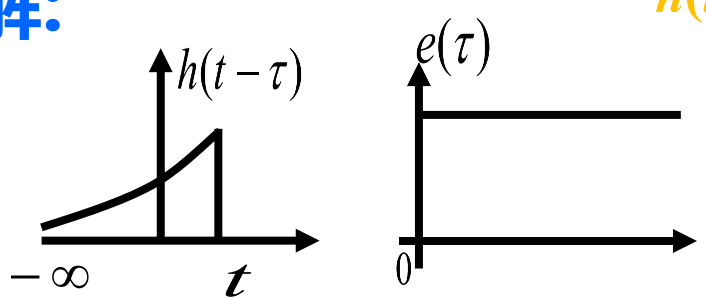
例题1的函数式解法

试计算$e(t)*h(t)$，其中$e(t)=u(t)$，$h(t)=e^{-t}u(t)$。



$$r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

解:



$h(t\text{-}\tau)$→非零下限为$-\infty$
$u(\tau)$→非零下限为0
} 卷积积分下限为0

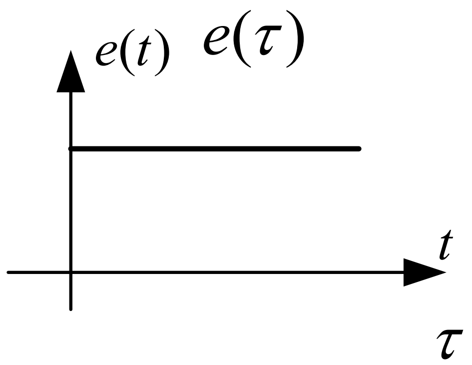
$h(t\text{-}\tau)$→非零上限为t
$u(\tau)$→非零上限为∞
} 卷积积分上限为t

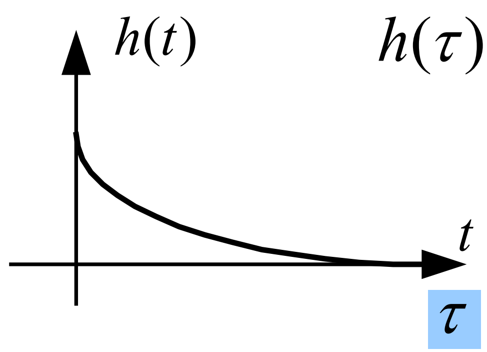
若两个函数的左边界分别为t_{l1}，t_{l2},右边界分别为 t_{r1}，t_{r2},积分的下限为$\max[t_{l1}, t_{l2}]$;积分的上限为$\min[t_{r1},t_{r2}]$

例题1的函数式解法(续)

$$r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t}e^{-(t-\tau)}d\tau=1\cancel{-}e^{-t}$$

思考:这个结果对吗?

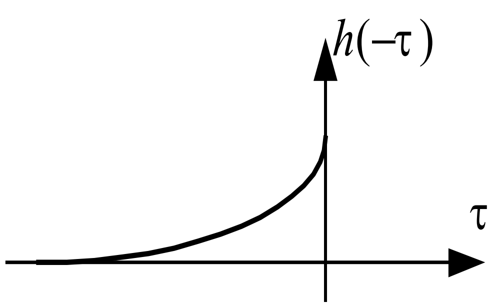


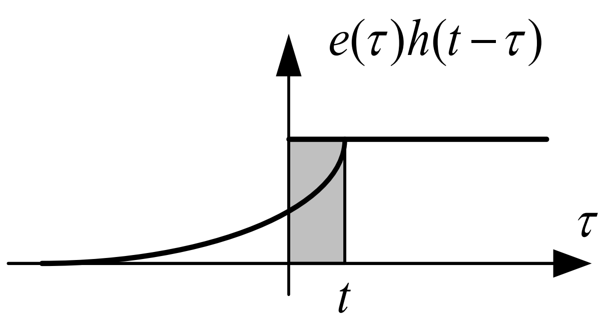


错在定义域的确定上,

正确的结果为:

$$=(1-e^{-t})u(t)$$



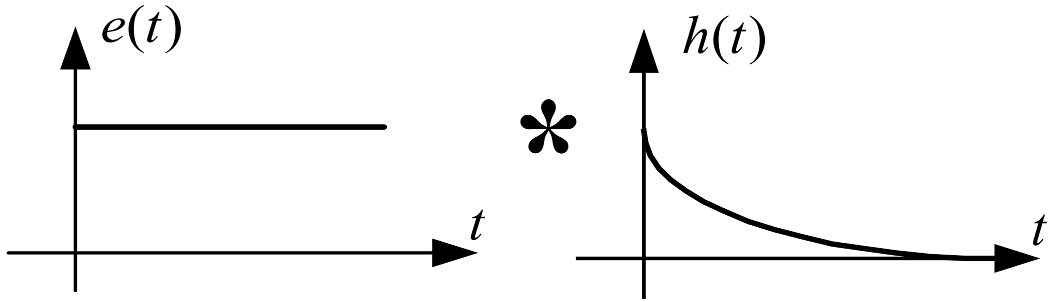


使用函数法时,

定义域的确定!

例题1的利用卷积性质解法

试计算$e(t)*h(t)$，其中$e(t)=u(t)$，$h(t)=e^{-t}u(t)$。



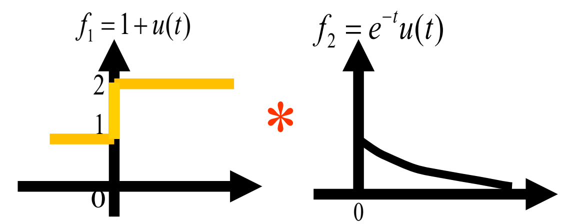
解:

$$r(t)=e(t)*h(t)=\frac{de(t)}{dt}*\int_0^t h(\tau)d\tau$$

$$=\delta(t)*\int_0^t e^{-\tau}d\tau=\int_0^t e^{-\tau}d\tau=(1-e^{-t})u(t)$$

例题2

- 计算右图中两信号的卷积



解:方法一图解法，将f_2反褶、平移

$t<0$时: $f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{t} 1 \times e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t}e^{\tau} |_{-\infty}^{t} = e^{0} - 0 = 1$

$t>0$时: $f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{0} e^{-(t-\tau)} d\tau + \int_{0}^{t} 2e^{-(t-\tau)} d\tau = 2 - e^{-t}$

$$= 1 + (1 - e^{-t})u(t)$$

方法二利用卷积的微积分性质直接计算

$$f_1 * f_2 = \frac{df_1}{dt} * \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau) d\tau = \delta(t) * \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau} u(\tau) d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} e^{-\tau} d\tau = (1 - e^{-t}\cancel{)}u(t)$$

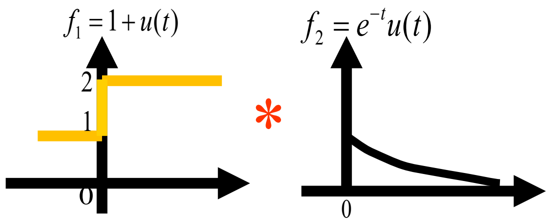
与图解法的结果不同?

- 注意积分常数的问题 $\int_{-\infty}^{t} \frac{df_1(\tau)}{d\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = u(t) \neq f_1(t)$

$$\boxed{f_1 * f_2 = \frac{df_1}{dt} * \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau) d\tau \text{需要} \quad f_1 = \int_{-\infty}^{t} \frac{df_1}{d\tau} d\tau}$$

例题2解答

- 方法二：用微分积分性质的正确计算



$$f_1 * f_2 = [1+u(t)]*[e^{-t}u(t)]$$

$$= 1*e^{-t}u(t) + u(t)*e^{-t}u(t)$$

$1*e^{-t}u(t)$
$\neq e^{-t}u(t)$

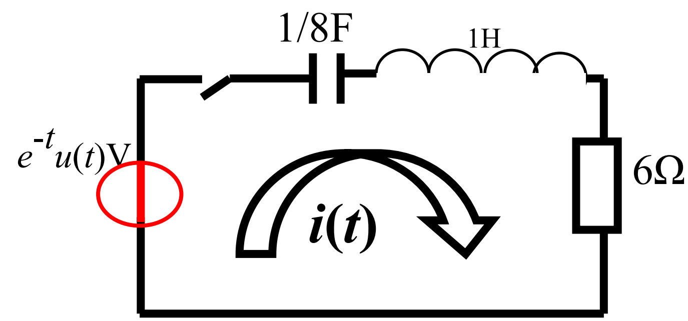
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau + \frac{du(t)}{dt} * \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}u(\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{\tau-t}d\tau + \delta(t)*\int_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau$$

$$= 1+\int_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau = \boxed{1+(1-e^{-t})u(t)}$$

与图解法的结果相同

例题3：系统零状态响应的求解



▪电路系统如上图所示，t=0以前开关断开，系统处于零状态，t=0时刻，开关合上。试求$i(t)$的零状态响应

解: **由第3讲结果知，系统单位冲激响应为：**

$$h(t)=[-e^{-2t}+2e^{-4t}]u(t)$$

系统的零状态响应为：

$$i(t)=e(t)*h(t)=h(t)*e(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(-e^{-2\tau}+2e^{-4\tau})u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t(-e^{-2\tau}+2e^{-4\tau})e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}\int_0^t(-e^{-2\tau}+2e^{-4\tau})e^{\tau}d\tau$$

$$=e^{-t}\int_0^t(-e^{-\tau}+2e^{-\tau})d\tau=e^{-t}(e^{-\tau}-\frac{2}{3}e^{-3\tau})\Big|_0^t=e^{-t}(e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-3t}-\frac{1}{3})$$

$$=e^{-2t}-\frac{2}{3}e^{-4t}-\frac{1}{3}e^{-t}(A) \qquad t\geq 0$$

与第3讲中经典法的结果相同

前沿：Deep Convolutional Neural Networks

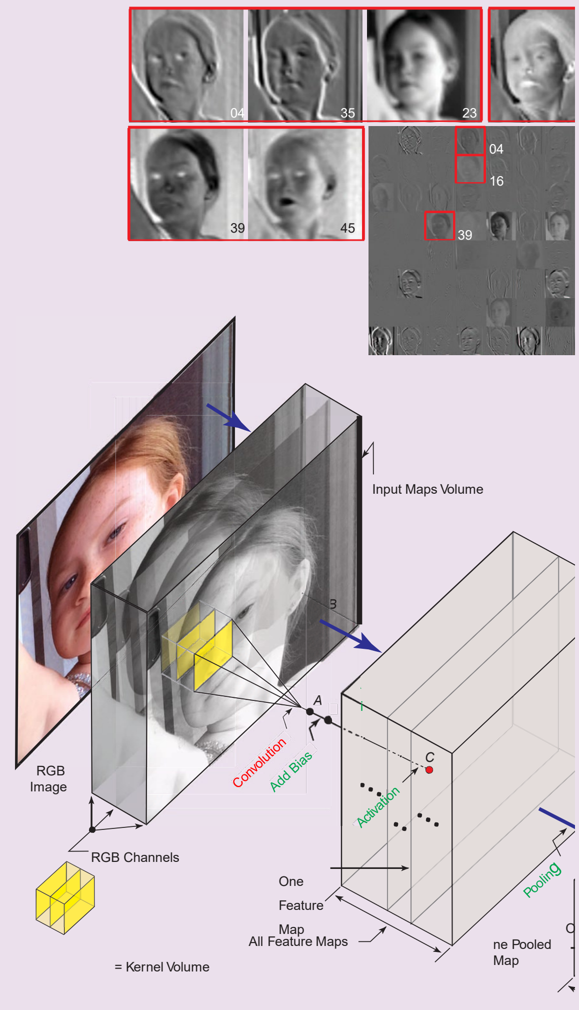


figure 1 The components of one stage of a CNN, consisting of an input maps volume, a feature maps volume, and an optional pooled maps volume. The maps in the input volume correspond to the three channels of the RGB image shown. The stage has 96 feature maps and 96 pooled maps. The highlighted feature maps, displayed as images and identified numerically, illustrate the types of features that a CNN is capable of extracting from an input image.

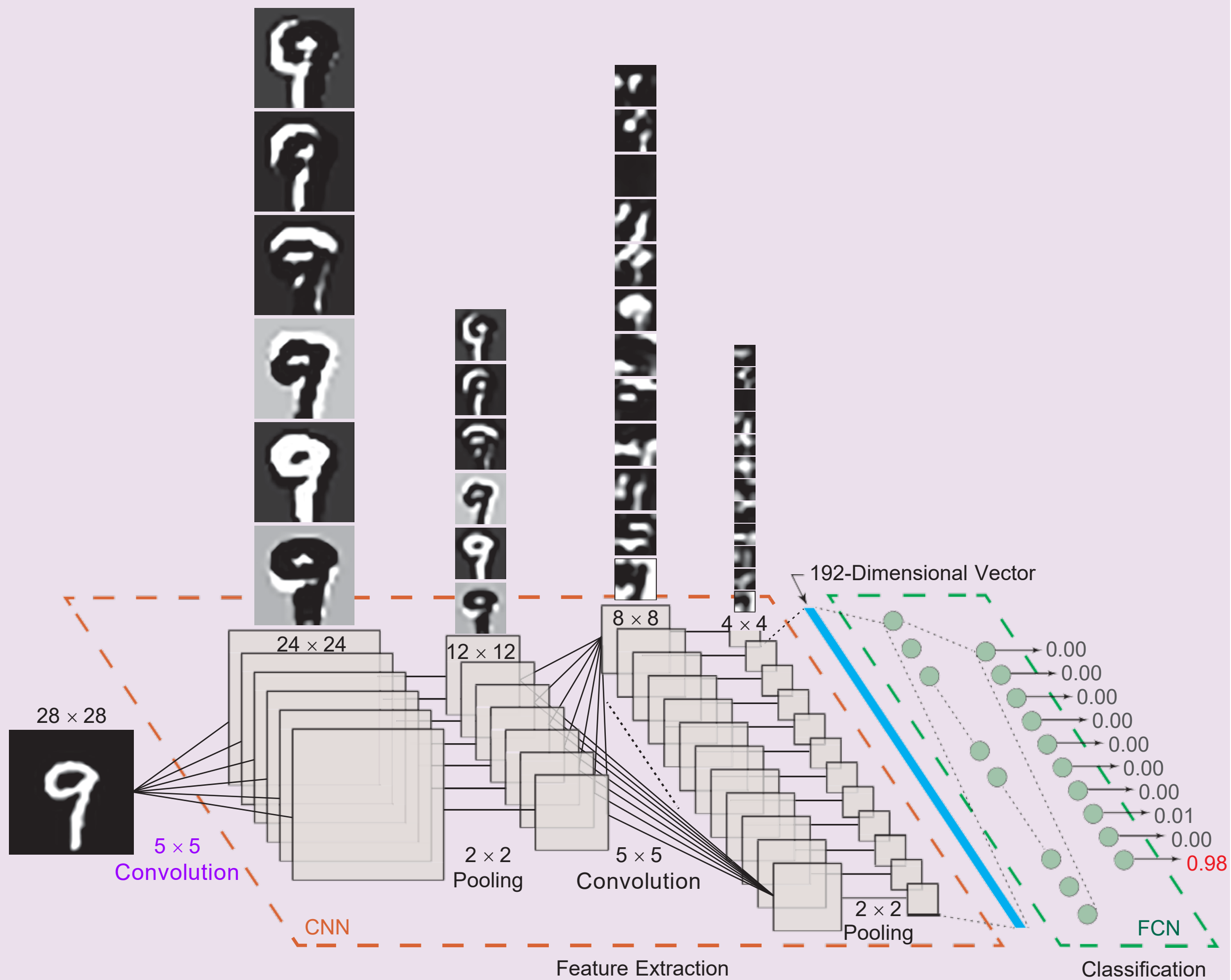


Figure 3 A CNN trained to extract features that are then used by an FCN to classify handwritten numerals. The input image shown is from the National Institute of Standards and Technology database. (A formatted version of this database is available for experimental work at yann.lecun.com/exdb/mnist.)

小结

- 一般激励信号可分解为冲激信号的线性叠加
- LTI系统的零状态响应可利用卷积积分法求取
- 卷积积分是一种数学运算方法，关键是要理解其物理意义，并学会用系统思维考察其重要性质
- 计算卷积积分有多种方法，要注意确定积分限，不要忘记定义域
- 利用卷积积分性质可以简化卷积计算过程，但要注意容易疏忽的问题
- 卷积的最新应用－CNNs(DL、AI)

课外作业

- 阅读：2.7,2.8;自学2.9; 预习:3.1
- 作业：2.17，第2章课外补充题1题

- 每个星期三晚12:00前上传上星期的作业
  - 在A4纸上完成，每张拍照保存为一个JPG图像，全部JPG图像整合到一个Word文件中，上传超星学习通课堂，文件名为：年级班号+hw+周次.doc。如1801班张三第一周作业名为：1801张三hw1.doc

- 地点:在南一楼中402室