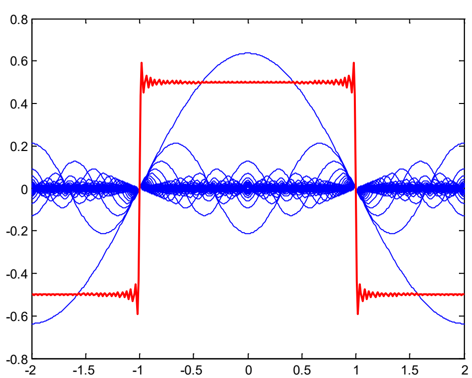
信号与系统

第3讲 LTI系统的时域分析方法

郭红星

华中科技大学计算机学院

April 21, 2020



上一讲内容回顾

- **奇异信号的概念及实例**
  - 奇异信号的定义：即本身、其导数或其积分有不连续点的函数
  - 常见的奇异信号
    - 斜变信号
    - 单位阶跃信号
    - 矩形脉冲信号
    - 单位冲激信号
- **系统的概念与分类**
- **线性时不变(LTI)系统**
- **学习目标**
  - 熟悉上述奇异信号，领会其物理含义
  - 掌握线性时不变系统的性质及判别准则

第二章 连续时间系统的时域分析

- 线性时不变系统全响应的时域求解
  - 系统微分方程的建立与求解
  - 连续时间LTI系统全响应的经典解法
  - 系统零输入响应的求解
  - 连续时间系统的单位冲激响应
  - 卷积积分及其性质
- 学习目标
  - 掌握基于因果关系的系统全响应分解与求解方法
  - 熟悉系统全响应的各种分解与合成及其相互关系
  - 从系统层面理解卷积积分及其性质

3.1 系统的时域分析及经典解法

连续时间系统的时域分析方法

物理系统 → 建立微分方程(领域知识) → 求系统全响应(根据激励信号和边界条件) → 分析解释

微分方程的建立与求解

电路系统微分方程建立的两类约束

① 来自元件电气关系的约束：与元件的连接方式无关

a.电阻： $\boxed{R=\dfrac{u_R(t)}{i(t)}}$

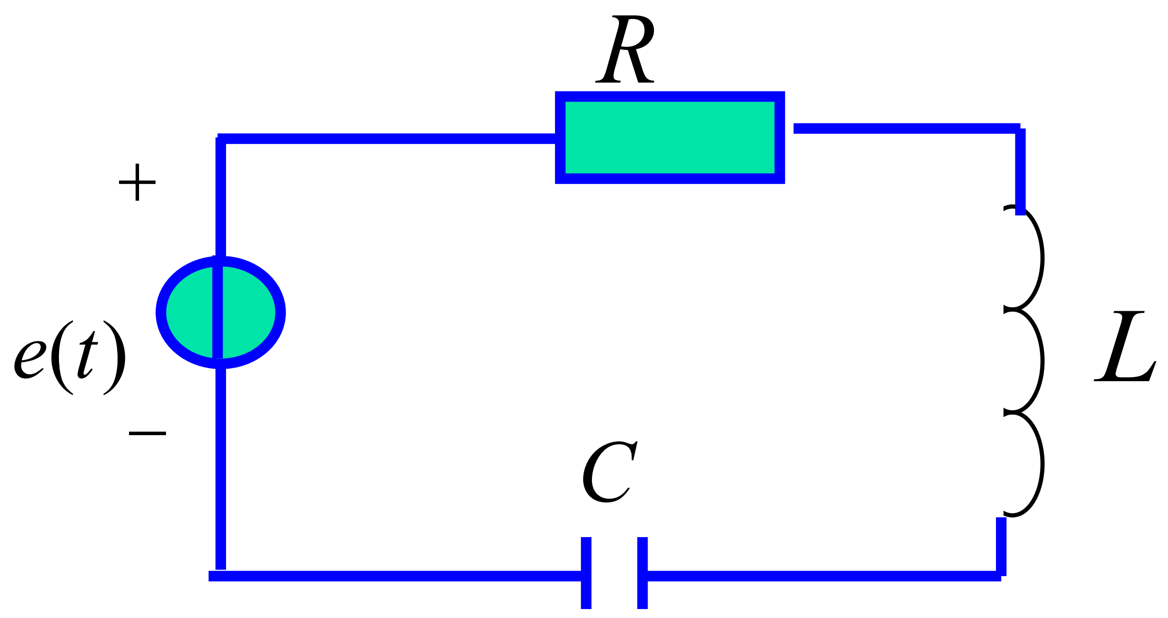
b.电容： $\boxed{C=\dfrac{q(t)}{u_c(t)}}$ $\boxed{u_c=\dfrac{1}{c}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau}$ $\boxed{i(t)=c\dfrac{du_c(t)}{dt}}$

c.电感： $\boxed{l=\dfrac{\varphi}{i}}$ $\boxed{u_l(t)=l\dfrac{di(t)}{dt}}$ $\boxed{i_l=\dfrac{1}{l}\int_{-\infty}^{t}u_l(\tau)d\tau}$

② 来自连接方式的约束：kvl和kil, 与元件的性质无关

一个简单的例子

$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{de(t)}{dt}$$



RLC串联电路

微分方程的一般形式

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dr(t)}{dt}+a_0 r(t)=$$

$$b_m\frac{d^m e(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}e(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{de(t)}{dt}+b_0 e(t)$$

- 其中，$e(t)$为系统的激励，$r(t)$为系统的响应，n为系统(方程)的阶数

微分方程的时域经典解法

- 微分方程的全解即系统的完全响应，由齐次解（自由响应）和特解（强迫响应）组成

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

- 齐次解$y_h(t)$的形式由齐次方程的特征根（自由频率）确定

- 特解$y_p(t)$的形式由方程右边激励信号的形式确定

齐次解$y_h(t)$的形式

(1) 特征根是不等实根$s_1, s_2, \ldots, s_n$

$$y_h(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \cdots + K_n e^{s_n t}$$

(2) 特征根是等实根$s_1 = s_2 = \ldots = s_n$

$$y_h(t) = K_1 e^{s\,t} + K_2 t e^{s\,t} + \cdots + K_n t^{n-1} e^{s\,t}$$

(3) 特征根是成对共轭复根 $s_i = \sigma_i \pm j\omega_i, \quad i = n/2$

$$y_h(t) = e^{\sigma_1 t}(K_1 \cos\omega_1 t + K_1 \sin\omega_1 t) + \cdots + e^{\sigma_i t}(K_i \cos\omega_i t + K_i \sin\omega_i t)$$

常用激励信号对应的特解形式

输入信号	特解
K	A
Kt	A+Bt
Ke^{-at}(特征根S≠-a)	Ae^{-at}
Ke^{-at}（特征根S=-a）	Ate^{-at}
K$\sin\omega_0 t$或K$\cos\omega_0 t$	A$\sin\omega_0 t$+B$\cos\omega_0 t$
K$e^{-at}\sin\omega_0 t$或K$e^{-at}\cos\omega_0 t$	A$e^{-at}\sin\omega_0 t$+B$e^{-at}\cos\omega_0 t$

例题1：系统全响应的经典解法

前面所讨论的RLC电路中，如果L=1H,C=1/8F,R=6Ω，且电路的初始条件为$i(0)=0$,$i'(0)=2A/s$, 输入信号$e(t)=e^{-t}u(t)$，求系统的完全响应$i(t)$。

$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{de(t)}{dt}$$

解：(1)求齐次方程$i''(t)+6i'(t)+8i(t)=0$的齐次解$i_h(t)$

特征方程为 $\lambda^2+6\lambda+8=0$

特征根为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=-4$

齐次解 $i_h(t)=Ae^{-2t}+Be^{-4t}$

例题1(续)

2) 求非齐次方程$i''(t)+6i'(t)+8i(t)=e'(t)$的特解$i_p(t)$

由输入$e(t)$的形式，设方程的特解为 $i_p(t)=Ce^{-t}$

将特解代入原微分方程即可求得常数$C=-\frac{1}{3}$

3) 求方程的全解

$$i(t)=i_h(t)+i_p(t)=Ae^{-2t}+Be^{-4t}-\frac{1}{3}e^{-t}$$

$$\left.\begin{aligned} i(0)&=A+B-\frac{1}{3}=0 \\ i'(0)&=-2A-4B+\frac{1}{3}=2 \end{aligned}\right\}$$ 解得 $A=3/2$，$B=-7/6$

所以 $$i(t)=\frac{3}{2}e^{-2t}-\frac{7}{6}e^{-4t}-\frac{1}{3}e^{-t},\quad t\geq 0$$

经典法不足之处

① 若微分方程右边激励项较复杂，则难以处理

② 若激励信号发生变化，则须全部重新求解

③ 若初始条件发生变化，则须全部重新求解

④ 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念

一种解决方法：从响应的因果关系入手

3.2 响应的因果关系及单位冲激响应

另一种思路:从因果关系入手

完全响应＝通解(自由响应)＋特解(强迫响应)

自由响应为齐次方程的通解，强迫响应为非齐次方程的特解，由初始状态和激励信号决定。

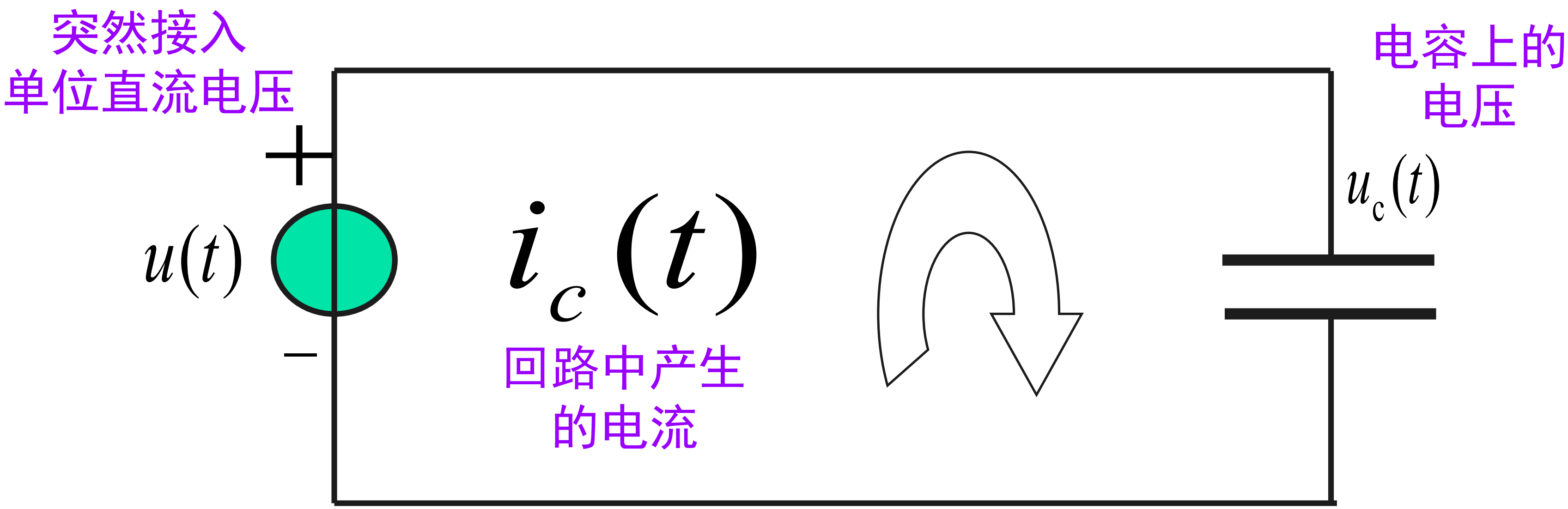
考察系统响应时，一般从某个时刻(记为t_0)开始。系统在$t=t_0$时的状态是一组必须知道的最少量的数据，利用这组数据和系统模型以及激励信号，就能够完全确定t_0以后任何时刻的响应。一般把这个时刻作为系统的“0”时刻

＝零输入响应＋零状态响应

z.i.r和z.s.r

零输入响应是系统在无输入激励情况下仅由初始条件引起的响应，零状态响应是系统在无初始储能或者初始状态为零的情况下，仅由外加激励源引起的响应。

系统在零时刻的状态可跳变



两边同时求导数

$$q(t)=\int_0^t i_c(\tau)\mathrm{d}\tau = Cu_c(t) \Rightarrow i_c(t)=C\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=C\delta(t)$$

系统在零时刻的状态发生了跳变！

系统的状态(起始与初始状态)

由于激励信号（特别是阶跃信号和冲激信号等奇异信号）加入系统，会引起系统的状态发生跳变，所以有必要对“0”时刻进行区分。

系统的“0”时刻

以“0^-”表示激励接入前的瞬时

以“0^+”表示激励接入后的瞬时

起始条件的跳变—从0^-到0^+

1. 起始状态: $r^{(k)}(0^-)$ origination
   - 它决定了z.i.r.在激励接入之前的瞬时$t=0^-$系统的状态,它总结了计算未来响应所需要的过去的全部信息
2. 初始状态: $r^{(k)}(0^+)$ initialization
   - 它决定了在激励接入之后的瞬时$t=0^+$系统的状态，决定了完全响应
3. 跳变量:

$$r_{zsr}^{(k)}(0^+) \qquad \boxed{r^{(k)}(0^+) = r_{zsr}^{(k)}(0^+) + r^{(k)}(0^-)}$$

*注意管致中和郑君里教材的命名是不相容的！我们采用后者

例题2：系统零输入响应的求解

前面所讨论的RLC电路中，如果L=1H,C=1/8F,R=6Ω，且电路的初始条件为$i(0)=0$,$i'(0)=1A/s$。求电路的零输入响应电流$i_{zir}(t)$ 。

用算子符号表示微分方程

$$p=\frac{d}{dt}$$

解：将元件参数值代入方程，整理得：

$$(p^2+6p+8)i_{zir}(t)=0 \Rightarrow i_{zir}(t)=c_0e^{-2t}+c_1e^{-4t}$$

代入初始条件得：

$$\left.\begin{aligned} i(0)&=c_0+c_1=0 \\ i'(0)&=-2c_0-4c_1=1 \end{aligned}\right\}$$ 解得 $c_0=1/2$， $c_1=-1/2$

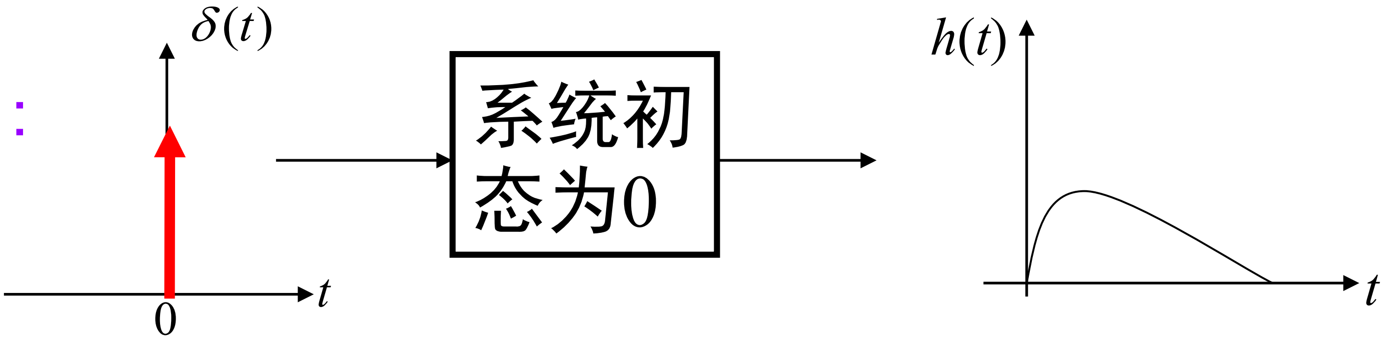
$$i_{zir}(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-4t}(A) \qquad t\geq 0$$

思考：零输入响应就是系统的自由响应吗？

问题：系统的零状态响应如何求取？

一个简单信号激励系统的ZSR

1.定义：



系统的单位冲激响应*h*(*t*)

$h(t)$的求法—转化为初始条件

- $h(t)$求法：转化为一个特殊的z.i.r响应来处理

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 y^{'}(t)+a_0 y(t)=x(t)$$

$$\boxed{a_n h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 h^{'}(t)+a_0 h(t)=\delta(t)}$$

思考：冲激响应与系统自由响应是什么关系？

对于$t<0$时：$h(0^-)=h^{'}(0^-)=\ldots=h^{(n-1)}(0^-)=0$

系统处于零起始状态；当$t>0$时，激励为0

所以，$\delta(t)$作用于系统的效果仅是使系统零时刻的状态发生了跳变，然后激励信号就变为零了。

- 关键是如何确定$t=0^+$时的初始条件！

初始条件的确定—冲激信号匹配法

- 匹配就是使方程两端的冲激信号及其导数相匹配

从单位冲激信号的最高阶项到最低阶项依次进行匹配，直到跳变量$u(t)$

较高阶项匹配好后，考虑其对低阶项的影响，计算出各阶次项的系数

匹配低阶项时，返回最高阶项进行补偿

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+6\frac{dr(t)}{dt}+8r(t)=\delta'(t)$$

$$\delta'(t)\Rightarrow\delta(t)\Rightarrow\underline{\underline{u(t)}}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow\times 6$$

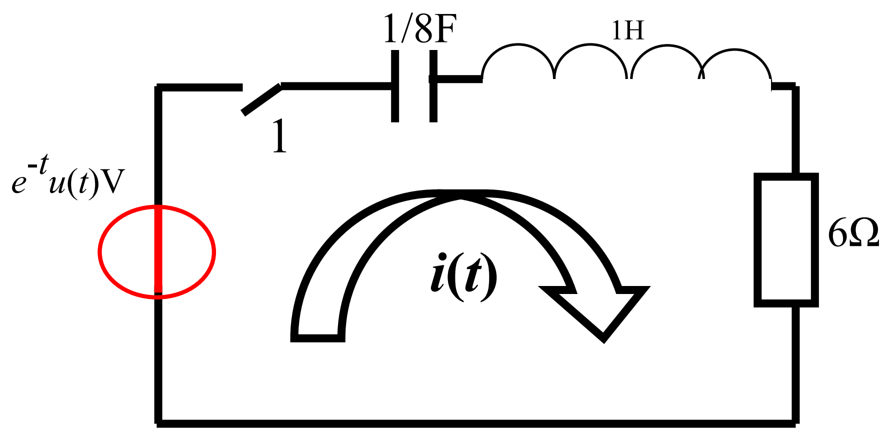
$$-6\delta(t)\Leftarrow 6\delta(t)$$

$$\underline{\underline{-6u(t)}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r_{zsr}(0^+)&=1\\ r_{zsr}'(0^+)&=-6\end{aligned}}$$

例题3(3)会利用此结果

例题3：系统单位冲激响应的求解



- 电路系统如上图所示，t=0以前开关断开，系统处于零状态，t=0时刻，开关合上。试求：

① 从物理概念判断$i(0^-)$, $i'(0^-)$和$i(0^+)$, $i'(0^+)$。

② 列出此系统的方程，据此利用奇异信号平衡法判断起始点跳变，并与(1)问所得结果对照，用经典法求零状态响应$i_{zsr}(t)$ 。

③ 求系统的单位冲激响应$h(t)$。

例题3解答

1. $i(0^-)=i'(0^-)=0 \quad i(0^+)=0 \quad i'(0^+)=1\mathrm{V/s}$

2. $\frac{1}{c}\int i(\tau)d\tau + l\frac{di}{dt} + Ri(t) = e(t) \xrightarrow{e(t)=e^{-t}u(t)} \boxed{\frac{d^2i(t)}{dt^2}+6\frac{di(t)}{dt}+8i(t)=\frac{de(t)}{dt}}$

$$\boxed{\frac{d^2i(t)}{dt^2}+6\frac{di(t)}{dt}+8i(t)=\delta(t)}$$

$\delta(t) \longrightarrow u(t)$

用冲激信号可描述这种突变现象。

因此：

$$\begin{cases} i(0^+)=i(0^-)+i_{zsr}(0^+)=0 \\ i'(0^+)=i'(0^-)+i'_{zsr}(0^+)=1 \end{cases}$$

就是例题1结果与例题2结果的差值

$$i_{zsr}(t)=e^{-2t}-\frac{2}{3}e^{-4t}-\frac{1}{3}e^{-t}(A) \qquad t\ge 0$$

- $i(0)=0, i'(0)=2A/s \quad i(t)=\frac{3}{2}e^{-2t}-\frac{7}{6}e^{-4t}-\frac{1}{3}e^{-t}, \quad t\ge 0$
- $i(0)=0, i'(0)=1A/s \quad i_{zir}(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-4t} \quad t\ge 0$

例题3解答

3. $\frac{d^2i(t)}{dt^2}+6\frac{di(t)}{dt}+8i(t)=\frac{de(t)}{dt}$ $\xrightarrow{e(t)=\delta(t)}$ $\frac{d^2i(t)}{dt^2}+6\frac{di(t)}{dt}+8i(t)=\delta'(t)$

$$i_{zsr}(0^+)=1$$

$$i'_{zsr}(0^+)=-6$$

$$\delta'(t)\Rightarrow\delta(t)\Rightarrow\underline{\underline{u(t)}}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow\times 6$$

$$-6\delta(t)\Leftarrow 6\delta(t)$$

$$\underline{\underline{-6u(t)}}$$

$$h(t)=i_h(t)=Ae^{-2t}+Be^{-4t}$$

代入初始条件：$i(0^+)=1; i'(0^+)=-6$

$$\left.\begin{array}{l}A=-1\\ B=2\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{h(t)=[-e^{-2t}+2e^{-4t}]u(t)}$$

小结

- 经典解法可以求解系统全响应，但是存在4点不足
- 零输入响应的系数由初始状态决定，响应形式由系统决定，比较容易求取
- 可将冲激响应转化为状态非零的零输入响应求取
- 一般激励的零状态响应如何求取？

课外作业

- 阅读：2.1-2.4，2.6; 预习:2.5，2.7，2.8
- 作业：2.7，2.11

- **每个星期三晚12:00前上传上星期的作业**
  - **在A4纸上完成，每张拍照保存为一个JPG图像，全部JPG图像整合到一个Word文件中，上传超星学习通课堂，文件名为：年级班号+hw+周次.doc。如1801班张三第一周作业名为：1801张三hw1.doc**

- 地点:在南一楼中402室