



# 信号与系统

---

Lecture 13

## 第八章: 离散时间系统的变换域分析

§ 8.1 引言

§ 8.2  $z$ 变换定义, 收敛区

§ 8.3  $z$ 变换的基本性质



## 第八章主要内容:

---

- 序列的 $z$ 变换,  $z$ 变换的收敛区 (1)
- $z$ 变换的性质 (1)
- 反 $z$ 变换 (2)
- $s$ 平面与 $z$ 平面的映射关系 (2)
- 离散时间系统的 $z$ 变换分析法 (3)
- 系统函数的极点分布对系统时域特性的影响 (3)
- 离散序列傅里叶变换与频率响应 (4)



# 复习

---

- 线性差分方程的解法
- 零输入响应
- 单位函数响应
- 卷积和
- 零状态响应

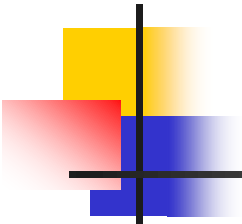
## § 8.2 z变换定义及其收敛区

### 一、z变换的定义

考虑理想抽样信号的单边拉氏变换:

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x_s(t)e^{-st}dt &= \int_0^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \right] e^{-st}dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT}\end{aligned}$$



即  $LT\{x_s(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$

令  $z = e^{sT}$ ，再令  $T = 1$ ，得到序列  $x(n)$  的

单边  $z$  变换公式：

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

记为：

$$x(n) \leftrightarrow X(z)$$

双边  $z$  变换公式：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$



## 关于单边z变换与双边z变换:

(1) 对因果序列:  $x(n) = x(n)u(n)$

双边z变换 = 单边z变换

(2) 因果序列  $x(n)$  右移后仍是因果序列

双边z变换 = 单边z变换

(3) 因果序列  $x(n)$  左移后不再是因果序列

双边z变换  $\neq$  单边z变换

(4) 对一般序列  $x(n)$  而言:

其单边z变换就是  $x(n)u(n)$  的双边z变换



## 二、z变换的收敛区 (ROC)

回忆拉普拉斯变换收敛区：

- (1) 为什么存在拉普拉斯变换收敛区的问题？
- (2) 单边拉普拉斯变换收敛区在s平面上是怎样的？

和拉普拉斯变换一样，z变换也有收敛区间。例如：

$$ZT(u(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

当  $|z| \leq 1$  时，上述级数不收敛。



## 1. 收敛区的定义

z变换的收敛区的定义：对序列 $x(n)$ ，使得下列级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

收敛的z值的集合。

序列z变换级数收敛的充分条件是绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$$



# 绝对可和的判别方法

## (1) 比值判别法（达朗贝尔准则）

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, \text{ 则 } \begin{cases} \rho < 1, & \text{级数收敛} \\ \rho > 1, & \text{级数发散} \\ \rho = 1, & \text{不能确定} \end{cases}$$

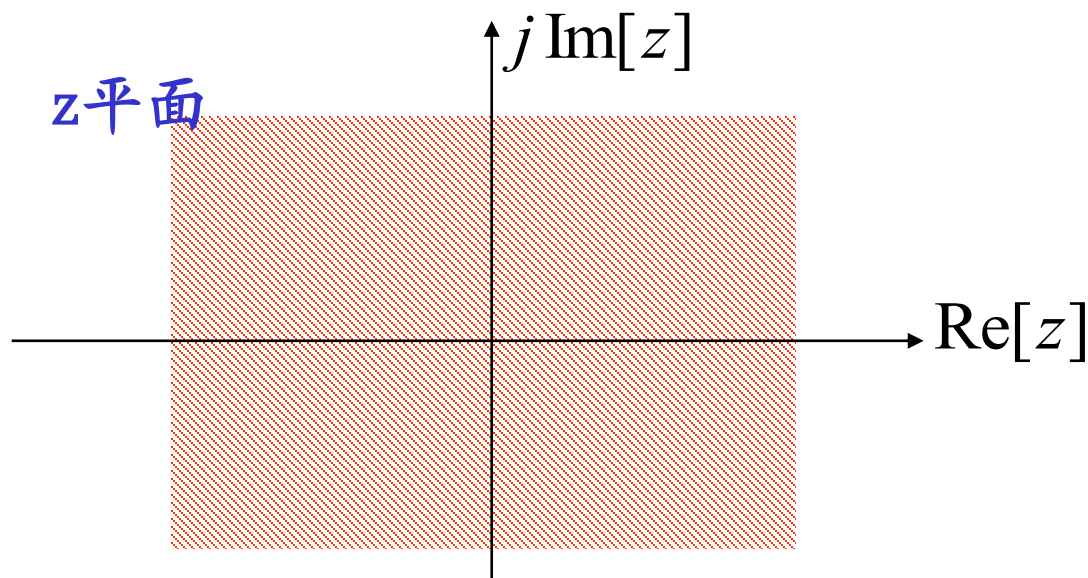
## (2) 根式判别法（柯西准则）

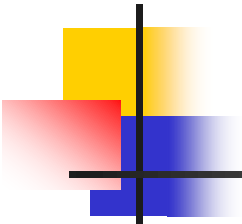
$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho, \text{ 则 } \begin{cases} \rho < 1, & \text{级数收敛} \\ \rho > 1, & \text{级数发散} \\ \rho = 1, & \text{不能确定} \end{cases}$$

## 2. 几类序列双边z变换的收敛区

- 有限长序列
- 右边序列
- 左边序列
- 双边无限序列

$$z = e^{sT}$$

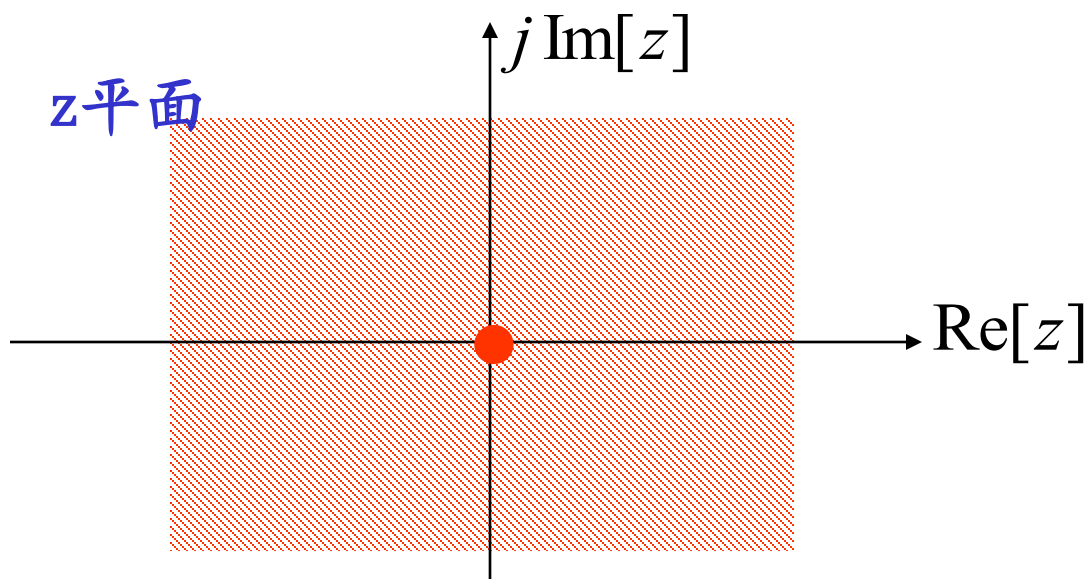




(1) 有限长序列: 
$$x(n) = \begin{cases} x(n) & n_1 \leq n \leq n_2 \\ 0 & n < n_1, n > n_2 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n} = x(n_1)z^{-n_1} + x(n_1+1)z^{-(n_1+1)} + \dots + x(n_2)z^{-n_2}$$

$n_1 \leq 0$ 时,  $z = \infty$ 和 $n_2 > 0$ 时 $z = 0$ 外, 所有 $z$ 值都收敛



不包含0和 $\infty$ 的 $z$ 平面  
称为有限 $z$ 平面。

有限长序列在有限 $z$   
平面上收敛。

收敛区是否还可包含  
0或 $\infty$ , 则具体情况  
具体分析。

(2) 右边序列:  $x(n) = \begin{cases} x(n) & n \geq n_1 \\ 0 & n < n_1 \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

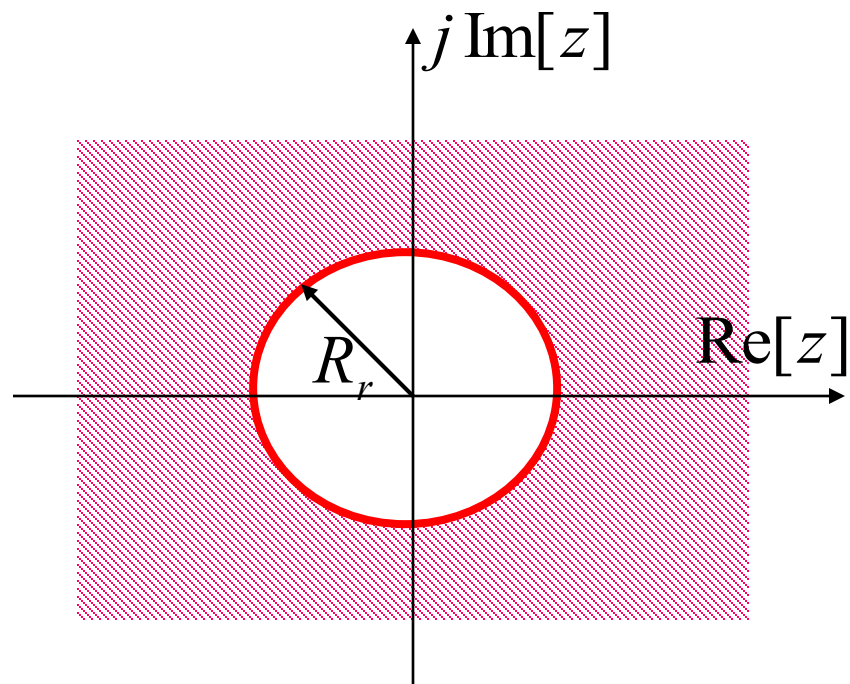
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(n)z^{-n}|} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(n)|} < |z|$$

$$|z| > \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(n)|} = R_r$$

收敛半径

右边序列的收敛区在  
某个圆的圆外。



$n_1 < 0$ 时,  $R_r < |z| < \infty$

否则,  $R_r < |z| \leq \infty$

(3) 左边序列:  $x(n) = \begin{cases} x(n) & n \leq n_2 \\ 0 & n > n_2 \end{cases}$

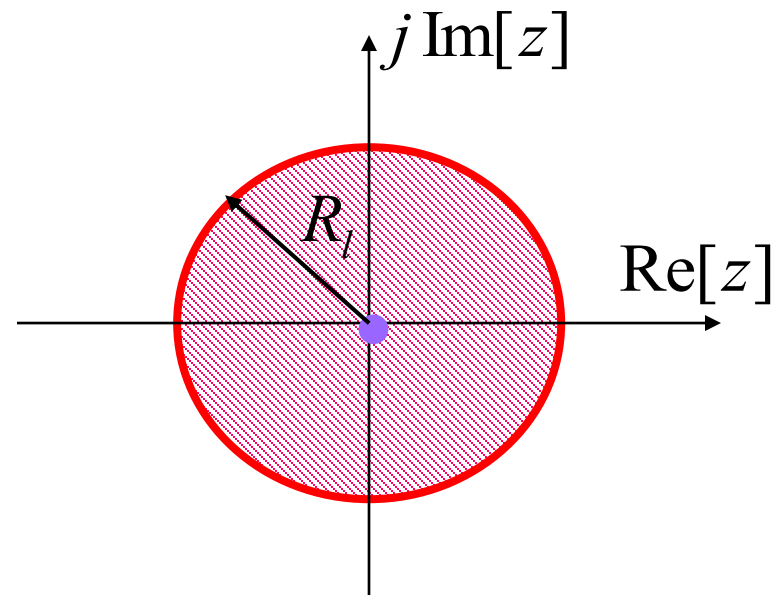
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} \Rightarrow X(z) = \sum_{m=-n_2}^{\infty} x(-m)z^m = \sum_{n=-n_2}^{\infty} x(-n)z^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(-n)z^n|} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(-n)|} < |z|^{-1}$$

$$|z| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(-n)|}} = R_l$$

左边序列的收敛区在  
某个圆的圆内。



$n_2 > 0$ 时,  $0 < |z| < R_l$

否则,  $0 \leq |z| < R_l$

#### (4) 双边无限序列:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad -\infty \leq n \leq \infty$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

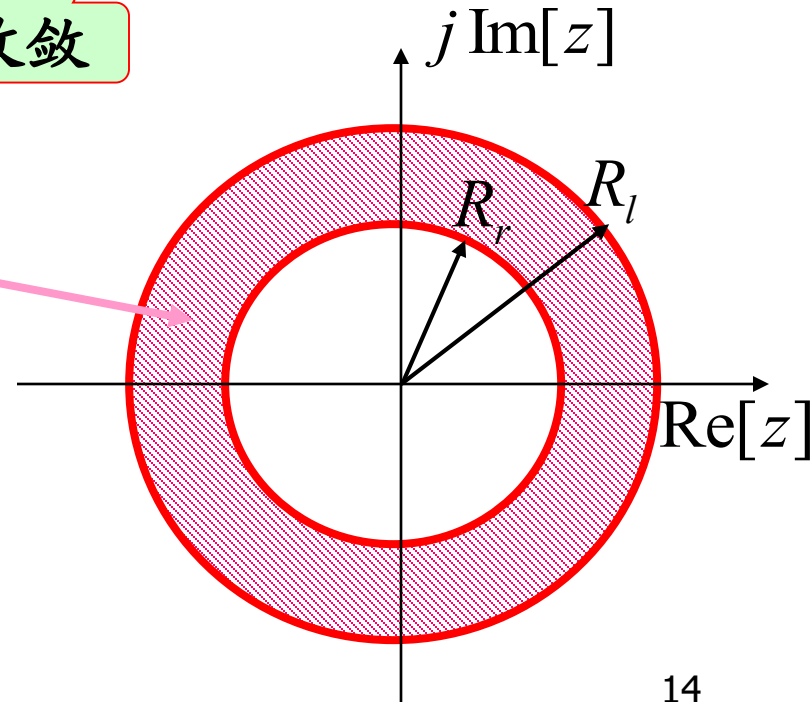
圆内收敛

圆外收敛

$R_l > R_r \Rightarrow$  有环状收敛区

$R_l < R_r \Rightarrow$  不收敛

双边无限序列的收敛  
区为某个圆环内。





## 小结:

(1) 有限长双边序列的双边 $z$ 变换的收敛区一般为 $0 < |z| < \infty$ ；有限长因果序列双边 $z$ 变换的收敛区为 $|z| > 0$ ；有限长非因果序列双边 $z$ 变换的收敛区为 $|z| < \infty$ 。

(2) 无限长右边序列双边 $z$ 变换的收敛区为 $|z| > |z_0|$ ，即收敛区为以 $|z_0|$ 为半径的圆外区域。

(3) 无限长左边序列双边 $z$ 变换的收敛区为 $|z| < |z_0|$ ，即收敛区为以 $|z_0|$ 为半径的圆内区域。

(4) 无限长双边序列双边 $z$ 变换的收敛区为 $|z_1| < |z| < |z_2|$ ，即收敛区位于以 $|z_1|$ 为半径和以 $|z_2|$ 为半径的两个圆之间的环状区域。

**注意：**不同序列的双边 $z$ 变换可能相同，即序列与其双边 $z$ 变换不是一一对应的。序列的双边 $z$ 变换连同收敛域一起与序列才是一一对应的。



### 三、典型序列的z变换 (P387表8-1)

(1)  $f(k) = \delta(k)$

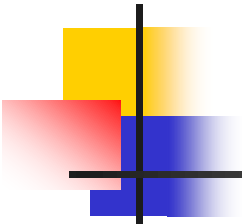
$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k) z^{-k} = 1$$

(2)  $f_1(k) = \delta(k - m)$ ,  $f_2(k) = \delta(k + m)$ ,  $m$  为正整数.

$$F_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k - m) z^{-k} = z^{-m} \quad |z| > 0$$

$$F_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k + m) z^{-k} = z^m \quad |z| < \infty$$



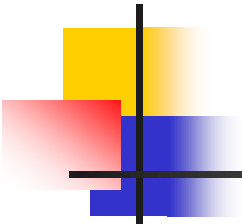

$$(3) \quad f(k) = \varepsilon(k)$$

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon(k) z^{-k} = \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1$$

$$(4) \quad f(k) = -\varepsilon(-k-1)$$

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [-\varepsilon(-k-1)] z^{-k} = \frac{z}{z-1} \quad |z| < 1$$

**验证：**不同序列的双边 $z$ 变换可能相同，即序列与其双边 $z$ 变换不是一一对应的。序列的双边 $z$ 变换连同收敛域一起与序列才是一一对应的。



(5)  $f(k) = a^k \varepsilon(k)$  ( $a$ 为实数、虚数、复数).

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k \varepsilon(k) z^{-k} = \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a|$$

(6)  $f(k) = -a^k \varepsilon(-k-1)$

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [-a^k \varepsilon(-k-1)] z^{-k} = \frac{z}{z-a} \quad |z| < |a|$$

**启示：**序列双边 $z$ 变换的收敛区，一般是某个圆的圆外/内。“某个圆”的半径可以通过 $z$ 变换的表达式来确定。



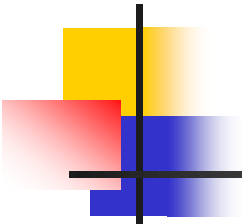
例1 求下列序列的z变换及其收敛区。

$$1. x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$2. x(n) = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n - 1)$$

$$3. x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n [u(n) - u(n - 8)]$$

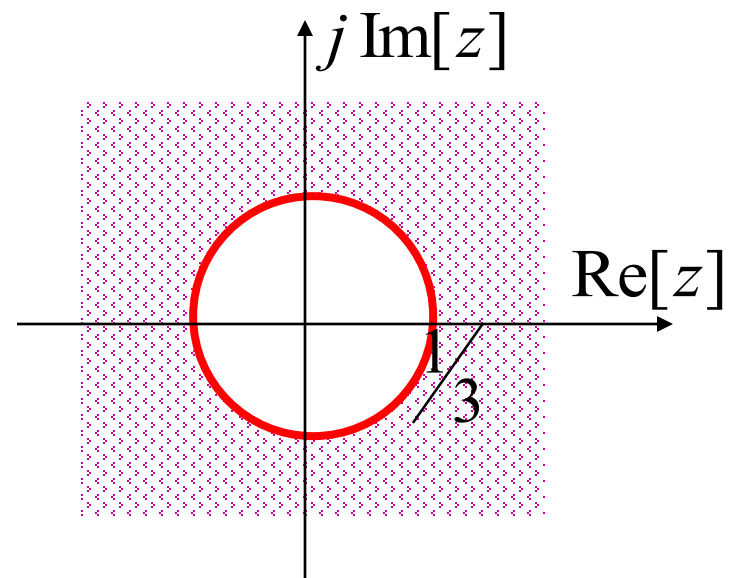
$$4. x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & n \geq 0 \\ 2^n & n < 0 \end{cases}$$



解: 1.  $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$  右边序列

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

$$R_r = \frac{1}{3} \quad \therefore |z| > \frac{1}{3}$$



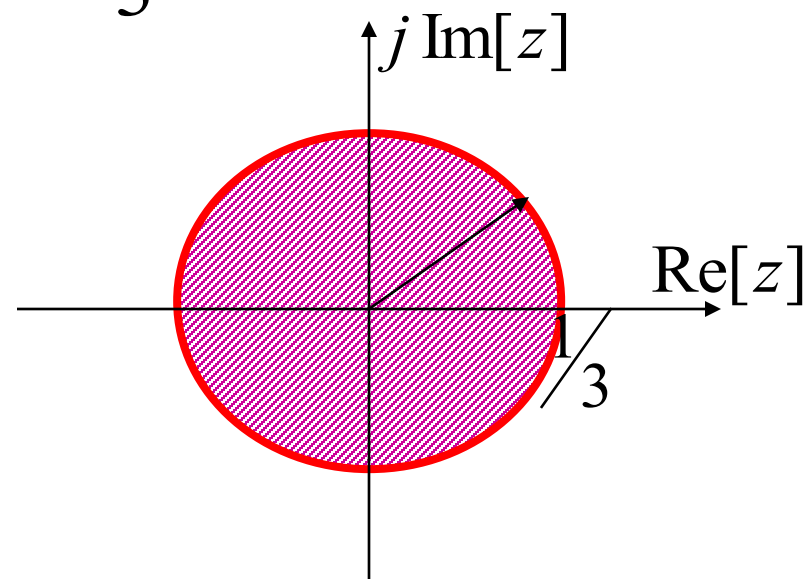
2.  $x(n) = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$  左边序列

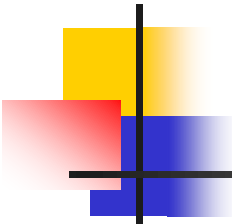
$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n = -\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^{-m}$$

$$= 1 - \sum_{m=0}^{\infty} (3z)^m = 1 - \frac{1}{1 - 3z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(3z)^n|} < 1$$

$$|z| < \frac{1}{3} = R_l$$





3.  $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n [u(n) - u(n-8)]$  有限长序列

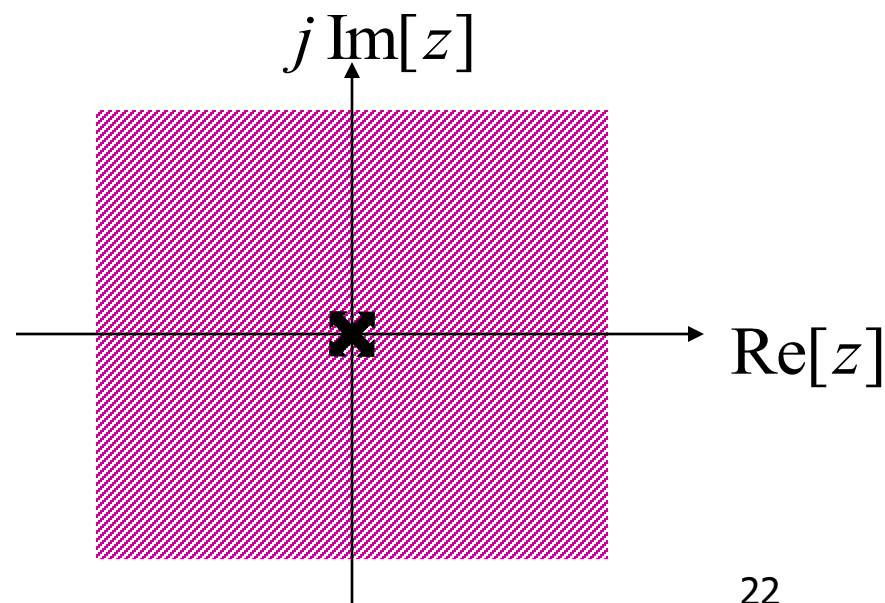
$$X(z) = \sum_{n=0}^7 \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^8}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{z^8 - \left(\frac{1}{3}\right)^8}{z^7 \left(z - \frac{1}{3}\right)}$$

收敛域为除了  
0的整个Z平面

$$z^8 = \left(\frac{1}{3}\right)^8 e^{j2k\pi} \Rightarrow z = \frac{1}{3} e^{j\frac{2K\pi}{8}}$$

→ 8个零点

$z = 0$  → 7阶极点



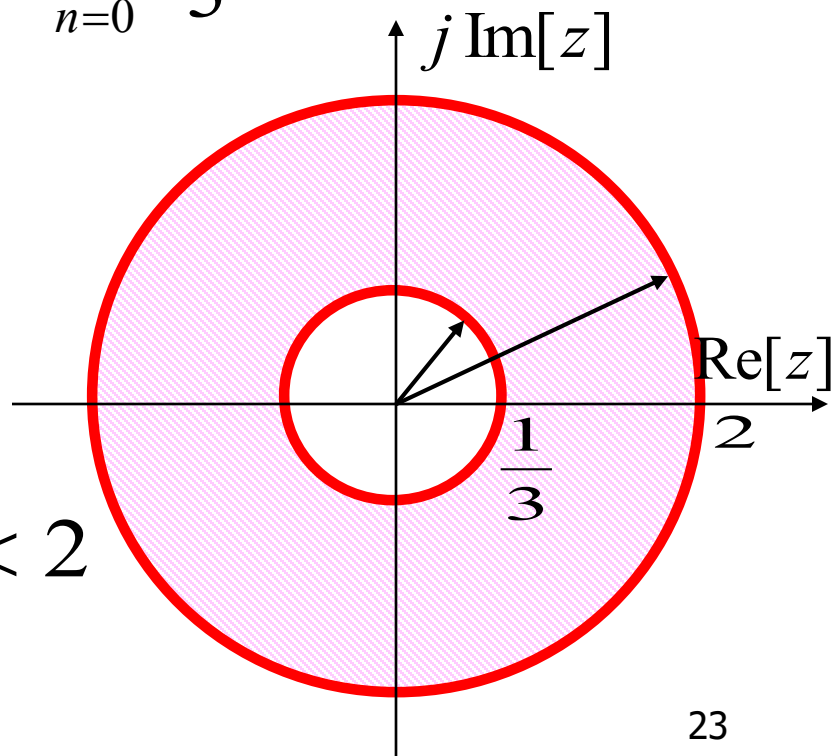
4. 
$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & n \geq 0 \\ 2^n & n < 0 \end{cases}$$

双边序列

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n}$$

$$= -\frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$\therefore X(z)$ 的收敛域为  $\frac{1}{3} < |z| < 2$



例2 ( 例题8-2 ) 求序列  $f(k) = v^{|k|}$  的z变换。

解:  $f(k) = v^{|k|} = v^k u(k) + v^{-k} u(-k-1)$

记  $f_1(k) = v^k u(k), f_2(k) = v^{-k} u(-k-1)$

则  $F_1(z) = \frac{z}{z-v}, \quad |z| > |v|$

$$F_2(z) = -\frac{z}{z-v^{-1}}, \quad |z| < |v|^{-1}$$

当  $|v|$  大于或等于1时, 左边序列与右边序列的z变换没有公共的收敛域, 故  $f(k)$  的双边z变换不存在;  
当  $|v| < 1$  时,  $f(k)$  的双边z变换存在:

$$F(z) = \frac{z}{z-v} - \frac{z}{z-v^{-1}}, \quad |v| < |z| < |v|^{-1}$$



序号	性质	信号	Z 变换	收敛域
0	定义	$x(n)$	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$	$R$
1	线性	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	至少 $R_1 \cap R_2$
2	移序	$x(n-n_0)$	$z^{-n_0}X(z)$	$R$ , 但在原点或无穷远点可能加上或删除
3	频移	$e^{j\omega n}x(n)$	$X(e^{j\omega}z)$	$R$
4	尺度变换	$z_0^n x(n)$	$X(z_0^{-1}z)$	$ z_0 R$
5	$z$ 域微分	$nx(n)$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$	$R$
6	卷积	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	至少 $R_1 \cap R_2$
7	时间反转	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$R$ 的倒置
8	求和	$\sum_{n=-\infty}^n x(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	$R \cap ( z  > 1)$
9	初值定理	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$		
10	终值定理	$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$		



## 1. 线性

---

在离散时间系统中，若有：

$$f_1(k) \leftrightarrow F_1(z), f_2(k) \leftrightarrow F_2(z)$$

则

$$af_1(k) + bf_2(k) \leftrightarrow aF_1(z) + bF_2(z)$$



## 正弦序列的单边z变换:

$$ZT[e^{j\omega_0 n}] = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}}$$

$$ZT[e^{-j\omega_0 n}] = \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}$$

$$ZT[\sin \omega_0 n] = ZT[(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}) / 2j]$$

$$= \left( \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right) / 2j$$

$$= \frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$$



## 余弦序列的单边z变换:

$$ZT[e^{j\omega_0 n}] = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}}$$

$$ZT[e^{-j\omega_0 n}] = \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}$$

$$ZT[\cos \omega_0 n] = ZT[(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}) / 2]$$

$$= \left( \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right) / 2$$

$$= \frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$$

## 2. 时移 (位移 / 移序) 性

(1) 有始序列  $f(k) \leftrightarrow F(z)$

单边z变换

$$\text{左移} \left\{ \begin{array}{l} f(k+1) \leftrightarrow z(F(z) - f(0)) \\ f(k+n) \leftrightarrow z^n \left( F(z) - \sum_{i=0}^{n-1} f(i)z^{-i} \right), n > 0 \end{array} \right.$$

单边z变换

$$\text{右移} \left\{ \begin{array}{l} f(k-1) \leftrightarrow z^{-1}F(z) \\ f(k-n) \leftrightarrow z^{-n}F(z), n > 0 \end{array} \right.$$

## (2) 双边序列 - 单边z变换

$$\text{左移} \left\{ \begin{array}{l} f(k+1) \leftrightarrow z(F(z) - f(0)) \\ f(k+n) \leftrightarrow z^n \left( F(z) - \sum_{i=0}^{n-1} f(i)z^{-i} \right), n > 0 \end{array} \right.$$

$$\text{右移} \left\{ \begin{array}{l} f(k-1) \leftrightarrow z^{-1}[F(z) + f(-1)z] \\ f(k-n) \leftrightarrow z^{-n} \left[ F(z) + \sum_{i=1}^n f(-i)z^i \right], n > 0 \end{array} \right.$$

## (3) 双边序列 - 双边z变换

$$f(k-n) \leftrightarrow z^{-n} F(z), n > 0 \text{ 或 } n < 0$$



### 3. z域尺度变换特性

---

在离散时间系统中，若有：

$$f(k) \leftrightarrow F(z)$$

则

$$a^k f(k) \leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right)$$



## 4. z域微分特性

在离散时间系统中，若有：

$$f(k) \leftrightarrow F(z)$$

则

$$kf(k) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} F(z)$$





## 5. 卷积定理

---

若  $f_1(k) \leftrightarrow F_1(z), f_2(k) \leftrightarrow F_2(z)$

则  $f_1(k) * f_2(k) \leftrightarrow F_1(z)F_2(z)$



## 6. 初值和终值定理

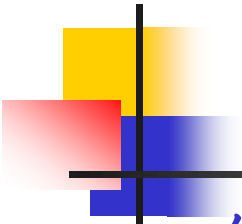
---

有始序列

$$f(k) \leftrightarrow F(z)$$

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F(z)$$



例3 用卷积定理，由单位阶跃序列的z变换求单位斜变序列  $ku(k)$  的z变换。

解：

$$ku(k) = u(k) * u(k-1)$$

$$ZT[ku(k)] = ZT[u(k)] \cdot ZT[u(k-1)]$$

$$u(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$u(k-1) \leftrightarrow z^{-1} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1}, |z| > 1$$

$$ku(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}, |z| > 1$$



## 小结

---

- (1)  $z$ 变换与拉普拉斯变换的关系。
- (2) 双、单边 $z$ 变换的定义与收敛区。
- (3)  $z$ 变换的性质类似于其它变换，但时移特性，单、双边变换明显不同。

## 课外作业

阅读: 8.1 – 8.3; 预习: 8.4 – 8.5

作业: 8.2    8.3 (6)