经典教材辅导用书·电子与信息类丛书

信号与线性系统习题详解

高教版·《信号与线性系统》(第四版)

(管致中等编)

刘 泉 主编

华中科技大学出版社

内 容 提 要

本书主要对高等教育出版社出版的、由管致中和夏恭恪编著的《信号与线性系统》(第四版)一书中前八章和第十一章215道习题作了较详细的解答。

习题解答是本书的重要组成部分,为了便于学生学习,在每一章习题解答之前,对该章进行了简要和系统的总结,此外在书后还给出了信号与线性系统课程考试模拟试题及硕士研究生入学考试模拟试题,供读者和考生了解试题的题型、范围、深度和难易程度以及解题和答题的方法。本书在强调基本理论、基本概念和基本方法的同时注重信号与系统的整体知识以及解题的思路和技巧运用。

本书可作为高等学校本科学生的辅导教材,也可作为报考电子、信息和通信等学科专业及其他相关专业硕士研究生考生的复习参考用书,还可作为申请信息与通信工程硕士学位同等学历人员的复习参考用书。

前　　言

信号与系统是电子信息类各专业的一门重要的专业基础课程，主要研究信号与线性系统分析的基本理论、基本概念和基本方法。

本书是根据高等院校信号与系统课程的教学要求以及硕士研究生入学考试的基本要求而编写的，其范围限于确定信号（非随机信号）、在线性、时不变、因果和稳定系统的传输与处理的基本理论。从时域到变换域，从连续到离散，从输入-输出描述到状态描述。重点指导学生对信号与系统的整体知识的理解以及对解题思路和技巧的掌握。

本书包含了管致中等编著的《信号与线性系统》（第四版）一书中的前八章和第十一章的主要内容。习题选自管致中等编著的《信号与线性系统》（第四版），同时编著多年的教学经验和科研成果在本书中也有所体现。

本书的特点是：突出系统概念，突出重要结论，题目内容广泛，难度适中。

江雪梅和张小梅等二位老师和艾青松博士、胡文娟、杨柳、刘云涛等多位研究生参加了例题解答和校对工作。

编者真诚感谢华中科技大学出版社的周芬娜老师及其他工作人员的大力支持和辛勤工作。

限于水平，本书难免有不妥和错误之处，恳请读者批评指正。

作　者

2005 年 9 月于武汉

目　　录

第一章　绪　　论

1-1　基 本 要 求

通过本章的学习，学生应该了解和掌握信号与系统的定义及其分类，深刻理解信号的时域运算和波形变换方法。重点掌握系统的线性、时不变、因果和稳定特性。

1-2　重点、难点学习指导

1. 信号的定义与分类

(1) 信号的定义

信号是消息的表现形式，消息则是信号的具体内容。通常用数学函数式表示，也可用图像、曲线及一组数据表示。

(2) 信号的分类

信号的形式多种多样，可以从不同的角度进行分类。常用的几种分类为：确定信号和随机信号；周期信号与非周期信号；连续时间信号与离散时间信号；能量信号与功率信号等。

2. 信号的时域运算与变换

信号的基本运算有8种。时域中的定义如下。

(1) 相加：$y(t)=f_1(t)+f_2(t)$

即表示同一瞬间信号瞬时值之和。

(2) 相乘：$y(t)=f_1(t)\cdot f_2(t)$

即表示同一瞬间信号瞬时值之积。

(3) 幅度变化：$y(t)=af(t)$

即表示在每一时刻都乘以常数 a。

(4) 信号的反褶：$f(-t)$

$f(-t)$的波形与原信号 $f(t)$的波形关于纵轴镜像对称。

(5) 信号的时移：$f(t-t_0)$

式中，t_0 为常数。$f(t-t_0)$的波形当$t_0>0$ 时，将$f(t)$右移t_0；当$t_0<0$ 时，将$f(t)$左移 t_0。

(6) 信号的尺度变换：$f(at)$

式中，a 为常数。$f(at)$的波形当$|a|>1$ 时，信号 $f(t)$的波形在时间轴上压缩到原来的$\frac{1}{|a|}$；当$|a|<1$ 时，信号 $f(t)$的波形在时间轴上扩展到原来的$\frac{1}{|a|}$。

(7) 微分运算：$y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$

(8) 积分运算：$y(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$

3. 系统的定义、分类及特性

(1) 系统的定义

在电子与通信领域，系统通常是指由若干元件或大量相互联系的部件组成并具有特定功能的整体。

(2) 系统的分类

从不同角度，可以将系统进行分类，如连续时间系统与离散时间系统，即时系统和动态系统，无源系统和有源系统，集中参数系统和分布参数系统，线性系统与非线性系统，时变系统与时不变系统等。

(3) 系统的特性

当输入为 $e(t)$时，输出为 $r(t)$，表示为 $e(t)\rightarrow r(t)$。

线性性：当 $e_1(t)\rightarrow r_1(t)$和 $e_2(t)\rightarrow r_2(t)$时，$k_1e_1(t)+k_2e_2(t)\rightarrow k_1r_1(t)+k_2r_2(t)$，其中 k_1，k_2 为任意常数。

时不变性：$e(t-t_0)\rightarrow r(t-t_0)$，其中 t_0 为任意常数。如$r(t)=ae(t)$。

因果性：系统在任何时刻的输出仅取决于输入的现在与过去值，而与输入的将来值无关。如 $r(t)=e(t-2)$。

稳定性：系统输入有界，其输出也是有界的。如 $r(t)=\mathrm{e}^{e(t)}$。

微分性：$\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}\rightarrow\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$

积分性：$\int_{-\infty}^{t} e(\tau)\mathrm{d}\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{t} r(\tau)\mathrm{d}\tau$

4. 系统分析的方法

① 输入输出法和状态变量法。

② 时域法(经典法)和变换域法(傅里叶变换、拉普拉斯变换和 z 变换法)。

1-3　习题详解

【1-1】　说明波形如图 1-1 所示的各信号是连续信号还是离散信号。

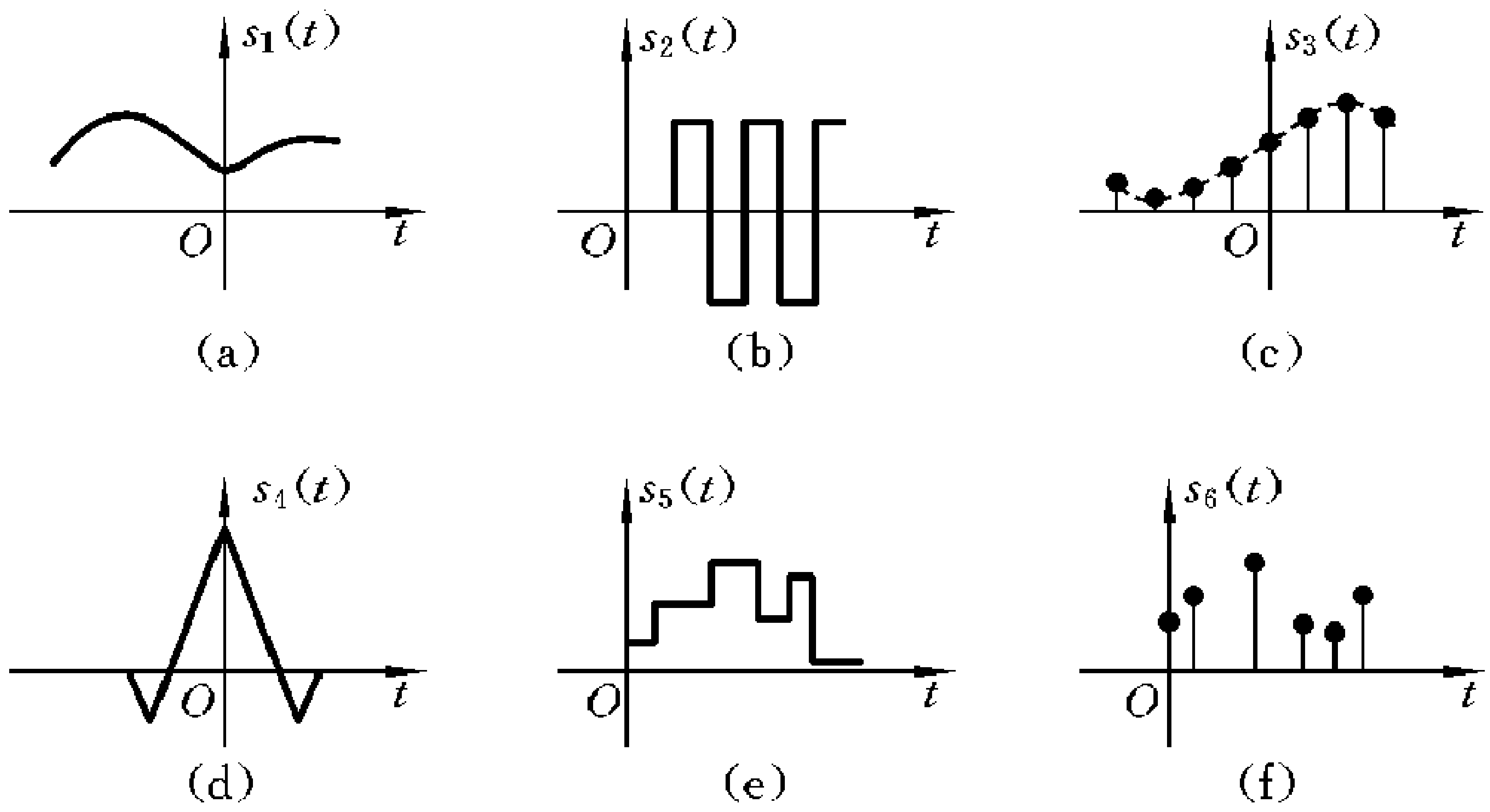


图 1-1

解　时间变量 t 连续的信号为连续信号；时间变量 t 离散的信号为离散信号。所以图1-1(a)、(b)、(d)、(e)所示信号为连续信号；图1-1(c)、(f)所示信号为离散信号。

【1-2】　说明下列信号是周期信号还是非周期信号。若是周期信号，求其周期 T。

(a) $a\sin t - b\sin(3t)$　　　(b) $a\sin(4t) + b\cos(7t)$

(c) $a\sin(3t) + b\cos(\pi t)$ ，$\pi = 3$ 和 $\pi \approx 3.141\cdots$

(d) $a\cos(\pi t) + b\sin(2\pi t)$　　　(e) $a\sin\dfrac{5t}{2} + b\cos\dfrac{6t}{5} + c\sin\dfrac{t}{7}$

(f) $[a\sin(2t)]^2$　　(g) $[a\sin(2t)+b\sin(5t)]^2$

提示：如果包含有 n 个不同频率余弦分量的复合信号是一个周期为 T 的周期信号，则其周期 T 必为各分量信号周期 $T_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的整数倍，即有 $T=m_iT_i$ 或 $\omega_i=m_i\omega$，式中，$\omega_i=\dfrac{2\pi}{T_i}$ 为各余弦分量的角频率，$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ 为复合信号的基波频率，m_i 为正整数。因此只要能找到 n 个不含整数公因子的正整数 m_1，$m_2,\cdots,m_n$ 使 $\omega_1:\omega_2:\cdots:\omega_n=m_1:m_2:\cdots:m_n$ 成立，就可判定该信号为周期信号，其周期为 $T=m_iT_i=m_i\dfrac{2\pi}{\omega_i}$。如复合信号中某分量频率为无理数，则该信号常称为概周期信号。概周期信号是非周期信号，但如选用某一有理数频率来近似表示无理数频率，则该信号可视为周期信号。所选的近似值改变，则该信号的周期也随之变化。例如，$\cos t+\cos(\sqrt{2}\,t)$ 的信号，若令 $\sqrt{2}\approx1.41$，则可求得 $m_1=100$，$m_2=141$，该信号的周期为 $T=200\pi$；若令 $\sqrt{2}\approx1.414$，则该信号的周期变为 2000π。

解　(a) 因为 $\omega_1:\omega_2=1:3$，所以 $T=1\times\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$，故该信号为周期信号。

(b) 因为 $\omega_1:\omega_2=4:7$，所以 $T=4\times\dfrac{2\pi}{4}=2\pi$，故该信号为周期信号。

(c) 当 $\pi\approx3$ 时，因为 $\omega_1:\omega_2=3:3=1:1$，所以 $T=1\times\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$，故该信号为周期信号。

当 $\pi\approx3.141\cdots$ 时，其分量频率为无理数，所以是概周期信号即非周期信号。

(d) 因为 $\omega_1:\omega_2=\pi:2\pi=1:2$，所以 $T=1\times\dfrac{2\pi}{\pi}=2$，故该信号为周期信号。

(e) 因为 $\omega_1:\omega_2:\omega_3=\dfrac{5}{2}:\dfrac{6}{5}:\dfrac{1}{7}=175:84:10$，所以 $T=10\times\dfrac{2\pi}{1/7}=140\pi$，故该信号为周期信号。

(f) 因为 $[a\sin(2t)]^2=\dfrac{a^2}{2}[1-\cos(4t)]$，所以 $T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，故该信号为周期信号。

(g) 因为

$$\begin{aligned}[a\sin(2t)+b\sin(5t)]^2&=a^2\sin^2(2t)+b^2\sin^2(5t)+2ab\sin(2t)\sin(5t)\\&=\frac{a^2}{2}[1-\cos(4t)]+\frac{b^2}{2}[1-\cos(10t)]\\&\quad+ab[\cos(3t)-\cos(7t)]\end{aligned}$$

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \omega_4 = 4 : 10 : 3 : 7$$

所以$T=4\times\dfrac{2\pi}{4}=2\pi$，故该信号为周期信号。

【1-3】 说明下列信号中哪些是周期信号，哪些是非周期信号，哪些是能量信号，哪些是功率信号。计算它们的能量或平均功率。

(1) $f(t)=\begin{cases}5\cos(10\pi t), & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$　　(2) $f(t)=\begin{cases}8\mathrm{e}^{-4t}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

(3) $f(t)=5\sin(2\pi t)+10\sin(3\pi t)$，　$-\infty<t<\infty$

(4) $f(t)=20\mathrm{e}^{-10|t|}\cos(\pi t)$，　$-\infty<t<\infty$

(5) $f(t)=\cos(5\pi t)+2\cos(2\pi^2 t)$，　$-\infty<t<\infty$

解　信号总能量为有限值，而信号平均功率为零的是能量信号；信号平均功率为有限值，而信号总能量为无限大的是功率信号。

(1) 易知$f(t)$为周期信号，也是功率信号。因为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t,\quad 且\quad T=\frac{2\pi}{10\pi}=\frac{1}{5}$$

所以$P=5\int_{-\frac{1}{10}}^{\frac{1}{10}}25\cos^2(10\pi t)\mathrm{d}t=125\int_0^{\frac{1}{10}}\frac{1}{2}[\cos(20\pi t)+1]\mathrm{d}t=6.25\ \mathrm{W}$

(2) 因为$t\to+\infty$时，$\mathrm{e}^{-4t}\to 0$，所以$f(t)$为非周期信号，也是能量信号。故

$$W=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}64\mathrm{e}^{-8t}\mathrm{d}t=8\ \mathrm{J}$$

(3) 因为$\omega_1:\omega_2=2\pi:3\pi=2:3$，所以$T=2\times\dfrac{2\pi}{2\pi}=2$，故$f(t)$为周期信号，也是功率信号。所以

$$P=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}[5\sin(2\pi t)+10\sin(3\pi t)]^2\mathrm{d}t=62.5\ \mathrm{W}$$

(4) 因为$t\to+\infty$时，$\mathrm{e}^{-10|t|}=\mathrm{e}^{-10t}\to 0$；$t\to-\infty$时，$\mathrm{e}^{-10|t|}=\mathrm{e}^{10t}\to 0$。又$|\cos(\pi t)|\leqslant 1$，则$\mathrm{e}^{-10|t|}\cos(\pi t)\to 0$，所以$f(t)$为非周期信号，也是能量信号。故

$$\begin{aligned}W&=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{0}|20\mathrm{e}^{10t}\cos(\pi t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}|20\mathrm{e}^{-10t}\cos(\pi t)|^2\mathrm{d}t\\&=38.18\ \mathrm{J}\end{aligned}$$

(5) 取$\pi\approx 3.14$，则$\omega_1:\omega_2=5\pi:2\pi^2=5:2\pi=5:6.28=125:157$，所以$T=125\times\dfrac{2\pi}{5\pi}=100$，故$f(t)$为周期信号，也是功率信号。所以

$$
\begin{aligned}
P &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{100}\int_{-50}^{50}[\cos(5\pi t)+2\cos(2\pi^2 t)]^2\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{100}\int_{-50}^{50}[\cos^2(5\pi t)+4\cos(5\pi t)\cos(2\pi^2 t)+4\cos^2(2\pi^2 t)]\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{50}\int_{0}^{50}\frac{1}{2}[\cos(10\pi t)+1]\mathrm{d}t+\frac{1}{25}\int_{0}^{50}[\cos(5\pi+2\pi^2)t \\
&\quad +\cos(5\pi-2\pi^2)t]\mathrm{d}t+\frac{1}{25}\int_{0}^{50}[1+\cos(4\pi^2 t)]\mathrm{d}t \\
&= 2.5\ \mathrm{W}
\end{aligned}
$$

【1-4】 试判断下列论断是否正确：

(1) 两个周期信号之和必仍为周期信号；

(2) 非周期信号一定是能量信号；

(3) 能量信号一定是非周期信号；

(4) 两个功率信号之和必仍为功率信号；

(5) 两个功率信号之积必仍为功率信号；

(6) 能量信号与功率信号之积必为能量信号；

(7) 随机信号必然是非周期信号。

解 (1) 对。

设 $f_1(t)=f_1(t+T_1)$，$f_2(t)=f_2(t+T_1)$，$f(t)=f_1(t)+f_2(t)$

$$
\begin{aligned}
f(t+nT_1T_2) &= f_1(t+nT_1T_2)+f_2(t+nT_1T_2) \\
&= f_1(t)+f_2(t)=f(t)
\end{aligned}
$$

故 $f(t)$ 仍为周期信号。

(2) 错。

只存在于有限时间内的信号叫能量信号，非周期信号的时间可能是无限的，故其不一定是能量信号。

(3) 对。

周期信号都是功率信号；非周期信号可能是能量信号，也可能是功率信号。

(4) 对。

两个功率信号之和的平均功率仍然为有限值，而且信号总能量仍为无限大。

(5) 错。

两个功率信号之积的平均功率不一定为有限值。

(6) 对。

能量信号为有限时间域,与功率信号相乘之后仍为有限时间域,故仍为能量信号。

(7) 对。

随机信号不会重复出现。

【1-5】 粗略绘出下列各函数式表示的信号波形。

(1) $f(t)=3-e^{-t}$,　$t>0$

(2) $f(t)=5e^{-t}+3e^{-2t}$,　$t>0$

(3) $f(t)=e^{-t}\sin(2\pi t)$,　$0<t<3$

(4) $f(t)=\dfrac{\sin(at)}{at}$

(5) $f(k)=(-2)^{-k}$,　$0<k\leqslant 6$

(6) $f(k)=e^{k}$,　$0\leqslant k<5$

(7) $f(k)=k$,　$0<k<n$

解　各函数式所表示的信号波形如图1-2所示。

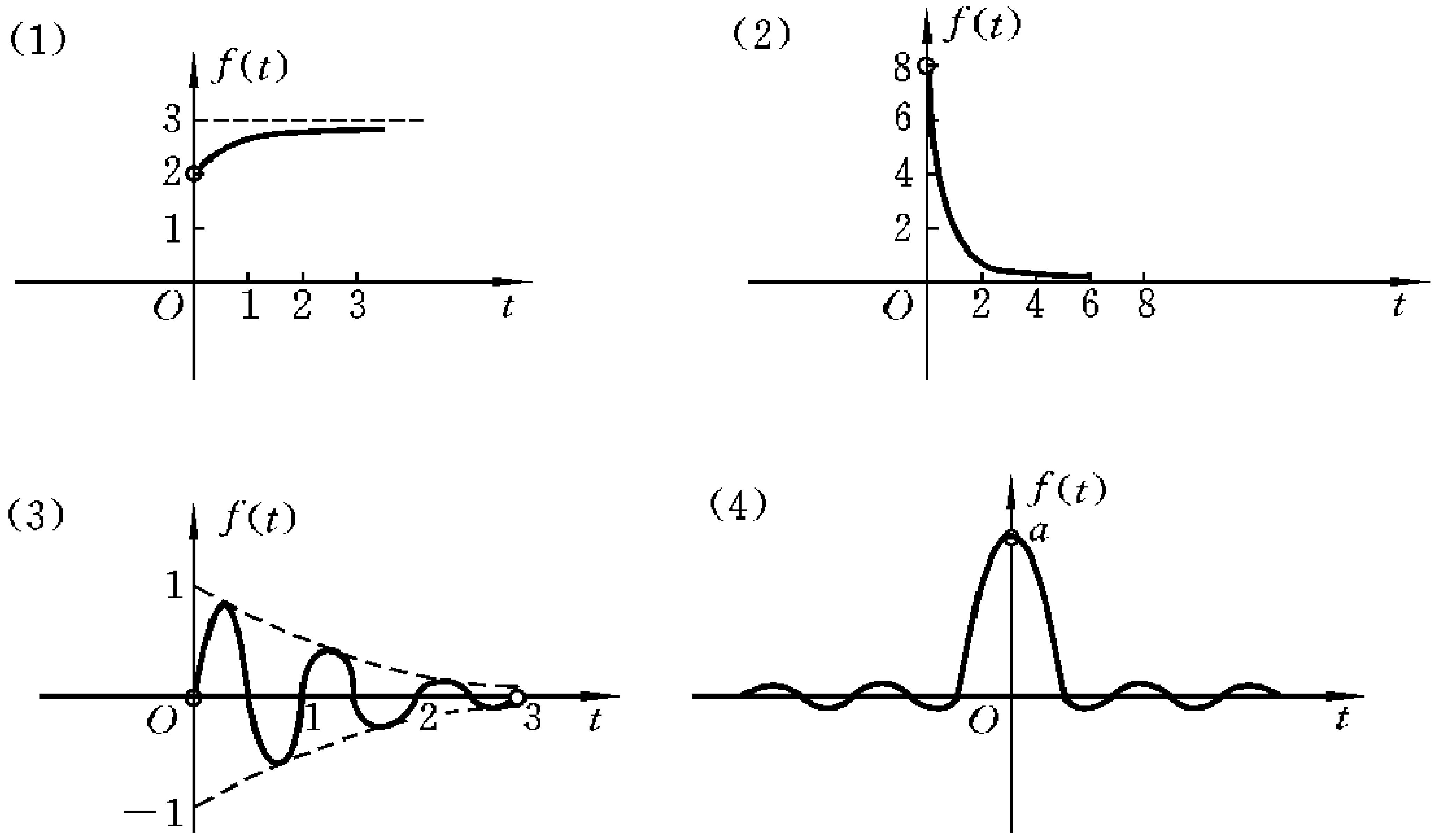
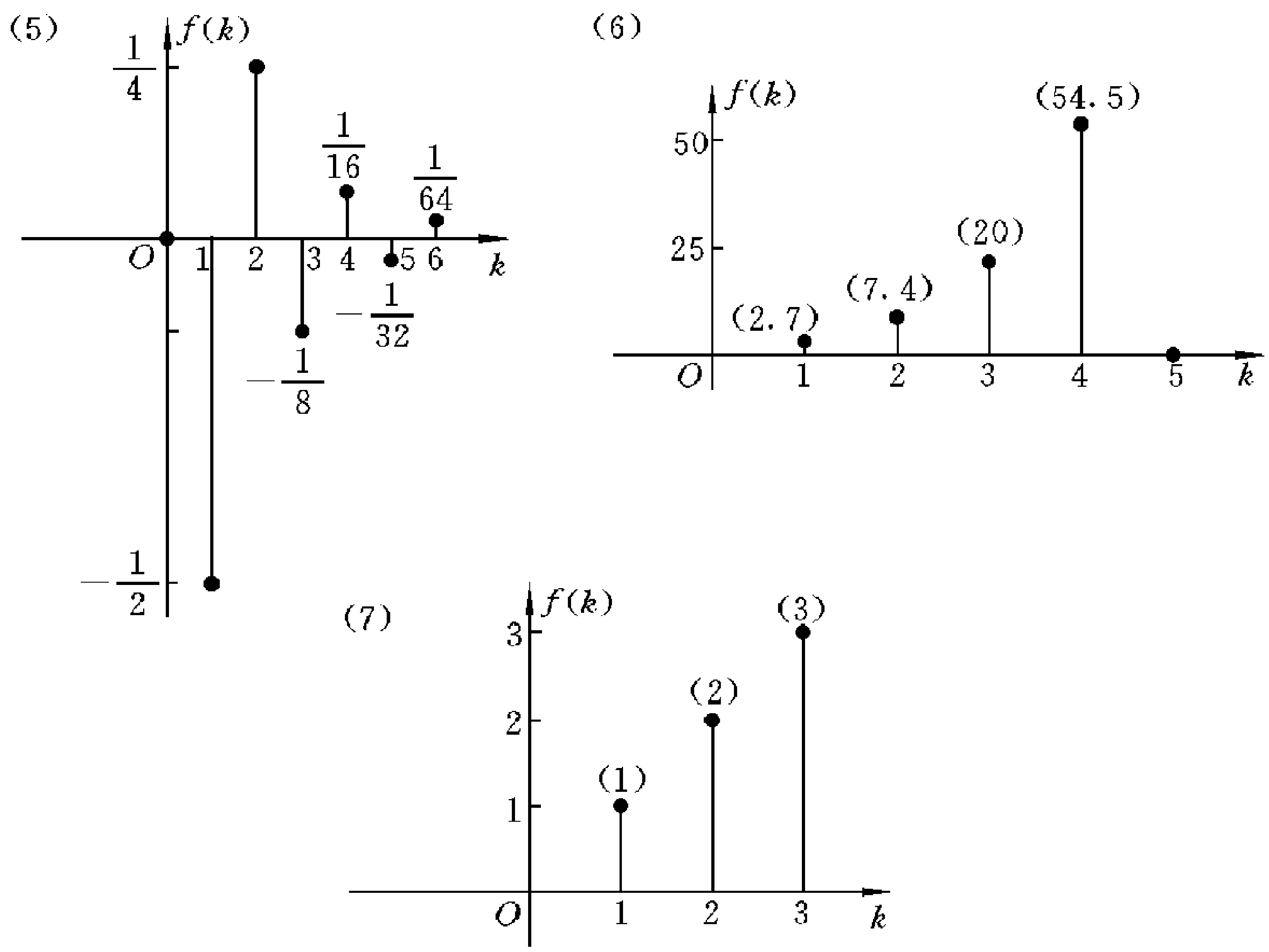


图1-2



续图 1-2

【1-6】 已知信号 $f(t)$ 的波形如图 1-3 所示，试绘出 $f(t-4)$，$f(t+4)$，$f\left(\frac{t}{2}\right)$，$f(2t)$，$f\left(-\frac{t}{2}\right)$，$f\left(-\frac{t}{2}+1\right)$ 的波形。

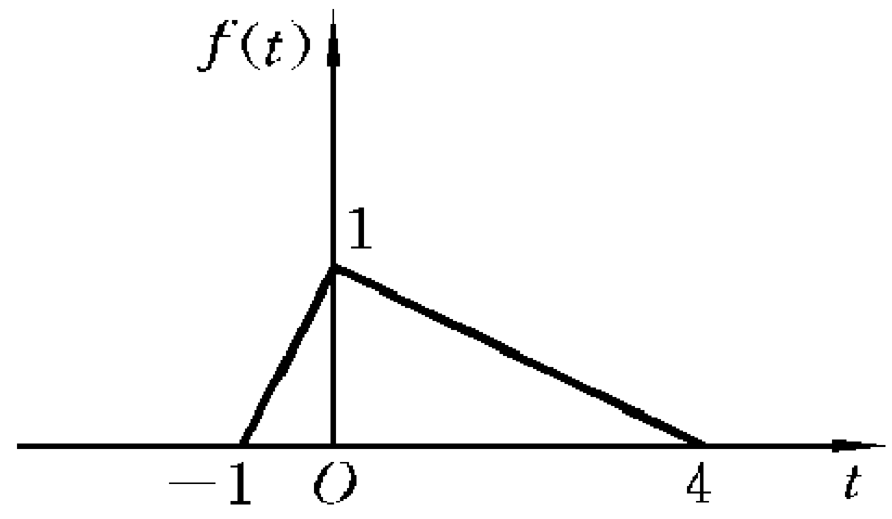


图 1-3

解　$f(t-4)$，$f(t+4)$，$f\left(\frac{t}{2}\right)$，$f(2t)$，$f\left(-\frac{t}{2}\right)$，$f\left(-\frac{t}{2}+1\right)$ 的波形如图 1-4 所示。

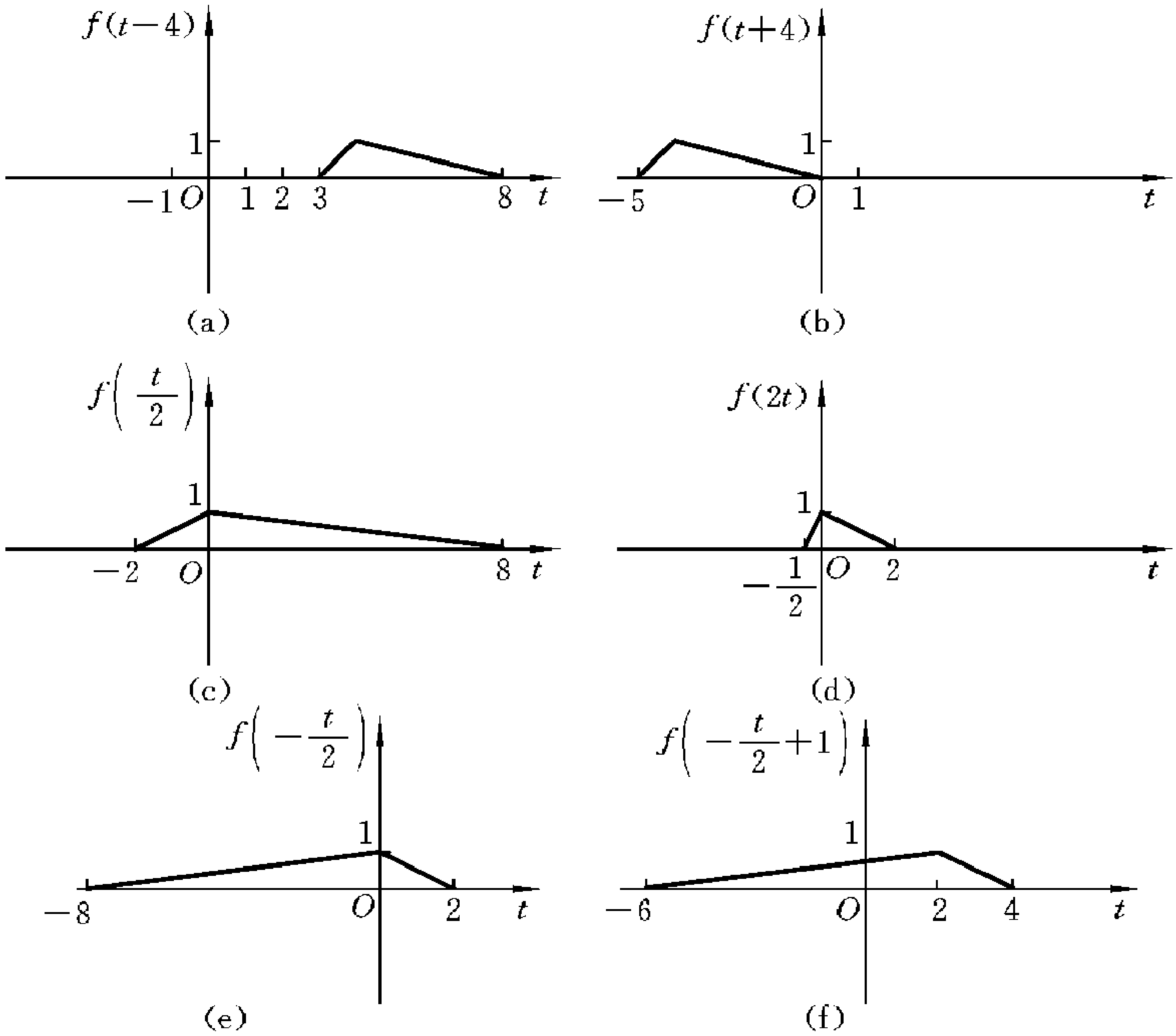


图 1-4

【1-7】 改变例题 1-2(见原教材)(图 1-5)中信号处理的分步次序为：

(1) 反褶,时延,尺度变换；

(2) 尺度变换,反褶,时延；

(3) 尺度变换,时延,反褶。重绘 $f(1-2t)$ 的波形,并与例题 1-2 的结果相比较。

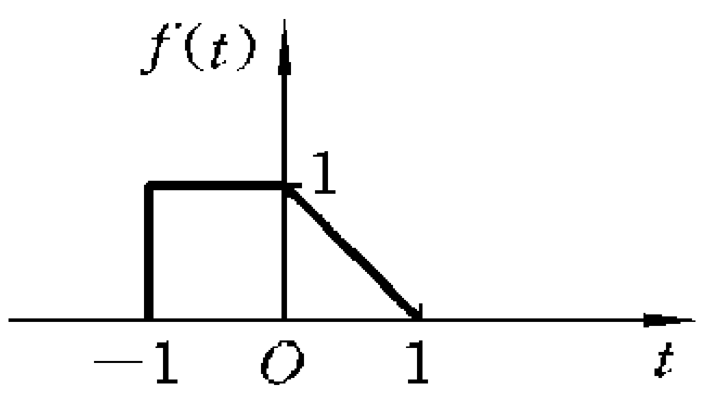


图 1-5

解　(1) 反褶,时延,尺度变换所产生的信号的相应的波形如图 1-6 所示。

(2) 尺度变换,反褶,时延所产生的信号的相应的波形如图1-7所示。

(3) 尺度变换,时延,反褶所产生的信号的相应的波形如图1-8所示。

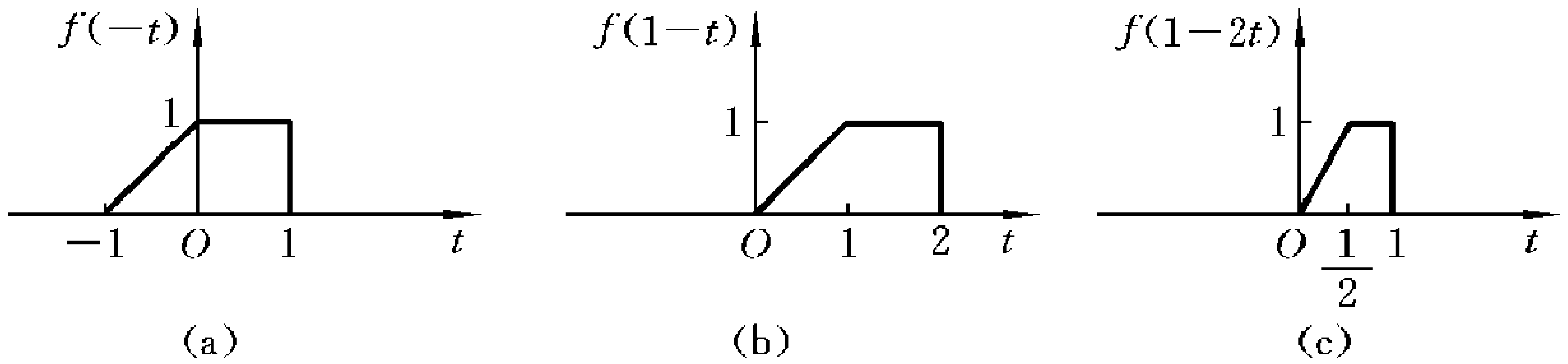


图 1-6

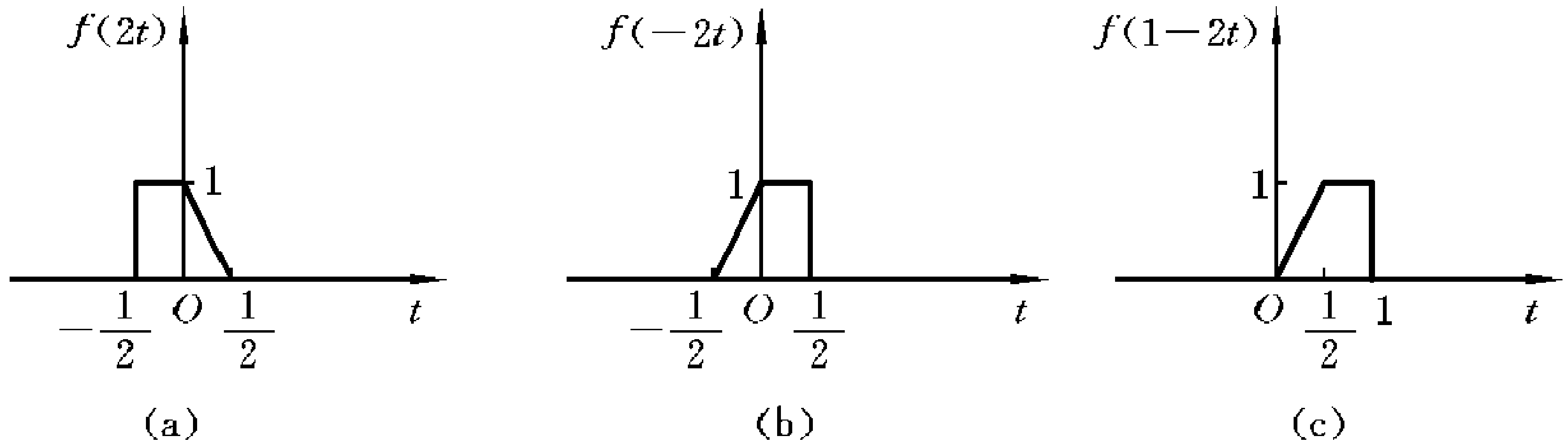


图 1-7

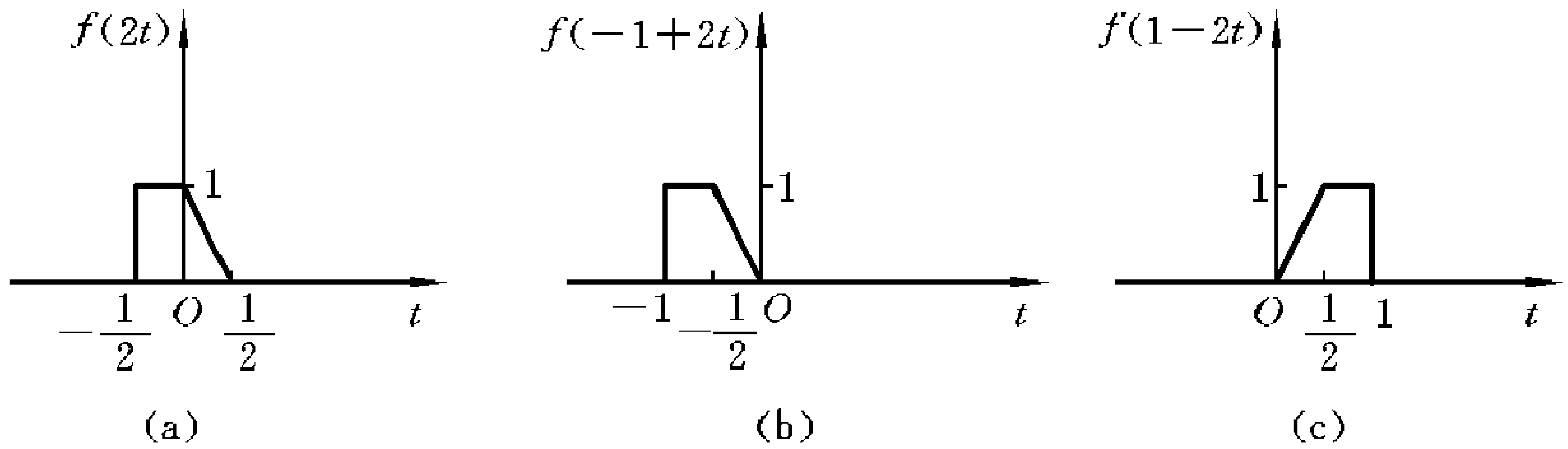


图 1-8

与例题1-2 的结果相比较，易发现二者结果完全相同。只要注意到每一步的处理都是针对时间变量t 进行的，则不论如何分步都可以得到相同的结果。

【1-8】 试判断下列方程所描述的系统是否为线性系统，是否为时变系统。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+r(t)=e(t)+5$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+tr(t)+5\int_{-\infty}^{t}r(\tau)\mathrm{d}\tau=\dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+e(t)$

(3) $r(t)=10e^2(t)+10$

(4) $\dfrac{d^2r(t)}{dt^2}-r(t)\dfrac{dr(t)}{dt}=10e(t)$

解　线性系统是同时具有齐次性和叠加性的系统，即若$e_1(t)\to r_1(t)$，$e_2(t)\to r_2(t)$，且

$$k_1e_1(t)+k_2e_2(t)\to k_1r_1(t)+k_2r_2(t)$$

则该系统为线性系统。

(1) 当激励为$k_1e_1(t)+k_2e_2(t)$时，响应为$k_1r_1(t)+k_2r_2(t)$，分别代入题中方程左、右两边，得

$$\begin{aligned}\text{方程左边}&=\frac{d[k_1r_1(t)+k_2r_2(t)]}{dt}+[k_1r_1(t)+k_2r_2(t)]\\&=k_1[e_1(t)+5]+k_2[e_2(t)+5] \qquad ①\end{aligned}$$

$$\text{方程右边}=k_1e_1(t)+k_2e_2(t)+5 \qquad ②$$

因为式①≠②，所以该系统为非线性系统。

(2) 当激励为$k_1e_1(t)+k_2e_2(t)$时，响应为$k_1r_1(t)+k_2r_2(t)$，分别代入题中方程左、右两边，得

$$\text{方程右边}=\frac{d[k_1e_1(t)+k_2e_2(t)]}{dt}+k_1e_1(t)+k_2e_2(t) \qquad ③$$

$$\begin{aligned}\text{方程左边}&=\frac{d[k_1r_1(t)+k_2r_2(t)]}{dt}+t[k_1r_1(t)+k_2r_2(t)]\\&\quad+5\int_{-\infty}^{t}[k_1r_1(\tau)+k_2r_2(\tau)]d\tau\\&=\frac{d[k_1e_1(t)+k_2e_2(t)]}{dt}+k_1e_1(t)+k_2e_2(t) \qquad ④\end{aligned}$$

因为式③=④，所以该系统为线性系统。

(3) 当激励为$k_1e_1(t)+k_2e_2(t)$时，响应为$k_1r_1(t)+k_2r_2(t)$，代入题中方程左、右两边，得

$$\begin{aligned}10[k_1e_1(t)+k_2e_2(t)]^2+10&=10k_1^2e_1^2(t)+20k_1k_2e_1(t)e_2(t)+10k_2^2e_2^2(t)+10\\&\neq k_1r_1(t)+k_2r_2(t)\end{aligned}$$

所以该系统为非线性系统。

(4) 当激励为$k_1e_1(t)+k_2e_2(t)$时，响应为$k_1r_1(t)+k_2r_2(t)$，分别代入题中

方程左、右两边，得

$$\text{方程右边}=10[k_1e_1(t)+k_2e_2(t)]$$
$$=\frac{\mathrm{d}^2[k_1r_1(t)]}{\mathrm{d}t^2}-k_1r_1(t)\frac{\mathrm{d}[k_1r_1(t)]}{\mathrm{d}t}$$
$$+\frac{\mathrm{d}^2[k_2r_2(t)]}{\mathrm{d}t^2}-k_2r_2(t)\frac{\mathrm{d}[k_2r_2(t)]}{\mathrm{d}t} \quad ⑤$$

$$\text{方程左边}=\frac{\mathrm{d}^2[k_1r_1(t)+k_2r_2(t)]}{\mathrm{d}t^2}$$
$$-[k_1r_1(t)+k_2r_2(t)]\frac{\mathrm{d}[k_1r_1(t)+k_2r_2(t)]}{\mathrm{d}t}$$
$$=\left\{\frac{\mathrm{d}^2[k_1r_1(t)]}{\mathrm{d}t^2}-k_1r_1(t)\frac{\mathrm{d}[k_1r_1(t)]}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2[k_2r_2(t)]}{\mathrm{d}t^2}\right.$$
$$\left.-k_2r_2(t)\frac{\mathrm{d}[k_2r_2(t)]}{\mathrm{d}t}\right\}$$
$$-\left\{k_1r_1(t)\frac{\mathrm{d}[k_2r_2(t)]}{\mathrm{d}t}+k_2r_2(t)\frac{\mathrm{d}[k_1r_1(t)]}{\mathrm{d}t}\right\} \quad ⑥$$

因为式⑤≠⑥，所以该系统为非线性系统。

【1-9】 证明线性时不变系统有如下特性：即若系统在激励$e(t)$作用下响应为$r(t)$，则当激励为$\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$时响应必为$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$。

提示：$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(t)-f(t-\Delta t)}{\Delta t}$

证　因为

$$\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e(t)-e(t-\Delta t)}{\Delta t}\to\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t)-r(t-\Delta t)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$$

即$\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}\to\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$，所以得证。

【1-10】 一线性时不变系统具有非零的初始状态，已知当激励为$e(t)$时，系统全响应为$r_1(t)=\mathrm{e}^{-t}+2\cos(\pi t)$，$t>0$；当初始状态不变，激励为$2e(t)$时，系统的全响应为$r_2(t)=3\cos(\pi t)$，$t>0$。求在同样初始状态条件下，当激励为$3e(t)$时，系统的全响应$r_3(t)$。

解　设零输入响应为$r_{zi}(t)$，零状态响应为$r_{zs}(t)$，则

$$\begin{cases}r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=r_1(t)=\mathrm{e}^{-t}+2\cos(\pi t)\\ r_{zi}(t)+2r_{zs}(t)=r_2(t)=3\cos(\pi t)\end{cases}$$

联立,解得
$$\begin{cases} r_{zs}(t)=\cos(\pi t)-e^{-t} \\ r_{zi}(t)=\cos(\pi t)+2e^{-t} \end{cases}$$

所以
$$r_{zi}(t)+3r_{zs}(t)=r_3(t)=4\cos(\pi t)-e^{-t} \quad (t>0)$$

【1-11】 一具有两个初始条件 $x_1(0)$、$x_2(0)$ 的线性时不变系统,其激励为 $e(t)$,输出响应为 $r(t)$,已知:

(1) 当 $e(t)=0, x_1(0)=5, x_2(0)=2$ 时,
$$r(t)=e^{-t}(7t+5), t>0$$

(2) 当 $e(t)=0, x_1(0)=1, x_2(0)=4$ 时,
$$r(t)=e^{-t}(5t+1), t>0$$

(3) 当 $e(t)=\begin{cases} 1, t>0 \\ 0, t<0 \end{cases}, x_1(0)=1, x_2(0)=1$ 时,
$$r(t)=e^{-t}(t+1), \quad t>0$$

求 $e(t)=\begin{cases} 3, t>0, \\ 0, t<0 \end{cases}$ 时的零状态响应。

解 设零输入响应为 $r_{zi}(t)$,零状态响应为 $r_{zs}(t)$,则由已知条件(1)得
$$5r_{1zi}(t)+2r_{2zi}(t)=e^{-t}(7t+5) \quad ①$$

由已知条件(2)得
$$r_{1zi}(t)+4r_{2zi}(t)=e^{-t}(5t+1) \quad ②$$

联立式①、②,得
$$\begin{cases} r_{1zi}(t)=e^{-t}(t+1) \\ r_{2zi}(t)=te^{-t} \end{cases}$$

由已知条件(3)得 $r_{1zi}(t)+r_{2zi}(t)+r_{zs}(t)=e^{-t}(t+1)$

所以
$$r_{zs}(t)=-te^{-t}$$

故当 $e(t)=\begin{cases} 3, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$ 时,
$$r(t)=3r_{zs}(t)=-3te^{-t}, \quad t>0$$

第二章　连续时间系统的时域分析

2-1　基 本 要 求

通过本章的学习，学生应该熟练掌握典型信号的定义与性质、微分方程的建立与求解。深刻理解系统的特征多项式、特征方程、特征根的意义及求解；单位冲激响应与单位阶跃响应的意义及求解；系统全响应的三种求解方式：零输入响应和零状态响应，自由响应和强迫响应，瞬态响应和稳态响应。重点掌握卷积积分的定义、运算规律及主要性质，并会应用卷积积分法求线性时不变系统的零状态响应。

2-2　重点、难点学习指导

1．奇异信号

（1）单位阶跃函数

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

（2）单位冲激函数

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\\ \delta(t)=0, \quad t\neq 0\end{cases}$$

单位冲激函数与单位阶跃函数的关系

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\varepsilon(t), \qquad \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$$

单位冲激函数性质：

① $\delta(t)=\delta(-t)$

② $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$

③ $f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$

④ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)\delta(t)]=f(0)\delta'(t)$

⑤ $\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$

(3) 单位冲激偶函数

$$\delta'(t)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$

单位冲激偶函数性质：

① $\delta'(t)=-\delta'(-t)$

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)\mathrm{d}t=0$

③ $\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau=\delta(t)$

④ $f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$

2. 卷积积分

(1) 定义

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

卷积积分上、下限的确定：

① 若 $f_1(t)$，$f_2(t)$均为因果信号，则积分的上、下限可写为$(0,t)$，即

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{0}^{t}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

② 若 $f_1(t)$为因果信号，$f_2(t)$为一般信号，则积分的上、下限可写为$(0,+\infty)$，即

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{0}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

③ 若 $f_1(t)$为一般信号，$f_2(t)$为因果信号，则积分的上、下限可写为$(-\infty,t)$，即

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

④ 若 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 均为一般信号，则积分的上、下限可写为 $(-\infty,+\infty)$，即

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

(2) 性质

① 交换律：

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

② 分配律：

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

③ 结合律：

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$$

④ 积分性质：

$$\int_{-\infty}^{t} [f_1(\tau) * f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau = f_1(t) * \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)\mathrm{d}\tau = f_2(t) * \int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$

⑤ 微分性质：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t) * f_2(t)] = f_1(t) * \frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t} = f_2(t) * \frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}$$

⑥ 微分积分性质：

$$\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t} * \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau * \frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t} = f_1(t) * f_2(t)$$

⑦ 任意时间函数 $f(t)$ 与 $\delta(t)$ 的卷积：

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

$$f(t-T_1) * \delta(t-T_2) = f(t-T_1-T_2)$$

$$f(t-T_1) * \delta(t-T_2) = f(t-T_1-T_2)$$

$$\delta(t-T_1) * \delta(t-T_2) = \delta(t-T_1-T_2)$$

⑧ 任意时间函数 $f(t)$ 与 $\varepsilon(t)$ 的卷积：

$$f(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$f(t) * \varepsilon(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t-t_0} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

⑨ 任意时间函数 $f(t)$ 与 $\delta'(t)$ 的卷积：

$$f(t)*\delta'(t)=f'(t)*\delta(t)=f'(t)$$

$$f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$$

$$f(t)*\delta^{(n)}(t-t_0)=f^{(n)}(t-t_0)$$

3. 系统全响应的求解

时域分析有经典法和卷积积分法。经典法是直接求解描述系统输入输出关系的微分方程式的方法;卷积积分法是利用卷积积分求系统零状态响应的方法。

系统全响应可按三种方式分解:

① 全响应 $y(t)$ = 零输入响应 $y_{zi}(t)$ + 零状态响应 $y_{zs}(t)$;

② 全响应 $y(t)$ = 自由响应 + 强迫响应;

③ 全响应 $y(t)$ = 瞬态响应 + 稳态响应。

对于稳定系统,零输入响应必然是自由响应的一部分,零状态响应为自由响应和强迫响应两部分;自由响应对应于微分方程的齐次解,而强迫响应就是该微分方程的特解;自由响应必为瞬态响应,强迫响应中随时间衰减的部分是瞬态分量,而不随时间变化的部分为稳态分量。对于系统全响应的求解方法,学生应该重点掌握由零输入响应 $y_{zi}(t)$ 和零状态响应 $y_{zs}(t)$ 来求全响应的方法。系统全响应的求解可归纳为如下过程:

① 根据系统建立微分方程;

② 根据微分方程求算子方程;

③ 令算子方程的左边等于0,得到特征方程并求特征根;

④ 由特征根求系统零输入响应 $y_{zi}(t)$;

⑤ 由算子方程求冲激响应 $h(t)$;

⑥ 求系统零状态响应 $y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$;

⑦ 求系统全响应 $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$。

2-3　习 题 详 解

【2-1】 写出图 2-1 中输入 $i(t)$ 和输出 $u_1(t)$ 及 $u_2(t)$ 之间关系的线性微分方程并求转移算子。

解　图 2-1 所示电路的结点电流方程为

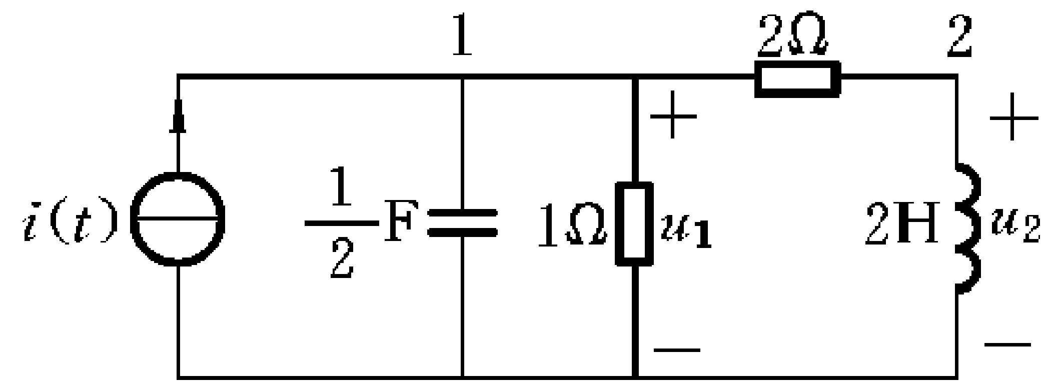


图 2-1

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} + u_1(t) + \dfrac{1}{2}[u_1(t) - u_2(t)] = i(t) & ① \\ \dfrac{1}{2}[u_1(t) - u_2(t)] - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} u_2(\tau)\mathrm{d}\tau = 0 & ② \end{cases}$$

对式①移项，解出 $u_2(t)$：

$$u_2(t) = \frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} + 3u_1(t) - 2i(t) \qquad ③$$

再对上式微分可得到

$$\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2u_1(t)}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} - 2\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \qquad ④$$

对式②微分，同时将式③、④代入，消去$u_2(t)$便得到$u_1(t)$与$i(t)$之间关系的线性微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2u_1(t)}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} + 3u_1(t) = 2\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + 2i(t) \qquad ⑤$$

为了得到 $u_2(t)$ 与 $i(t)$ 之间的线性微分方程式，也同样采取消元处理，即由式②解出 $u_1(t)$：

$$u_1(t) = u_2(t) + \int_{-\infty}^{t} u_2(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad ⑥$$

对式⑥进行微分，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} + u_2(t) \qquad ⑦$$

将式⑥、⑦代入式①消去$u_1(t)$，然后再微分一次，得到$u_2(t)$与$i(t)$之间关系的线性微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2u_2(t)}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} + 3u_2(t) = 2\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \qquad ⑧$$

转移算子
$$H_1(p)=\frac{u_1(t)}{i(t)}=\frac{2(p+1)}{p^2+3p+3}$$
$$H_2(p)=\frac{u_2(t)}{i(t)}=\frac{2p}{p^2+3p+3}$$

【2-2】 写出图 2-2 中输入 $e(t)$ 和输出 $i_1(t)$ 之间关系的线性微分方程并求转移算子 $H(p)$。

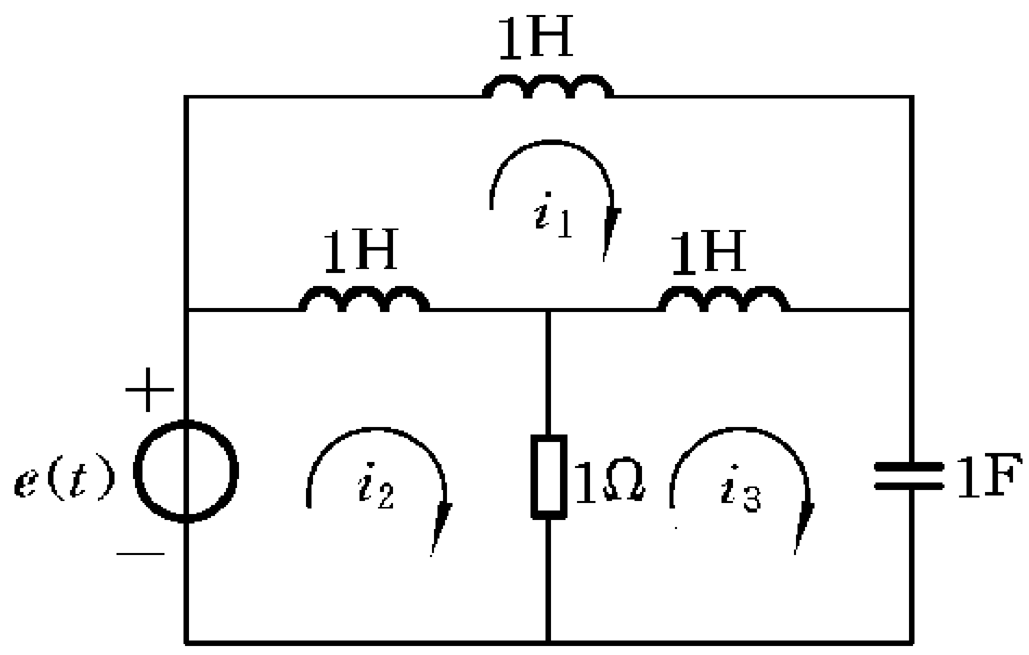


图 2-2

解　对图 2-2 所示的电路，列写回路电压方程：
$$\begin{cases}3\dfrac{di_1}{dt}-\dfrac{di_2}{dt}-\dfrac{di_3}{dt}=0\\-\dfrac{di_1}{dt}+\dfrac{di_2}{dt}+i_2-i_3=e(t)\\-\dfrac{di_1}{dt}-i_2+\dfrac{di_3}{dt}+i_3+\displaystyle\int_{-\infty}^{t}i_3d\tau=0\end{cases}$$

为了便于消元，化为算子形式：
$$\begin{cases}3pi_1-pi_2-pi_3=0 & ①\\-pi_1+(p+1)i_2-i_3=e(t) & ②\\-pi_1-i_2+\left(p+1+\dfrac{1}{p}\right)i_3=0 & ③\end{cases}$$

对方程组中的第③式进行一次微分，消去积分算子可得
$$\begin{cases}3pi_1-pi_2-pi_3=0\\-pi_1+(p+1)i_2-i_3=e(t)\\-p^2i_1-pi_2+(p^2+p+1)i_3=0\end{cases}$$

利用克莱姆法则，解出 i_1 与 $e(t)$ 关系的微分方程：

$$i_1 = \begin{vmatrix} 0 & -p & -p \\ e(t) & p+1 & -1 \\ 0 & -p & p^2+p+1 \end{vmatrix} \bigg/ \begin{vmatrix} 3p & -p & -p \\ -p & p+1 & -1 \\ -p^2 & -p & p^2+p+1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{p(p^2+2p+1)}{p(p^3+2p^2+2p+3)} e(t)$$

因而得到输入 $e(t)$ 和输出 $i_1(t)$ 之间关系的线性微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^4 i_1}{\mathrm{d}t^4} + 2\frac{\mathrm{d}^3 i_1}{\mathrm{d}t^3} + 2\frac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^3 e(t)}{\mathrm{d}t^3} + 2\frac{\mathrm{d}^2 e(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

所求的转移算子为

$$H(p) = \frac{i_1(t)}{e(t)} = \frac{p(p^2+2p+1)}{p(p^3+2p^2+2p+3)}$$

【2-3】 分别求图 2-3(a)、(b)、(c)所示网络的下列转移算子：

(1) i_1 对 $f(t)$；　(2) i_2 对 $f(t)$；　(3) u_o 对 $f(t)$。

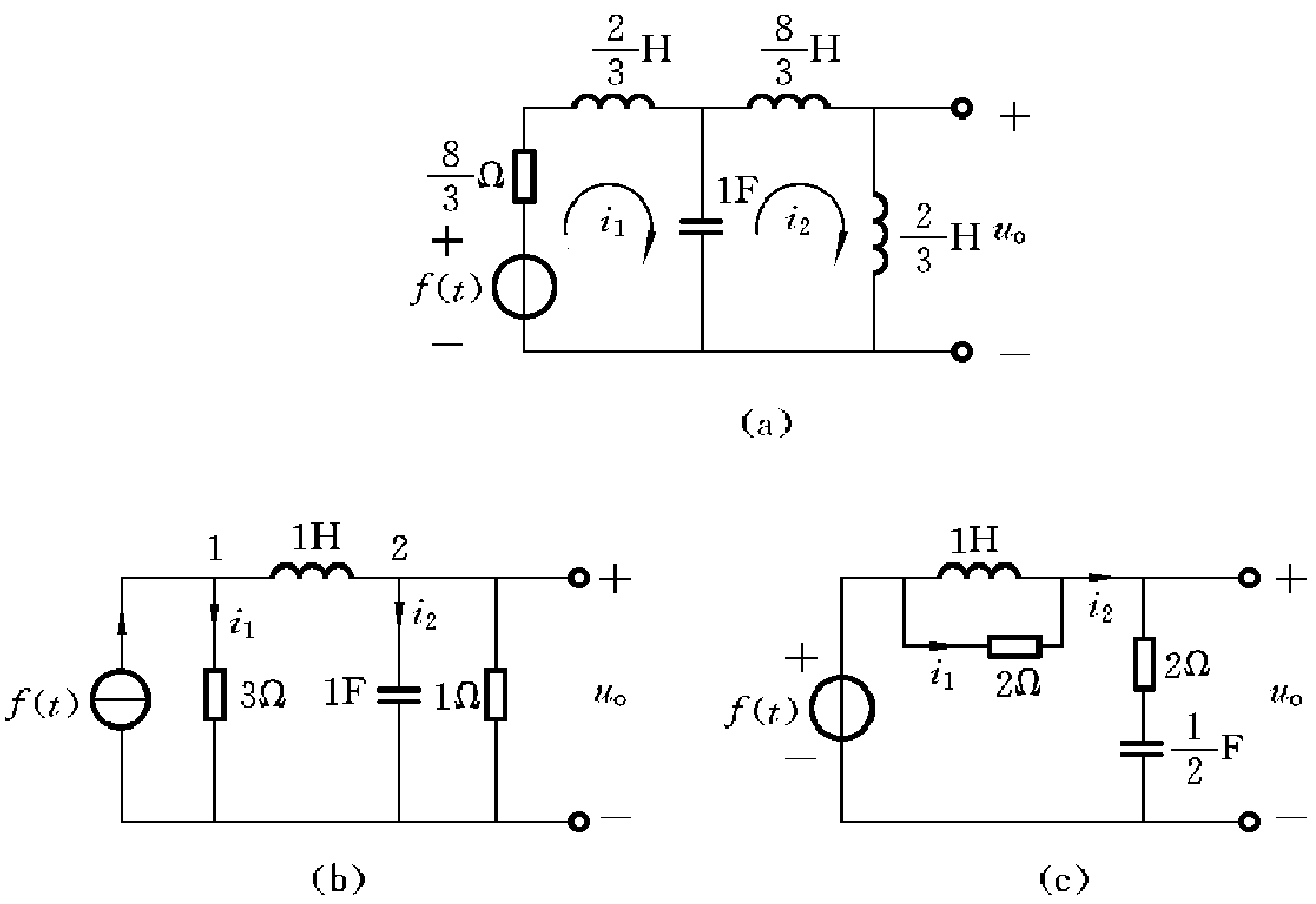


图 2-3

解　(a) 对图 2-3(a)所示电路列写回路电压方程：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{8}{3}+\dfrac{2}{3}p+\dfrac{1}{p}\right)i_1-\dfrac{1}{p}i_2=f(t)\\[2ex]-\dfrac{1}{p}i_1+\left(\dfrac{10}{3}p+\dfrac{1}{p}\right)i_2=0\end{cases}$$

将微积分方程化为微分方程，选择$\dfrac{1}{p}i_1$，$\dfrac{1}{p}i_2$作为变量，于是有

$$\begin{cases}(2p^2+8p+3)\dfrac{1}{p}i-3\dfrac{1}{p}i_2=3f(t)\\[2ex]-3\dfrac{1}{p}i_1+(10p^2+3)\dfrac{1}{p}i_2=0\end{cases}$$

所以有

$$\frac{1}{p}i_1=\begin{vmatrix}3f(t) & -3\\ 0 & 10p^2+3\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}2p^2+8p+3 & -3\\ -3 & 10p^2+3\end{vmatrix}$$

$$=\frac{3(10p^2+3)f(t)}{(2p^2+8p+3)(10p^2+3)-9}$$

$$=\frac{3(10p^2+3)f(t)}{p(20p^3+80p^2+36p+24)}$$

$$\frac{1}{p}i_2=\begin{vmatrix}2p^2+8p+3 & 3f(t)\\ -3 & 0\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}2p^2+8p+3 & -3\\ -3 & 10p^2+3\end{vmatrix}$$

$$=\frac{9f(t)}{p(20p^3+80p^2+36p+24)}$$

所以

$$i_1=p\cdot\frac{1}{p}i_1=\frac{3(10p^2+3)}{20p^3+80p^2+36p+24}f(t)$$

$$i_2=p\cdot\frac{1}{p}i_2=\frac{9}{20p^3+80p^2+36p+24}f(t)$$

$$u_o=\frac{2}{3}pi_2=\frac{6p}{20p^3+80p^2+36p+24}f(t)$$

由此得

(1) $H_1(p)=\dfrac{i_1}{f(t)}=\dfrac{3(10p^2+3)}{20p^3+80p^2+36p+24}$

(2) $H_2(p)=\dfrac{i_2}{f(t)}=\dfrac{9}{20p^3+80p^2+36p+24}$

(3) $H_o(p)=\dfrac{u_o}{f(t)}=\dfrac{3p}{10p^3+40p^2+18p+12}$

(b) 列写图 2-3(b)所示网络的结点方程。

设结点 1、2 的电位分别为 u_1、u_2，则

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{p}\right)u_1-\dfrac{1}{p}u_2=f(t)\\-\dfrac{1}{p}u_1+\left(p+1+\dfrac{1}{p}\right)u_2=0\end{cases}$$

将微积分方程化为微分方程，选择 $\dfrac{1}{p}u_1$、$\dfrac{1}{p}u_2$ 为变量，于是有

$$\begin{cases}(p+3)\dfrac{1}{p}u_1-3\dfrac{1}{p}u_2=3f(t)\\-\dfrac{1}{p}u_1+(p^2+p+1)\dfrac{1}{p}u_2=0\end{cases}$$

运用克莱姆法则，有

$$\frac{1}{p}u_1=\frac{3(p^2+p+1)f(t)}{(p^2+p+1)(p+3)-3}=\frac{3(p^2+p+1)}{p(p^2+4p+4)}f(t)$$

$$\frac{1}{p}u_2=\frac{3}{p(p^2+4p+4)}f(t)$$

所以
$$u_1=p\cdot\frac{1}{p}u_1=\frac{3(p^2+p+1)}{p^2+4p+4}f(t)$$

$$u_2=p\cdot\frac{1}{p}u_2=\frac{3}{p^2+4p+4}f(t)$$

最后得
$$i_1=\frac{u_1}{3}=\frac{p^2+p+1}{p^2+4p+4}f(t)$$

$$i_2=pu_2=\frac{3p}{p^2+4p+4}f(t)$$

$$u_o=u_2=\frac{3}{p^2+4p+4}f(t)$$

于是转移算子为

(1) $H_1(p)=\dfrac{i_1}{f(t)}=\dfrac{p^2+p+1}{p^2+4p+4}$

(2) $H_2(p)=\dfrac{i_2}{f(t)}=\dfrac{3p}{p^2+4p+4}$

(3) $H_o(p)=\dfrac{u_o}{f(t)}=\dfrac{3}{p^2+4p+4}$

(c) 对图2-3(c)所示电路,由复杂电路欧姆定律得

$$i_2=\frac{f(t)}{\dfrac{2p}{p+2}+2+\dfrac{2}{p}}=\frac{p(p+2)}{2(2p^2+3p+2)}f(t)$$

$$i_1=\frac{p}{p+2}i_2=\frac{p^2}{2(2p^2+3p+2)}f(t)$$

$$u_o=\left(2+\frac{2}{p}\right)i_2=\frac{(p+1)(p+2)}{2p^2+3p+2}f(t)$$

所以转移算子为

(1) $H_1(p)=\dfrac{i_1}{f(t)}=\dfrac{p^2}{2(2p^2+3p+2)}$

(2) $H_2(p)=\dfrac{i_2}{f(t)}=\dfrac{p(p+2)}{2(2p^2+3p+2)}$

(3) $H_o(p)=\dfrac{u_o}{f(t)}=\dfrac{(p+1)(p+2)}{2p^2+3p+2}$

【2-4】 已知系统的转移算子及未加激励时的初始条件分别为

(1) $H(p)=\dfrac{p+3}{p^2+3p+2}$, $r(0)=1$, $r'(0)=2$;

(2) $H(p)=\dfrac{p+3}{p^2+2p+2}$, $r(0)=1$, $r'(0)=2$;

(3) $H(p)=\dfrac{p+3}{p^2+2p+1}$, $r(0)=1$, $r'(0)=2$。

求各系统的零输入响应并指出各自的自然频率。

解 (1) $H(p)=\dfrac{p+3}{p^2+3p+2}$, $r(0)=1$, $r'(0)=2$

系统的特征多项式为 p^2+3p+2

系统的特征方程为 $p^2+3p+2=0$

因为 $p^2+3p+2=(p+1)(p+2)$

所以 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$

系统的零输入响应为 $r(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$

代入初始条件,确定 c_1、c_2 如下:

$$\begin{cases}r(0)=c_1+c_2=1\\ r'(0)=-c_1-2c_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=4\\ c_2=-3\end{cases}$$

所以系统的零输入响应 $r(t)=(4e^{-t}-3e^{-2t})$, $t>0$

自然频率为：$-1,-2$。

(2) $H(p)=\dfrac{p+3}{p^2+2p+2}$，　$r(0)=1$，　$r'(0)=2$

系统的特征多项式为　p^2+2p+2

系统的特征方程为　$p^2+2p+2=0$

解得特征方程的根为共轭复根：

$$\lambda_1=-1+\mathrm{j},\quad \lambda_2=-1-\mathrm{j}$$

系统的零输入响应为　$r(t)=\mathrm{e}^{-t}(c_1\cos t+c_2\sin t)$

代入初始条件，确定 c_1、c_2 如下：

$$\begin{cases} r(0)=c_1=1 \\ r'(0)=-c_1+c_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=3 \end{cases}$$

所以系统的零输入响应为　$r(t)=\mathrm{e}^{-t}(\cos t+3\sin t)$，　$t>0$

系统的自然频率为：$-1+\mathrm{j},-1-\mathrm{j}$。

(3) $H(p)=\dfrac{p+3}{p^2+2p+1}$，　$r(0)=1$，　$r'(0)=2$

系统的特征多项式为　p^2+2p+1

系统的特征方程为　$p^2+2p+1=0$

特征方程的根为二重根　$\lambda_1=\lambda_2=-1$

系统的零输入响应为　$r(t)=c_1\mathrm{e}^{-t}+c_2t\mathrm{e}^{-t}$

代入初始条件，确定 c_1、c_2 如下：

$$\begin{cases} r(0)=c_1=1 \\ r'(0)=-c_1+c_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=3 \end{cases}$$

所以系统的零输入响应为　$r(t)=\mathrm{e}^{-t}(1+3t)$，　$t>0$

系统的自然频率为：-1。

【2-5】 已知系统的微分方程与未加激励时的初始条件分别如下：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}r(t)+2\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)=3\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+e(t)$

$$r(0)=r'(0)=0,r''(0)=1$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}r(t)+3\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)+2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)=2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)$

$$r(0)=1,r'(0)=r''(0)=0$$

求其零输入响应,并指出各自的自然频率。

解　(1) 由所给微分方程可知转移算子为

$$H(p)=\frac{3p+1}{p^3+2p^2+p}=\frac{3p+1}{p(p^2+2p+1)}$$

系统的特征多项式为　　$p(p^2+2p+1)$

系统的特征方程为　　$p(p^2+2p+1)=0$

系统的自然频率为　　$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=\lambda_3=-1$

系统的零输入响应为　　$r(t)=c_1+c_2\mathrm{e}^{-t}+c_3t\mathrm{e}^{-t}$

代入初始条件,确定常数 c_1、c_2 及 c_3 如下:

$$\begin{cases}r(0)=c_1+c_2=0\\ r'(0)=-c_2+c_3=0\\ r''(0)=c_2-2c_3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=1\\ c_2=-1\\ c_3=-1\end{cases}$$

所以系统的零输入响应为　　$r(t)=1-\mathrm{e}^{-t}(1+t),\quad t>0$

(2) 系统的转移算子为

$$H(p)=\frac{2p}{p^3+3p^2+2p}=\frac{2p}{p(p^2+3p+2)}$$

系统的特征多项式为　　$p(p^2+3p+2)$

系统的特征方程为　　$p(p^2+3p+2)=0$

因为　　$p(p^2+3p+2)=p(p+1)(p+2)$

所以系统的自然频率为　　$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=-2$

系统的零输入响应为　　$r(t)=c_1+c_2\mathrm{e}^{-t}+c_3\mathrm{e}^{-2t}$

代入初始条件确定 c_1、c_2 及 c_3 如下:

$$\begin{cases}r(0)=c_1+c_2+c_3=1\\ r'(0)=-c_2-2c_3=0\\ r''(0)=c_2+4c_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=1\\ c_2=0\\ c_3=0\end{cases}$$

所以系统的零输入响应为 $r(t)=1,t>0$

【2-6】　已知电路如图 2-4 所示,电路未加激励的初始条件为

(1) $i_1(0)=2\ \mathrm{A}, i_1'(0)=1\ \mathrm{A/s}$;

(2) $i_1(0)=1\ \mathrm{A}, i_2(0)=2\ \mathrm{A}$。

求上述两种情况下电流 $i_1(t)$ 及 $i_2(t)$ 的

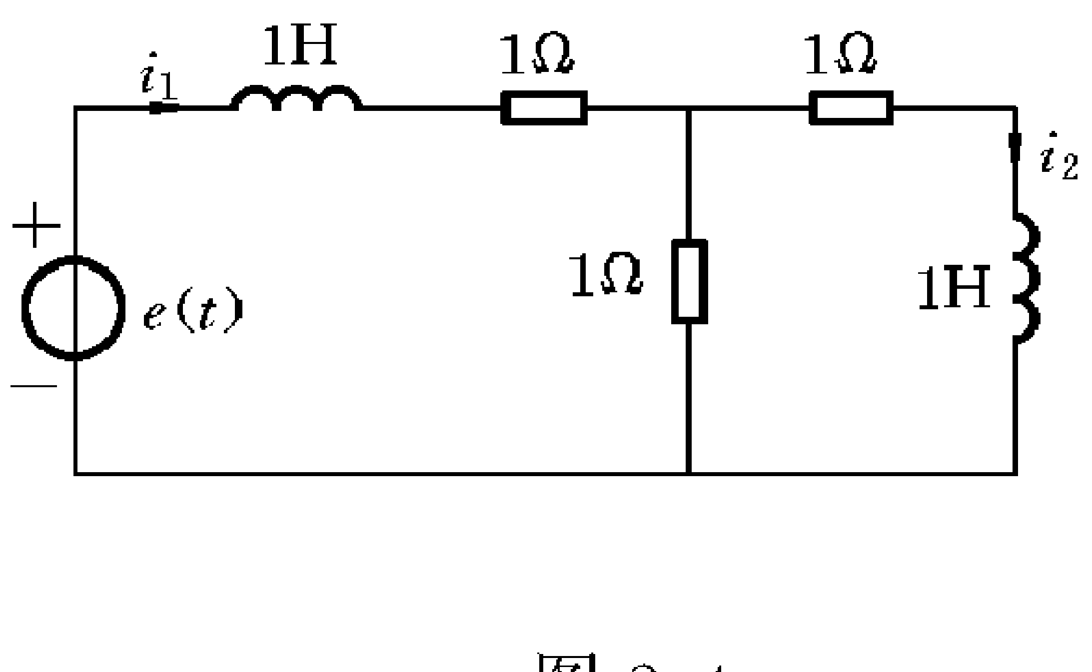


图 2-4

零输入响应。

解 由图2-4可知,该电路的微分方程组为

$$\begin{cases}(p+2)i_1(t)-i_2(t)=e(t)\\-i_1(t)+(p+2)i_2(t)=0\end{cases}$$

(1) 已知初始条件$i_1(0)=2$ A,$i_1'(0)=1$ A/s,补算出初始条件$i_2(0)$,$i_2'(0)$。根据微分方程组令$e(0)=0$,则有

$$\begin{cases}i_1'(0)+2i_1(0)-i_2(0)=0\\-i_1(0)+i_2'(0)+2i_2(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}i_2(0)=5\\i_2'(0)=-8\end{cases}$$

再求解零输入响应$i_{1zi}(t)$及$i_{2zi}(t)$如下:

$$\begin{cases}(p+2)i_1(t)-i_2(t)=e(t) & ①\\-i_1(t)+(p+2)i_2(t)=0 & ②\end{cases}$$

将式①乘$(p+2)$与式②相加得

$$(p^2+4p+3)i_1(t)=(p+2)e(t) \qquad ③$$

将式②乘$(p+2)$与式①相加得

$$(p^2+4p+3)i_2(t)=e(t) \qquad ④$$

系统的特征方程为 $p^2+4p+3=(p+1)(p+3)=0$

系统的特征方程的根为

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-3$$

所以 $i_{1zi}(t)=c_1\mathrm{e}^{-t}+c_2\mathrm{e}^{-3t}$

代入初始条件,确定常数c_1及c_2:

$$\begin{cases}i_{1zi}(0)=c_1+c_2=2\\i_{1zi}'(0)=-c_1-3c_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=\dfrac{7}{2}\\c_2=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

所以 $i_{1zi}(t)=\left(\dfrac{7}{2}\mathrm{e}^{-t}-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t}\right),\quad t>0$

而 $i_{2zi}(t)=c_3\mathrm{e}^{-t}+c_4\mathrm{e}^{-3t}$

代入初始条件,确定积分常数c_3及c_4:

$$\begin{cases}i_{2zi}(0)=c_3+c_4=5\\i'_{2zi}(0)=-c_3-3c_4=-8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_3=\dfrac{7}{2}\\c_4=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

所以
$$i_{2zi}(t)=\left(\frac{7}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-3t}\right),\quad t>0$$

(2) 已知初始条件$i_1(0)=1$ A，$i_2(0)=2$ A，补算$i_1'(0)$及$i_2'(0)$。根据微分方程组令$e(0)=0$，则有

$$\begin{cases}i_1'(0)+2i_1(0)-i_2(0)=0\\-i_1(0)+i_2'(0)+2i_2(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}i_1'(0)=0\\i_2'(0)=-3\end{cases}$$

由(1)可知

$$i_{1zi}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-3t}$$
$$i_{2zi}(t)=c_3e^{-t}+c_4e^{-3t}$$

根据初始条件确定常数c_1、c_2、c_3及c_4：

$$\begin{cases}i_{1zi}(0)=c_1+c_2=1\\i'_{1zi}(0)=-c_1-3c_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=\dfrac{3}{2}\\c_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}i_{2zi}(0)=c_3+c_4=2\\i'_{2zi}(0)=-c_3-3c_4=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_3=\dfrac{3}{2}\\c_4=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

所以
$$i_{1zi}(t)=\left(\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right),\quad t>0$$
$$i_{2zi}(t)=\left(\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\right),\quad t>0$$

【2-7】 利用冲激函数的取样性求下列积分值。

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-2)\sin t\,dt$　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(2t)}{t}\delta(t)dt$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t+3)e^{-t}dt$　　(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}(t^3+4)\delta(1-t)dt$

解　(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-2)\sin t\,dt=\sin 2$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(2t)}{t}\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}2\delta(t)\frac{\sin(2t)}{2t}\cdot dt=\lim\limits_{t\to 0}2\frac{\sin(2t)}{2t}=2$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t+3)e^{-t}dt=e^3$

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}(t^3+4)\delta(1-t)dt=(1^3+4)=5$

【2-8】 写出图2-5所示各波形信号的函数表达式。

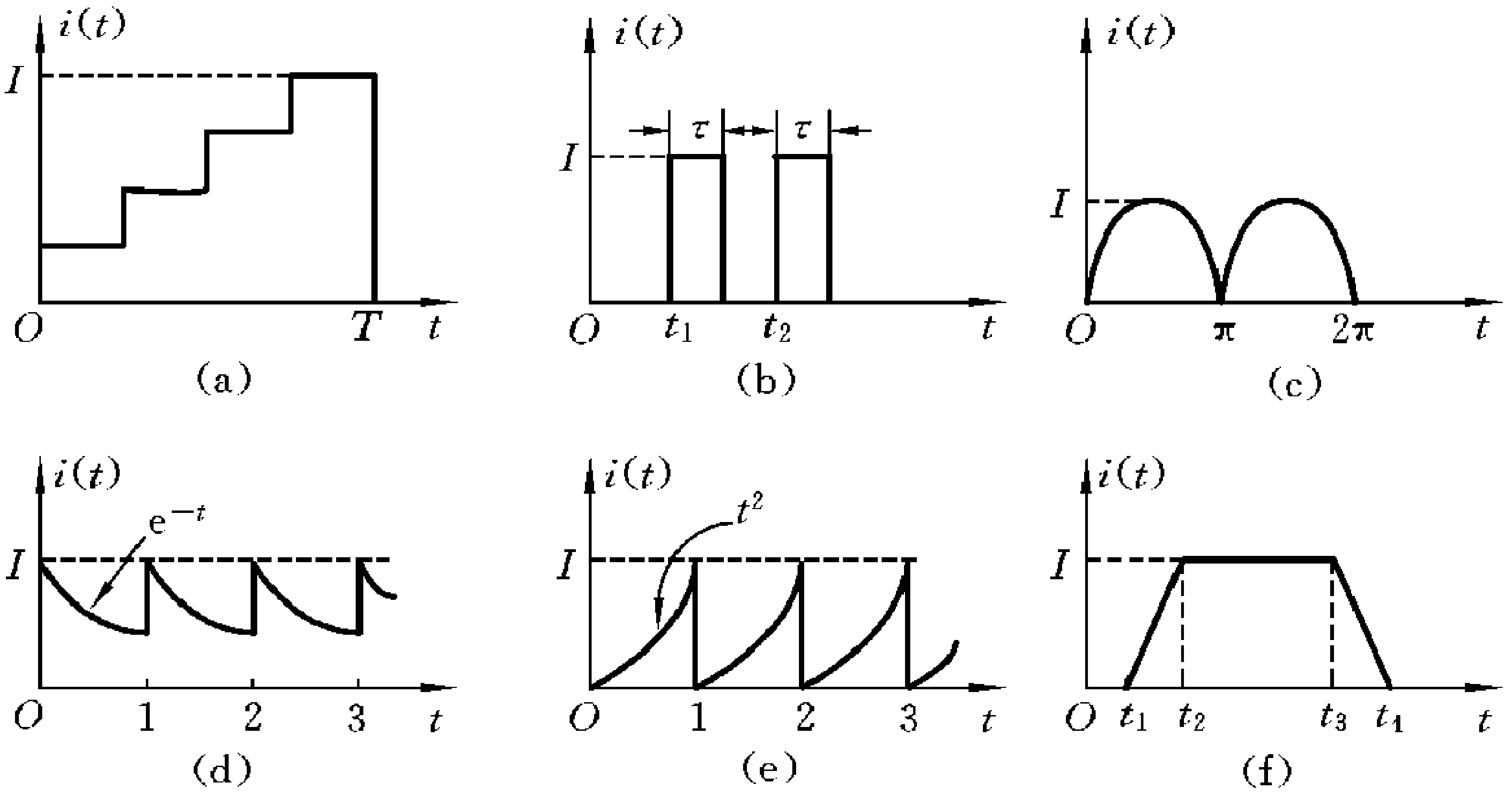


图 2-5

解　(a) $i(t)=\dfrac{I}{4}\left[\varepsilon(t)-\varepsilon\left(t-\dfrac{T}{4}\right)\right]+\dfrac{I}{2}\left[\varepsilon\left(t-\dfrac{T}{4}\right)-\varepsilon\left(t-\dfrac{1}{2}T\right)\right]$

$$+\frac{3I}{4}\left[\varepsilon\left(t-\frac{T}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{3}{4}T\right)\right]$$

$$+I\left[\varepsilon\left(t-\frac{3T}{4}\right)-\varepsilon(t-T)\right]$$

$$=\frac{I}{4}\left[\varepsilon(t)+\varepsilon\left(t-\frac{T}{4}\right)+\varepsilon\left(t-\frac{T}{2}\right)+\varepsilon\left(t-\frac{3}{4}T\right)\right]$$

$$-I\varepsilon(t-T)$$

(b) $i(t)=I[\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_1-\tau)]+I[\varepsilon(t-t_2)-\varepsilon(t-t_2-\tau)]$

$$=I[\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_1-\tau)+\varepsilon(t-t_2)-\varepsilon(t-t_2-\tau)]$$

(c) $i(t)=I\sin t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\pi)]+I\sin(t-\pi)[\varepsilon(t-\pi)-\varepsilon(t-2\pi)]$

(d) $i(t)=I\mathrm{e}^{-t}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+I\mathrm{e}^{-(t-1)}[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)]$

$$+I\mathrm{e}^{-(t-2)}[\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-3)]+\cdots$$

$$=I\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(t-k)}[\varepsilon(t-k)-\varepsilon(t-k-1)]$$

(e) $i(t)=It^2[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+I(t-1)^2[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)]$

$$+I(t-2)^2[\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-3)]+\cdots$$

$$=I\sum_{k=0}^{+\infty}(t-k)^2[\varepsilon(t-k)-\varepsilon(t-k-1)]$$

(f) $i(t)=\dfrac{I}{t_2-t_1}(t-t_1)[\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_2)]+I[\varepsilon(t-t_2)-\varepsilon(t-t_3)]$

$$-\frac{I}{t_4-t_3}(t-t_4)[\varepsilon(t-t_3)-\varepsilon(t-t_4)]$$

【2-9】 求题2-8所给各信号的导函数,并绘其波形。

解　(a) $i'(t)=\frac{I}{4}\left[\delta(t)+\delta\left(t-\frac{T}{4}\right)+\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{3}{4}T\right)\right]-I\delta(t-T)$

(b) $i'(t)=I[\delta(t-t_1)-\delta(t-t_1-\tau)+\delta(t-t_2)-\delta(t-t_2-\tau)]$

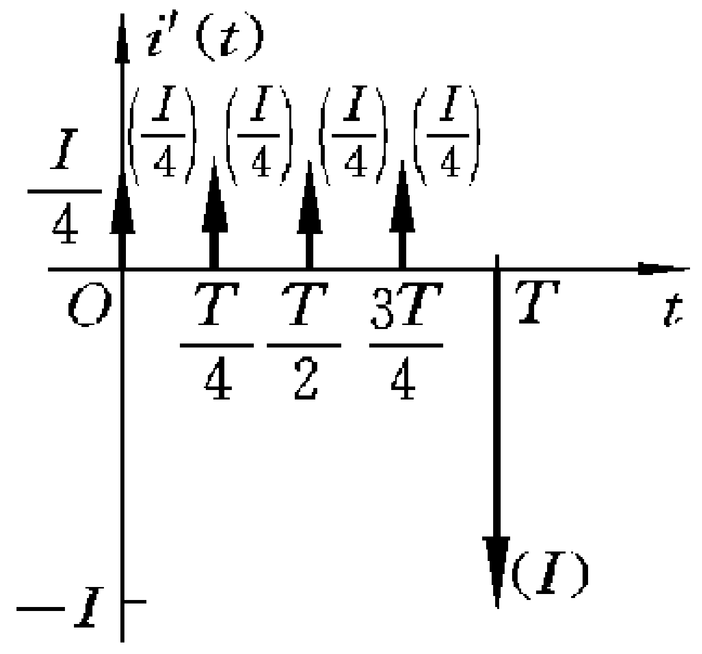
(c) $i'(t)=I\cos t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\pi)]+I\cos(t-\pi)[\varepsilon(t-\pi)-\varepsilon(t-2\pi)]$

(d) $$i'(t)=I\delta(t)+I(1-\mathrm{e}^{-1})\sum_{k=1}^{+\infty}\delta(t-k)-I\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(t-k)}[\varepsilon(t-k)-\varepsilon(t-k-1)]$$

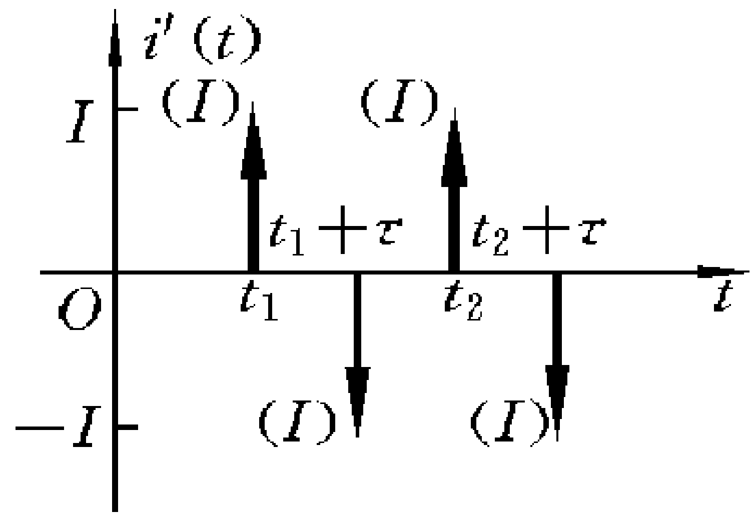
(e) $$i'(t)=2I\sum_{k=0}^{+\infty}(t-k)[\varepsilon(t-k)-\varepsilon(t-k-1)]-\sum_{k=1}^{+\infty}\delta(t-k)$$

(f) $$\begin{aligned}i'(t)=&\frac{I}{t_2-t_1}[\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_2)]\\&+\frac{I}{t_2-t_1}(t-t_1)[\delta(t-t_1)-\delta(t-t_2)]\\&+I[\delta(t-t_2)-\delta(t-t_3)]-\frac{I}{t_4-t_3}[\varepsilon(t-t_3)\\&-\varepsilon(t-t_4)]-\frac{I}{t_4-t_3}(t-t_4)[\delta(t-t_3)-\delta(t-t_4)]\\=&\frac{I}{t_2-t_1}[\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_2)]-\frac{I}{t_4-t_3}[\varepsilon(t-t_3)-\varepsilon(t-t_4)]\end{aligned}$$

波形如图2-6所示。

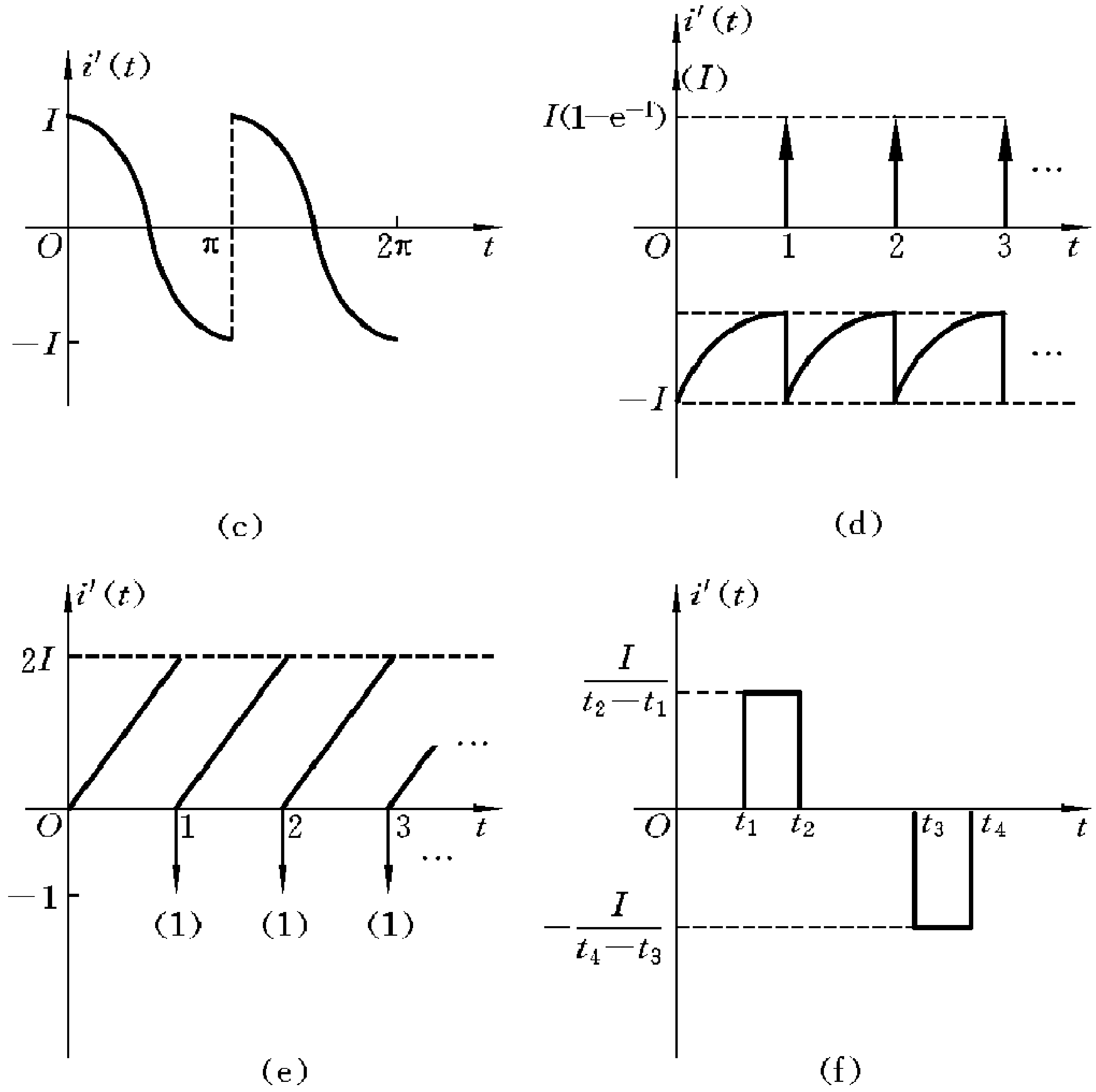


(a)



(b)

图2-6



续图 2-6

【2-10】 已知信号 $f(t)$波形如图 2-7 所示，试绘出下列函数的波形。

(1) $f(2t)$　　(2) $f(t)\varepsilon(t)$

(3) $f(t-2)\varepsilon(t)$　(4) $f(t-2)\varepsilon(t-2)$

(5) $f(2-t)$　　(6) $f(-2-t)\varepsilon(-t)$

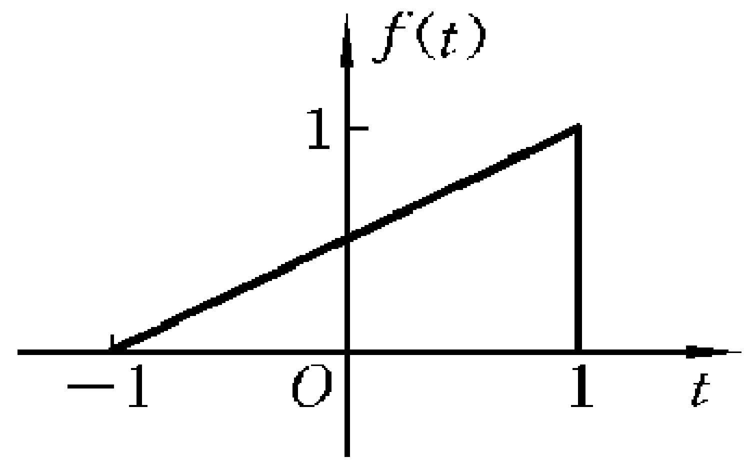


图 2-7

解　(1) $f(2t)$的波形是将 $f(t)$的波形压缩$\frac{1}{2}$所得，如图2-8(a)所示。

(2) $f(t)\varepsilon(t)$的波形如图 2-8(b)所示。

(3) $f(t-2)\varepsilon(t)$是将$f(t)$沿t 轴右时移2 后乘$\varepsilon(t)$所得，如图2-8(c)所示。

(4) $f(t-2)\varepsilon(t-2)$是将 $f(t)$沿 t 轴向右时移 2 后乘 $\varepsilon(t-2)$所得，如图 2-8(d)所示。

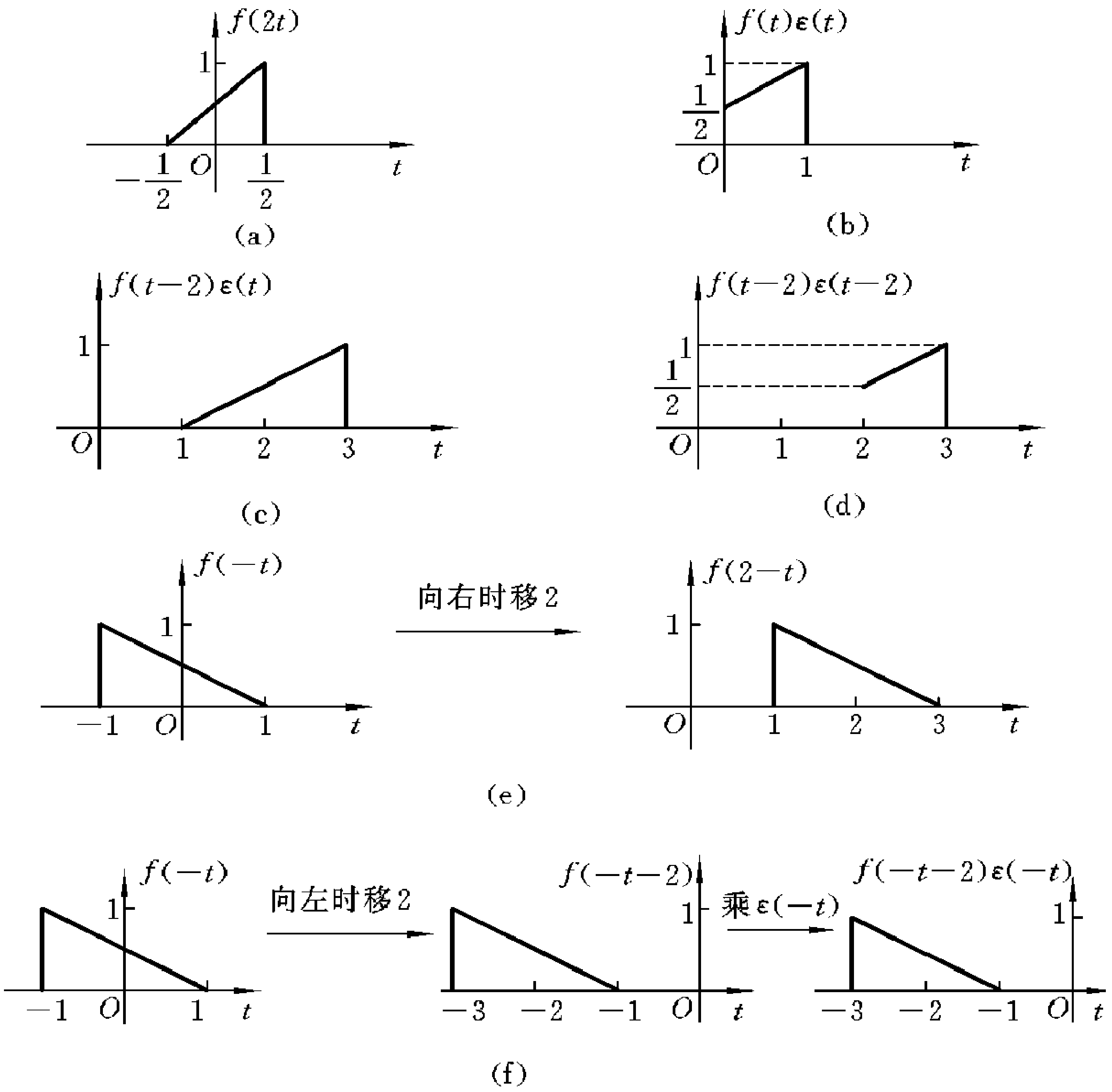


图 2-8

(5) $f(2-t)$是经$f(t)\xrightarrow{\text{折叠}}f(-t)\xrightarrow{\text{右时移 2}}f[-(t-2)]=f(2-t)$所得，如图 2-8(e)所示。

(6) $f(-2-t)\varepsilon(-t)$是经 $f(t)\xrightarrow{\text{折叠}}f(-t)\xrightarrow{\text{左时移 2}}f[-(t+2)]$ $\xrightarrow{\text{乘}\,\varepsilon(-t)}f(-2-t)\varepsilon(-t)$所得，如图 2-8(f)所示。

【2-11】 按图 2-9 所示电路，求激励$i(t)$分别为$\delta(t)$及$\varepsilon(t)$时的响应电流$i_C(t)$及响应电压$u_R(t)$，并绘其波形。

解　依题意可知，电路原来起始状态为零，即电容C 无起始电荷，电感L

无起始电流。要求解电路冲激激励源作用时的响应，可采用两种方法：其一是直接求电路零状态条件下的冲激响应，由微分方程冲激项相平衡决定积分系数；其二是将冲激源转化为电路的起始条件，求取零输入响应，从而得到冲激响应。

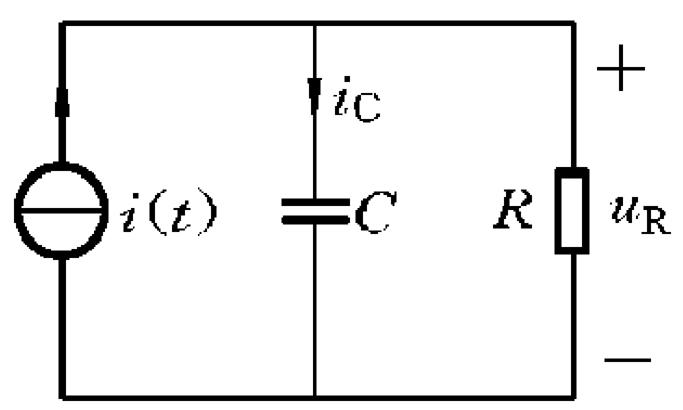


图 2-9

求阶跃响应时同样也可采取两种方法：直接求解电路零状态条件下的阶跃响应，或者对上述的冲激响应积分即得到阶跃响应。

(1) $i(t)=\delta(t)$时

方法一：电路的微分方程为

$$C\frac{\mathrm{d}u_R(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{R}u_R(t)=\delta(t)$$

即
$$\frac{\mathrm{d}u_R(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}u_R(t)=\frac{1}{C}\delta(t)$$

特征方程的根为$\lambda=-\frac{1}{RC}$。而方程右边为$\delta(t)$，左边响应为一阶。该方程冲激项要互相平衡，$u_R(t)$只能是不含有冲激项，即

$$u_R(t)=k\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

将$u_R(t)$代入微分方程，由系数相平衡的办法确定积分常数k。

于是有
$$\frac{\mathrm{d}u_R(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}u_R(t)=\frac{1}{C}\delta(t)$$

$$-\frac{k}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)+k\delta(t)+\frac{k}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)=\frac{1}{C}\delta(t)$$

由此得
$$k=\frac{1}{C}$$

所以电路冲激激励的响应为

$$u_R(t)=\frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

方法二：将冲激激励转化为起始条件。

因为 $0^-<t<0^+$，电容无起始电荷，C 相当于短路，因而

$$i_C(0)=\delta(t)$$

$$u_C(0^+)=\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+}i_C(0)\mathrm{d}t=\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{C}$$

电路特征根为
$$\lambda=-\frac{1}{RC}$$

因此电路在冲激激励电流源作用下的响应为

$$u_R(t)=u_C(0^+)e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

而电容的电流 $i_C(t)$ 为

$$i_C(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=C\frac{du_R(t)}{dt}=\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

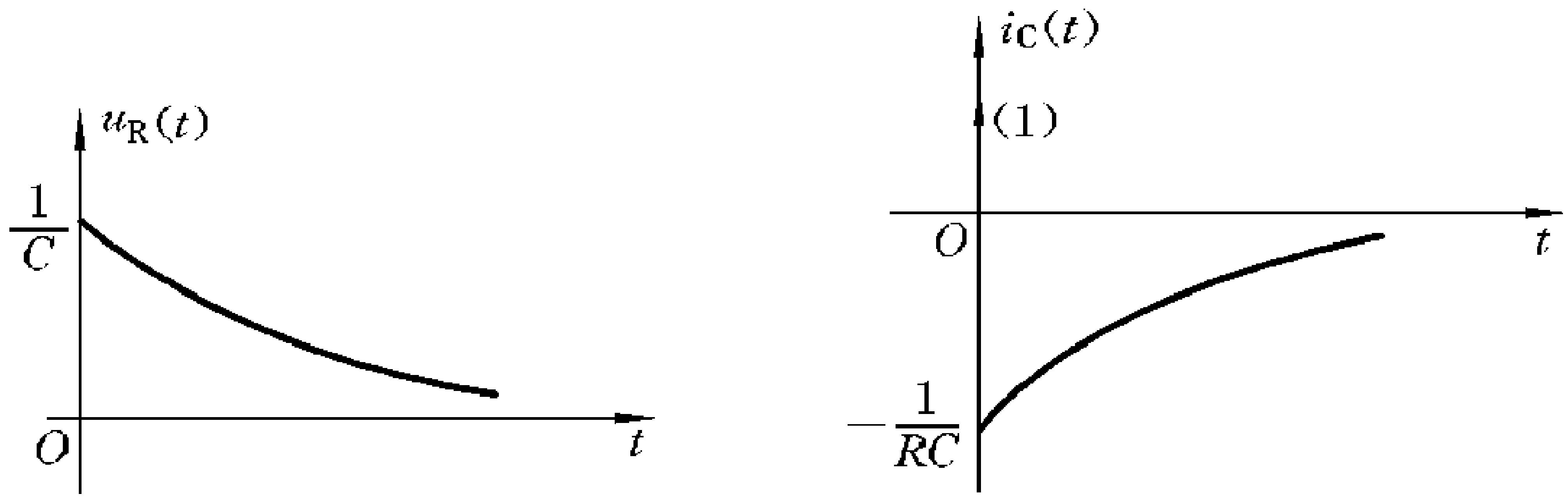
(2) 当 $i(t)=\varepsilon(t)$ 时

因为阶跃响应是冲激响应的积分,所以

$$u_R(t)=\int_{0^-}^{t}\frac{1}{C}e^{-\frac{\tau}{RC}}\varepsilon(\tau)d\tau=R\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\varepsilon(t)$$

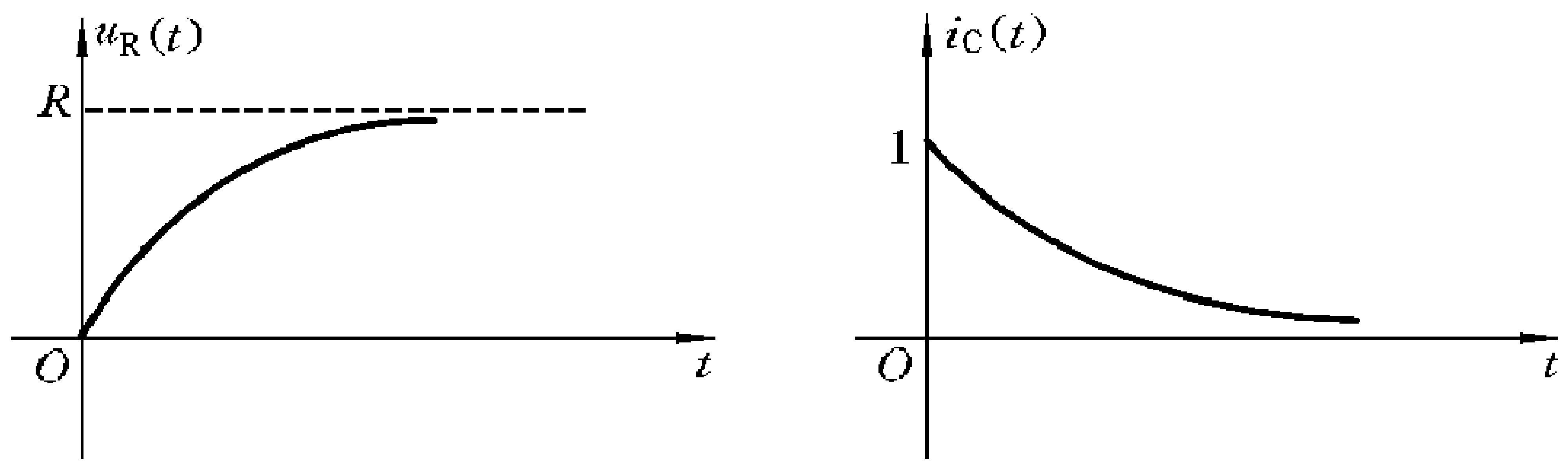
$$\begin{aligned}i_C(t)&=\int_0^t\left[\delta(\tau)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{\tau}{RC}}\right]d\tau\\&=\int_{0^-}^{0^+}\delta(\tau)d\tau-\frac{1}{RC}\int_{0^+}^{t}e^{-\frac{\tau}{RC}}d\tau\\&=\varepsilon(t)+(e^{-\frac{t}{RC}}-1)\varepsilon(t)=e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)\end{aligned}$$

响应波形如图 2-10 所示。



当 $i(t)=\delta(t)$ 时

(a)



当 $i(t)=\varepsilon(t)$ 时

(b)

图 2-10

【2-12】 图 2-11 所示电路，求激励 $e(t)$ 分别为 $\delta(t)$ 及 $\varepsilon(t)$ 时的响应电流 $i(t)$ 及响应电压 $u_L(t)$，并绘其波形。

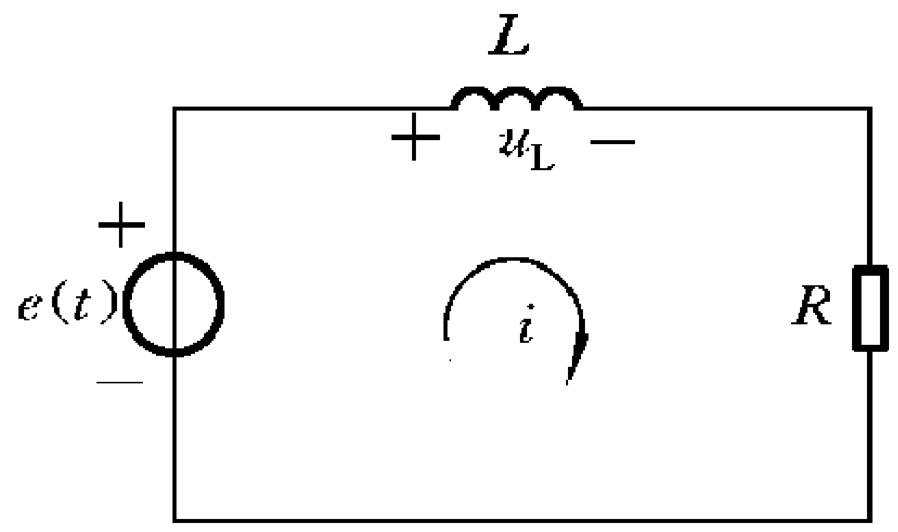


图 2-11

解 (1) 当 $e(t)=\delta(t)$ 时

方法一：电路的微分方程为

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)=\delta(t)$$

即
$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}i(t)=\frac{1}{L}\delta(t)$$

特征根为
$$\lambda=-\frac{R}{L}$$

所以
$$i(t)=k\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

将 $i(t)$ 代入微分方程，确定常数 k：

$$-\frac{R}{L}k\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}+\frac{R}{L}k\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}+k\delta(t)=\frac{1}{L}\delta(t)$$

由此得
$$k=\frac{1}{L}$$

所以
$$i(t)=\frac{1}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

方法二：将冲激电压源转化为电感的起始电流 $i_L(0^+)$，因为 $0^-<t<0^+$，电感相当于开路，$u_L(0)=\delta(t)$，所以

$$i_L(0^+)=\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}u_L(0)\mathrm{d}t=\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{L}$$

特征根为
$$\lambda=-\frac{R}{L}$$

所以
$$i(t)=i_L(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)=\frac{1}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

而电感上的电压为

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t)-\frac{R}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

(2) 当 $e(t)=\varepsilon(t)$ 时

利用阶跃响应是冲激响应的积分关系得

$$i(t)=\int_{0^-}^{t}\frac{1}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\tau}\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{R}\left[\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\tau}\right]\Bigg|_{0^-}^{t}=\frac{1}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t})\varepsilon(t)$$

$$u_L(t)=\int_{0^-}^{t}\left[\delta(\tau)-\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}\tau}\right]d\tau$$

$$=\int_{0^-}^{0^+}\delta(\tau)d\tau-\int_{0^+}^{t}\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}\tau}d\tau=e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

响应的波形如图 2-12 所示。

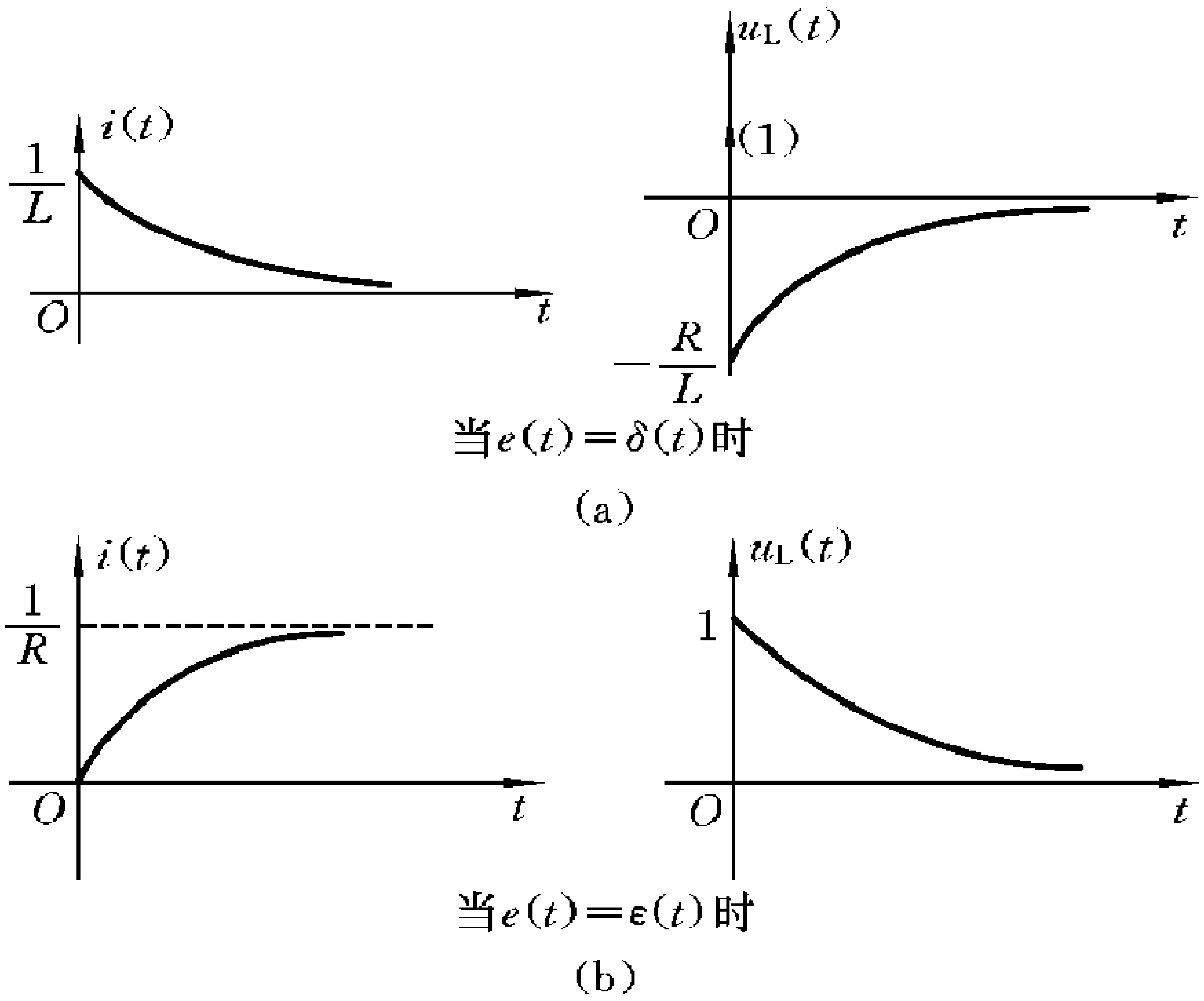


图 2-12

【2-13】 求图 2-13 所示电路的冲激响应 $u(t)$。(图中 $r=2\ \Omega$。)

解　(a) 对图 2-13(a)所示电路列写网孔电流方程：

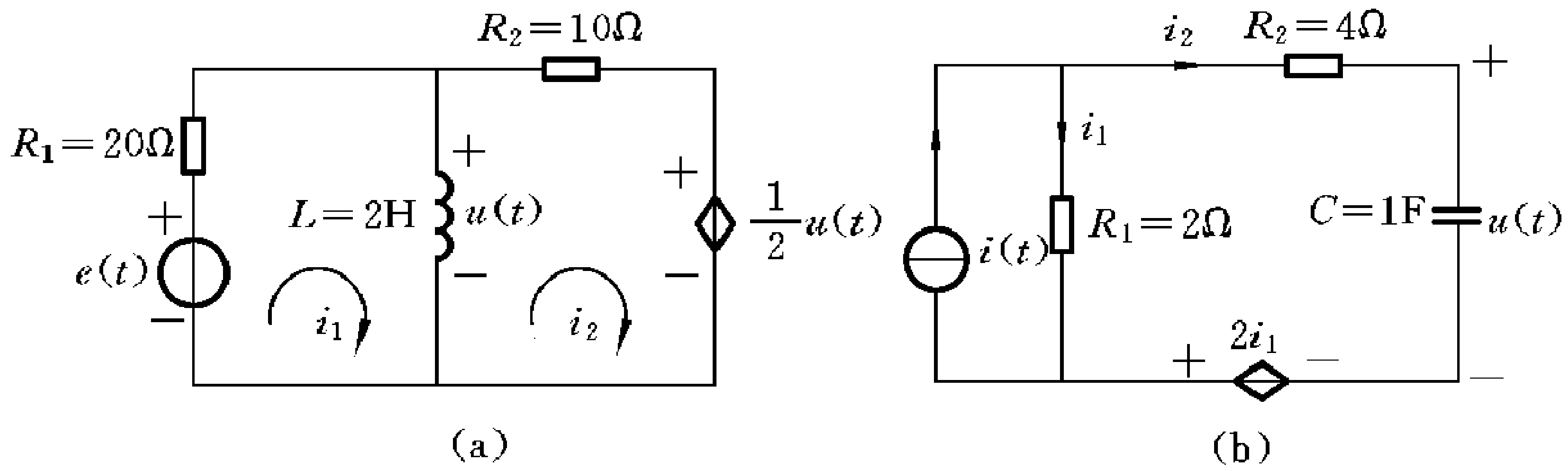


图 2-13

$$\begin{cases}20i_1+2\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}-2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=\delta(t)\\10i_2+\dfrac{1}{2}u(t)+2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}-2\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=0\\u(t)=2\left(\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right)\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}20i_1+2\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}-2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=\delta(t)\\10i_2+\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=0\end{cases} \qquad ①$$

算子方程为
$$\begin{cases}20i_1+2pi_1-2pi_2=\delta(t)\\10i_2-pi_1+pi_2=0\end{cases}$$

所以
$$(200+40p)i_1(t)=(10+p)\delta(t) \qquad ②$$

方程的特征根为$\lambda=-5$,所以$i_1(t)$中含有指数项$k\mathrm{e}^{-5t}\varepsilon(t)$,又因等式双方最高微分阶数相同,所以$i_1(t)$中含有$A\delta(t)$项,即

$$i_1(t)=A\delta(t)+k\mathrm{e}^{-5t}\varepsilon(t) \qquad ③$$

$$\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}=A\delta'(t)+k\delta(t)-5k\mathrm{e}^{-5t}\varepsilon(t) \qquad ④$$

将式③、④代入式②可得

$$i_1(t)=\frac{1}{40}\delta(t)+\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-5t}\varepsilon(t)$$

由式①可知
$$u(t)=\delta(t)-20i_1(t)$$

所以
$$u(t)=\frac{1}{2}\delta(t)-\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-5t}\varepsilon(t)$$

(b) 设流经R_2支路的电流为$i_2(t)$,则该电路有如下方程组:

$$\begin{cases}2i_1=4i_2+\dfrac{1}{p}i_2-2i_1\\i_1+i_2=\delta(t)\end{cases}$$

可得到
$$(8p+1)i_2(t)=4p\delta(t) \qquad ⑤$$

方程的特征根为$\lambda=-\dfrac{1}{8}$,所以$i_2(t)$中含有指数项$k\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\varepsilon(t)$,又因等式双方最高微分阶数相同,所以$i_2(t)$中含有$A\delta(t)$项,即

$$i_2(t)=A\delta(t)+k\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\varepsilon(t) \qquad ⑥$$

$$\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}=A\delta'(t)+k\delta(t)-\frac{1}{8}k\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\varepsilon(t) \tag{⑦}$$

将式⑥、⑦代入式⑤，则可得

$$A=\frac{1}{2},\quad k=-\frac{1}{16}$$

所以
$$i_2(t)=\frac{1}{2}\delta(t)-\frac{1}{16}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\varepsilon(t)$$

故
$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}i_2(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0^-}^{t}\left[\frac{1}{2}\delta(\tau)-\frac{1}{16}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}\tau}\varepsilon(\tau)\right]\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{0^-}^{0^+}\frac{1}{2}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{1}{16}\int_{0^+}^{t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon(t)+\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\right]\Bigg|_{0^+}^{t}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\varepsilon(t)$$

【2-14】 在图2-14所示电路中，元件参数为$L_1=L_2=M=1\ \mathrm{H}$，$R_1=4\ \Omega$，$R_2=2\ \Omega$，响应为电流$i_2(t)$。求冲激响应$h(t)$及阶跃响应$r_\varepsilon(t)$。

解　对图2-14中电路列出并联支路电压关系：

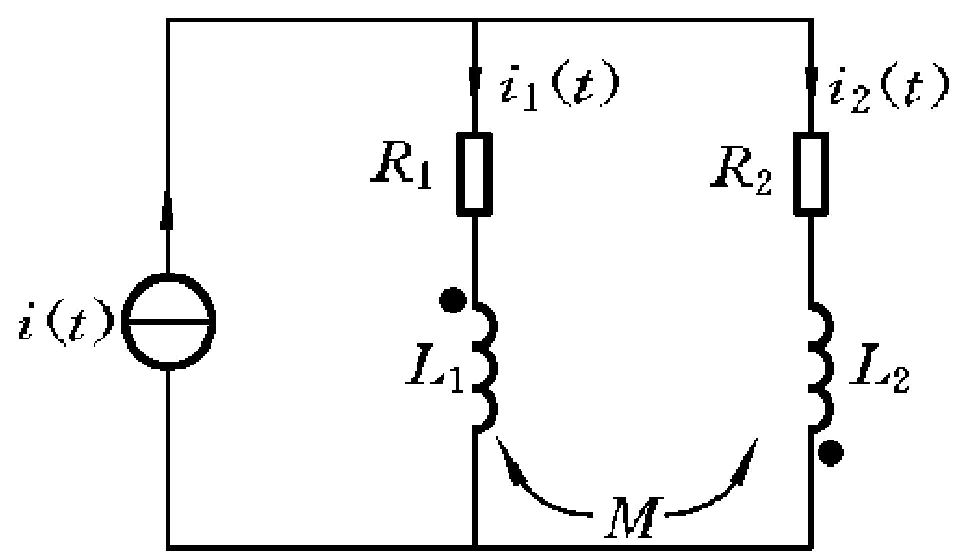


图2-14

$$\begin{cases}i_1(t)+i_2(t)=i(t)\\ 4i_1(t)+\dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}-2i_2(t)\\ \qquad -\dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}=0\end{cases}$$

联立解得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}+\dfrac{3}{2}i_1(t)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{2}i(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}+\dfrac{3}{2}i_2(t)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+i(t)\end{cases}$$

$$i(t)=\delta(t)$$

特征根为
$$\lambda=-\frac{3}{2}$$

则
$$i_2(t)=A\delta(t)+k\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\varepsilon(t)$$

将$i_2(t)$代入微分方程，利用同项系数相平衡的方法确定常数A、k：

$$A\delta'(t)+k\delta(t)-\frac{3}{2}k\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\varepsilon(t)+\frac{3}{2}A\delta(t)+\frac{3}{2}k\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\varepsilon(t)$$

$$=\frac{1}{2}\delta'(t)+\delta(t)$$

所以
$$A=\frac{1}{2},\quad k=\frac{1}{4}$$

$$h(t)=i_2(t)=\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\varepsilon(t)$$

阶跃响应为

$$r_\varepsilon(t)=\int_{0^-}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0^-}^{t}\left[\frac{1}{2}\delta(\tau)+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\tau}\varepsilon(\tau)\right]\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{0^-}^{0^+}\frac{1}{2}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4}\int_{0^+}^{t}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\tau}\mathrm{d}\tau=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\right)\varepsilon(t)$$

【2-15】 求取下列微分方程所描述的系统的冲激响应。

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+2r(t)=e(t)$

(2) $2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)+8r(t)=e(t)$

(3) $\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}r(t)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+2r(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t)+2e(t)$

(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+3r(t)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)$

(5) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+2r(t)=\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}e(t)+4\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t)-5e(t)$

解　(1) 当激励为 $\delta(t)$ 时，系统响应即为冲激响应 $h(t)$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)+2h(t)=\delta(t)$$

特征方程的根为 $\lambda=-2$，所以

$$h(t)=k\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$$

$$h'(t)=k\delta(t)-2k\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$$

将 $h(t)$、$h'(t)$ 代入方程可知 $k=1$，所以系统的冲激响应为

$$h(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$$

(2) $2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}h(t)+8h(t)=\delta(t)$

特征方程的根为 $\lambda_1=2\mathrm{j}$，$\lambda_2=-2\mathrm{j}$，所以

$$h(t)=[k_1\cos(2t)+k_2\sin(2t)]\varepsilon(t)$$
$$h'(t)=k_1\delta(t)+[-2k_1\sin(2t)+2k_2\cos(2t)]\varepsilon(t)$$
$$h''(t)=k_1\delta'(t)+2k_2\delta(t)+[-4k_1\cos(2t)-4k_2\sin(2t)]\varepsilon(t)$$

将$h(t)$、$h''(t)$代入微分方程可知$k_1=0,k_2=\dfrac{1}{4}$,所以系统的冲激响应为

$$h(t)=\frac{1}{4}\sin(2t)\varepsilon(t)$$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}h(t)+\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}h(t)+2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)+2h(t)=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\delta(t)+2\delta(t)$

特征方程的根为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\sqrt{2}\,\mathrm{j},\lambda_3=-\sqrt{2}\,\mathrm{j}$,所以

$$h(t)=[k_1\mathrm{e}^{-t}+k_2\cos(\sqrt{2}\,t)+k_3\sin(\sqrt{2}\,t)]\varepsilon(t)$$
$$\begin{aligned}h'(t)=&(k_1+k_2)\delta(t)-k_1\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)\\&+\sqrt{2}[k_3\cos(\sqrt{2}\,t)-k_2\sin(\sqrt{2}\,t)]\varepsilon(t)\\h''(t)=&(k_1+k_2)\delta'(t)+(\sqrt{2}\,k_3-k_1)\delta(t)+k_1\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)\\&-2[k_3\sin(\sqrt{2}\,t)+k_2\cos(\sqrt{2}\,t)]\varepsilon(t)\\h'''(t)=&(k_1+k_2)\delta''(t)+(\sqrt{2}\,k_3-k_1)\delta'(t)\\&+(k_1-2k_2)\delta(t)-k_1\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)-2\sqrt{2}[k_3\cos(\sqrt{2}\,t)\\&-k_2\sin(\sqrt{2}\,t)]\varepsilon(t)\end{aligned}$$

将$h(t)$、$h'(t)$、$h''(t)$、$h'''(t)$代入微分方程,可得$k_1=1,k_2=k_3=0$,所以系统的冲激响应为

$$h(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)+3h(t)=2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t)$

特征方程的根为$\lambda=-3$,且方程左右阶次相等,所以

$$h(t)=A\delta(t)+k\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$$
$$h'(t)=A\delta'(t)+k\delta(t)-3k\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$$

将$h(t)$、$h'(t)$代入方程,可确定$A=2,k=-6$,所以系统的冲激响应为

$$h(t)=2\delta(t)-6\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$$

(5) $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}h(t)+3\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)+2h(t)=\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\delta(t)+4\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\delta(t)-5\delta(t)$

特征方程的根为$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$,故$h(t)$含有$(k_1\mathrm{e}^{-t}+k_2\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$项,又因激励的阶数为3,响应的阶数为2,故$h(t)$中含有$k_3\delta'(t)$及$k_4\delta(t)$项,即

$$h(t)=(k_1e^{-t}+k_2e^{-2t})\varepsilon(t)+k_3\delta'(t)+k_4\delta(t)$$

$$h'(t)=(k_1+k_2)\delta(t)-(k_1e^{-t}+2k_2e^{-2t})\varepsilon(t)+k_3\delta''(t)+k_4\delta'(t)$$

$$h''(t)=k_3\delta'''(t)+k_4\delta''(t)+(k_1+k_2)\delta'(t)-(k_1+2k_2)\delta(t)+(k_1e^{-t}+4k_2e^{-2t})\varepsilon(t)$$

将$h(t)$、$h'(t)$、$h''(t)$代入方程可确定$k_1=-2$,$k_2=-3$,$k_3=k_4=1$,所以系统的冲激响应为

$$h(t)=\delta'(t)+\delta(t)-(2e^{-t}+3e^{-2t})\varepsilon(t)$$

【2-16】 线性系统由图2-15所示的子系统组合而成。设子系统的冲激响应分别为$h_1(t)=\delta(t-1)$,$h_2(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-3)$。求组合系统的冲激响应。

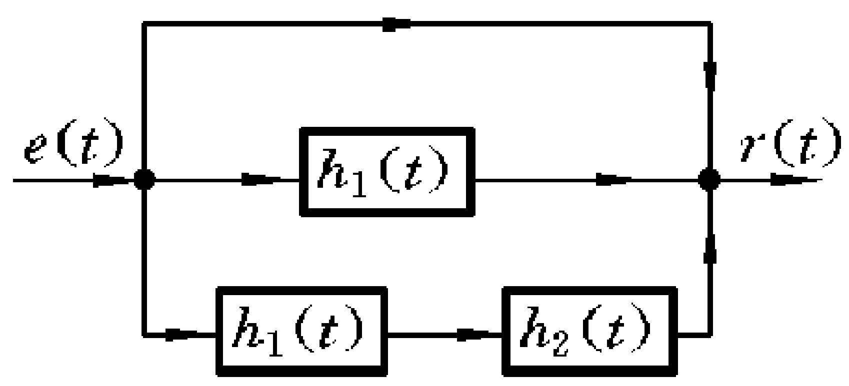


图 2-15

解 设$h_3(t)=h_1(t)*h_2(t)$

$$=\delta(t-1)*[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-3)]$$

$$=\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-4)$$

则组合系统的冲激响应为

$$h(t)=\delta(t)+\delta(t-1)+\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-4)$$

【2-17】 用图解法求图2-16中各组信号的卷积$f_1(t)*f_2(t)$,并绘出所

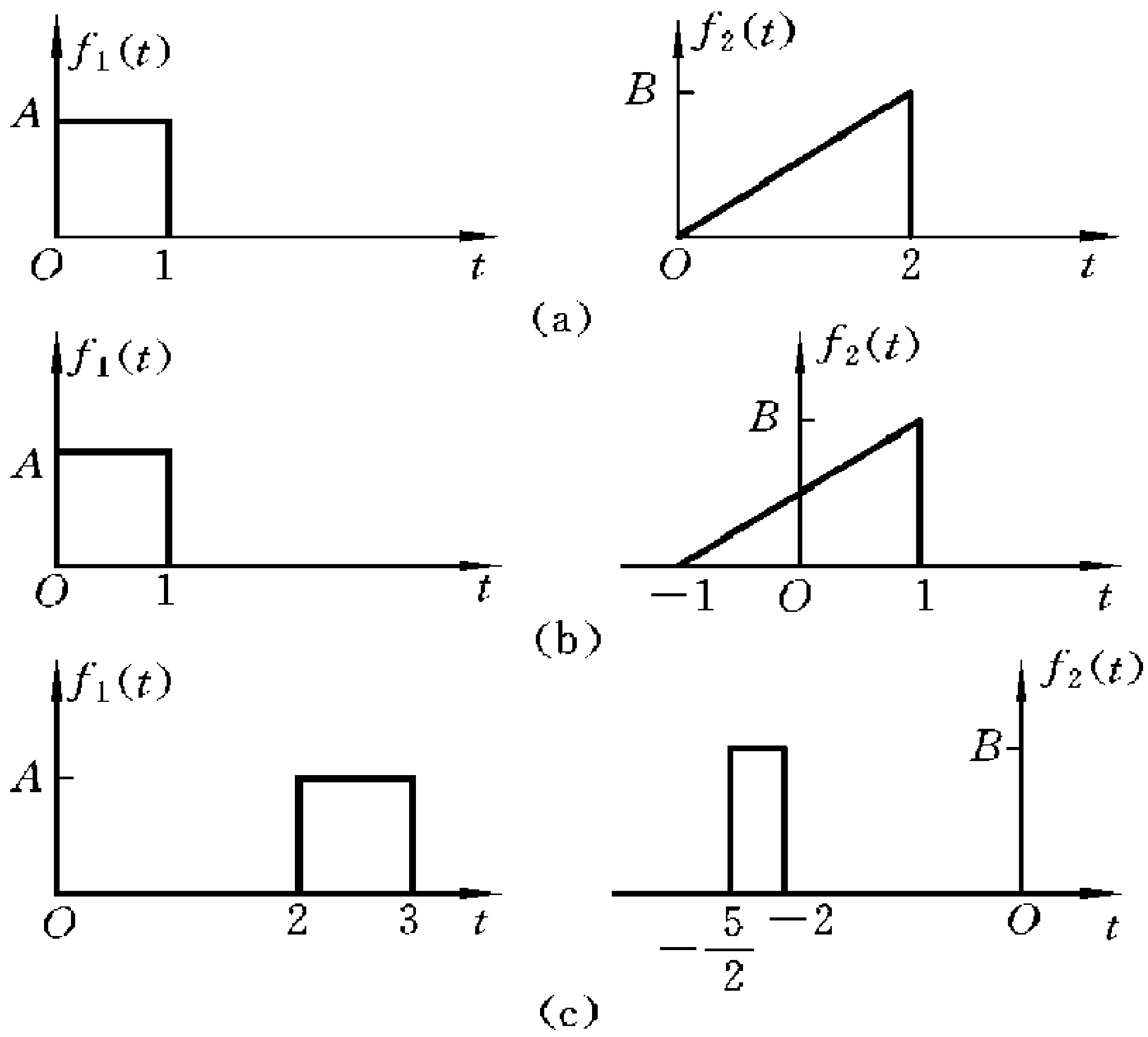
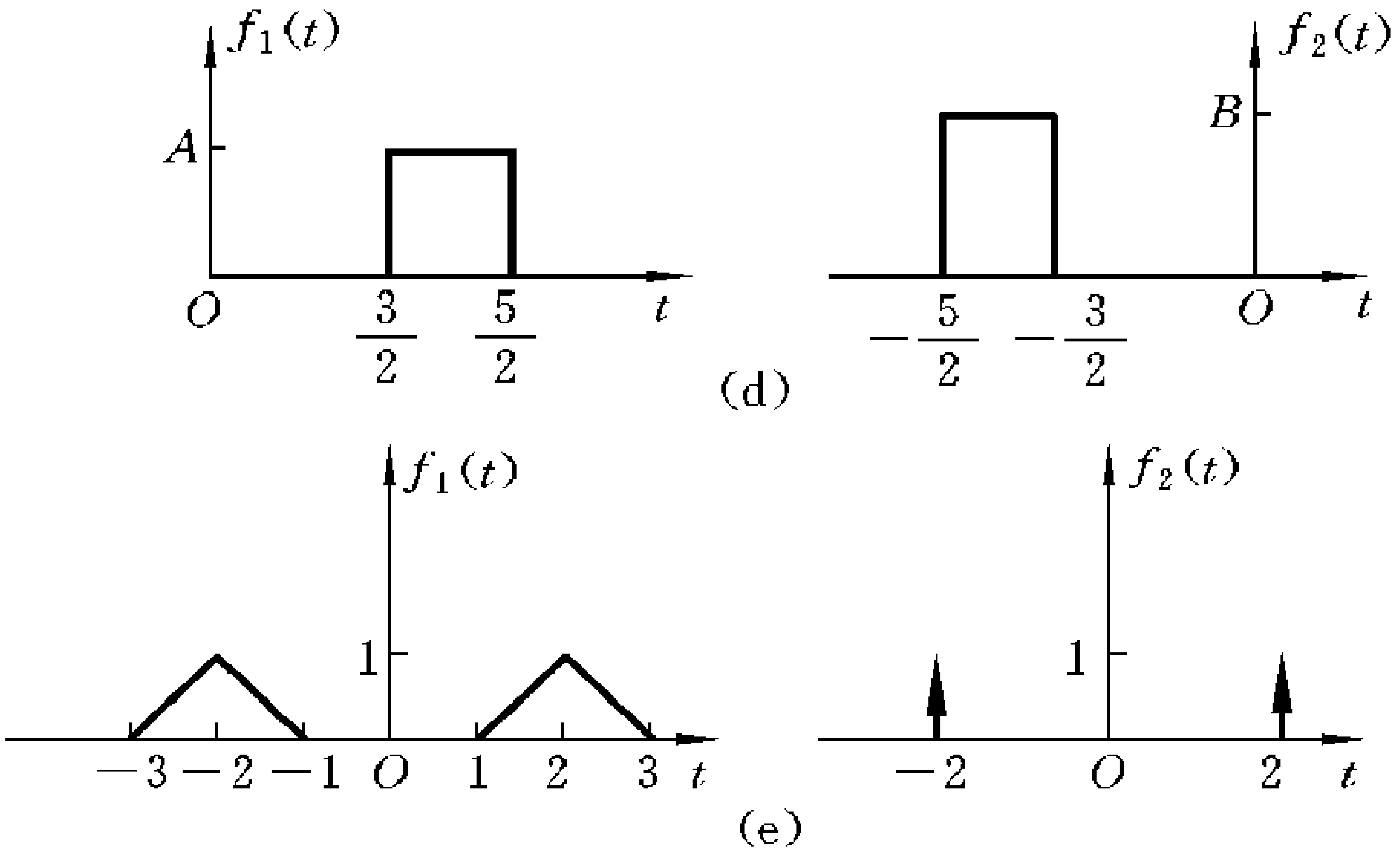


图 2-16



续图 2-16

得结果的波形。

解　(a) 不妨设 $A>B$。

① 当 $-\infty<t\leqslant 0$ 时,重合面积为零,即

$$f_1(t) * f_2(t) = 0$$

如图 2-17(a)所示。

② 当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时,

$$f_1(t) * f_2(t) = A \cdot S_{\text{阴影}} = A \cdot \frac{1}{2}\left(t \times \frac{B}{2}t\right) = \frac{AB}{4}t^2$$

如图 2-17(b)所示。

③ 当 $1<t\leqslant 2$ 时,

$$f_1(t) * f_2(t) = A \cdot S_{\text{阴影}} = A \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{B}{2}t + \frac{B}{2}(t-1)\right] = \frac{AB}{4}(2t-1)$$

如图 2-17(c)所示。

④ 当 $2<t\leqslant 3$ 时,

$$f_1(t) * f_2(t) = A \cdot S_{\text{阴影}} = A \cdot \frac{1}{2}(3-t)\left[B + \frac{B}{2}(t-1)\right]$$

$$= \frac{AB}{4}(3 + 2t - t^2)$$

如图 2-17(d)所示。

⑤ 当 $3<t<\infty$ 时,重合面积为零,

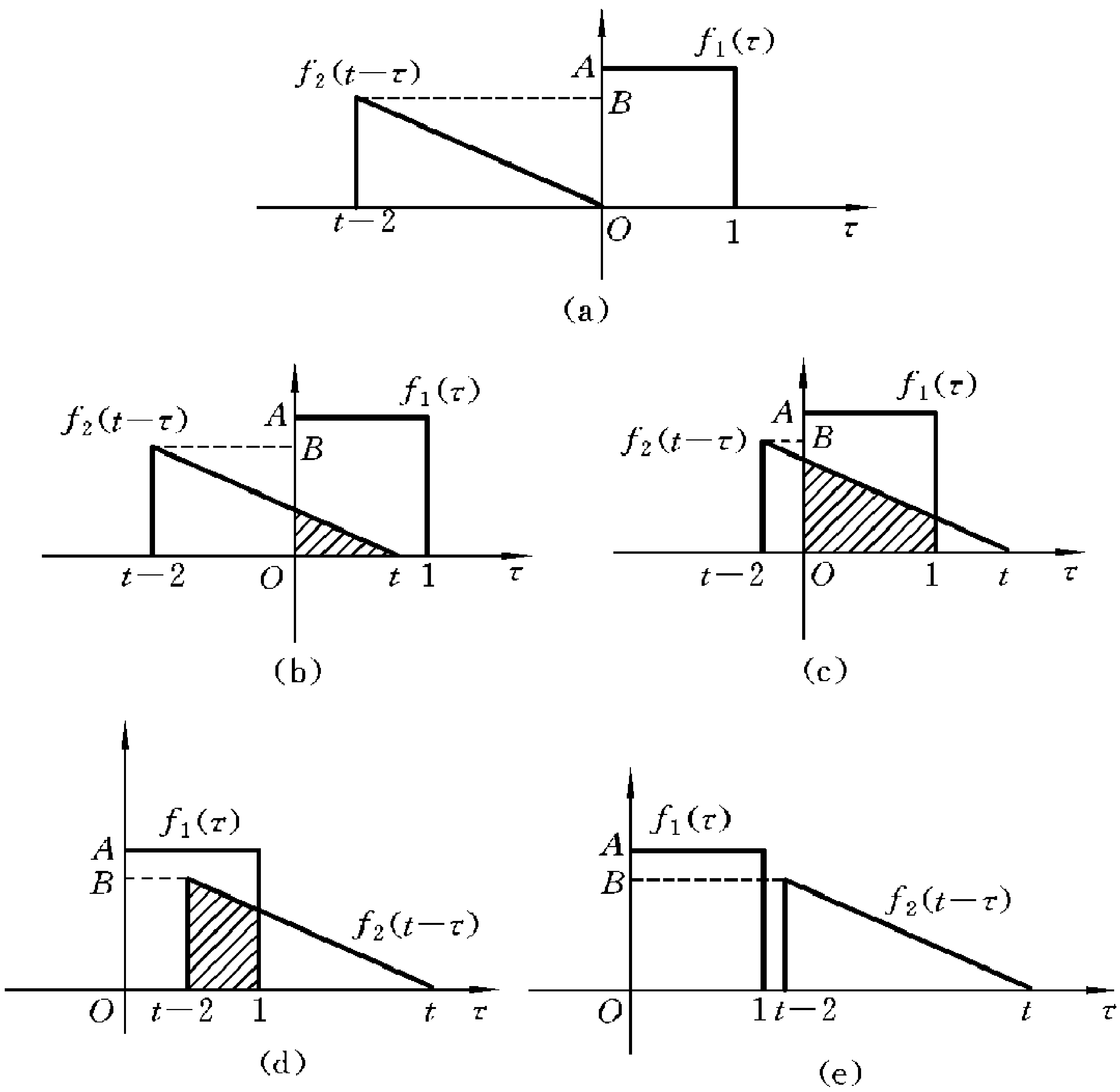


图 2-17

$$f_1(t) * f_2(t) = 0$$

如图 2-17(e)所示。

所以图 2-16 中(a)组信号的卷积 $f_1(t) * f_2(t)$ 的波形如图 2-18 所示。

(b) 不妨设 $A>B$。

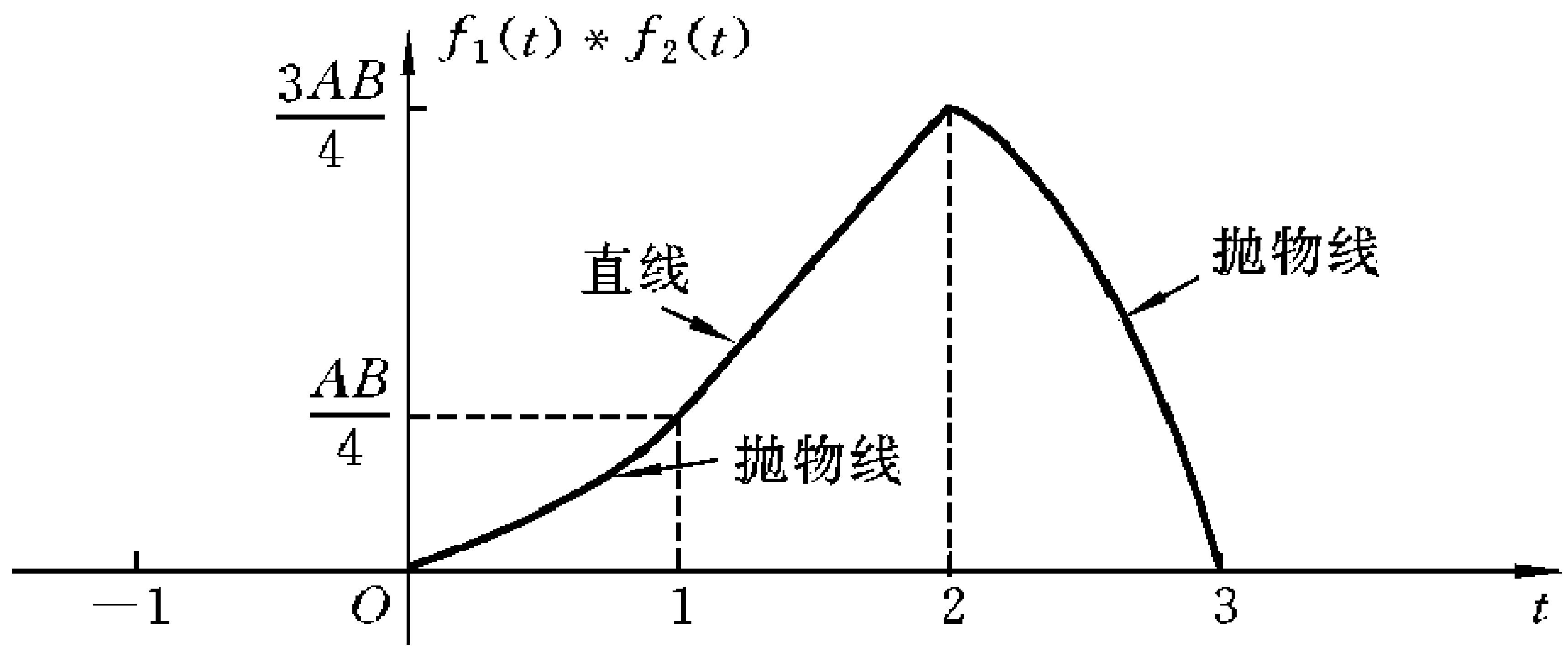
① 当 $t+1\leqslant 0$，即 $t\leqslant -1$ 时，无重合面积，

$$f_1(t) * f_2(t) = 0$$

如图 2-19(a)所示。

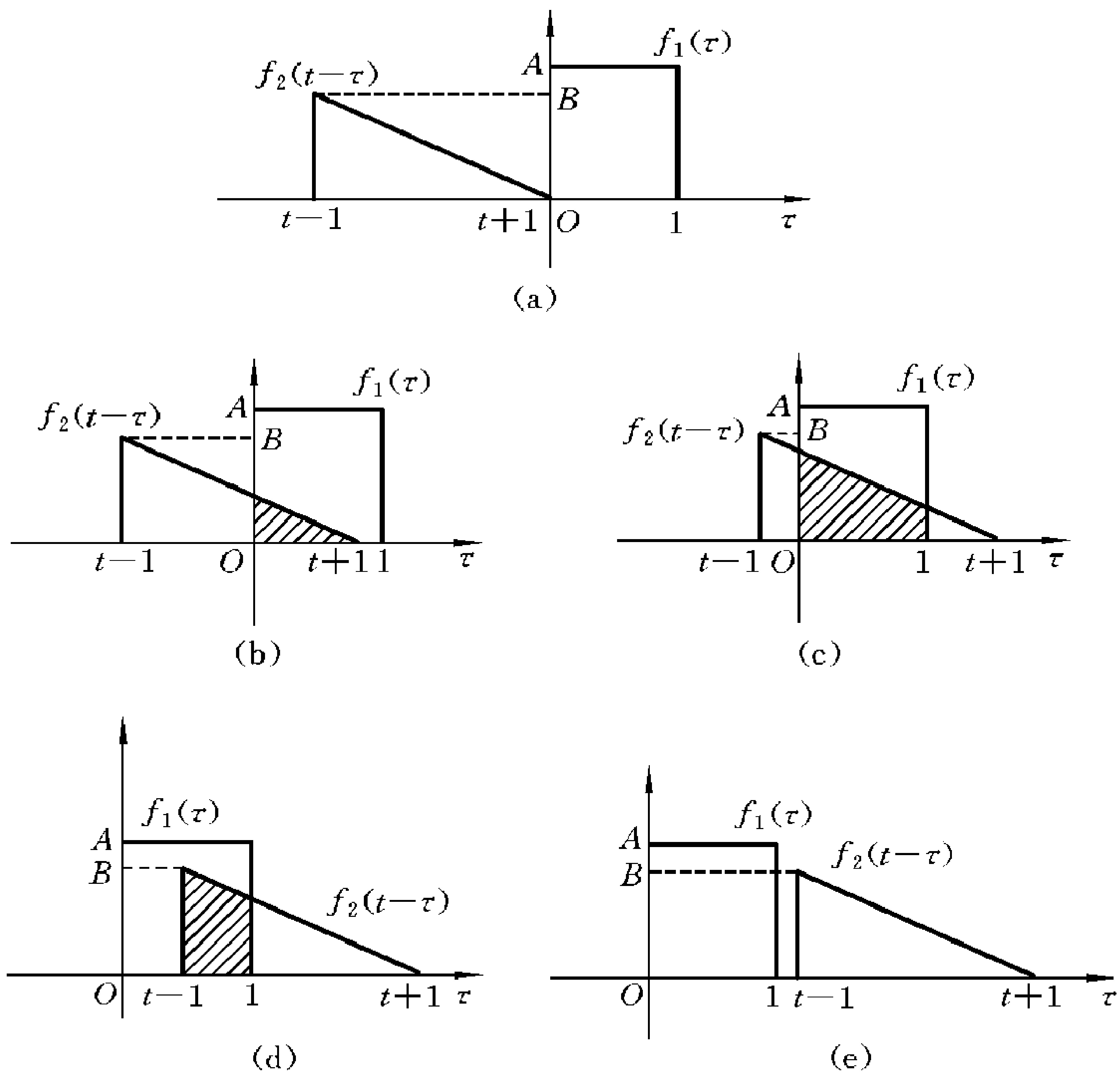
② 当 $0\leqslant t+1\leqslant 1$，即 $-1\leqslant t\leqslant 0$ 时，

$$f_1(t) * f_2(t) = \frac{A}{2}\left[(t+1)\times\frac{B}{2}(t+1)\right] = \frac{AB}{4}(t+1)^2$$



$f_1(t)*f_2(t)$
$\frac{3AB}{4}$
$\frac{AB}{4}$
直线
抛物线
抛物线
−1
O
1
2
3
t

图 2-18



$f_1(\tau)$
$f_2(t-\tau)$
A
B
t−1
t+1
O
1
τ
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)

图 2-19

如图 2-19(b)所示。

③ 当 $1 \leqslant t+1 \leqslant 2$,即 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时,

$$f_1(t) * f_2(t) = \frac{A}{2}\left[\frac{B}{2}(t+1-1)+\frac{B}{2}(t+1)\right]=\frac{AB}{4}(2t+1)$$

如图 2-19(c)所示。

④ 当 $2 \leqslant t+1 \leqslant 3$,即 $1 \leqslant t \leqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \frac{A}{2}\left\{[1-(t-1)]\left[B+\frac{B}{2}(t+1-1)\right]\right\} \\ &= \frac{AB}{4}(4-t^2) \end{aligned}$$

如图 2-19(d)所示。

⑤ 当 $3 \leqslant t+1$,即 $t \geqslant 2$ 时,

$$f_1(t) * f_2(t) = 0$$

如图 2-19(e)所示。

所以图 2-16 中(b)组信号的卷积 $f_1(t) * f_2(t)$ 的波形如图 2-20 所示。

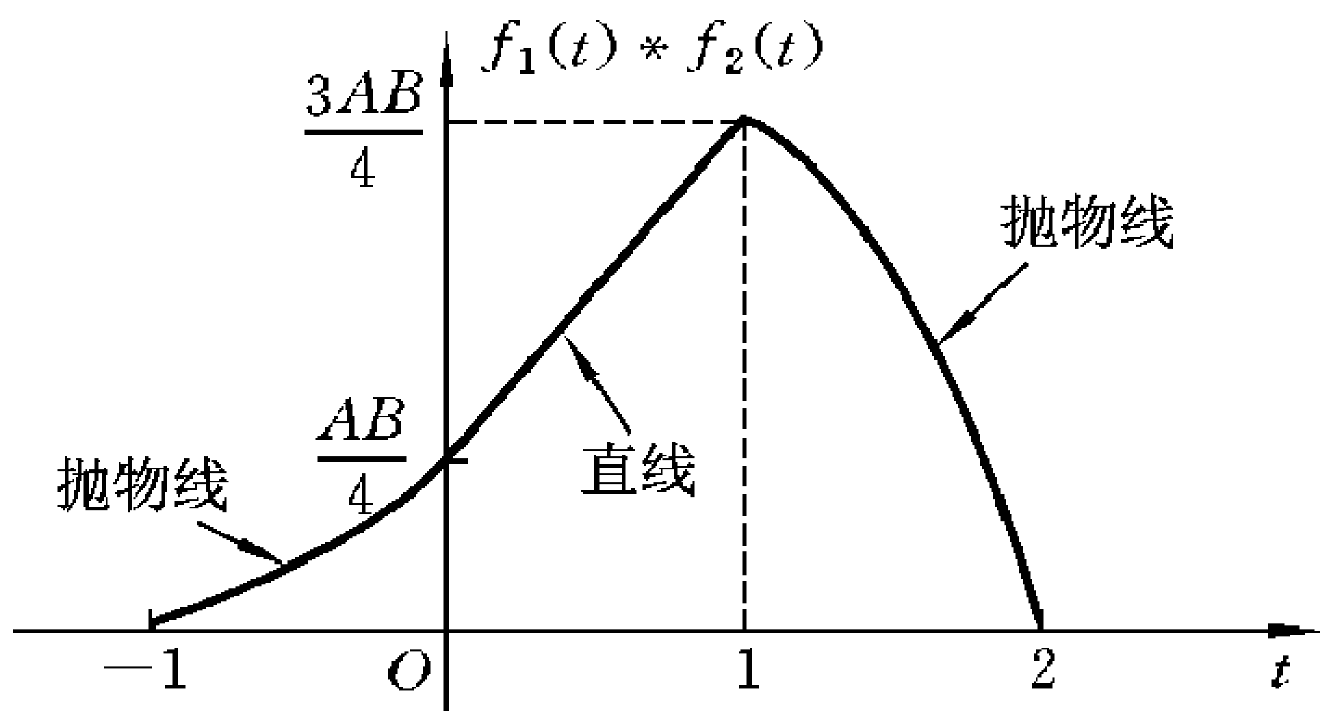


图 2-20

(c) ① 当 $-\infty < t+\frac{5}{2} \leqslant 2$,即 $-\infty < t \leqslant -\frac{1}{2}$ 时,波形不重叠,

$$f_1(t) * f_2(t) = 0$$

如图 2-21(a)所示。

② 当 $2 \leqslant t+\frac{5}{2} \leqslant \frac{5}{2}$,即 $-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 0$ 时,

$$f_1(t) * f_2(t) = AB\left(t+\frac{5}{2}-2\right) = AB\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

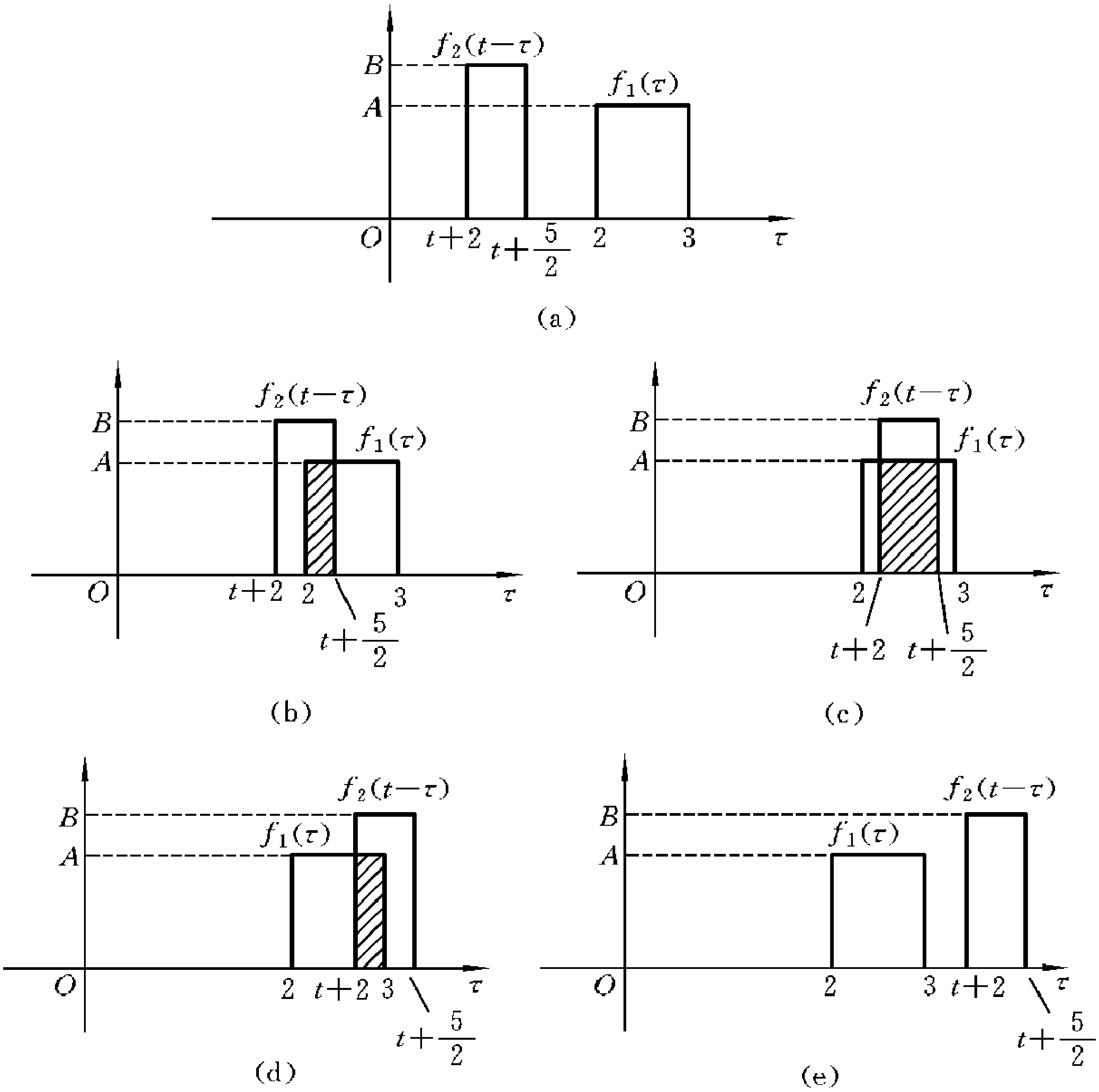


图 2-21

如图 2-21(b)所示。

③ 当$\frac{5}{2}\leqslant t+\frac{5}{2}\leqslant 3$，即 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$时，

$$f_1(t)*f_2(t)=AB\left[\left(t+\frac{5}{2}\right)-(t+2)\right]=\frac{AB}{2}$$

如图 2-21(c)所示。

④ 当 $3\leqslant t+\frac{5}{2}\leqslant\frac{7}{2}$，即$\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1$ 时，

$$f_1(t)*f_2(t)=AB[3-(t+2)]=AB(1-t)$$

如图 2-21(d)所示。

⑤ 当$t+\frac{5}{2}\geqslant\frac{7}{2}$,即$t\geqslant 1$时,

$$f_1(t) * f_2(t) = 0$$

如图 2-21(e)所示。

所以图 2-16 中(c)组信号的卷积$f_1(t) * f_2(t)$的波形如图 2-22 所示。

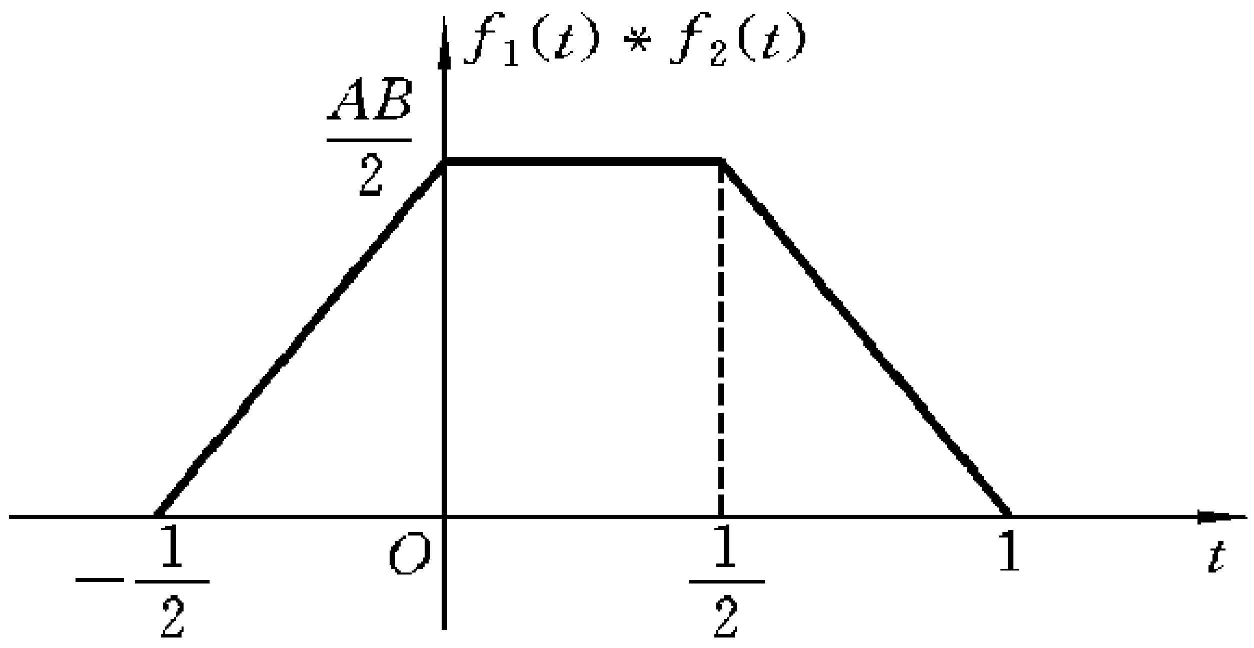


图 2-22

(d) ① 当$t+\frac{5}{2}\leqslant\frac{3}{2}$,即$t\leqslant -1$时,

$$f_1(t) * f_2(t) = 0$$

如图 2-23(a)所示。

② 当$\frac{3}{2}\leqslant t+\frac{5}{2}\leqslant\frac{5}{2}$,即$-1\leqslant t\leqslant 0$时,

$$f_1(t) * f_2(t) = AB\left[\left(t+\frac{5}{2}\right)-\frac{3}{2}\right] = AB(t+1)$$

如图 2-23(b)所示。

③ 当$\frac{5}{2}\leqslant t+\frac{5}{2}\leqslant\frac{7}{2}$,即$0\leqslant t\leqslant 1$时,

$$f_1(t) * f_2(t) = AB\left[\frac{5}{2}-\left(t+\frac{3}{2}\right)\right] = AB(1-t)$$

如图 2-23(c)所示。

④ 当$t+\frac{5}{2}\geqslant\frac{7}{2}$,即$t\geqslant 1$时,

$$f_1(t) * f_2(t) = 0$$

如图 2-23(d)所示。

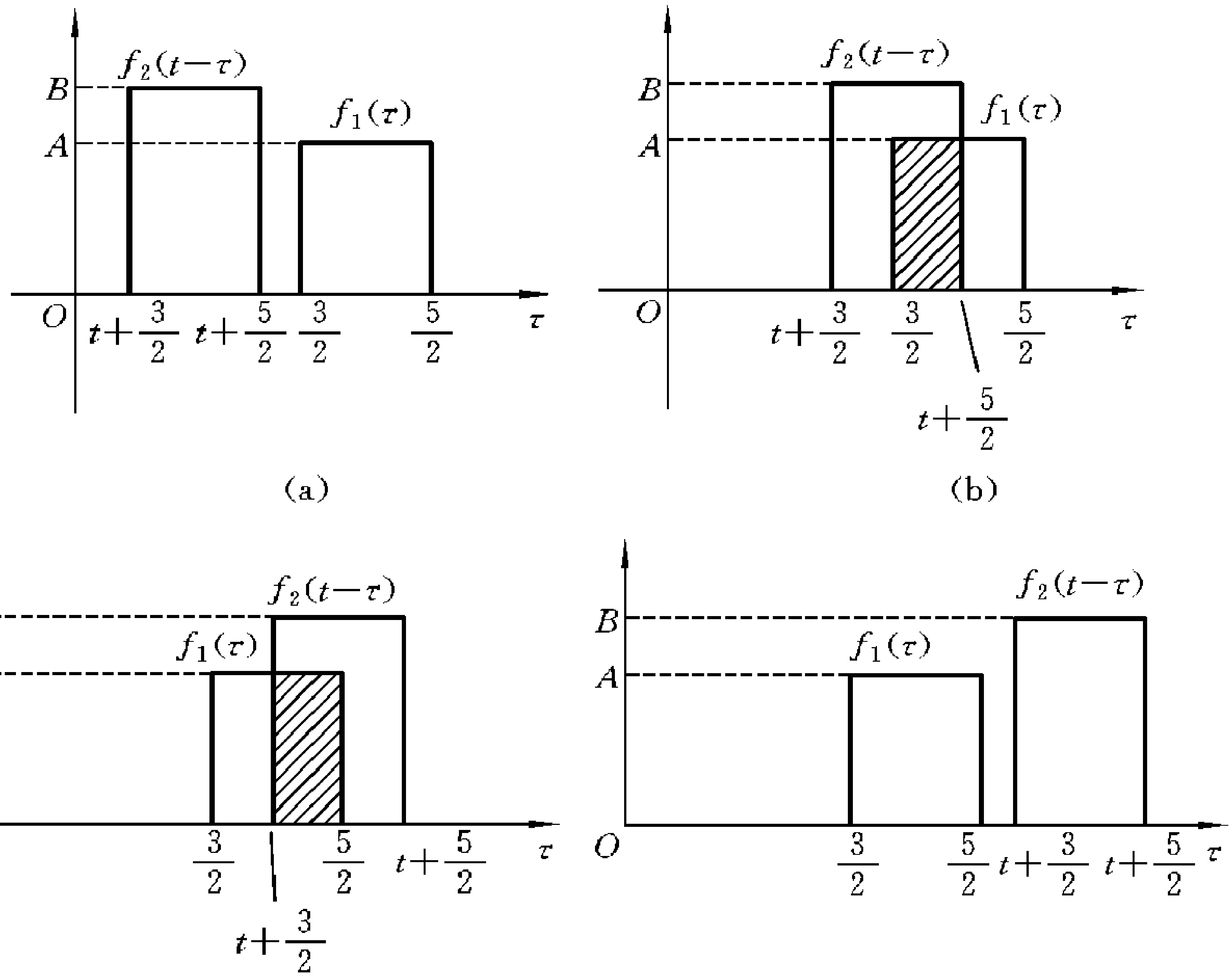


图 2-23

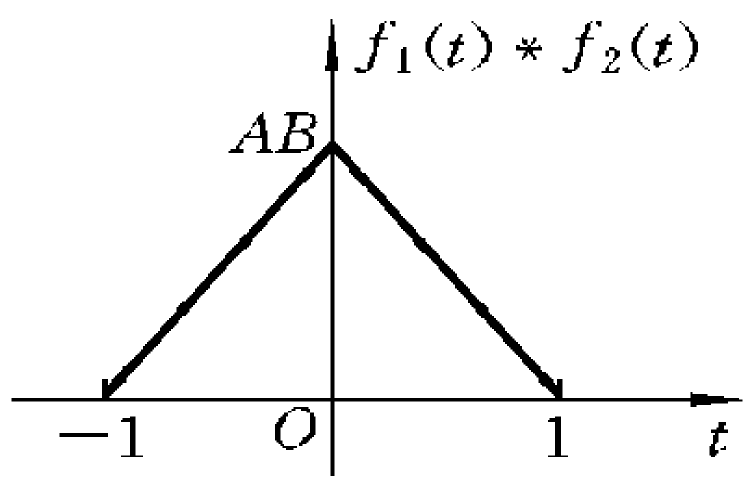


图 2-24

所以图 2-16 中(d)组信号卷积 $f_1(t) * f_2(t)$ 的波形如图 2-24 所示。

(e) ① 当 $-\infty < t+2 \leqslant -3$，即 $-\infty < t \leqslant -5$ 时，

$$f_1(t) * f_2(t) = 0$$

如图 2-25(a)所示。

② 当 $-3 \leqslant t+2 \leqslant -1$，即 $-5 \leqslant t \leqslant -3$ 时，根据 $\delta(t)$ 抽样性有

$$f_1(t) * f_2(t) = f_1(t+2)$$

所以当 $-5 \leqslant t \leqslant -4$ 时，　$f_1(t) * f_2(t) = t+5$

当 $-4 \leqslant t \leqslant -3$ 时，　$f_1(t) * f_2(t) = -(t+3)$

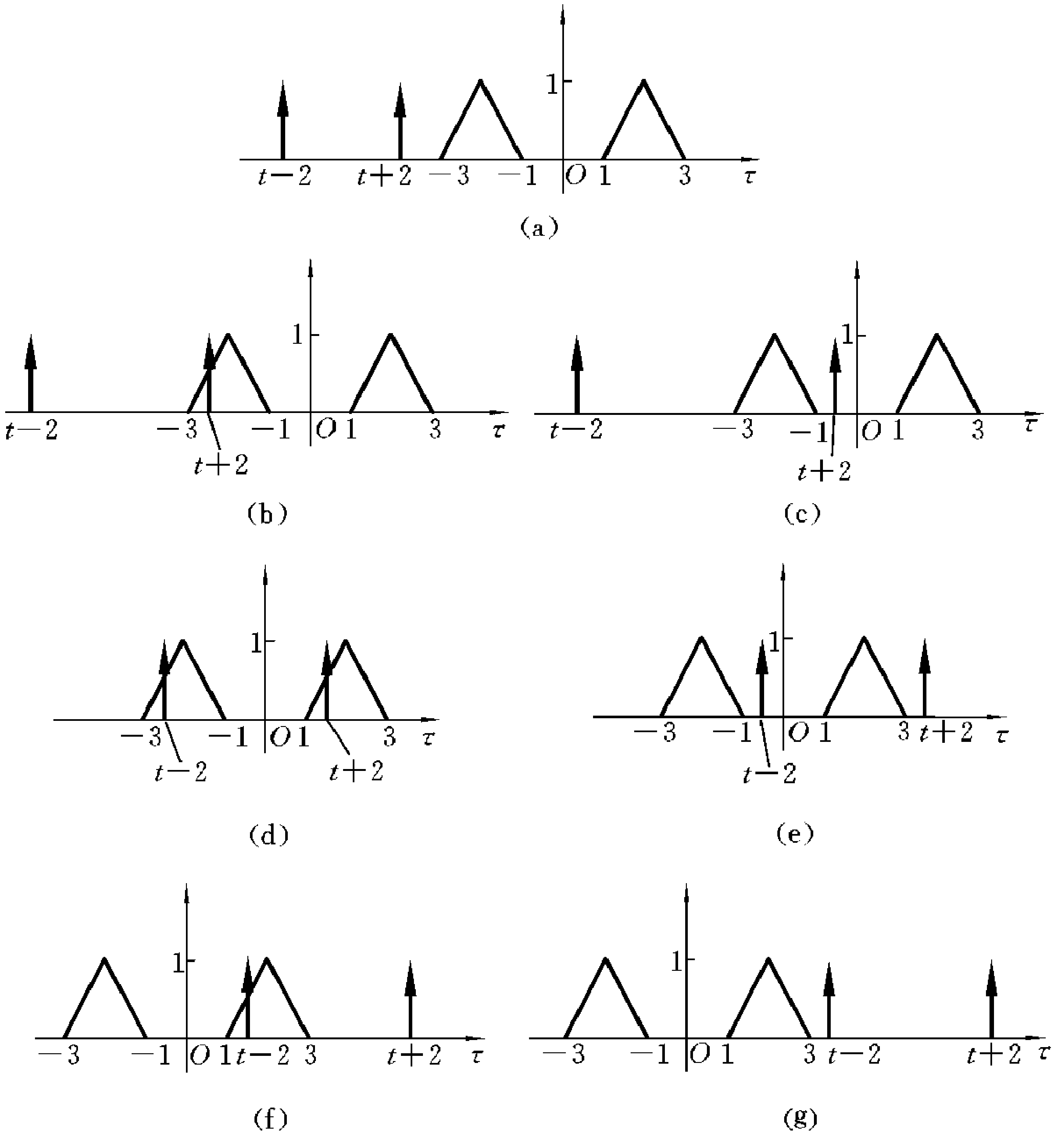


图 2-25

如图 2-25(b)所示。

③ 当 $-1\leqslant t+2\leqslant 1$,即 $-3\leqslant t\leqslant -1$ 时,

$$f_1(t)*f_2(t)=0$$

如图 2-25(c)所示。

④ 当 $1\leqslant t+2\leqslant 3$,即 $-1\leqslant t\leqslant 1$ 时,

$$f_1(t)*f_2(t)=f_1(t-2)+f_2(t+2)$$

当$-1\leqslant t\leqslant 0$时，　　$f_1(t)*f_2(t)=2(t+1)$

当$0\leqslant t\leqslant 1$时，　　$f_1(t)*f_2(t)=2(1-t)$

如图2-25(d)所示。

⑤ 当$-1\leqslant t-2\leqslant 1$,即$1\leqslant t\leqslant 3$时，

$$f_1(t)*f_2(t)=0$$

如图2-25(e)所示。

⑥ 当$1\leqslant t-2\leqslant 3$,即$3\leqslant t\leqslant 5$时，

$$f_1(t)*f_2(t)=f_1(t-2)$$

当$3\leqslant t\leqslant 4$时，　　$f_1(t)*f_2(t)=t-3$

当$4\leqslant t\leqslant 5$时，　　$f_1(t)*f_2(t)=-(t-5)$

如图2-25(f)所示。

⑦ 当$3\leqslant t-2$,即$t\geqslant 5$时，

$$f_1(t)*f_2(t)=0$$

如图2-25(g)所示。

所以图2-16中(e)组信号的卷积$f_1(t)*f_2(t)$的波形如图2-26所示。

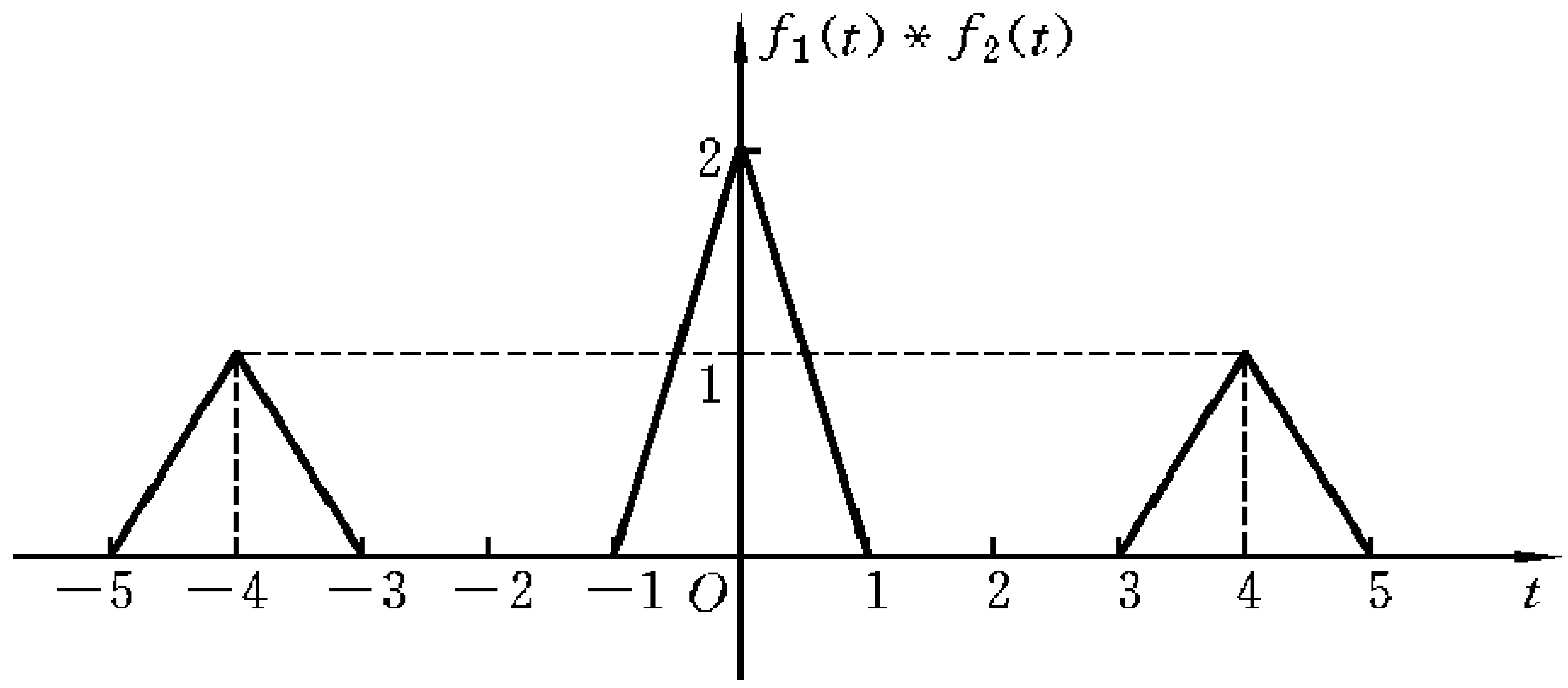


图2-26

【2-18】 绘出$f_1(t)$及$f_2(t)$的波形,并用卷积图解法粗略绘出卷积所得结果的波形。

(1) $f_1(t)=\varepsilon(-t+1)+2\varepsilon(t-1)$,$f_2(t)=e^{-(t+1)}\varepsilon(t+1)$

(2) $f_1(t)=\sin t\varepsilon(t)$,$f_2(t)=\varepsilon(t+1)$

(3) $f_1(t)=2[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$

$f_2(t)=\sin(\pi t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$

(4) $f_1(t)=\left[\varepsilon\left(t+\frac{1}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]*\left[\varepsilon\left(t+\frac{1}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]$

$f_2(t)=\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)$

解　(1) $f_1(t)$、$f_2(t)$的波形分别如图 2-27(a)、(b)所示。

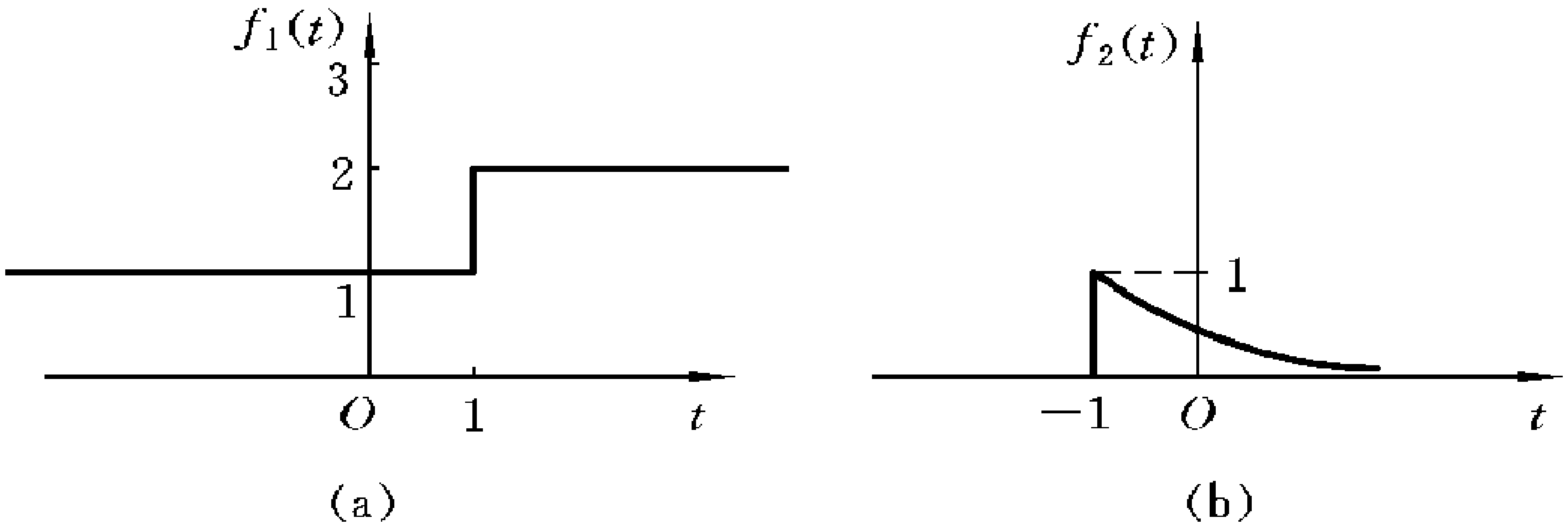


图 2-27

当$-\infty<t\leqslant 0$时，

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-1}^{+\infty}f_2(\tau)\cdot 1\mathrm{d}\tau=\int_{-1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\tau+1)}\varepsilon(\tau+1)\mathrm{d}\tau=-\mathrm{e}^{-\tau}\Big|_0^{+\infty}=1$$

如图 2-28(a)所示。

当$0<t<+\infty$时，

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-1}^{-1+t}2f_2(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{-1+t}^{+\infty}1\cdot f_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^t 2\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau+\int_t^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau=-2\mathrm{e}^{-\tau}\Big|_0^t-\mathrm{e}^{-\tau}\Big|_t^{+\infty}=2-\mathrm{e}^{-t}$$

如图 2-28(b)所示。

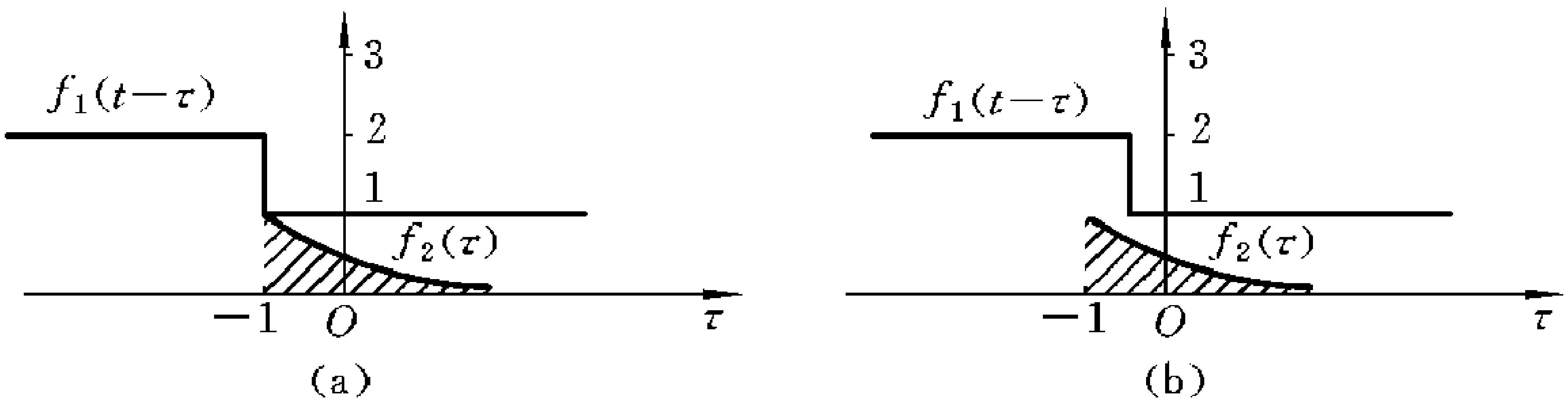


图 2-28

故 $f_1(t) * f_2(t)$ 的波形如图2-29所示。

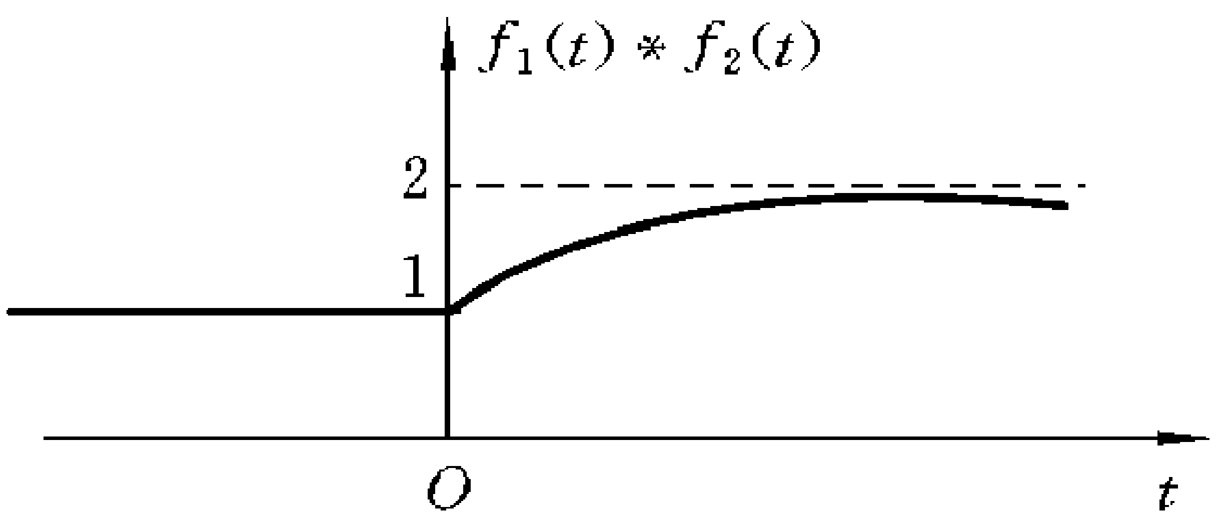


图 2-29

(2) $f_1(t)$、$f_2(t)$ 的波形分别如图 2-30(a)、(b)所示。

当 $-\infty < t \leqslant -1$ 时,

$$f_1(t) * f_2(t) = 0$$

如图 2-31(a)所示。

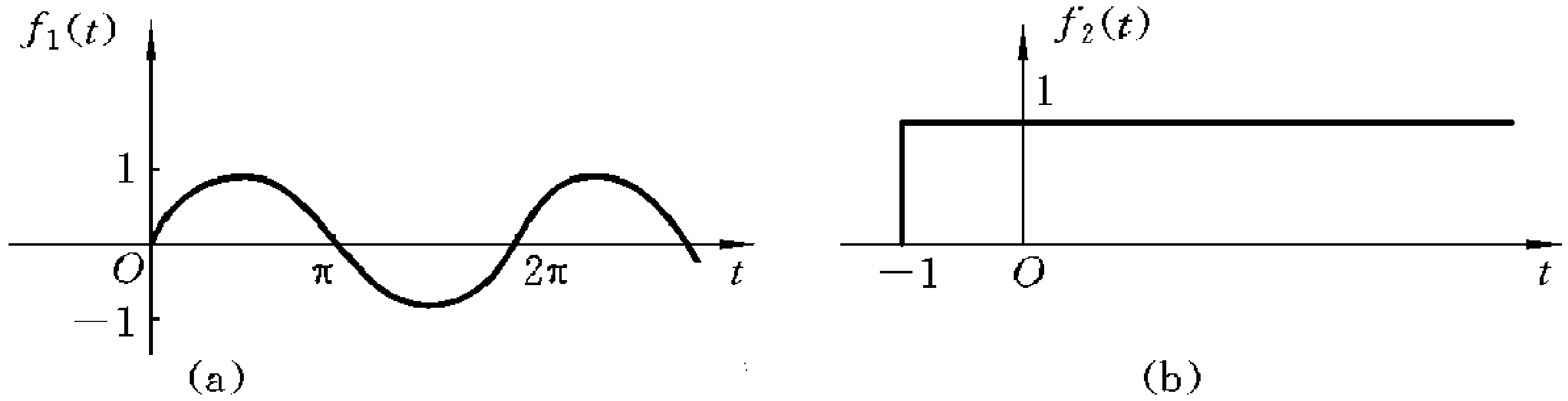


图 2-30

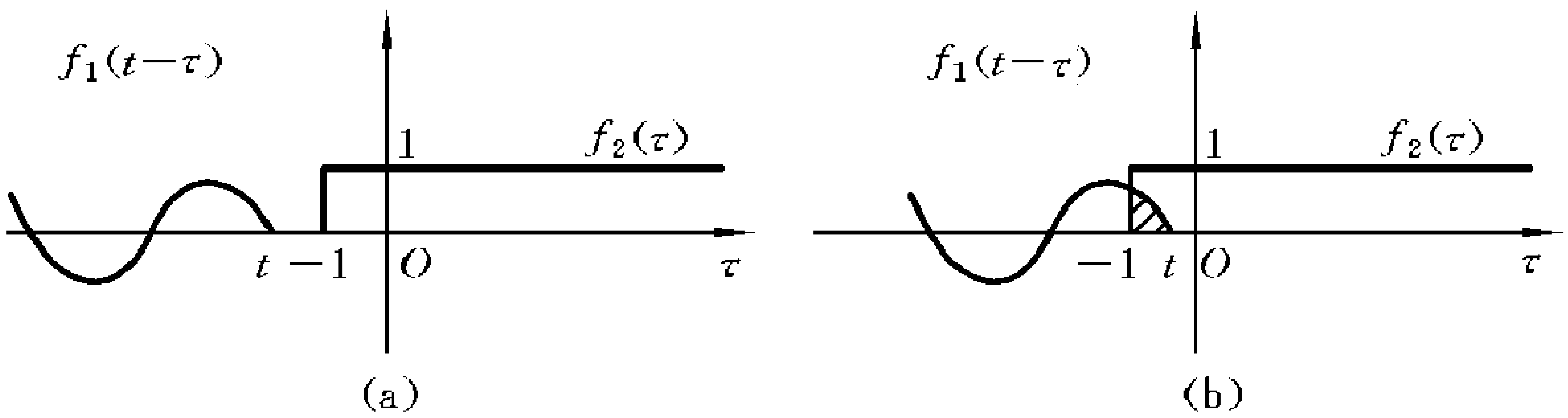


图 2-31

当 $-1 < t < +\infty$ 时,

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-1}^{t} \sin(t-\tau)\varepsilon(t-\tau) \cdot 1 \mathrm{d}\tau = \cos(t-\tau) \Big|_{-1}^{t}$$

$$= [1 - \cos(t+1)]\varepsilon(t+1)$$

如图 2-31(b)所示。

故 $f_1(t) * f_2(t)$ 的波形如图 2-32 所示。

(3) $f_1(t) = 2[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$、$f_2(t) = \sin(\pi t)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$ 的波形分别如图 2-33(a)、(b)所示。

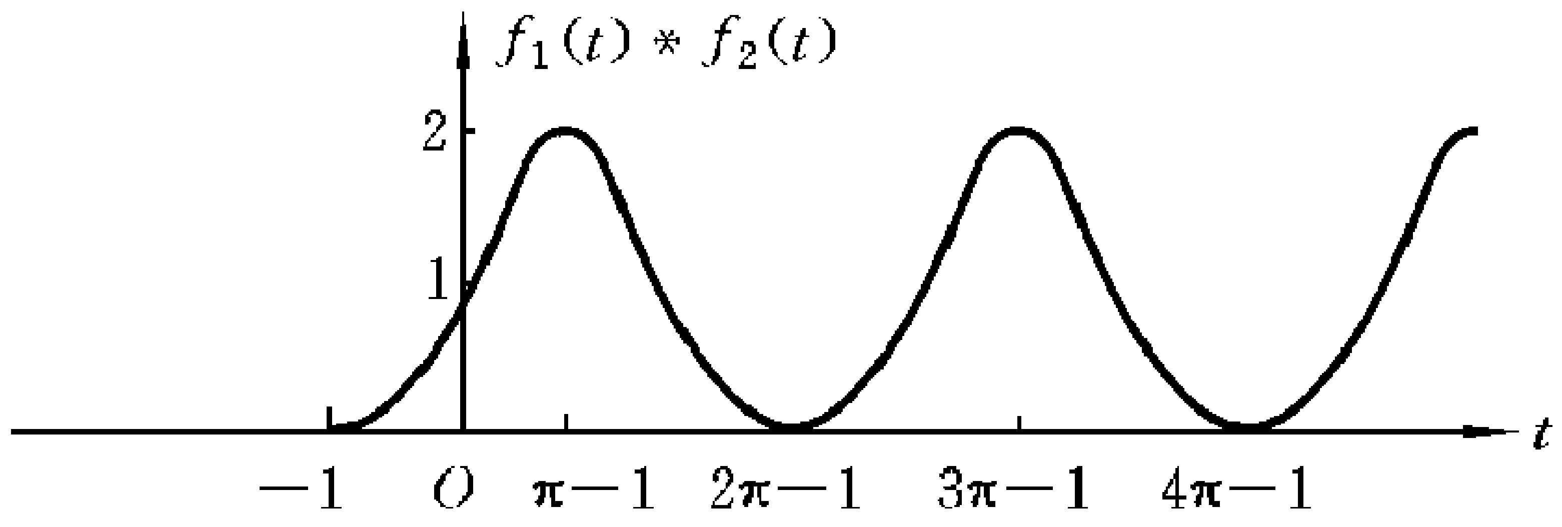


图 2-32

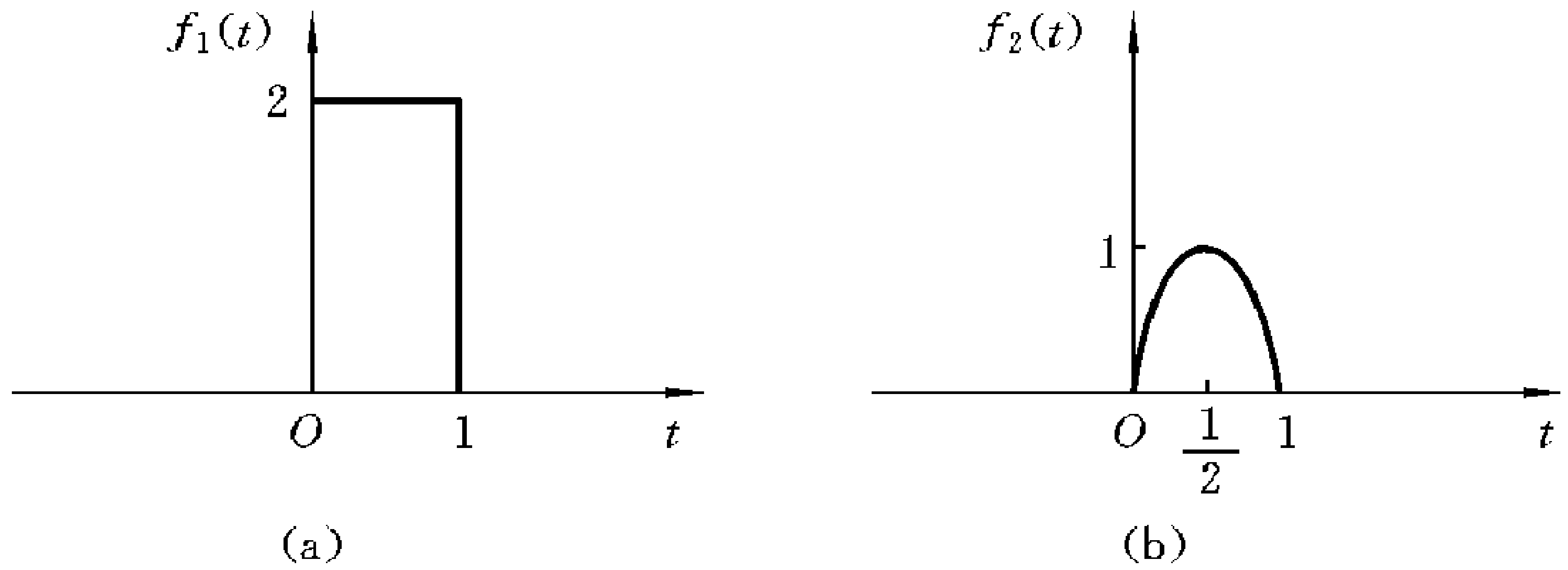


图 2-33

当 $-\infty<t\leqslant 0$ 时，

$$f_1(t)*f_2(t)=0$$

如图 2-34(a)所示。

当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t 2\cdot\sin[\pi(t-\tau)]\mathrm{d}\tau=\frac{2}{\pi}[1-\cos(\pi t)]$$

如图 2-34(b)所示。

当 $1<t\leqslant 2$ 时，

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{t-1}^1 2\cdot\sin[\pi(t-\tau)]\mathrm{d}\tau=\frac{2}{\pi}\{1+\cos[\pi(t-1)]\}$$

如图 2-34(c)所示。

当 $t>2$ 时，

$$f_1(t)*f_2(t)=0$$

如图 2-34(d)所示。

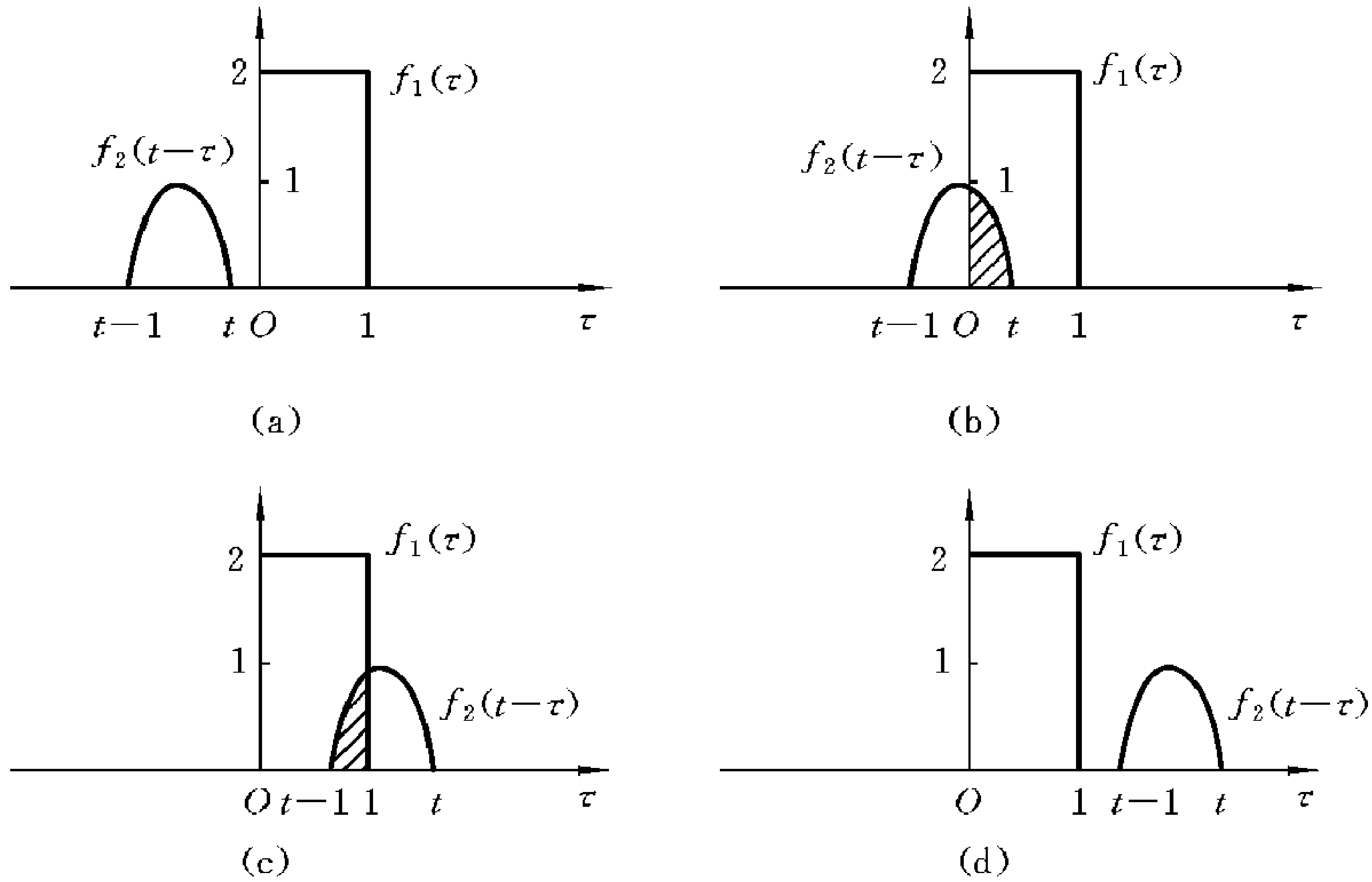


图 2-34

故 $f_1(t)*f_2(t)$的波形如图 2-35 所示。

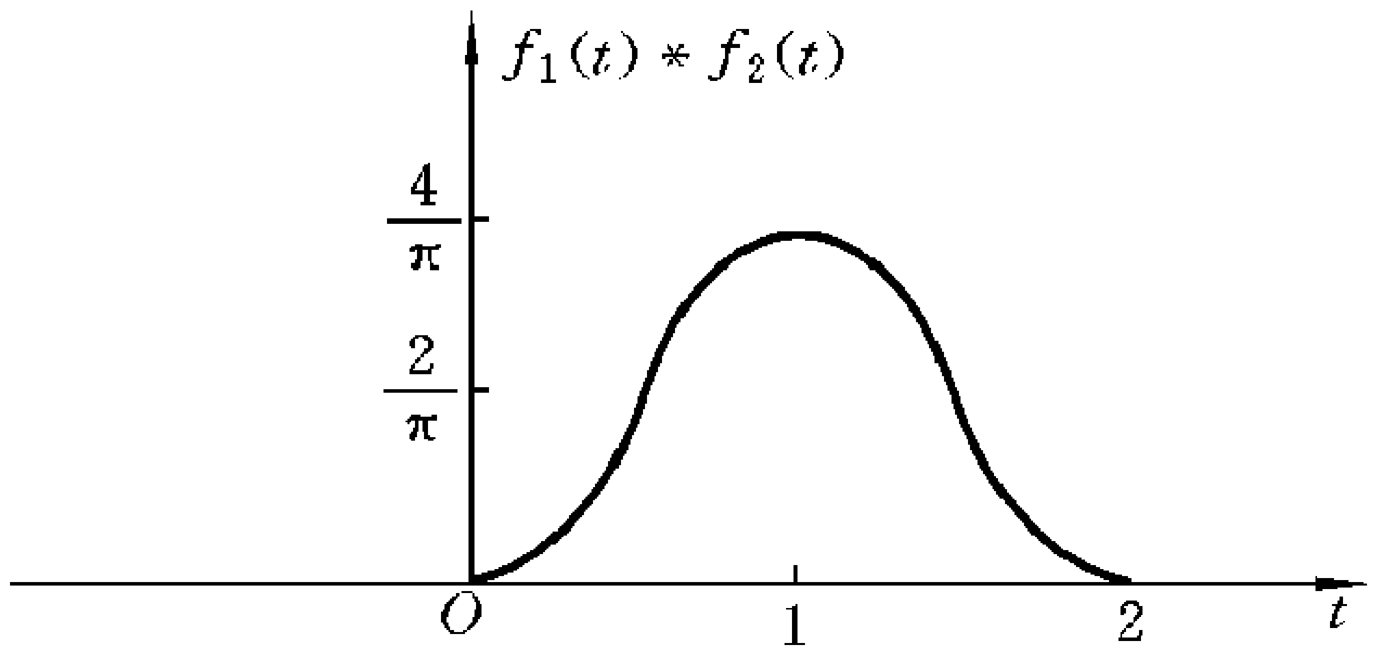


图 2-35

(4) $f_1(t)=[\varepsilon(t+\frac{1}{2})-\varepsilon(t-\frac{1}{2})]*[\varepsilon(t+\frac{1}{2})-\varepsilon(t-\frac{1}{2})]$

① 先用图解法求出 $f_1(t)$。

设 $\varepsilon(t+\frac{1}{2})-\varepsilon(t-\frac{1}{2})=g(t)$，则 $g(t)$的波形如图 2-36 所示。

当 $t+\frac{1}{2}\leqslant-\frac{1}{2}$，即 $t\leqslant-1$ 时，

$$g(t) * g(t) = 0$$

如图 2-37(a)所示。

当$-\frac{1}{2}<t+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，即$-1<t\leqslant 0$时，

$$g(t) * g(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} 1 \cdot 1 \mathrm{d}\tau = t + 1$$

如图 2-37(b)所示。

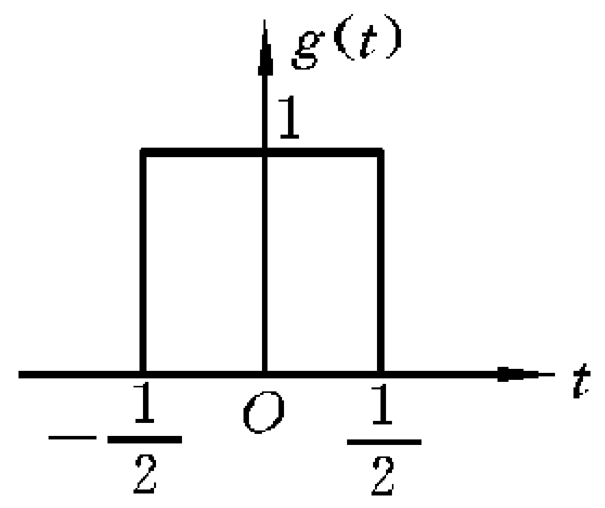


图 2-36

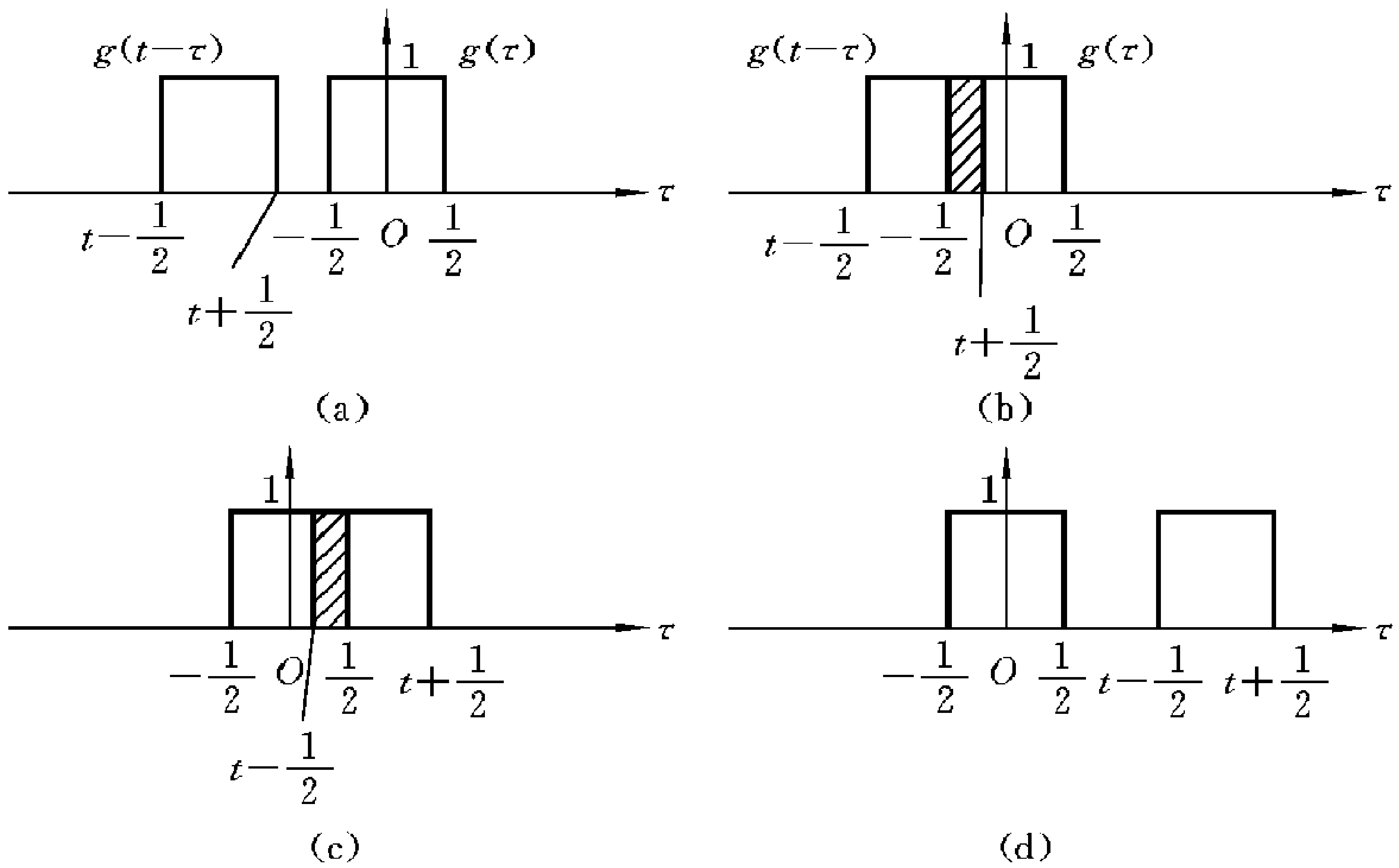


图 2-37

当$\frac{1}{2}<t+\frac{1}{2}\leqslant\frac{3}{2}$，即$0<t\leqslant 1$时，

$$g(t) * g(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot 1 \mathrm{d}\tau = 1 - t$$

如图 2-37(c)所示。

当$t+\frac{1}{2}\geqslant\frac{3}{2}$，即$t>1$时，

$$g(t) * g(t) = 0$$

如图 2-37(d)所示。

故$f_1(t)$的波形如图 2-38 所示。

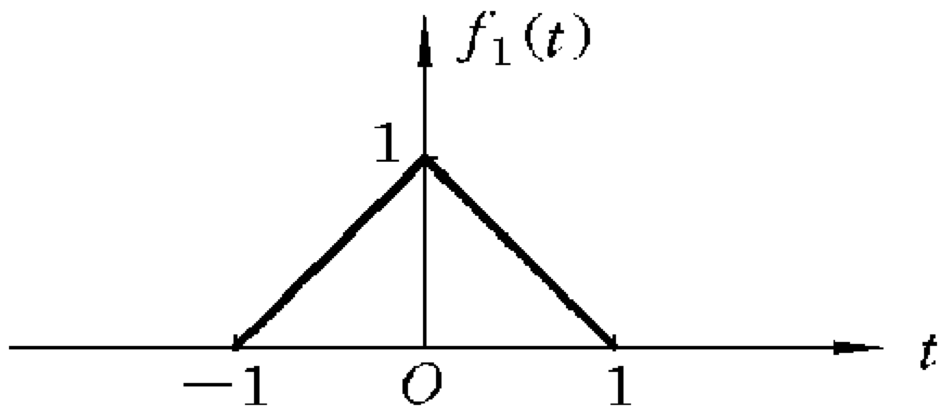


图 2-38

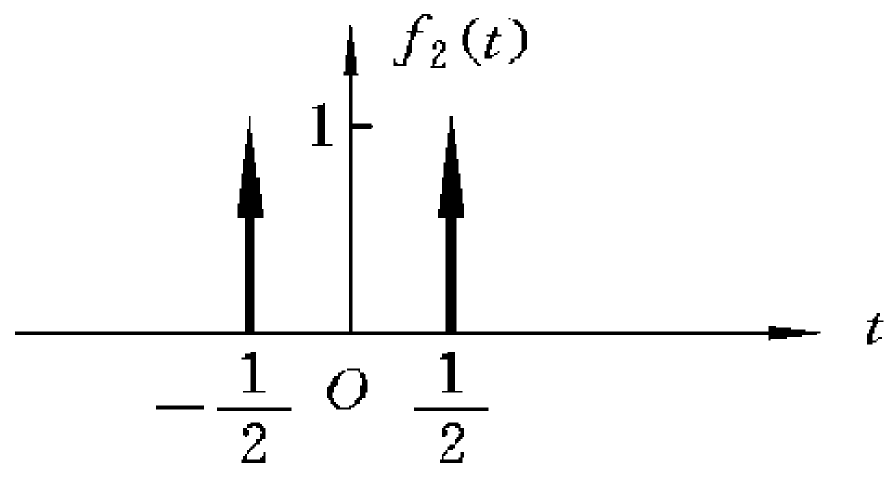


图 2-39

② 再求 $f_1(t)*f_2(t)$ 的波形。$f_2(t)$ 的波形如图 2-39 所示。

当 $t+\frac{1}{2}\leqslant -1$，即 $t\leqslant -\frac{3}{2}$ 时，

$$f_1(t)*f_2(t)=0$$

如图 2-40(a)所示。

当 $-1<t+\frac{1}{2}\leqslant 0$，即 $-\frac{3}{2}<t\leqslant -\frac{1}{2}$ 时，

$$f_1(t)*f_2(t)=t+\frac{3}{2}$$

如图 2-40(b)所示。

当 $t+\frac{1}{2}\leqslant 1$ 且 $t-\frac{1}{2}>-1$，即 $-\frac{1}{2}<t\leqslant\frac{1}{2}$ 时，

$$f_1(t)*f_2(t)=1$$

如图 2-40(c)所示。

当 $t+\frac{1}{2}>1$ 且 $t-\frac{1}{2}\leqslant 1$，即 $\frac{1}{2}<t\leqslant\frac{3}{2}$ 时，

$$f_1(t)*f_2(t)=-t+\frac{3}{2}$$

如图 2-40(d)所示。

当 $2<t+\frac{1}{2}$，即 $t>\frac{3}{2}$ 时，

$$f_1(t)*f_2(t)=0$$

如图 2-40(e)所示。

故 $f_1(t)*f_2(t)$ 的波形如图 2-41 所示。

【2-19】 由卷积的交换律分别用

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

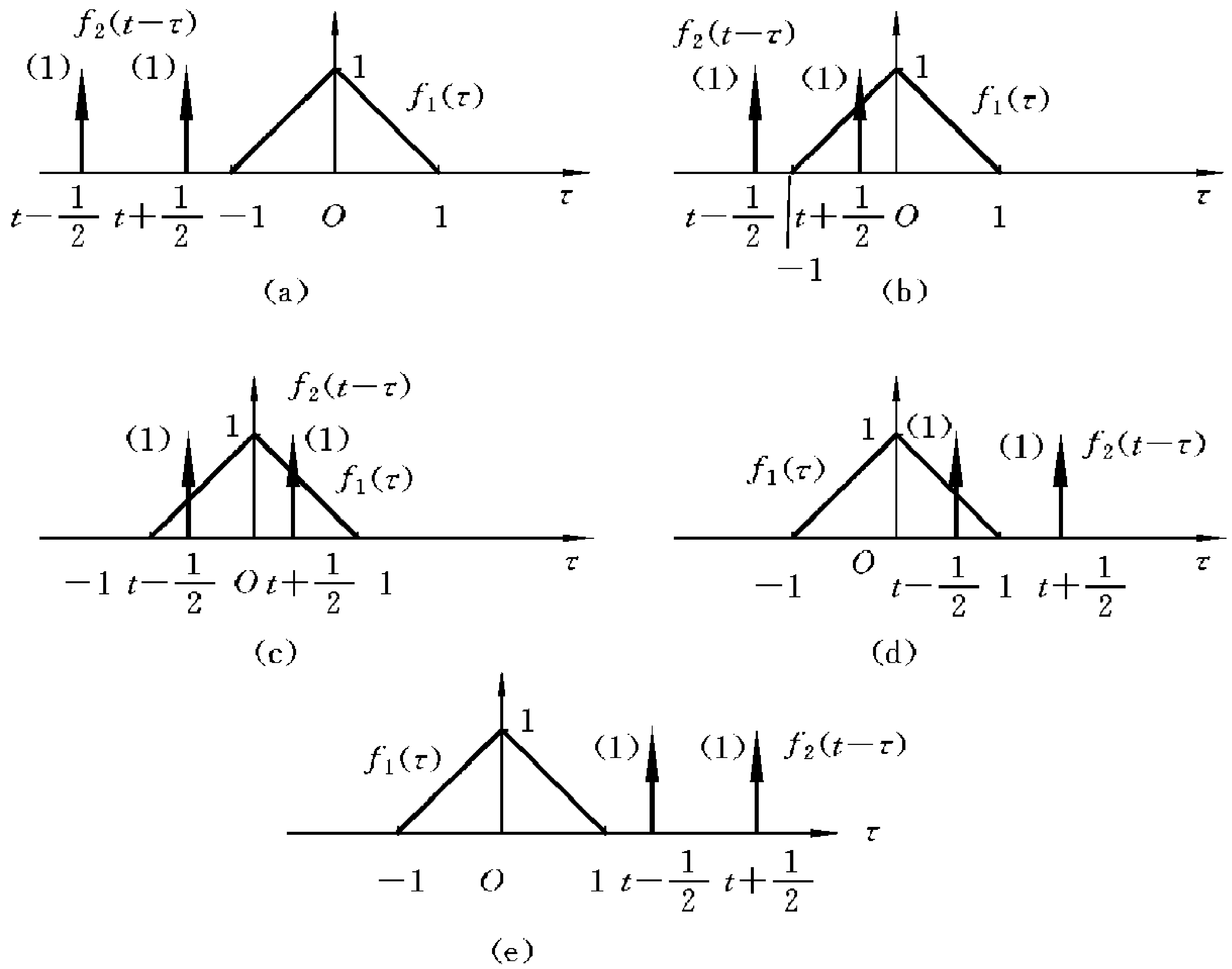


图 2-40

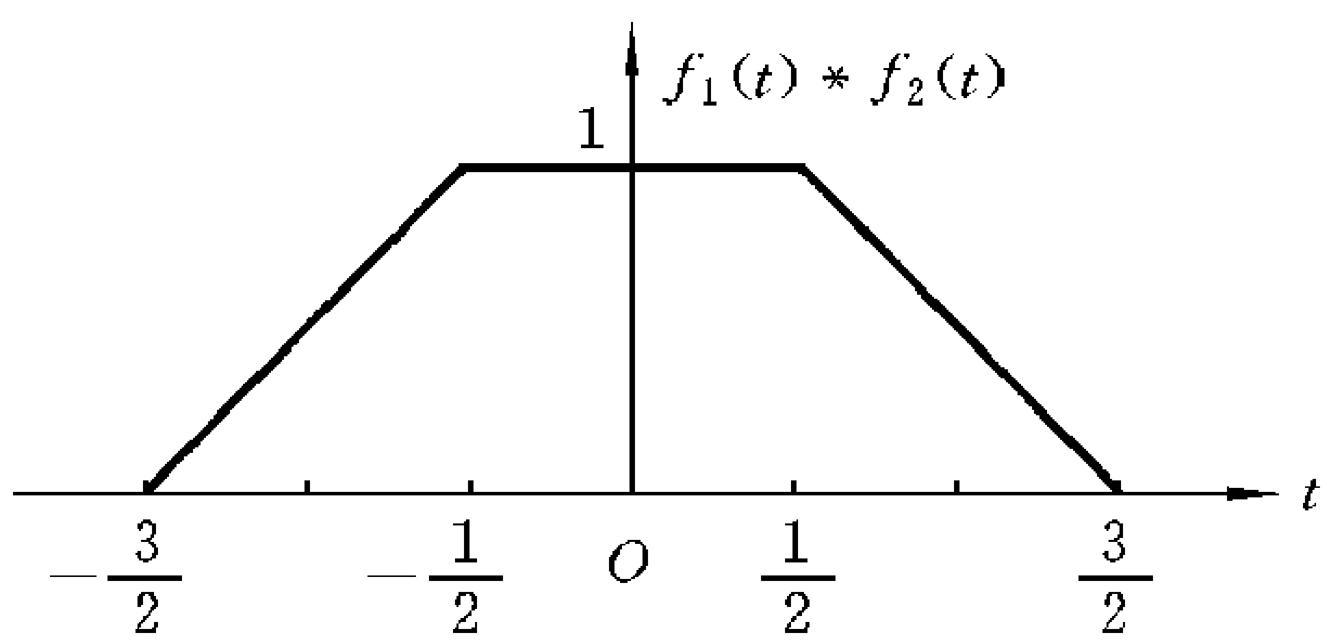


图 2-41

及
$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\tau)f_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

求图 2-42 所示信号的卷积。请注意积分限的确定。

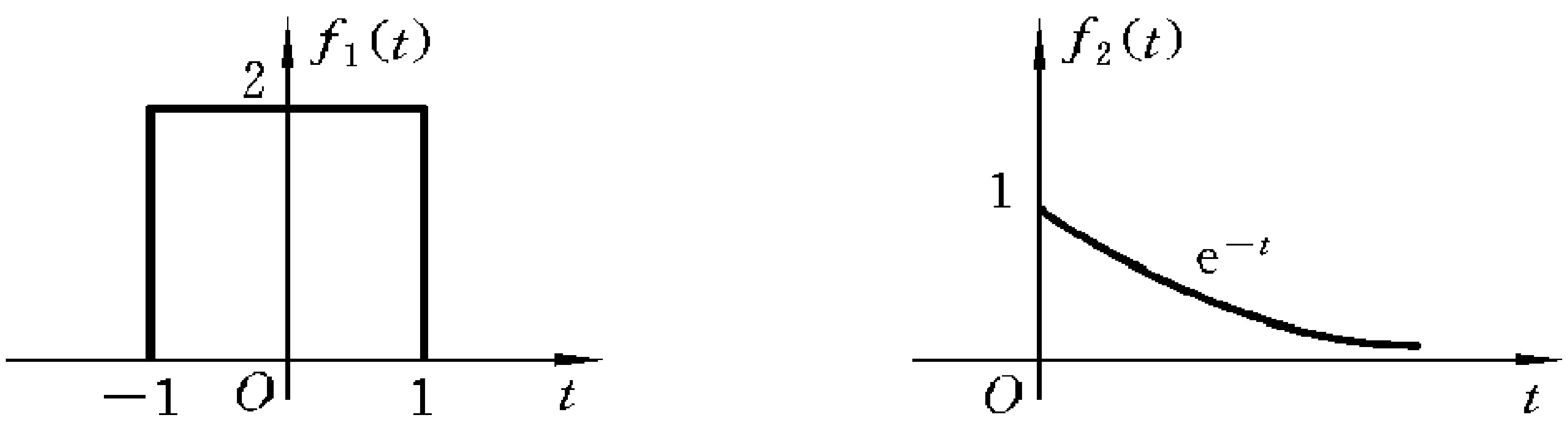


图 2-42

解

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\tau)f_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau}\varepsilon(\tau)\cdot 2[\varepsilon(t-\tau+1)-\varepsilon(t-\tau-1)]\mathrm{d}\tau$$
$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau}\varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau+1)\mathrm{d}\tau-2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau}\varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau-1)\mathrm{d}\tau$$
$$=2\int_{0}^{t+1}\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau-2\int_{0}^{t-1}\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau=-2[\mathrm{e}^{-\tau}]\Big|_0^{t+1}+2[\mathrm{e}^{-\tau}]\Big|_0^{t-1}$$
$$=-2[\mathrm{e}^{-(t+1)}-1]\varepsilon(t+1)+2[\mathrm{e}^{-(t-1)}-1]\varepsilon(t-1)$$
$$=2[1-\mathrm{e}^{-(t+1)}]\varepsilon(t+1)-2[1-\mathrm{e}^{-(t-1)}]\varepsilon(t-1)$$

【2-20】 用卷积的微分积分性质求下列函数的卷积。

(1) $f_1(t)=\varepsilon(t)$，　$f_2(t)=\varepsilon(t-1)$

(2) $f_1(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$，　$f_2(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)$

(3) $f_1(t)=\sin(2\pi t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$，　$f_2(t)=\varepsilon(t)$

(4) $f_1(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$，　$f_2(t)=\varepsilon(t-1)$

解 (1)
$$f_1(t)*f_2(t)=\varepsilon(t)*\varepsilon(t-1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t-1)*\int_{0^-}^{t}\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=\delta(t-1)*t\varepsilon(t)=(t-1)\varepsilon(t-1)$$

(2)
$$f_1(t)*f_2(t)=[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]*[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]*\int_{0^-}^{t}[\varepsilon(\tau)-\varepsilon(\tau-2)]\mathrm{d}\tau$$
$$=[\delta(t)-\delta(t-1)]*[t\varepsilon(t)-(t-2)\varepsilon(t-2)]$$
$$=t\varepsilon(t)-(t-2)\varepsilon(t-2)-(t-1)\varepsilon(t-1)+(t-3)\varepsilon(t-3)$$

(3)
$$f_1(t)*f_2(t)=\sin(2\pi t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]*\varepsilon(t)$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t)*\int_{0^-}^{t}\sin(2\pi\tau)[\varepsilon(\tau)-\varepsilon(\tau-1)]\mathrm{d}\tau$$

$$=\delta(t)*\left\{\left[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi\tau)\right]\Bigg|_0^t\varepsilon(t)-\left[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi\tau)\right]\Bigg|_1^t\varepsilon(t-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}[1-\cos(2\pi t)]\varepsilon(t)-\frac{1}{2\pi}[1-\cos(2\pi t)]\varepsilon(t-1)$$

$$=\frac{1}{2\pi}[1-\cos(2\pi t)][\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$$

(4) $f_1(t)*f_2(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)*\varepsilon(t-1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t-1)*\int_{0^-}^{t}\mathrm{e}^{-\tau}\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau$

$$=\delta(t-1)*[\varepsilon(t)-\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)]=[1-\mathrm{e}^{-(t-1)}]\varepsilon(t-1)$$

【2-21】 已知某线性系统单位阶跃响应为$r_\varepsilon(t)=(2\mathrm{e}^{-2t}-1)\varepsilon(t)$，试利用卷积的性质求在下列波形信号(见图2-43)激励下的零状态响应。

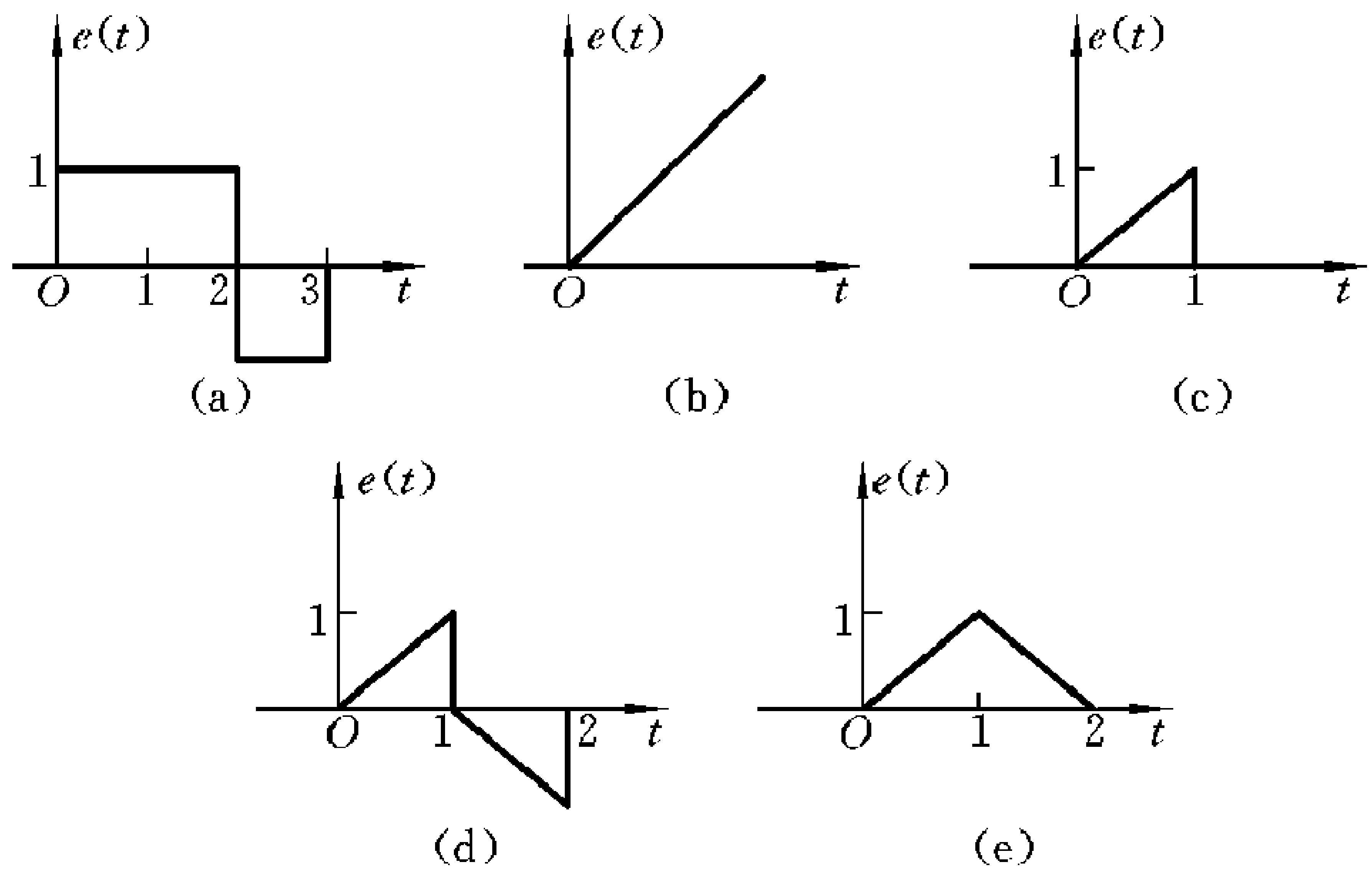


图2-43

解 (a) $r_{zs}=h(t)*e(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{d}\tau*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)=r_\varepsilon(t)*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)$

$$=(2\mathrm{e}^{-2t}-1)\varepsilon(t)*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-2)+\varepsilon(t-3)]$$

$$=(2\mathrm{e}^{-2t}-1)\varepsilon(t)*[\delta(t)-2\delta(t-2)+\delta(t-3)]$$

$$=(2\mathrm{e}^{-2t}-1)\varepsilon(t)-2[2\mathrm{e}^{-2(t-2)}-1]\varepsilon(t-2)$$

$$+[2\mathrm{e}^{-2(t-3)}-1]\varepsilon(t-3)$$

(b) $r_{zs}=r_\varepsilon(t)*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)=(2\mathrm{e}^{-2t}-1)\varepsilon(t)*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t\varepsilon(t)]$

$$=(2e^{-2t}-1)\varepsilon(t)*[\varepsilon(t)+t\delta(t)]$$

$$=(2e^{-2t}-1)\varepsilon(t)*\varepsilon(t)=\int_0^t(2e^{-2\tau}-1)d\tau*\delta(t)$$

$$=[-e^{-2\tau}-\tau]\Big|_0^t\varepsilon(t)=(1-t-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

(c) $r_{zs}=r_\varepsilon(t)*\dfrac{d}{dt}e(t)=(2e^{-2t}-1)\varepsilon(t)*\dfrac{d}{dt}\{t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]\}$

$$=(2e^{-2t}-1)\varepsilon(t)*[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)-\delta(t-1)]$$

$$=\left[\int_0^t(2e^{-2\tau}-1)d\tau\right]\varepsilon(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)-\delta'(t-1)]$$

$$=(1-t-e^{-2t})\varepsilon(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)-\delta'(t-1)]$$

$$=(1-t-e^{-2t})\varepsilon(t)-[1-(t-1)-e^{-2(t-1)}]\varepsilon(t-1)$$

$$-[2e^{-2(t-1)}-1]\varepsilon(t-1)$$

$$=(1-t-e^{-2t})\varepsilon(t)-[1-t+e^{-2(t-1)}]\varepsilon(t-1)$$

(d) $r_{zs}(t)=r_\varepsilon(t)*\dfrac{d}{dt}e(t)=(2e^{-2t}-1)\varepsilon(t)$

$$*\frac{d}{dt}\{t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]-(t-1)[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)]\}$$

$$=(2e^{-2t}-1)\varepsilon(t)*[\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-1)$$

$$+\varepsilon(t-2)-\delta(t-1)+\delta(t-2)]$$

$$=\left[\int_{0^-}^t(2e^{-2\tau}-1)d\tau\right]\varepsilon(t)*[\delta(t)-2\delta(t-1)$$

$$+\delta(t-2)]-[2e^{-2(t-1)}-1]\varepsilon(t-1)+[2e^{-2(t-2)}-1]\varepsilon(t-2)$$

$$=(1-t-e^{-2t})\varepsilon(t)-2[1-t+1-e^{-2(t-1)}]\varepsilon(t-1)$$

$$+[1-t+2-e^{-2(t-2)}]\varepsilon(t-2)$$

$$-[2e^{-2(t-1)}-1]\varepsilon(t-1)+[2e^{-2(t-2)}-1]\varepsilon(t-2)$$

$$=(1-t-e^{-2t})\varepsilon(t)-(3-2t)\varepsilon(t-1)+[2-t+e^{-2(t-2)}]\varepsilon(t-2)$$

(e) $e(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]-(t-2)[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)]$

$$e'(t)=\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)$$

$$e''(t)=\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)$$

$$\int_{0^-}^t r_\varepsilon(\tau)d\tau=\int_{0^-}^t(2e^{-2\tau}-1)d\tau=(1-t-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$r_{zs}(t)=e(t)*h(t)=e''(t)*\int_{0^-}^t r_\varepsilon(\tau)d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&=[\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)]*[(1-t-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)]\\
&=(1-t-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)-2[1-(t-1)-\mathrm{e}^{-2(t-1)}]\varepsilon(t-1)\\
&\quad+[1-(t-2)-\mathrm{e}^{-2(t-2)}]\varepsilon(t-2)\\
&=(1-t-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)-2[2-t-\mathrm{e}^{-2(t-1)}]\varepsilon(t-1)\\
&\quad+[3-t-\mathrm{e}^{-2(t-2)}]\varepsilon(t-2)
\end{aligned}
$$

【2-22】 如图2-44所示电路，其输入电压$e(t)$为单个矩形脉冲，求零状态响应电流$i_2(t)$。

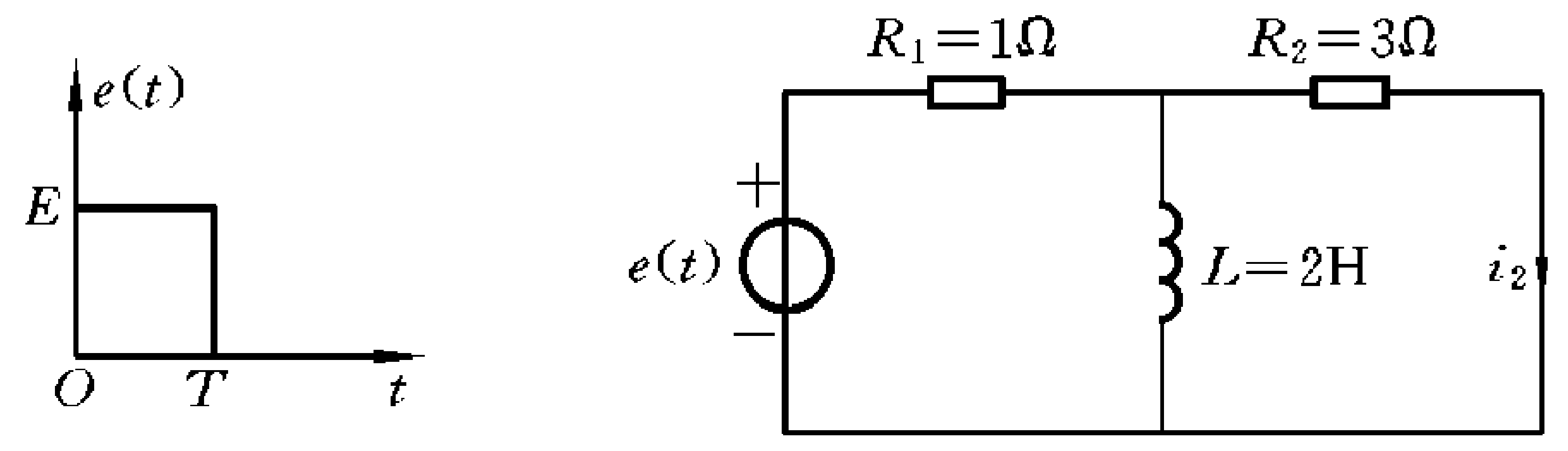


图2-44

解 因为L两端电压$u_{\mathrm{L}}=R_2i_2(t)=3i_2(t)$，所以电感电流为

$$i_{\mathrm{L}}(t)=\frac{1}{L}\int_0^t 3i_2(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{3}{2}\int_0^t i_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

输入电压

$$e(t)=R_1[i_2(t)+i_{\mathrm{L}}(t)]+u_{\mathrm{L}}(t)=4i_2(t)+\frac{3}{2}\int_0^t i_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

对上式进行一次求导，消去积分形式，得到$i_2(t)$与$e(t)$之间关系的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{3}{8}i_2(t)=\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)$$

所以
$$H(p)=\frac{\frac{1}{4}p}{p+\frac{3}{8}}=\frac{1}{4}-\frac{3}{32}\cdot\frac{1}{p+\frac{3}{8}}$$

冲激响应
$$h(t)=\frac{1}{4}\delta(t)-\frac{3}{32}\mathrm{e}^{-\frac{3}{8}t}\varepsilon(t)$$

又
$$e(t)=E[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]$$

所以

$$i_2(t)=h(t)*e(t)$$

$$=\left[\frac{1}{4}\delta(t)-\frac{3}{32}e^{-\frac{3}{8}t}\varepsilon(t)\right]*\{E[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]\}$$

$$=\left[\frac{1}{4}\delta(t)\right]*\{E[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]\}$$

$$-\left[\int_{0^-}^{t}\frac{3}{32}e^{-\frac{3}{8}\tau}d\tau\right]*\frac{d}{dt}\{E[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]\}$$

$$=\frac{E}{4}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]$$

$$-\left[\int_{0^-}^{t}\frac{3}{32}e^{-\frac{3}{8}\tau}d\tau\right]*\{E[\delta(t)-\delta(t-T)]\}$$

$$=\frac{E}{4}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]$$

$$-\left[\frac{1}{4}(1-e^{-\frac{3}{8}t})\varepsilon(t)\right]*\{E[\delta(t)-\delta(t-T)]\}$$

$$=\frac{E}{4}[e^{-\frac{3}{8}t}\varepsilon(t)-e^{-\frac{3}{8}(t-T)}\varepsilon(t-T)]$$

【2-23】 如图2-45所示电路，其输入电压为单个倒锯齿波，求零状态响应电压$u_L(t)$。

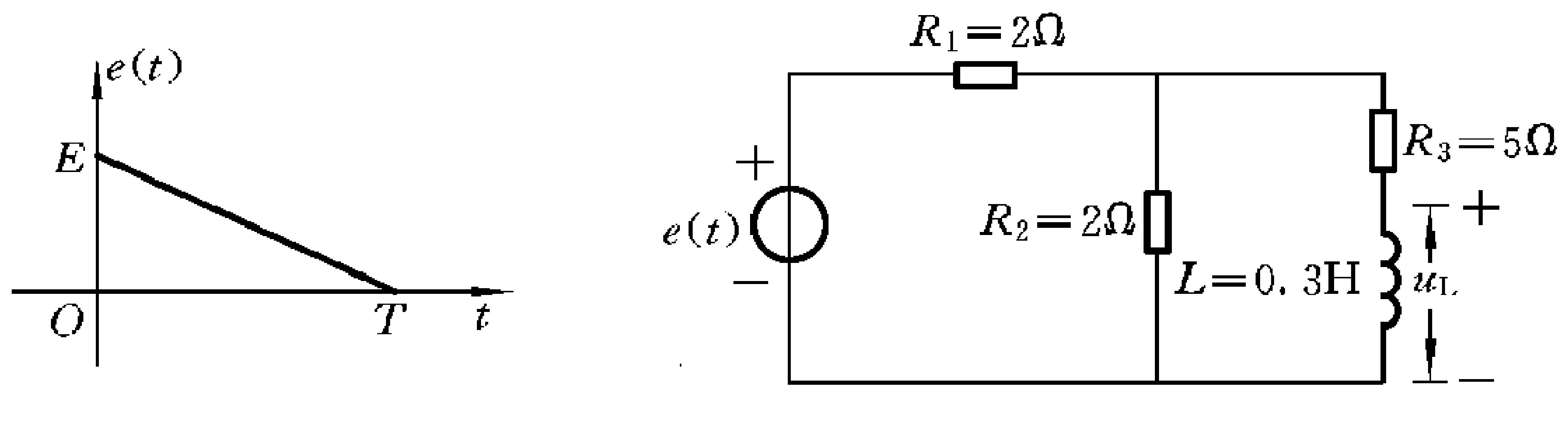


图2-45

解　利用支路电流欧姆关系列写$u_L(t)$与$e(t)$关系的微分方程。因为

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{0^-}^{t}u_L(\tau)d\tau$$

所以
$$\frac{di_L(t)}{dt}=\frac{1}{L}u_L(t)$$

于是
$$R_3i_L(t)+u_L(t)+\left[\frac{R_3i_L(t)+u_L(t)}{R_2}+i_L(t)\right]R_1=e(t)$$

对上式求导得

$$R_3\frac{di_L(t)}{dt}+\frac{du_L(t)}{dt}+\frac{R_1R_3}{R_2}\cdot\frac{di_L(t)}{dt}+R_1\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$+\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{\mathrm{d}u_L(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

将$\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{L}u_L(t)$及元件数值代入上式，有

$$\frac{\mathrm{d}u_L(t)}{\mathrm{d}t}+20u_L(t)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

所以
$$H(p)=\frac{\frac{1}{2}p}{p+20}=\frac{1}{2}-\frac{10}{p+20}$$

冲激响应
$$h(t)=\frac{1}{2}\delta(t)-10\mathrm{e}^{-20t}\varepsilon(t)$$

$$\begin{aligned}u_L(t)&=e(t)*h(t)\\&=\frac{E}{T}(T-t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]*\left[\frac{1}{2}\delta(t)-10\mathrm{e}^{-20t}\varepsilon(t)\right]\\&=\frac{E}{2T}(T-t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]+\int_{0^-}^{t}\frac{10E}{T}(\tau-T)\mathrm{e}^{-20(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\cdot\varepsilon(t)\\&\quad-\int_{T}^{t}\frac{10E}{T}\mathrm{e}^{-20(t-\tau)}(\tau-T)\mathrm{d}\tau\cdot\varepsilon(t-T)\\&=\frac{E}{2}\mathrm{e}^{-20t}\varepsilon(t)-\frac{E}{40T}(1-\mathrm{e}^{-20t})\varepsilon(t)+\frac{E}{40T}[1-\mathrm{e}^{-20(t-T)}]\varepsilon(t-T)\end{aligned}$$

【2-24】 图2-46 所示电路设定初始状态为零。

(1) 如电路参数 $R=2\ \Omega$，$C=5$ F 时，测得响应电压$u(t)=2\mathrm{e}^{-0.1t}\varepsilon(t)$ V，求激励电流$i(t)$；

(2) 如激励电流$i(t)=10\varepsilon(t)$ A 时，测得响应电压$u(t)=25(1-\mathrm{e}^{-0.1t})\cdot\varepsilon(t)$ V，求电路元件参数 R，C。

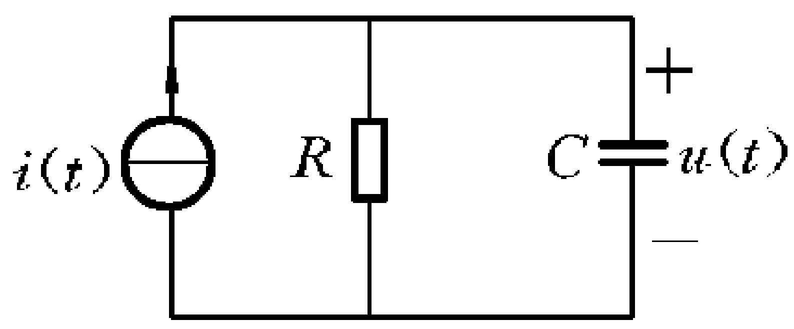


图 2-46

解　(1) $i_R(t)=\frac{u(t)}{R}=\mathrm{e}^{-0.1t}\varepsilon(t)$

$$\begin{aligned}i_C(t)&=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=5\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=5\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[2\mathrm{e}^{-0.1t}\varepsilon(t)]\\&=5\times[2\delta(t)-0.2\mathrm{e}^{-0.1t}\varepsilon(t)]=10\delta(t)-\mathrm{e}^{-0.1t}\varepsilon(t)\end{aligned}$$

所以 $i(t)=i_R(t)+i_C(t)=\mathrm{e}^{-0.1t}\varepsilon(t)+10\delta(t)-\mathrm{e}^{-0.1t}\varepsilon(t)=10\delta(t)$ A

(2) 电路输入电流$i(t)$与响应电压$u(t)$之间关系的微分方程为

$$C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{R}u(t)=i(t)$$

即
$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}u(t)=\frac{1}{C}i(t)$$

转移算子为
$$H(p)=\frac{\frac{1}{C}}{p+\frac{1}{RC}}$$

冲激响应
$$h(t)=\frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

所以
$$u(t)=i(t)*h(t)=\int_{0^-}^{t}h(\tau)i(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

即
$$25(1-\mathrm{e}^{-0.1t})\varepsilon(t)=\int_{0^-}^{t}\frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}\times 10\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

将上式两边对t求导，可以得到
$$2.5\mathrm{e}^{-0.1t}\varepsilon(t)=\frac{10}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

所以
$$\begin{cases}\dfrac{10}{C}=2.5\\[2mm]\dfrac{1}{RC}=0.1\end{cases}$$

$$C=4\ \mathrm{F},\quad R=2.5\ \Omega$$

【2-25】 在图 2-47 所示电路中，元件参数为 $R_1=R_2=1\ \Omega$，$C=1\ \mathrm{F}$，激励源分别为 $e(t)=\delta(t)\ \mathrm{V}$，$i(t)=\varepsilon(t)\ \mathrm{A}$，求电容C上的电压 $u_{\mathrm{C}}(t)$。

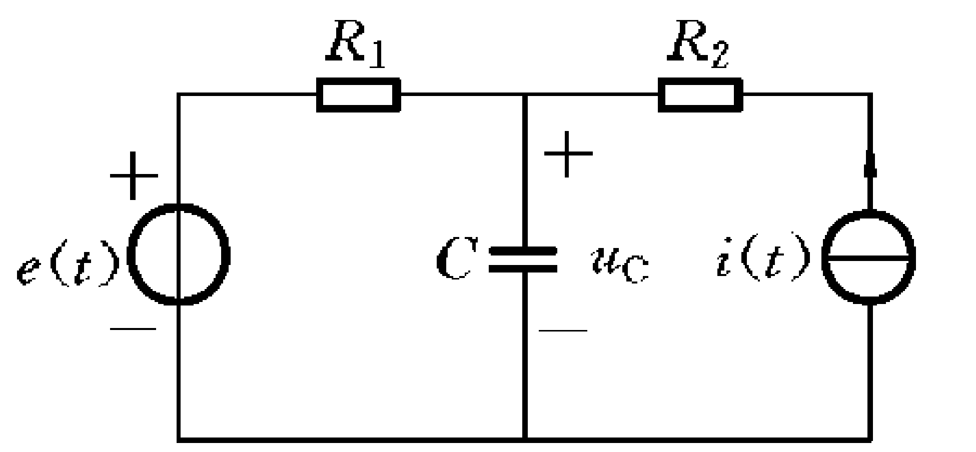


图 2-47

解　用叠加法求解。

电容C上的电压$u_{\mathrm{C}}(t)$与激励源$e(t)$及$i(t)$间关系的微分方程如下：
$$\begin{cases}R_1C\dfrac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t}+u_{\mathrm{C}}(t)=e(t)\\[2mm]C\dfrac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{R_1}u_{\mathrm{C}}(t)=i(t)\end{cases}$$

用算子表示为
$$\begin{cases}\left(p+\dfrac{1}{R_1C}\right)u_{\mathrm{C}}(t)=\dfrac{1}{R_1C}e(t)\\[2mm]\left(p+\dfrac{1}{R_1C}\right)u_{\mathrm{C}}(t)=\dfrac{1}{C}i(t)\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}(p+1)u_C(t)=e(t)\\(p+1)u_C(t)=i(t)\end{cases}$$
电路的特征根，对于$e(t)$激励为$\lambda_e=-1$，对于$i(t)$激励为$\lambda_i=-1$。于是在$e(t)$及$i(t)$激励位置的冲激响应为
$$h_e(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t),\quad h_i(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$
因此电容C上电压$u_C(t)$仅有零状态响应分量，且等于$e(t)$与$i(t)$共同作用产生的分量之和，即
$$\begin{aligned}u_C(t)&=e(t)*h_e(t)+i(t)*h_i(t)=\delta(t)*\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+\varepsilon(t)*\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)\\&=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+\delta(t)*\int_0^t\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+(1-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)=\varepsilon(t)\end{aligned}$$

【2-26】 已知图2-48所示的电路中，元件参数如下：$R_1=1\ \Omega$，$R_2=2\ \Omega$，$L_1=1$ H，$L_2=2$ H，$M=\dfrac{1}{2}$ H，$E=3$ V，设$t=0$时开关S断开，求初级电压$u_1(t)$及次级电流$i_2(t)$。

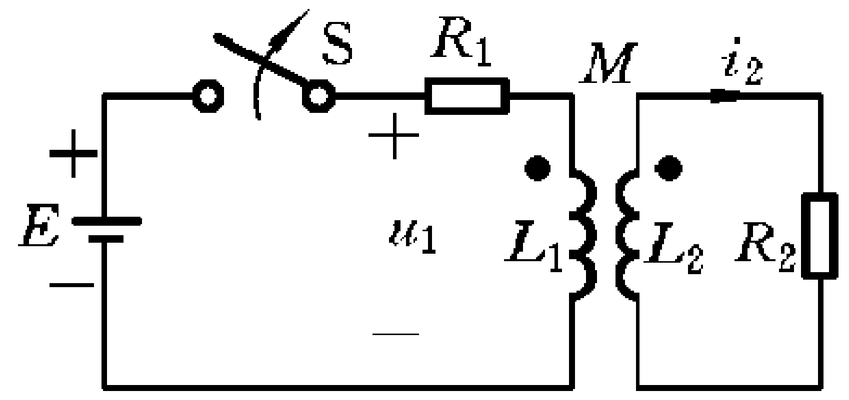


图2-48

解　开关S断开前，电路已达稳态，可以求得初次级电流在$t=0^-$时的起始值，即
$$i_1(0^-)=i_{L_1}(0^-)=\frac{E}{R_1}=3\ \mathrm{A}$$
$$i_2(0^-)=i_{L_2}(0^-)=0$$
S断开时，设$t=0$，次级电路的回路电压方程为
$$-M\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}+L_2\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}+R_2i_2(t)=0$$
因为
$$i_1(t)=3\varepsilon(-t)$$
所以
$$\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}=-3\delta(t)$$
因此次级回路电压方程式经移项得
$$L_2\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}+R_2i_2(t)=M\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}$$
代入元件值，写成算子形式：
$$(p+1)i_2(t)=-\frac{3}{4}\delta(t)$$
所以
$$i_2(t)=h_{i_2}(t)=-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

而初级电压

$$u_1(t)=L_1\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}-M\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$=-3\delta(t)-\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)-\frac{3}{4}\delta(t)\right]$$
$$=-\frac{21}{8}\delta(t)-\frac{3}{8}\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

【2-27】 有一线性系统,当激励为$\varepsilon(t)$时全响应为$r_1(t)=2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$,当激励为$\delta(t)$时全响应为$r_2(t)=\delta(t)$,求:

(1) 系统的零输入响应;

(2) 求当激励为$\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$时的全响应。

解 (1) 设系统的零输入响应为$r_{zi}(t)$,由题意得

$$\begin{cases}r_{zi}(t)+\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau=r_1(t)=2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t) & ①\\ r_{zi}(t)+h(t)=r_2(t)=\delta(t) & ②\end{cases}$$

式①－式②,得

$$\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau-h(t)=2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)-\delta(t) \qquad ③$$

将式③整理,得

$$h(t)-\frac{\mathrm{d}[h(t)]}{\mathrm{d}t}=-2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+2\delta(t)-\delta'(t) \qquad ④$$

根据等式两边奇异项匹配原则,可设$h(t)=k_1\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+k_2\delta(t)$,并代入式④得

$$k_1\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+k_2\delta(t)+k_1\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)-k_1\delta(t)-k_2\delta'(t)$$
$$=-2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+2\delta(t)-\delta'(t)$$

由等式两边奇异项导数相等,可得

$$\begin{cases}2k_1=-2\\ k_2-k_1=2\\ k_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=-1\\ k_2=1\end{cases}$$

所以

$$h(t)=-\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+\delta(t)$$

将上式代入式②得

$$r_{zi}(t)=r_2(t)-h(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

(2) 设激励为$\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$时的全响应为$r_3(t)$,则

$$r_3(t)=r_{zi}(t)+h(t)*\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)*[-\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+\delta(t)]$$
$$=(2-t)\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

【2-28】 设系统方程为$r''(t)+5r'(t)+6r(t)=e(t)$,当$e(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$时,

全响应为 $c\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$。求：

(1) 系统的初始状态 $r(0)$,$r'(0)$;

(2) 系数 c 的大小。

解　由题意可得系统特征方程为　$\lambda^2+5\lambda+6=0$

则系统特征根为　$\lambda_1=-2,\lambda_2=-3$

故系统的零输入响应为　$r_{zi}(t)=(c_1\mathrm{e}^{-2t}+c_2\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$

若 $e(t)=\delta(t)$,则有

$$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta(t)$$

$$h(t)=(k_1\mathrm{e}^{-2t}+k_2\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

将 $h(0)=0,h'(0)=1$ 代入上式,可得

$$\begin{cases}k_1+k_2=0\\-2k_1-3k_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=1\\k_2=-1\end{cases}$$

所以　$$h(t)=(\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

又由题意得　$r_{zi}(t)+h(t)*\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)=c\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$

$$(c_1\mathrm{e}^{-2t}+c_2\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)+(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

$$=c\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

由上式两边奇异项导数相等,得

$$\begin{cases}c_1-1=0\\c_2+\dfrac{1}{2}=0\\c=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=1\\c_2=-\dfrac{1}{2}\\c=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

则　$$r_{zi}(t)=\left(\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

有　$$\begin{cases}r(0)=\dfrac{1}{2}\\r'(0)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

故　$$r(0)=\frac{1}{2},\quad r'(0)=-\frac{1}{2},\quad c=\frac{1}{2}$$

第三章　连续信号的正交分解

3-1　基 本 要 求

本章要求掌握周期信号的频谱分析方法——傅里叶级数；要求理解非周期信号频谱密度函数的概念、周期信号与非周期信号的频谱的特点以及信号时域特性与频域特性之间的关系；能利用傅里叶变换的定义、性质，求出信号的频谱并绘制频谱图；重点掌握典型信号的频谱密度函数，灵活运用傅里叶变换的性质对信号进行正反变换。

3-2　重点、难点学习指导

1. 正交函数

(1) 两函数正交条件

① 两实函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间 (t_1,t_2) 内正交的条件为

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t = 0$$

② 两复函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间 (t_1,t_2) 内正交的条件为

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2^*(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} f_1^*(t)f_2(t)\mathrm{d}t = 0$$

式中，$f_1^*(t)$，$f_2^*(t)$ 分别是 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 的复共轭函数。

(2) 完备正交函数集

在区间 (t_1,t_2) 内，用正交函数集 $g_1(t)$，$g_2(t)$，…，$g_n(t)$ 近似表示函数 $f(t)$，有

$$f(t) \approx \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)$$

其方均误差为

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t) - \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)\right]^2 \mathrm{d}t$$

若 $n\to\infty$,$\overline{\varepsilon^2(t)}\to 0$,即

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\varepsilon^2(t)} = 0$$

则称此函数集为完备正交函数集。

2. 周期信号的傅里叶级数

任何周期为 T 的周期信号 $f(t)$,若满足狄里赫莱条件,则可展为傅里叶级数。

(1) 三角形式的傅里叶级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(n\Omega t) + b_n\sin(n\Omega t)] \qquad ①$$

式中,$\Omega = \dfrac{2\pi}{T}$;a_0, a_n, b_n 为相关系数,

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\Omega t)\mathrm{d}t$$

式①亦可写成

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

式中　$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$,　$\varphi_n = -\arctan\dfrac{a_n}{b_n}$

$$a_n = A_n\cos\varphi_n, \quad b_n = A_n\sin\varphi_n$$

A_n, a_n 为频率的偶函数;φ_n, b_n 为频率的奇函数。

(2) 指数形式的傅里叶级数

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\dot{A}_n e^{\mathrm{j}n\Omega t}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

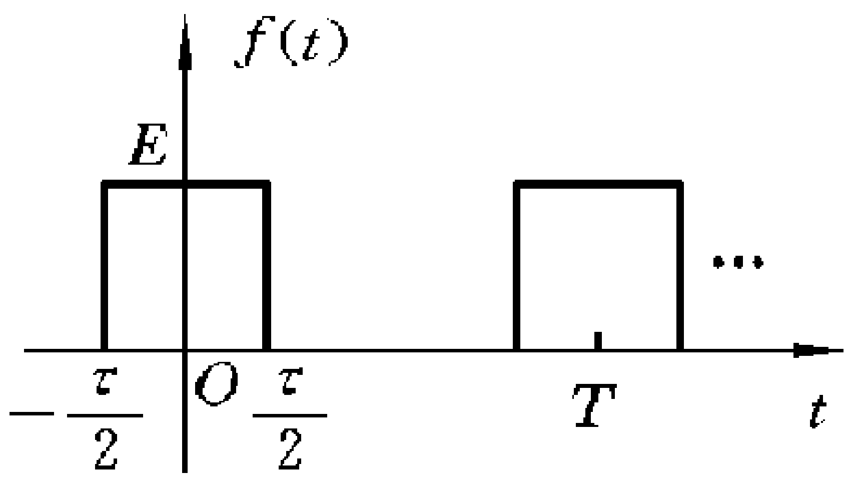
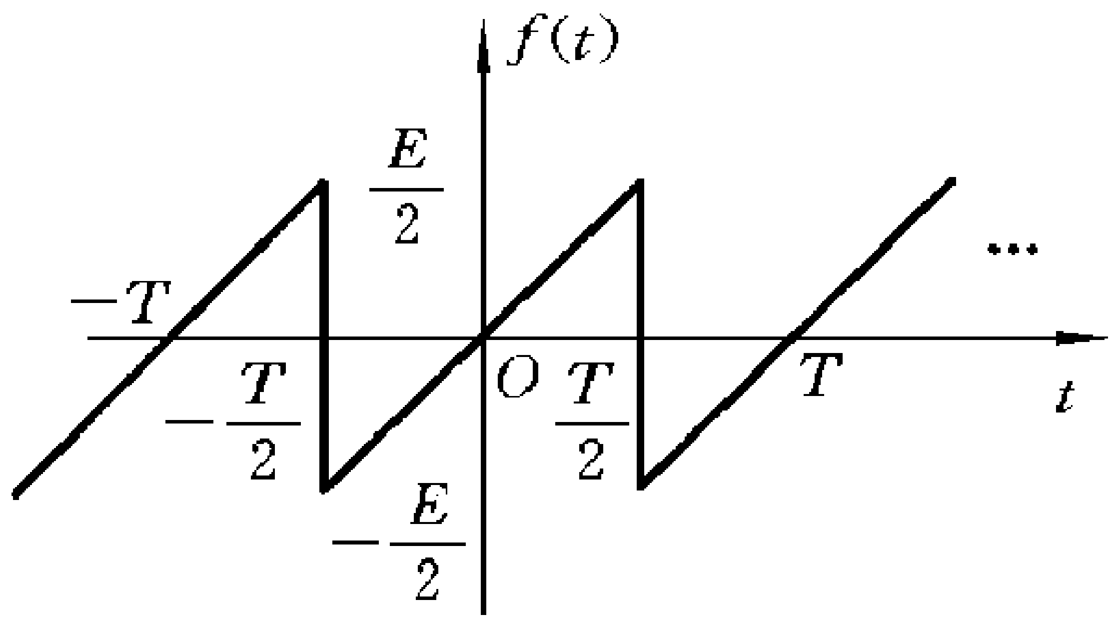
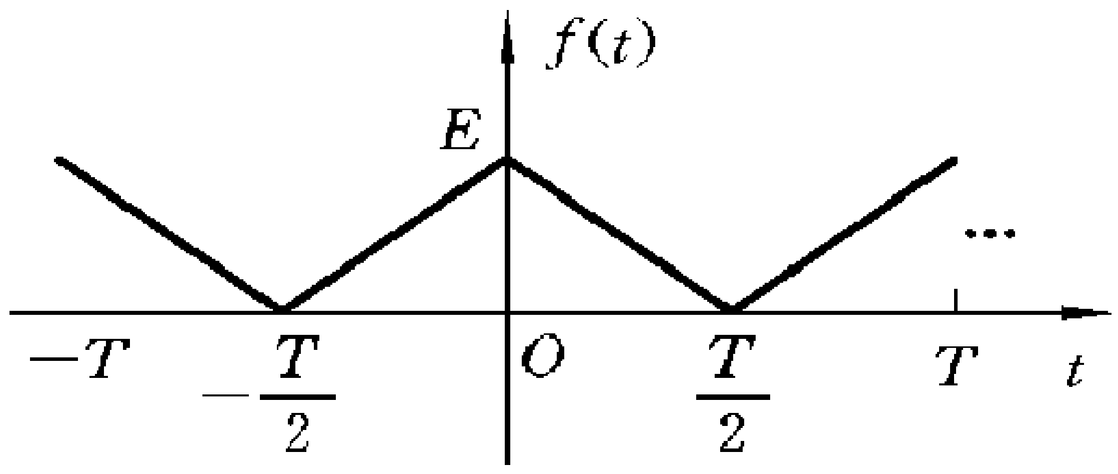
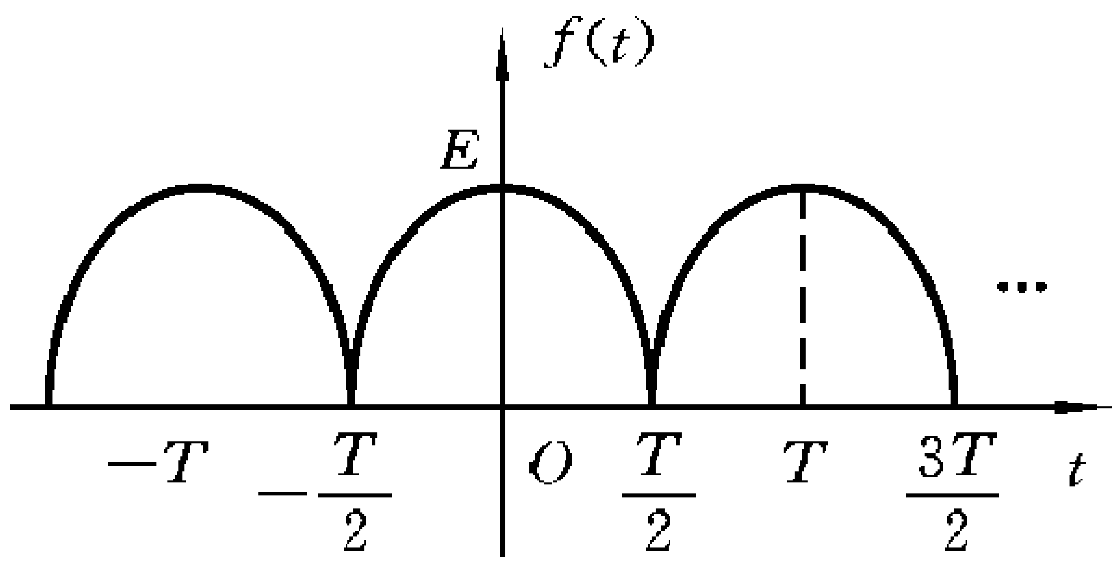
式中　$\dot{A}_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-\mathrm{j}n\Omega t}\mathrm{d}t = a_n - \mathrm{j}b_n$

与三角形式的傅里叶级数比较,其相关系数存在如下关系:

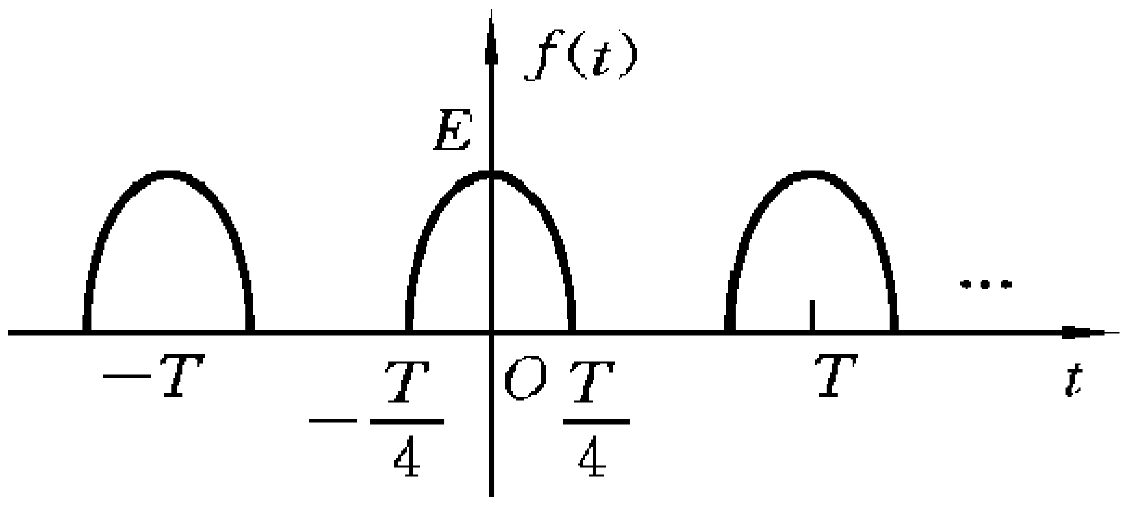
$$\dot{A}=\begin{cases}a_n+\mathrm{j}b_n, & n<0\\ a_0, & n=0\\ a_n-\mathrm{j}b_n, & n>0\end{cases}$$

为使用方便,将几种常用的周期信号的傅里叶级数列于表 3-1 中。

表 3-1　常用周期信号的傅里叶级数

信号波形	傅里叶级数
	$\frac{E\tau}{T}\left[1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)}{\frac{n\Omega\tau}{2}}\cos(n\Omega t)\right]$
	$\frac{E}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin(n\Omega t)$
	$\frac{E}{2}+\frac{4E}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ $\cdot\sin^2\cdot\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\Omega t)$
	$\frac{2E}{\pi}+\frac{4E}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}$ $\cdot\frac{1}{(4n^2-1)}\cos(2n\Omega t)$

续表

信号波形	傅里叶级数
	$\frac{E}{\pi}-\frac{2E}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n^2-1)}$ $\cdot\cos\cdot\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\Omega t)$

3. 非周期信号的傅里叶变换

傅里叶变换定义式：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

由于频谱密度函数$F(\mathrm{j}\omega)$为复函数，故可表示为

$$F(\mathrm{j}\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

式中，$|F(\mathrm{j}\omega)|$是ω的偶函数；$\varphi(\omega)$是ω的奇函数。

4. 周期信号的傅里叶变换

周期信号$f(t)$可表示为指数形式的傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\dot{A}_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$$

式中，$\Omega=\frac{2\pi}{T}$；T为信号$f(t)$的周期。

$f(t)$的傅里叶变换为

$$f(t)\Leftrightarrow\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dot{A}_n\delta(\omega-n\Omega)$$

式中

$$\dot{A}_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\mathrm{d}t$$

或

$$\dot{A}_n=\frac{2}{T}F_0(\mathrm{j}\omega)\big|_{\omega=n\Omega}$$

式中，$F_0(\mathrm{j}\omega)$为第一个周期信号的傅里叶变换。

为使用方便,将一些常用函数及其频谱函数列入表3-2中。

表3-2　一些常用函数的频谱函数

序号	时间函数 $f(t)$	频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$
3	$\mathrm{sgn}t=\varepsilon(t)-\varepsilon(-t)$	$\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega}$
4	1	$2\pi\delta(\omega)$
5	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\dfrac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$
6	$\mathrm{e}^{-\alpha\|t\|}\varepsilon(t)$	$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$
7	$t\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\dfrac{1}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2}$
8	$\cos(\omega_c t)$	$\pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]$
9	$\sin(\omega_c t)$	$\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)]$
10	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_c t)\varepsilon(t)$	$\dfrac{\omega_c}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_c^2}$
11	$\cos(\omega_c t)\varepsilon(t)$	$\dfrac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]+\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_c^2-\omega^2}$
12	$\sin(\omega_c t)\varepsilon(t)$	$\dfrac{\pi}{2\mathrm{j}}[\delta(\omega-\omega_c)-\delta(\omega+\omega_c)]+\dfrac{\omega_c}{\omega_c^2-\omega^2}$
13	$G_\tau(t)=\varepsilon\left(t+\dfrac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right)$	$\tau\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$
14	$\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\Omega t}{2}\right)$	$G_\Omega(\omega)=\dfrac{2\pi}{\Omega}\left[\varepsilon\left(\omega+\dfrac{\Omega}{2}\right)-\varepsilon\left(\omega-\dfrac{\Omega}{2}\right)\right]$
15	$\delta_T(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$\Omega\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\Omega),\Omega=\dfrac{2\pi}{T}$

5. 傅里叶变换的基本性质

傅里叶变换的性质揭示了信号 $f(t)$ 的时域特性与频域特性之间的关系，其基本性质列于表 3-3 中。

表 3-3　傅里叶变换的性质

性质	时域 $f(t)$	频域 $F(\mathrm{j}\omega)$
1. 线性	$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} a_i F_i(\mathrm{j}\omega)$
2. 时移	$f(t-t_0)$	$F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$
3. 频移	$f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$	$F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]$
4. 尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$
	$f(at-b)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{b}{a}}$
5. 对称性	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
6. 时域微分	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)$
7. 时域积分	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\mathrm{j}\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$
8. 复频域微分	$(-\mathrm{j}t)^n f(t)$	$\frac{\mathrm{d}^n F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$
9. 时域卷积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\mathrm{j}\omega)\cdot F_2(\mathrm{j}\omega)$
10. 频域卷积	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega) * F_2(\mathrm{j}\omega)$

3-3　习 题 详 解

【3-1】　已知在时间区间$(0,2\pi)$上的方波信号为

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<\pi \\ -1, & \pi<t<2\pi\end{cases}$$

(1) 如用在同一时间区间上的正弦信号来近似表示此方波信号，要求方均误差最小，写出此正弦信号的表达式；

(2) 证明此信号与同一时间区间上的余弦信号$\cos(nt)$(n为整数)正交。

解　(1) 设函数$f(t)$在区间$(0,2\pi)$内近似为$f(t)=c_{12}\sin t$，要确定使此近似函数中的方均误差为最小的最佳值c_{12}，则

$$c_{12}=\frac{\int_0^{2\pi}f(t)\sin t\mathrm{d}t}{\int_0^{2\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t}=\frac{\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{2\pi}\sin t\mathrm{d}t}{\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{-\cos t\Big|_0^{\pi}+\cos t\Big|_{\pi}^{2\pi}}{\frac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi}-\frac{\sin(2t)}{4}\Big|_0^{2\pi}}=\frac{+2+2}{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

所以当$f(t)\approx\frac{4}{\pi}\sin t$时，方均误差最小。

(2) $$\int_0^{2\pi}f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}\mathrm{d}(nt)-\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\cos(nt)}{n}\mathrm{d}(nt)$$

$$=\frac{1}{n}\sin(nt)\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\sin(nt)\Big|_{\pi}^{2\pi}=0$$

所以此信号与同一时间区间上的余弦信号$\cos(nt)$(n为整数)正交。

【3-2】　已知$f_1(t)=\cos t+\sin t$，$f_2(t)=\cos t$。求$f_2(t)$在$f_1(t)$上的分量系数c_{12}及此二信号间的相关系数ρ_{12}。

解　$$c_{12}=\frac{\int_0^{2\pi}(\cos t+\sin t)\cos t\mathrm{d}t}{\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t}=\frac{\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}\frac{\sin(2t)}{2}\mathrm{d}t}{\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t}$$

$$=1+\frac{\int_0^{2\pi}\frac{\sin(2t)}{2}\mathrm{d}t}{\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t}=1+\frac{-\cos(2t)\Big|_0^{2\pi}}{2t\Big|_0^{2\pi}+\sin(2t)\Big|_0^{2\pi}}=1$$

$$\rho_{12}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t}{\left[\int_{t_1}^{t_2}f_1^2(t)\mathrm{d}t\int_{t_1}^{t_2}f_2^2(t)\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{\int_0^{2\pi}(\cos t+\sin t)\cos t\mathrm{d}t}{\left[\int_0^{2\pi}(\cos t+\sin t)^2\mathrm{d}t\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\pi}{\left[\int_0^{2\pi}[1+\sin(2t)]\mathrm{d}t\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\pi}{\left[t\Big|_0^{2\pi}-\frac{\cos(2t)}{2}\Big|_0^{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi}+\frac{\sin(2t)}{4}\Big|_0^{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\pi}{(2\pi^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}\,\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

【3-3】 证明两相互正交的信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 同时作用于单位电阻上产生的功率，等于每一信号单独作用时产生的功率之和。以 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 分别为下列两组函数来验证此结论。

(1) $f_1(t)=\cos(\omega t)$，　$f_2(t)=\sin(\omega t)$

(2) $f_1(t)=\cos(\omega t)$，　$f_2(t)=\sin(\omega t+30°)$

证明　(1) $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 相互正交，且 $P=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)\mathrm{d}t$，所以

$$P_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(\omega t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(\omega t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

$$P_2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(\omega t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(\omega t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

而　$$P=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f_1(t)+f_2(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(\omega t)+\sin(\omega t)]^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}[\cos(\omega t)+\sin(\omega t)]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}[1+\sin(2\omega t)]\mathrm{d}t$$

$$=1+0=1=P_1+P_2$$

所以结论成立。

(2) $f_1(t)$与$f_2(t)$并不是相互正交的信号。

$$P_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(\omega t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

$$P_2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(\omega t+30°)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\sin^2(\omega t+30°)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}[\sin(\omega t)\cos30°+\cos(\omega t)\sin30°]^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\omega t)+\frac{1}{2}\cos(\omega t)\right]^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left[\frac{3}{4}\sin^2(\omega t)+\frac{1}{4}\cos^2(\omega t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\sin^2(\omega t)\mathrm{d}t+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin(2\omega t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0+0=\frac{1}{2}$$

而　$$P=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f_1(t)+f_2(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}[\cos(\omega t)+\sin(\omega t+30°)]^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}[\sin(90°-\omega t)+\sin(\omega t+30°)]^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(2\sin\frac{90°-\omega t+\omega t+30°}{2}\cos\frac{90°-\omega t-\omega t-30°}{2}\right)^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{2\pi}[\sin60°\cos(30°-\omega t)]^2\mathrm{d}t=\frac{3\times2}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}\cos^2(30°-\omega t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}\neq P_1+P_2$$

即不满足题意，所以题目结论成立。

【3-4】 将图3-1所示的三角形信号在时间区间$(-\pi,\pi)$上展开为有限项

的三角傅里叶级数，使其与实际信号间的方均误差小于原信号$f(t)$总能量的1%。写出此有限项三角傅里叶级数的表达式。

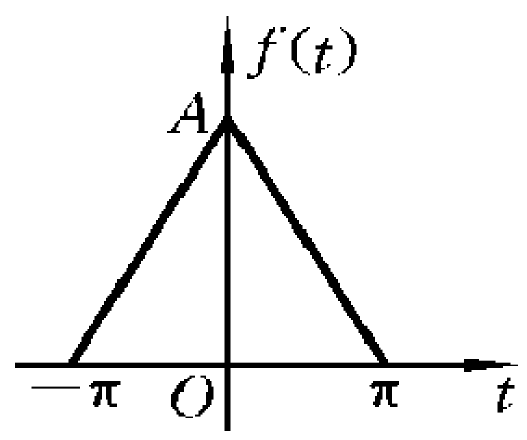


图 3-1

解 图3-1所示三角形信号的数学表达式为

$$f(t)=\begin{cases}A\left(1+\dfrac{t}{\pi}\right), & -\pi\leqslant t\leqslant 0\\ A\left(1-\dfrac{t}{\pi}\right), & 0\leqslant t\leqslant \pi\end{cases}$$

因为$f(t)$在$(-\pi,\pi)$内是偶函数，所以其傅里叶系数$b_n=0$，只有a_0和a_n。又因为$T=2\pi$，$\Omega=\dfrac{2\pi}{T}=1$，故

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}A\left(1+\frac{t}{\pi}\right)\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}A\left(1-\frac{t}{\pi}\right)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left[A\pi+\frac{A}{\pi}\frac{t^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{0}+A\pi-\frac{A}{\pi}\frac{t^2}{2}\bigg|_{0}^{\pi}\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left[2A\pi+\frac{A\pi^2}{-2\pi}-\frac{A\pi^2}{2\pi}\right]=\frac{1}{\pi}[2A\pi-A\pi]=A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}A\left(1+\frac{t}{\pi}\right)\cos(nt)\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}A\left(1-\frac{t}{\pi}\right)\cos(nt)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{A}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n^2\pi}\bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos(nt)}{n^2\pi}\bigg|_{0}^{\pi}\right]=\begin{cases}\dfrac{4A}{(n\pi)^2}, & n\text{ 为奇数}\\ 0, & n\text{ 为偶数}\end{cases}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}f(t)=A\bigg[\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\bigg(\cos t+\frac{1}{3^2}\cos(3t)+\frac{1}{5^2}\cos(5t)\\+\cdots+\frac{1}{n^2}\cos(nt)+\cdots\bigg)\bigg],\quad n=1,3,5,\cdots\end{aligned}$$

而信号的总能量

$$E=\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{0}A^2\left(1+\frac{t}{\pi}\right)^2\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}A^2\left(1-\frac{t}{\pi}\right)^2\mathrm{d}t=\frac{2A^2\pi}{3}$$

若以有限项傅里叶级数来近似表示$f(t)$，则其方均误差为

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{T}[\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t - \sum_{r=1}^{n} c_r^2 k_r]$$

若取级数直流项 $a_0=A$ 和 $n=1$ 两项来近似表示,则方均误差为

$$\overline{\varepsilon_1^2(t)} = \frac{1}{T}\left[\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t - c_1^2 k_1 - c_2^2 k_2\right]$$

由上述计算得

$$\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{2\pi A^2}{3}, \quad c_1 = \frac{a_0}{2} = \frac{A}{2}, \quad c_2 = \frac{4A}{\pi^2}$$

而
$$k_1 = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = 2\pi, \quad k_2 = \int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t = \pi$$

所以
$$\frac{\overline{\varepsilon_1^2(t)}}{E} = \frac{1}{E}\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\pi A^2}{3} - \left(\frac{A}{2}\right)^2 2\pi - \left(\frac{4A}{\pi^2}\right)^2 \pi\right]\right\}$$

$$= \frac{\dfrac{A^2}{12} - \dfrac{8A^2}{\pi^4}}{\dfrac{2\pi A^2}{3}} = 0.0575\% < 1\%$$

若仅取直流项 $a_0=A$ 来近似表示,则方均误差为

$$\overline{\varepsilon_0^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi A^2}{3} - \frac{A^2}{4}2\pi\right) = \frac{A^2}{12}$$

与总能量之比为

$$\frac{\overline{\varepsilon_0^2(t)}}{E} = \frac{\dfrac{A^2}{12}}{\dfrac{2\pi}{3}A^2} = \frac{1}{8\pi} = 3.98\% > 1\%$$

由此可知,使方均误差 $\overline{\varepsilon_0^2(t)}$ 小于 $f(t)$ 总能量的 1%,近似函数至少取两项:直流加基波,即

$$f(t) = A\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos t\right)$$

【3-5】 求图 3-2(a)所示的周期性半波整流余弦脉冲信号及图 3-2(b)所示的周期性半波整流正弦脉冲信号的傅里叶级数展开式。绘出频谱图并作比较,说明其差别所在。

解 (a) 由图 3-2(a)所示波形可得一周期内信号的表达式(由于 $T=2\pi$,所以 $\Omega=1$):

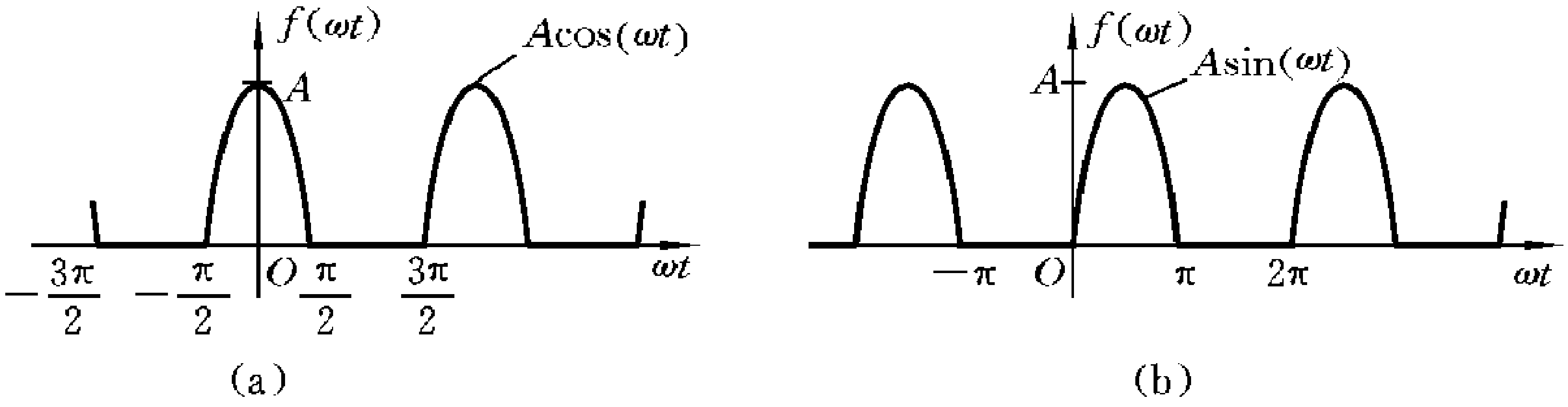


图 3-2

$$f_a(\omega t)=\begin{cases}A\cos(\omega t), & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\omega t\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\[2ex] 0, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant\omega t\leqslant\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

由图知函数为偶函数，故 $b_n=0$，只有 a_0，a_n。由题意，此题中 ωt 为变量。

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}A\cos(\omega t)\mathrm{d}(\omega t)=\frac{2A}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\omega t)\mathrm{d}(\omega t)$$

$$=\frac{2A}{\pi}\cdot\sin(\omega t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2A}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}A\cos(\omega t)\cdot\cos(n\Omega\omega t)\mathrm{d}(\omega t)$$

$$=\frac{2A}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\{\cos[(n+1)\omega t]+\cos[(n-1)\omega t]\}\mathrm{d}\omega t$$

$$=\frac{A}{\pi}\left\{\frac{1}{n+1}\sin[(n+1)\omega t]+\frac{1}{n-1}\sin[(n-1)\omega t]\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{A}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{2}+\frac{1}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{A}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n-1}\cos\frac{n\pi}{2}\right)=-\frac{2A}{(n^2-1)\pi}\cos\frac{n\pi}{2}$$

当 $n=1$ 时，利用洛必达法则有

$$a_1=\lim_{n\to1}\frac{\left[-2A\cos\dfrac{n\pi}{2}\right]'}{[(n^2-1)\pi]'}=\lim_{n\to1}\frac{2A\cdot\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{n\pi}{2}}{2n\pi}=\frac{A}{2}$$

所以 $$a_n=\begin{cases}\dfrac{A}{2}, & n=1\\ (-1)^{k+1}\dfrac{2A}{(4k^2-1)\pi}, & n=2k \qquad (k=1,2,3,\cdots)\\ 0, & n=2k+1\end{cases}$$

故 $$f_a(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(n\Omega\omega t)$$

$$=\frac{A}{\pi}+\frac{A}{2}\cos(\omega t)+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{4k^2-1}\cos(2k\omega t)$$

(b) 方法一：由图 3-2(b)可知，

$$f_b(\omega t)=\begin{cases}A\sin(\omega t), & 0\leqslant\omega t\leqslant\pi\\ 0, & \pi\leqslant\omega t\leqslant 2\pi\end{cases}$$

与图 3-2(a)比较，仅仅相位超前$\dfrac{\pi}{2}$。因此在上述(a)的答案中，除直流项完全相同外，将各谐波分量加入超前的相位差$\dfrac{\pi}{2}$即可。即

$$f_b(\omega t)=\frac{A}{\pi}+\frac{A}{2}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}$$

$$\cdot\frac{1}{4k^2-1}\cos\left[2k\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{A}{\pi}+\frac{A}{2}\sin(\omega t)+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{4k^2-1}\cos(2k\omega t+k\pi)$$

$$=\frac{A}{\pi}+\frac{A}{2}\sin(\omega t)+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-4k^2}\cos(2k\omega t)$$

方法二(用定义式计算)：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}A\sin(\omega t)\mathrm{d}(\omega t)=\frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(\omega t)\mathrm{d}(\omega t)=\frac{2A}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}A\sin(\omega t)\cdot\cos(n\Omega\omega t)\mathrm{d}(\omega t)$$

$$=\frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\{\sin[(n+1)\omega t]+\sin[(1-n)\omega t]\}\mathrm{d}(\omega t)$$

$$=\frac{A}{2\pi}\left\{-\frac{1}{n+1}\cos[(n+1)\omega t]-\frac{1}{1-n}\cos[(1-n)\omega t]\right\}\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{A}{2\pi}\left\{-\frac{1}{n+1}\cos[(n+1)\pi]-\frac{1}{1-n}\cos[(1-n)\pi]+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{1-n}\right\}$$

$$=\frac{A}{2\pi}\left[\frac{1}{1-n^2}+\frac{1}{1+n}\cos(n\pi)+\frac{1}{1-n}\cos(n\pi)\right]$$

$$=\frac{A}{(1-n^2)\pi}[1+\cos(n\pi)]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2A}{(1-4k^2)\pi}, & n=2k\\ 0, & n=2k+1\end{cases}\quad(k=1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}A\sin(\omega t)\cdot\sin(n\Omega\omega t)\mathrm{d}(\omega t)$$

$$=-\frac{A}{2\pi}\int_0^{\pi}\{\cos[(n+1)\omega t]-\cos[(1-n)\omega t]\}\mathrm{d}(\omega t)$$

$$=-\frac{A}{2\pi}\left\{\frac{1}{n+1}\sin[(n+1)\omega t]+\frac{1}{1-n}\sin[(1-n)\omega t]\right\}\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{(1-n^2)\pi}\sin(n\pi)$$

当$n=1$时，上式为不定型；当$n\neq1$时，$b_n=0$。故利用洛必达法则确定b_1：

$$b_1=\lim_{n\to1}\frac{[A\sin(n\pi)]'}{[(1-n^2)\pi]'}=\lim_{n\to1}\frac{A\pi\cdot\cos(n\pi)}{-2n\pi}=\frac{A}{2}$$

所以

$$f_{\mathrm{b}}(\omega t)=\frac{A}{\pi}+\frac{A}{2}\sin(\omega t)+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-4k^2}\cos(2k\omega t)$$

$f_{\mathrm{a}}(\omega t)$与$f_{\mathrm{b}}(\omega t)$的频谱图分别为图3-3(a)、(b)所示。

比较(a)、(b)的结果可知，在$A\cos(\omega t)$与$A\sin(\omega t)$的脉冲信号展开式中，仅谐波项系数的符号有所不同，而谐波项数与谐波幅度均相同。由此可得出如下结论：如果信号的波形不变，仅仅沿坐标轴产生位移，也就是说仅有时延差别，则其傅里叶展开式中，谐波项与各次谐波幅度不受影响，仅仅引起各次谐波的相位移。这一结论早在正弦稳态交流信号分析中已经得知，时间差即等效为相位移。这里也再次表明，我们开始所采取的由$A\cos(\omega t)$的展开式经延时得到$A\sin(\omega t)$展开式的正确性。

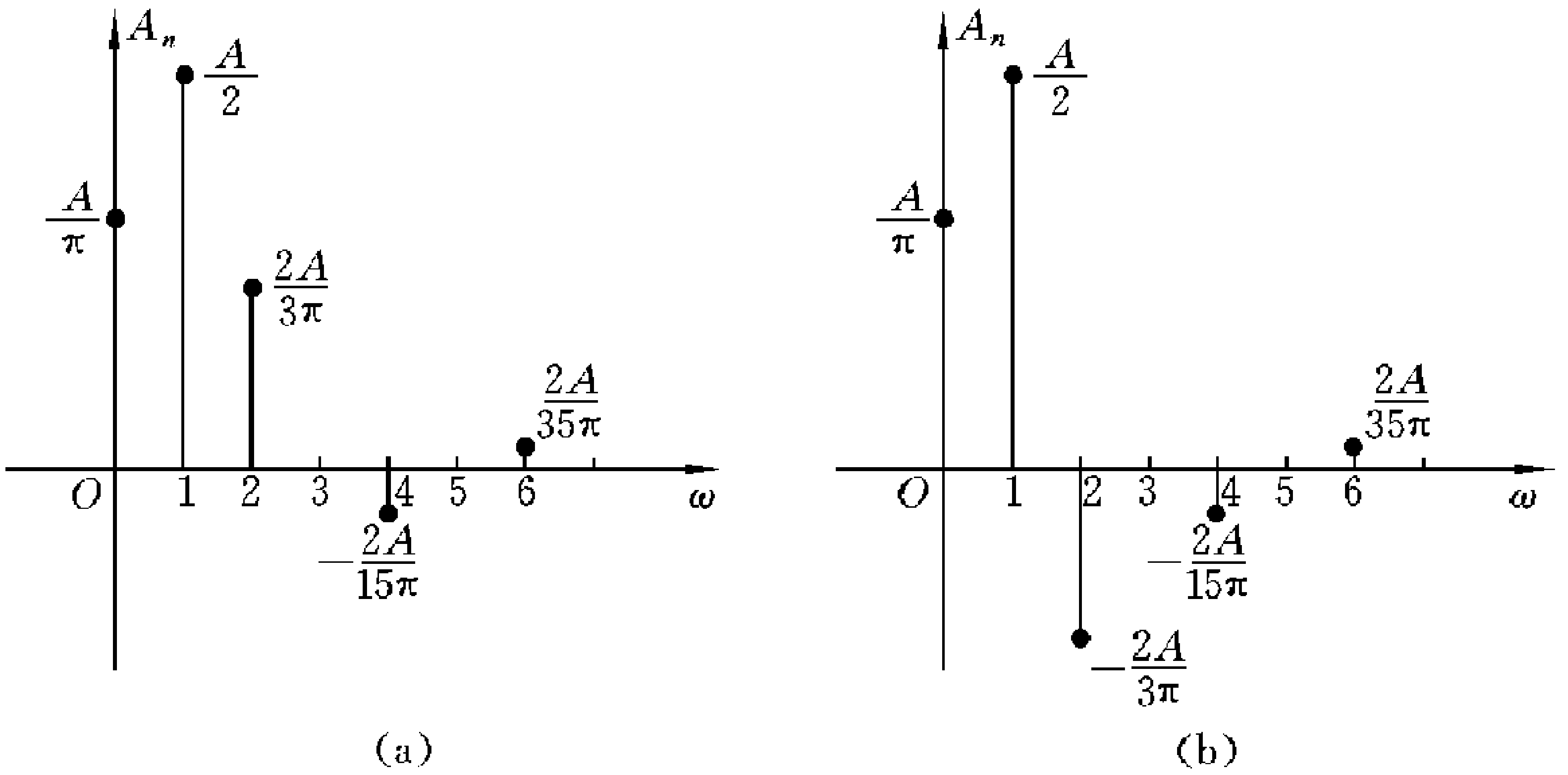


图 3-3

【3-6】 利用周期性矩形脉冲与周期性三角形脉冲的傅里叶级数展开式，见教材中式(3-30)及式(3-38)，求图 3-4 波形所示信号的傅里叶级数。

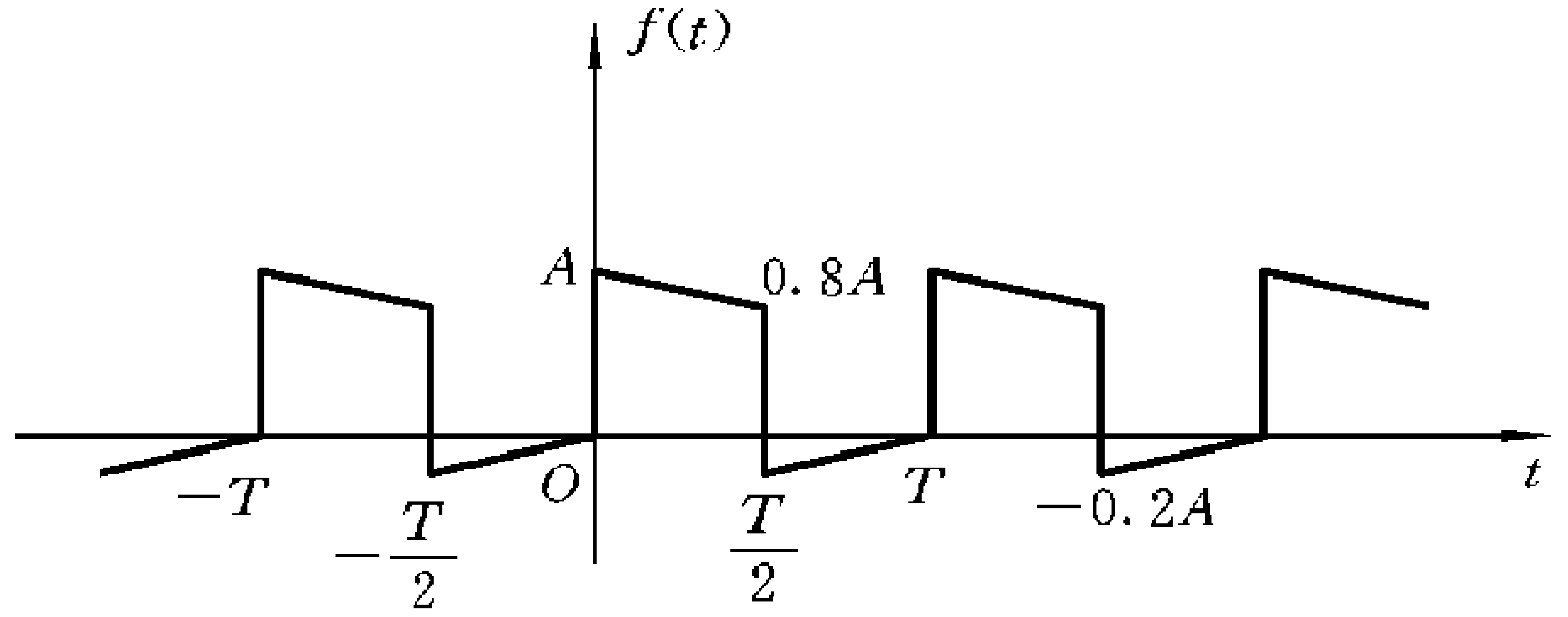


图 3-4

解 图 3-4 波形所示信号可以分解为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 两个信号之差(见图 3-5(a)、(b))，即

$$f(t)=f_1(t)-f_2(t)$$

式中 $$f_1(t)=A\left[\varepsilon(t)-\varepsilon\left(t-\frac{T}{2}\right)\right],\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}A\mathrm{d}t=A$$

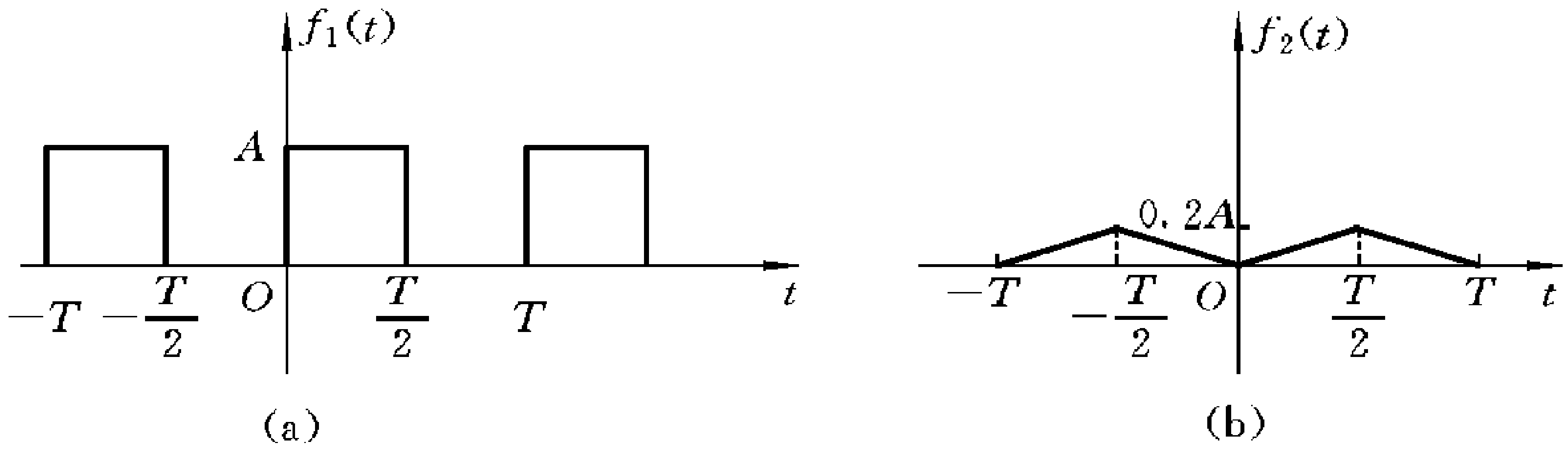


图 3-5

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f_1(t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}A\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2A}{T}\,\frac{\sin\frac{2n\pi t}{T}\Big|_0^{\frac{T}{2}}}{\frac{2n\pi}{T}}=\frac{A}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{2n\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right)-\sin\frac{2n\pi\cdot 0}{T}\right]=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}A\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{A}{n\pi}\left[-\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}=\frac{A}{n\pi}[1-\cos(n\pi)]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2A}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2A}{(2k+1)\pi}, & k=0,1,2,3,\cdots\\ 0, & n=2k\end{cases}$$

所以
$$f_1(t)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left[(2k+1)\frac{2\pi}{T}t\right]$$

而 $f_2(t)$ 为偶函数，其傅里叶系数中：$b_n=0$，只有 a_0，a_n。由图 3-4(b) 可见，直流分量(平均值)为 $0.1A$，因而 $a_0=0.2A$。显然

$$f_2(t)=\frac{2}{T}(0.2A)t\left[\varepsilon(t)-\varepsilon\left(t-\frac{T}{2}\right)\right],\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}$$

于是
$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{0.4A}{T}t\mathrm{d}t=\frac{1.6A}{T^2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}=0.2A$$

$$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{0.4A}{T}t\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1.6A}{T^2}\left[\frac{T}{2n\pi}t\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)+\frac{T^2}{4n^2\pi^2}\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}$$

$$=\frac{0.4A}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\dfrac{0.8A}{n^2\pi^2}, & n=\text{奇数}\\ 0, & n=\text{偶数}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-0.8A}{(2k+1)^2\pi^2}, & k=0,1,2,\cdots\\ 0, & n=2k\end{cases}$$

所以
$$f_2(t)=0.1A-\frac{0.8A}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left[(2k+1)\frac{2\pi}{T}t\right]$$

$$f(t)=f_1(t)-f_2(t)$$

$$=0.4A+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left[(2k+1)\frac{2\pi}{T}t\right]$$

$$+\frac{0.8A}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left[(2k+1)\frac{2\pi}{T}t\right]$$

$$=0.4A\left\{1+\frac{5}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left[(2k+1)\frac{2\pi}{T}t\right]\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left[(2k+1)\frac{2\pi}{T}t\right]\right\}$$

【3-7】 试判断在 $f(t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ 时间区间 $\left(0,\frac{T}{2}\right)$ 上展开的傅里叶级数是仅有余弦项，还是仅有正弦项，还是二者都有。如展开时间区间改为 $\left(-\frac{T}{4},\frac{T}{4}\right)$，则又如何。

解 $f(t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ 的波形如图 3-6(a)所示。

在图 3-6(a)中，取时间区间 $\left(0,\frac{T}{2}\right)$ 上波形进行周期延拓，得图 3-6(b)。由图 3-6(b)易知，$f(t)$在时间区间 $\left(0,\frac{T}{2}\right)$ 上展开成一奇函数，所以 $f(t)$在 $\left(0,\frac{T}{2}\right)$ 上展开的傅里叶级数仅有正弦项。

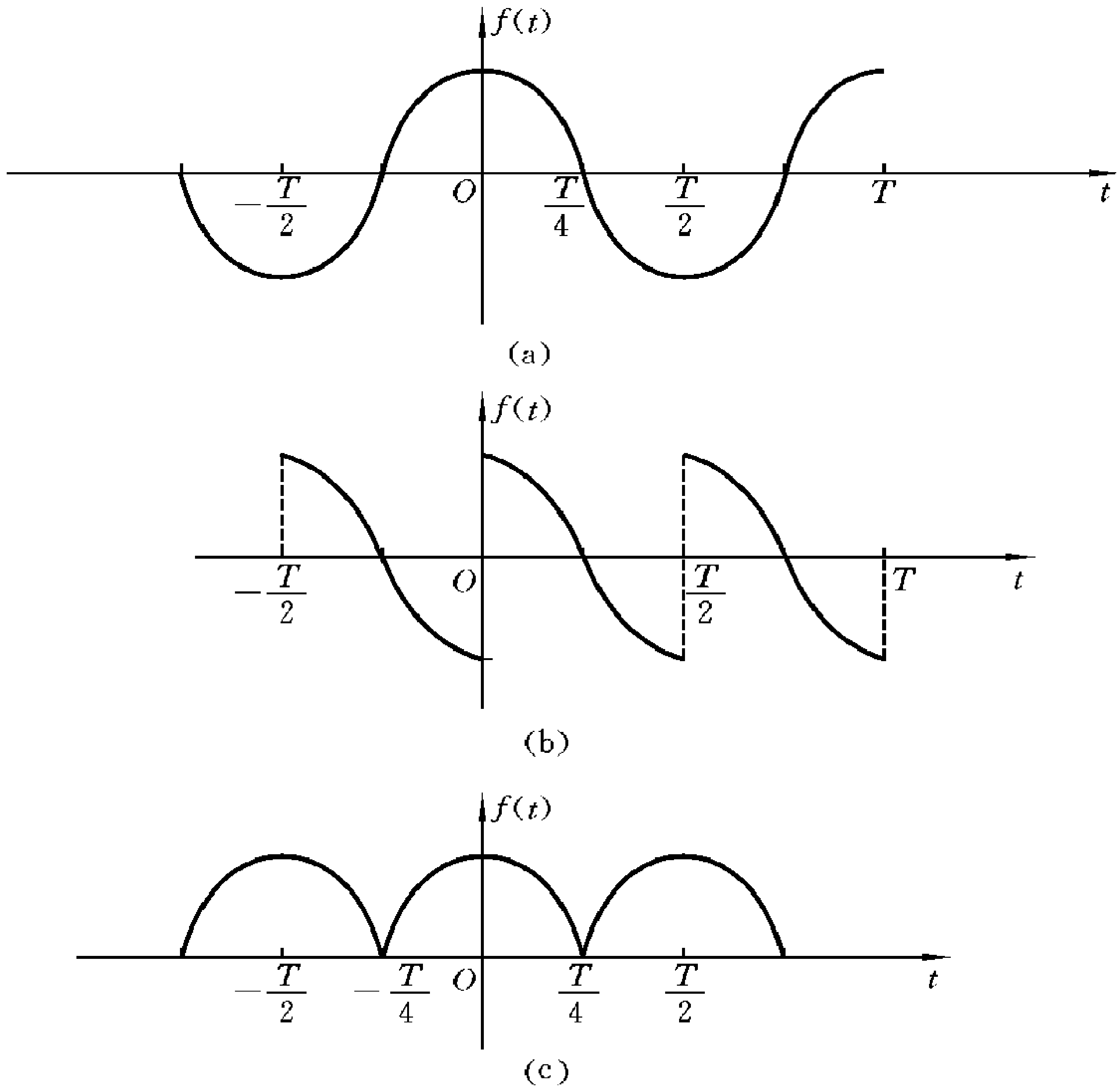


图 3-6

在图 3-6(a)中，取时间区间$\left(-\dfrac{T}{4},\dfrac{T}{4}\right)$上波形进行周期延拓，得图 3-6(c)。由图 3-6(c)易知，$f(t)$在时间区间$\left(-\dfrac{T}{4},\dfrac{T}{4}\right)$上展开的傅里叶级数含有直流分量和余弦项，不含有正弦项。

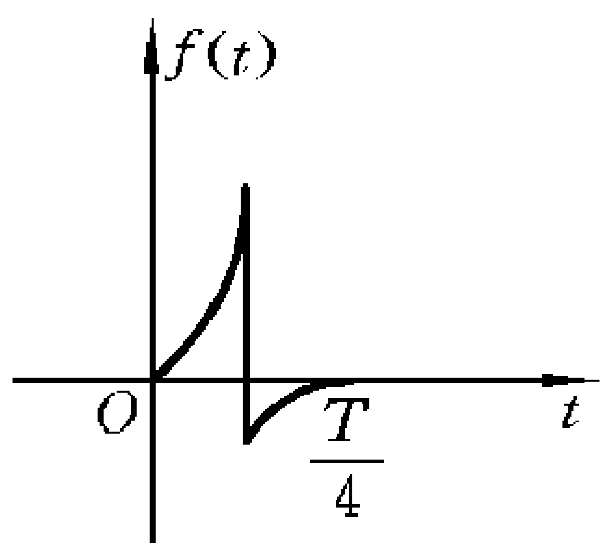


图 3-7

【3-8】 已知周期信号$f(t)$前四分之一周期的波形如图 3-7 所示，按下列条件绘出整个周期内的信号波形。

(1) $f(t)$是t的偶函数，其傅里叶级数只有偶次谐波；

(2) $f(t)$是t的偶函数,其傅里叶级数只有奇次谐波;

(3) $f(t)$是t的偶函数,其傅里叶级数同时有奇次谐波与偶次谐波;

(4) $f(t)$是t的奇函数,其傅里叶级数只有偶次谐波;

(5) $f(t)$是t的奇函数,其傅里叶级数只有奇次谐波;

(6) $f(t)$是t的奇函数,其傅里叶级数同时有奇次谐波与偶次谐波。

解　(1) 信号波形如图 3-8(a)所示。

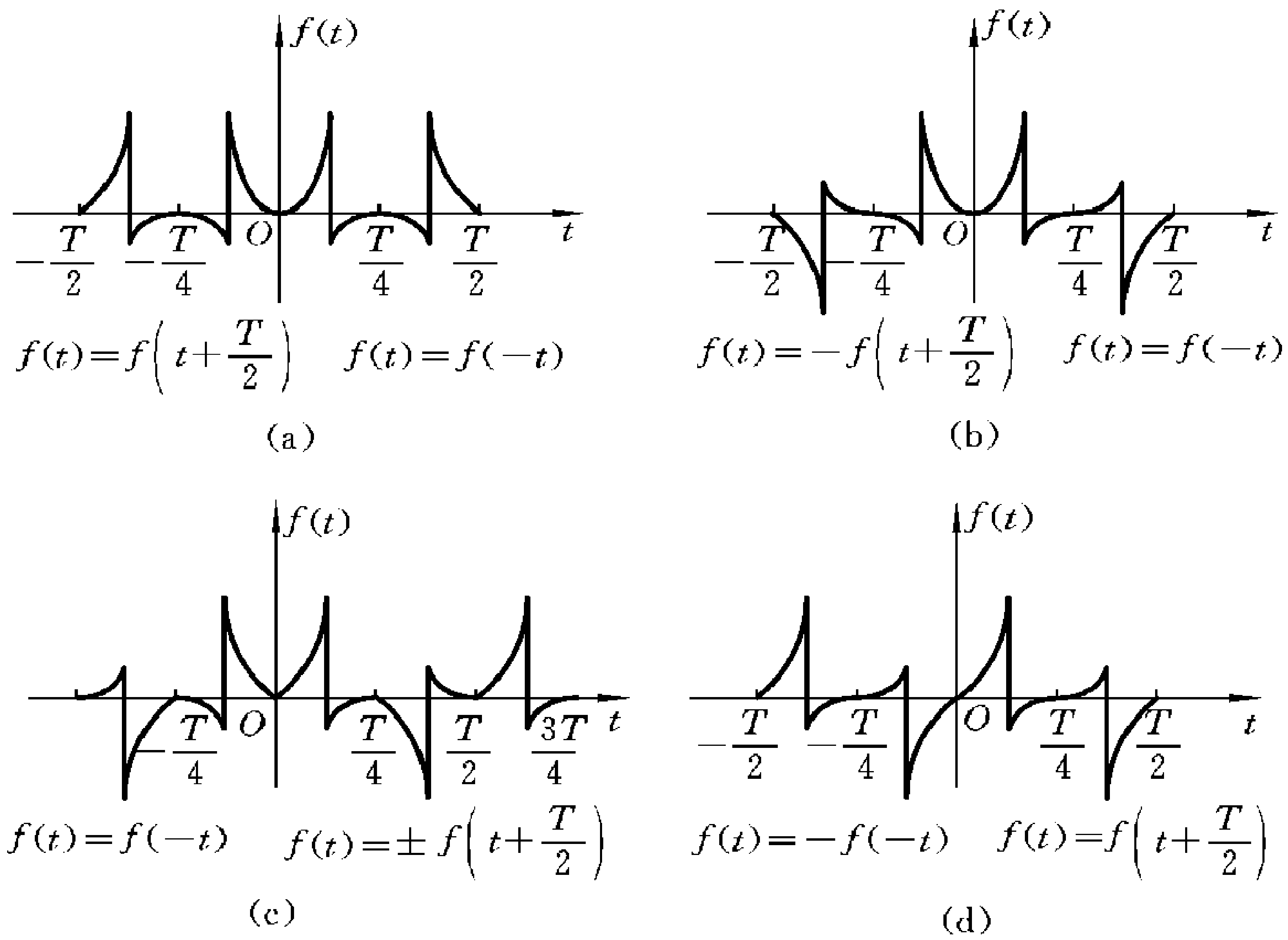


图 3-8

(2) 信号波形如图 3-8(b)所示。

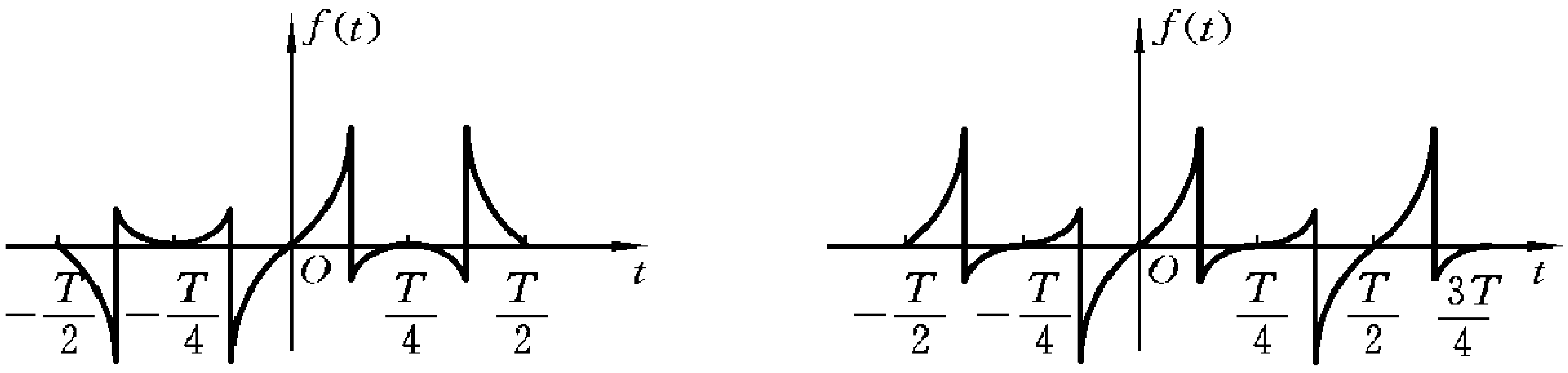
(3) 信号波形如图 3-8(c)所示。

(4) 信号波形如图 3-8(d)所示。

(5) 信号波形如图 3-8(e)所示。

(6) 信号波形如图 3-8(f)所示。

其中题(3)、(6)的信号波形不仅仅只有图示这一种。



$f(t)=-f\left(t+\frac{T}{2}\right)$　$f(t)=-f(-t)$

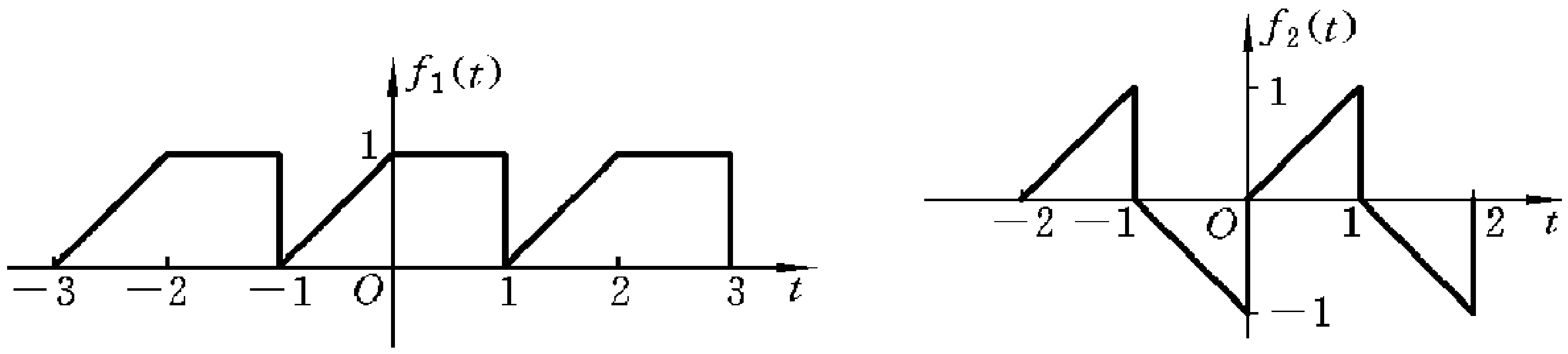
(e)

$f(t)=-f(-t)$　$f(t)=\pm f\left(t+\frac{T}{2}\right)$

(f)

续图 3-8

【3-9】 试绘出图 3-9 所示波形信号的奇分量及偶分量的波形。



(a)　　(b)

图 3-9

解　因为信号的偶分量　$f_e(t)=\dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$

信号的奇分量　$f_o(t)=\dfrac{f(t)-f(-t)}{2}$

所以可先画出信号 $f(-t)$ 的图形，再相加减，如图 3-10 所示。

【3-10】 利用信号的奇偶性，判断图 3-11 所示各信号的傅里叶级数所包含的分量。

解　$f_1(t)$ 为偶函数，且平均值为零，所以无直流项，只有余弦项。

$f_2(t)$ 为奇函数，其傅里叶级数只包含正弦分量。

$f_3(t)$ 既为偶函数，又为偶谐函数，且平均值不为零，所以有直流项和偶次余弦项。

$f_4(t)$ 为奇谐函数，所以只有奇次正弦项。

【3-11】 已知 $f_1(t)$ 的傅里叶变换为 $F_1(j\omega)$，$f_2(t)$ 为 $f_1(t)$ 经反褶后再沿

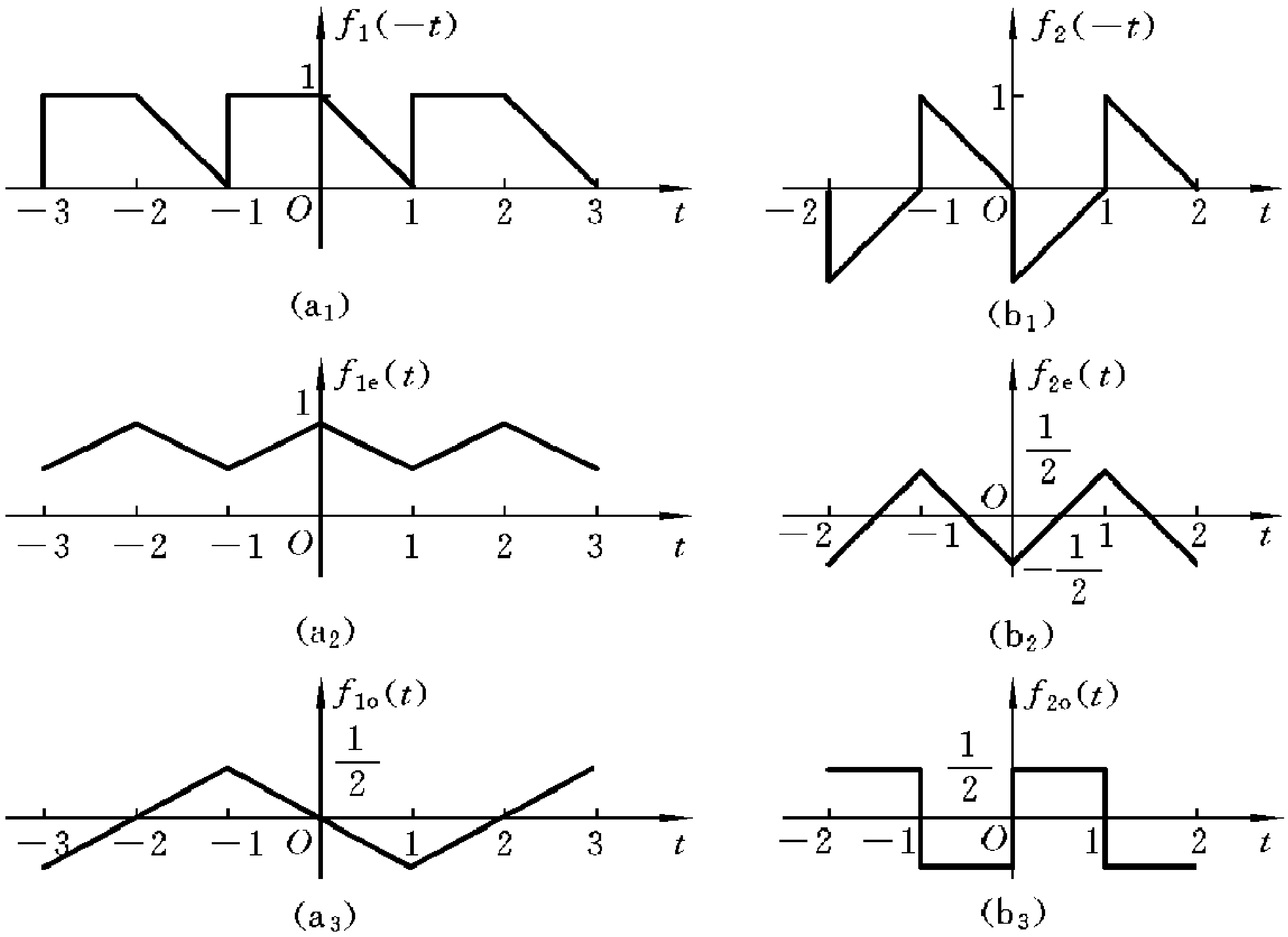


图 3-10

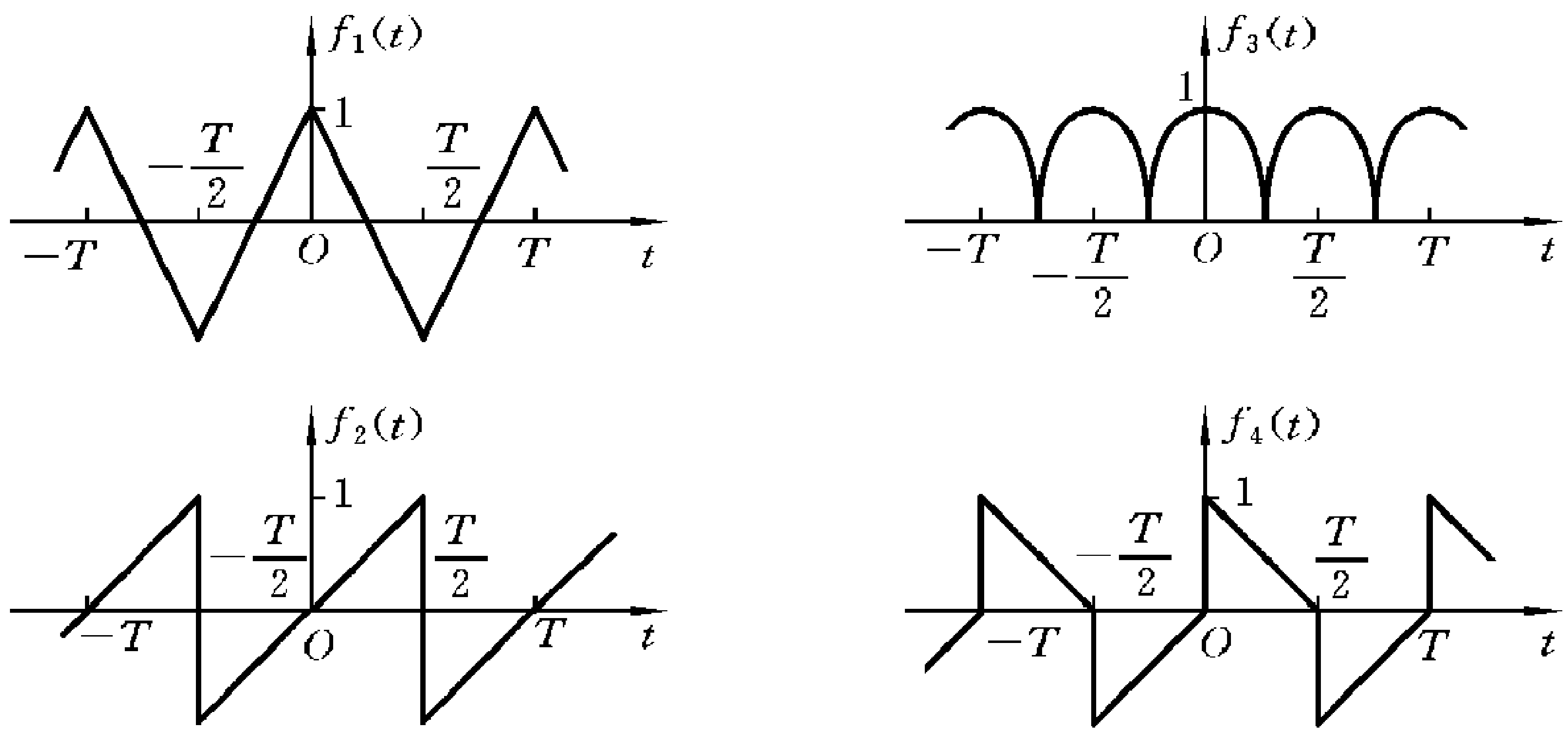


图 3-11

时间轴右移t_0 所构成的，如图 3-12 所示。试用 $f_1(t)$的傅里叶变换$F_1(j\omega)$来表示 $f_2(t)$的傅里叶变换 $F_2(j\omega)$。

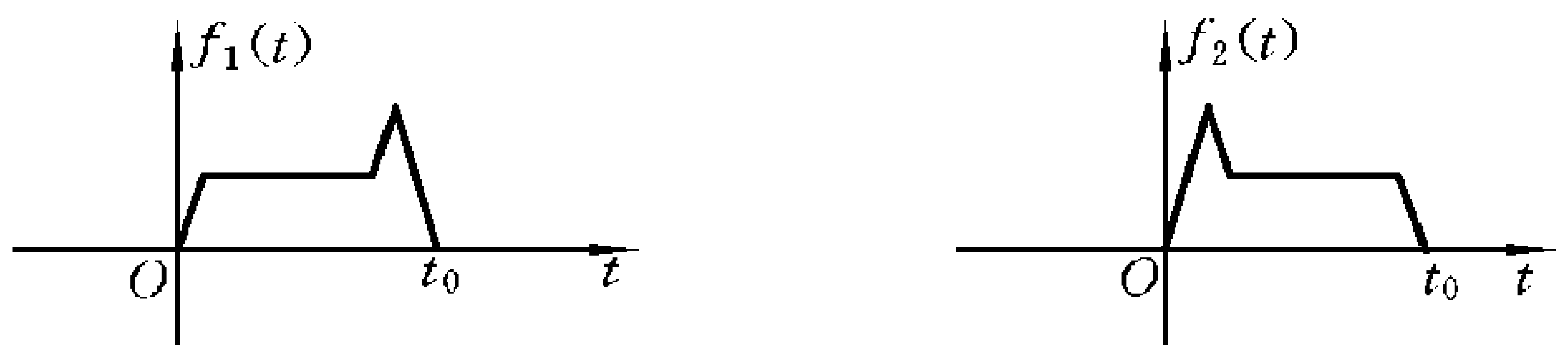


图 3-12

解　因为　　$f_2(t)=f_1(t_0-t)=f_1[-(t-t_0)]$

$$f_1(-t)=\mathscr{F}^{-1}\{F_1(-j\omega)\}$$

所以　　$f_1[-(t-t_0)]=\mathscr{F}^{-1}\{F_1(-j\omega)e^{-j\omega t_0}\}$

$$\mathscr{F}^{-1}\{F_2(j\omega)\}=\mathscr{F}^{-1}\{F_1(-j\omega)e^{-j\omega t_0}\}$$

$$F_2(j\omega)=F_1(-j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

【3-12】　利用傅里叶变换的移频特性求图 3-13 所示信号的傅里叶变换。

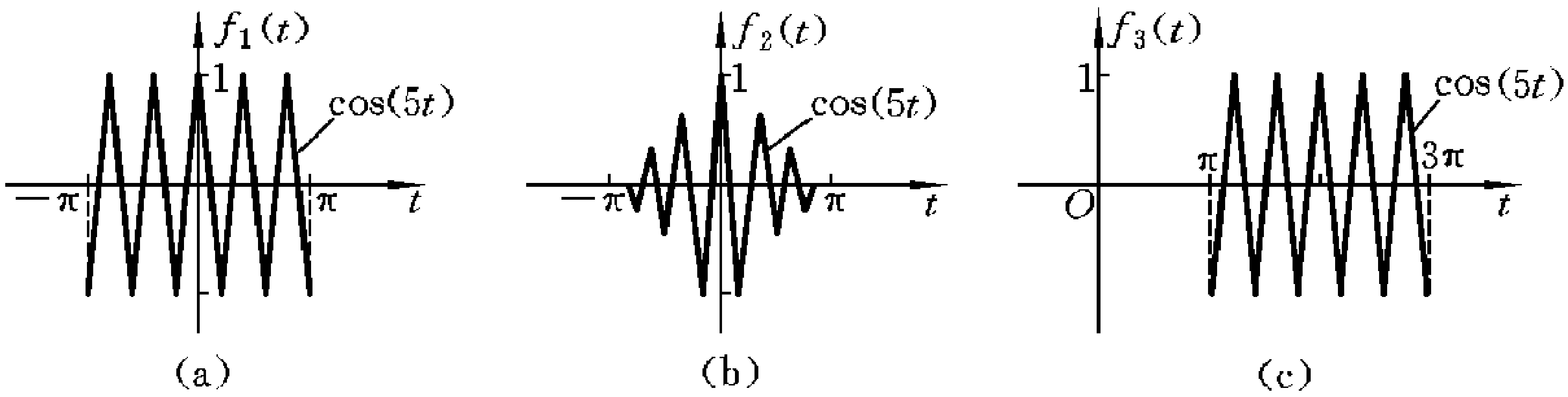


图 3-13

解　(a) 图 3-13(a)为矩形包络，由图 3-13(a)可知

$$f_1(t)=\cos(5t)[\varepsilon(t+\pi)-\varepsilon(t-\pi)]$$

$$(G_{2\pi}(t)=\varepsilon(t+\pi)-\varepsilon(t-\pi))$$

因为　　$G_{2\pi}(t)\longleftrightarrow 2\pi\mathrm{Sa}(\pi\omega)$

$$f(t)\cos(\omega_0 t)\longleftrightarrow\frac{1}{2}F[j(\omega+\omega_0)]+\frac{1}{2}F[j(\omega-\omega_0)]\quad\text{（频移特性）}$$

所以　　$f_1(t)\longleftrightarrow\frac{1}{2}\cdot 2\pi\{\mathrm{Sa}[\pi(\omega+5)]+\mathrm{Sa}[\pi(\omega-5)]\}$

$$F_1(\omega)=\pi\{\mathrm{Sa}[\pi(\omega+5)]+\mathrm{Sa}[\pi(\omega-5)]\}$$

(b) 图 3-13(b)为三角形包络，由图 3-13(b)可知

$$f_2(t)=\cos(5t)\cdot\left(1-\frac{|t|}{2\pi}\right)$$

$$F_2(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}\pi[\delta(\omega+5)+\delta(\omega-5)]*\pi\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[\mathrm{Sa}^2\frac{\pi(\omega+5)}{2}+\mathrm{Sa}^2\frac{\pi(\omega-5)}{2}\right]$$

(c) 图3-13(c)为矩形包络，由图3-13(a)右移2π后得到，所以

$$f_3(t)=\cos(5t)[\varepsilon(t-\pi)-\varepsilon(t-3\pi)]$$

根据时延特性，有

$$[\varepsilon(t-\pi)-\varepsilon(t-3\pi)]\longleftrightarrow 2\pi\mathrm{Sa}(\pi\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega}$$

所以　$f_3(t)\longleftrightarrow \pi\{\mathrm{Sa}[\pi(\omega+5)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega}+\mathrm{Sa}[\pi(\omega+5)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega}\}$

$$F_3(\mathrm{j}\omega)=\pi\{\mathrm{Sa}[\pi(\omega+5)]+\mathrm{Sa}[\pi(\omega-5)]\}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}\omega}$$

【3-13】 如时间实函数$f(t)$的频谱函数$F(\mathrm{j}\omega)=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)$，试证明$f(t)$的偶分量的频谱函数为$R(\omega)$，奇分量的频谱函数为$\mathrm{j}X(\omega)$。

证明　因为

$$f_e(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]\longleftrightarrow\frac{1}{2}[F(\mathrm{j}\omega)+F(-\mathrm{j}\omega)]$$

所以　$F_e(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2}[R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)+R(\omega)-\mathrm{j}X(\omega)]=R(\omega)$

又　$f_o(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]\longleftrightarrow\frac{1}{2}[F(\mathrm{j}\omega)-F(-\mathrm{j}\omega)]$

所以　$F_o(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2}[R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)-R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)]=\mathrm{j}X(\omega)$

【3-14】 利用对称特性求下列函数的傅里叶变换。

(1) $f(t)=\dfrac{\sin 2\pi(t-2)}{\pi(t-2)}$　(2) $f(t)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}$　(3) $f(t)=\left[\dfrac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}\right]^2$

解　(1) 由时域延迟特性知

$$f(t-t_0)\longleftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

又　$f(t)=2\mathrm{Sa}[2\pi(t-2)]\longleftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$

利用对称特性　$G_\tau(t)\longleftrightarrow\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

取$\frac{\omega\tau}{2}=2\pi\omega$，得$\tau=4\pi$，故

$$G_{4\pi}(t)\longleftrightarrow 4\pi\mathrm{Sa}(2\pi\omega)$$

$$\mathrm{Sa}(2\pi t)\longleftrightarrow\frac{2\pi}{4\pi}G_{4\pi}(\omega)$$

所以 $$F(\mathrm{j}\omega) = G_{4\pi}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

(2) 因为 $$\mathrm{e}^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}$$

所以 $$\frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2} \longleftrightarrow 2\pi\mathrm{e}^{-\alpha|\omega|}$$

即 $$F(\mathrm{j}\omega) = 2\pi\mathrm{e}^{-\alpha|\omega|}$$

(3) $f(t)=\mathrm{Sa}^2(2\pi t)$

因为 $$\left(1-\frac{|t|}{\tau}\right)G_{2\tau}(t) \longleftrightarrow \tau\left[\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right]^2$$

又 $\frac{\tau}{2}=2\pi$，所以 $\tau=4\pi$，故

$$\left(1-\frac{|t|}{4\pi}\right)G_{8\pi}(t) \longleftrightarrow 4\pi[\mathrm{Sa}(2\pi\omega)]^2$$

$$\mathrm{Sa}^2(2\pi t) \longleftrightarrow \frac{2\pi}{4\pi}\left(1-\frac{|\omega|}{4\pi}\right)G_{8\pi}(\omega)$$

所以 $$F(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{|\omega|}{4\pi}\right)G_{8\pi}(\omega)$$

【3-15】 求下列傅里叶变换所对应的时间函数。

(1) $F(\mathrm{j}\omega)=\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)$ (2) $F(\mathrm{j}\omega)=\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

(3) $F(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2}$ (4) $F(\mathrm{j}\omega)=-\frac{2}{\omega^2}$

解 (1) $$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c t}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t})=\frac{\sin\omega_c t}{\mathrm{j}\pi}$$

(2) $$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\omega}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\omega}}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\omega}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\omega}\right]\mathrm{d}\omega=\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

所以 $$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]\mathrm{d}t=\varepsilon\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

(3) 因为 $$\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$$

而
$$(-\mathrm{j}t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)\longleftrightarrow\frac{-\mathrm{j}}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2}$$

故
$$t\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)\longleftrightarrow\frac{1}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2}$$

所以
$$f(t)=t\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)$$

(4) 因为
$$\mathrm{sgn}(t)\longleftrightarrow\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$

$$(-\mathrm{j}t)\mathrm{sgn}(t)\longleftrightarrow\frac{2\mathrm{j}}{\omega^2}$$

$$t\mathrm{sgn}(t)\longleftrightarrow\frac{-2}{\omega^2}$$

所以
$$f(t)=t\mathrm{sgn}(t)$$

【3-16】 试用下列特性求图 3-14 所示信号的傅里叶变换。

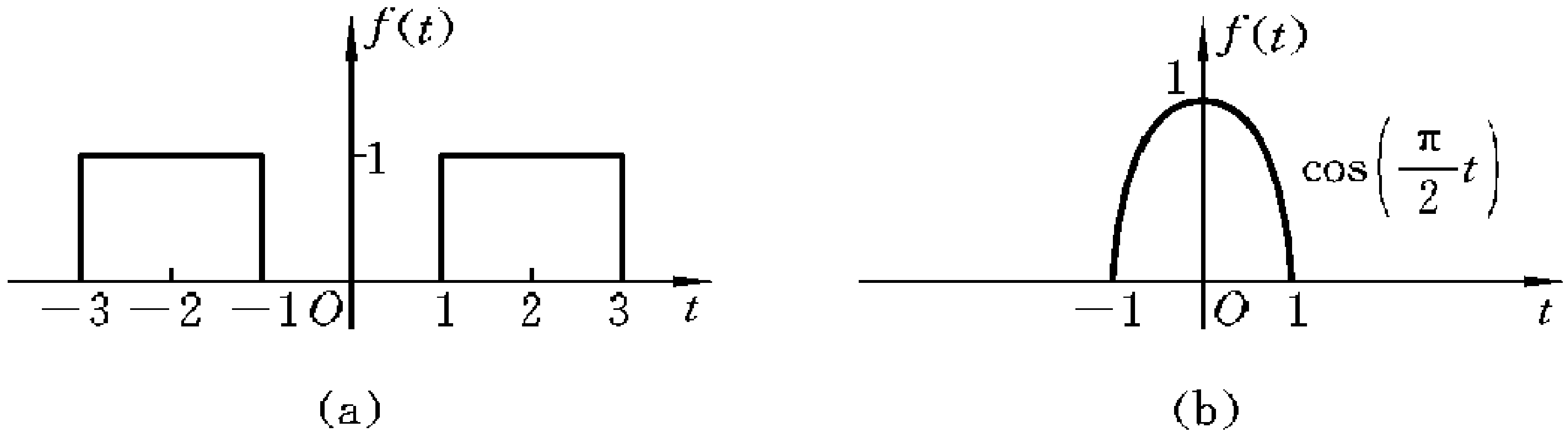


图 3-14

(1) 用延时特性与线性特性；

(2) 用时域微分、积分特性。

解　图 3-14(a)：

$$f(t)=G_2(t+2)+G_2(t-2)$$

(1) 因为
$$G_\tau(t)\longleftrightarrow\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

所以
$$G_2(t)\longleftrightarrow 2\mathrm{Sa}(\omega)$$

又
$$G_2(t+2)\longleftrightarrow 2\mathrm{Sa}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega},\quad G_2(t-2)\longleftrightarrow 2\mathrm{Sa}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

所以
$$F(\mathrm{j}\omega)=2\mathrm{Sa}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}+2\mathrm{Sa}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}=4\mathrm{Sa}(\omega)\cos(2\omega)$$
$$=\frac{2}{\omega}[\sin(3\omega)-\sin\omega]$$

(2) $f(t)=\varepsilon(t+3)-\varepsilon(t+1)+\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-3)$

$$f'(t)=\delta(t+3)-\delta(t+1)+\delta(t-1)-\delta(t-3)$$

$$\longleftrightarrow e^{j3\omega}-e^{j\omega}+e^{-j\omega}-e^{-j3\omega}=j4\sin\omega\cos(2\omega)$$

$$=\frac{2}{\omega}[\sin(3\omega)-\sin\omega]\cdot j\omega$$

即
$$f'(t)\longleftrightarrow\frac{2}{\omega}[\sin(3\omega)-\sin\omega]\cdot j\omega$$

所以
$$f(t)\longleftrightarrow\frac{2}{\omega}[\sin(3\omega)-\sin\omega]$$

图 3-14(b)：

$$f(t)=G_2(t)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

(1) $F(j\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\left\{2\mathrm{Sa}(\omega)*\pi\left[\delta\left(\omega+\dfrac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]\right\}$

$$=\mathrm{Sa}(\omega)*\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{Sa}(\omega)*\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\mathrm{Sa}\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{Sa}\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4\pi\cos\omega}{\pi^2-4\omega^2}$$

(2) $f'(t)=\dfrac{d}{dt}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)[\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)]\right\}$

$$=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)[\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)]$$

$$+\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)[\delta(t+1)-\delta(t-1)]$$

$$=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)[\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)]$$

$$+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\delta(t+1)-\cos\frac{\pi}{2}\delta(t-1)$$

$$=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)[\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)]$$

$$f''(t)=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)[\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)]$$

$$-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)[\delta(t+1)-\delta(t-1)]$$

$$=-\frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)[\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)]$$

$$+\frac{\pi}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\delta(t+1)+\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\delta(t-1)$$

$$=-\frac{\pi^2}{4}f(t)+\frac{\pi}{2}\delta(t+1)-\frac{\pi}{2}\delta(t-1)$$

$$=-\frac{\pi^2}{4}f(t)+\frac{\pi}{2}[\delta(t+1)+\delta(t-1)]$$

由对称特性知

$$\cos(\omega_0 t)\longleftrightarrow\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\cos(t)\longleftrightarrow\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)]$$

$$\pi[\delta(t+1)+\delta(t-1)]\longleftrightarrow 2\pi\cos\omega$$

$$\frac{\pi}{2}[\delta(t+1)+\delta(t-1)]\longleftrightarrow\pi\cos\omega$$

所以
$$\mathscr{F}\{f''(t)\}=-\frac{\pi^2}{4}F(\mathrm{j}\omega)+\pi\cos\omega=(\mathrm{j}\omega)^2F(\mathrm{j}\omega)$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{\pi\cos\omega}{(\mathrm{j}\omega)^2+\dfrac{\pi^2}{4}}=\frac{4\pi\cos\omega}{\pi^2-4\omega^2}$$

【3-17】 试用时域微分、积分特性求图3-15中波形信号的傅里叶变换。

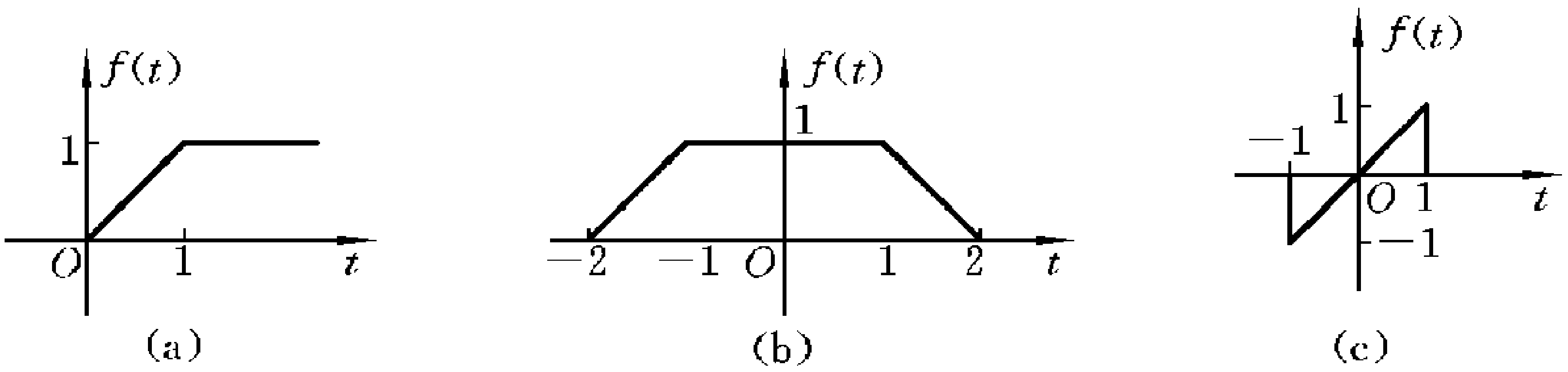


图3-15

解　(a) $f(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+\varepsilon(t-1)$

因为
$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

所以
$$f'(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)+t[\delta(t)-\delta(t-1)]+\delta(t-1)$$

$$=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)+0\times\delta(t)-1\times\delta(t-1)+\delta(t-1)$$

$$=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)=G_1\left(t-\frac{1}{2}\right)\longleftrightarrow\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}$$

又因为
$$f(t)=\int_{-\infty}^{t}f'(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}G_1\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\tau$$

所以
$$F(\mathrm{j}\omega)=\pi G_1(\mathrm{j}\omega)\delta(\omega)+\frac{G_1(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$$
$$=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\omega}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$$

(b) $f(t)=(t+2)[\varepsilon(t+2)-\varepsilon(t+1)]+\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)$
$$-[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)](t-1)+[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)]$$
$$=(t+2)\varepsilon(t+2)-(t+1)\varepsilon(t+1)-(t-1)\varepsilon(t-1)+(t-2)\varepsilon(t-2)$$

所以 $f'(t)=\varepsilon(t+2)+(t+2)\delta(t+2)-\varepsilon(t+1)-(t+1)\delta(t+1)$
$$-\varepsilon(t-1)-(t-1)\delta(t-1)+\varepsilon(t-2)+(t-2)\delta(t-2)$$
$$=\varepsilon(t+2)-\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)$$
$$f''(t)=\delta(t+2)-\delta(t+1)-\delta(t-1)+\delta(t-2)$$

故
$$f''(t)\longleftrightarrow\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$
$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega})=2\left[\frac{\cos\omega-\cos(2\omega)}{\omega^2}\right]$$

(c) $f(t)=t[\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)]$
$$f'(t)=\varepsilon(t+1)+t\delta(t+1)-\varepsilon(t-1)-t\delta(t-1)$$
$$=\varepsilon(t+1)-\delta(t+1)-\varepsilon(t-1)-\delta(t-1)$$
$$f''(t)=\delta(t+1)-\delta(t-1)-\delta'(t+1)-\delta'(t-1)$$
$$\longleftrightarrow\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}-\mathrm{j}\omega(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})=\mathrm{j}2(\sin\omega-\omega\cos\omega)$$

所以
$$f(t)\longleftrightarrow-\frac{\mathrm{j}2}{\omega^2}(\sin\omega-\omega\cos\omega)=\mathrm{j}\,\frac{2}{\omega}(\cos\omega-\mathrm{Sa}\,\omega)$$

【3-18】 由教材中的表3-1中的第13号矩形脉冲的频谱函数导出第17号三角形脉冲的频谱函数。

(1) 用时域微分、积分特性；

(2) 用时域卷积定理。

解 (1) $f\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\longleftrightarrow\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}$

(设矩形脉冲为 $f(t)$)

$$f\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\longleftrightarrow\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}$$

设三角形脉冲为 $g(t)$，则

$$g(t)\longleftrightarrow\left[\pi\tau\delta(\omega)+\frac{\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}}{\mathrm{j}\omega}-\pi\tau\delta(\omega)-\frac{\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}}{\mathrm{j}\omega}\right]\cdot\frac{1}{\tau}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\cdot \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\cdot 2\mathrm{j}\sin\frac{\omega\tau}{2}$$

即
$$g(t)\longleftrightarrow \tau\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$(2)\ g(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\tau}\left[f\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-f\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\tau}f(t)*\left[\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]*\varepsilon(t)$$

所以
$$g(t)\longleftrightarrow\frac{1}{\tau}\cdot\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\cdot 2\mathrm{j}\sin\frac{\omega\tau}{2}\cdot\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]=\tau\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

【3-19】 利用频域卷积定理，由$\cos(\omega_c t)$的傅里叶变换及$\varepsilon(t)$的傅里叶变换导出$\cos(\omega_c t)\varepsilon(t)$的傅里叶变换。

解 $\cos(\omega_c t)\longleftrightarrow\pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]$

$$\varepsilon(t)\longleftrightarrow\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$\cos(\omega_c t)\varepsilon(t)\longleftrightarrow\frac{1}{2\pi}\pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]*\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{j}(\omega+\omega_c)}+\frac{1}{\mathrm{j}(\omega-\omega_c)}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]$$
$$=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]+\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_c^2-\omega^2}$$

【3-20】 由冲激函数的傅里叶变换求图3-16所示波形信号的傅里叶变换。

解 (1) $f_1(t)=\varepsilon(t+\tau)-2\varepsilon(t)+\varepsilon(t-\tau)$

$$f'_1(t)=\delta(t+\tau)-2\delta(t)+\delta(t-\tau)$$

所以
$$f'_1(t)\longleftrightarrow\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}-2+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}=-4\sin^2\frac{\omega\tau}{2}=\frac{\mathrm{j}4}{\omega}\sin^2\frac{\omega\tau}{2}\cdot\mathrm{j}\omega$$

故
$$f_1(t)\longleftrightarrow\frac{\mathrm{j}4}{\omega}\sin^2\frac{\omega\tau}{2}$$

(2) $f_2(t)=\varepsilon(t+2)+\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)$

所以
$$f'_2(t)=\delta(t+2)+\delta(t+1)-\delta(t-1)-\delta(t-2)$$

故
$$f'_2(t)\longleftrightarrow\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}=2\mathrm{j}[\sin\omega+\sin(2\omega)]$$
$$=\frac{2}{\omega}[\sin\omega+\sin(2\omega)]\cdot\mathrm{j}\omega$$

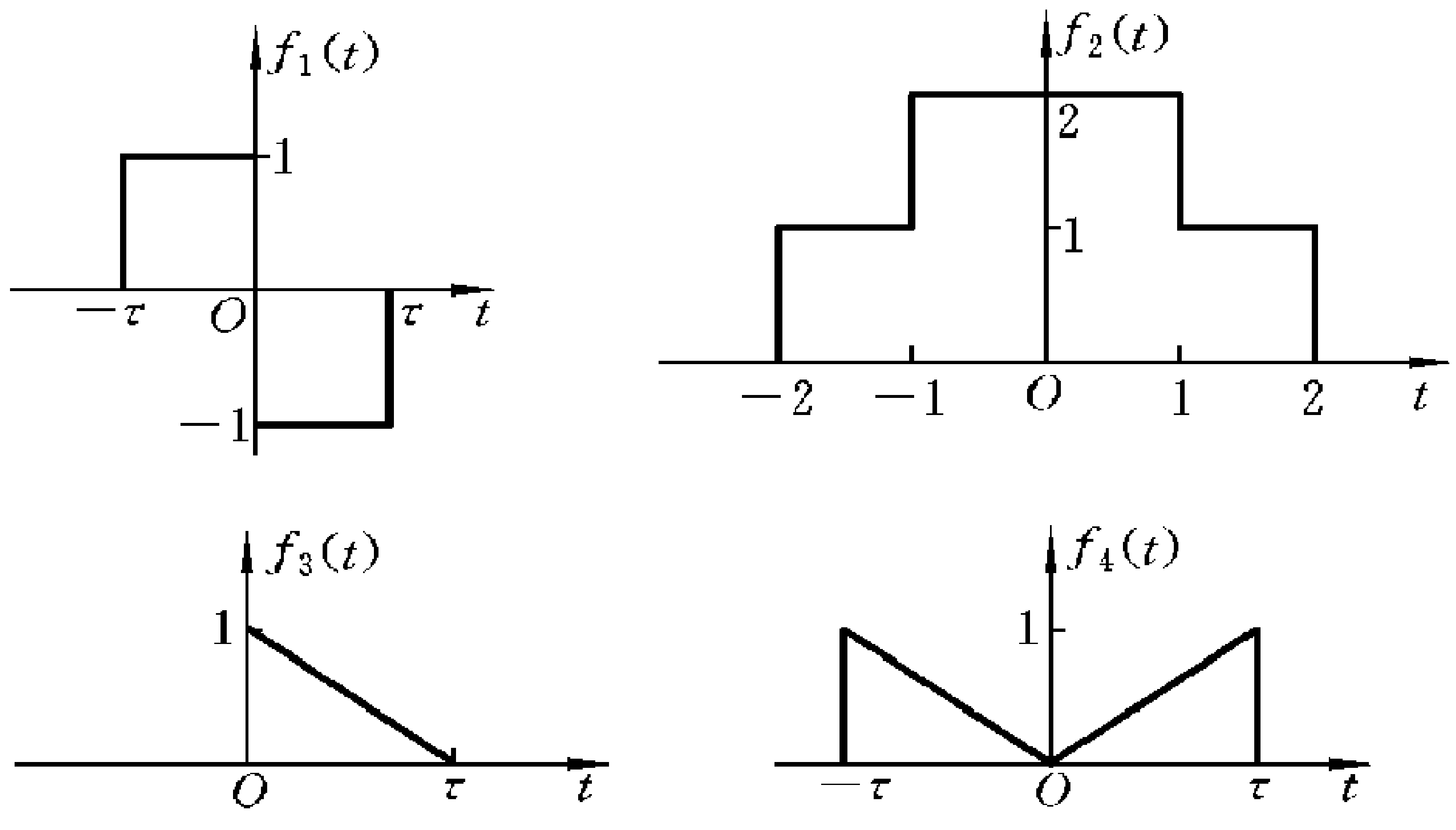


图 3-16

$$f_2(t) \longleftrightarrow \frac{2}{\omega}[\sin\omega + \sin(2\omega)]$$

(3) $f_3(t) = -\frac{1}{\tau}(t-\tau)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)]$

$$\begin{aligned} f'_3(t) &= -\frac{1}{\tau}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)] - \frac{1}{\tau}(t-\tau)[\delta(t)-\delta(t-\tau)] \\ &= -\frac{1}{\tau}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)] - \frac{1}{\tau}[-\tau\delta(t)] \\ &= -\frac{1}{\tau}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)] + \delta(t) \end{aligned}$$

$$f''_3(t) = -\frac{1}{\tau}[\delta(t)-\delta(t-\tau)] + \delta'(t)$$

所以　$f''_3(t) \longleftrightarrow \mathrm{j}\omega - \frac{1}{\tau}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}) = (\mathrm{j}\omega)^2 \cdot \dfrac{\mathrm{j}\omega - \frac{1}{\tau}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau})}{(\mathrm{j}\omega)^2}$

$$= (\mathrm{j}\omega)^2 \cdot \frac{1}{\omega^2\tau}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}-\mathrm{j}\omega\tau)$$

$$f(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\omega^2\tau}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}-\mathrm{j}\omega\tau)$$

(4) 由(3)可知

$$f_4(t) \longleftrightarrow F_3(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau} + F_3(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau} = 2\tau\mathrm{Sa}(\omega\tau) - \tau\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

【3-21】 已知$f(t)$的傅里叶变换为$F_1(j\omega)$，求下列时间信号的傅里叶变换。

(1) $tf(2t)$　　(2) $(t-2)f(t)$　　(3) $t\dfrac{df(t)}{dt}$

(4) $f(1-t)$　　(5) $(1-t)f(1-t)$　　(6) $f(2t+5)$

解　(1) 因为
$$f(2t)\longleftrightarrow\frac{1}{2}F_1\left(j\frac{\omega}{2}\right)$$

又
$$-jtf(2t)\longleftrightarrow\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{2}F_1\left(j\frac{\omega}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}F'_1\left(j\frac{\omega}{2}\right)$$

所以
$$tf(2t)\longleftrightarrow j\frac{1}{2}F'_1\left(j\frac{\omega}{2}\right)$$

(2) $(t-2)f(t)=tf(t)-2f(t)\longleftrightarrow jF'_1(j\omega)-2F_1(j\omega)$

(3) 因为
$$-jtf(t)\longleftrightarrow\frac{dF_1(j\omega)}{d\omega}$$

所以
$$-jt\frac{df(t)}{dt}\longleftrightarrow\frac{d}{d\omega}[j\omega F_1(j\omega)]$$

故
$$t\frac{df(t)}{dt}\longleftrightarrow-[\omega F'_1(j\omega)+F_1(j\omega)]$$

(4) $f(1-t)=f[-(t-1)]$

因为
$$f(t-1)\longleftrightarrow F_1(j\omega)e^{-j\omega}$$

所以
$$f(1-t)\longleftrightarrow F_1(-j\omega)e^{-j\omega}$$

(5) $(1-t)f(1-t)=f(1-t)-tf(1-t)$
$$\longleftrightarrow F_1(-j\omega)e^{-j\omega}-\left\{j\frac{d}{d\omega}[F_1(-j\omega)e^{-j\omega}]\right\}$$
$$=-jF'_1(-j\omega)e^{-j\omega}$$

(6) $f(2t+5)=f\left[2\left(t+\dfrac{5}{2}\right)\right]\longleftrightarrow\dfrac{1}{2}F\left(j\dfrac{\omega}{2}\right)e^{j\frac{5}{2}\omega}$

【3-22】 证明下列函数的傅里叶变换，当$\tau\to0$时具逼近于$\delta(t)$的傅里叶变换1。即这些函数在$\tau\to0$时都可视为单位冲激函数。

(1) 双边指数函数　$\dfrac{1}{2\tau}e^{-\frac{|t|}{\tau}}$；

(2) 取样函数　$\dfrac{1}{\pi\tau}\mathrm{Sa}\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$；

(3) 三角脉冲函数　$\dfrac{1}{\tau}\left(1-\dfrac{|t|}{\tau}\right)[\varepsilon(t+\tau)-\varepsilon(t-\tau)]$；

(4) 高斯脉冲函数　$\dfrac{1}{\tau}e^{-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$。

证明　(1) $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}\left\{\frac{1}{2\tau}\mathrm{e}^{-\frac{|t|}{\tau}}\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\tau}\mathrm{e}^{-\frac{|t|}{\tau}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2\tau}\left[\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\frac{t}{\tau}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2\tau}\cdot\frac{2\cdot\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}=\frac{1}{1+\tau^2\omega^2}$$

当 $\tau\to0$ 时，　　$F(\mathrm{j}\omega)\to1$

所以得证。

(2) $F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi\tau}\mathrm{Sa}\left(\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}\pi\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\omega-\frac{1}{\tau}\right)t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\omega+\frac{1}{\tau}\right)t}\right]\mathrm{d}t$$

因为
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)$$

所以
$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{j}{\tau}\left[\delta\left(\omega+\frac{1}{\tau}\right)-\delta\left(\omega-\frac{1}{\tau}\right)\right]$$

根据冲激函数定义当 $\tau\to0$ 时，幅度 $\frac{1}{\tau}\to\infty$，其面积恒为 1。

(3) $F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{|t|}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\tau}^{0}\frac{1}{\tau}\left(1+\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\tau}\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\frac{1}{\tau}\int_{0}^{\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\frac{1}{\tau^2}\int_{-\tau}^{0}t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t-\frac{1}{\tau^2}\int_{0}^{\tau}t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\tau(-\mathrm{j}\omega)}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}]\Big|_{-\tau}^{0}+\frac{1}{\tau(-\mathrm{j}\omega)}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}]\Big|_{0}^{\tau}$$
$$+\frac{1}{\tau^2}\left[\frac{1}{(-\mathrm{j}\omega)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}(-\mathrm{j}\omega t-1)\right]\Bigg|_{-\tau}^{0}$$
$$-\frac{1}{\tau^2}\left[\frac{1}{(-\mathrm{j}\omega)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}(-\mathrm{j}\omega t-1)\right]\Bigg|_{0}^{\tau}$$

$$=\frac{1}{\tau(-\mathrm{j}\omega)}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau})+\frac{1}{\tau(-\mathrm{j}\omega)}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}-1)$$
$$+\frac{1}{\tau^2}\left[-\frac{1}{(-\mathrm{j}\omega)^2}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}}{(-\mathrm{j}\omega)^2}(\mathrm{j}\omega\tau-1)\right]$$
$$-\frac{1}{\tau^2}\left[\frac{1}{(-\mathrm{j}\omega)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\cdot(-\mathrm{j}\omega\tau-1)-\frac{1}{(-\mathrm{j}\omega)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{\tau^2(-\mathrm{j}\omega)^2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\right]=\frac{2}{\tau^2(-\mathrm{j}\omega)^2}\cos(\omega\tau)=\frac{2\cos(\omega\tau)}{\tau^2\omega^2}$$

$$\lim_{\tau\to 0}F(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\tau\to 0}\left[-\frac{2\cos(\omega\tau)}{\tau^2\omega^2}\right]$$

上式利用两次洛必达法则得

$$\lim_{\tau\to 0}\cos(\omega\tau)=1$$

所以
$$f(t)=\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{|t|}{\tau}\right)\left[\varepsilon(t+\tau)-\varepsilon(t-\tau)\right]$$

当 $\tau\to 0$ 时，可作为单位冲激函数的近似。

(4) $$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left[\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2+\mathrm{j}\omega t\right]}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\tau}\sqrt{\pi}\cdot\frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\cdot\mathrm{e}^{-\left(\frac{\omega\cdot\tau/\sqrt{\pi}}{2}\right)^2}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{\omega\tau}{2\sqrt{\pi}}\right)^2}$$

当 $\tau\to 0$ 时，
$$F(\mathrm{j}\omega)\to 1$$

所以得证。

【3-23】 已知 $f_1(t)$ 的傅里叶变换为 $F_1(\mathrm{j}\omega)$，将 $f_1(t)$ 按图 3-17 的波形关系构成周期信号 $f_2(t)$，求此周期信号的傅里叶变换。

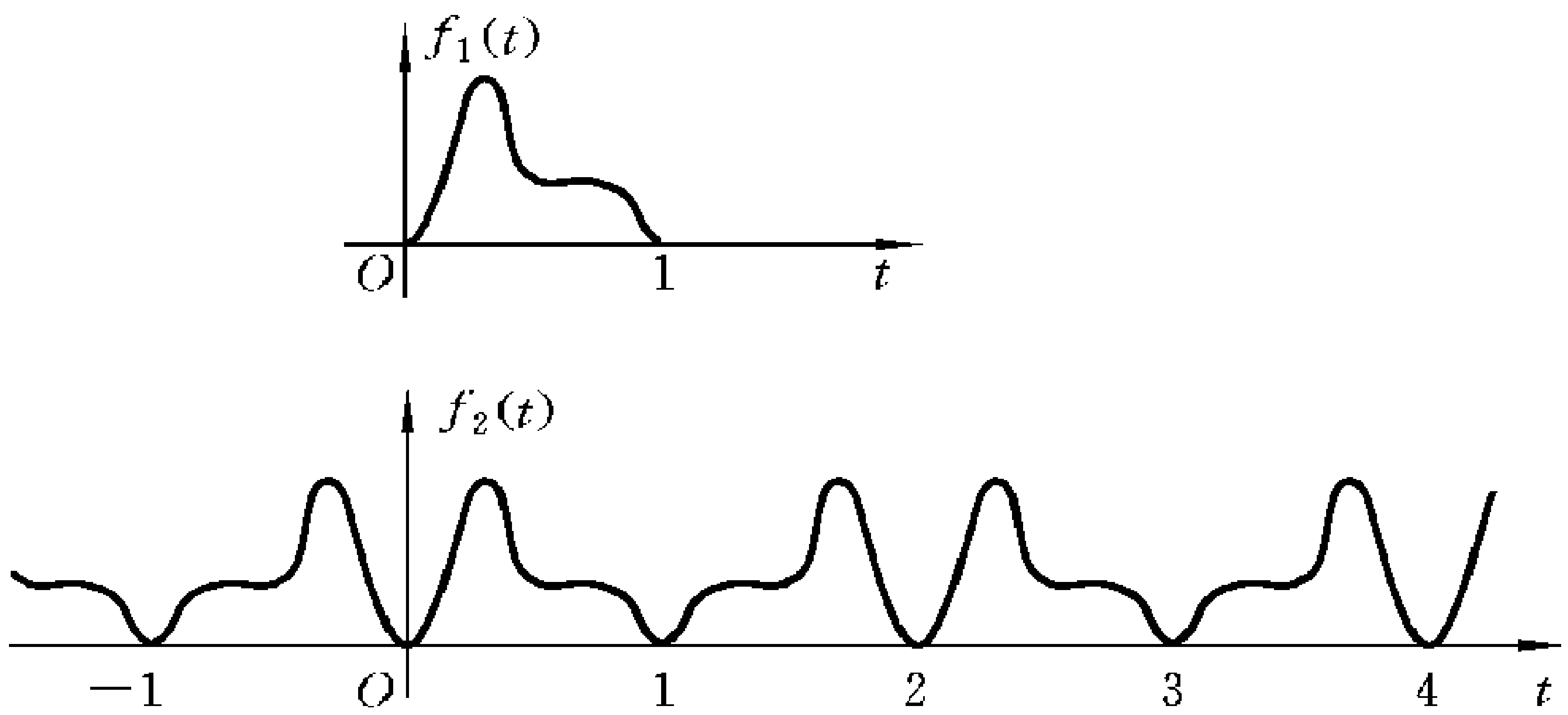


图 3-17

解　$$f_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f_1(t-nT)+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f_1(-t-nT)$$

$$=f_1(t)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)+f_1(-t)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(-t-nT)$$

则有 $F_2(\mathrm{j}\omega)=F_1(\mathrm{j}\omega)\Omega\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\Omega)+F_1(-\mathrm{j}\omega)\Omega\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(-\omega-n\Omega)$

$$=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_1(\mathrm{j}n\Omega)\delta(\omega-n\Omega)+\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(-\mathrm{j}n\Omega)\delta(-\omega-n\Omega)$$

因为 $T=2,\Omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$，所以

$$F_2(\mathrm{j}\omega)=\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_1(\mathrm{j}n\pi)\delta(\omega-n\pi)+\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_1(-\mathrm{j}n\pi)\delta(-\omega-n\pi)$$

又 $f_2(t)$ 为实偶函数，所以 $F_2(\mathrm{j}\omega)$ 中仅含有实部，即

$$F_2(\mathrm{j}\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}[F_1(\mathrm{j}n\pi)]\delta(\omega-n\pi)$$

【3-24】 三角形周期脉冲的电流如图 3-18 所示。

(1) 若 $T=8$，求此周期电流的平均值与方均值；

(2) 求此周期电流在单位电阻上消耗的平均功率、直流功率与交流功率，并用帕塞瓦尔定理核对结果。

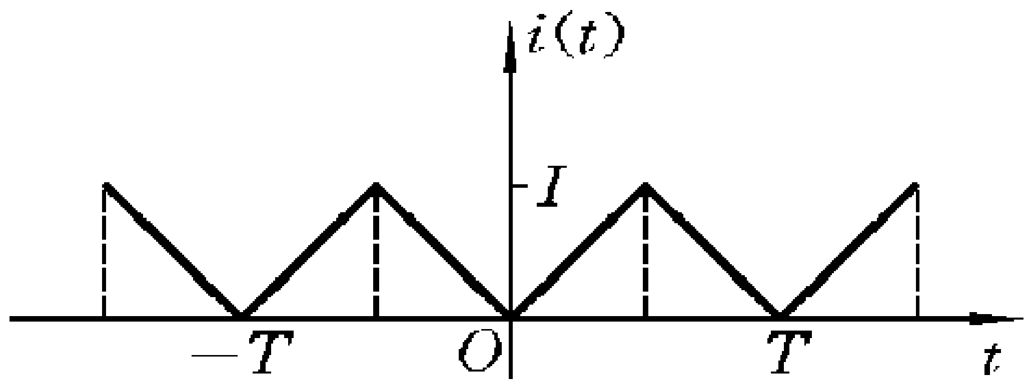


图 3-18

解 (1) $\overline{i(t)}=\frac{1}{T}\int_0^T i(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\times\frac{1}{2}\times T\times I=\frac{1}{2}I$

$$\sqrt{\overline{i^2(t)}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{2I}{T}\right)^2t^2\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{3}}{3}I$$

(2) 平均功率 $\overline{P}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}i^2(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{2I}{T}\right)^2t^2\mathrm{d}t$

$$=\frac{2}{T}\times\frac{4I^2}{T^2}\times\frac{T^3}{24}=\frac{1}{3}I^2$$

直流功率 $P_{\mathrm{DC}}=\left(\frac{A_0}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}i(t)\mathrm{d}t\right)^2$

$$=\left(\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2I}{T}t\mathrm{d}t\right)^2=\left(\frac{2}{T}\times\frac{2I}{T}\times\frac{T^2}{8}\right)^2=\frac{1}{4}I^2$$

交流功率　$P_{AC}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{A_n}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)$

又$i(t)$为偶函数，所以$b_n=0$，故

$$P_{AC}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}i(t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t\right)^2$$

$$=\frac{8}{T^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2I}{T}t\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t\right)^2=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^4\frac{I}{4}t\cos\frac{n\pi t}{4}\mathrm{d}t\right)^2=\frac{1}{12}I^2$$

因为　$$P_{AC}+P_{DC}=\overline{P}$$

所以符合帕塞瓦尔定理。

【3-25】　求图 3-19 所示三角形周期信号的沃尔什级数中不为零的前三项。

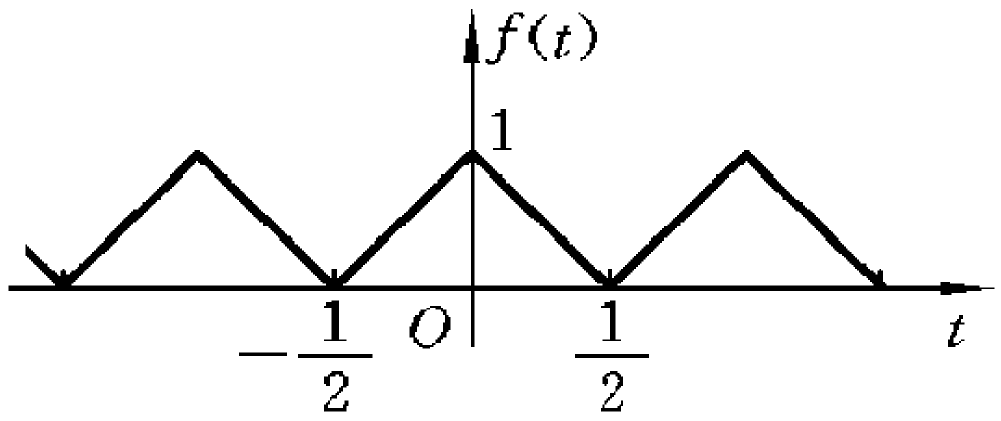


图 3-19

解　由图可知，$f(t)$是偶函数，故沃尔什级数系数$B_s=0$，所以

$$f(t)=a_0+\sum_{s=1}^{+\infty}a_s\mathrm{Cal}(s,t)$$

而
$$f(t)=\begin{cases}-2\left(t-\frac{1}{2}\right), & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ 2\left(t-\frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

由上式可知，在$0\leqslant t\leqslant 1$时，$f(t)$与$\mathrm{Cal}(s,t)$对$t=\frac{1}{2}$都是对称的，故求系数a_s时，积分区间取$\left[0,\frac{1}{2}\right]$即可。

$$a_0=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{1}{2}}-2\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t=-4\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=0.5$$

$$a_1=\int_0^1 f(t)\mathrm{Cal}(1,t)\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{1}{2}}-2\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Wal}(2,t)\mathrm{d}t$$

$$=-4\int_0^{\frac{1}{4}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t+4\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-2[t^2-t]\Bigg|_0^{\frac{1}{4}}+2[t^2-t]\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}=0.25$$

$$a_2=2\int_0^{\frac{1}{2}}f(t)\mathrm{Cal}(2,t)\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{1}{2}}-2\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Wal}(4,t)\mathrm{d}t$$

$$=4\left[-\int_0^{\frac{1}{8}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{3}{8}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t-\int_{\frac{3}{8}}^{\frac{1}{2}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t\right]$$

$$=2\left\{-[t^2-t]\Big|_0^{\frac{1}{8}}+[t^2-t]\Big|_{\frac{1}{8}}^{\frac{3}{8}}-[t^2-t]\Big|_{\frac{3}{8}}^{\frac{1}{2}}\right\}=0$$

$$a_3=2\int_0^{\frac{1}{2}}f(t)\mathrm{Cal}(3,t)\mathrm{d}t=-4\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Wal}(6,t)\mathrm{d}t$$

$$=4\left[-\int_0^{\frac{1}{8}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{8}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t+\int_{\frac{3}{8}}^{\frac{1}{2}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t\right]$$

$$=2\left\{-[t^2-t]\Big|_0^{\frac{1}{8}}+[t^2-t]\Big|_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}-[t^2-t]\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{8}}+[t^2-t]\Big|_{3/8}^{1/2}\right\}=\frac{1}{8}$$

所以
$$f(t)\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{Cal}(1,t)+\frac{1}{8}\mathrm{Cal}(3,t)$$

同理可得
$$a_4=a_5=a_6=0,\quad a_7=\frac{1}{16},\quad\cdots$$

【3-26】 证明沃尔什级数展开时，帕塞瓦尔定理关系式成立。

$$\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t=\sum_{m=0}^{+\infty}d_m^2$$

证明　$f(t)$的沃尔什级数可表示为

$$f(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}d_m\mathrm{Wal}(m,t)$$

而
$$f^2(t)=\left[\sum_{m=0}^{+\infty}d_m\mathrm{Wal}(m,t)\right]^2=d_0^2\mathrm{Wal}(0,t)+d_1^2\mathrm{Wal}^2(1,t)+d_2^2\mathrm{Wal}^2(2,t)+\cdots$$
$$+d_n^2\mathrm{Wal}^2(n,t)+\cdots+d_0d_1\mathrm{Wal}(0,t)\cdot\mathrm{Wal}(1,t)$$
$$+d_0d_2\mathrm{Wal}(0,t)\cdot\mathrm{Wal}(2,t)+\cdots+d_id_j\mathrm{Wal}(i,t)\cdot\mathrm{Wal}(j,t)+\cdots$$

根据沃尔什级数的正交完备性有

$$\int_0^1\mathrm{Wal}(i,t)\cdot\mathrm{Wal}(j,t)\mathrm{d}t=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$$

所以
$$\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t=\int_0^1\left[\sum_{m=0}^{+\infty}d_m\mathrm{Wal}(m,t)\right]^2\mathrm{d}t=d_0^2+d_1^2+d_2^2+\cdots=\sum_{m=0}^{+\infty}d_m^2$$

第四章　连续时间系统的频域分析

4-1　基本要求

本章要求掌握系统时域特性与频域特性之间的关系；要求理解理想低通、高通、带通和全通滤波器的概念。重点掌握系统频域响应函数的概念、线性系统零状态响应的频域分析方法及无失真传输的条件。

4-2　重点、难点学习指导

1. 系统的频率响应

(1) 定义

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{R_{zs}(\mathrm{j}\omega)}{E(\mathrm{j}\omega)}$$

式中，$E(\mathrm{j}\omega)$为激励$e(t)$的傅里叶变换；$R_{zs}(\mathrm{j}\omega)$为系统零状态响应。

(2) 物理意义

设输入信号$e(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，则系统的零状态响应为

$$\begin{aligned}R_{zs}(\mathrm{j}\omega)&=h(t)*\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\end{aligned}$$

可见，系统的零状态响应$R_{zs}(\mathrm{j}\omega)$等于激励$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$乘以加权函数$H(\mathrm{j}\omega)$，此加权函数$H(\mathrm{j}\omega)$即为系统的频率响应，也是$h(t)$的傅里叶变换。

(3) 频率特性

$H(\mathrm{j}\omega)$一般为复数函数，故可写成

$$H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)$$

$|H(\mathrm{j}\omega)|$和$\varphi(\omega)$分别称为系统的幅频特性和相频特性，总称为系统的频率特性，也称为频率响应。$|H(\mathrm{j}\omega)|$和$R(\omega)$为ω的偶函数，$\varphi(\omega)$和$X(\omega)$为ω的奇函数。

(4) $H(\mathrm{j}\omega)$可实现的条件

① 在时域中，必须满足当$t<0$时，$h(t)=0$，即系统必须是因果系统；

② 在频域中，系统可实现的必要条件为$H(\mathrm{j}\omega)\neq 0$，即必须满足佩利-维纳准则：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\ln|H(\mathrm{j}\omega)||}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega<\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H^2(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega<\infty$$

2. 线性时不变系统零状态响应的求解步骤

① 求激励信号$e(t)$的傅里叶变换$E(\mathrm{j}\omega)$；

② 求系统的频率响应$H(\mathrm{j}\omega)$；

③ 求零状态响应$r_{zs}(t)$的傅里叶变换$R_{zs}(\mathrm{j}\omega)$，即$R_{zs}(\mathrm{j}\omega)=E(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$；

④ 求该系统的时域零状态响应，即$r_{zs}(t)=\mathscr{F}^{-1}[R_{zs}(\mathrm{j}\omega)]$。

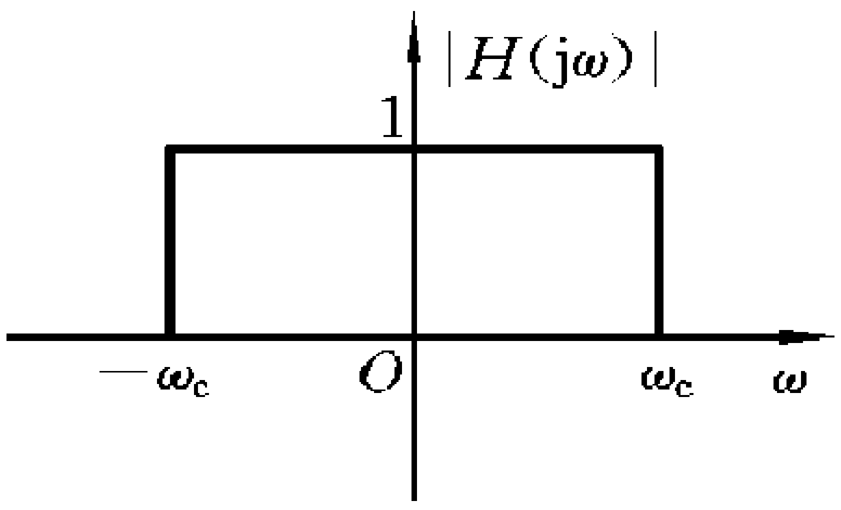
3. 理想低通滤波器及其传输特性

(1) 理想低通滤波器的频域特性

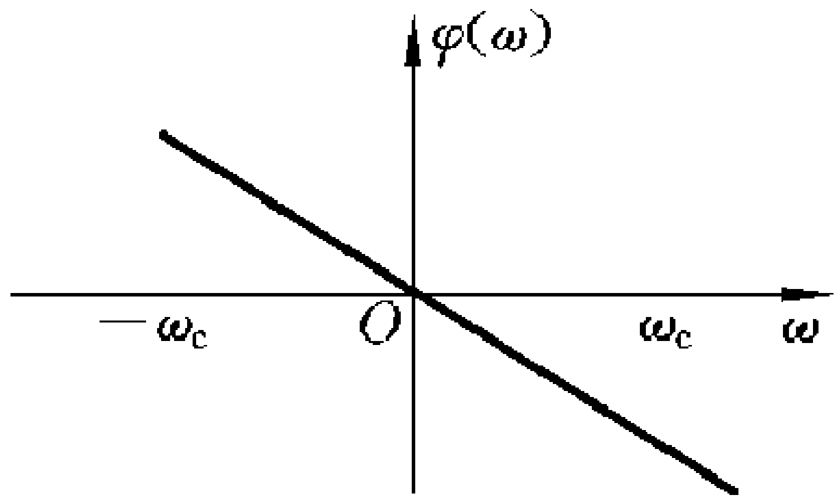
理想低通滤波器的频域特性如图4-1所示，其系统函数为

$$H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}, & |\omega|\leqslant\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

这种低通滤波器将频率低于某一频率ω_c的所有信号无失真传输，而将频率



(a) 幅频特性



(b) 相频特性

图 4-1

高于 ω_c 的信号完全抑制，ω_c 称为截止频率。相移特性是通过原点的直线。

(2) 理想低通滤波器的冲激响应

理想低通滤波器的冲激响应为

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_c(t - t_0)]$$

理想低通滤波器的冲激响应是一个延时的抽样响应，峰值位于 t_0 时刻，其波形如图 4-2 所示。

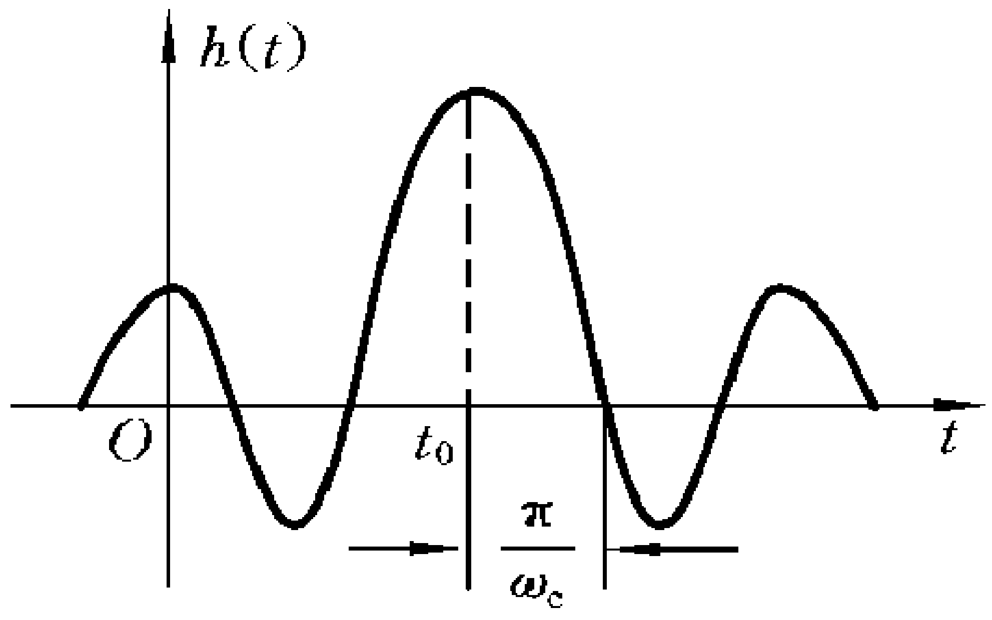


图 4-2

由图可以看出，激励信号$\delta(t)$在$t=0$ 时刻加入，但响应在 t 为负值时就已经出现，由此表明系统是非因果的，违背因果规律的系统是物理不可实现的。然而，有关理想滤波器的研究并不因其无法实现而失去价值，实际滤波器的分析与设计往往需要理想滤波器的理论作指导。

(3) 理想低通滤波器的阶跃响应

理想低通滤波器的阶跃响应为

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{Si}[\omega_c(t - t_0)]$$

响应的波形如图 4-3 所示，其最大峰值所对应的时刻为 $t_0+\dfrac{\pi}{\omega_c}$。由图可见，理想低通滤波器的截止频率 ω_c 越大，输出 $g(t)$上升越快。如果定义输出由最小值到最大值所需时间为上升时间 t_r，则

$$t_r = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{1}{f_c}$$

式中，f_c 为滤波器带宽。可见，阶跃响应的上升时间与系统的带宽成反比。这一重要结论具有普遍意义，适用于各种实际滤波器。

4. 无失真传输的条件

时域：　　$r(t)=ke(t-t_0)$

频域：　　$H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$

或　　$|H(\mathrm{j}\omega)|=k,\quad \varphi(\omega)=-\omega t_0$

式中，k 和 t_0 均为常数。

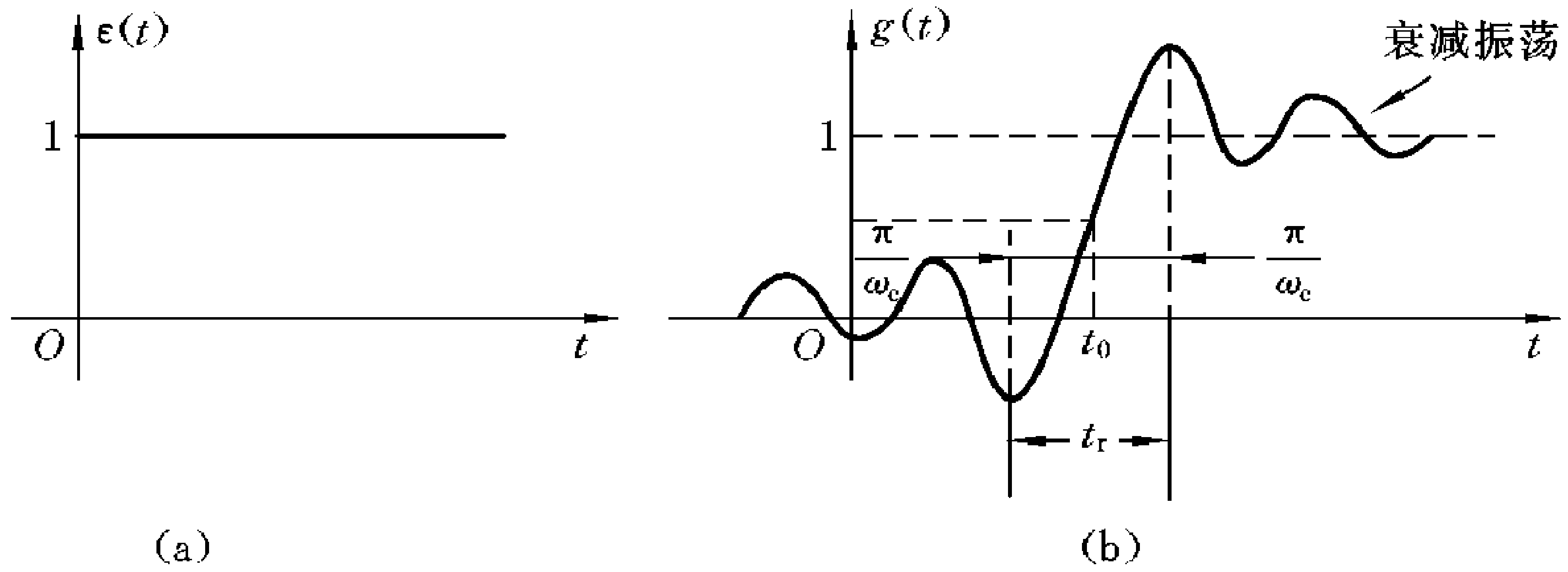


图 4-3

4-3　习题详解

【4-1】　正弦交流电压$A\sin(\pi t)$，经全波整流产生如图4-4(b)所示的周期性正弦脉冲信号。求此信号通过图4-4(a)所示的RC 电路滤波后，输出响应中不为零的前三个分量。

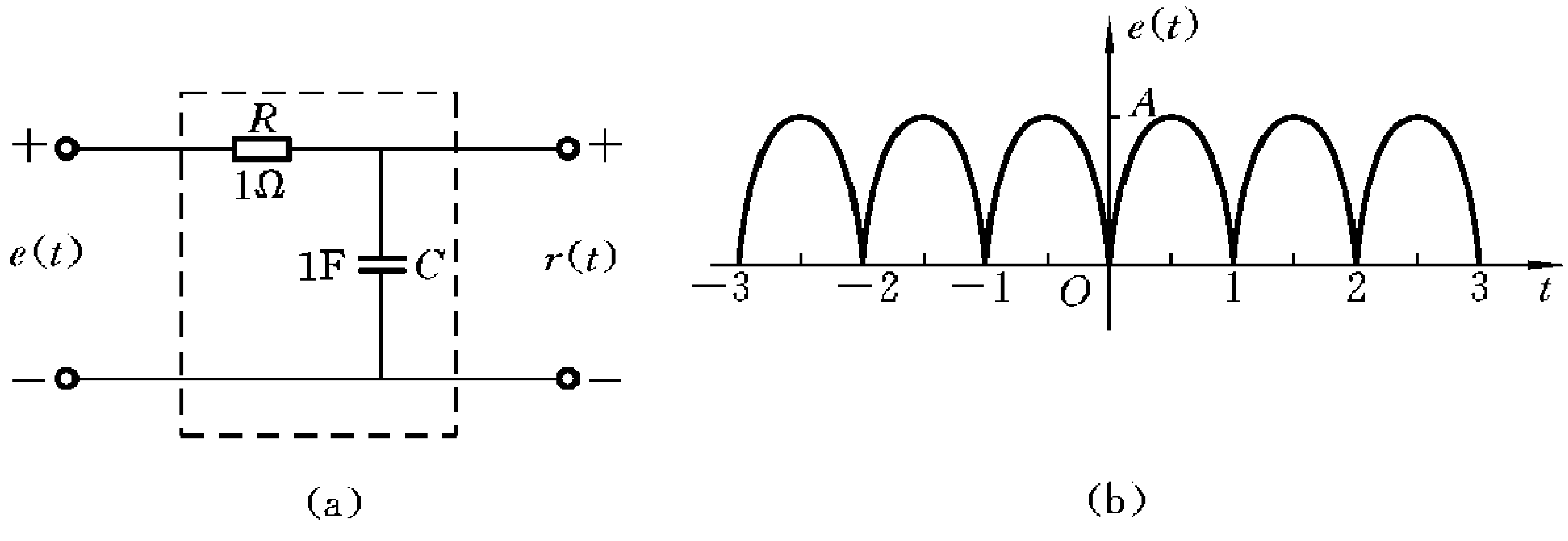


图 4-4

解　由图 4-4(b)可知$T=2$，所以

$$\Omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

又

$$e(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(n\pi t)+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin(n\pi t)$$

$$e(t)=\begin{cases}A\sin(\pi t), & 0\leqslant t\leqslant 1\\ -A\sin(\pi t), & 1\leqslant t\leqslant 2\end{cases}$$

因为$e(t)$为偶函数与偶谐函数，所以$b_n=0$，且a_n中仅取偶数：

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_0^T e(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1 A\sin(\pi t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_1^2 -A\sin(\pi t)\mathrm{d}t=\frac{2A}{\pi}$$

$$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e(t)\cos(n\pi t)\mathrm{d}t=2\int_0^1 A\sin(\pi t)\cos(n\pi t)\mathrm{d}t$$

$$=2A\left[-\frac{\cos\pi(n-1)t}{2(1-n)\pi}-\frac{\cos\pi(n+1)t}{2(1+n)\pi}\right]\Bigg|_0^1$$

$$=-\frac{A}{2}\left[\frac{-2}{(1+n)\pi}+\frac{-2}{(1-n)\pi}+\frac{2\cos(1+n)\pi}{(1+n)\pi}+\frac{2\cos(1-n)\pi}{(1-n)\pi}\right]$$

$$=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数}\\ 2A\left[\dfrac{1}{(1-n)\pi}+\dfrac{1}{(1+n)\pi}\right]=\dfrac{4A}{(1-n^2)\pi}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

所以

$$e(t)=\frac{2A}{\pi}-\frac{4A}{3\pi}\cos(2\pi t)-\frac{4A}{15\pi}\cos(4\pi t)-\frac{4A}{35\pi}\cos(6\pi t)\cdots$$

输出直流分量　　$A_0=E_0=\dfrac{2A}{\pi}$

输出n次谐波分量　　$\dot{A}_n=\dot{k}_n\dot{E}_n$

而

$$\dot{k}_n=\frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}n\pi C}}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}n\pi C}}\Bigg|_{\substack{R=1\Omega\\ C=1\mathrm{F}}}=\frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}n\pi}}{1+\dfrac{1}{\mathrm{j}n\pi}}=\frac{-\mathrm{j}}{n\pi-\mathrm{j}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+n^2\pi^2}}\angle\arctan(n\pi)$$

$$\dot{E}_n=\frac{4A}{(1-n^2)\pi}\quad(\text{其中 }n\text{ 为偶数})$$

所以

$$\dot{A}_n=\dot{k}_n\dot{E}_n=\frac{1}{\sqrt{1+n^2\pi^2}}\cdot\frac{4A}{(1-n^2)\pi}\angle\arctan(n\pi)\quad(n\text{ 为偶数})$$

将$n=2,4,6,8,\cdots$代入可得各频率分量的输出。

总输出为

$$r(t)=\frac{2A}{\pi}-\frac{4A}{3\pi\sqrt{1+4\pi^2}}\cos(2\pi t-\arctan(2\pi))$$
$$-\frac{4A}{15\pi\sqrt{1+16\pi^2}}\cos(4\pi t-\arctan(4\pi))-\cdots$$

【4-2】 图 4-5(b)所示的周期性矩形脉冲信号，其频率 $f=10$ kHz，加到一谐振频率为 $f_0=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=30$ kHz 的并联谐振电路(见图 4-5(a))上，以取得三倍频信号输出。并联谐振电路的转移函数为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

如要求输出中其他分量的幅度小于三次谐波分量幅度的 1%，求并联谐振电路的品质因数 Q。

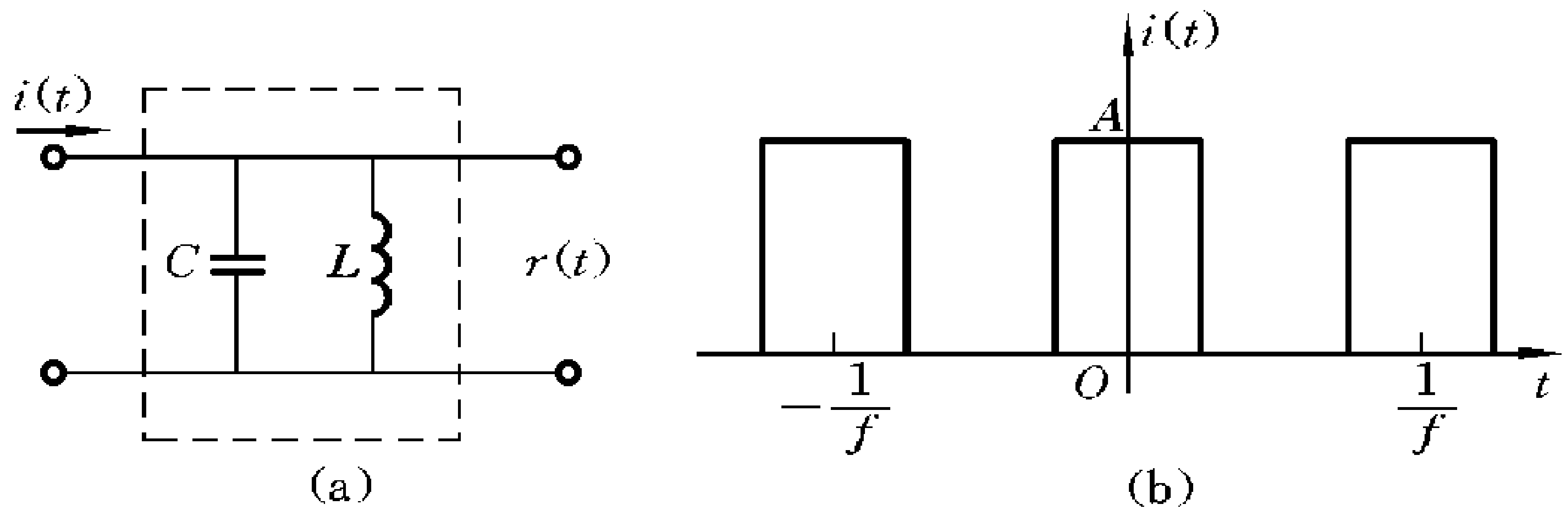


图 4-5

解　将 $i(t)$ 展开为傅里叶级数：

$$i(t)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\left[\cos(\omega t)-\frac{1}{3}\cos(3\omega t)+\frac{1}{5}\cos(5\omega t)-\frac{1}{7}\cos(7\omega t)+\cdots\right]$$

由于该电路的主要输出为 30 kHz 的正弦信号，即三次谐波分量，所以回路应对三次谐波调谐。其邻近谐波为基波和五次谐波。又因为谐振曲线是对称的，且基波幅度大于五次谐波，所以仅需考虑基波的输出幅度是否小于三次谐波输出幅度的 $\dfrac{1}{100}$。

$$H_3=\left|\frac{1}{1+\mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega_0}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega_0}\right)}\right|=1$$

$$R_{\mathrm{m}3}=I_{\mathrm{m}3}\cdot H_3=\frac{2A}{3\pi}\cdot 1=\frac{2A}{3\pi}$$

$$H_1=\left|\frac{1}{1+\mathrm{j}Q\left(\dfrac{\frac{1}{3}\omega_0}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\frac{1}{3}\omega_0}\right)}\right|=\left|\frac{1}{1+\mathrm{j}Q\left(\frac{1}{3}-3\right)}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(-\frac{8}{3}\right)^2}}$$

$$R_{\mathrm{m}1}=I_{\mathrm{m}1}\cdot H_1=\frac{2A}{\pi\sqrt{1+Q^2\frac{64}{9}}}$$

根据题意，应有 $R_{\mathrm{m}1}\leqslant 0.01R_{\mathrm{m}3}$，即

$$\frac{2A}{\pi\sqrt{1+Q^2\frac{64}{9}}}\leqslant 0.01\cdot\frac{2A}{3\pi}\Rightarrow 1+Q^2\frac{64}{9}\geqslant(300)^2\Rightarrow\frac{64}{9}Q^2$$

$$\geqslant(300)^2-1\approx(300)^2\Rightarrow Q^2\geqslant\frac{9}{64}(300)^2\Rightarrow Q\geqslant 112.5$$

【4-3】 如图 4-5(b)所示的周期性矩形脉冲信号，加到一个 90°相移网络上，其转移函数为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}-\mathrm{j}, & \omega>0\\ \mathrm{j}, & \omega<0\end{cases}$$

试求输出中不为零的前三个分量，并叠加绘出响应的近似波形。与激励中前三个分量叠加的波形作比较。

解　因为 $-\mathrm{j}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$，$\mathrm{j}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$，$R(\mathrm{j}\omega)=E(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$，所以

$$r(t)=e(t)*h(t)$$

又

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{4n}},\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega T}{4n}}$$

所以
$$\delta\left(t-\frac{T}{4n}\right) \longleftrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{4n}} \quad (t>0)$$
$$\delta\left(t+\frac{T}{4n}\right) \longleftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega T}{4n}} \quad (t<0)$$

故
$$\begin{aligned} r(t) &= i(t) * \delta\left(t-\frac{T}{4n}\right) = i\left(t-\frac{T}{4n}\right) \\ &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left[\cos\omega\left(t-\frac{T}{4}\right) - \frac{1}{3}\cos 3\omega\left(t-\frac{T}{12}\right) + \cdots\right] \\ &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{3}\sin(3\omega t)\right] + \cdots \end{aligned}$$

$r(t)$表达式中不为零的前三个分量分别为
$$\frac{A}{2}, \quad \frac{2A}{\pi}\sin(\omega t), \quad -\frac{2A}{3\pi}\sin(3\omega t)$$

其波形如图 4-6 中虚线所示。由波形叠加性，可绘出响应$r(t)$的近似波形，如图 4-6 中实线所示。将图 4-5(b)所示的周期性矩形脉冲信号进行傅里叶级数

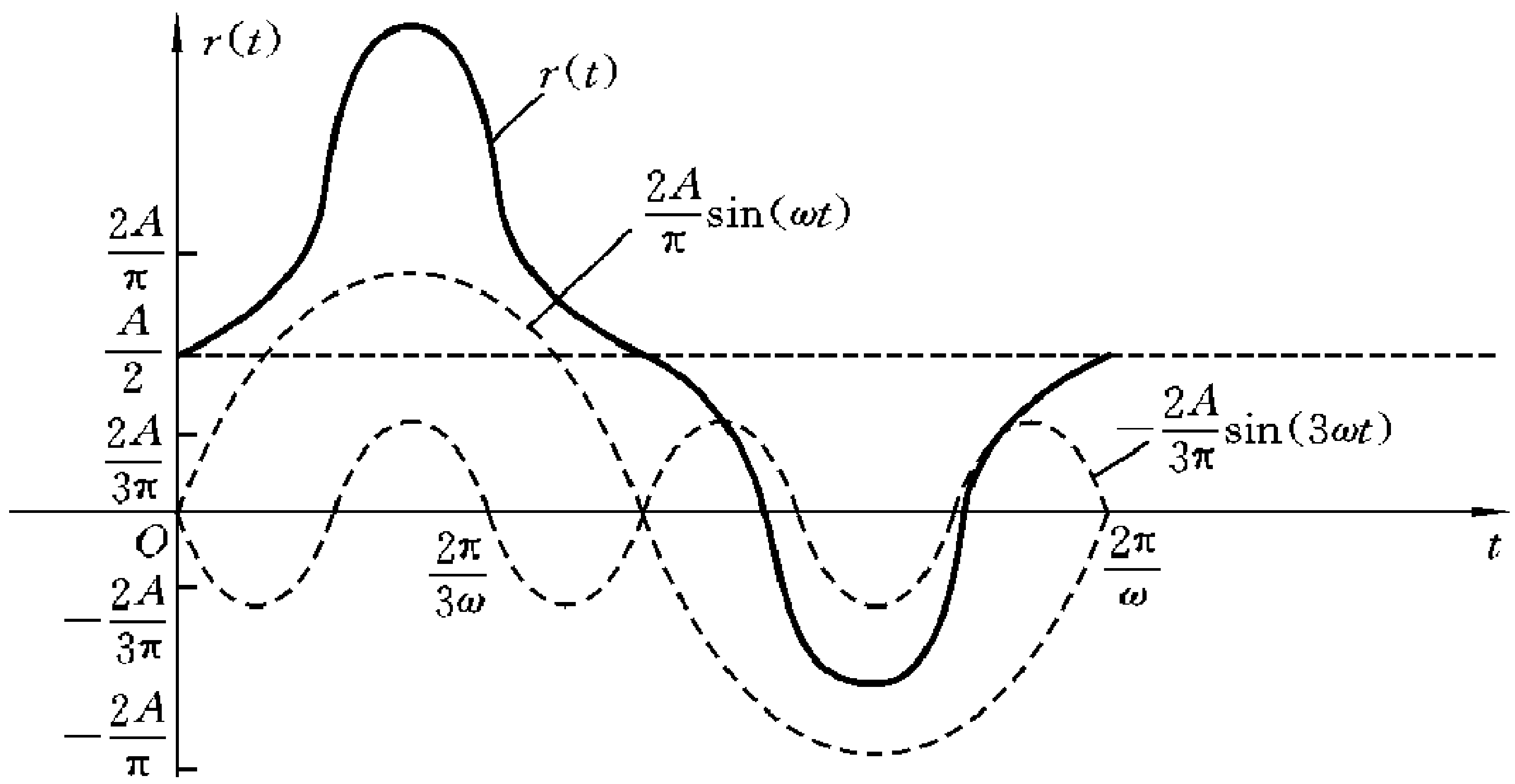


图 4-6

展开，得
$$i(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left[\cos(\omega t) - \frac{1}{3}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5}\cos(5\omega t) + \cdots\right]$$

其中前三个分量分别为

$$\frac{A}{2},\quad \frac{2A}{\pi}\cos(\omega t),\quad -\frac{2A}{3\pi}\cos(3\omega t)$$

其波形如图 4-7 中虚线所示。由波形叠加性，可绘出激励 $i(t)$ 的近似波形，如图 4-7 中实线所示。

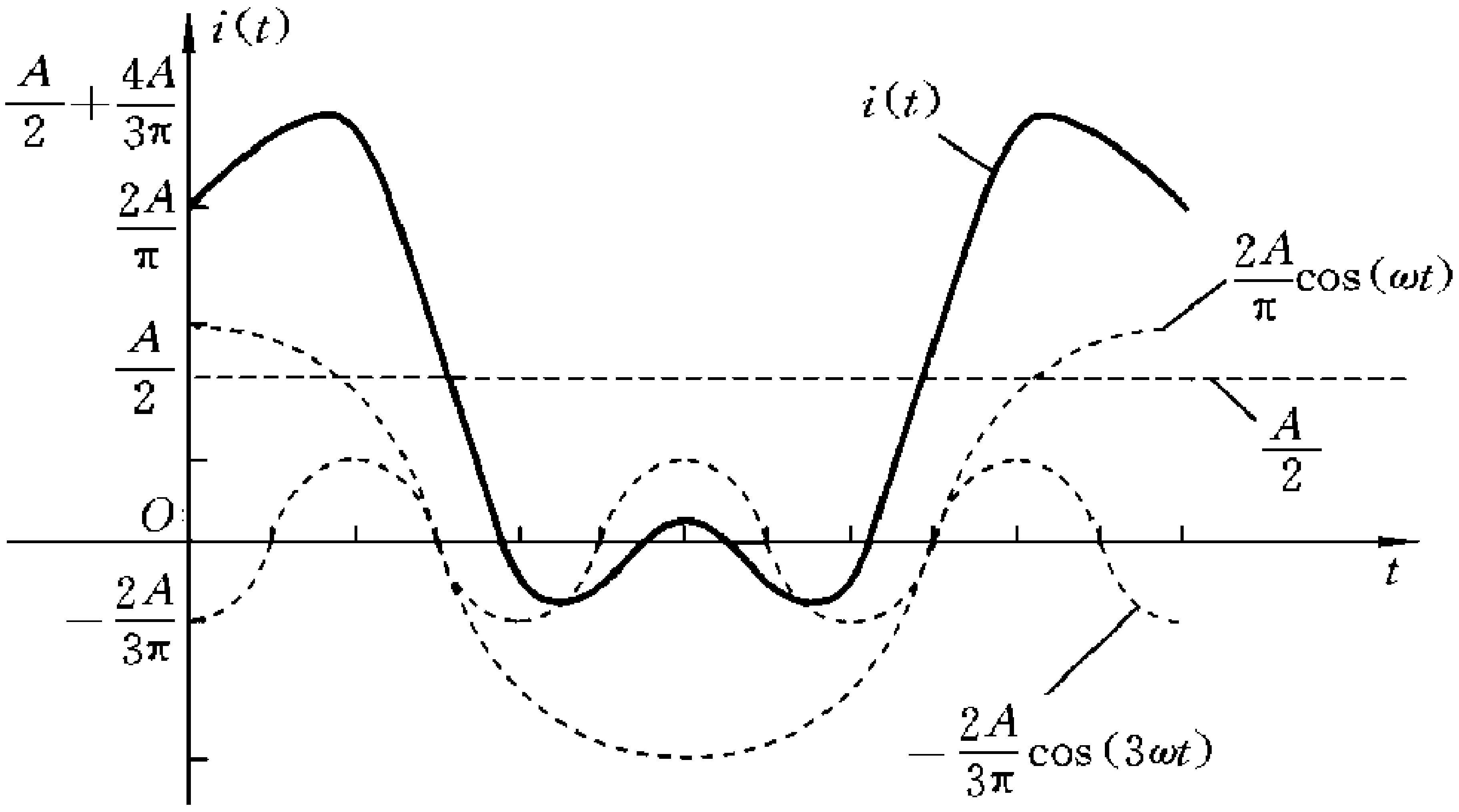


图 4-7

【4-4】 设系统转移函数为 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1-\mathrm{j}\omega}{1+\mathrm{j}\omega}$，试求其单位冲激响应、单位阶跃响应及 $e(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$ 时的零状态响应。

解　因为
$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1-\mathrm{j}\omega}{1+\mathrm{j}\omega}=-1+\frac{2}{1+\mathrm{j}\omega}$$

$$\delta(t)\longleftrightarrow 1,\quad \mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)\longleftrightarrow \frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$$

所以单位冲激响应
$$h(t)=-\delta(t)+2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

当 $e(t)$ 为单位阶跃函数即 $e(t)=\varepsilon(t)$ 时，由于

$$\varepsilon(t)\longleftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

所以
$$E(\mathrm{j}\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

$$R(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)E(\mathrm{j}\omega)=\left(\frac{2}{1+\mathrm{j}\omega}-1\right)\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$$

$$=\frac{2}{1+\mathrm{j}\omega}\cdot\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\frac{2\pi\delta(\omega)}{1+\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}-\pi\delta(\omega)$$

$$\xlongequal{f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)} \frac{-2}{1+\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$$

单位阶跃响应 $r_\varepsilon(t)=-2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+\varepsilon(t)=(1-2\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$

当 $e(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$ 时，$E(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{2+\mathrm{j}\omega}$，所以

$$R(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2+\mathrm{j}\omega}\cdot\frac{1-\mathrm{j}\omega}{1+\mathrm{j}\omega}=\frac{-3}{2+\mathrm{j}\omega}+\frac{2}{1+\mathrm{j}\omega}$$

$$r_{zs}(t)=(2\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

【4-5】 设系统转移函数为 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{\mathrm{j}2\omega+3}{-\omega^2+\mathrm{j}3\omega+2}$，试求其冲激响应及 $e(t)=\mathrm{e}^{-1.5t}\varepsilon(t)$ 时的零状态响应。

解　因为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}2\omega+3}{-\omega^2+\mathrm{j}3\omega+2}=\frac{2}{\mathrm{j}\omega+1}-\frac{1}{\mathrm{j}\omega+1}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega+2}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+1}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega+2}$$

所以冲激响应　　$h(t)=(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$

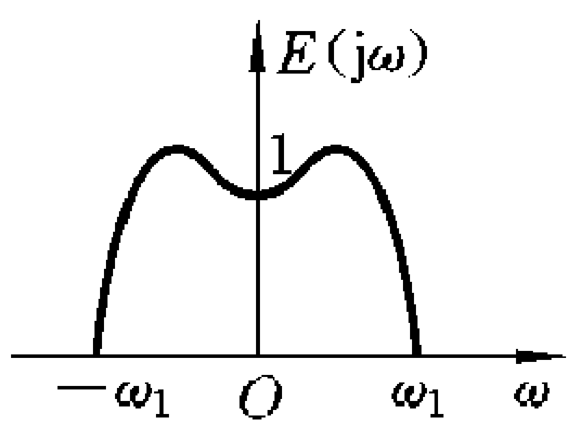
又　　$R_{zs}(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)E(\mathrm{j}\omega)=\left(\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega+1}+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega+2}\right)\left(\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega+1.5}\right)$

$$=\frac{2}{\mathrm{j}\omega+1}-\frac{2}{\mathrm{j}\omega+2}$$

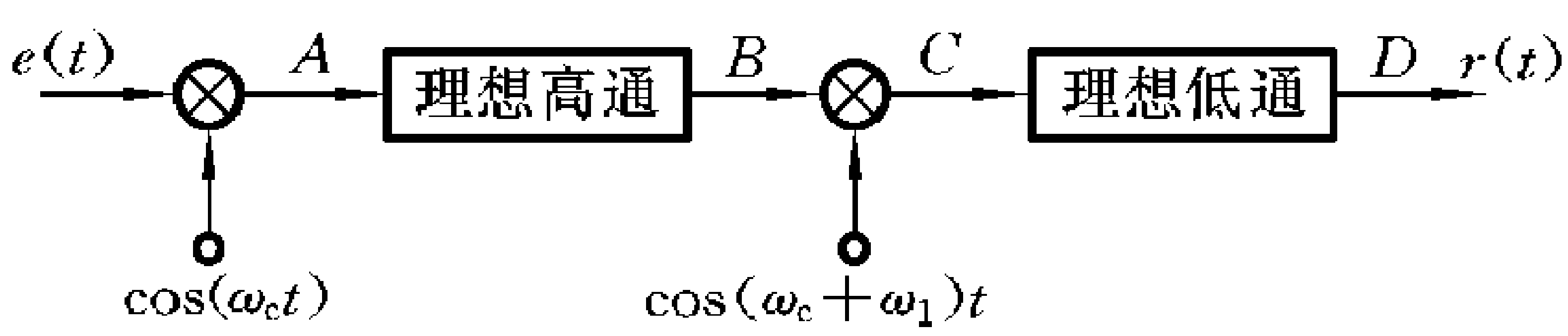
所以 $e(t)=\mathrm{e}^{-1.5t}\varepsilon(t)$ 时的零状态响应为

$$r_{zs}(t)=2(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

【4-6】 一带限信号的频谱如图4-8(a)所示，若此信号通过如图4-8(b)所示系统。试绘出 A,B,C,D 各点的信号频谱的图形。系统中两个理想滤波器的截止频率均为 ω_c，通带内传输值为1，相移均为零。$\omega_c\gg\omega_1$。



(a)



(b)

图 4-8

解　A,B,C,D 各点的信号频谱图如图4-9所示。

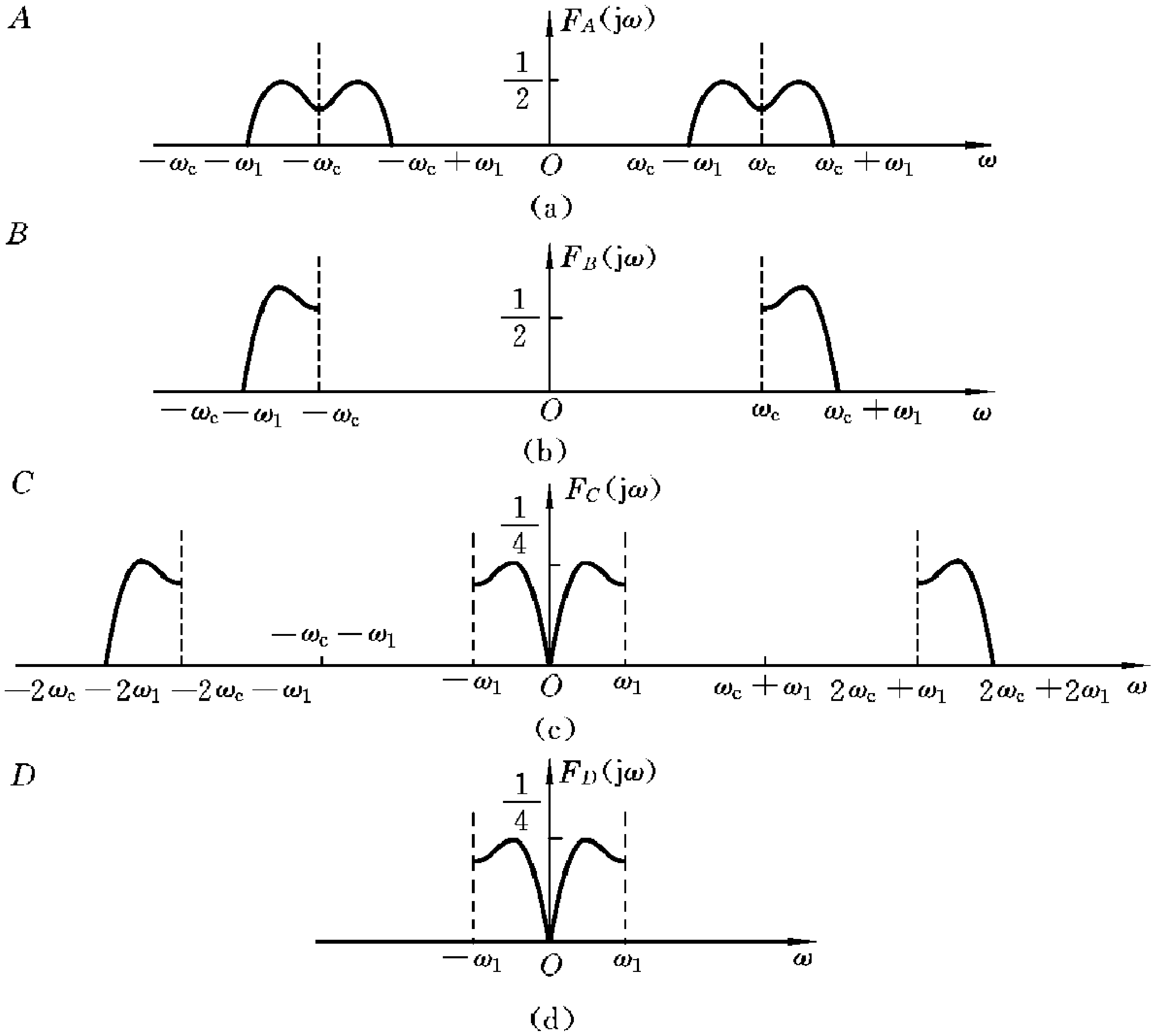


图4-9

【4-7】　理想高通滤波器的传输特性如图4-10所示，亦即其转移函数为

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{-j\varphi(\omega)}=\begin{cases}Ke^{-j\omega t_0}, & |\omega|>\omega_{c0}\\ 0, & |\omega|<\omega_{c0}\end{cases}$$

求其单位冲激响应。

解　引入一个门函数 $G_{2\omega_{c0}}(\omega)$，如图4-11所示，于是可将 $|H(j\omega)|$ 写为 $|H(j\omega)|=K[1-G_{2\omega_{c0}}(\omega)]$，又因为

$$1-G_{2\omega_{c0}}(\omega)\longleftrightarrow\delta(t)-\frac{\omega_{c0}}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_{c0}t)$$

所以　$$h(t)=\mathscr{F}^{-1}\{H(j\omega)\}=\mathscr{F}^{-1}\{|H(j\omega)|e^{-j\omega t_0}\}$$

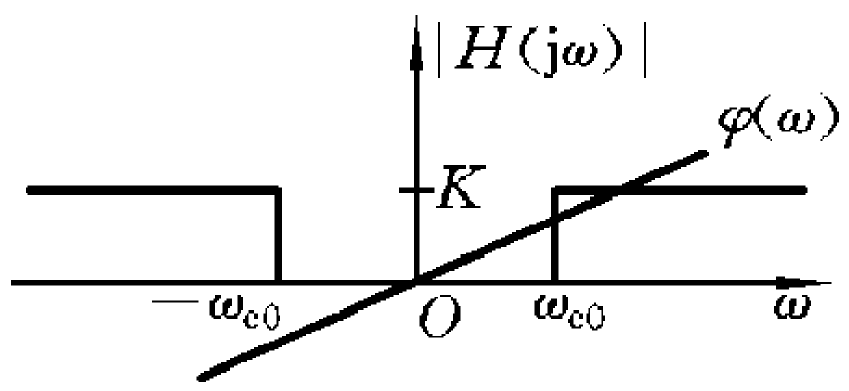


图 4-10

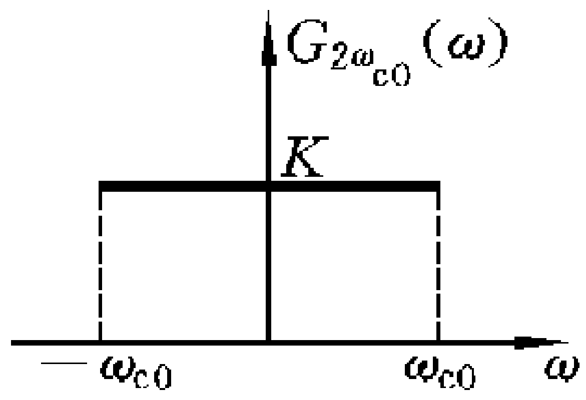


图 4-11

$$=\mathscr{F}^{-1}\{K[1-G_{2\omega_{c0}}(\omega)]e^{-j\omega t_0}\}=K\delta(t-t_0)-\frac{K\omega_{c0}}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_{c0}(t-t_0)]$$

【4-8】 求$e(t)=\dfrac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}$的信号通过图4-12(a)所示的系统后的输出。系统中理想带通滤波器的传输特性如图 4-12(b)所示,其相位特性$\varphi(\omega)=0$。

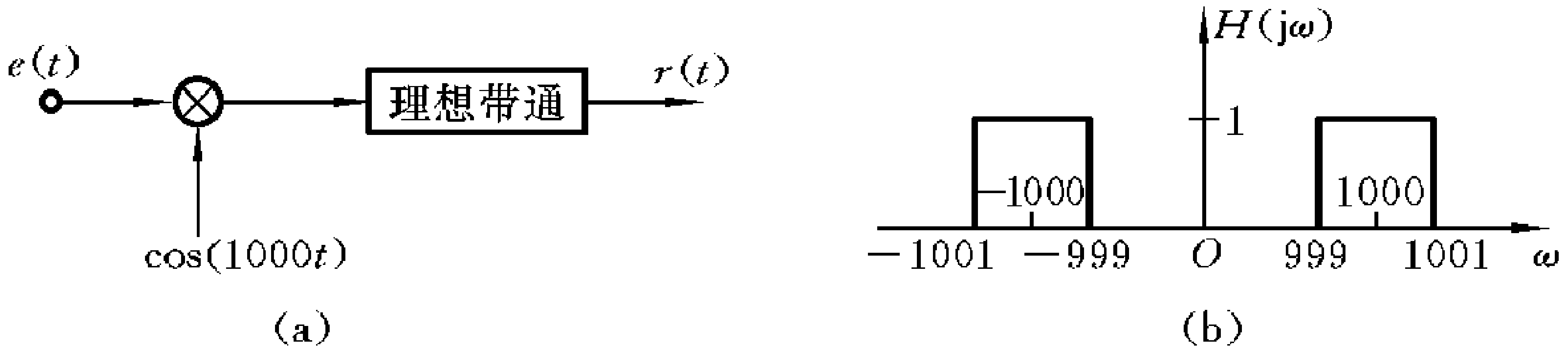


图 4-12

解 因为$G_\tau(t)\longleftrightarrow\tau\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$,取$\dfrac{\omega\tau}{2}=2\pi\omega$,得$\tau=4\pi$,故

$$G_{4\pi}(t)\longleftrightarrow 4\pi\mathrm{Sa}(2\pi\omega),\quad 2\pi G_{4\pi}(\omega)\longleftrightarrow 4\pi\mathrm{Sa}(2\pi t)$$

所以
$$E(j\omega)=\frac{1}{2}G_{4\pi}(\omega)$$

又
$$\mathscr{F}\{\cos(1000t)\}=\pi[\delta(\omega+1000)+\delta(\omega-1000)]$$

设输入理想带通的信号为$e_1(t)$,则

$$e_1(t)=e(t)\cdot\cos(1000t)$$

所以
$$\begin{aligned}E_1(j\omega)&=\frac{1}{2\pi}E(j\omega)*\mathscr{F}\{\cos(1000t)\}\\&=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}G_{4\pi}(\omega)*\pi[\delta(\omega+1000)+\delta(\omega-1000)]\right\}\\&=\frac{1}{4}[G_{4\pi}(\omega+1000)+G_{4\pi}(\omega-1000)]\end{aligned}$$

而　$R(\mathrm{j}\omega)=E_1(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{4}G_2(\omega+1000)+\frac{1}{4}G_2(\omega-1000)$

又因为　$$\mathscr{F}^{-1}\{G_2(\omega)\}=\frac{\sin t}{\pi t}=\frac{1}{\pi}\mathrm{Sa}(t)$$

所以 $r(t)=\frac{1}{4}\frac{\sin t}{\pi t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}1000t}+\frac{1}{4}\frac{\sin t}{\pi t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}1000t}$

$$=\frac{\sin t}{2\pi t}\cos(1000t)\quad(-\infty<t<+\infty)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Sa}(t)\cos(1000t)$$

【4-9】 有一调幅信号为

$$a(t)=A[1+0.3\cos(\omega_1 t)+0.1\cos(\omega_2 t)]\sin(\omega_c t)$$

式中　$$\omega_1=2\pi\times5\times10^3\ \mathrm{rad/s},\omega_2=2\pi\times3\times10^3\ \mathrm{rad/s},$$
$$\omega_c=2\pi\times45\times10^6\ \mathrm{rad/s},$$

$A=100$ V。试求：

(1) 部分调幅系数；

(2) 调幅信号包含的频率分量，绘出调制信号与调幅信号的频谱图，并求此调幅信号的频带宽度；

(3) 此调幅信号加到1 kΩ 电阻上产生的平均功率与峰值功率，载波功率与边频功率。

解　(1) 因为已调信号可表示为

$$a(t)=A_0\left[1+\sum_{1}^{n}m_n\cos(\Omega_n t+\varphi_n)\right]\cos(\omega_c t)$$

式中，m_n 表示调制信号中 n 次谐波分量对载频幅度控制程度的一个量，为部分调幅系数；而题中 $a(t)$ 的表达式形如上式。所以部分调幅系数为

$$m_1=0.3,\quad m_2=0.1$$

(2) 将已给调幅波按三角公式展开，得

$$\begin{aligned}a(t)&=[100+30\cos(\omega_1 t)+10\cos(\omega_2 t)]\sin(\omega_c t)\\&=100\sin(\omega_c t)+30\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_c t)+10\cos(\omega_2 t)\sin(\omega_c t)\\&=100\sin(\omega_c t)+15[\sin(\omega_1+\omega_c)t-\sin(\omega_1-\omega_c)t]\\&\quad+5[\sin(\omega_2+\omega_c)t-\sin(\omega_2-\omega_c)t]\\&=100\sin(\omega_c t)+15\sin(\omega_1+\omega_c)t-15\sin(\omega_1-\omega_c)t\\&\quad+5\sin(\omega_2+\omega_c)t-5\sin(\omega_2-\omega_c)t\end{aligned}$$

$$= 100\sin(\omega_c t) + 15\sin(\omega_c + \omega_1)t + 15\sin(\omega_c - \omega_1)t$$
$$+ 5\sin(\omega_c + \omega_2)t + 5\sin(\omega_c - \omega_2)t$$

该调幅波中包含五个正弦分量，即振幅为100 V的载频分量；振幅为15 V的一对上下边频分量，其频率分别为$\omega_c+\omega_1$、$\omega_c-\omega_1$；振幅为5 V的一对上下边频分量，其频率分别为$\omega_c+\omega_2$、$\omega_c-\omega_2$。

因为 $$E(j\omega)=F\left\{\sum_1^n E_{nm}\cos\Omega_n t\right\}=\sum_1^n \pi E_{nm}[\delta(\omega+\Omega_n)+\delta(\omega-\Omega_n)]$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\Omega} \Rightarrow \Omega = \frac{\omega}{2\pi}$$

所以 $$\Omega_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 5\times 10^3\ \text{Hz},\quad \Omega_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 3\times 10^3\ \text{Hz}$$

调制信号的频谱函数如图4-13所示。

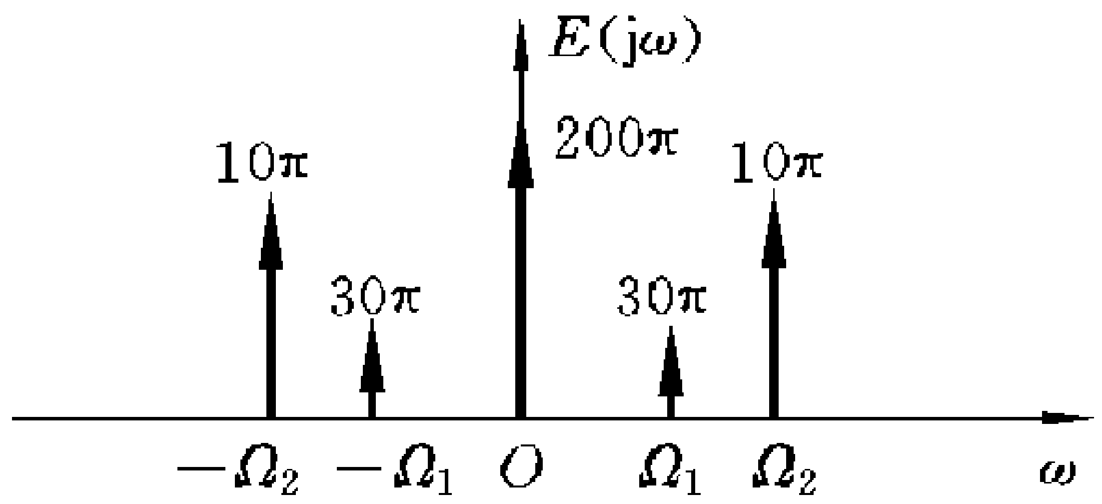


图4-13

因为 $$a(t)=100\sin(\omega_c t)+15\sin(\omega_c+\omega_1)t+15\sin(\omega_c-\omega_1)t$$
$$+5\sin(\omega_c+\omega_2)t+5\sin(\omega_c-\omega_2)t$$

得调幅信号的频谱函数如图4-14所示。

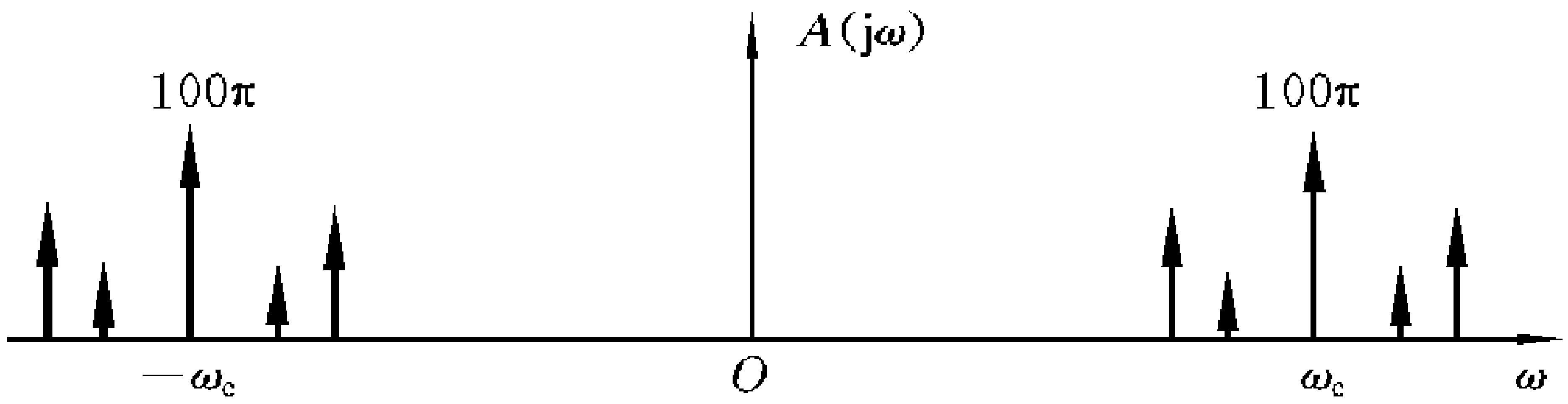


图4-14

调幅信号的频带宽度

$$B_A = 2\Omega_1 = 2\times 5\times 10^3\ \text{Hz} = 10\ \text{kHz}$$

(3) 平均功率为

$$\overline{P}=\frac{1}{2}\frac{U_{m0}^2}{R}+2\left(\frac{1}{2}\frac{U_{m1}^2}{R}+\frac{1}{2}\frac{U_{m2}^2}{R}\right)=\left(\frac{1100^2}{21000}+\frac{15^2}{1000}+\frac{5^2}{1000}\right)\ \mathrm{W}$$
$$=5.25\ \mathrm{W}$$

峰值功率为

$$P=\frac{1}{2}\frac{(U_{m0}+U_{m1}+U_{m2})^2}{R}=\frac{1140^2}{21000}\ \mathrm{W}=9.8\ \mathrm{W}$$

载波功率为　$P_c=\frac{1}{2}\frac{U_{m0}^2}{R}=\frac{1100^2}{21000}\ \mathrm{W}=5\ \mathrm{W}$

边频功率为

$$P_s=2\left(\frac{1}{2}\frac{U_{m1}^2}{R}+\frac{1}{2}\frac{U_{m2}^2}{R}\right)=\left(\frac{15^2}{1000}+\frac{5^2}{1000}\right)\ \mathrm{W}=0.25\ \mathrm{W}$$

【4-10】 图4-15为相移法产生单边带信号的系统框图。如调制信号$e(t)$为带限信号,频谱如图所示。试写出输出信号$a(t)$的频谱函数表达式,并绘其频谱图。

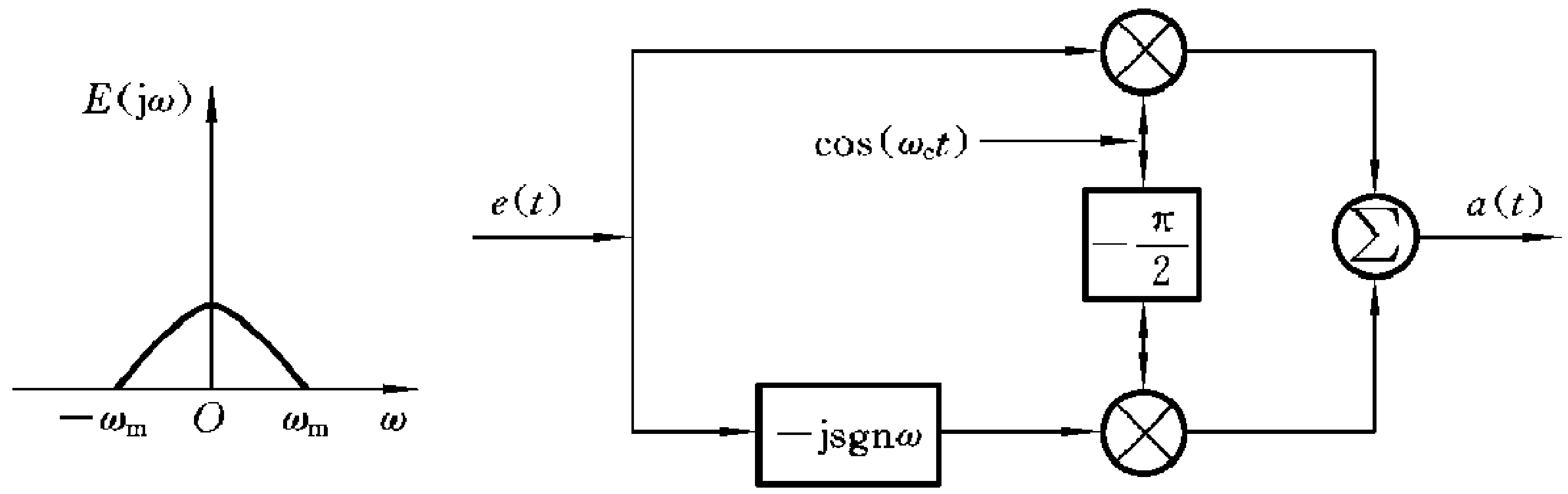


图 4-15

解　设　$f_1(t)=e(t)\cos(\omega_c t)$

$$f_2(t)=\{F^{-1}[-\mathrm{j}E(\mathrm{j}\omega)\mathrm{sgn}\omega]\}\cos\left[\omega_c\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$=\{F^{-1}[-\mathrm{j}E(\mathrm{j}\omega)\mathrm{sgn}\omega]\}\sin(\omega_c t)$$

输出　$a(t)=f_1(t)+f_2(t)$

则　$f_1(t)\leftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2}[E(\omega+\omega_c)+E(\omega-\omega_c)]$

$$f_2(t)\leftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}[-\mathrm{j}E(\mathrm{j}\omega)\mathrm{sgn}\omega]*\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)]$$

$$=\frac{1}{2}[E(\omega+\omega_c)\mathrm{sgn}(\omega+\omega_c)-E(\omega-\omega_c)\mathrm{sgn}(\omega-\omega_c)]$$

$$a(t)=f_1(t)+f_2(t)\leftrightarrow A(\mathrm{j}\omega)=F_1(\mathrm{j}\omega)+F_2(\mathrm{j}\omega)$$

即
$$A(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2}[E(\omega+\omega_c)+E(\omega-\omega_c)]$$
$$+\frac{1}{2}[E(\omega+\omega_c)\mathrm{sgn}(\omega+\omega_c)-E(\omega-\omega_c)\mathrm{sgn}(\omega-\omega_c)]$$
$$=\frac{1}{2}E(\omega+\omega_c)[1+\mathrm{sgn}(\omega+\omega_c)]+\frac{1}{2}E(\omega-\omega_c)[1-\mathrm{sgn}(\omega+\omega_c)]$$

$f_1(t)$，$f_2(t)$，$a(t)$的频谱图如图 4-16 所示。

【4-11】 证明希尔伯特变换有如下性质：

(1) $f(t)$与$\hat{f}(t)$的能量相等，即$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}^2(t)\mathrm{d}t$；

(2) $f(t)$与$\hat{f}(t)$正交，即$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\hat{f}(t)\mathrm{d}t=0$；

(3) 若$f(t)$是偶函数则$\hat{f}(t)$为奇函数，若$f(t)$为奇函数则$\hat{f}(t)$是偶函数。

证　(1) 由帕塞瓦尔能量定理知，信号$f(t)$的能量

$$W=\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\omega)F(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\mathrm{j}\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

因为
$$F\{\hat{f}(t)\}=-\mathrm{j}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{sgn}\omega$$

信号$\hat{f}(t)$的能量

$$W'=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|-\mathrm{j}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{sgn}\omega|^2\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\mathrm{j}\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

所以
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}^2(t)\mathrm{d}t$$

(2) 因为
$$\hat{f}(t)=f(t)*\frac{1}{\pi t}$$

所以
$$\hat{f}(-t)=f(-t)*\frac{1}{\pi(-t)}=-f(-t)*\frac{1}{\pi t}$$

若$f(t)$为偶函数，有$f(t)=f(-t)$，则

$$\hat{f}(-t)=-f(t)*\frac{1}{\pi t}$$

即
$$\hat{f}(-t)=-\hat{f}(t)，\hat{f}(t)\text{ 为奇函数}$$

若$f(t)$为奇函数，有$f(t)=-f(-t)$，即

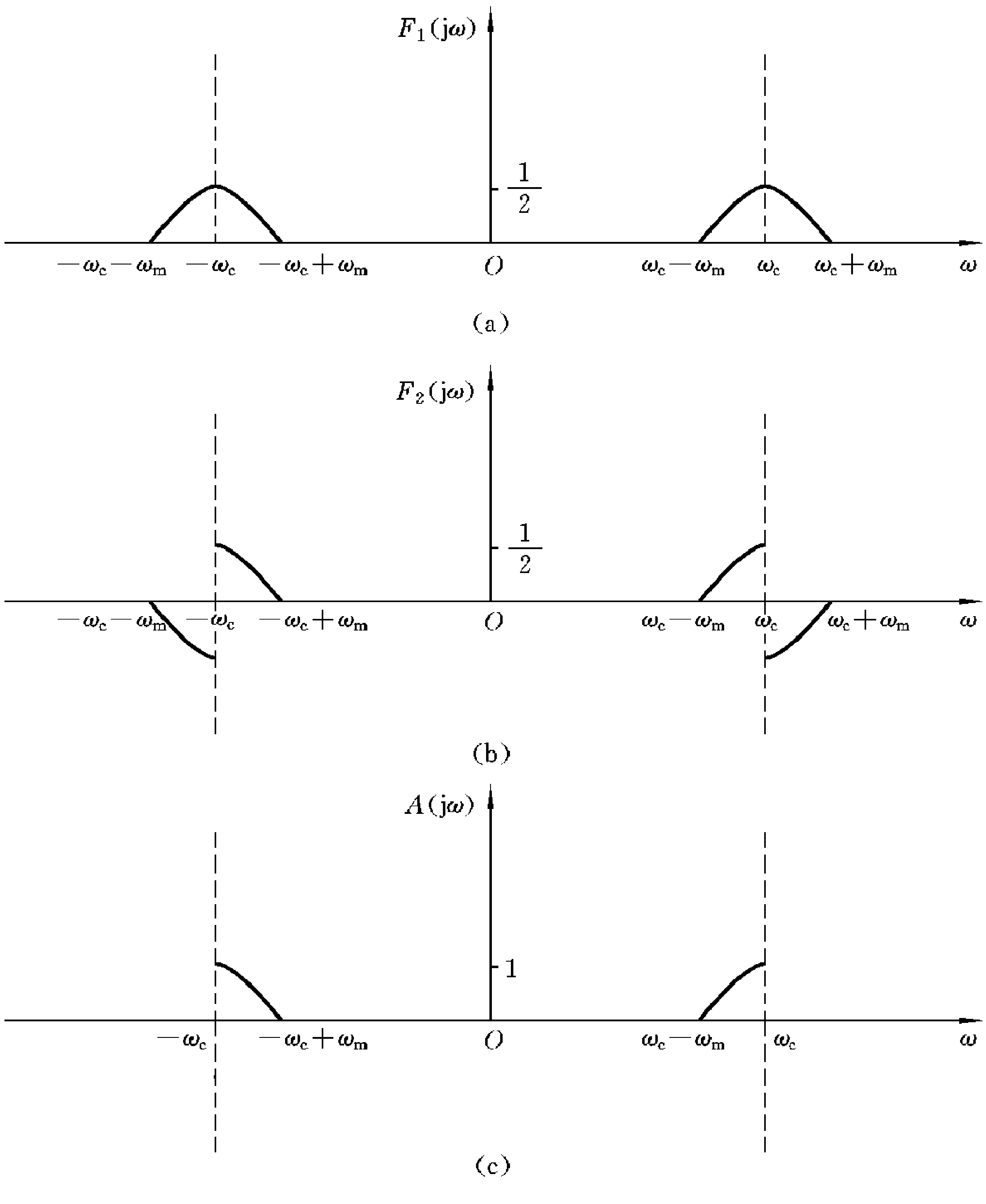


图 4-16

$$\hat{f}(-t) = f(t) * \frac{1}{\pi t}$$

即
$$\hat{f}(-t) = \hat{f}(t), \hat{f}(t) \text{ 为偶函数}$$

若 $f(t)$ 为偶函数，则 $\hat{f}(t)$ 为奇函数，即

$$f(t)=f(-t),\quad \hat{f}(-t)=-\hat{f}(t)$$

因为
$$f(-t)\hat{f}(-t)=-f(t)\hat{f}(t)$$

故被积函数为奇函数，又因为积分区间对称，所以积分式为零，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\hat{f}(t)\mathrm{d}t=0$$

若 $f(t)$ 为奇函数时，同理可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\hat{f}(t)\mathrm{d}t=0$$

故 $f(t)$ 与 $\hat{f}(t)$ 正交。

(3) 已在证(2)的过程中得证。

【4-12】 试分析信号通过图 4-17 所示的斜格型网络后有无幅度失真与相位失真。

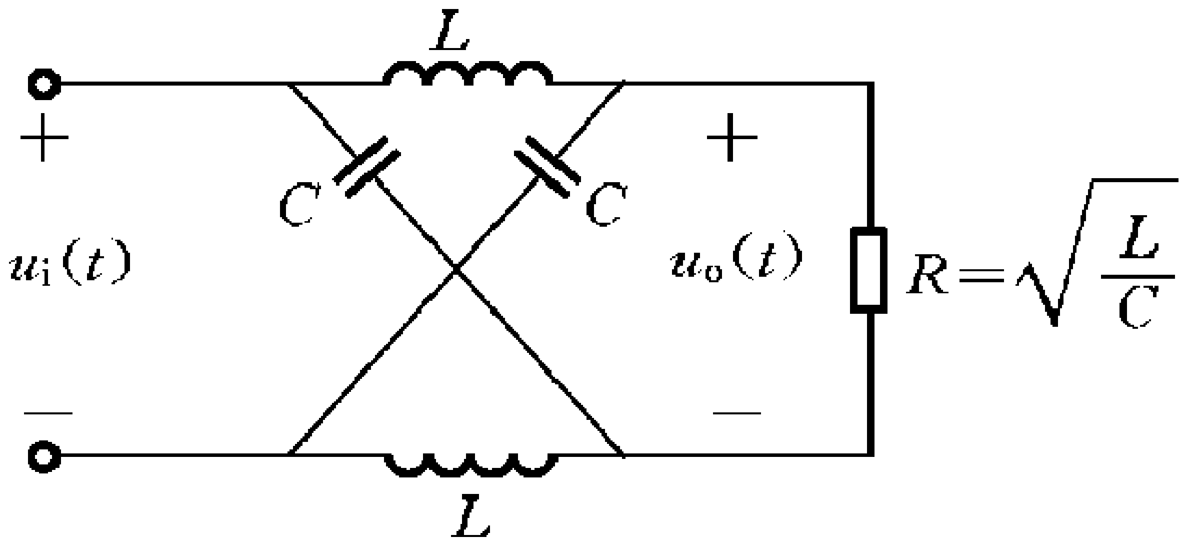


图 4-17

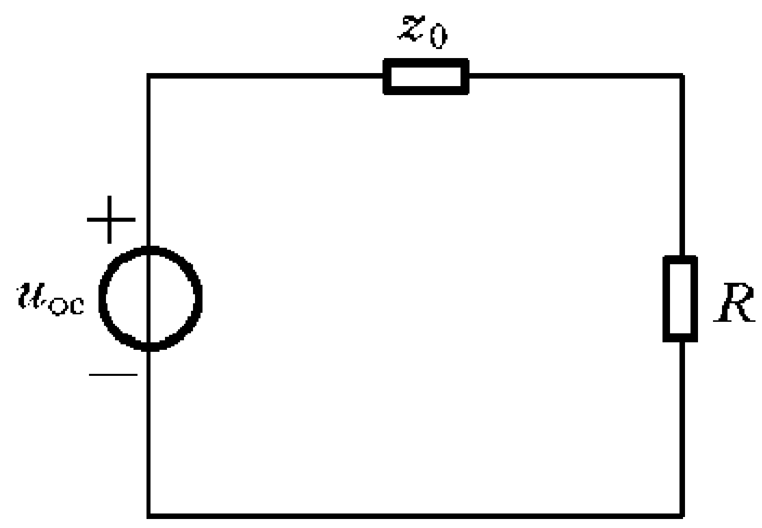


图 4-18

解 设 $z_1=\mathrm{j}\omega L,z_2=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$，则

$$z_1\cdot z_2=R^2$$

用戴维南定理做等效电路图，如图 4-18 所示，从 R 两端看进去的等效电阻 z_0 为

$$z_0=\frac{2z_1\cdot z_2}{z_1+z_2}$$

等效电压为

$$u_{oc}(\mathrm{j}\omega)=\frac{z_2}{z_1+z_2}u_1(\mathrm{j}\omega)-\frac{z_1}{z_1+z_2}u_1(\mathrm{j}\omega)=\frac{z_2-z_1}{z_1+z_2}u_1(\mathrm{j}\omega)$$

所以
$$u_o(\mathrm{j}\omega)=\frac{R}{z_0+R}u_{oc}(\mathrm{j}\omega)=\frac{z_2-z_1}{z_1+z_2}\frac{R}{z_0+R}u_1(\mathrm{j}\omega)$$

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{u_o(\mathrm{j}\omega)}{u_1(\mathrm{j}\omega)}=\frac{z_2-z_1}{z_2+z_1}\frac{R}{R+\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}}=\frac{R-\mathrm{j}\omega L}{R+\mathrm{j}\omega L}$$

故
$$|H(j\omega)|=1$$
$$\varphi(\omega)=-2\arctan\frac{\omega L}{R}=-2\arctan\omega\sqrt{LC}=-2\arctan\frac{\omega}{\omega_0}$$
式中，$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$。

根据不失真传输条件易知，该系统无幅度失真，但有相位失真。在不失真的传输条件下，要使相位无失真，则相位移应满足$\varphi(\omega)=\omega t_0$，即与 ω 成直线关系，因此展开$\arctan\dfrac{\omega}{\omega_0}$，即
$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots,\quad -1<x\leqslant 1$$
当 x 很小时，可得$\arctan x=x$，即当$\dfrac{\omega}{\omega_0}$很小时，
$$\arctan\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{\omega}{\omega_0}$$
所以在这样的条件下，得到相位无失真：
$$\varphi(\omega)=2\frac{\omega}{\omega_0}=\omega t_0$$
由此可知，只有当$\omega\ll\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$时，即被传输的信号频率远小于网络固有频率$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$时，才满足不失真传输条件。这时输出电压$u_o(t)$幅度不变，仅有时延$t_0=\dfrac{2}{\omega_0}$。

【4-13】　宽带分压器电路如图 4-19所示。为使电压能无失真地传输，电路元件参数 R_1，C_1，R_2，C_2 应满足何种关系。

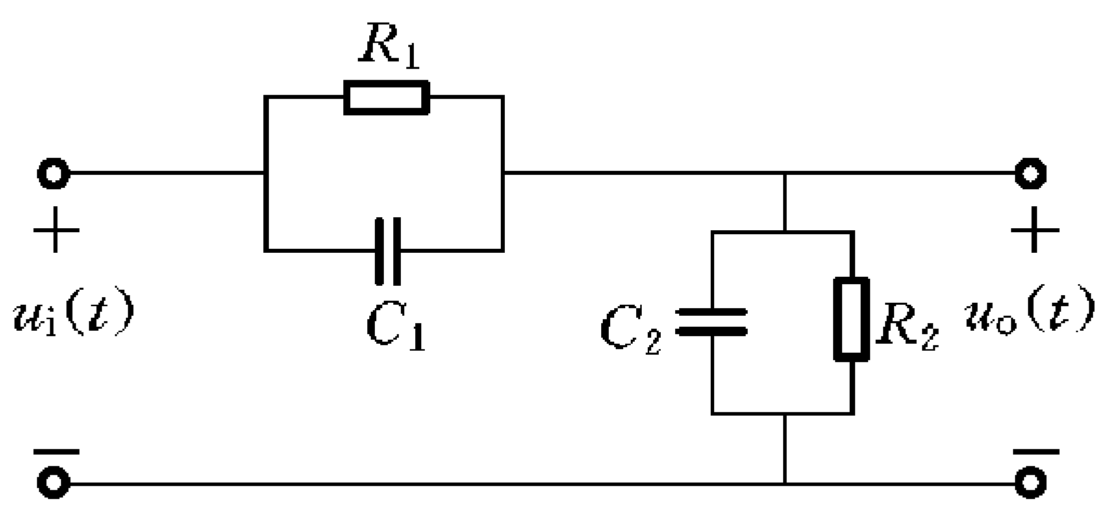


图 4-19

解
$$H(j\omega)=\frac{\dfrac{R_2}{1+j\omega C_2R_2}}{\dfrac{R_1}{1+j\omega C_1R_1}+\dfrac{R_2}{1+j\omega C_2R_2}}=\frac{R_2(1+j\omega C_1R_1)}{(R_1+R_2)+j(\omega C_1R_1R_2+\omega C_2R_1R_2)}$$
由题意知
$$|H(j\omega)|=K\Rightarrow R_2^2(1+\omega^2C_1^2R_1^2)$$

$$=K^2[(R_1+R_2)^2+(\omega C_1R_1R_2+\omega C_2R_1R_2)^2]$$

则有

$$\begin{cases} R_2^2=K^2(R_1+R_2)^2 & ① \\ \omega^2C_1^2R_1^2R_2^2=K^2(\omega C_1R_1R_2+\omega C_2R_1R_2)^2 & ② \end{cases}$$

②÷①，得

$$\omega^2C_1^2R_1^2=\frac{(\omega C_1R_1R_2+\omega C_2R_1R_2)^2}{(R_1+R_2)^2}\Rightarrow R_1C_1=R_2C_2$$

所以 R_1,C_1,R_2,C_2 应满足 $R_1C_1=R_2C_2$ 的关系。

【4-14】 在图4-20所示的电路中，为使输出电压$u_o(t)$与激励电流$i(t)$的波形一样，求电阻R_1,R_2的数值。

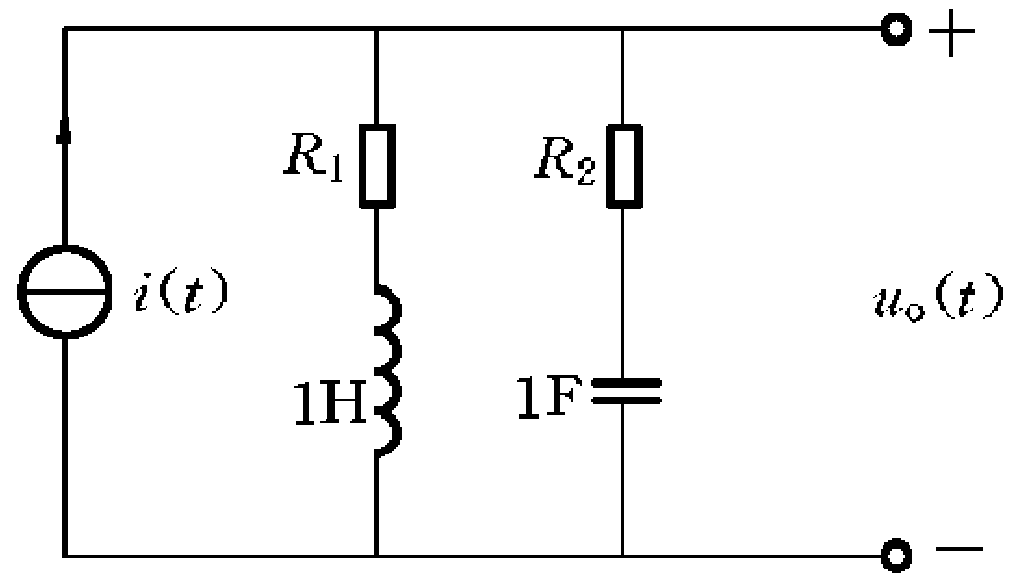


图4-20

解

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{(R_1+\mathrm{j}\omega L)\left(R_2+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)}{R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}$$

$$=\frac{R_1R_2+\frac{L}{C}+\mathrm{j}\left(\omega LR_2-\frac{R_1}{\omega C}\right)}{R_1+R_2+\mathrm{j}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$$

将$C=1\mathrm{F}$，$L=1\mathrm{H}$代入，得

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{R_1R_2+1+\mathrm{j}\left(\omega R_2-\frac{R_1}{\omega}\right)}{R_1+R_2+\mathrm{j}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)}$$

由题意知　$$|H(\mathrm{j}\omega)|=1\Rightarrow(R_1R_2+1)^2+\left(\omega R_2-\frac{R_1}{\omega}\right)^2$$

$$=(R_1+R_2)^2+\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)^2$$

$$\Rightarrow R_1=1\ \Omega,\quad R_2=1\ \Omega$$

第五章 连续时间系统的复频域分析

5-1 基 本 要 求

本章要求学生深刻理解拉普拉斯变换的定义、收敛域以及拉普拉斯变换与傅里叶变换之间的关系。熟练掌握拉普拉斯变换的性质、卷积定理的意义及它们的运用。能根据时域电路模型画出等效s域电路模型,并求解其全响应、零输入响应、零状态响应和冲激响应。能根据系统函数画出系统的直接模拟框图、串联实现形式、并联实现形式和级联实现形式的模拟框图和信号流图。本章重点是掌握用拉普拉斯变换的定义和性质求解拉普拉斯变换与反变换。

5-2 重点、难点学习指导

1. 拉普拉斯变换

(1) 定义

信号的单边拉普拉斯变换对

$$F(s)=\int_{0^-}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,\quad f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

信号的双边拉普拉斯变换对

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,\quad f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

(2) 拉普拉斯变换存在的条件及收敛域

拉普拉斯变换$F(s)$存在的条件是被积函数为收敛函数,即

$$\int_{0^-}^{+\infty}|f(t)\mathrm{e}^{-st}|\mathrm{d}t<+\infty$$

在S平面上,上式的存在取决于s值的选择,也就是σ的选择。σ的取值范

围称为拉普拉斯变换的收敛域，也即：若$\sigma>\sigma_0$，使$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)e^{-\sigma t}=0$，则$f(t)e^{-\sigma t}$在$\sigma>\sigma_0$的全部范围内收敛，其积分存在，故拉普拉斯变换就存在。

(3) 常用函数的拉普拉斯变换

常用函数的拉普拉斯变换如表5-1所示。

表5-1　常用函数的拉普拉斯变换表

序号	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\delta'(t)$	s
3	$\varepsilon(t)$	$\dfrac{1}{s}$
4	$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\dfrac{1}{s+\alpha}$
5	$t^n\varepsilon(t)$(n为正整数)	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
6	$te^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\dfrac{1}{(s+\alpha)^2}$
7	$t^n e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\dfrac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
8	$\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
9	$\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$
10	$e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\dfrac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$
11	$e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$
12	$t\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\dfrac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
13	$t\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\dfrac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$

(4) 拉普拉斯变换的基本性质

拉普拉斯变换的性质揭示了信号 $f(t)$ 的时域特性与复频域特性之间的关系，利用这些性质可以使运算和分析得到简化。现将拉普拉斯变换的基本性质列于表 5-2 中。

表 5-2　拉普拉斯变换的性质及定理

序号	名称	结论
1	线性性质	$a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\leftrightarrow a_1 F_1(s)+a_2 F_2(s)$
2	时移性质	$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\leftrightarrow F(s)\mathrm{e}^{-st_0}$
3	尺度变换性质	$f(at)\leftrightarrow \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
4	频移性质	$f(t)\mathrm{e}^{\pm s_0 t}\leftrightarrow F(s\mp s_0)$
5	时域微分性质	$\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\leftrightarrow sF(s)-f(0^-)$ $\dfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\leftrightarrow s^n F(s)-s^{n-1}f(0^-)$ $-s^{n-2}f'(0^-)-\cdots-f^{(n-1)}(0^-)$
6	时域积分性质	$\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x\leftrightarrow \dfrac{F(s)}{s}+\dfrac{1}{s}f^{(-1)}(0^-)$ $f^{(-n)}(t)=(\int_{-\infty}^{t})^n f(x)\mathrm{d}x$ $\leftrightarrow \dfrac{F(s)}{s^n}+\sum_{m=1}^{n}\dfrac{1}{s^{n-m+1}}f^{(-m)}(0^-)$
7	复频域微分性质	$-tf(t)\leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}$ $(-t)^n f(t)\leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n}$
8	复频域积分性质	$\dfrac{f(t)}{t}\leftrightarrow \int_{s}^{+\infty}F(\eta)\mathrm{d}\eta$
9	初值定理	$f(0^+)=\lim\limits_{t\to 0^+}f(t)=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$，$F(s)$ 为真分式

续表

序号	名称	结论
10	终值定理	$f(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{s\to 0}sF(s)$，$F(s)$为真分式
11	时域卷积定理	$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(s)\cdot F_2(s)$
12	复频域卷积定理	$f_1(t)\cdot f_2(t)\leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi \mathrm{j}}F_1(s)*F_2(s)$

2. 拉普拉斯反变换的求解

(1) 部分分式展开法

首先应用海维赛展开定理将$F(s)$展成部分分式，然后将各部分分式逐项进行反变换，最后叠加起来即为原函数$f(t)$。

$$F(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{k_1}{s-s_1}+\frac{k_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-s_n}$$

$$k_i=(s-s_i)F(s)\big|_{s=s_i}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

若$F(s)$的极点s_1为p阶重极点，$(n-p)$个互不相等的单根$s_2,s_3,\cdots,s_{n-p+1}$，则

$$F(s)=\frac{k_{11}}{(s-s_1)^p}+\frac{k_{12}}{(s-s_1)^{p-1}}+\cdots+\frac{k_{1p}}{(s-s_1)}+\sum_{i=2}^{n-p+1}\frac{k_i}{s-s_i}$$

$$k_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}s^{i-1}}[(s-s_1)^p F(s)]\bigg|_{s=s_i}\quad (i=1,2,\cdots,p)$$

(2) 留数法

留数法是将拉普拉斯变换的积分运算转化为求被积函数$F(s)$各极点上留数的运算，即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\sum_{\text{极点}}[F(s)\mathrm{e}^{st}\text{ 的留数}]$$

若s_i为$F(s)$的一阶极点，则

$$\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},s_i]=[(s-s_i)F(s)\mathrm{e}^{st}]\bigg|_{s=s_i}$$

若s_i为$F(s)$的p阶极点，则

$$\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},s_i]=\frac{1}{(p-1)!}\frac{\mathrm{d}^{(p-1)}}{\mathrm{d}s^{(p-1)}}[(s-s_i)^p F(s)\mathrm{e}^{st}]\bigg|_{s=s_i}$$

3. 系统模拟图

由加法器、标量乘法器和积分器三种基本运算器构成的框图,是系统的一种数学模型表示法。可根据微分方程和系统函数直接画出。

4. 信号流图

信号流图是用点线结构图来描述线性微分方程变量间的因果关系;与系统模拟框图类似,可与系统微分方程或系统函数之间互相表示。

5-3　习 题 详 解

【5-1】 标出下列信号对应于 s 平面中的复频率。

(1) e^{2t}　(2) te^{-t}　(3) $\cos(2t)$　(4) $e^{-t}\sin(-5)t$

解 (1) $s_1=2$　(2) $s_{1,2}=-1$

(3) $s_{1,2}=\pm j2$　(4) $s_{1,2}=-1\pm j5$

【5-2】 写出下列复频率对应的时间函数模式。

(1) -1　(2) 2　(3) $-1\pm j2$　(4) $\pm j4$

解 (1) $f(t)=Ae^{-t}\varepsilon(t)$　(2) $f(t)=Ae^{2t}\varepsilon(t)$

(3) $f(t)=Ae^{-t}\cos(2t+\theta)\varepsilon(t)$　(4) $f(t)=A\cos(4t+\theta)\varepsilon(t)$

【5-3】 求下列函数的拉普拉斯变换并注明收敛区。

(1) $2e^{-5t}\cosh(3t)\varepsilon(t)$　(2) $\sin t\sin(2t)\varepsilon(t)$

(3) $\dfrac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\varepsilon(t)$　(4) $\dfrac{1}{s_2-s_1}(e^{s_1t}-e^{s_2t})\varepsilon(t)$

(5) $(t^3-2t^2+1)\varepsilon(t)$　(6) $e^{-\alpha t}\cos(\omega t+\theta)\varepsilon(t)$

(7) $\delta(t)-e^{-2t}\varepsilon(t)$　(8) $te^{-2t}\varepsilon(t)$

解 (1) $$\mathscr{L}\{2e^{-5t}\cosh(3t)\varepsilon(t)\}=\mathscr{L}\left\{2e^{-5t}\frac{1}{2}(e^{3t}+e^{-3t})\varepsilon(t)\right\}$$

$$=\mathscr{L}\{(e^{-2t}+e^{-8t})\varepsilon(t)\}=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+8}$$

收敛区为 $\sigma>-2$。

(2) $$\mathscr{L}\{\sin t\sin(2t)\varepsilon(t)\}=\mathscr{L}\left\{-\frac{1}{2}[\cos(3t)-\cos t]\varepsilon(t)\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\mathscr{L}\{[\cos(3t)-\cos t]\varepsilon(t)\}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+9}-\frac{s}{s^2+1}\right)=\frac{4s}{s^4+10s^2+9}$$

收敛区为$\sigma>0$。

(3) $\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\varepsilon(t)\right\}=\frac{1}{\alpha}\mathscr{L}\{(1-e^{-\alpha t})\varepsilon(t)\}$

$$=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\alpha}\right]=\frac{1}{s(s+\alpha)}$$

收敛区为$\sigma>\max[0,-\alpha]$。

(4) $\mathscr{L}\left\{\frac{1}{s_2-s_1}(e^{s_1t}-e^{s_2t})\varepsilon(t)\right\}=\frac{1}{s_2-s_1}\mathscr{L}\{(e^{s_1t}-e^{s_2t})\varepsilon(t)\}$

$$=\frac{1}{s_2-s_1}\left[\frac{1}{s-s_1}-\frac{1}{s-s_2}\right]=\frac{-1}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

收敛区为$\sigma>\max(s_1,s_2)$。

(5) $\mathscr{L}\{(t^3-2t^2+1)\varepsilon(t)\}=\frac{3!}{s^4}-2\frac{2!}{s^3}+\frac{1}{s}=\frac{6}{s^4}-\frac{4}{s^3}+\frac{1}{s}=\frac{s^3-4s+6}{s^4}$

收敛区为$\sigma>0$。

(6) $\mathscr{L}\{e^{-\alpha t}\cos(\omega t+\theta)\cdot\varepsilon(t)\}$

$$=\mathscr{L}\{e^{-\alpha t}[\cos(\omega t)\cdot\cos\theta-\sin(\omega t)\sin\theta]\varepsilon(t)\}$$

$$=\mathscr{L}\{[\cos\theta e^{-\alpha t}\cos(\omega t)-\sin\theta e^{-\alpha t}\sin(\omega t)]\varepsilon(t)\}$$

$$=\frac{(s+\alpha)\cos\theta}{(s+\alpha)^2+\omega^2}-\frac{\omega\cdot\sin\theta}{(s+\alpha)^2+\omega^2}=\frac{(s+\alpha)\cos\theta-\omega\sin\theta}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

收敛区为$\sigma>-\alpha$。

(7) $\mathscr{L}\{\delta(t)-e^{-2t}\varepsilon(t)\}=1-\frac{1}{s+2}=\frac{s+1}{s+2}$

收敛区为$\sigma>-2$。

(8) $\mathscr{L}\{te^{-2t}\varepsilon(t)\}=\frac{1}{(s+2)^2}$

收敛区为$\sigma>-2$。

【5-4】 用部分分式展开法求下列函数的拉普拉斯反变换。

(1) $\frac{s}{(s+1)(s+4)}$　　(2) $\frac{s+1}{s^2-1}$　　(3) $\frac{s^3+6s^2+6s}{s^2+6s+8}$

(4) $\frac{s+2}{s^2+2s+5}$　　(5) $\frac{1}{s(s-1)^2}$

解　(1) $F(s)=\frac{s}{(s+1)(s+4)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{4}{3}\frac{1}{s+4}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s+4)}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{4}{3}\frac{1}{s+4}\right\}$$
$$=\left(-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

(2) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2-1}=\dfrac{1}{s-1}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-1}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=e^t\varepsilon(t)$$

(3) 因 $F(s)$ 是假分式,故应先化为真分式,再将真分式展开

$$F(s)=\frac{s^3+6s^2+6s}{s^2+6s+8}=s-\frac{2s}{s^2+6s+8}=s+\frac{2}{s+2}-\frac{4}{s+4}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+6s^2+6s}{s^2+6s+8}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{s+\frac{2}{s+2}-\frac{4}{s+4}\right\}$$
$$=\delta'(t)+(2e^{-2t}-4e^{-4t})\varepsilon(t)$$

(4) $F(s)=\dfrac{s+2}{s^2+2s+5}=\dfrac{s+1+1}{(s+1)^2+4}=\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}+\dfrac{1}{(s+1)^2+4}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}+\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}$$
$$=\left[e^{-t}\cos(2t)+\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right]\varepsilon(t)$$
$$=e^{-t}\left[\cos(2t)+\frac{1}{2}\sin(2t)\right]\varepsilon(t)$$

(5) $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{(s-1)^2}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)^2}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$$
$$=\varepsilon(t)-e^t\varepsilon(t)+te^t\varepsilon(t)=[1-(1-t)e^t]\varepsilon(t)$$

【5-5】 用部分分式展开法求下列函数的拉普拉斯反变换。

(1) $\dfrac{6s^2+22s+18}{(s+1)(s+2)(s+3)}$　　(2) $\dfrac{2}{(s+1)(s^2+1)}$

(3) $\dfrac{2s+30}{s^2+10s+50}$　　(4) $\dfrac{1}{s^2(s+1)^3}$

解　(1) $F(s)=\dfrac{6s^2+22s+18}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{3}{s+3}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6s^2+22s+18}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}+\frac{3}{s+3}\right\}$$

$$=(e^{-t}+2e^{-2t}+3e^{-3t})\varepsilon(t)$$

(2) $F(s)=\dfrac{2}{(s+1)(s^2+1)}=\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{-s+1}{s^2+1}=\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{s}{s^2+1}+\dfrac{1}{s^2+1}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)(s^2+1)}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}\right\}$$
$$=(e^{-t}-\cos t+\sin t)\varepsilon(t)$$

(3) $F(s)=\dfrac{2s+30}{s^2+10s+50}=\dfrac{2(s+5)}{(s+5)^2+5^2}+\dfrac{20}{(s+5)^2+5^2}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+30}{s^2+10s+50}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+5)}{(s+5)^2+5^2}+\frac{20}{(s+5)^2+5^2}\right\}$$
$$=[2e^{-5t}\cos(5t)+4e^{-5t}\sin(5t)]\varepsilon(t)$$
$$=2e^{-5t}[\cos(5t)+2\sin(5t)]\varepsilon(t)$$

(4) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)^3}=-\dfrac{3}{s}+\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{3}{s+1}+\dfrac{2}{(s+1)^2}+\dfrac{1}{(s+1)^3}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^3}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{3}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^3}\right\}$$
$$=\left(t-3+\frac{1}{2}t^2e^{-t}+2te^{-t}+3e^{-t}\right)\varepsilon(t)$$
$$=\left[(t-3)+\left(\frac{t^2}{2}+2t+3\right)e^{-t}\right]\varepsilon(t)$$

【5-6】 用留数法求下列函数的拉普拉斯反变换。

(1) $\dfrac{24(s+8)}{s(s+12)(s+4)}$　　(2) $\dfrac{4s^2+17s+16}{(s+2)^2(s+3)}$

(3) $\dfrac{1}{s(s^2+s+1)}$　　(4) $\dfrac{2s^2+8s+4}{s(s+4)}$

解　(1) 令分母$D(s)=0$,求得三个单极点$s_1=0$,$s_2=-12$,$s_3=-4$。求各极点上的留数:

$$\mathrm{Res}_1=[sF(s)e^{st}]_{s=0}=\left[\frac{24(s+8)}{(s+12)(s+4)}e^{st}\right]_{s=0}=4$$

$$\mathrm{Res}_2=[(s+12)F(s)e^{st}]_{s=-12}=\left[\frac{24(s+8)}{s(s+4)}e^{st}\right]_{s=-12}=-e^{-12t}$$

$$\mathrm{Res}_3=[(s+4)F(s)e^{st}]_{s=-4}=\left[\frac{24(s+8)}{s(s+12)}e^{st}\right]_{s=-4}=-3e^{-4t}$$

所以　$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=(4-e^{-12t}-3e^{-4t})\varepsilon(t)$

(2) 令分母 $D(s)=0$,求得一个二重极点 $s_1=-2$ 及一个单极点 $s_2=-3$。求各极点上的留数:

$$\mathrm{Res}_1=\frac{1}{(2-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{2-1}}{\mathrm{d}s^{2-1}}(s+2)^2F(s)\mathrm{e}^{st}\right]_{s=-2}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{4s^2+17s+16}{s+3}\mathrm{e}^{st}\right]_{s=-2}=3\mathrm{e}^{-2t}-2t\mathrm{e}^{-2t}$$

$$\mathrm{Res}_2=[(s+3)F(s)\mathrm{e}^{st}]_{s=-3}=\left[\frac{4s^2+17s+16}{(s+2)^2}\mathrm{e}^{st}\right]_{s=-3}$$

$$=\mathrm{e}^{-3t}$$

所以 $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=(\mathrm{e}^{-3t}+3\mathrm{e}^{-2t}-2t\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

(3) 令分母 $D(s)=0$,求得三个单极点 $s_1=0,s_2=-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2},s_3=-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$。求各极点上的留数:

$$\mathrm{Res}_1=[sF(s)\mathrm{e}^{st}]_{s=0}=\left[\frac{1}{s^2+s+1}\mathrm{e}^{st}\right]_{s=0}=1$$

$$\mathrm{Res}_2=\left[\left(s-\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)F(s)\mathrm{e}^{st}\right]_{s=-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\left[\frac{1}{s\left[s-\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]}\mathrm{e}^{st}\right]_{s=-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}$$

$$\mathrm{Res}_3=\left[\left(s-\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)F(s)\mathrm{e}^{st}\right]_{s=-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\left[\frac{1}{s\left[s-\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]}\mathrm{e}^{st}\right]_{s=-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}$$

所以

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=\left[1+\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}+\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}\right]\varepsilon(t)$$

$$=\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]\varepsilon(t)$$

(4) $F(s)$为假分式，先化为真分式：

$$F(s)=\frac{2s^2+8s+4}{s(s+4)}=2+\frac{4}{s(s+4)}$$

求得两个单极点$s_1=0,s_2=-4$。求各极点上的留数：

$$\mathrm{Res}_1=\left[s\frac{4}{(s+4)s}\mathrm{e}^{st}\right]_{s=0}=\left[\frac{4}{s+4}\mathrm{e}^{st}\right]=1$$

$$\mathrm{Res}_2=\left[(s+4)\frac{4}{s(s+4)}\mathrm{e}^{st}\right]_{s=-4}=\left[\frac{4}{s}\mathrm{e}^{st}\right]_{s=-4}=-\mathrm{e}^{-4t}$$

所以

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=2\delta(t)+(1-\mathrm{e}^{-4t})\varepsilon(t)$$

【5-7】 用尺度变换性质求下列函数的拉普拉斯变换。

(1) $2t\mathrm{e}^{-4t}\varepsilon(t)$　　(2) $\cos(2t)\varepsilon(t)$

(3) $\mathrm{e}^{-2t}\cos(2\omega t)\varepsilon(t)$　　(4) $(2t)^n\varepsilon(t)$

解　(1) $\mathscr{L}\{f(2t)\}=\mathscr{L}\{(2t)\mathrm{e}^{-2\cdot(2t)}\}=\frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{s}{2}+2\right)^2}=\frac{2}{(s+4)^2}$$

(2) $\mathscr{L}\{f(2t)\}=\frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right)=\mathscr{L}\{\cos(2t)\}=\frac{1}{2}\frac{\frac{s}{2}}{\left(\frac{s}{2}\right)^2+1}=\frac{s}{s^2+4}$

(3) $\mathscr{L}\{f(2t)\}=\frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right)=\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{-2t}\cos(\omega\cdot 2t)\}$

$$=\frac{1}{2}\frac{\frac{s}{2}+1}{\left(\frac{s}{2}+1\right)^2+\omega^2}=\frac{s+2}{(s+2)^2+4\omega^2}$$

(4) $\mathscr{L}\{f(2t)\}=\frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right)=\mathscr{L}\{(2t)^n\}=\frac{1}{2}\frac{n!}{\left(\frac{s}{2}\right)^{n+1}}=\frac{2^n n!}{s^{n+1}}$

【5-8】 画出下列时间函数的波形,并求其拉普拉斯变换。

(1) $e^{-2t}\varepsilon(t-1)$　　(2) $e^{-2(t-1)}\varepsilon(t)$

(3) $e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)$　　(4) $(t-1)e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)$

解　(1) 时间函数的波形如图 5-1(a)所示。

$$\mathscr{L}\{e^{-2t}\varepsilon(t-1)\}=\int_1^{+\infty}e^{-2t}e^{-st}dt=-\frac{1}{s+2}e^{-(s+2)t}\Big|_1^{+\infty}=\frac{e^{-(s+2)}}{s+2}$$

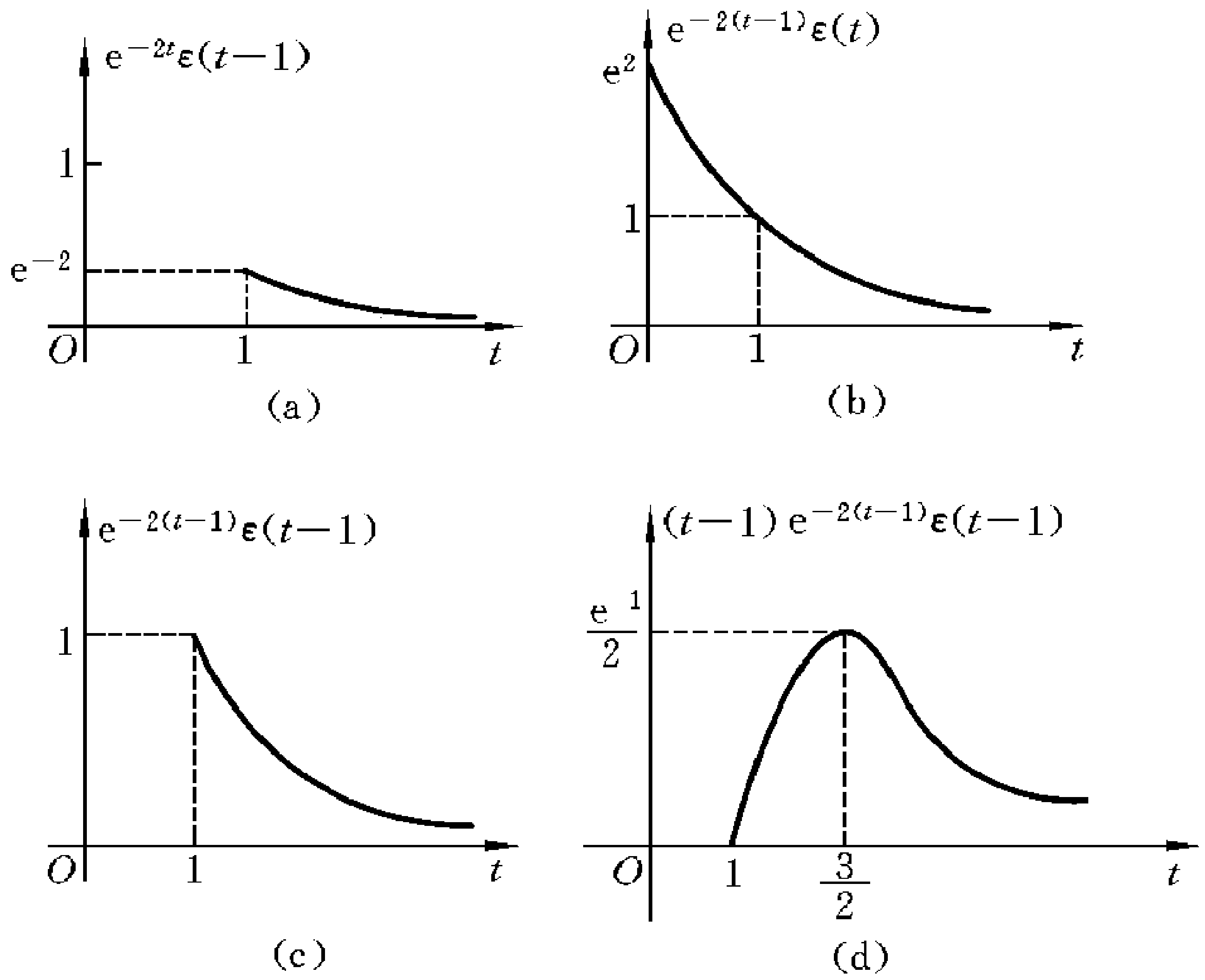


图 5-1

(2) 时间函数的波形如图 5-1(b)所示。

$$\mathscr{L}\{e^{-2(t-1)}\varepsilon(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-2(t-1)}e^{-st}dt=-\frac{e^2}{s+2}e^{-(s+2)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{e^2}{s+2}$$

(3) 时间函数的波形如图 5-1(c)所示。

$$\mathscr{L}\{e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)\}=\int_1^{+\infty}e^{-2(t-1)}e^{-st}dt=-\frac{e^2}{s+2}e^{-(s+2)t}\Big|_1^{+\infty}=\frac{e^{-s}}{s+2}$$

(4) 时间函数的波形如图 5-1(d)所示。

$$\mathscr{L}\{(t-1)e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)\}=e^{-s}\mathscr{L}\{te^{-2t}\varepsilon(t)\}\quad(\text{由时间平移性质})$$

$$=e^{-s}\frac{1}{(s+2)^2}=\frac{e^{-s}}{(s+2)^2}$$

【5-9】 用拉普拉斯变换的性质求图 5-2 所示的各波形函数的拉普拉斯变换。

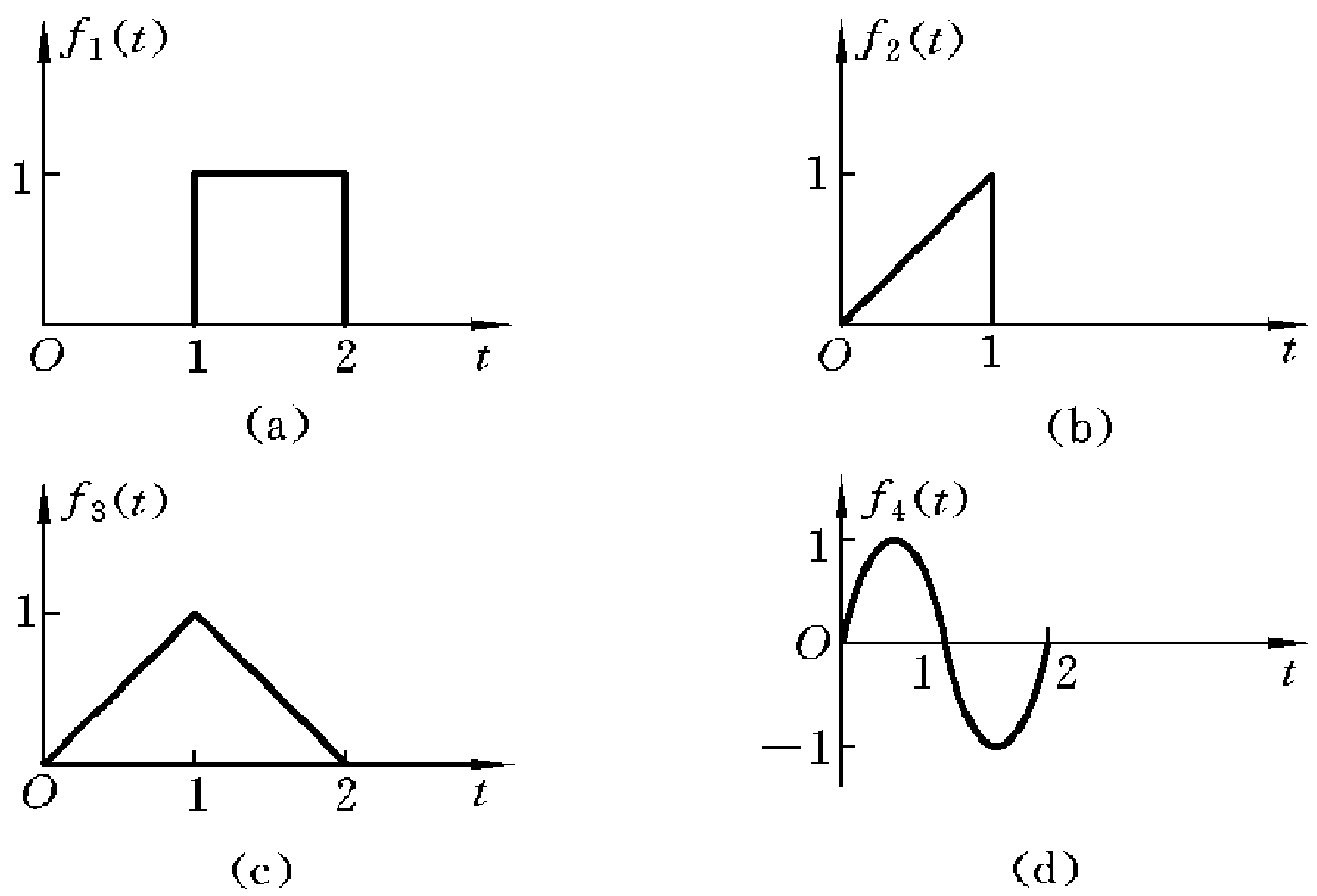


图 5-2

解 (a) $f_1(t)=\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)$

$$\mathscr{L}\{f_1(t)\}=\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-2s}=\frac{1}{s}(e^{-s}-e^{-2s})$$

(b) $f_2(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$

$$\mathscr{L}\{f_2(t)\}=\mathscr{L}\{t\varepsilon(t)-t\varepsilon(t-1)\}=\frac{1}{s^2}-e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$$

$$=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s}-se^{-s})$$

(c) $f_3(t)=f_2(t)+(2-t)f_1(t)=f_2(t)+2f_1(t)-t[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)]$

$$\mathscr{L}\{f_3(t)\}=F_2(s)+2F_1(s)-\mathscr{L}\{t\varepsilon(t-1)\}+\mathscr{L}\{t\varepsilon(t-2)\}$$

$$=F_2(s)+2F_1(s)-e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)+e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right)$$

$$=\frac{1}{s^2}(1-2e^{-s}+e^{-2s})$$

(d) $f_4(t)=\sin(\pi t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]=\sin(\pi t)\varepsilon(t)-\sin(\pi t)\varepsilon(t-2)$

$$\mathscr{L}\{f_4(t)\}=\frac{\pi}{s^2+\pi^2}-\mathrm{e}^{-2s}\frac{\pi}{s^2+\pi^2}=\frac{\pi}{s^2+\pi^2}(1-\mathrm{e}^{-2s})$$

【5-10】 从单位阶跃函数变换 $\varepsilon(t)\longleftrightarrow\dfrac{1}{s}$ 出发，求图 5-3 所示的波形函数的拉普拉斯变换。

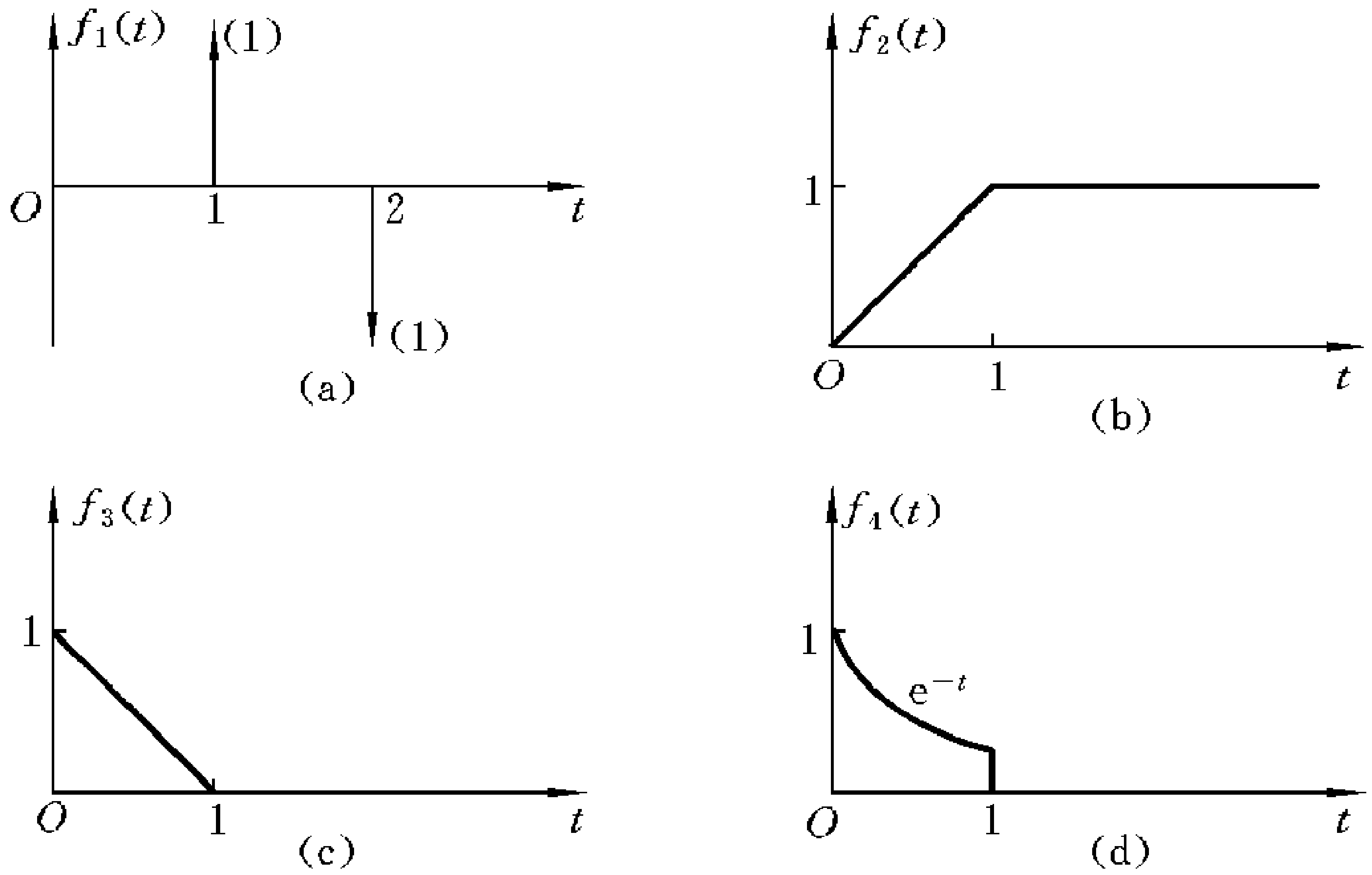


图 5-3

解　(a) 因为

$$f_1(t)=\delta(t-1)+\delta(t-2)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)]$$

所以
$$F_1(s)=s\cdot\frac{1}{s}(\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-2s})=\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-2s}$$

(b) 因为　$f_2(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+\varepsilon(t-1)$

$$\begin{aligned}f'_2(t)&=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)+t[\delta(t)-\delta(t-1)]+\delta(t-1)\\&=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)=f(t)\end{aligned}$$

所以
$$F_2(s)=\frac{F(s)}{s}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-s})=\frac{1}{s^2}(1-\mathrm{e}^{-s})$$

注：其中令

$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1),\quad F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-s})$$

(c) 因为 $$f_3(t)=(1-t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$$

$$\begin{aligned}f'_3(t) &=-[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+(1-t)[\delta(t)-\delta(t-1)]\\ &=-[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+\delta(t)=-f(t)+\delta(t)\end{aligned}$$

所以 $$F_3(s)=\mathscr{L}\{f_3(t)\}=\frac{1}{s}[-F(s)+1]=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}(1-\mathrm{e}^{-s})$$

(d) 因为 $$f_4(t)=\mathrm{e}^{-t}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]=\mathrm{e}^{-t}f(t)$$

所以 $$F_4(s)=\mathscr{L}\{f_4(t)\}=F(s+1)=\frac{1}{s+1}[1-\mathrm{e}^{-(s+1)}]$$

【5-11】 求图5-4所示波形的单边周期函数的拉普拉斯变换。

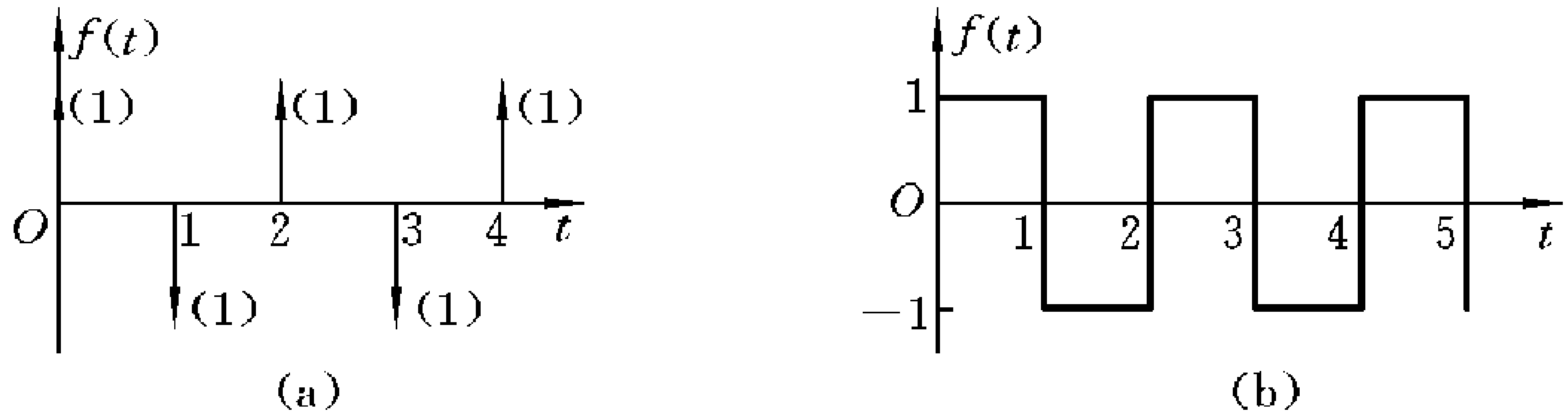


图5-4

解 (a) 第一个周期信号表示为

$$f_1(t)=\delta(t)-\delta(t-1)$$

$$F_1(s)=1-\mathrm{e}^{-s}$$

周期序列的拉普拉斯变换关系(其中$T=2$)：

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\mathscr{L}\{f_1(t)\}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2s}}=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{1-\mathrm{e}^{-2s}}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-s}}$$

(b) 第一个周期信号表示为

$$f_1(t)=\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)$$

$$F_1(s)=\frac{1}{s}(1-2\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s})=\frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-s})^2$$

周期序列的拉普拉斯变换关系(其中$T=2$)：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\}&=\mathscr{L}\{f_1(t)\}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2s}}\\ &=\frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-s})^2\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2s}}=\frac{1}{s}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{1+\mathrm{e}^{-s}}\end{aligned}$$

【5-12】 应用拉普拉斯变换性质，证明下列变换对成立。

(1) $t\sin(\omega t)\varepsilon(t) \longleftrightarrow \dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$　　(2) $t^2 e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \dfrac{2}{(s+\alpha)^3}$

(3) $e^{-\frac{t}{b}} f\left(\dfrac{t}{b}\right) \longleftrightarrow bF(bs+1)$　　(4) $e^{-bt} f\left(\dfrac{t}{b}\right) \longleftrightarrow bF(bs+b^2)$

(5) $\mathrm{Sa}(t)\varepsilon(t) \longleftrightarrow \arctan\dfrac{1}{s}$　　(6) $\mathrm{Si}(t)\varepsilon(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{s}\arctan\dfrac{1}{s}$

证　(1) $\sin(\omega t)\varepsilon(t) \longleftrightarrow \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

根据复频域微分特性 $tf(t) \longleftrightarrow -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)$，则有

$$t\sin(\omega t) \longleftrightarrow -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) = -\frac{-2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

(2) $e^{-\alpha t} \longleftrightarrow \dfrac{1}{s+\alpha}$

根据复频域微分特性 $tf(t) \longleftrightarrow -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)$，则有

$$te^{-\alpha t} \longleftrightarrow \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

$$t^2 e^{-\alpha t} \longleftrightarrow -\frac{-2(s+\alpha)}{(s+\alpha)^4} = \frac{2}{(s+\alpha)^3}$$

(3) 设 $f(t) \longleftrightarrow F(s)$

根据尺度变换特性有　$f\left(\dfrac{t}{b}\right) \longleftrightarrow bF(bs)\quad (b>0)$

根据频移特性有　$e^{-\frac{t}{b}} f\left(\dfrac{t}{b}\right) \longleftrightarrow bF(bs+1)$

(4) $e^{-bt} f\left(\dfrac{t}{b}\right) = e^{-b^2\left(\frac{t}{b}\right)} f\left(\dfrac{t}{b}\right)$

根据频移特性有　$e^{-b^2 t} f(t) \longleftrightarrow F(s+b^2)$

根据尺度特性有　$e^{-b^2\left(\frac{t}{b}\right)} f\left(\dfrac{t}{b}\right) \longleftrightarrow bF(bs+b^2)$

(5) $\sin t \longleftrightarrow \dfrac{1}{s^2+1}$

根据复频域积分特性 $\dfrac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \displaystyle\int_s^{+\infty} F(s)\mathrm{d}s$，则有

$$\frac{\sin t}{t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \int_s^{+\infty} \frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s = \arctan s\Big|_s^{+\infty} = \arctan\frac{1}{s}$$

所以 $$\mathrm{Sa}(t)\varepsilon(t) \longleftrightarrow \arctan\frac{1}{s}$$

（6）由本题（5）知 $$\frac{\sin t}{t} \longleftrightarrow \arctan\frac{1}{s}$$

又 $$\mathrm{Si}(t)\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau$$

根据时域积分特性有 $$\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s}\arctan\frac{1}{s}$$

所以 $$\mathrm{Si}(t)\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}\arctan\frac{1}{s}$$

【5-13】 求下列函数的拉普拉斯反变换。

（1）$\dfrac{1+\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s}}{s+1}$　（2）$\dfrac{2+\mathrm{e}^{-(s-1)}}{(s-1)^2+4}$　（3）$\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-s}}$

（4）$\dfrac{1}{s(1-\mathrm{e}^{-s})}$　（5）$\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}\right)^2$

解　（1）$F(s) = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s}}{s+1} = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{s+1} + \dfrac{\mathrm{e}^{-2s}}{s+1}$

根据时延性质有

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s+1} + \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s+1}\right\}$$
$$= \mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t) + \mathrm{e}^{-(t-1)}\varepsilon(t-1) + \mathrm{e}^{-(t-2)}\varepsilon(t-2)$$

（2）$F(s) = \dfrac{2+\mathrm{e}^{-(s-1)}}{(s-1)^2+4} = \dfrac{2}{(s-1)^2+4} + \dfrac{\mathrm{e}^{-(s-1)}}{(s-1)^2+4}$

根据频移性质和线性性质有

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+4} + \frac{\mathrm{e}^{-(s-1)}}{(s-1)^2+4}\right\}$$
$$= \mathrm{e}^{t}\sin 2t\varepsilon(t) + \mathrm{e}^{t}\cdot\frac{1}{2}\sin 2(t-1)\varepsilon(t-1)$$
$$= \mathrm{e}^{t}\sin 2t\varepsilon(t) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\sin 2(t-1)\varepsilon(t-1)$$

（3）将 $F(s)$ 整理成 $\dfrac{F_1(s)}{1-\mathrm{e}^{-sT}}$ 周期形式

$$F(s) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-s}} = \frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{1-\mathrm{e}^{-2s}}$$

又 $$\mathscr{L}^{-1}\{1-\mathrm{e}^{-s}\} = \delta(t) - \delta(t-1)$$

则 $f(t)$ 是第一周期单个函数为 $\delta(t)-\delta(t-1)$、周期 $T=2$ 的周期函数，所以

$$\begin{aligned} f(t) &= \delta(t) - \delta(t-1) + \delta(t-2) - \delta(t-3) + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \delta(t-k) \end{aligned}$$

（4）因为　$F(s)=\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-s}}=\dfrac{1}{s}(1+\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s}+\cdots)$

所以　$$f(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)+\cdots=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon(t-k)$$

（5）因为　$$\begin{aligned} F(s) &= \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}\right)^2 = \frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s} \\ &= F_1(s)\cdot F_1(s) \end{aligned}$$

由卷积定理知　$$f(t)=f_1(t)*f_1(t)$$

式中　$$f_1(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\}=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$$

所以　$$\begin{aligned} f(t) &= [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] * [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] \\ &= [\delta(t) - \delta(t-1)] * [t\varepsilon(t) - (t-1)\varepsilon(t-1)] \\ &= t\varepsilon(t) - (t-1)\varepsilon(t-1) - (t-1)\varepsilon(t-1) \\ &\quad + (t-2)\varepsilon(t-2) \\ &= t\varepsilon(t) - 2(t-1)\varepsilon(t-1) + (t-2)\varepsilon(t-2) \end{aligned}$$

【5-14】 已知系统函数与激励信号分别如下，求零状态响应的初值和终值。

（1）$H(s)=\dfrac{2s+3}{s^2+2s+5}$，　$e(t)=\varepsilon(t)$

（2）$H(s)=\dfrac{s+4}{s(s^2+3s+2)}$，　$e(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$

（3）$H(s)=\dfrac{s^2+8s+10}{s^2+5s+4}$，　$e(t)=\delta(t)$

解　（1）$E(s)=\mathscr{L}\{e(t)\}=\dfrac{1}{s}$

$$R(s) = H(s)E(s) = \frac{2s+3}{s(s^2+2s+5)}$$

由初值定理得　$$r(0^+)=\lim_{s\to\infty}sR(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{2s+3}{s^2+2s+5}=0$$

由终值定理得　$$r(\infty)=\lim_{s\to 0}sR(s)=\lim_{s\to 0}\frac{2s+3}{s^2+2s+5}=\frac{3}{5}$$

(2) 因为　　$E(s)=\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)\}=\dfrac{1}{s+1}$

$$R(s)=H(s)E(s)=\frac{s+4}{(s+1)(s^2+3s+2)s}$$

所以
$$r(0^+)=\lim_{s\to\infty}sR(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s+4}{(s+1)(s^2+3s+2)}=0$$
$$r(\infty)=\lim_{s\to 0}sR(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s+4}{(s+1)(s^2+3s+2)}=2$$

(3) 因为　　$E(s)=\mathscr{L}\{\delta(t)\}=1$

$$R(s)=H(s)E(s)=\frac{s^2+8s+10}{s^2+5s+4}=1+\frac{3s+6}{s^2+5s+4}=1+F(s)$$

所以
$$r(0^+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s(3s+6)}{s^2+5s+4}=3$$
$$r(\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s(3s+6)}{s^2+5s+4}=0$$

【5-15】 用拉普拉斯变换分析法，求下列系统的响应。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2r(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+2r(t)=0, r(0)=1, r'(0)=2$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+2r(t)+e(t)=0, r(0)=2, e(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$

(3) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r_1(t)}{\mathrm{d}t}+2r_1(t)-r_2(t)=e(t), \\ \\ -r_1(t)+\dfrac{\mathrm{d}r_2(t)}{\mathrm{d}t}+2r_2(t)=0,\end{cases}$ $r_1(0)=2, r_2(0)=1, e(t)=\varepsilon(t)$

解　(1) 对微分方程进行拉普拉斯变换得

$$s^2R(s)-sr(0)-r'(0)+3[sR(s)-r(0)]+2R(s)=0$$

整理得
$$R(s)=\frac{s+5}{s^2+3s+2}=\frac{4}{s+1}-\frac{3}{s+2}$$

所以 $r(t)=\mathscr{L}^{-1}\{R(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{4}{s+1}-\dfrac{3}{s+2}\right\}=(4\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$

(2) 对微分方程进行拉普拉斯变换得

$$sR(s)-r(0)+2R(s)+E(s)=0$$

式中，
$$E(s)=\frac{1}{s+1}$$

整理得
$$R(s)=\frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}=\frac{3}{s+2}-\frac{1}{s+1}$$

所以 $r(t)=\mathscr{L}^{-1}\{R(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+2}-\frac{1}{s+1}\right\}=(3\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$

(3) 对微分方程组进行拉普拉斯变换得

$$\begin{cases}sR_1(s)-r_1(0)+2R_1(s)-R_2(s)=E(s)\\-R_1(s)+sR_2(s)-r_2(0)+2R_2(s)=0\end{cases}$$

式中，
$$E(s)=\frac{1}{s}$$

即
$$\begin{cases}(s+2)R_1(s)-R_2(s)=\dfrac{1}{s}+2=\dfrac{2s+1}{s}\\-R_1(s)+(s+2)R_2(s)=1\end{cases}$$

整理得

$$R_1(s)=\begin{vmatrix}\dfrac{2s+1}{s} & -1\\ 1 & s+2\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}s+2 & -1\\ -1 & s+2\end{vmatrix}=\frac{2s^2+6s+2}{s(s^2+4s+3)}$$

$$=\frac{2}{3}\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{s+3}$$

$$R_2(s)=\begin{vmatrix}s+2 & \dfrac{2s+1}{s}\\ -1 & 1\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}s+2 & -1\\ -1 & s+2\end{vmatrix}=\frac{s^2+4s+1}{s(s+1)(s+3)}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{3}\frac{1}{s+3}$$

所以
$$\begin{cases}r_1(t)=\mathscr{L}^{-1}\{R_1(s)\}=\left(\dfrac{2}{3}+\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)\\r_2(t)=\mathscr{L}^{-1}\{R_2(s)\}=\left(\dfrac{1}{3}+\mathrm{e}^{-t}-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)\end{cases}$$

【5-16】 求微分方程是$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+2r(t)=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+e(t)$的系统，在如下激励信号时的零状态响应。

(1) $e(t)=\delta(t)$　　(2) $e(t)=\varepsilon(t)$　　(3) $e(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$

(4) $e(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$　　(5) $e(t)=5\cos t\varepsilon(t)$

解 $\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+2r(t)=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+e(t)$

对微分方程进行拉普拉斯变换,并整理得

$$R(s)=\frac{s+1}{s+2}E(s)$$

(1) $E(s)=1$

$$R(s)=\frac{s+1}{s+2}=1-\frac{1}{s+2}$$

所以 $$r_{zs}=\mathscr{L}^{-1}\left\{1-\frac{1}{s+2}\right\}=\delta(t)-\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$$

(2) $E(s)=\frac{1}{s}$

$$R(s)=\frac{1}{s(s+2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$$

所以 $$r_{zs}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+2}\right\}=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

(3) $E(s)=\frac{1}{s+1}$

$$R(s)=\frac{s+1}{s+2}\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s+2}$$

所以 $$r_{zs}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$$

(4) $E(s)=\frac{1}{s+2}$

$$R(s)=\frac{s+1}{(s+2)^2}=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{(s+2)^2}$$

所以 $$r_{zs}(t)=(\mathrm{e}^{-2t}-t\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)=(1-t)\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$$

(5) $E(s)=\frac{5s}{s^2+1}$

$$R(s)=\frac{s+1}{s+2}\cdot\frac{5s}{s^2+1}=\frac{5s^2+5s}{(s+2)(s^2+1)}$$

$$=\frac{2}{s+2}+\frac{3s-1}{s^2+1}=\frac{2}{s+2}+\frac{3s}{s^2+1}+\frac{-1}{s^2+1}$$

所以 $$r_{zs}(t)=(2\mathrm{e}^{-2t}+3\cos t-\sin t)\varepsilon(t)$$

【5-17】 电路如图5-5 所示,激励为$e(t)$,响应为$i(t)$,求冲激响应与阶跃响应。

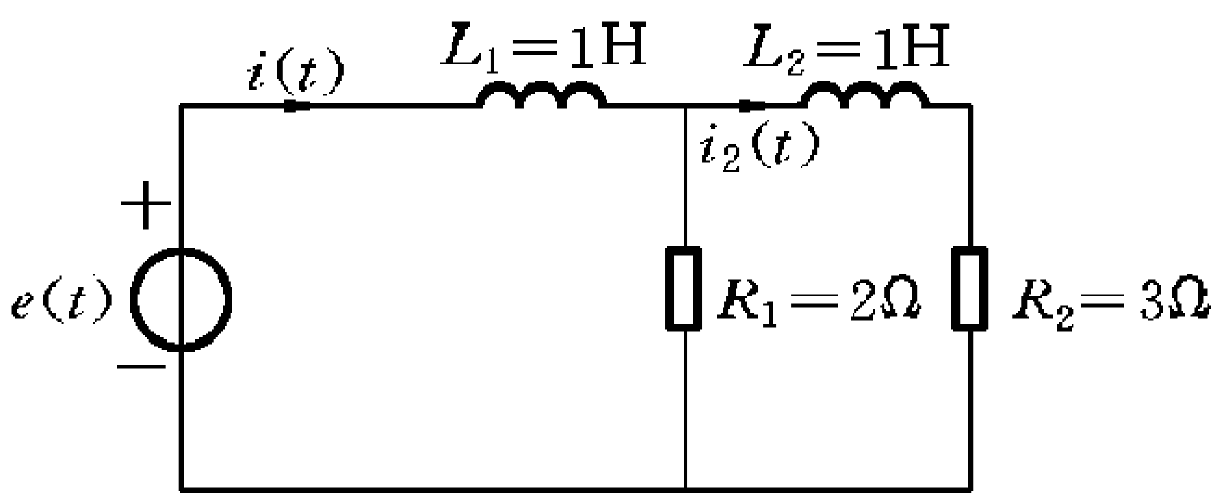


图 5-5

解　由图 5-5 列写回路方程

$$\begin{cases} L_1 sI(s) + R_1[I(s) - I_2(s)] = E(s) \\ L_2 sI_2(s) + R_2 I_2(s) - R_1[I(s) - I_2(s)] = 0 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} (L_1 s + R_1)I(s) - R_1 I_2(s) = E(s) \\ -R_1 I(s) + (R_1 + R_2 + L_2 s)I_2(s) = 0 \end{cases}$$

将条件代入得

$$\begin{cases} (s+2)I(s) - 2I_2(s) = E(s) \\ -2I(s) + (s+5)I_2(s) = 0 \end{cases}$$

(1) 当 $e(t)=\delta(t)$ 时，$E(s)=1$，所以

$$I(s) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & s+5 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} s+2 & -2 \\ -2 & s+5 \end{vmatrix} = \frac{s+5}{s^2+7s+6}$$

$$= \frac{4}{5}\,\frac{1}{s+1} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{s+6}$$

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = \left(\frac{4}{5}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-6t}\right)\varepsilon(t)$$

(2) 当 $e(t)=\varepsilon(t)$ 时，$E(s)=\dfrac{1}{s}$，所以

$$I(s) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{s} & -2 \\ 0 & s+5 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} s+2 & -2 \\ -2 & s+5 \end{vmatrix} = \frac{s+5}{s(s^2+7s+6)}$$

$$= \frac{5}{6}\,\frac{1}{s} - \frac{4}{5}\,\frac{1}{s+1} - \frac{1}{30}\,\frac{1}{s+6}$$

$$r_s(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{30}\mathrm{e}^{-6t}\right)\varepsilon(t)$$

【5-18】 已知图 5-6 所示电路的参数为：$R_1=1\ \Omega$，$R_2=2\ \Omega$，$L=2$ H，$C=\frac{1}{2}$ F，激励为 2 V 直流，设开关 S 在 $t=0$ 时断开，断开前电路已达稳态，求响应电压 $u(t)$，并指出其零输入响应与零状态响应；受迫响应与自然响应；瞬态响应与稳态响应。

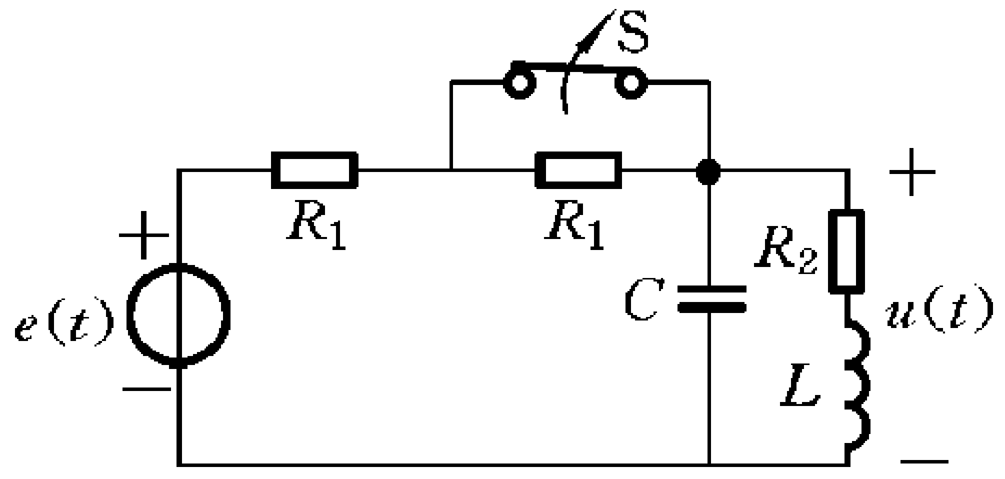


图 5-6

解　电路处稳态时，求得初始值

$$i_L(0)=\frac{E}{R_1+R_2}=\frac{2}{3}\ \text{A}$$

$$u_C(0)=R_2 i_L(0)=\frac{4}{3}\ \text{V}$$

断开后

$$\begin{cases} i_L(t)R_2+L\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=u(t) \\ \left[C\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+i_L(t)\right]\cdot 2R_1+u(t)=e(t) \end{cases}$$

对微分方程进行拉普拉斯变换，得

$$\begin{cases} 2I_L(s)+2sI_L(s)-2i_L(0)=U(s) \\ \left[\dfrac{1}{2}sU(s)-\dfrac{1}{2}u_C(0)+I_L(s)\right]\cdot 2+U(s)=\dfrac{2}{s} \end{cases}$$

整理得

$$U(s)=\frac{\frac{4}{3}s^2+2s+2}{s(s^2+2s+2)}$$

$$U(s)=\frac{1}{s}+\frac{\frac{1}{3}s}{s^2+2s+2}=\frac{1}{s}+\frac{\frac{1}{3}(s+1)}{(s+1)^2+1}-\frac{\frac{1}{3}}{(s+1)^2+1}$$

所以

$$u(t)=\left(1+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}\cos t-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}\sin t\right)\varepsilon(t)$$

零输入响应

$$U_{zi}(s)=\frac{\frac{4}{3}(s+1)}{(s+1)^2+1}-\frac{\frac{4}{3}}{(s+1)^2+1}$$

所以

$$u_{zi}(t)=\left(\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}\cos t-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}\sin t\right)\varepsilon(t)$$

零状态响应　$u_{zs}(t)=(1-e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t)\varepsilon(t)$

受迫响应　$u(t)=\varepsilon(t)$

自然响应　$u(t)=\left(\frac{1}{3}e^{-t}\cos t-\frac{1}{3}e^{-t}\sin t\right)\varepsilon(t)$

瞬态响应　$u(t)=\left(\frac{1}{3}e^{-t}\cos t-\frac{1}{3}e^{-t}\sin t\right)\varepsilon(t)$

稳态响应　$u(t)=\varepsilon(t)$

【5-19】 在图5-7中，激励信号$i_s(t)=\sin t\varepsilon(t)$，电路参量为$L=\frac{3}{4}$ H，$C=\frac{1}{3}$ F，求零状态响应$u(t)$。

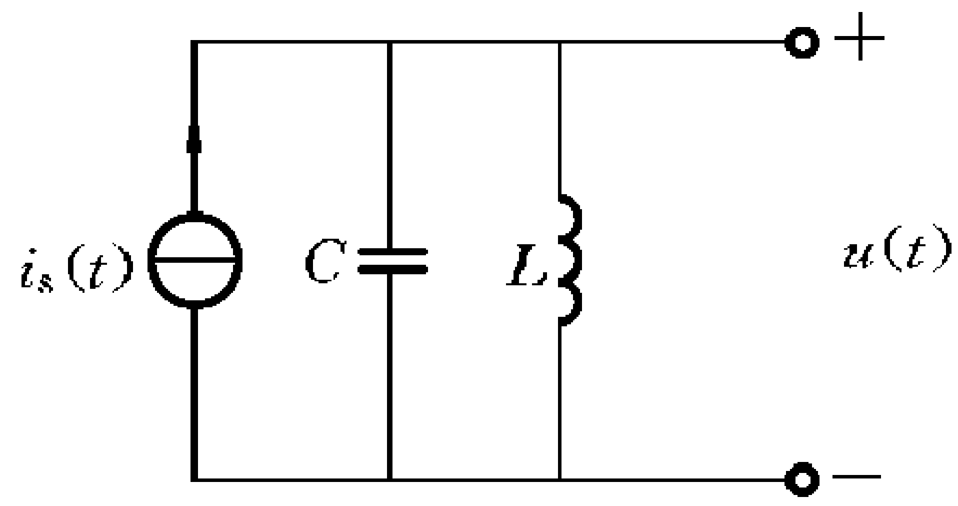


图5-7

解　由激励$i_s(t)$的拉普拉斯变换

$$I_s(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

可求得系统转移函数

$$H(s)=\frac{U(s)}{I(s)}=\frac{1}{Cs+\frac{1}{Ls}}=\frac{3s}{s^2+4}$$

则

$$U(s)=I_s(s)H(s)=\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{3s}{s^2+4}$$

$$=\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}$$

所以

$$u(t)=\mathscr{L}^{-1}\{U(s)\}=[\cos t-\cos(2t)]\varepsilon(t)$$

【5-20】 在图5-8所示的电路中，已知电路参数为$L_1=L_2=1$ H，$R=2$ Ω，$E=10$ V。设开关S在$t=0$时断开，求响应$i(t)$及$u_{L_1}(t)$。

解　在开关断开后，可将初始状态作为等效源，则其等效电路图如图5-9所示，其中

$$u_{L_1}(0)=L_1 i_L(0)\delta(t)$$

$$u_{L_1}(0)=L_1\frac{E}{R}\delta(t)=5\delta(t)$$

则由图5-9可得运算形式的回路方程：

$$[(L_1+L_2)s+R]I(s)=\frac{E}{s}+\frac{E}{R}L_1$$

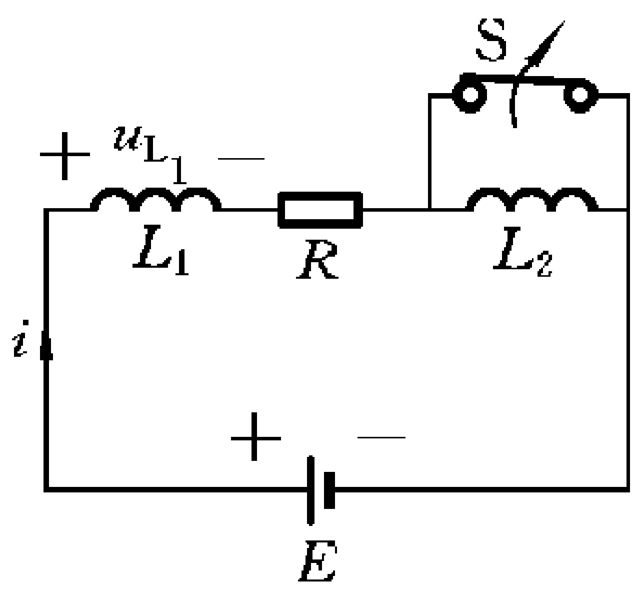


图 5-8

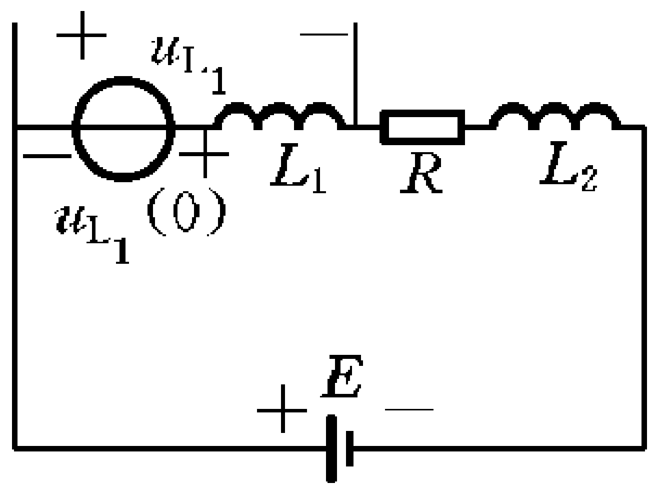


图 5-9

将条件代入整理得

$$I(s)=5\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}\right)$$

所以
$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}\{I(s)\}=5\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\right)\varepsilon(t)$$

又由 $u_{L_1}(t)=L_1\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}-u_{L_1}(0)=5\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+5\cdot\dfrac{1}{2}\delta(t)-5\delta(t)$

$$=2.5\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)-2.5\delta(t)$$

【5-21】 在图 5-10 所示的电路中，已知电路参数 $R=1\ \Omega$，$C_1=C_2=1\ \mathrm{F}$，$E_1=E_2=1\ \mathrm{V}$。设开关S 在$t=0$ 时由①倒向②，求电容 C_1 上的电压 $u_{C_1}(t)$及电流 $i(t)$。

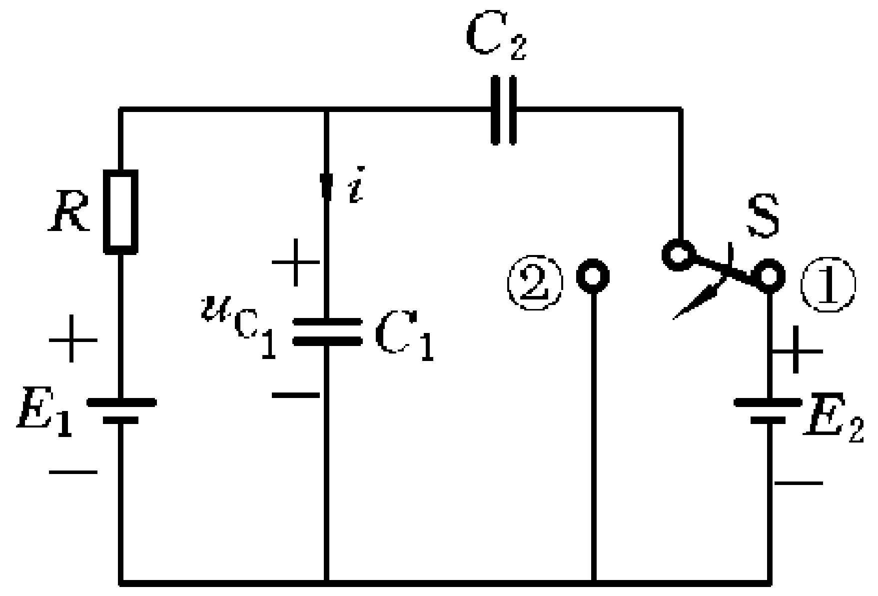


图 5-10

解　当开关S 在①时，电路达到稳定状态，可得

$$u_{C_1}(0^-)=E_1=1\ \mathrm{V}$$

$$u_{C_2}(0^-)=E_1-E_2=0$$

当$t>0$ 时，开关倒向②，初始状态视为等效源，则其等效电路如图 5-11(a)所示。

将图 5-11(a)变为运算形式的等效电路，如图 5-11(b)所示，写出回路方程：

$$\begin{cases}[I(s)+I_2(s)]R+I(s)\dfrac{1}{C_1s}+\dfrac{E_1}{s}=\dfrac{E_1}{s}\\[2ex]\dfrac{1}{C_2s}I_2(s)=\dfrac{1}{C_1s}I(s)+\dfrac{E_1}{s}\end{cases}$$

将条件代入整理得

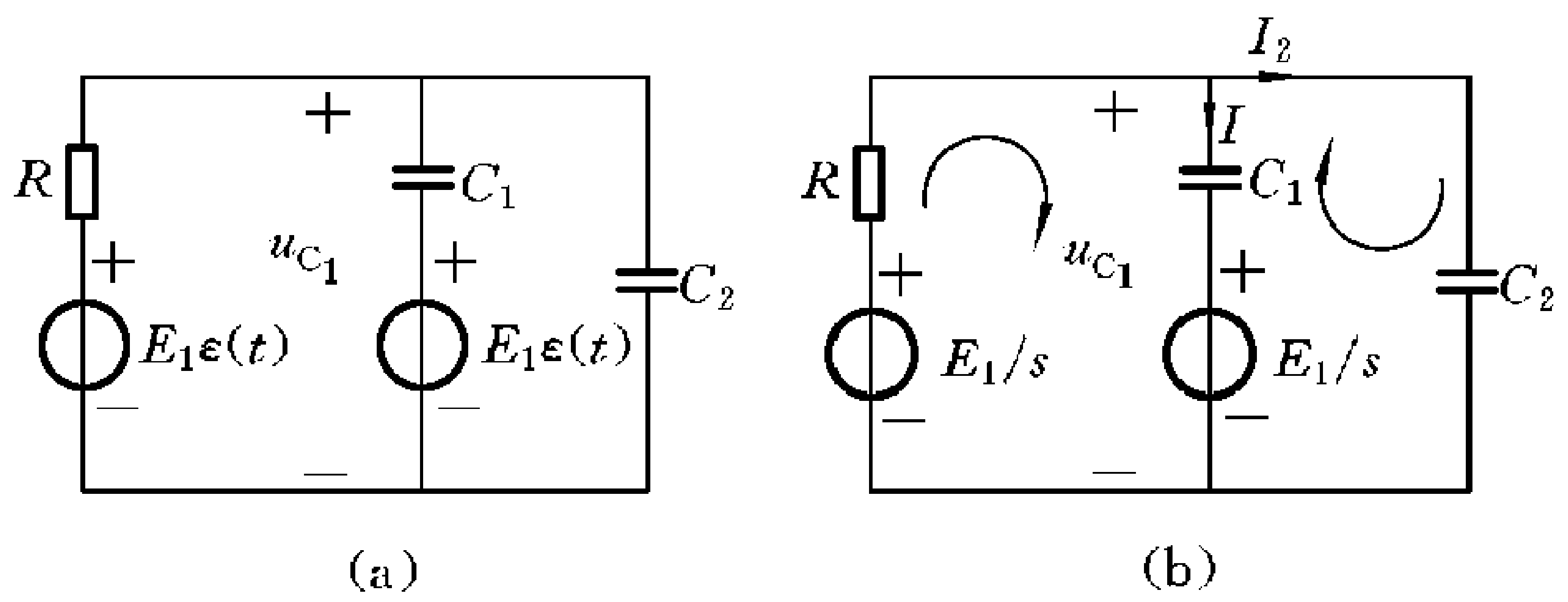


图 5-11

$$I(s)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{1}{s+\frac{1}{2}}=-\frac{s}{2s+1}$$

又
$$U_{C_1}(s)=\frac{1}{C_1 s}I(s)+\frac{E_1}{s}$$

则
$$U_{C_1}(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+\frac{1}{2}}$$

分别对 $I(s)$ 和 $U_{C_1}(s)$ 进行拉普拉斯反变换得

$$u_{C_1}(t)=\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\right)\varepsilon(t)$$

$$i(t)=-\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t}\varepsilon(t)$$

【5-22】 在图 5-12 所示的电路中，已知 $R_1=4\ \Omega$，$R_2=2\ \Omega$，$L_1=L_2=M=1\ \text{H}$，响应为 $i_2(t)$，求单位冲激响应和单位阶跃响应。

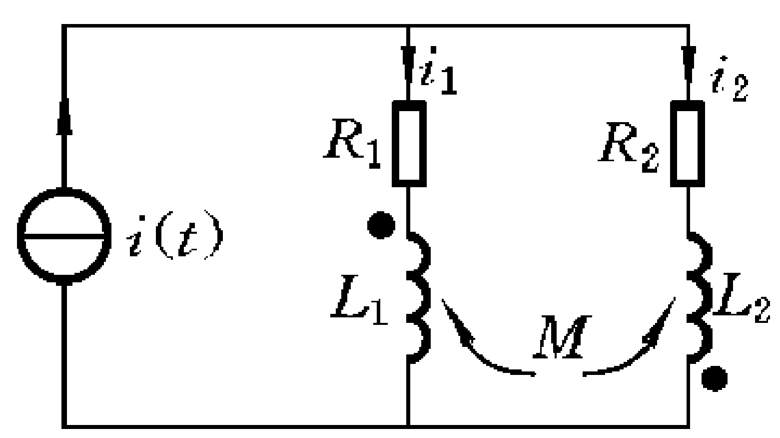


图 5-12

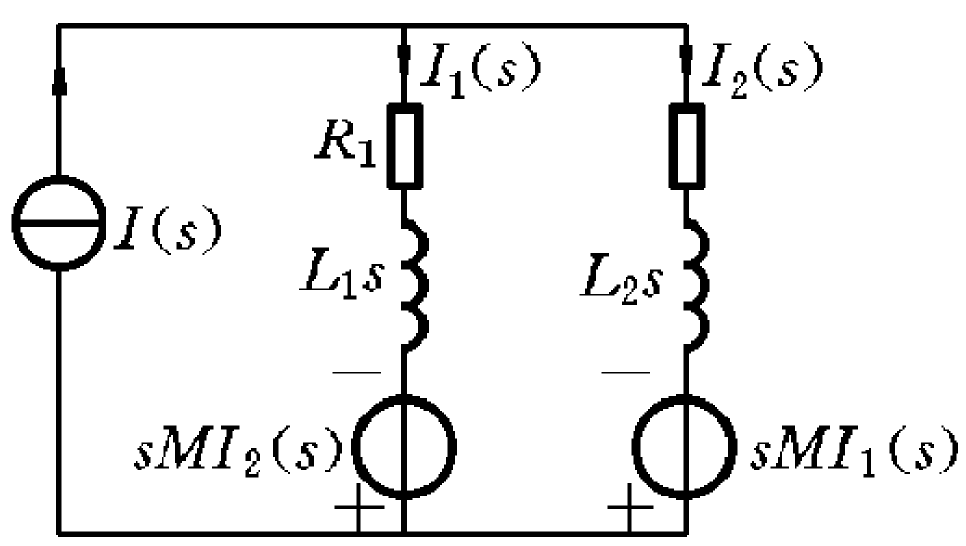


图 5-13

解 画出其运算形式的等效电路，如图 5-13 所示。由图 5-13 列写出回路

方程：

$$R_1[I(s)-I_2(s)]+sL_1[I(s)-I_2(s)]-sMI_2(s)$$
$$=I_2(s)R_2+sL_2I_2(s)-sM[I(s)-I_2(s)]$$

又由 $H(s)=\dfrac{I_2(s)}{I(s)}$，并将条件代入方程 $H(s)=\dfrac{I_2(s)}{I(s)}$，整理得

$$H(s)=\frac{s+2}{2s+3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{1}{s+\frac{3}{2}}$$

则转移函数即为单位冲激响应。

再求单位阶跃响应：

$$R_E(s)=H(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{s+2}{(2s+3)s}=\frac{2}{3}\frac{1}{s}-\frac{1}{6}\frac{1}{s+\frac{3}{2}}$$

则对 $H(s)$ 和 $R_E(s)$ 求拉普拉斯反变换，得

$$h(t)=\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\varepsilon(t)$$
$$r_\varepsilon(t)=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\right)\varepsilon(t)$$

【5-23】 求在图 5-14(a)所示方波电压作用下，RC 电路(见图 5-14(b))响应电压 $u(t)$。

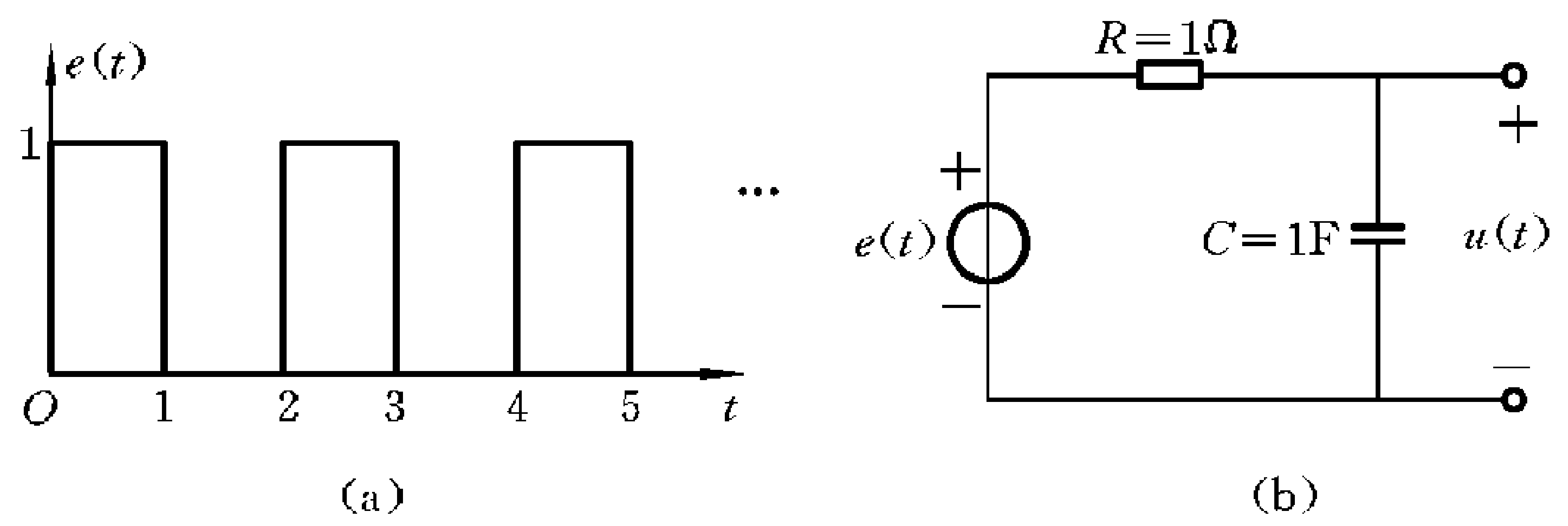


图 5-14

解 由图5-14(a)可知 $e(t)$ 是周期 $T=2$，第一周期单个函数为 $e_1(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$ 的周期函数，求 $e(t)$ 的拉普拉斯变换：

$$E(s)=\left(\frac{1}{s}-\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}\right)\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2s}}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-s}}$$

又
$$H(s)=\frac{\frac{1}{Cs}}{R+\frac{1}{Cs}}=\frac{1}{1+RCs}$$

代入条件，求得
$$H(s)=\frac{1}{1+s}$$

所以
$$U(s)=E(s)H(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-s}}=\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)\cdot\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-s}}$$
$$=\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)(1-\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s}-\mathrm{e}^{-3s}+\cdots)$$
$$u(t)=(1-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)-[1-\mathrm{e}^{-(t-1)}]\varepsilon(t-1)+[1-\mathrm{e}^{-(t-2)}]\varepsilon(t-2)\cdots$$
$$=\{(1-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)+[1-\mathrm{e}^{-(t-2)}]\varepsilon(t-2)+\cdots\}-\{[1-\mathrm{e}^{-(t-1)}]\varepsilon(t-1)+[1-\mathrm{e}^{-(t-3)}]\varepsilon(t-3)+\cdots\}$$

即
$$u(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}[1-\mathrm{e}^{-(t-2k)}]\varepsilon(t-2k)-\sum_{k=0}^{+\infty}[1-\mathrm{e}^{-(t-2k-1)}]\varepsilon(t-2k-1)$$

【5-24】 已知系统的冲激响应为 $h(t)=4\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$，零状态响应为 $r(t)=(1-\mathrm{e}^{-2t}-t\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$，求激励信号 $e(t)$。

解　对冲激响应 $h(t)$ 和零状态响应 $r(t)$ 进行拉普拉斯变换：
$$H(s)=\frac{4}{s+2}$$
$$R(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}-\frac{1}{(s+2)^2}$$

又对于零状态响应
$$R(s)=H(s)E(s)$$

则
$$E(s)=\frac{R(s)}{H(s)}=\frac{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}-\frac{1}{(s+2)^2}}{\frac{4}{s+2}}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{s}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{s+2}$$

所以
$$e(t)=\mathscr{L}^{-1}\{E(s)\}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

【5-25】 已知某系统在 $\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$ 作用下全响应为 $(t+1)\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$。在 $\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$ 作用下全响应为 $(2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$，求阶跃电压作用下的全响应。

解　分别对各激励和响应进行拉普拉斯变换，得
$$E_1(s)=\frac{1}{s+1},\quad R_1(s)=\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+1}$$

$$E_2(s)=\frac{1}{s+2},\quad R_2(s)=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

又
$$R_1(s)=E_1(s)H(s)+R_{zi}(s) \quad ①$$
$$R_2(s)=E_2(s)H(s)+R_{zi}(s) \quad ②$$

由①－②，得

$$H(s)=\frac{R_1(s)-R_2(s)}{E_1(s)-E_2(s)}=\frac{\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s+2}}{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}}=\frac{1}{s+1}$$

将上式结果代入式①，解得

$$R_{zi}(s)=R(s)-E_1(s)H(s)=\frac{1}{s+1}$$

所以　$R_3(s)=E_3(s)H(s)+R_{zi}(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s}$

故
$$r(t)=\mathscr{L}^{-1}\{R_3(s)\}=\varepsilon(t)$$

【5-26】 下列函数是否存在双边拉普拉斯变换，如存在求其$F_d(s)$并标注收敛区。

(1) $f(t)=\begin{cases}e^{2t}, & t<0\\ e^{-3t}, & t>0\end{cases}$　　(2) $f(t)=\begin{cases}e^{4t}, & t<0\\ e^{3t}, & t>0\end{cases}$

(3) $f(t)=\begin{cases}e^{3t}, & t<0\\ e^{4t}, & t>0\end{cases}$

解　(1) 右边函数的拉普拉斯变换$F_a(s)$：

$$F_a(s)=\frac{1}{s+3},\quad \sigma_a>-3$$

左边函数的拉普拉斯变换$F_b(s)$：

$$f_b(-\tau)=f_b(t)\Big|_{t=-\tau}=e^{-2\tau},\quad \tau>0$$

$$F_b(p)=\mathscr{L}\{f_b(-\tau)\}=\mathscr{L}\{e^{-2\tau}\}=\frac{1}{p+2}$$

$$F_b(s)=F_b(p)\Big|_{p=-s}=\frac{-1}{s-2}$$

其收敛区$\sigma_b<2$。

所以 $F_a(s)$ 与 $F_b(s)$ 有公共收敛区 $-3<\sigma<2$，故 $F_d(s)$ 存在，并为

$$F_d(s)=\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s-2}=\frac{-5}{(s+3)(s-2)},\quad -3<\sigma<2$$

(2) 右边函数的拉普拉斯变换 $F_a(s)$：

$$F_a(s)=\frac{1}{s-3},\quad \sigma_a>3$$

左边函数的拉普拉斯变换 $F_b(s)$：

$$f_b(-\tau)=f_b(t)\Big|_{t=-\tau}=e^{-4\tau},\quad \tau>0$$

$$F_b(p)=\mathscr{L}\{f_b(-\tau)\}=\mathscr{L}\{e^{-4\tau}\}=\frac{1}{p+4}$$

$$F_b(s)=F_b(p)\Big|_{p=-s}=\frac{-1}{s-4},\quad \sigma_b<4$$

所以 $F_a(s)$ 与 $F_b(s)$ 有公共收敛区 $3<\sigma<4$，故 $F_d(s)$ 存在，并为

$$F_d(s)=F_a(s)+F_b(s)=\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-4}=\frac{-1}{(s-3)(s-4)},\quad 3<\sigma<4$$

(3) 右边函数的拉普拉斯变换 $F_a(s)$：

$$F_a(s)=\frac{1}{s-4},\quad \sigma_a>4$$

左边函数的拉普拉斯变换 $F_b(s)$：

$$f_b(-\tau)=f_b(t)\Big|_{t=-\tau}=e^{-3\tau},\quad \tau>0$$

$$F_b(p)=\mathscr{L}\{f_b(-\tau)\}=\mathscr{L}\{e^{-3\tau}\}=\frac{1}{p+3}$$

$$F_b(s)=F_b(p)\Big|_{p=-s}=\frac{-1}{s-3},\quad \sigma_b<3$$

所以 $F_a(s)$ 与 $F_b(s)$ 没有公共收敛区，故不存在 $F_d(s)$。

【5-27】 求下列 $F_d(s)$ 的原时间信号。

(1) $\dfrac{1}{(s-1)(s-3)}$，$1<\sigma<3$　　(2) $\dfrac{s}{(s+1)(s+2)}$，$-2<\sigma<-1$

(3) $\dfrac{s^2+s+1}{s^2+1}$，$\sigma<0$　　(4) $\dfrac{-2s^2-4s-25}{(s^2+25)(s+4)}$，$-4<\sigma<0$

解 (1) 根据给定的收敛区知,左侧极点$s_1=1$,右侧极点$s_2=3$。将$F_d(s)$展开成部分分式:

$$F_d(s)=-\frac{1}{2}\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{s-3}$$

因此对应于$-\frac{1}{2}\frac{1}{s-1}$的是右边函数:

$$f_a(t)=-\frac{1}{2}e^t,\quad t\geqslant 0$$

对应于$\frac{1}{2}\frac{1}{s-3}$的是左边函数$f_b(t)$:

$$F(p)=\frac{1}{2}\frac{1}{s-3}\bigg|_{s=-p}=-\frac{1}{2}\frac{1}{p+3}$$

$$f_b(\tau)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=-\frac{1}{2}e^{-3\tau}$$

$$f_b(t)=f_b(\tau)\bigg|_{\tau=-t}=-\frac{1}{2}e^{3t},\quad t<0$$

所以 $$f(t)=f_a(t)+f_b(t)=-\frac{1}{2}e^t\varepsilon(t)-\frac{1}{2}e^{3t}\varepsilon(-t)$$

(2) 根据给定的收敛区知,左侧极点$s_1=-2$,右侧极点$s_2=-1$。将$f_d(s)$展开成部分分式:

$$F_d(s)=\frac{2}{s+2}+\frac{-1}{s+1}$$

对应于$\frac{2}{s+2}$的是右边函数:

$$f_a(t)=2e^{-2t},\quad t\geqslant 0$$

对应于$\frac{-1}{s+1}$的是左边函数$f_b(t)$:

$$F(p)=\frac{-1}{s+1}\bigg|_{s=-p}=\frac{1}{p-1}$$

$$f_b(\tau)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\}=e^{\tau}$$

$$f_b(t)=e^{\tau}\bigg|_{\tau=-t}=e^{-t},\quad t<0$$

所以
$$f(t)=2\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)+\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(-t)$$

(3) 由于两极点 $s_1=\mathrm{j}, s_2=-\mathrm{j}$ 均为右侧极点,故对应的时间函数为左边函数。

$$F(p)=F(s)\Big|_{s=-p}=\frac{p^2-p+1}{p^2+1}=1-\frac{p}{p^2+1}$$

$$f(\tau)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=\delta(\tau)-\cos\tau$$

$$f(t)=f(\tau)\Big|_{\tau=-t}=\delta(-t)-\cos t=\delta(t)-\cos t,\quad t<0$$

所以
$$f(t)=\delta(t)-\cos t\varepsilon(-t)$$

(4) 由于 $s_1=-4$ 为左侧极点,$s_{2,3}=\pm 5\mathrm{j}$ 为右侧极点,所以

$$F_{\mathrm{d}}(s)=\frac{-1}{s+4}+\frac{-s}{s^2+25}$$

$\frac{-1}{s+4}$对应的右边函数:

$$f_{\mathrm{a}}(t)=-\mathrm{e}^{-4t},\quad t\geqslant 0$$

$\frac{-s}{s^2+25}$对应的左边函数:

$$F(p)=\frac{p}{p^2+25}$$

$$f_{\mathrm{b}}(\tau)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=\cos 5\tau$$

$$f_{\mathrm{b}}(t)=f_{\mathrm{b}}(\tau)\Big|_{\tau=-t}=\cos 5t,\quad t<0$$

所以
$$f(t)=f_{\mathrm{a}}(t)+f_{\mathrm{b}}(t)=-\mathrm{e}^{-4t}\varepsilon(t)+\cos 5t\varepsilon(-t)$$

【5-28】 求对应于不同收敛区时的原时间函数。

$$F_{\mathrm{d}}(s)=\frac{3s^2+6s-1}{(s+1)(s+3)(s-1)}$$

(1) $\sigma<-3$　　(2) $-3<\sigma<-1$

(3) $-1<\sigma<1$　　(4) $\sigma>1$

解 将 $F_{\mathrm{d}}(s)$展开:

$$F_{\mathrm{d}}(s)=\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}$$

(1) 根据收敛区 $\sigma<-3$ 知，$s_1=-3$，$s_2=-1$，$s_3=1$ 均为右侧极点，则 $F_{\mathrm{d}}(s)$ 对应的时间函数为左边函数：

$$F(p)=-\frac{1}{p-3}-\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}$$

$$f(\tau)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=-\mathrm{e}^{3\tau}-\mathrm{e}^{\tau}-\mathrm{e}^{-\tau}$$

$$f(t)=f(\tau)\Big|_{\tau=-t}=-\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{t},\quad t\leqslant 0$$

所以 $$f(t)=(-\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(-t)$$

(2) 根据收敛区 $-3<\sigma<-1$ 知，$s_1=-3$ 为左侧极点，$s_{2,3}=\pm1$ 为右侧极点，则 $\dfrac{1}{s+3}$ 对应的时间函数为右边函数：

$$f_{\mathrm{a}}(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$$

$\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{s-1}$ 对应的时间函数为左边函数：

$$F(p)=-\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}$$

$$f_{\mathrm{b}}(\tau)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=-\mathrm{e}^{\tau}-\mathrm{e}^{-\tau}$$

$$f_{\mathrm{b}}(t)=f_{\mathrm{b}}(\tau)\Big|_{\tau=-t}=-\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{t},\quad t<0$$

所以 $$f(t)=f_{\mathrm{a}}(t)+f_{\mathrm{b}}(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)-(\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(-t)$$

(3) 根据收敛区 $-1<\sigma<1$ 知，$s_1=-3$，$s_2=-1$ 为左侧极点，$s_3=1$ 为右侧极点，则 $\dfrac{1}{s+3}+\dfrac{1}{s+1}$ 对应的时间函数为右边函数：

$$f_{\mathrm{a}}(t)=\mathrm{e}^{-3t}+\mathrm{e}^{-t},\quad t\geqslant 0$$

$\dfrac{1}{s-1}$ 对应的时间函数为左边函数：

$$F(p)=\frac{-1}{p+1}$$

$$f_{\mathrm{b}}(\tau)=\mathscr{L}^{-1}[F(p)]=-\mathrm{e}^{-\tau}$$

$$f_{\mathrm{b}}(t)=f_{\mathrm{b}}(\tau)\Big|_{\tau=-t}=-\mathrm{e}^{t},\quad t<0$$

所以 $$f(t)=f_{\mathrm{a}}(t)+f_{\mathrm{b}}(t)=(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)-\mathrm{e}^{t}\varepsilon(-t)$$

(4) 根据收敛区 $\sigma>1$ 知，$s_1=-3$，$s_2=-1$，$s_3=1$ 均为左侧极点，则 $F_{\mathrm{d}}(s)$ 对应的时间函数为右边函数：

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F_{\mathrm{d}}(s)\}=\mathrm{e}^{-3t}+\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t},\quad t\geqslant 0$$

所以 $$f(t)=(\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

【5-29】 求激励为 $\mathrm{e}^{2t}\varepsilon(-t)$ 作用于 $h(t)=\mathrm{e}^{t}\varepsilon(t)$ 的系统时的响应。

解 按双边拉普拉斯变换，有

$$F_{\mathrm{d}}(s)=-\frac{1}{s-2},\quad \sigma<2$$

而 $$H(s)=\mathscr{L}\{h(t)\}=\frac{1}{s-1},\quad \sigma>1$$

由此可见 $F_{\mathrm{d}}(s)$ 与 $H(s)$ 有公共收敛区 $1<\sigma<2$，故 $R(s)$ 存在。

$$R(s)=F_{\mathrm{d}}(s)\cdot H(s)=\frac{-1}{(s-1)(s-2)}=\frac{1}{s-1}+\frac{-1}{s-2}$$

由收敛区可判别，$s_1=1$ 为左侧极点，$s_2=2$ 为右侧极点，则右边时间信号为

$$r_{\mathrm{a}}(t)=\mathrm{e}^{t},\quad t\geqslant 0$$

左边时间信号为

$$r_{\mathrm{b}}(t)=\mathscr{L}_{\mathrm{d}}^{-1}\{R_{\mathrm{b}}(s)\}=\mathscr{L}_{\mathrm{d}}^{-1}\left\{-\frac{1}{s-2}\right\}=\mathrm{e}^{2t},\quad t<0$$

所以 $$r(t)=r_{\mathrm{a}}(t)+r_{\mathrm{b}}(t)=\mathrm{e}^{t}\varepsilon(t)+\mathrm{e}^{2t}\varepsilon(-t)$$

【5-30】 试绘出下列算子方程所描述的系统直接模拟框图。

(1) $(p^3+3p+2)y(t)=x(t)$

(2) $(p^3+3p^2+3p+2)y(t)=(p^2+2p)x(t)$

解 (1) 系统直接模拟框图如图 5-15(a)所示。

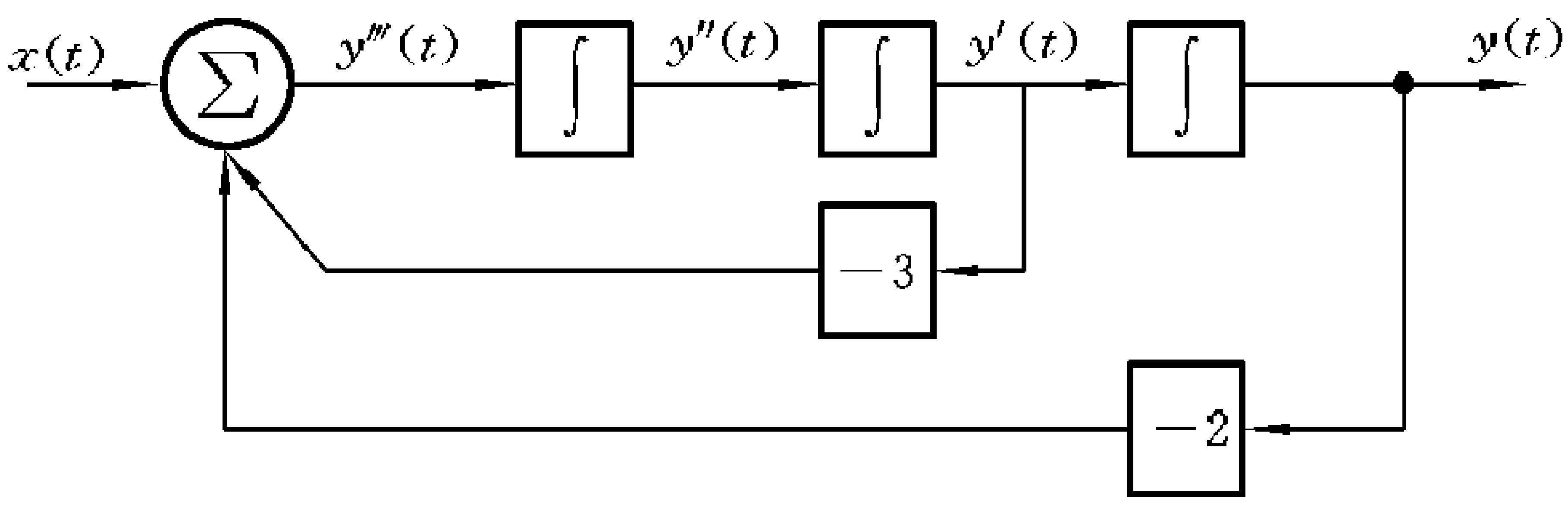
(2) 系统直接模拟框图如图 5-15(b)所示。

【5-31】 已知两个系统框图如图 5-16 所示，试求其系统函数，并说明此两个系统框图对应的是同一系统。

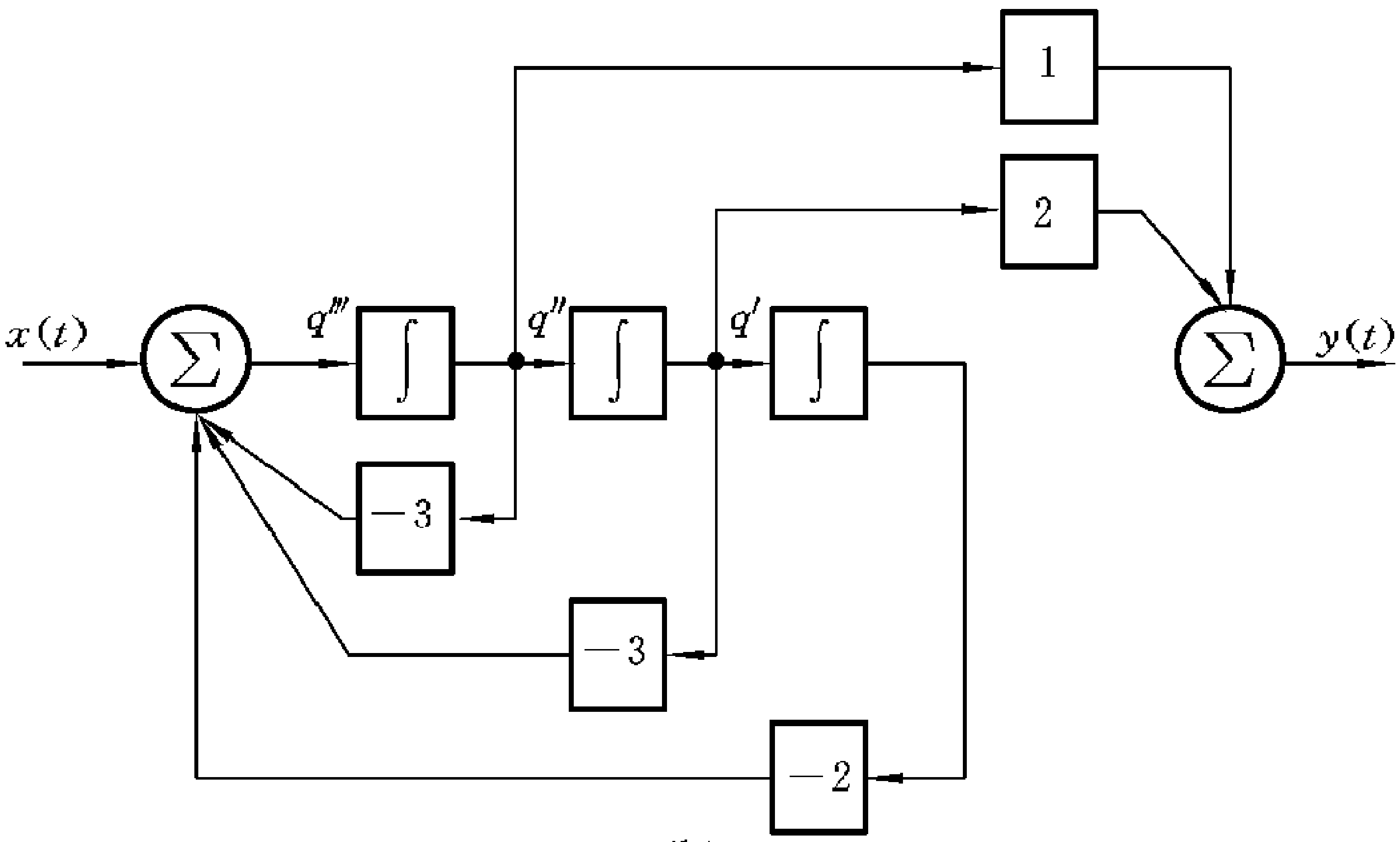
解 由图 5-16(a)所示的系统框图可写出其系统函数

$$H_1(s)=\frac{s^2+3s+2}{s^2+2s+1}$$

由图 5-16(b)所示的系统框图可写出其系统函数



(a)



(b)

图 5-15

$$H_2(s) = 1 + \frac{s+1}{s^2+2s+1}$$

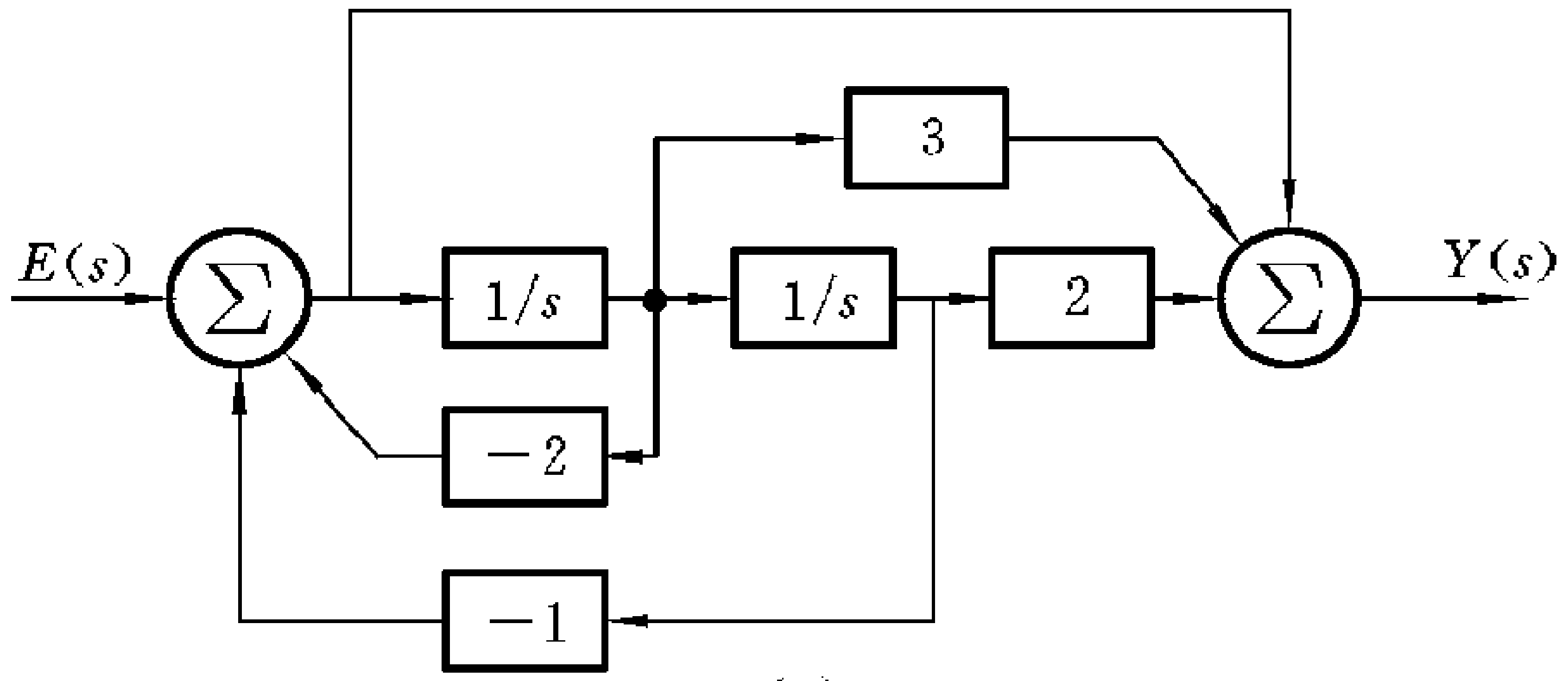
易得
$$H_1(s) = H_2(s)$$

所以此两个系统框图对应的是同一系统。

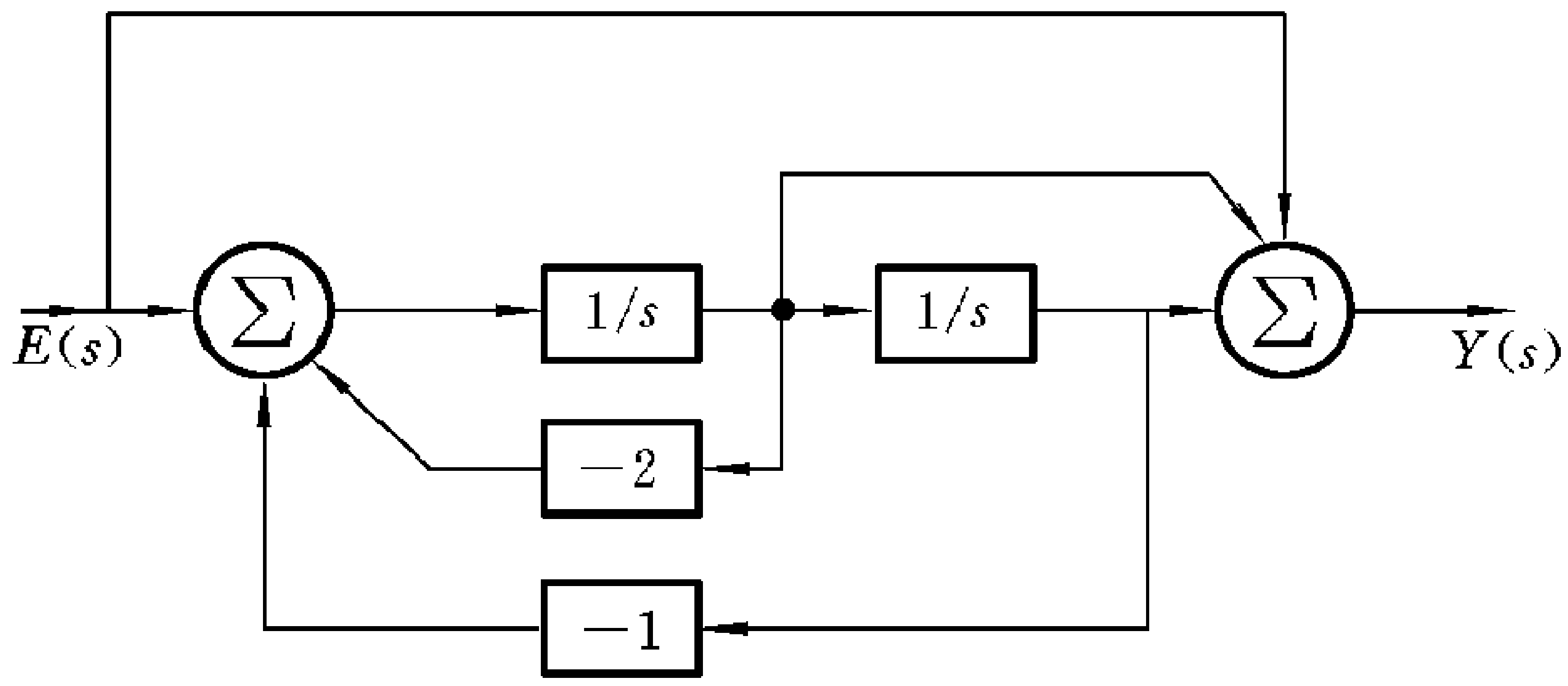
【5-32】 设系统函数 $H(s)$ 如下，试绘其直接模拟框图、并联模拟框图及级联模拟框图。

(1) $H(s)=\dfrac{5(s+1)}{s(s+2)(s+5)}$　　(2) $H(s)=\dfrac{2s+3}{(s+2)^2(s+3)}$

(3) $H(s)=\dfrac{5s^2+s+1}{s^3+s^2+s}$



(a)



(b)

图 5-16

解　(1) i) $H(s)=\dfrac{5s+5}{s^3+7s^2+10s}$

直接模拟框图如图 5-17(a)所示。

ii) $H(s)=\dfrac{5}{s+2}\cdot\dfrac{s+1}{s+5}\cdot\dfrac{1}{s}$

串联(级联)模拟框图如图 5-17(b)所示。

iii) $H(s)=\dfrac{1/2}{s}+\dfrac{5/6}{s+2}-\dfrac{4/3}{s+5}$

并联模拟框图如图 5-17(c)所示。

(2) i) $H(s)=\dfrac{2s+3}{s^3+7s^2+16s+12}$

直接模拟框图如图 5-18(a)所示。

ii) $H(s)=\dfrac{1}{s+2}\cdot\dfrac{1}{s+2}\cdot\dfrac{2s+3}{s+3}$

串联(级联)模拟框图如图 5-18(b)所示。

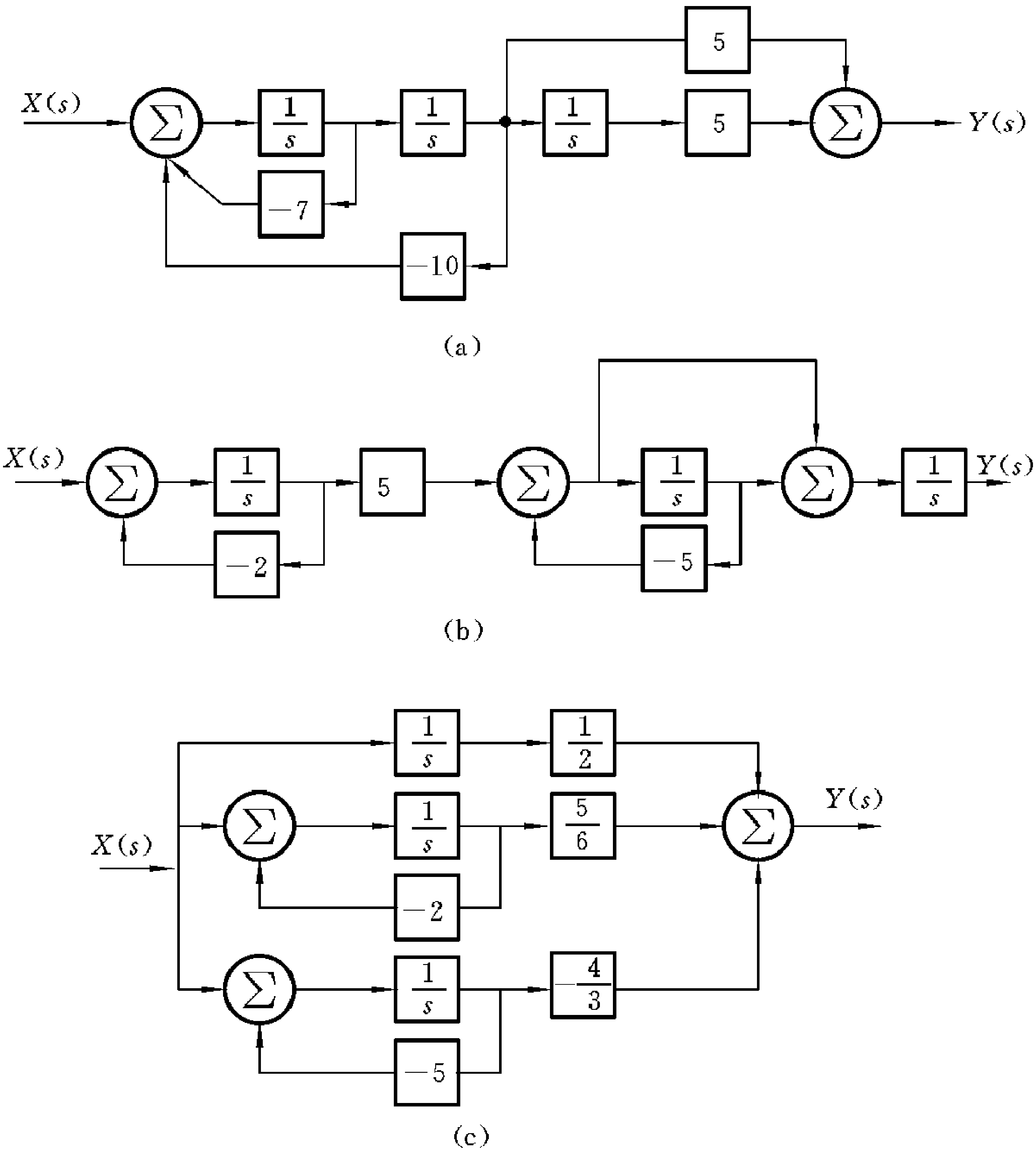


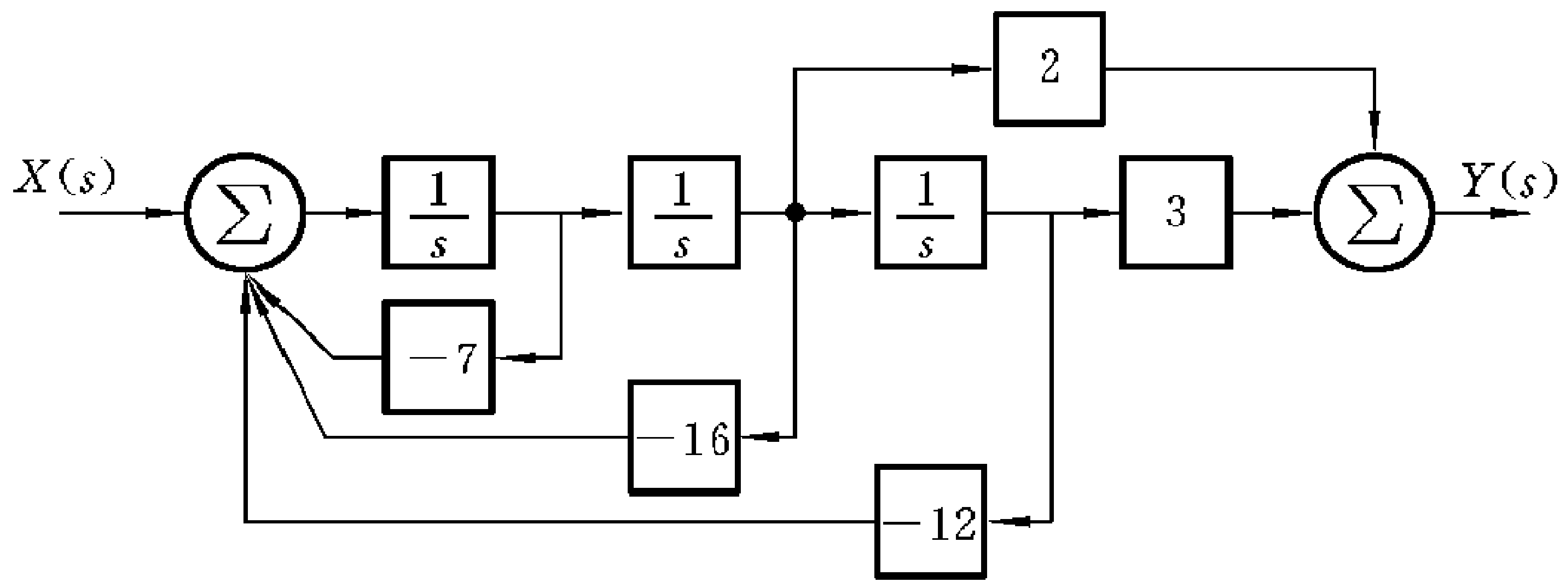
图 5-17

iii) $H(s)=\dfrac{3}{s+2}+\dfrac{-1}{(s+2)^2}+\dfrac{-3}{s+3}$

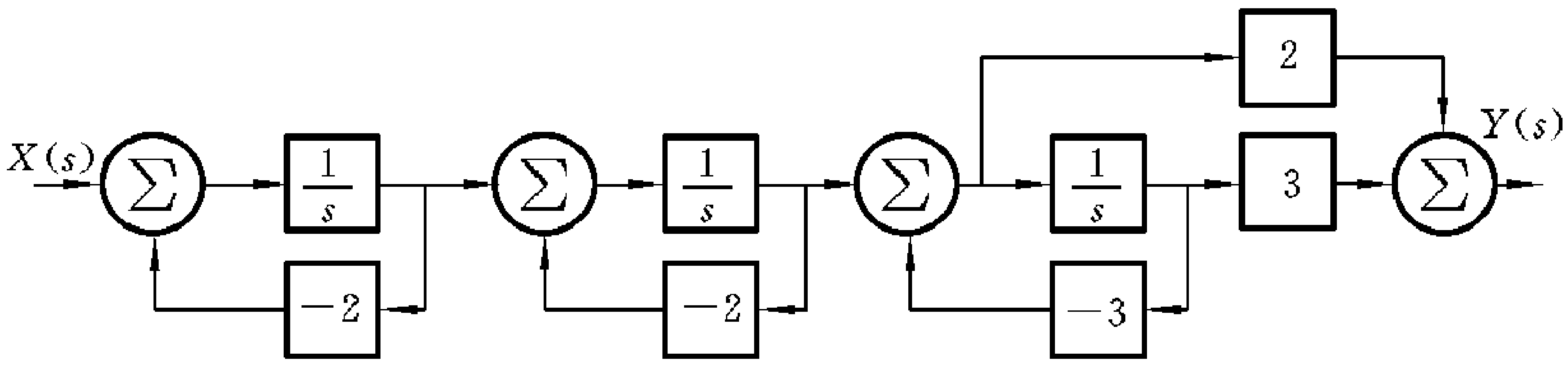
并联模拟框图如图 5-18(c)所示。

(3) i) $H(s)=\dfrac{5s^2+s+1}{s^3+s^2+s}$

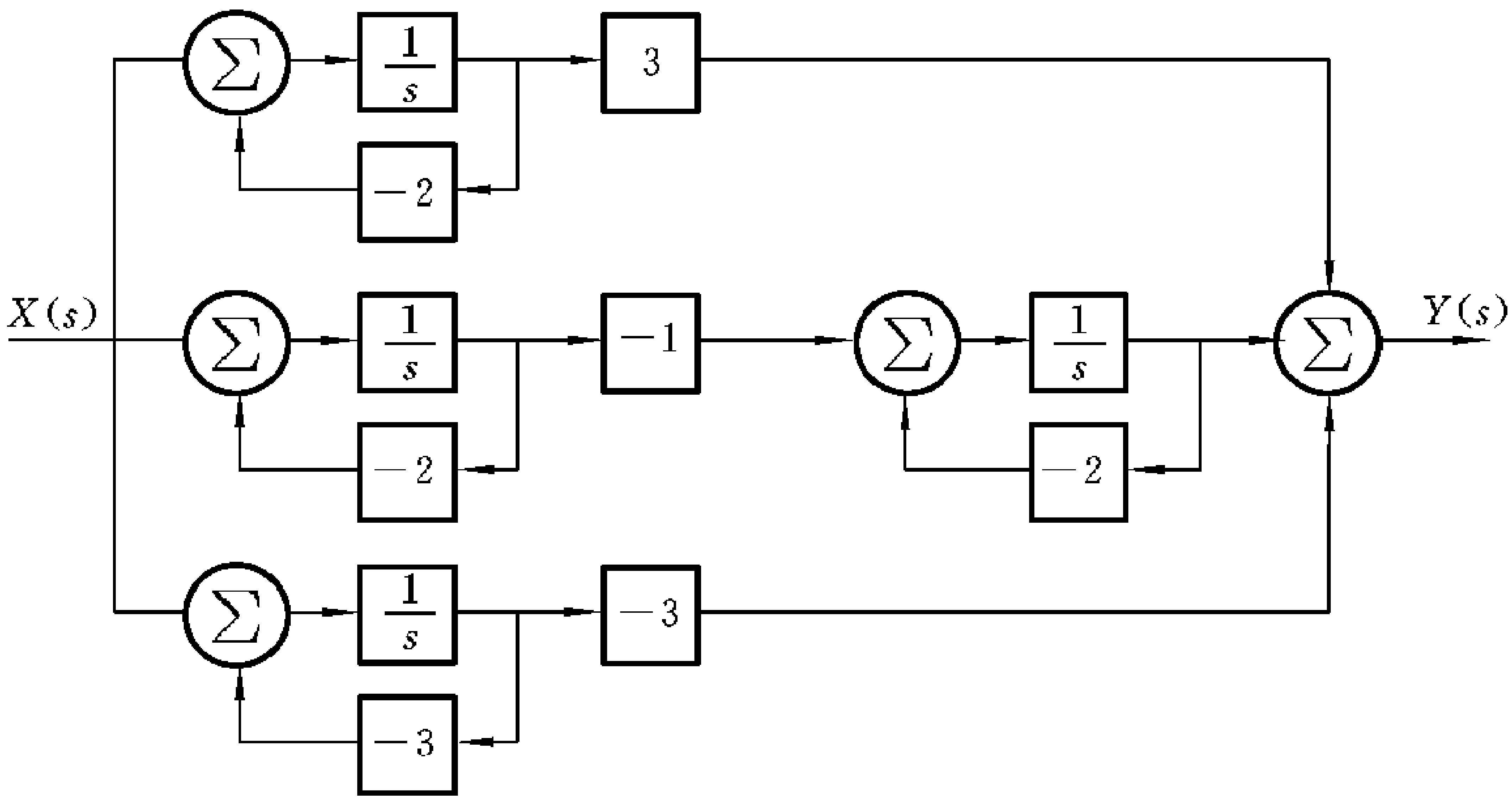
直接模拟框图如图 5-19(a)所示。



(a)



(b)



(c)

图 5-18

ii) $H(s)=\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{5s^2+s+1}{s^2+s+1}$

串联(级联)模拟框图如图5-19(b)所示。

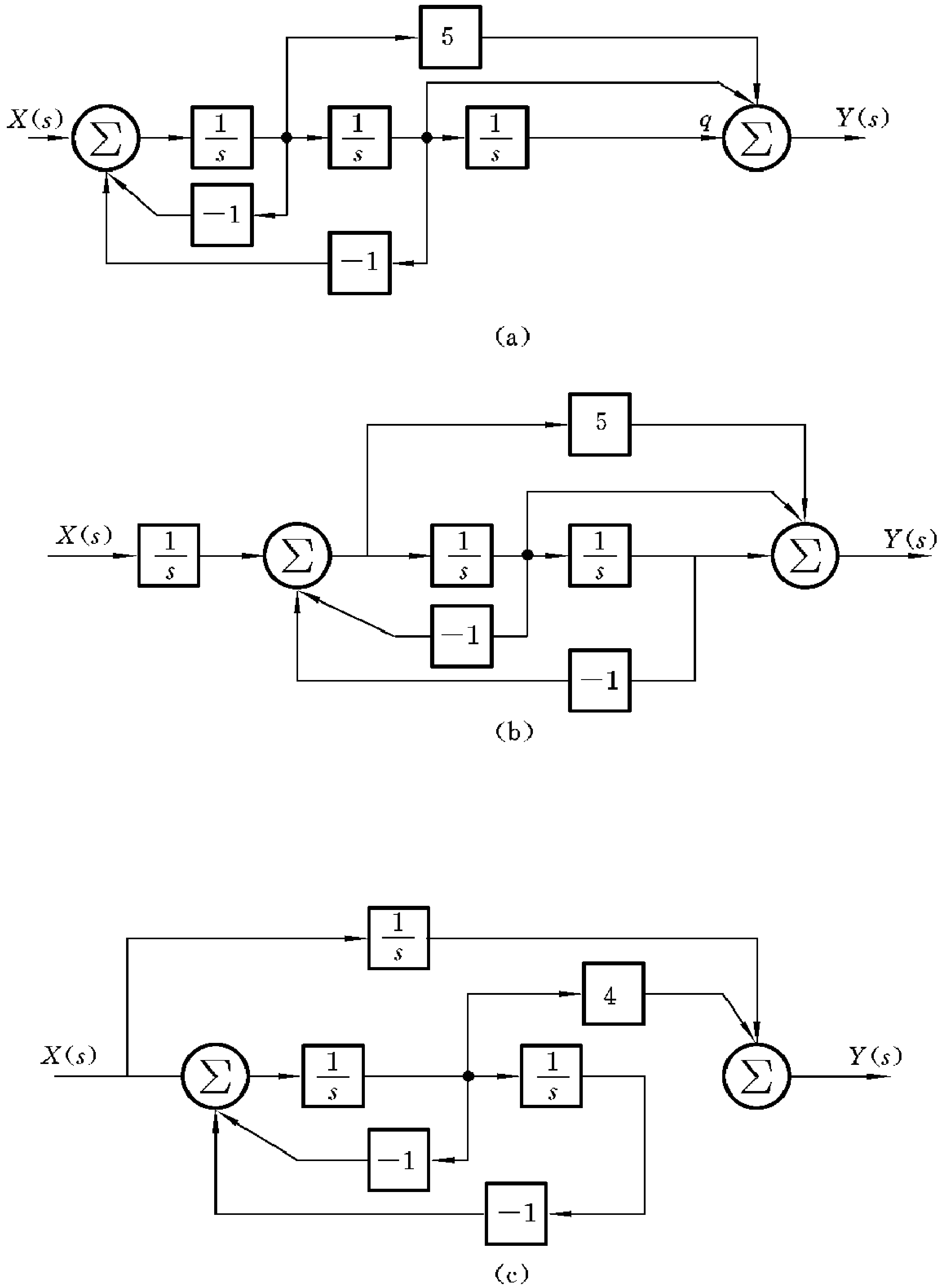


图5-19

iii) $H(s)=\dfrac{1}{s}+\dfrac{4s}{s^2+s+1}$

并联模拟框图如图5-19(c)所示。

【5-33】 一反馈系统如图 5-20 所示。

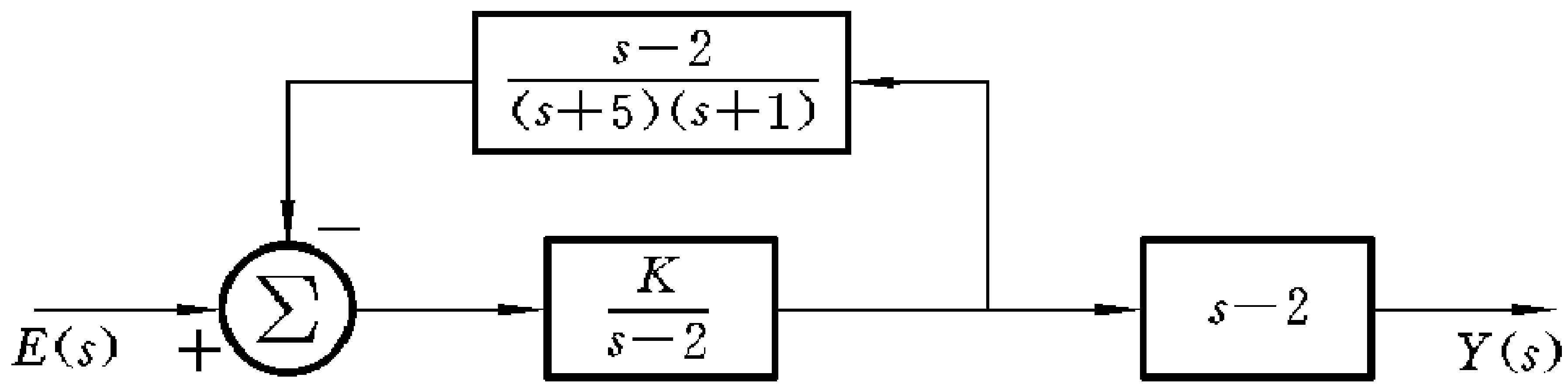


图 5-20

(1) 由框图求系统函数 $H(s)$；

(2) 由流图化简求 $H(s)$。

解　(1) 对于负反馈系统，有

$$H(s)=\frac{\text{正向支路传输函数}}{1+\text{闭合环路传输函数}}$$

由图 5-20 可知

$$H(s)=\frac{\dfrac{K}{s-2}(s-2)}{1+\dfrac{s-2}{(s+5)(s+1)}\cdot\dfrac{K}{s-2}}=\frac{K(s+1)(s+5)}{(s+1)(s+5)+K}$$

或对照反馈系统的模拟图计算：

$$Y(s)\cdot\frac{1}{s-2}\cdot\frac{s-2}{K}=E(s)-\frac{Y(s)}{s-2}\cdot\frac{s-2}{(s+5)(s+1)}$$

$$\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{(s+1)(s+5)}\right)Y(s)=E(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{E(s)}=\frac{K(s+1)(s+5)}{s^2+6s+5+K}$$

(2) 信号流图的化简如图 5-21 所示，由图 5-21 可得

$$H(s)=\frac{K(s+5)(s+1)}{s^2+6s+5+K}$$

【5-34】 试由图5-22 所示系统模拟框图作信号流图，并用流图化简规则或用梅森公式求系统函数 $H(s)$。

解　(1) 图 5-22(a)所示系统的信号流图如图 5-23 所示。

利用梅森公式求系统转移函数：

$$\Delta=1-[Y(-Z)]=1+YZ$$

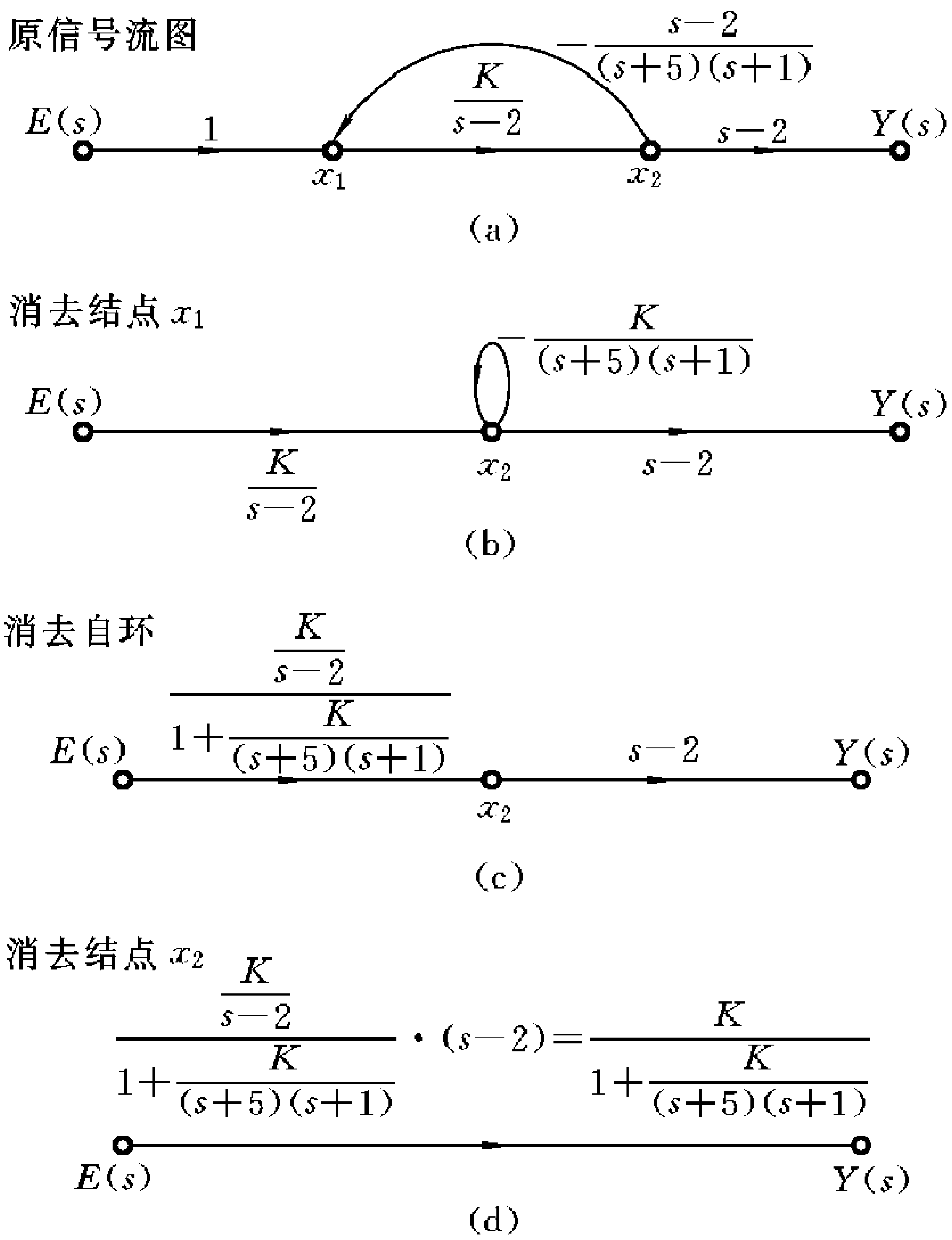


图 5-21

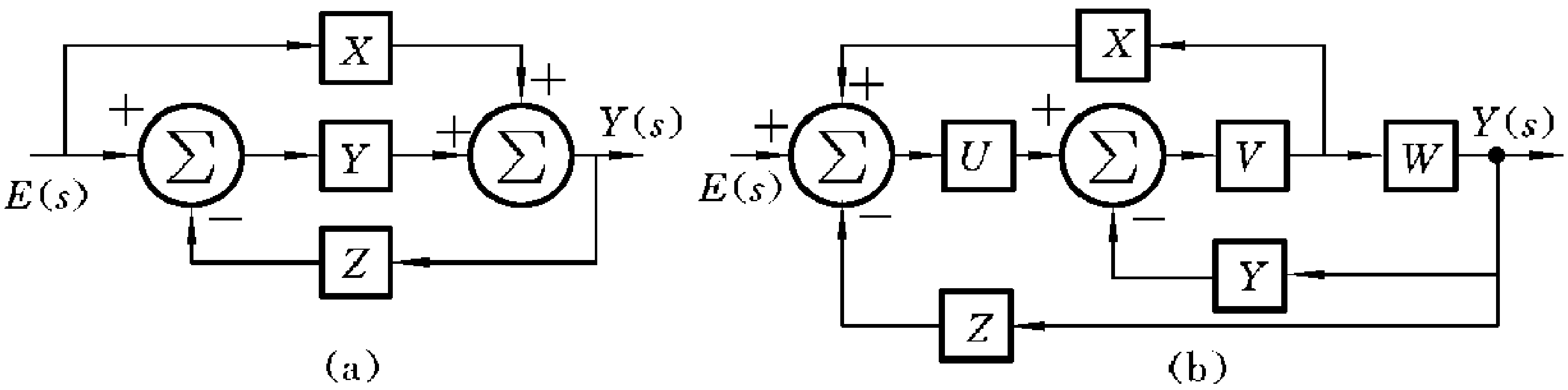


图 5-22

$$G_1 = Y,\quad \Delta_1 = 1$$

$$G_2 = X,\quad \Delta_2 = 1$$

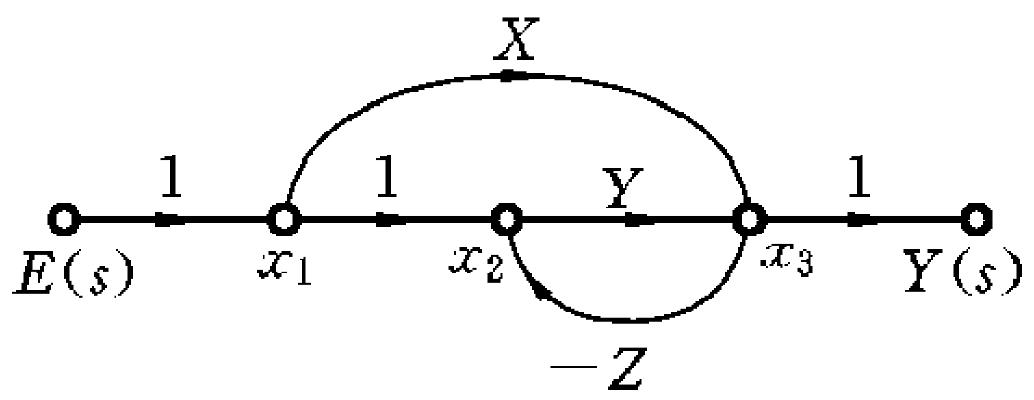


图 5-23

所以
$$H(s)=\frac{1}{\Delta}\sum_k G_k\Delta_k=\frac{X+Y}{1+YZ}$$

利用信号流图化简规则(见图 5-24)：

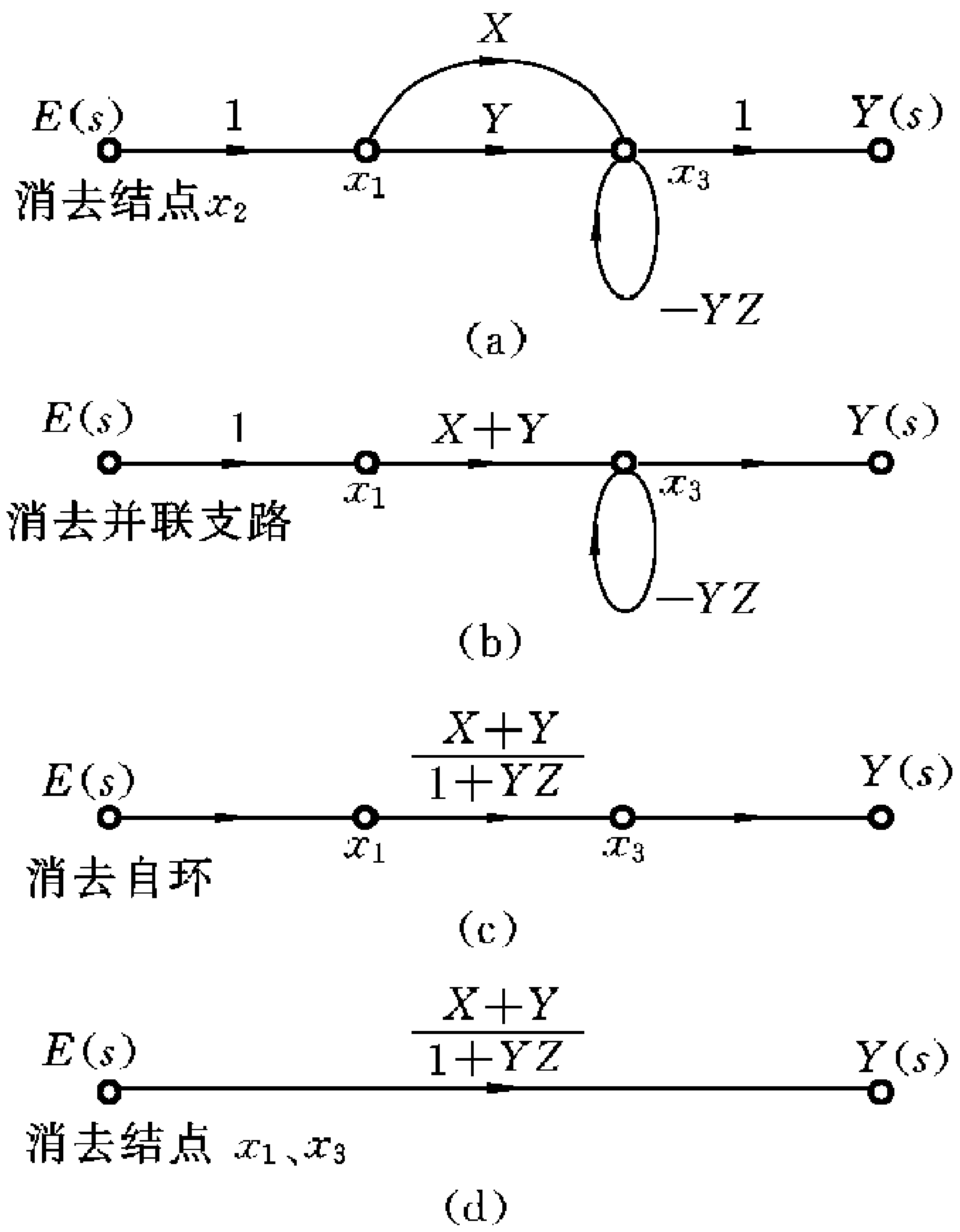


图 5-24

i) 消去结点 x_2(见图 5-24(a))。

ii) 消去并联支路(见图 5-24(b))。

iii) 消去自环(见图 5-24(c))。

iv) 消去结点 x_1、x_3(见图 5-24(d))。

所以
$$H(s)=\frac{X+Y}{1+YZ}$$

(2) 图 5-22(b)所示系统的信号流图如图 5-25 所示。

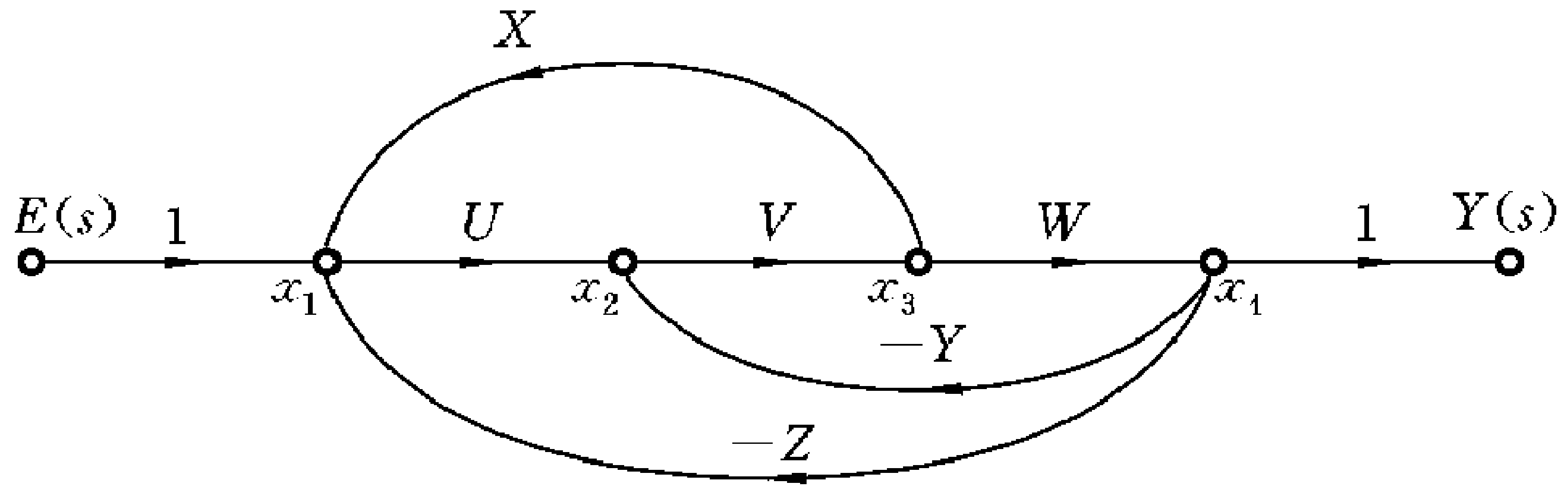


图 5-25

利用梅森公式求系统转移函数：

$$\Delta=1-(XUV-YVW-ZUVW)$$

$$G_1=UVW,\quad \Delta_1=1$$

所以
$$H(s)=\frac{1}{\Delta}\sum_k G_k\Delta_k=\frac{UVW}{1-XUV+YVW+ZUVW}$$

利用信号流图化简规则(见图 5-26)：

i) 消去结点 x_1,x_2(见图 5-26(a))。

ii) 消去自环,合并两条并联反馈(见图 5-26(b))。由于 x_3 结点自环,其结点上有四条输入支路,所以按流图简化规则,消去自环时,必须同时对另三条输入支路传输函数数乘$\frac{1}{1-UVX}$或对输出支路数乘$\frac{1}{1-UVX}$,这里采用后者。

iii) 消去结点 x_3(见图 5-26(c))。

iv) 消去结点 x_4(见图 5-26(d))。

所以
$$H(s)=\frac{\dfrac{UVW}{1-UVX}}{1+\dfrac{WVY+WUVZ}{1-UVX}}=\frac{UVW}{1-UVX+UVZW+VYW}$$

【5-35】 已知系统函数如下,试作直接式、并联式及级联式流图。

(1) $H(s)=\dfrac{2s^2+14s+24}{s^2+2s+3}$　　(2) $H(s)=\dfrac{2s+3}{s(s+2)^2(s+3)}$

(3) $H(s)=\dfrac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s^2-2s+5)}$

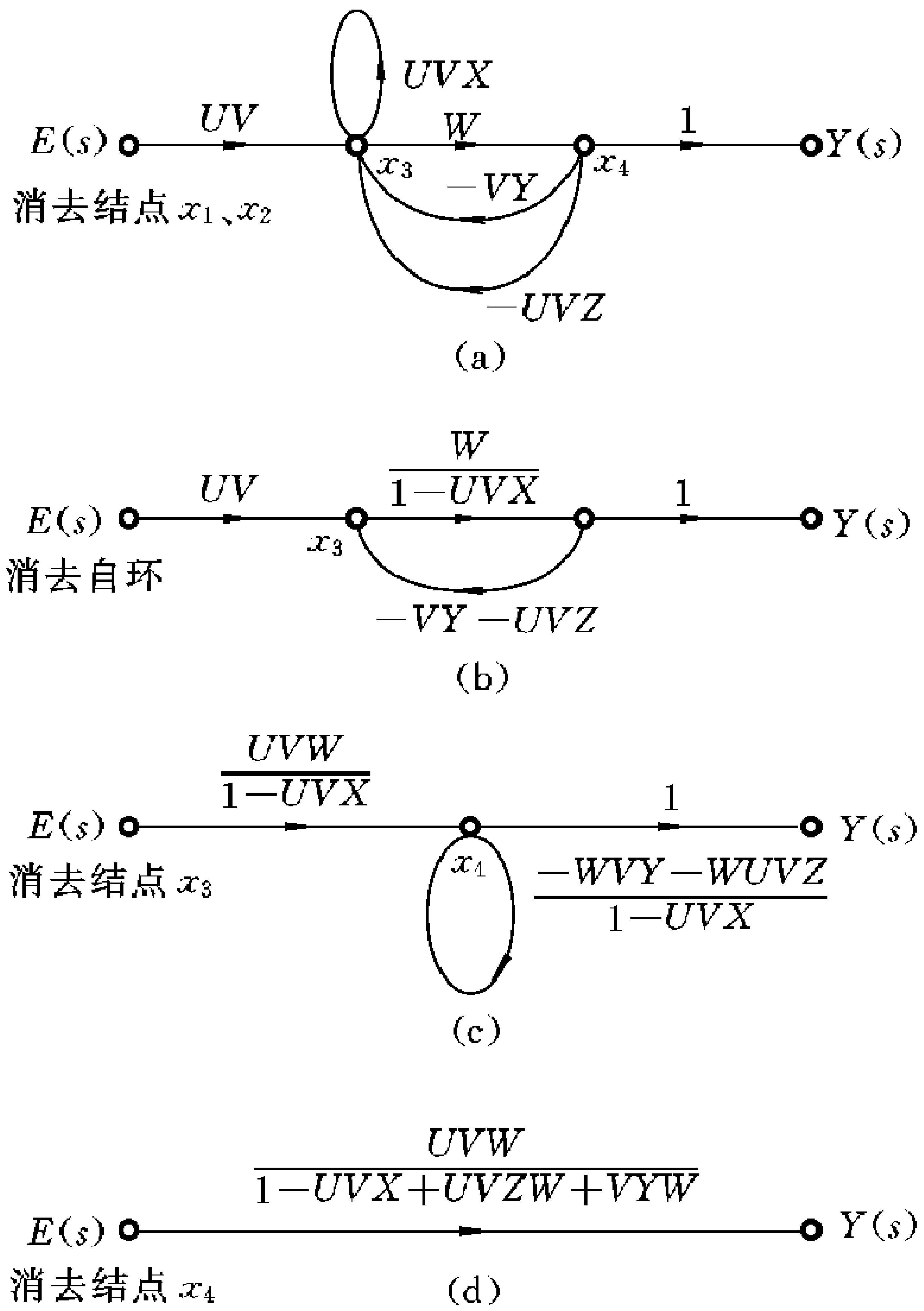


图 5-26

解　(1) i) $H(s)=\dfrac{2s^2+14s+24}{s^2+2s+3}$

直接模拟框图如图 5-27(a)所示。

ii) $H(s)=2+\dfrac{10s+18}{s^2+2s+3}$

并联模拟框图如图 5-27(b)所示。

iii) $H(s)=\dfrac{2s^2+14s+24}{s^2+2s+3}=2\cdot\dfrac{s^2+7s+12}{s^2+2s+3}$

串联(级联)模拟框图如图 5-27(c)所示。

(2) i) $H(s)=\dfrac{2s+3}{s(s+2)^2(s+3)}=\dfrac{2s+3}{s^4+7s^3+16s^2+12s}$

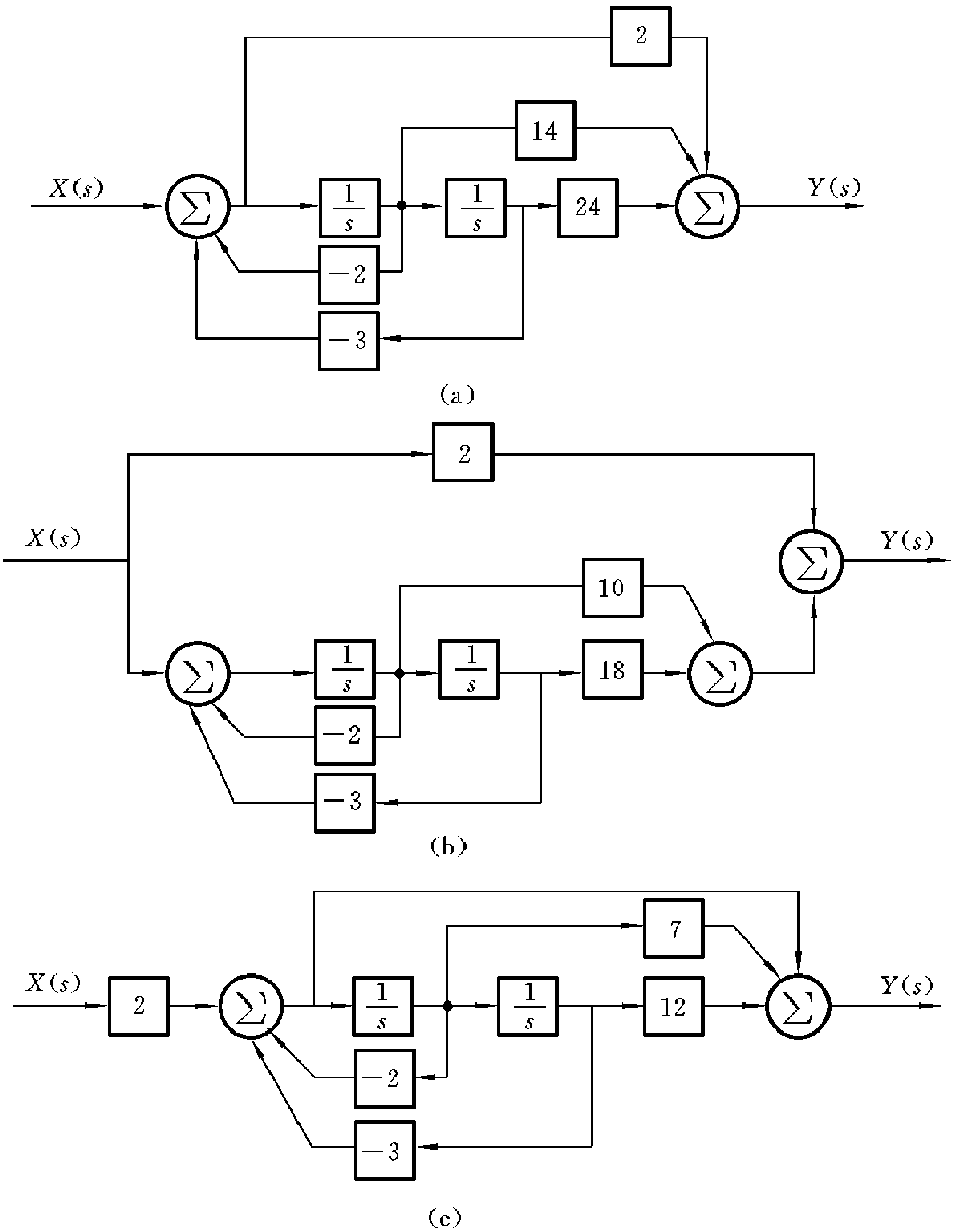


图 5-27

直接模拟框图如图 5-28(a)所示。

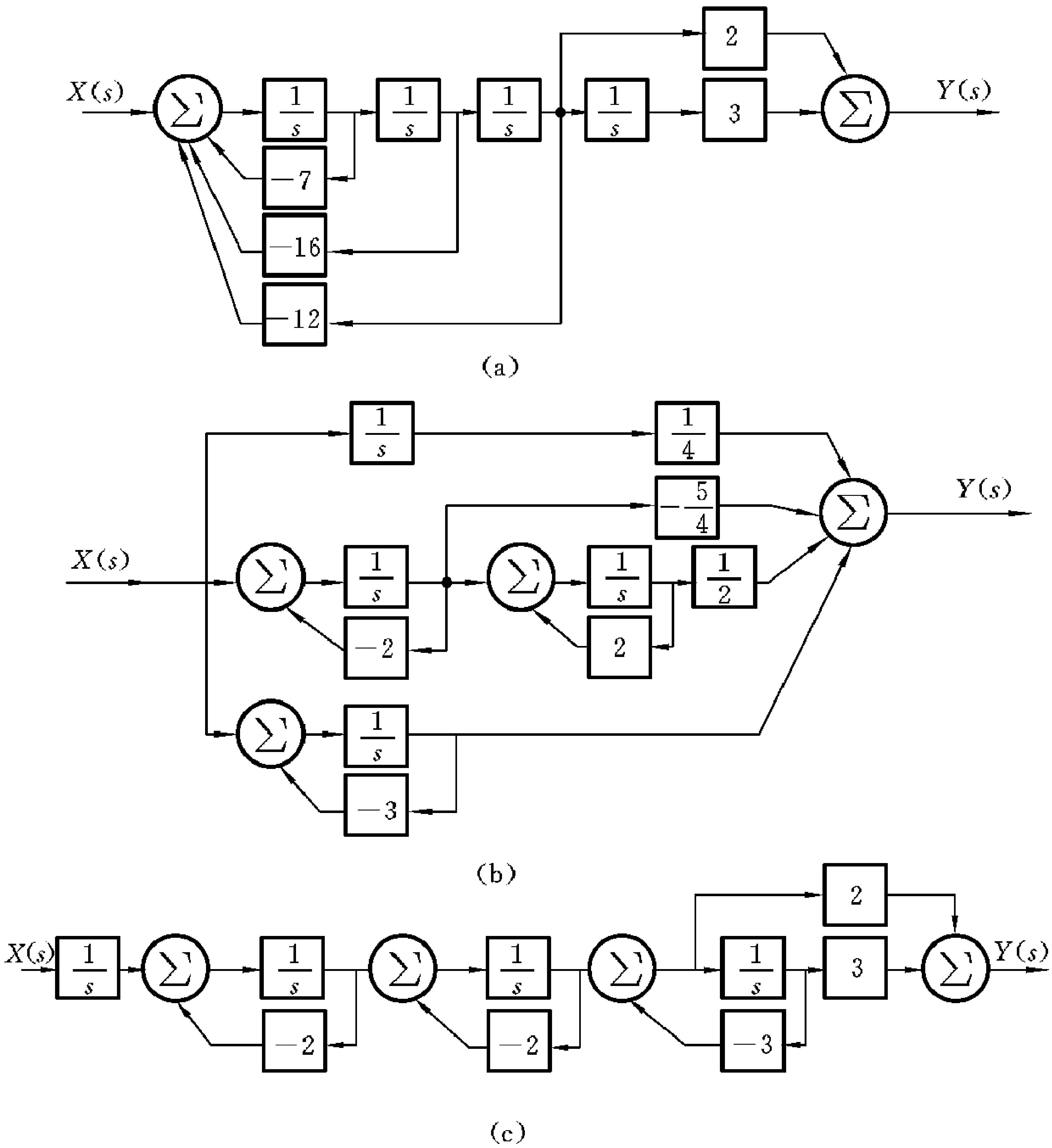


图 5-28

ii) $H(s)=\dfrac{2s+3}{s(s+2)^2(s+3)}=\dfrac{1}{s+3}+\dfrac{-\dfrac{5}{4}}{s+2}+\dfrac{\dfrac{1}{4}}{s}+\dfrac{\dfrac{1}{2}}{(s+2)^2}$

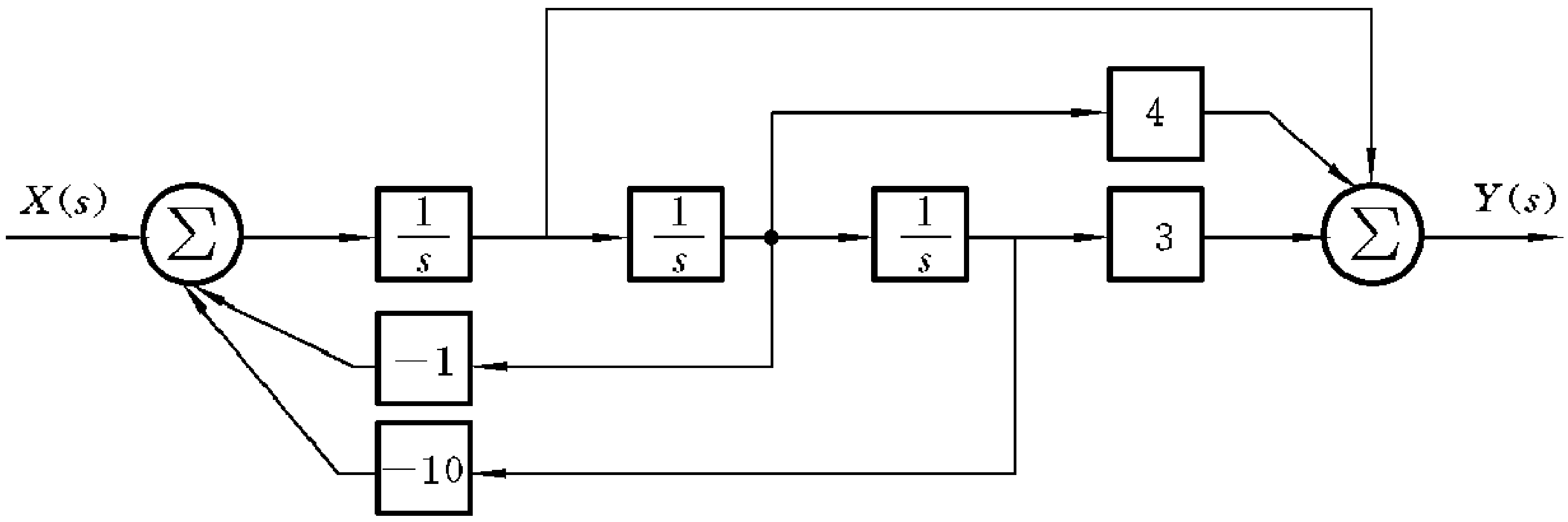
并联模拟框图如图 5-28(b)所示。

iii) $H(s)=\dfrac{2s+3}{s(s+2)^2(s+3)}=\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{1}{s+2}\cdot\dfrac{1}{s+2}\cdot\dfrac{2s+3}{s+3}$

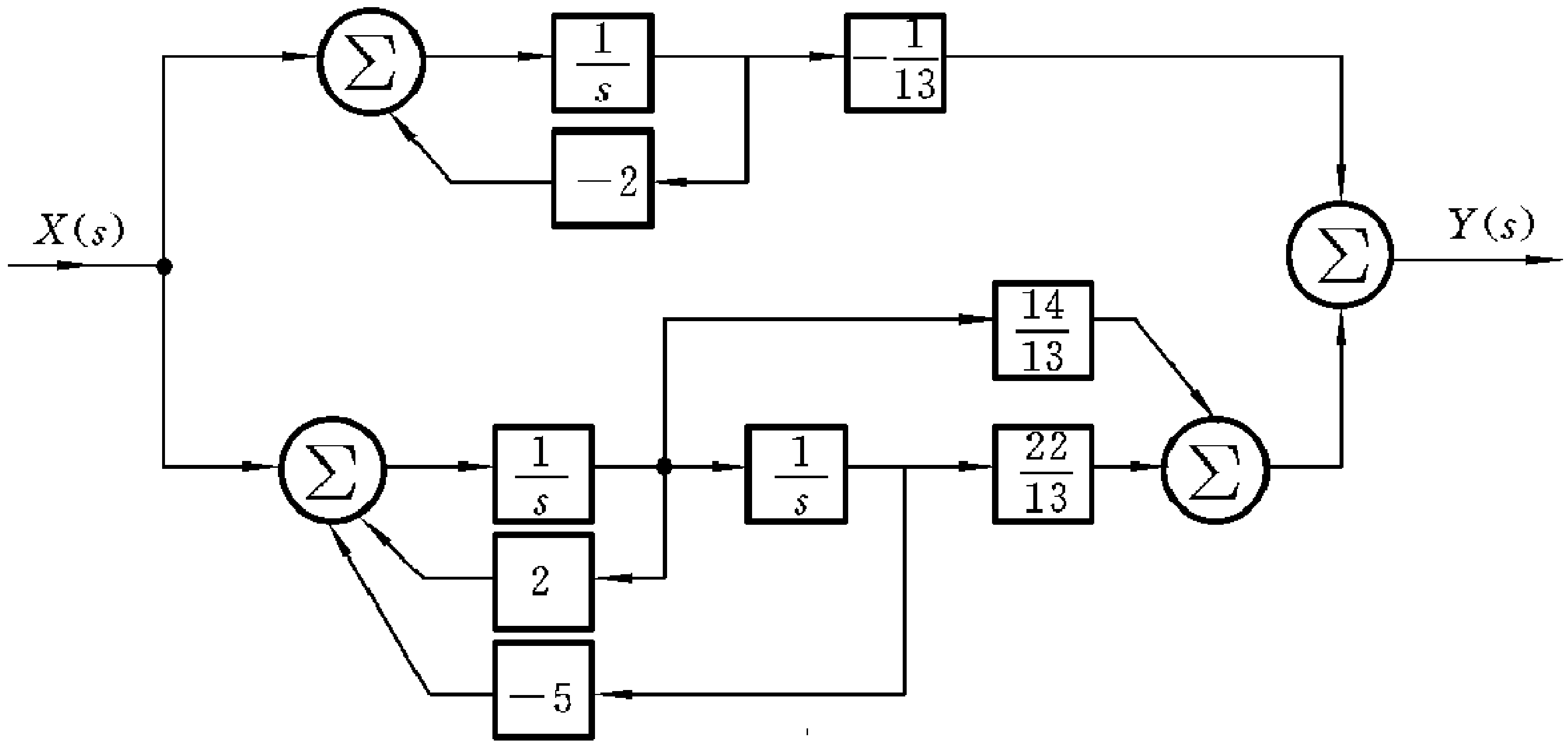
串联(级联)模拟框图如图 5-28(c)所示。

(3) i) $H(s)=\dfrac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s^2-2s+5)}=\dfrac{s^2+4s+3}{s^3+s+10}$

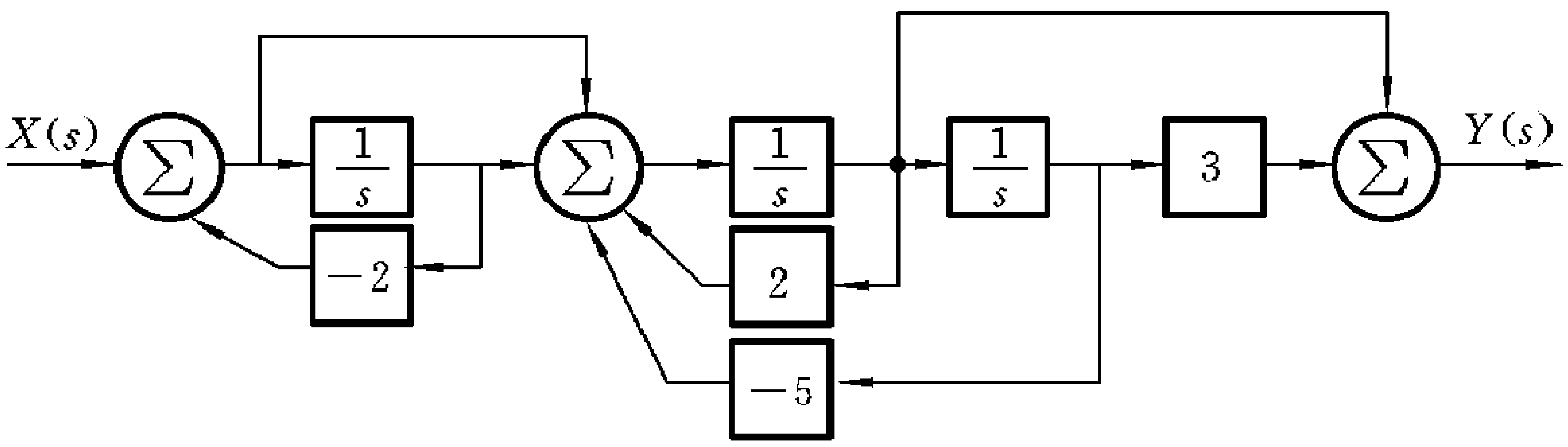
直接模拟框图如图 5-29(a)所示。



(a)



(b)



(c)

图 5-29

ii) $H(s)=\dfrac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s^2-2s+5)}=\dfrac{\frac{-1}{13}}{s+2}+\dfrac{\frac{14}{13}s+\frac{22}{13}}{s^2-2s+5}$

并联模拟框图如图 5-29(b)所示。

iii) $H(s)=\dfrac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s^2-2s+5)}=\dfrac{s+1}{s+2}\cdot\dfrac{s+3}{s^2-2s+5}$

串联(级联)模拟框图如图 5-29(c)所示。

【5-36】 信号流图的转置流图,是指将所有支路传输方向倒置,同时将输入结点与输出结点相互调换后所构成的流图。转置流图与原流图具有同一系统函数。试作出图 5-30 的转置流图,并求系统函数用以检验上述结论。

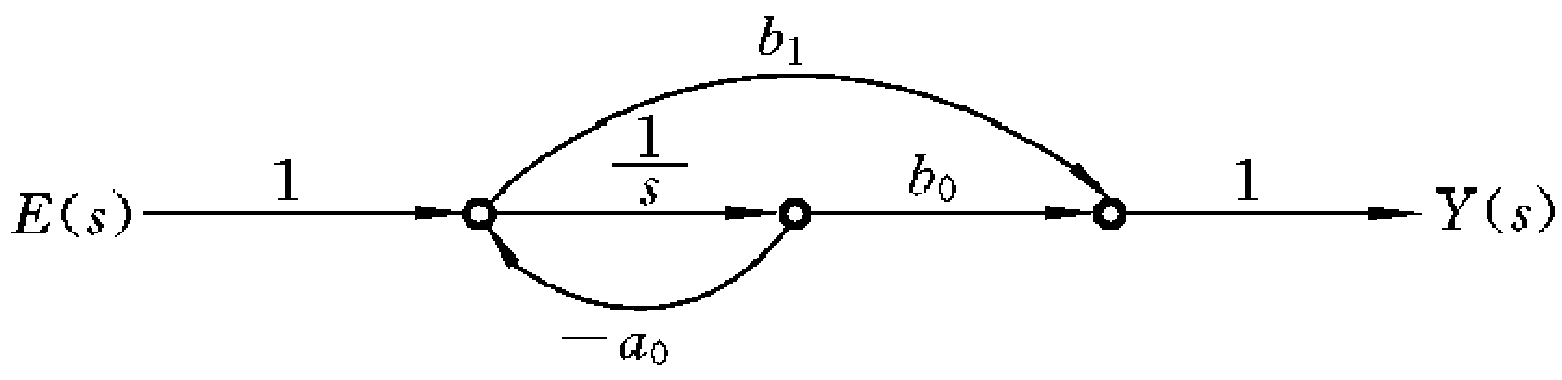


图 5-30

解　由题中信号流图(见图5-30)可得其转置流图,如图5-31(a)所示。利

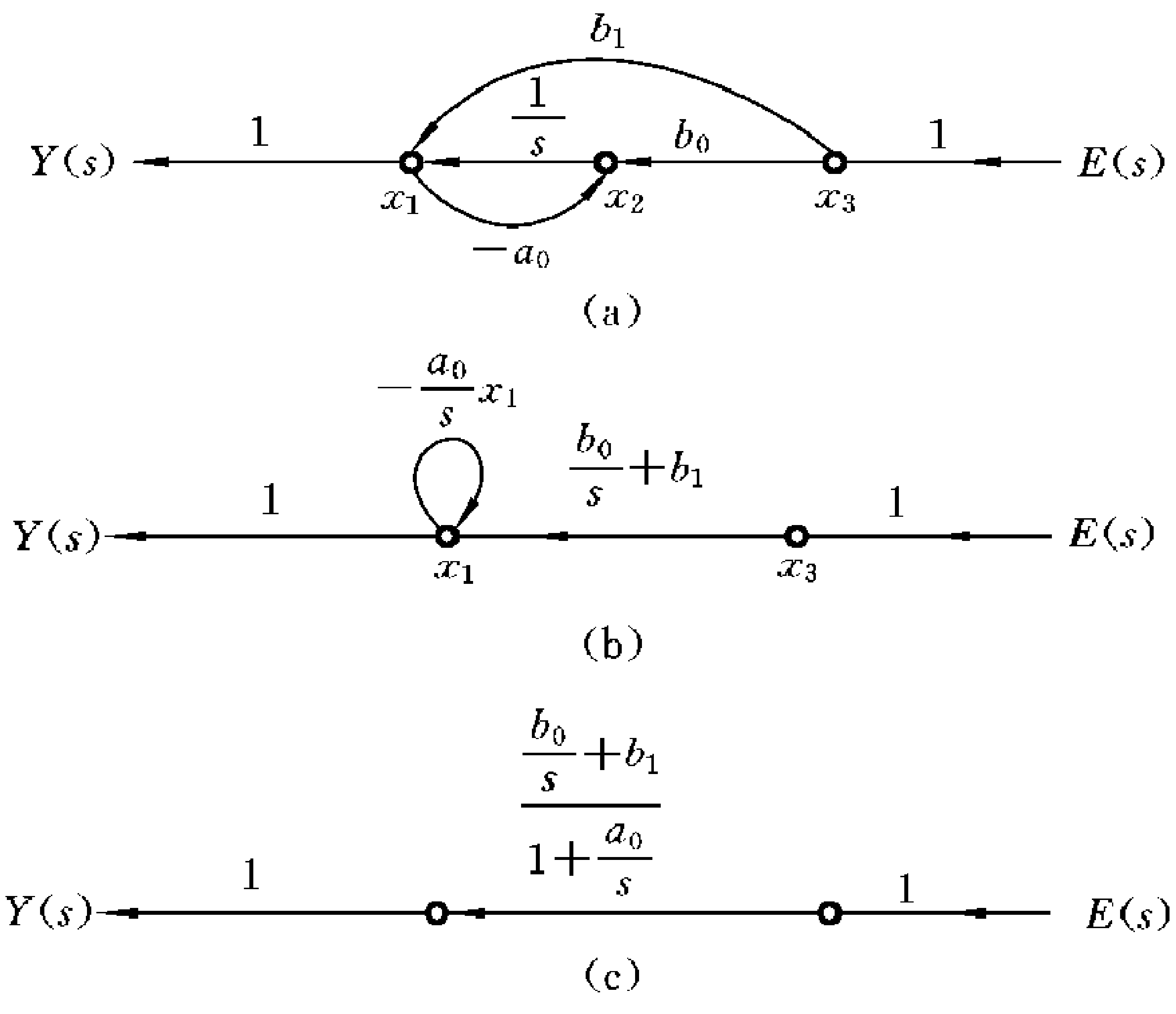


图 5-31

用信号流图化简规则求系统函数：消除图 5-31(a) 中结点 x_2，如图 5-31(b) 所示；消除图 5-31(b) 中结点 x_1 上的自环，如图 5-31(c) 所示。

由此可得

$$H(s) = \frac{\frac{b_0}{s} + b_1}{1 + \frac{a_0}{s}} = \frac{b_0 + sb_1}{s + a_0}$$

原系统流图中各结点名称如图 5-32 所示。由图 5-32 可得

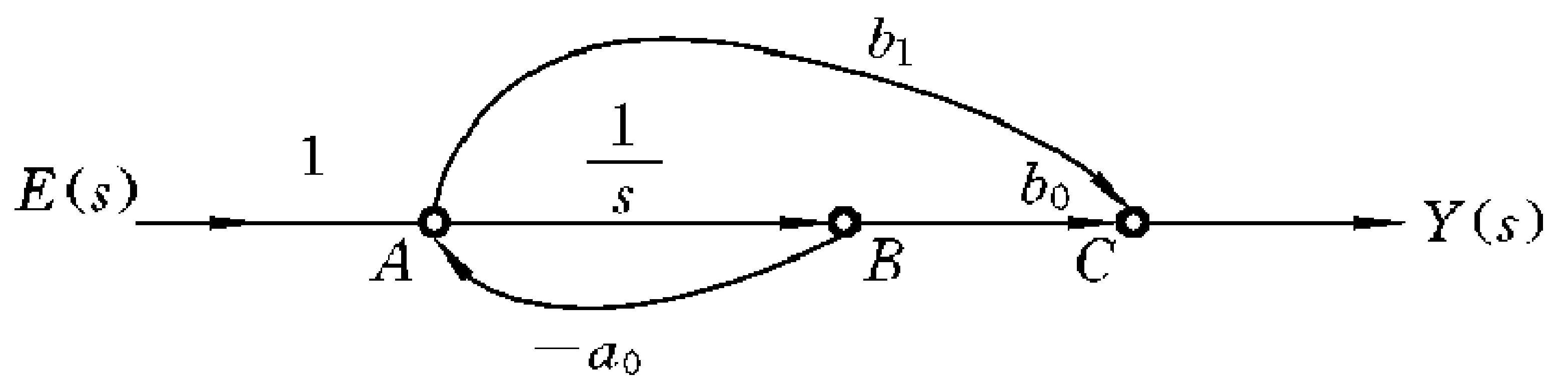


图 5-32

$$A = E(s) - a_0 B$$

$$B = \frac{A}{s}$$

$$C = b_0 B + b_1 A$$

则 $$E(s) = A + a_0 B = A + \frac{A}{s}a_0$$

$$Y(s) = C = b_0 B + b_1 A = b_0 \frac{A}{s} + b_1 A$$

由此可得 $$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b_0 \frac{A}{s} + b_1 A}{A + \frac{A}{s}a_0} = \frac{b_0 + sb_1}{s + a_0}$$

所以，转置流图与原流图具有同一系统函数的结论是正确的。

【5-37】 求图 5-33 所示流图的系统函数$\frac{Y(s)}{E(s)}$。

解 (1) 原信号流图(见图 5-33(a))中各结点名称如图 5-34(a)所示。

消除图5-34(a)中结点x_1，如图5-34(b)所示；消除图5-34(b)中结点x_3，如图5-34(c)所示；消除图5-34(c)中结点x_2 上的自环，如图5-34(d)所示；消除图5-34(d)中结点x_4，如图5-34(e)所示；消除图5-34(e)中结点x_2 上的自环，如图

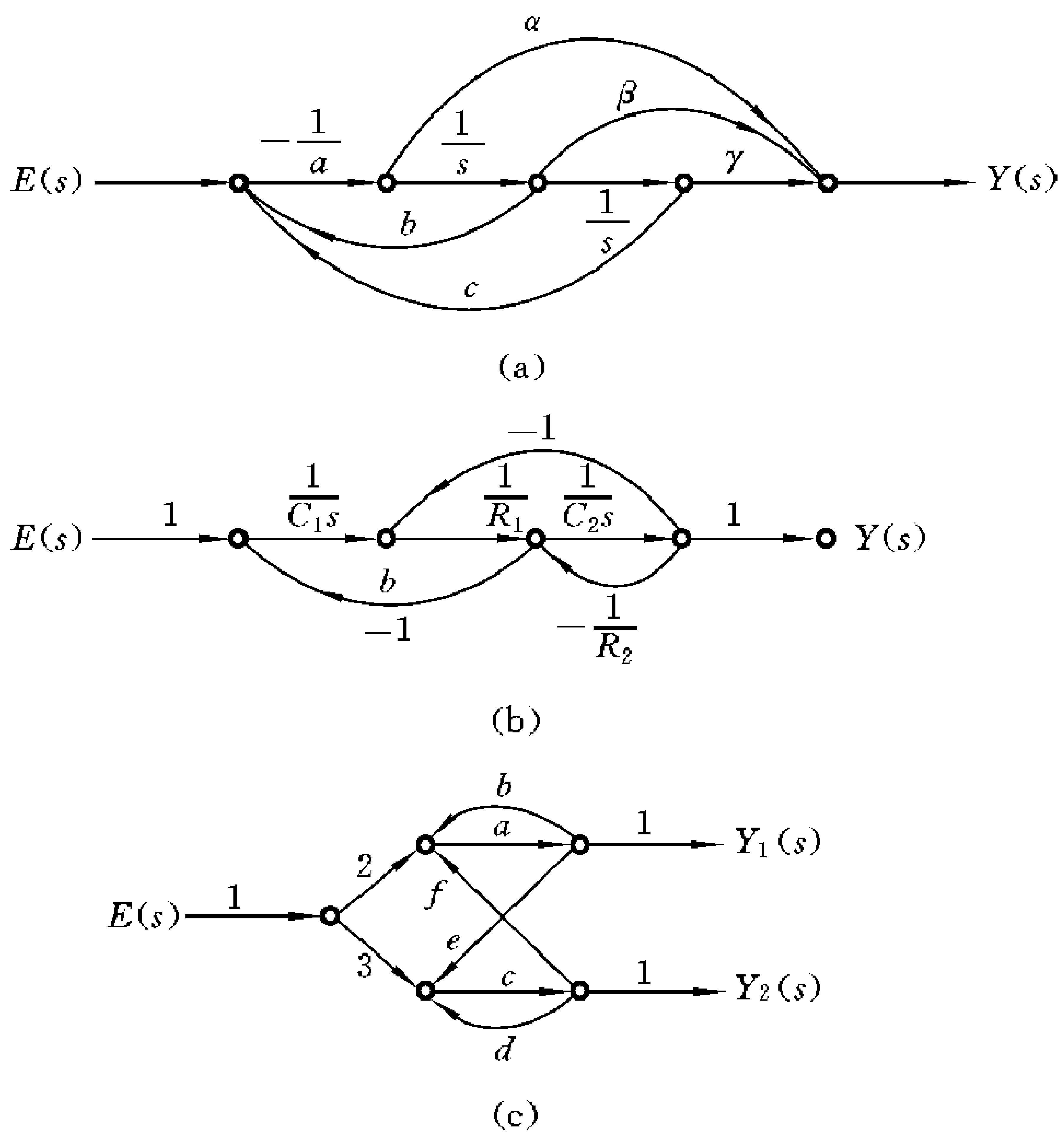


图 5-33

5-34(f)所示。

由图 5-34(f)可得

$$H(s)=\frac{\dfrac{-\dfrac{1}{a}}{1+\dfrac{b}{as}}}{1+\dfrac{\dfrac{c}{a}}{1+\dfrac{b}{as}}\cdot\dfrac{1}{s^2}}\cdot\frac{\alpha s^2+\beta s+\gamma}{s^2}=\frac{-s^2}{as^2+bs+c}\cdot\frac{\alpha s^2+\beta s+\gamma}{s^2}$$

$$=-\frac{\alpha s^2+\beta s+\gamma}{as^2+bs+c}$$

(2) 原信号流图(见图 5-33(b))中各结点的名称如图 5-35(a)所示。消除

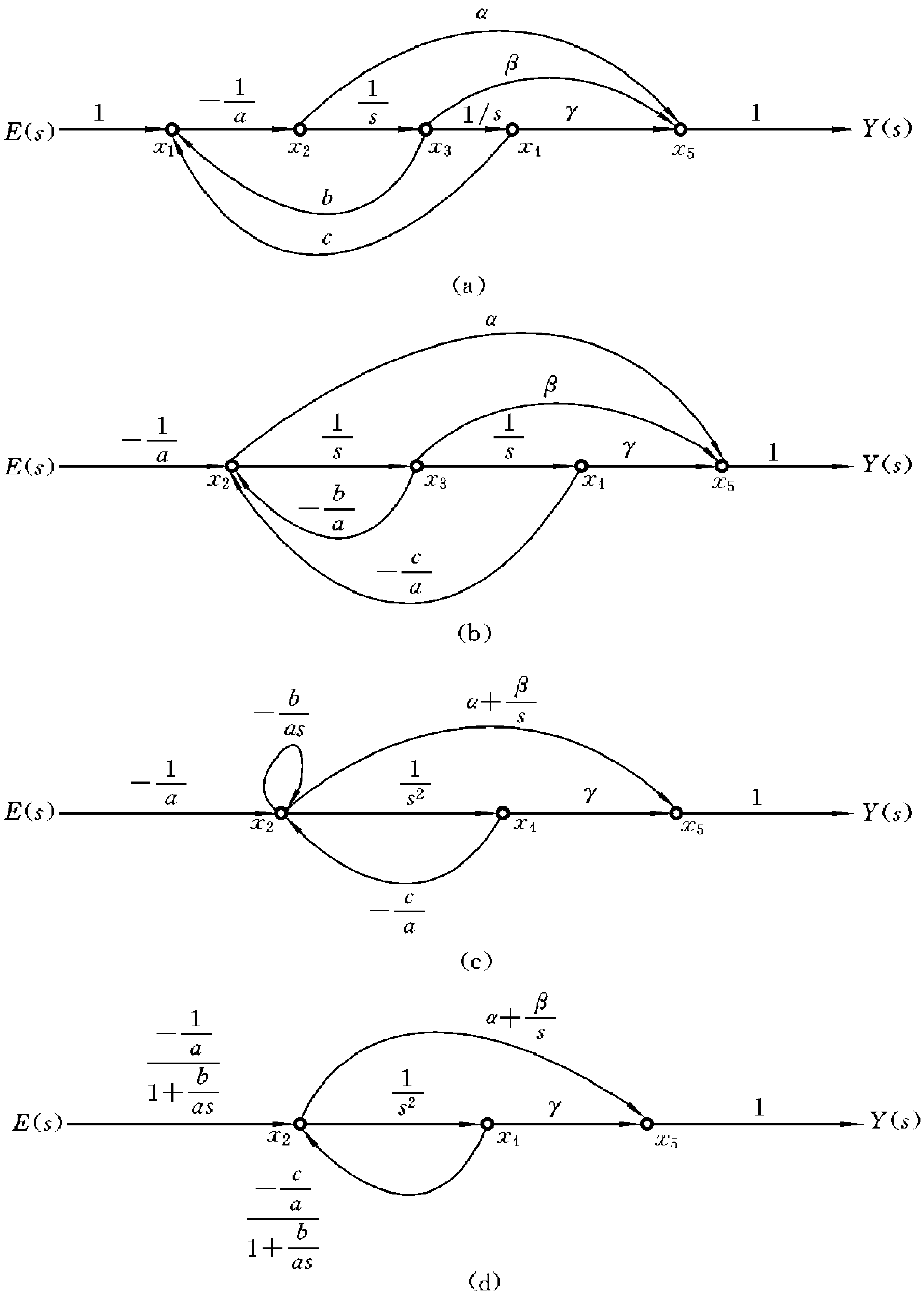
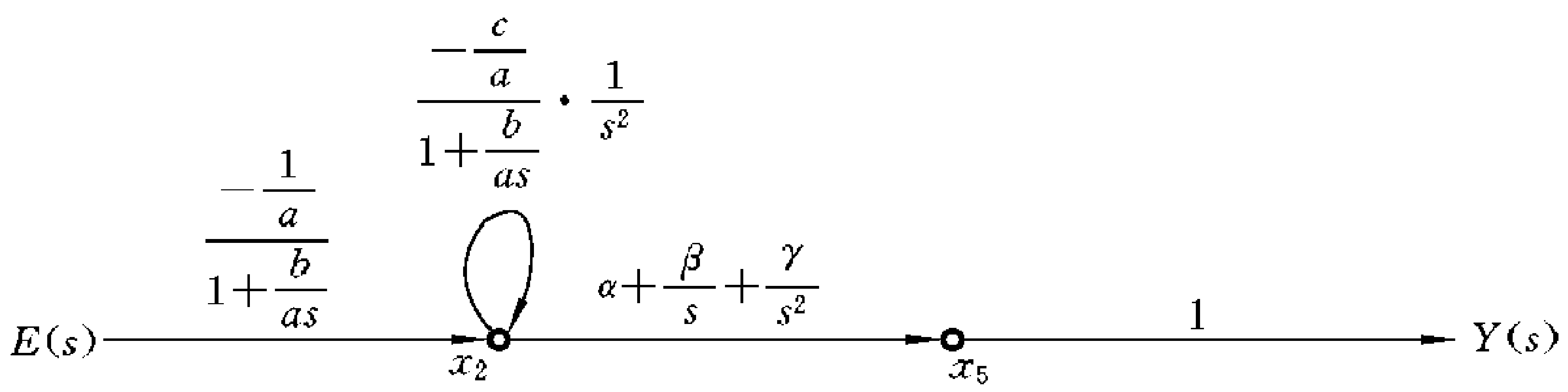
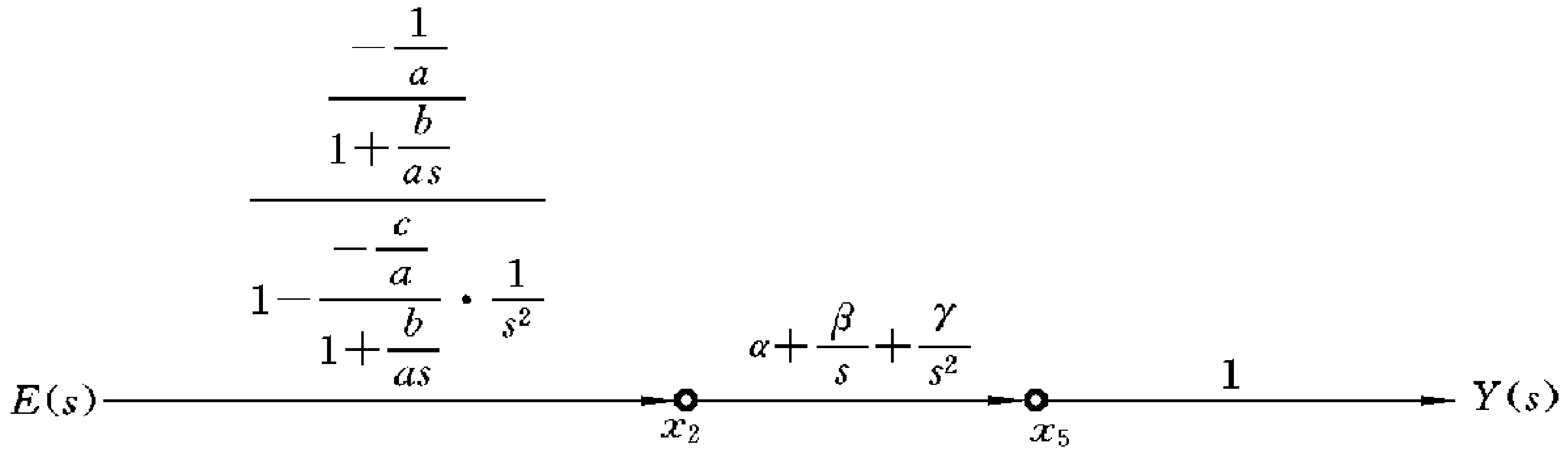


图 5-34



(e)



(f)

续图 5-34

图 5-35(a)中结点 x_1，如图 5-35(b)所示；消除图 5-35(b)中结点 x_2，如图 5-35(c)所示；消除图 5-35(c)中结点 x_3 上的自环，如图 5-35(d)所示；消除图 5-35(d)中结点 x_3，如图 5-35(e)所示，其中设

$$A=\frac{1}{1+R_1C_1s},B=\frac{-(R_1C_1s+R_2C_1s)}{R_1R_2C_1s+R_2},C=\frac{1}{C_2s}$$

消除图 5-35(d)中结点 x_4 上的自环，如图 5-35(f)所示。

由图 5-35(f)可得

$$H(s)=\frac{AC}{1-BC}=\frac{\dfrac{1}{1+R_1C_1s}\cdot\dfrac{1}{C_2s}}{1+\dfrac{R_1C_1s+R_2C_1s}{R_1R_2C_1s+R_2}\cdot\dfrac{1}{C_2s}}$$

$$=\frac{R_2}{(R_1R_2C_1C_2+R_1C_1+R_2C_1+R_2C_2)s}$$

(3) 利用梅森公式求系统转移函数，其信号流图如图 5-36 所示。

由图 5-36 可见该信号流图具有 3 个环，4 条正向路径。

故可得图行列式为

$$\Delta = (1 - ab - cd - acef) + abcd$$

4 条正向路径的传输值分别为

$$G_1 = 2a,\quad G_2 = 3acf,\quad G_3 = 2ace,\quad G_4 = 3c$$

路径因子分别为

$$\Delta_1 = 1 - cd,\quad \Delta_2 = 1,\quad \Delta_3 = 1,\quad \Delta_4 = 1 - ab$$

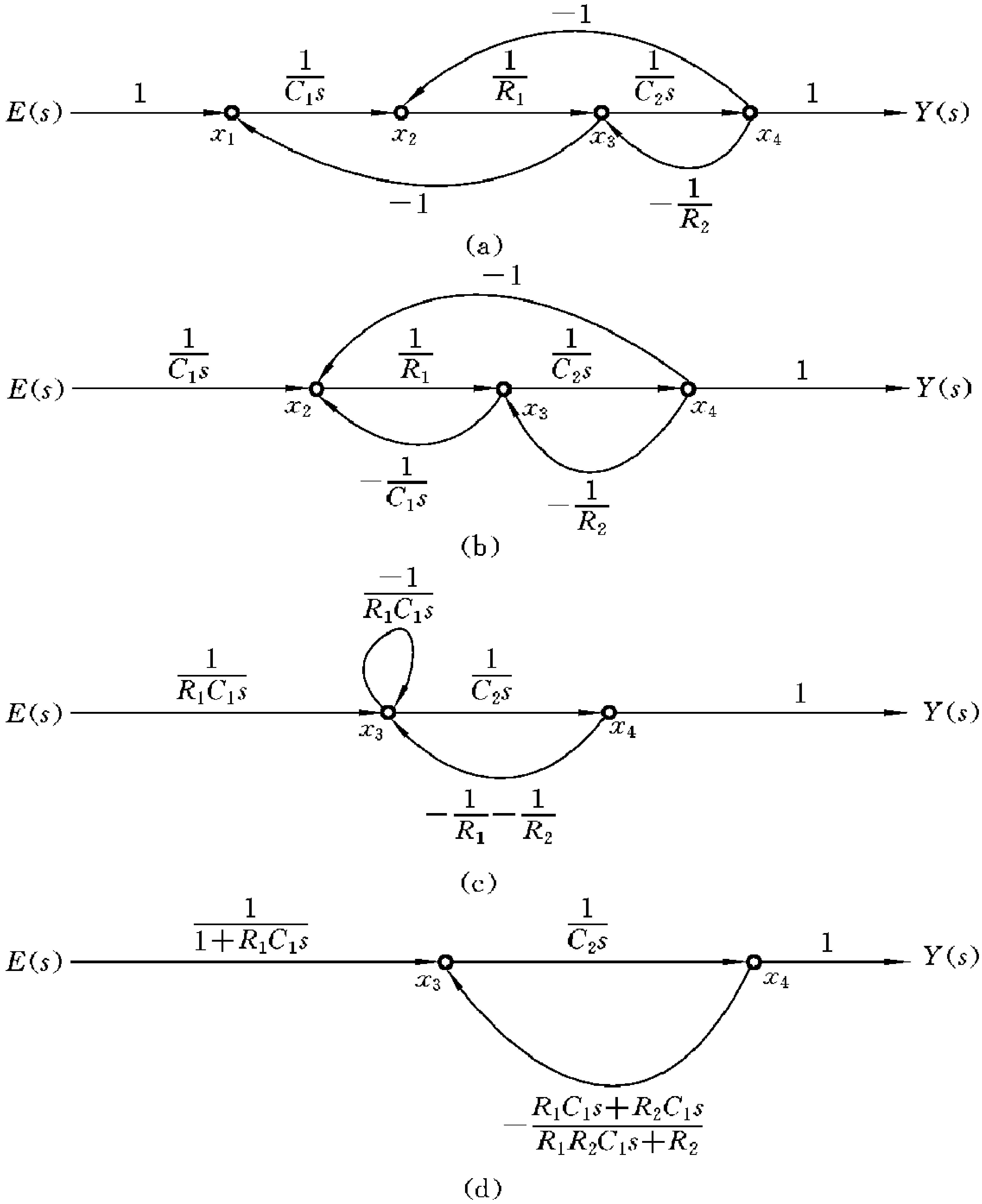
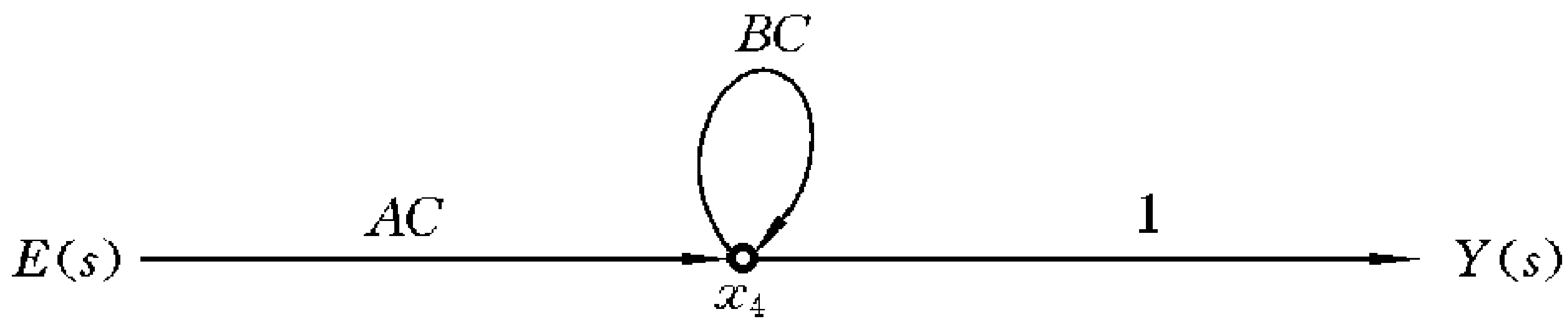
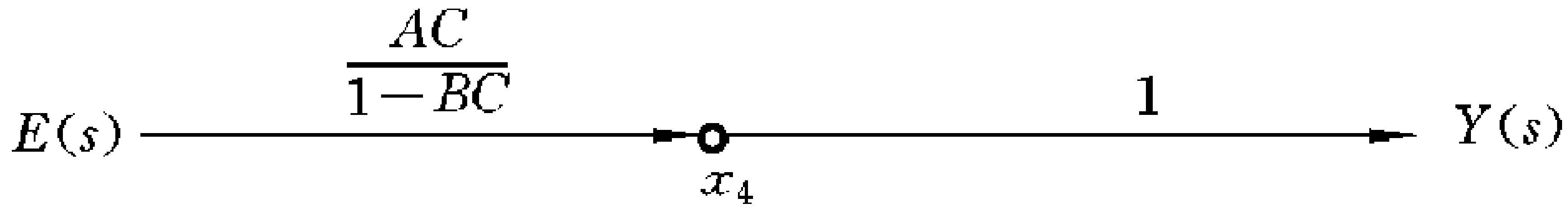


图 5-35



(e)



(f)

续图 5-35

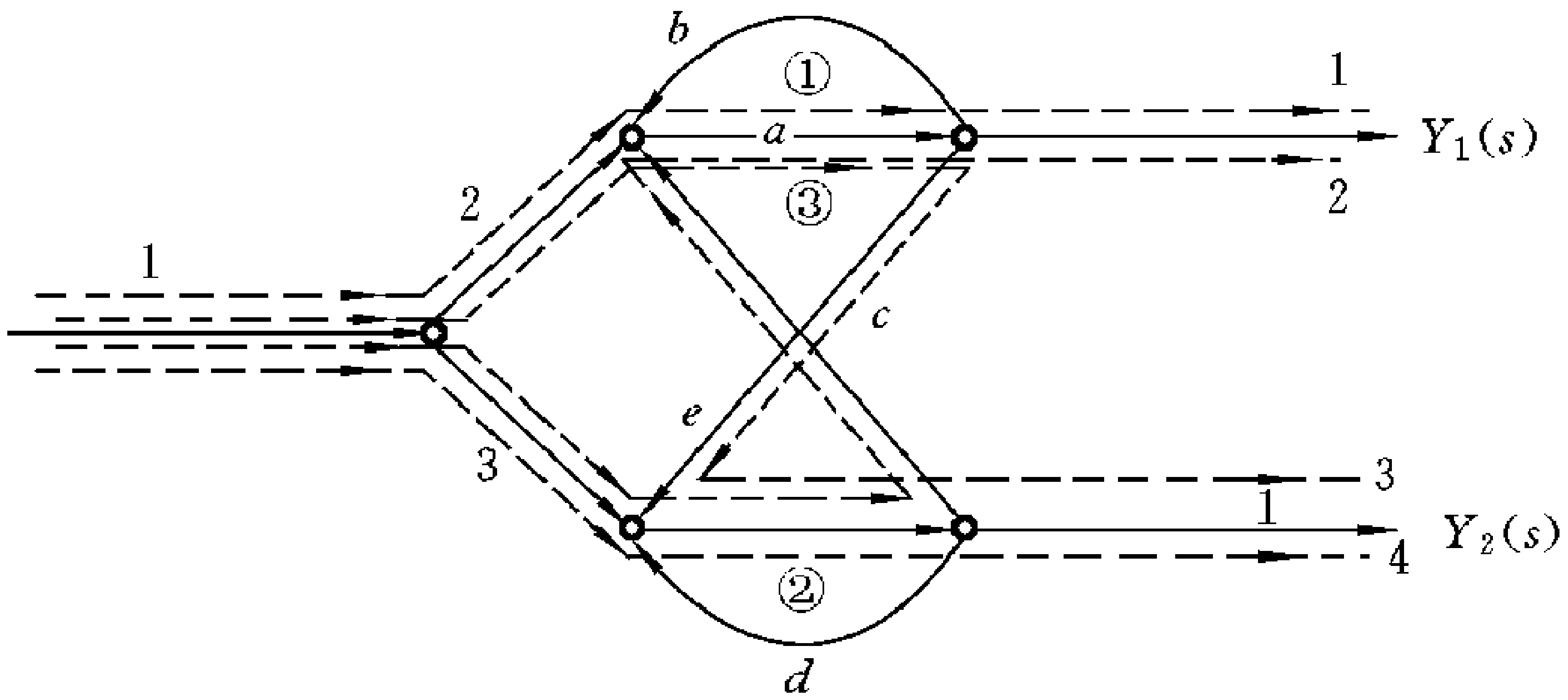


图 5-36

将以上各项结果代入梅森公式，可得总传输值 H_1，H_2 分别为

$$H_1 = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{2} G_k\Delta_k = \frac{2a(1-cd)+3acf}{(1-ab)(1-cd)-acef}$$

$$H_2 = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=3}^{4} G_k\Delta_k = \frac{3c(1-ab)+2ace}{(1-ab)(1-cd)-acef}$$

第六章　连续时间系统的系统函数

6-1　基本要求

深刻理解系统函数的定义以及物理意义，能用多种方法求解系统函数。掌握系统极、零点的定义并能会画极零图。

本章重点是：能根据不同形式的系统求解出其系统函数，理解系统稳定性的意义，学会用系统的极点、罗斯-霍维茨判据来判定系统的稳定性。

6-2　重点、难点学习指导

1．系统函数 $H(s)$

（1）定义

系统函数 $H(s)$ 定义为系统在零状态条件下，输出信号的拉普拉斯变换与输入信号的拉普拉斯变换之比，即

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{E(s)}$$

系统函数又称传输函数。当输入信号 $f(t)=\delta(t)$ 时，$H(s)=\mathscr{L}[h(t)]$。

（2）系统频率特性

$$H(\mathrm{j}\omega)=H(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

式中，$|H(\mathrm{j}\omega)|$ 为幅频特性，$\varphi(\omega)$ 为相频特性。

（3）极零点分布图

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=H_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

式中，H_0 为常数；$z_1,z_2,\cdots,z_m$ 为 $H(s)$ 的零点；$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为 $H(s)$ 的极点。在 s 平面上，零点用“○”表示，极点用“×”表示，将 $H(s)$ 的零点和极点全部画在 s 平面上得到的图称为系统的极零点分布图。

① 极零点分布规律：

a. 极零点分布与实轴成镜像对称；

b. 考虑到无穷远处可能存在零点或极点，则极点和零点的总数相等。

② 全通函数：如果系统函数在 s 平面右半平面的零点和在 s 平面左半平面的极点关于虚轴镜像对称，则这种网络函数称为全通函数。例如

$$H(s)=H_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

式中

$$p_1=p_2^*=-z_1^*=-z_2$$

③ 最小相移函数：如果系统函数 $H(s)$ 不仅全部极点位于 s 平面左半平面，而且全部零点也位于 s 平面左半平面（包括虚轴），则称这种函数为最小相移函数。

(4) 求解 $H(s)$ 的方法

① 由系统的冲激响应 $h(t)$ 求解，即 $H(s)=\mathscr{L}\{h(t)\}$；

② 根据 s 域电路模型，按基本定义式求响应像函数与激励像函数的比，即得 $H(s)$；

③ 对零状态系统的微分方程进行拉普拉斯变换，求 $H(s)$；

④ 根据系统的模拟图求解；

⑤ 由系统的信号流图根据梅森公式求解。

2. 系统的稳定性

(1) 系统稳定条件

若系统对有界激励产生的响应也是有界的，则该系统称为稳定系统，否则称为不稳定系统。稳定系统的必要条件是 $\lim\limits_{t\to+\infty}h(t)=0$，其充要条件是系统的单位冲激响应 $h(t)$ 绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\mathrm{d}t<+\infty$$

① 在复频域中，$H(s)$ 的全部极点必须位于 s 平面的左半平面。

② 在复频域中，若 $H(s)$ 的极点中除了左半开平面上有极点外，只要在 $\mathrm{j}\omega$ 轴上有一对单阶的共轭极点，或在坐标原点处有一个单极点，则此系统就是临界稳定的。

③ 在复频域中，若 $H(s)$ 的极点中只要有一个极点位于 s 平面的右半开平面，则系统就是不稳定的；若出现的极点在虚轴上且是重阶的，则系统也是不稳定的。

(2) 罗斯-霍维茨判别法

由于$h(t)$的形式取决于$H(s)$的极点，故可根据$H(s)$极点在s平面上的分布来判断系统的稳定性。对于高阶系统，求特征根很不容易，但可用罗斯-霍维茨准则来判别。

具有实系数的n阶方程，其特征方程为

$$D(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0$$

要使$D(s)=0$的根全部位于s平面的左半开平面上的充要条件是

① 多项式的全部系数a_i符号相同；

② 无缺项；

③ 罗斯-霍维茨阵列中第一列数的符号相同。若第一列数符号不全相同，则符号改变的次数就是$D(s)=0$所具有的正实部根的个数。

6-3　习 题 详 解

【6-1】　求图 6-1 中电路的系统函数。

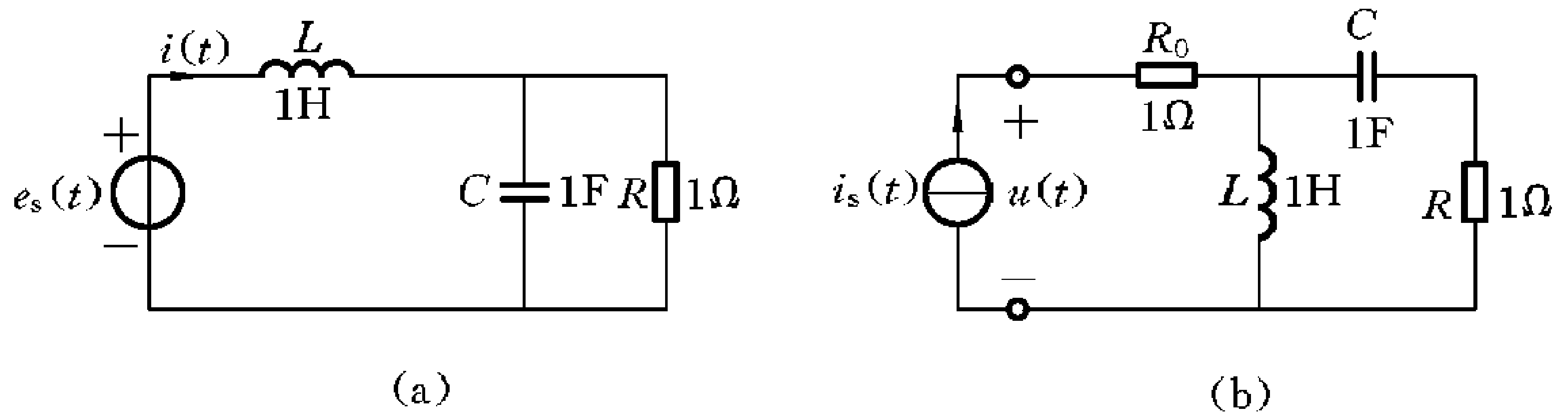


图 6-1

解　(a) 由图 6-1(a)所示电路图得转移导纳函数

$$H(s)=\frac{I(s)}{E_s(s)}=\frac{1}{Ls+\dfrac{1}{Cs+\dfrac{1}{R}}}=\frac{1}{s+\dfrac{1}{s+1}}=\frac{s+1}{s^2+s+1}$$

(b) 由图 6-1(b)所示电路图得转移阻抗函数

$$H(s)=\frac{U(s)}{I_s(s)}=R_0+\frac{1}{\dfrac{1}{Ls}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{Cs}+R}}=1+\frac{1}{\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{s}+1}}=\frac{2s^2+2s+1}{s^2+s+1}$$

【6-2】　求图 6-2 中电路的系统函数，并绘其极零点分布图。

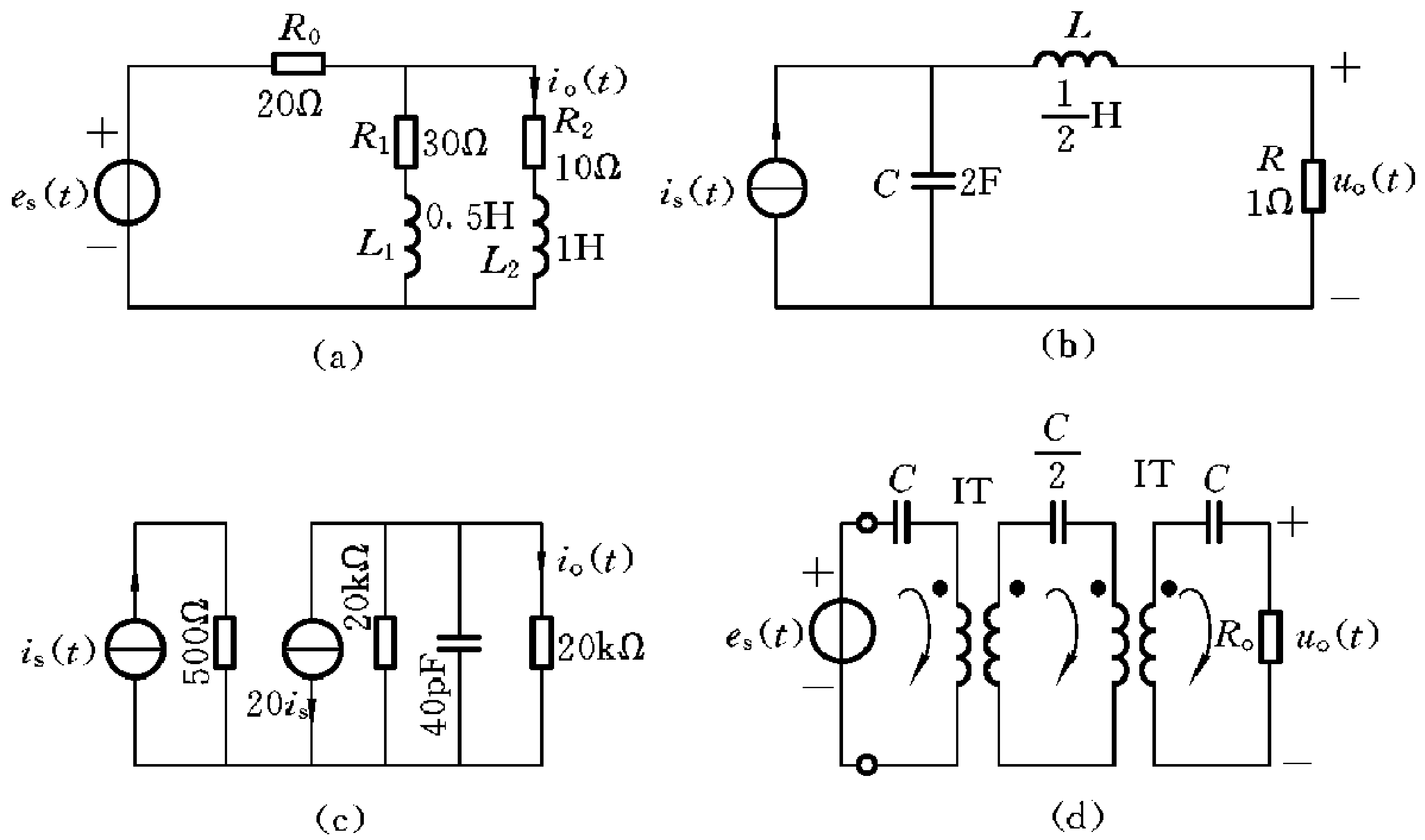


图 6-2

解　(a) 由电路图图 6-2(a)得转移导纳函数

$$H(s)=\frac{I_o(s)}{U_s(s)}=\frac{1}{R_0+\dfrac{(R_1+L_1s)(R_2+L_2s)}{(R_1+L_1s)+(R_2+L_2s)}}\cdot\frac{R_1+L_1s}{(R_1+L_1s)+(R_2+L_2s)}$$

$$=\frac{s+60}{s^2+130s+2200}=\frac{s+60}{(s+110)(s+20)}$$

图 6-2(a)所示电路的极零点分布图如图 6-3(a)所示。

(b) 由电路图图 6-2(b)得转移阻抗函数

$$H(s)=\frac{U_o(s)}{I_s(s)}=\frac{\dfrac{1}{Cs}(Ls+1)}{\dfrac{1}{Cs}+(Ls+1)}\cdot\frac{R}{Ls+R}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2s}(0.5s+1)}{\dfrac{1}{2s}+0.5s+1}\cdot\frac{1}{0.5s+1}=\frac{1}{s^2+2s+1}=\frac{1}{(s+1)^2}$$

图 6-2(b)所示电路的极零点分布图如图 6-3(b)所示。

(c) 由电路图图 6-2(c)得电流传输函数

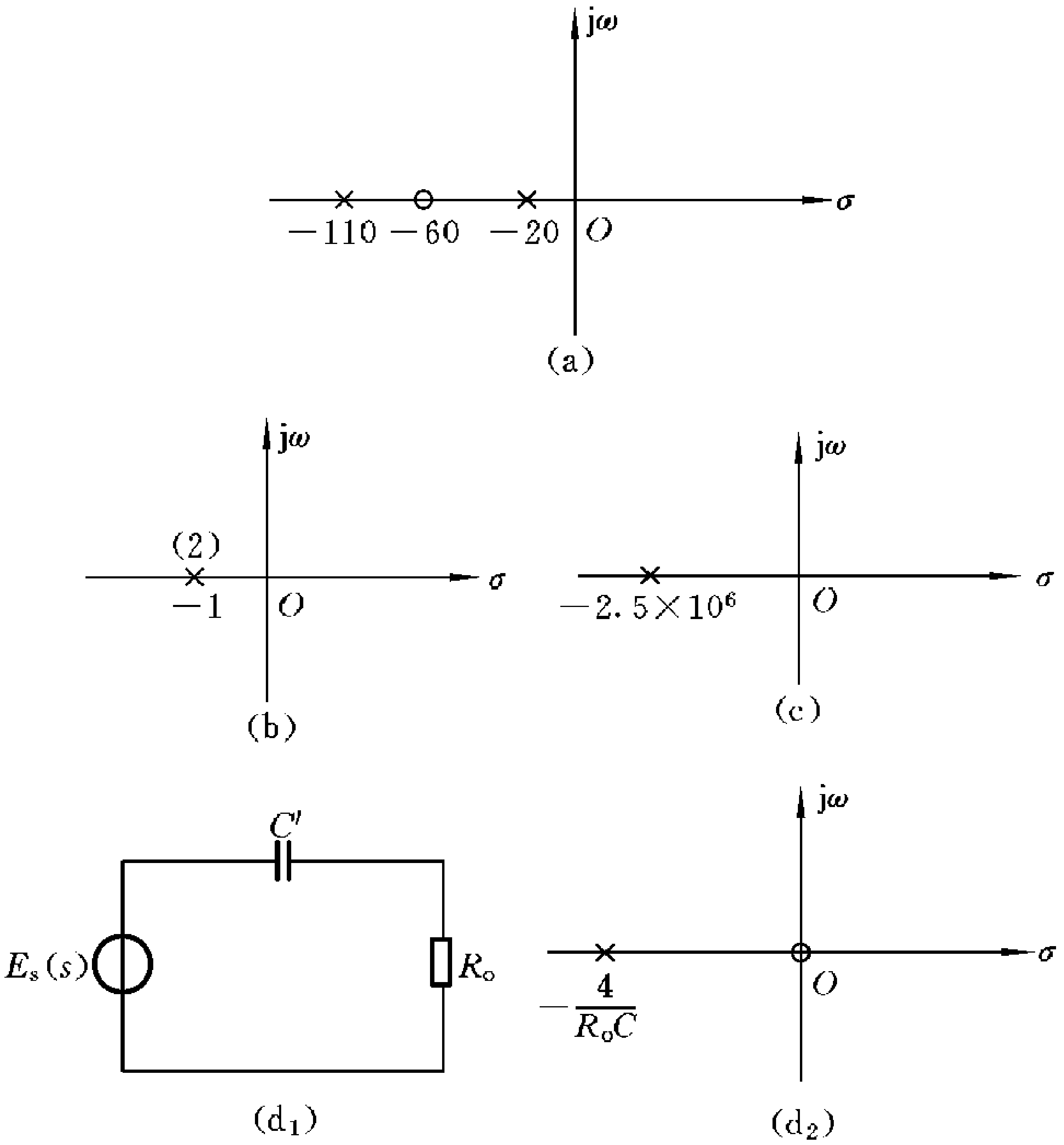


图 6-3

$$H(s)=\frac{I_o(s)}{I_s(s)}=-\frac{\dfrac{20\times20}{20+20}\times10^{3}\times\dfrac{1}{40\times10^{-12}s}}{\dfrac{20\times20}{20+20}\times10^{3}+\dfrac{1}{40\times10^{-12}s}}\times\frac{1}{20\times10^{3}}\times20$$

$$=\frac{-25\times10^{6}}{s+2.5\times10^{6}}$$

图 6-2(c)所示电路的极零点分布图如图 6-3(c)所示。

(d) 由于IT为理想变压器,所以回路中电容为串联,图 6-2(d)所示电路等效于如图 6-3(d_1)所示的电路,其中

$$C'=\frac{1}{Cs}+\frac{2}{Cs}+\frac{1}{Cs}=\frac{4}{Cs}$$

所以
$$H(s)=\frac{U_o(s)}{E_s(s)}=\frac{R_o}{R_o+\dfrac{4}{Cs}}=\frac{s}{s+\dfrac{4}{R_oC}}$$

图 6-2(d)所示电路的极零点分布图如图 6-3(d_2)所示。

【6-3】 求图 6-4 所示电路的电压传输函数。如果要求响应中不出现强迫响应分量，激励函数应有怎样的模式？

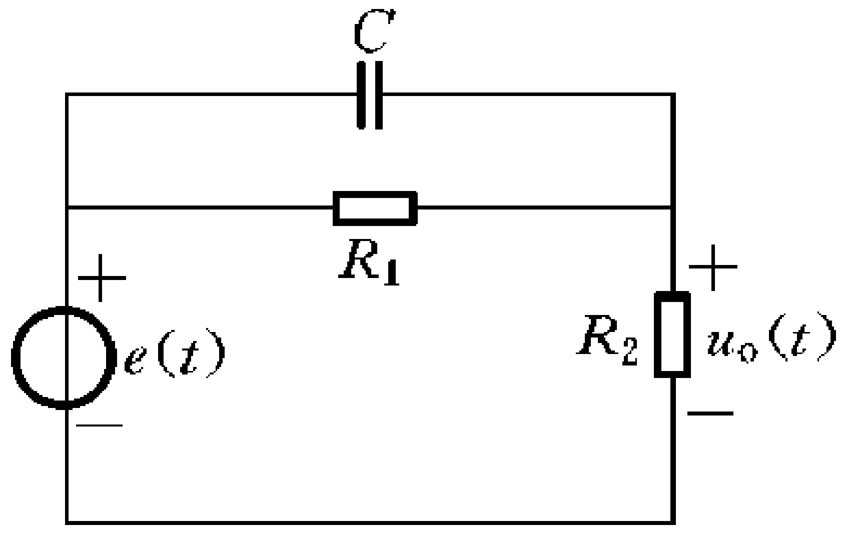


图 6-4

解　由图 6-4 写出传输函数

$$H(s)=\frac{R_2}{\dfrac{\dfrac{1}{Cs}\cdot R_1}{\dfrac{1}{Cs}+R_1}+R_2}=\frac{s+\dfrac{1}{R_1C}}{s+\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2C}}$$

由 $R(s)=H(s)E(s)$ 可知，若要求响应中不出现强迫响应分量，即要求传输函数的分子 $s+\dfrac{1}{R_1C}$ 能约掉激励的分母部分，则激励函数应为

$$E(s)=\frac{A}{s+\dfrac{1}{R_1C}}$$

$$e(t)=Ae^{-\frac{t}{R_1C}}\varepsilon(t)$$

【6-4】 已知系统函数极零点分布图如图 6-5 所示，且有 $|H(j2)|=7.7$，$\varphi(2)<\pi$，求 $H(j4)$ 的值。

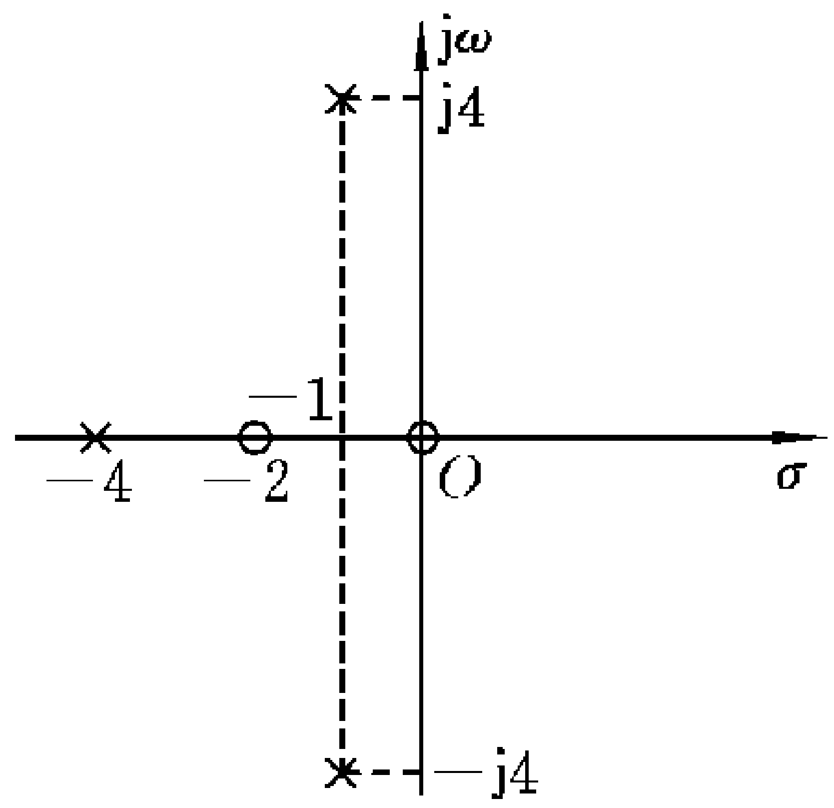


图 6-5

解　由极零点分布图写出系统函数

$$H(s)=H_0\frac{s(s+2)}{(s+4)[(s+1)^2+16]},$$

其中 H_0 为系数

又 $H(j\omega)=H(s)\Big|_{s=j\omega}$，且 $\omega=2$ 时，

$$H(j2)=H_0\frac{j2(j2+2)}{(j2+4)(13+j4)}$$

由 $|H(j2)|=7.7$，解得

$$H_0 = 82.8$$

所以
$$H(\mathrm{j}4)=82.8\times\frac{\mathrm{j}4(\mathrm{j}4+2)}{(\mathrm{j}4+4)[(\mathrm{j}4+1)^2+16]}=\frac{82.8\times[\mathrm{j}4(\mathrm{j}4+2)]}{(\mathrm{j}4+4)(1+\mathrm{j}8)}$$
$$=82.8\times\frac{4\times2\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(90°+63.4°)}}{4\sqrt{2}\times1\times\sqrt{65}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}45°+82.9°}}=32.47\mathrm{e}^{\mathrm{j}25.5°}$$

【6-5】 求图 6-6 所示电路的系统函数，并粗略绘其频响曲线。

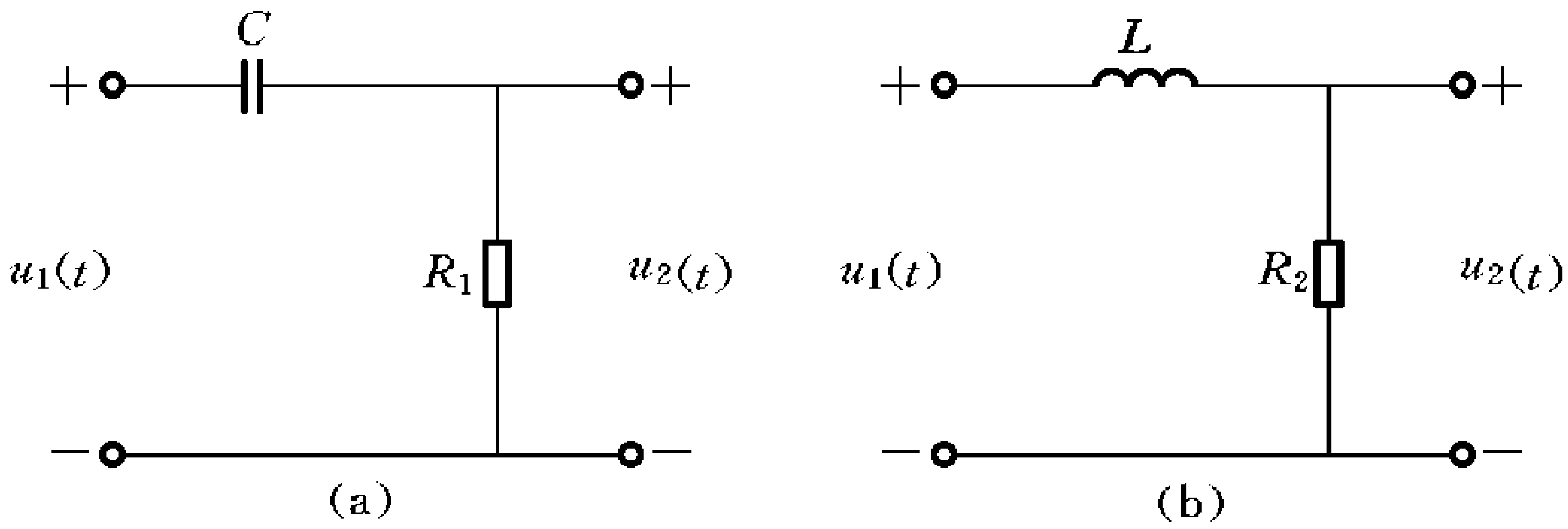


图 6-6

解　(a) 由电路图图 6-6(a)所示得电压传输函数

$$H_a(s)=\frac{R_1}{R_1+\dfrac{1}{Cs}}=\frac{s}{s+\dfrac{1}{R_1C}}$$

令 $s=\mathrm{j}\omega$ 得

$$H_a(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega}{\mathrm{j}\omega+\dfrac{1}{R_1C}}$$

$$\varphi_a(\omega)=\arctan\omega-\arctan(R_1C\omega)$$

当 $\omega=0$ 时，　$|H_a(\mathrm{j}\omega)|=0$，　$\varphi_a(\omega)=90°$

当 $\omega=\dfrac{1}{R_1C}$ 时，　$|H_a(\mathrm{j}\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　$\varphi_a(\mathrm{j}\omega)=45°$

当 $\omega=\infty$ 时，　$|H_a(\mathrm{j}\omega)|=1$，　$\varphi_a(\mathrm{j}\omega)=0$

图 6-6(a)所示电路的频响曲线如图 6-7(a)所示。

(b) 由电路图图 6-6(b)所示得电压传输函数

$$H_b(s)=\frac{R_2}{R_2+Ls}=\frac{\dfrac{R_2}{L}}{s+\dfrac{R_2}{L}}$$

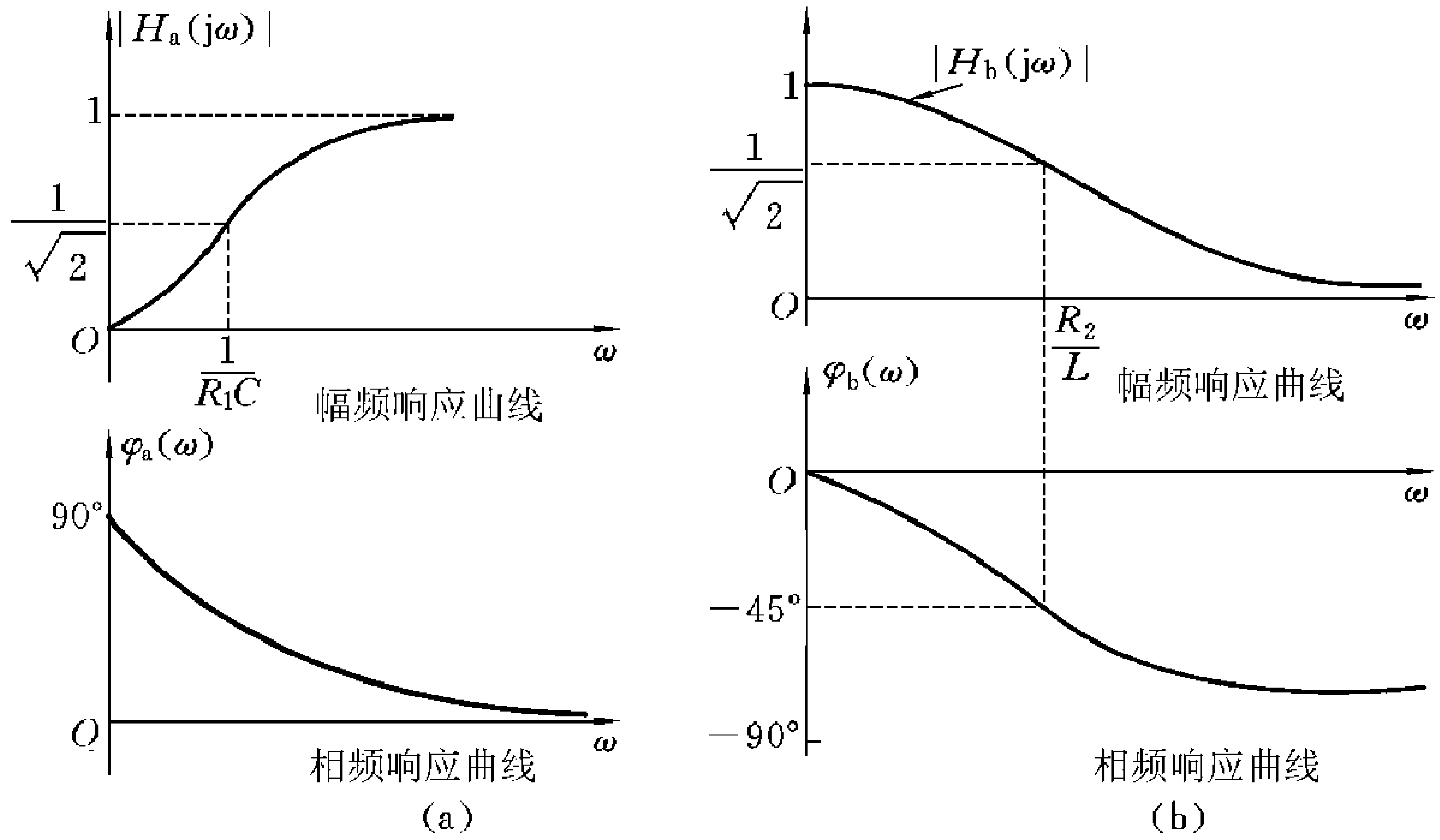


图 6-7

令 $s=j\omega$ 得

$$H_b(j\omega)=\frac{\frac{R_2}{L}}{j\omega+\frac{R_2}{L}}$$

$$\varphi_b(\omega)=-\arctan\frac{L\omega}{R_2}$$

当 $\omega=0$ 时，$\quad |H_b(j\omega)|=1,\quad \varphi_b(\omega)=0°$

当 $\omega=\frac{R_2}{L}$ 时，$\quad |H_b(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \varphi_b(\omega)=-45°$

当 $\omega=\infty$ 时，$\quad |H_b(j\omega)|=0,\quad \varphi_b(\omega)=-90°$

图 6-6(b)所示的频响曲线如图 6-7(b)所示。

【6-6】 用矢量图解法绘出图 6-8 所示电路输入导纳的频响，如电路中 R 改为无穷大，则频响曲线又如何？

解　(1) 由电路图图 6-8，写出系统函数

$$Y(s)=\frac{s+1}{s^2+s+1}=\frac{s+1}{\left(s+\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{1-j\sqrt{3}}{2}\right)}$$

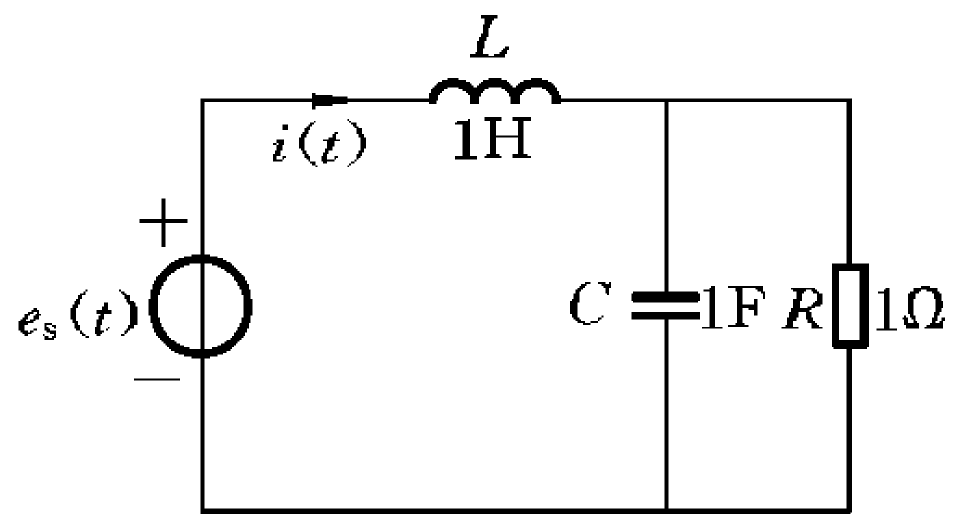


图 6-8

由系统函数画得极零点分布图如图 6-9(a)所示。

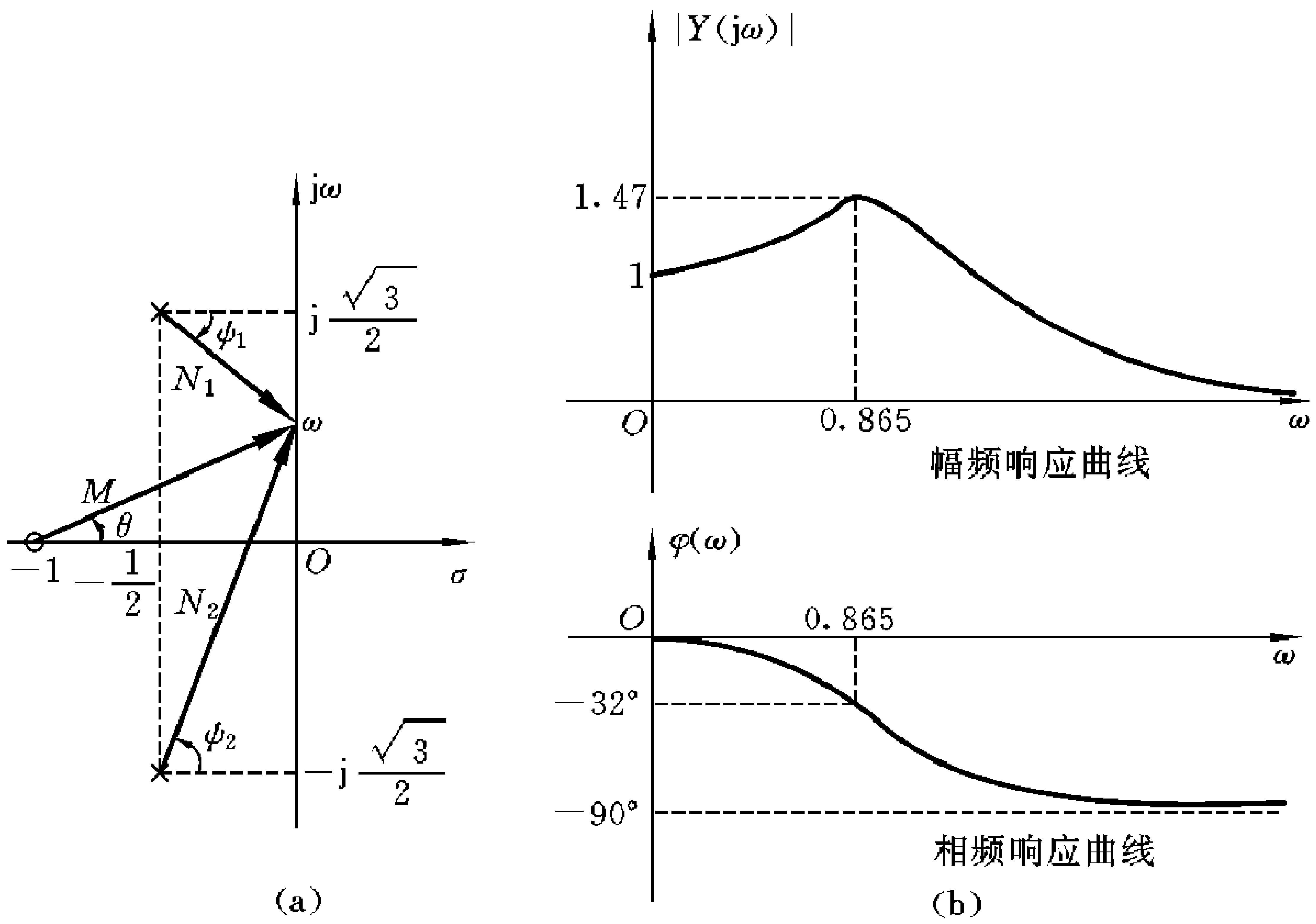


图 6-9

由矢量图解法可得

$$|Y(j\omega)| = \frac{M}{N_1 \cdot N_2}$$

$$\varphi(\omega) = \theta - \psi_1 - \psi_2$$

则所得频响曲线如图 6-9(b)所示。

(2) 当 R 无穷大时，R 可视为开路，则电路变为 L 与 C 串联，求得的系统

函数为

$$Y(s)=\frac{1}{Ls+\frac{1}{Cs}}=\frac{1}{L}\frac{s}{s^2+\frac{1}{LC}}=\frac{s}{s^2+1}$$

由系统函数作极零点分布图,如图6-10(a)所示。

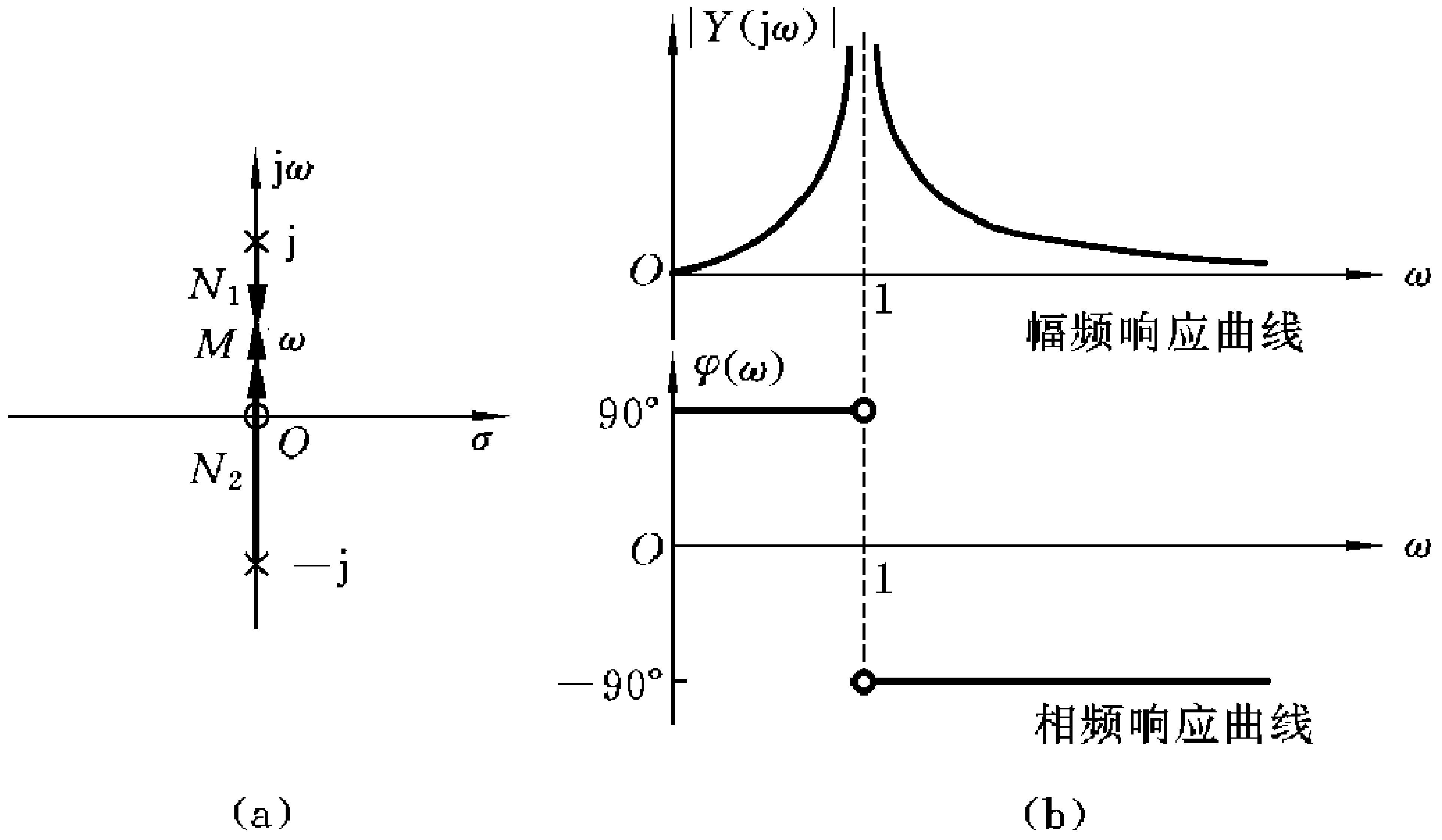


图6-10

由矢量作图法可得

$$|Y(\mathrm{j}\omega)|=\frac{M}{N_1\cdot N_2}$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}90^\circ, & 0<\omega<1\\ -90^\circ, & \omega>1\end{cases}$$

则所得频响曲线如图6-10(b)所示。

【6-7】 系统的极零点图如图6-11所示,如$H_0=1$,用矢量作图法粗略绘出该系统的幅频响应曲线。

解 (a) 由图6-11(a)写出系统函数

$$H_a(s)=\frac{1}{s+2}$$

令$s=\mathrm{j}\omega$得 $$H_a(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+2}$$

画得极零点分布图如图6-12(a_1)所示。

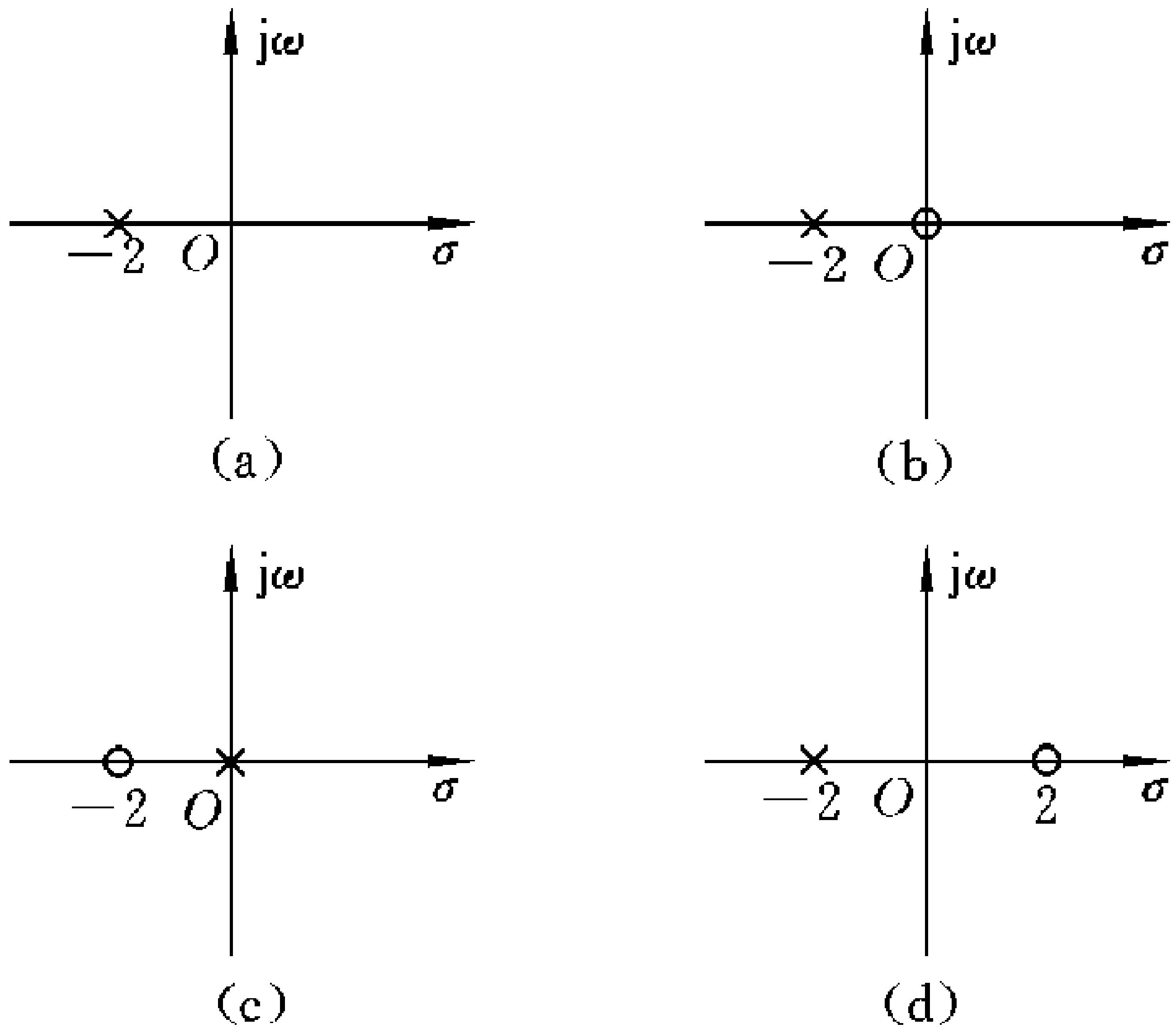


图 6-11

由矢量作图法得

$$|H_a(j\omega)| = \frac{1}{N}$$

当 $\omega=0$ 时，　　$|H_a(j\omega)|=\frac{1}{2}$

当 $\omega=2$ 时，　　$|H_a(j\omega)|=\frac{\sqrt{2}}{4}$

当 $\omega=\infty$ 时，　　$|H_a(j\omega)|=0$

所以图 6-11(a)的幅频响应曲线如图 6-12(a_2)所示。

(b) 由图 6-11(b)写出系统函数

$$H_b(s) = \frac{s}{s+2}$$

令 $s=j\omega$ 得　　$H_b(j\omega)=\frac{j\omega}{j\omega+2}$

画得极零点分布图如图 6-12(b_1)所示。

由矢量作图法得

$$|H_b(j\omega)| = \frac{M}{N}$$

当 $\omega=0$ 时，　　$|H_b(j\omega)|=0$

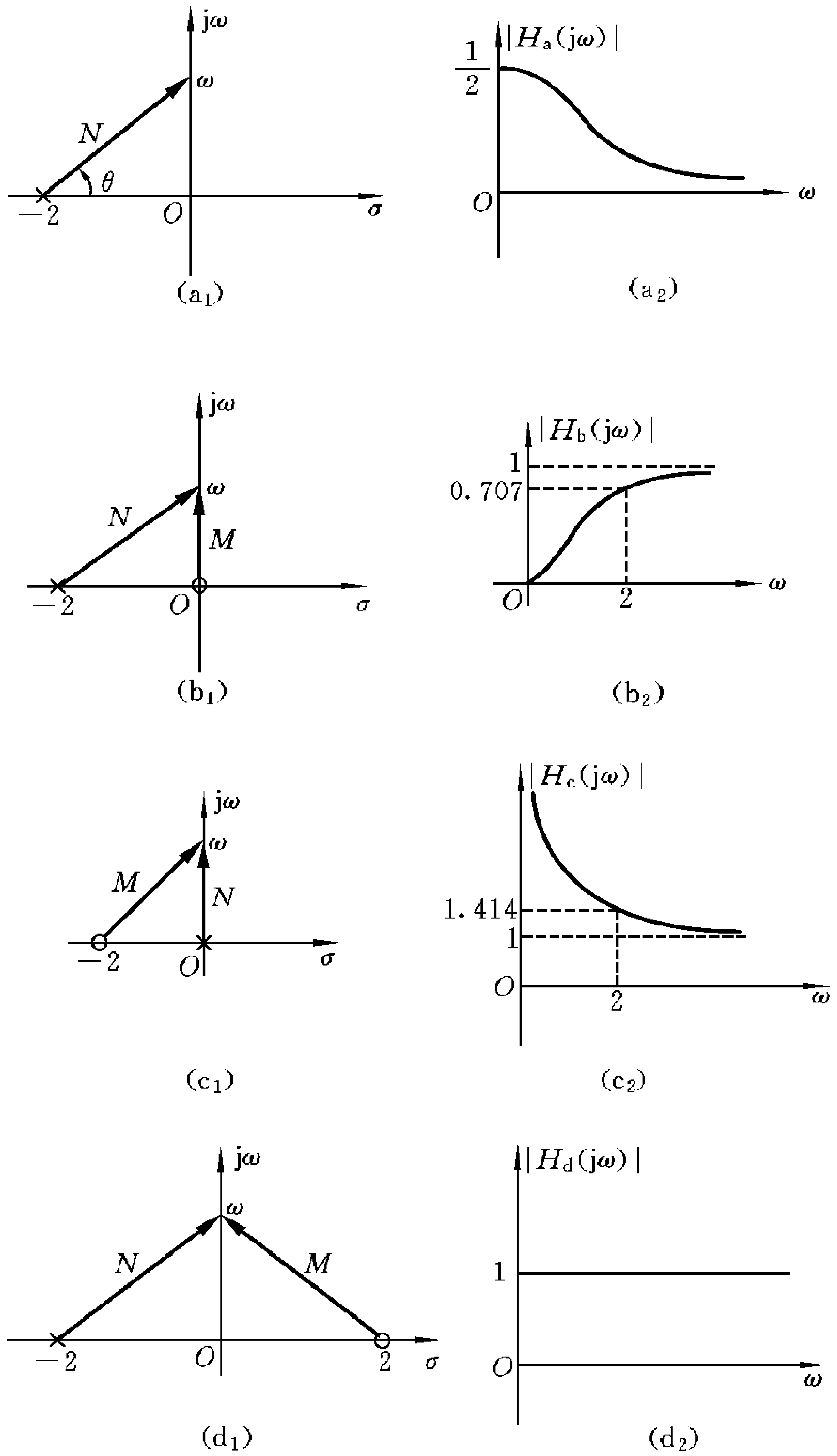

jω
ω
N
θ
−2
O
σ
(a₁)
$|H_a(j\omega)|$
$\frac{1}{2}$
O
ω
(a₂)
jω
ω
N
M
−2
O
σ
(b₁)
$|H_b(j\omega)|$
1
0.707
O
2
ω
(b₂)
jω
ω
M
N
−2
O
σ
(c₁)
$|H_c(j\omega)|$
1.414
1
O
2
ω
(c₂)
jω
ω
N
M
−2
O
2
σ
(d₁)
$|H_d(j\omega)|$
1
O
ω
(d₂)

图 6-12

当 $\omega=2$ 时，　　$|H_b(j\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0.707$

当 $\omega=\infty$时，　　$|H_b(j\omega)|=1$

所以图 6-11(b)的幅频响应曲线如图 6-12(b_2)所示。

(c) 由图 6-11(c)写出系统函数

$$H_c(s)=\frac{s+2}{s}$$

令 $s=j\omega$ 得　　$H_c(j\omega)=\dfrac{j\omega+2}{j\omega}$

画得极零点分布图如图 6-12(c_1)所示。

由矢量作图法得

$$|H_c(j\omega)|=\frac{M}{N}$$

当 $\omega=0$ 时，　　$|H_c(j\omega)|=\infty$

当 $\omega=2$ 时，　　$|H_c(j\omega)|=\sqrt{2}=1.414$

当 $\omega=\infty$时，　　$|H_c(j\omega)|=1$

所以图 6-11(c)的幅频响应曲线如图 6-12(c_2)所示。

(d) 由图 6-11(d)写出系统函数

$$H_d(s)=\frac{s-2}{s+2}$$

令 $s=j\omega$ 得　　$H_d(j\omega)=\dfrac{j\omega-2}{j\omega+2}$

画得极零点分布图如图 6-12(d_1)所示。

由矢量作图法得

$$|H_d(j\omega)|=\frac{M}{N}=1$$

所以图 6-11(d)的幅频响应曲线如图 6-12(d_2)所示。

【6-8】 设系统函数如下，试用矢量作图法绘出粗略的幅频响应曲线与相频响应曲线。

(1) $H(s)=\dfrac{1}{s}$　　(2) $H(s)=\dfrac{s^2+1}{s^2+2s+5}$

(3) $H(s)=\dfrac{s^2+1.02}{s^2+1.21}$　　(4) $H(s)=\dfrac{3(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}$

解　(1) 由系统函数作极零点分布图,如图6-13(a)所示。

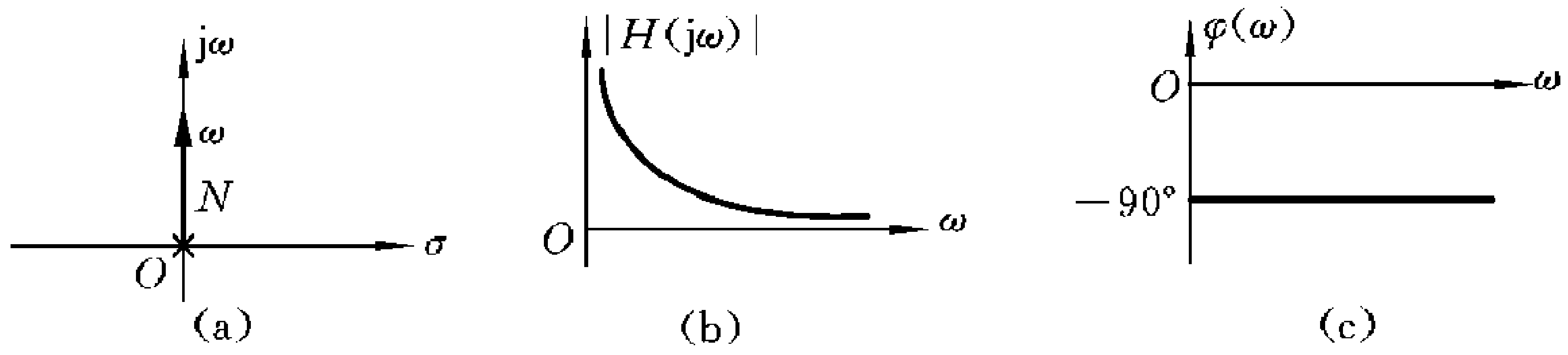


图6-13

令$s=\mathrm{j}\omega$得

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

由矢量作图法得

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{N},\quad \varphi(\omega)=-90°$$

当$\omega=0$时，　$|H(\mathrm{j}\omega)|\Big|_{\omega=0}=\infty$，　$\varphi(\omega)=-90°$

当$\omega=\infty$时，　$|H(\mathrm{j}\omega)|\Big|_{\omega=\infty}=0$，　$\varphi(\omega)=-90°$

幅频响应曲线和相频响应曲线分别如图6-13(b)、(c)所示。

(2) 由系统函数作极零点分布图,如图6-14(a)、(b)所示。令$s=\mathrm{j}\omega$得

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{(\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}1)(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}1)}{(\mathrm{j}\omega+1+\mathrm{j}2)(\mathrm{j}\omega+1-\mathrm{j}2)}$$

由矢量作图法得

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{M_1\cdot M_2}{N_1\cdot N_2}$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}-\psi_1-\psi_2, & 0<\omega<1\\ 180°-\psi_1-\psi_2, & 1<\omega\end{cases}$$

当$\omega=0$时，　$|H(\mathrm{j}\omega)|=\dfrac{1\times1}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{1}{5}=0.2$

$$\varphi(\omega)=-\arctan(-2)-\arctan2=0°$$

当$\omega=1$时，　$|H(\mathrm{j}\omega)|=0$

$$\varphi(\omega)=90°-(-\arctan(-1))-\arctan3=63.4°$$

当 $\omega=\dfrac{1}{2}$ 时，

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}}{\dfrac{\sqrt{13}}{2}\times\dfrac{\sqrt{29}}{2}}=0.155$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\left(-\frac{3}{2}\right)-\arctan\frac{5}{2}=-11.88^{\circ}$$

当 $\omega=\dfrac{3}{2}$ 时，

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{\sqrt{53}}{2}}=0.307$$

$$\varphi(\omega)=180^{\circ}-\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{7}{2}=79.4^{\circ}$$

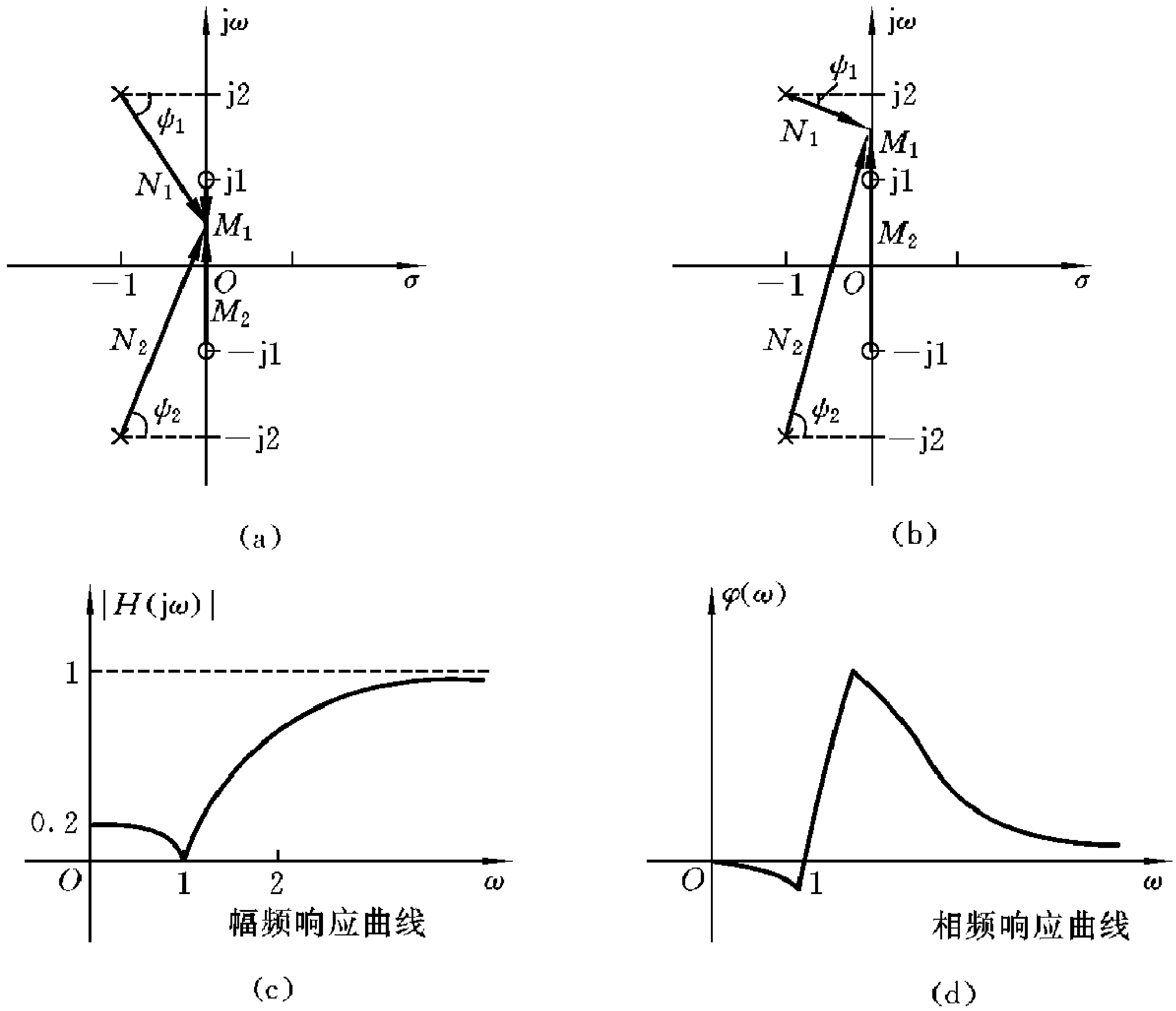


图 6-14

当 $\omega=2$ 时，
$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1\times 3}{1\times\sqrt{17}}=0.727$$
$$\varphi(\omega)=180^\circ-0^\circ-\arctan 4=104^\circ$$
当 $\omega=\infty$ 时，
$$|H(\mathrm{j}\omega)|=1$$
$$\varphi(\omega)=180^\circ-90^\circ-90^\circ=0^\circ$$

幅频响应曲线和相频响应曲线分别如图 6-14(c)、(d)所示。

(3) 由系统函数作极零点分布图，如图 6-15(a)所示。令 $s=\mathrm{j}\omega$ 得
$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{(\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}1.01)(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}1.01)}{(\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}1.1)(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}1.1)}$$
由矢量作图法得
$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{M_1\cdot M_2}{N_1\cdot N_2}$$
$$\varphi(\omega)=\begin{cases}0^\circ, & \text{其他}\\ 180^\circ, & 1.01<\omega<1.1\end{cases}$$

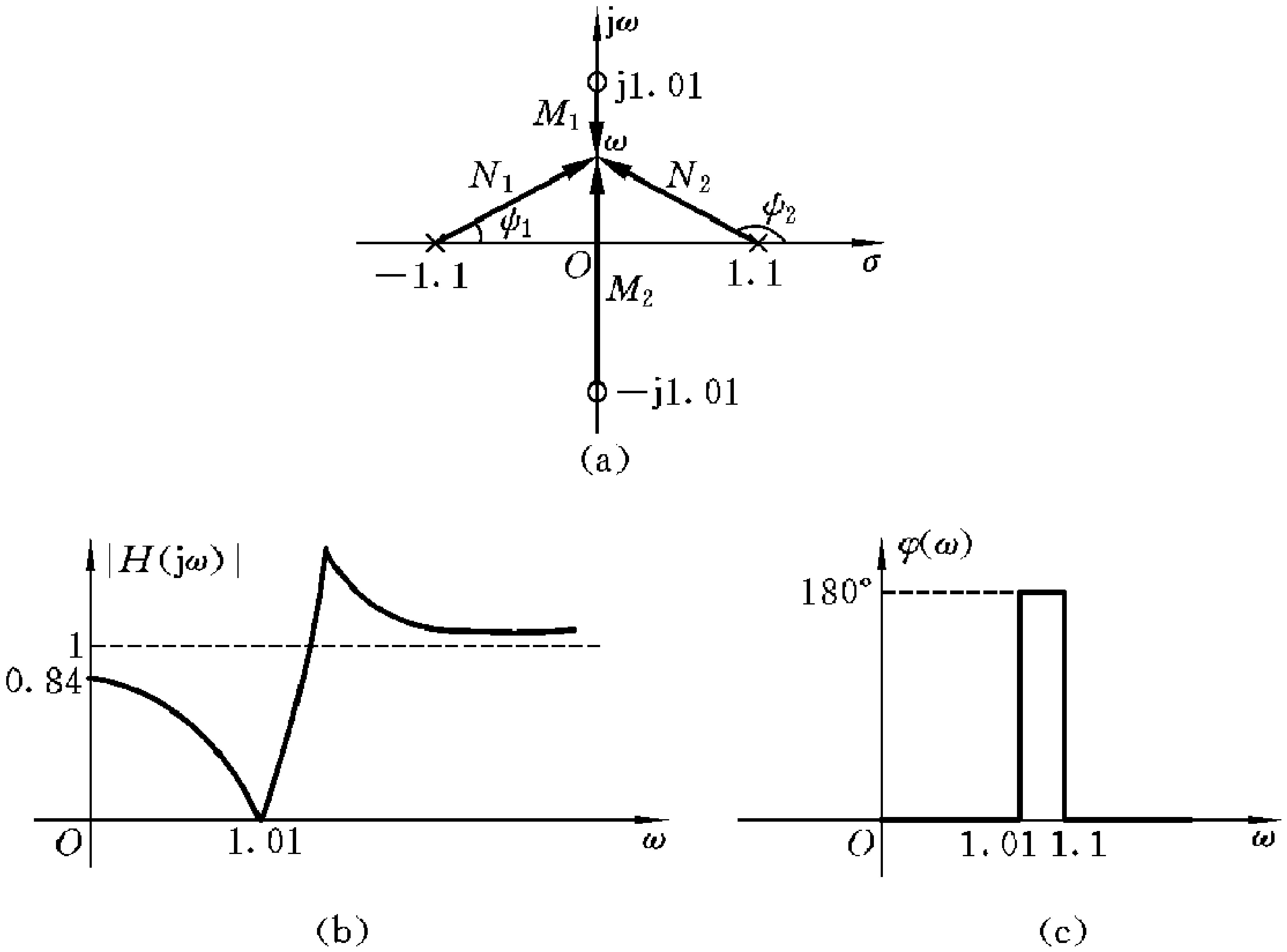


图 6-15

当 $\omega=0$ 时，　$|H(\mathrm{j}\omega)|=0.84$，　$\varphi(\omega)=0°$

当 $\omega=1.01$ 时，　$|H(\mathrm{j}\omega)|=0$，　$\varphi(\omega)=0°$

当 $\omega=1.05$ 时，　$|H(\mathrm{j}\omega)|=0.77$，　$\varphi(\omega)=180°$

当 $\omega=\infty$ 时，　$|H(\mathrm{j}\omega)|=1$，　$\varphi(\omega)=0°$

幅频响应曲线和相频响应曲线分别如图 6-15(b)、(c)所示。

(4) 由系统函数作极零点分布图,如图 6-16(a)所示。令 $s=\mathrm{j}\omega$ 得

$$H(\mathrm{j}\omega)=3\cdot\frac{(\mathrm{j}\omega-1)(\mathrm{j}\omega-2)}{(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+2)}$$

由矢量作图法得

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=3\cdot\frac{M_1\cdot M_2}{N_1\cdot N_2}=3$$

$$\varphi(\omega)=\theta_1+\theta_2-\psi_1-\psi_2$$

当 $\omega=0$ 时，　$|H(\mathrm{j}\omega)|=3$

$$\varphi(\omega)=180°+180°-0°-0°=0°$$

当 $\omega=1$ 时，　$|H(\mathrm{j}\omega)|=3$

$$\varphi(\omega)=135°+153.4°-45°-26.5°=-143°$$

当 $\omega=2$ 时，　$|H(\mathrm{j}\omega)|=3$

$$\varphi(\omega)=180°-\arctan2+135°-45°-\arctan2=143.1°$$

当 $\omega=\infty$ 时，　$|H(\mathrm{j}\omega)|=3$，　$\varphi(\omega)=0°$

幅频响应曲线和相频响应曲线分别如图 6-16(b)、(c)所示。

【6-9】 已知系统函数的极点为 $p_1=0$，$p_2=-1$，零点为 $z_1=1$，如该系统冲激响应的终值为 -10，试求此系统函数。

解 由系统函数的极零点可写出该系统函数

$$H(s)=H_0\frac{s-1}{s(s+1)}=H_0\left(\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s}\right)$$

所以对 $H(s)$ 取拉普拉斯反变换得

$$h(t)=H_0(2\mathrm{e}^{-t}-1)\varepsilon(t)$$

又因系统冲激响应的终值为 -10，所以

$$\lim_{t\to\infty}h(t)=\lim_{t\to\infty}H_0(2\mathrm{e}^{-t}-1)=-H_0=-10$$

即　$$H_0=10$$

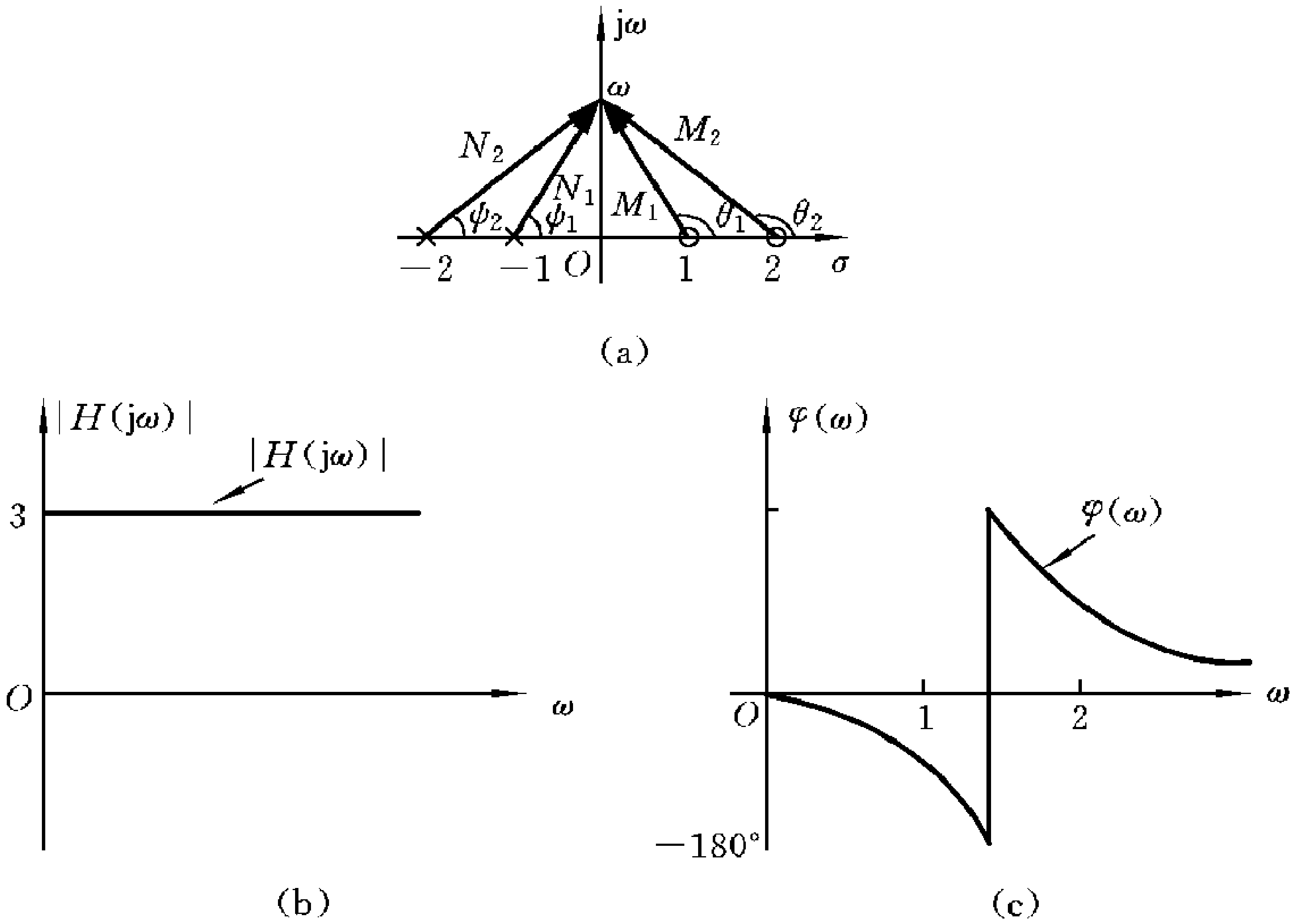


图 6-16

故
$$H(s) = 10 \times \frac{s-1}{s(s+1)}$$

【6-10】 图6-17(a)所示电路的输入阻抗的极零点分布图如图6-17(b)所示，且有$z(\mathrm{j}\omega)\Big|_{\omega=0}=1$。求电路参数$R,L,C$。

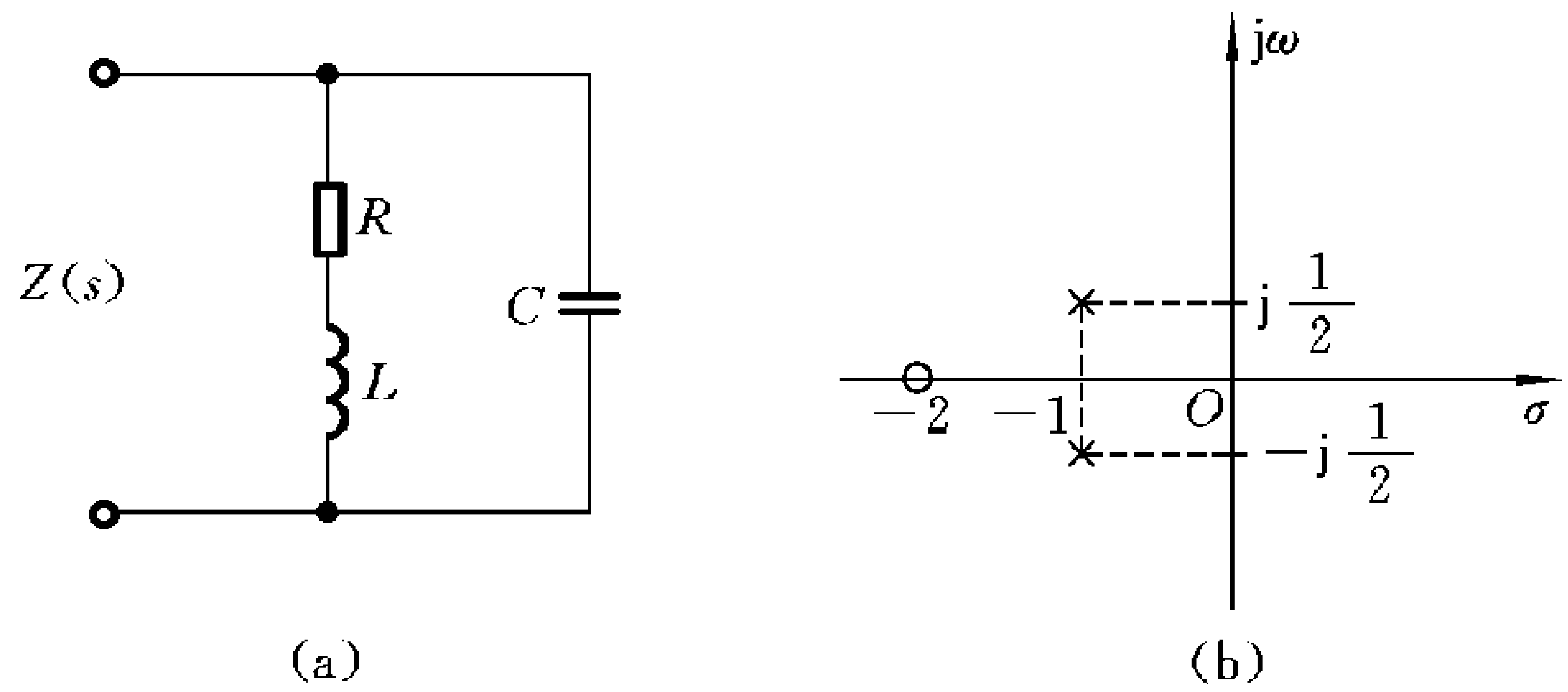


图 6-17

解　由电路图图 6-17(a)可写出输入阻抗

$$Z(s)=\frac{\frac{1}{Cs}(R+Ls)}{\frac{1}{Cs}+(R+Ls)}=\frac{1}{C}\cdot\frac{\left(s+\frac{R}{L}\right)}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} \qquad ①$$

又由图 6-17(b)极零点分布图可写出系统函数

$$Z(s)=H_0\frac{s+2}{\left(s+1-\mathrm{j}\frac{1}{2}\right)\left(s+1+\mathrm{j}\frac{1}{2}\right)} \qquad ②$$

且由$Z(\mathrm{j}\omega)\Big|_{\omega=0}=1$代入式②解得$H_0=\frac{5}{8}$,所以

$$Z(s)=\frac{5}{8}\cdot\frac{s+2}{s^2+2s+\frac{5}{4}} \qquad ③$$

对比式①和式③,由待定系数,得

$$\frac{1}{C}=\frac{5}{8},\quad \frac{R}{L}=2,\quad \frac{1}{LC}=\frac{5}{4}$$

解得
$$R=1\ \Omega,\quad L=\frac{1}{2}\ \mathrm{H},\quad C=\frac{8}{5}\ \mathrm{F}$$

【6-11】　作出图 6-6 中两个电路电压传输函数的波特图。

解　(a) 图 6-6(a)所示电路的电压传输函数为

$$H_a(s)=\frac{s}{s+\frac{1}{R_1C}}$$

$$H_a(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega}{\mathrm{j}\omega+\frac{1}{R_1C}}=R_1C\frac{\mathrm{j}\omega}{1+\mathrm{j}R_1C\omega}$$

则可求得频率特性和相位特性为

$$G(\omega)=20\lg\omega-10\lg(1+(R_1C\omega)^2)+20\lg(R_1C)$$
$$\varphi(\omega)=90°-\arctan(R_1C\omega)$$

由于零点在原点处,所以增益频率特性$G_1(\omega)=20\lg\omega$,它是过$\lg\omega=0$处斜率为 6 dB 的直线。令

$$G_2(\omega)=10\lg(1+(R_1C\omega)^2)$$

当 $R_1C\omega \ll 1$ 时，　　$G_2(\omega)=0$，　$\varphi(\omega)=90^\circ$

当 $R_1C\omega \gg 1$ 时，$G_2(\omega)=20\lg\omega+20\lg(R_1C)$，　$\varphi(\omega)=0^\circ$

$\omega_1=\dfrac{1}{R_1C}$为折断频率处，

$$G(\omega_1)=-10\lg 2=-3\ \mathrm{dB}$$

$$\varphi(\omega_1)=45^\circ$$

图 6-6(a)所示电路的波特图如图 6-18 所示。

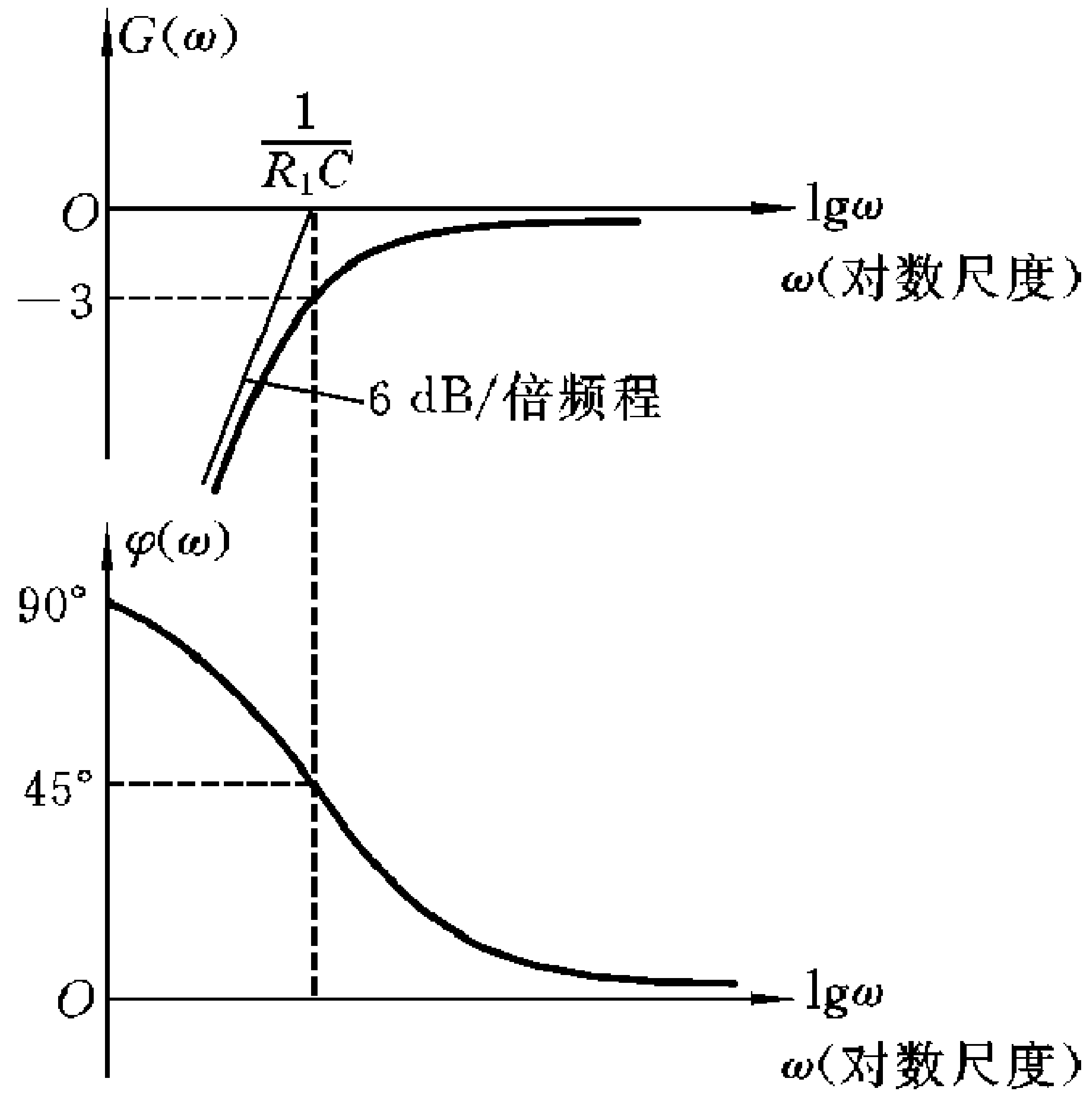


图 6-18

(b) 图 6-6(b)所示电路的电压传输函数为

$$H_b(s)=\frac{\dfrac{R_2}{L}}{s+\dfrac{R_2}{L}}$$

令 $s=\mathrm{j}\omega$ 得

$$H_b(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dfrac{R_2}{L}}{\mathrm{j}\omega+\dfrac{R_2}{L}}$$

则可求得频率特性和相位特性

$$G(\omega)=-10\lg\left[1+\left(\frac{\omega L}{R_2}\right)^2\right]$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\frac{\omega L}{R_2}$$

当$\dfrac{\omega L}{R_2}\ll 1$时，　　　$G(\omega)\approx 0$，　$\varphi(\omega)=0°$

当$\dfrac{\omega L}{R_2}\gg 1$时，　　　$G(\omega)=-20\lg\omega+20\lg\dfrac{R_2}{L}$，　$\varphi(\omega)=-90°$

$\omega_1=\dfrac{R_2}{L}$为折断频率处，

$$G(\omega_1)=-10\lg 2=-3\ \text{dB}$$

$$\varphi(\omega_1)=-\arctan 1=-45°$$

图6-6(b)所示电路的波特图如图6-19所示。

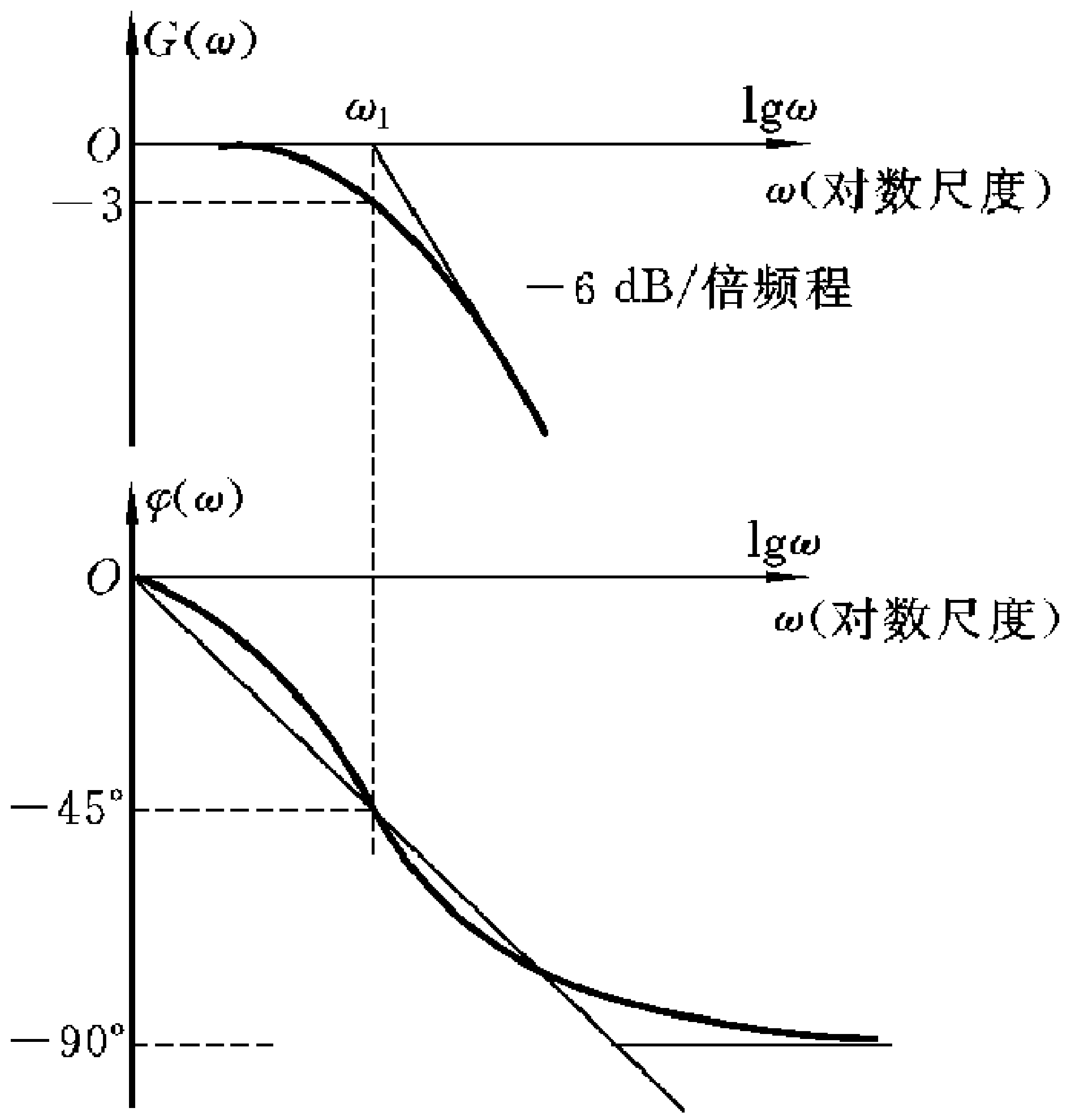


图6-19

【6-12】 系统函数的极零图如图6-20所示，且其幅频特性的最大值为1。画出系统函数的波特图。

解　(a) 图6-20(a)所示的系统函数为

$$H(s)=\frac{A}{[s-(-1+\mathrm{j}2)][s-(-1-\mathrm{j}2)]}$$

令$s=\mathrm{j}\omega$，则

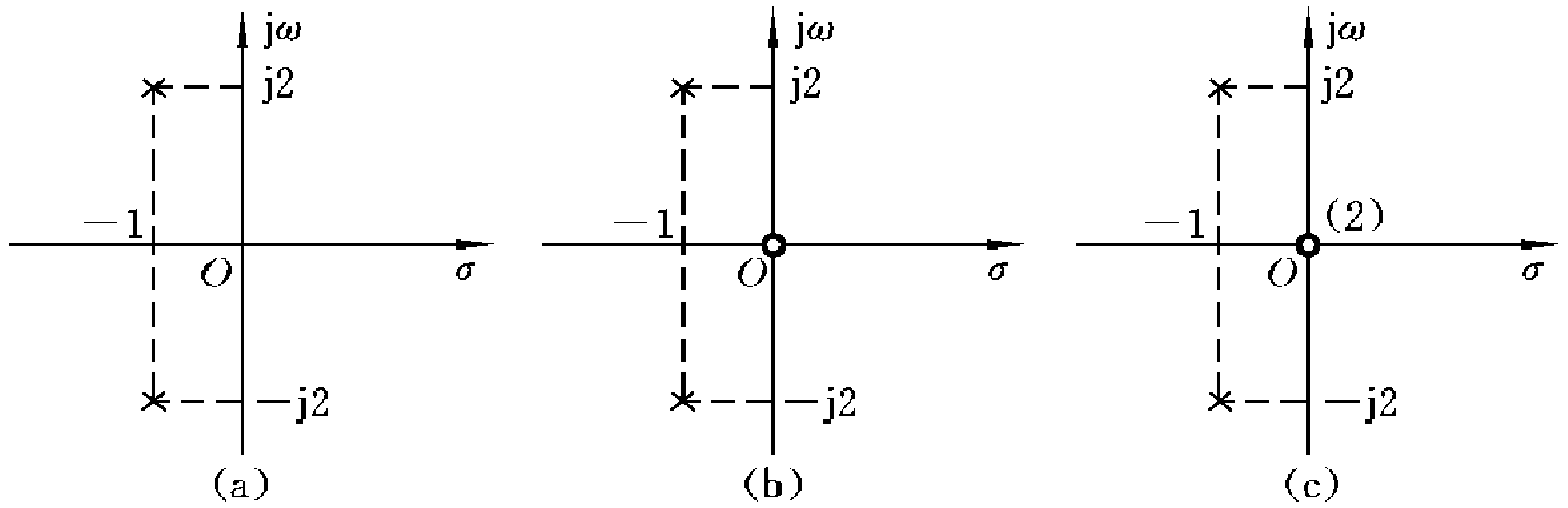


图 6-20

$$H_1(\mathrm{j}\omega)=\frac{A}{[\mathrm{j}\omega-(-1+\mathrm{j}2)][\mathrm{j}\omega-(-1-\mathrm{j}2)]}=\frac{5A}{1-\frac{1}{5}\omega^2+\frac{2}{5}\mathrm{j}\omega}$$

由于系统函数幅频特性的最大值为 1，所以

$$H_1(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{5}\omega^2+\frac{2}{5}\mathrm{j}\omega}$$

其增益和相角分别为

$$G_1(\omega)=-10\lg\left[\left(1-\frac{1}{5}\omega^2\right)^2+\left(\frac{2}{5}\omega\right)^2\right](\mathrm{dB})$$

$$\varphi_1(\omega)=-\arctan\frac{\frac{2}{5}\omega}{1-\frac{1}{5}\omega^2}$$

当 $\omega \ll 1$ 时，增益的低频渐近线为

$$G_1(\omega)\approx 0(\mathrm{dB}),\quad \varphi_1(\omega)=0^\circ$$

当 $\omega \gg 1$ 时，增益的高频渐近线为

$$G_1(\omega)=-\left(40\lg\omega+40\lg\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(\mathrm{dB}),\quad \varphi_1(\omega)=-180^\circ$$

折断频率为 $\sqrt{5}$；高频渐近线的斜率为 −12dB/倍频程；实际增益 $G_1(\sqrt{5})=-20\lg\frac{2}{\sqrt{5}}=0.97$，$G_1\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=-10\lg\frac{61}{80}=1.18$。

利用低频渐近线、高频渐近线和折断频率附近的实际增益值可得增益特性，其波特图如图 6-21(a)、(b)所示。

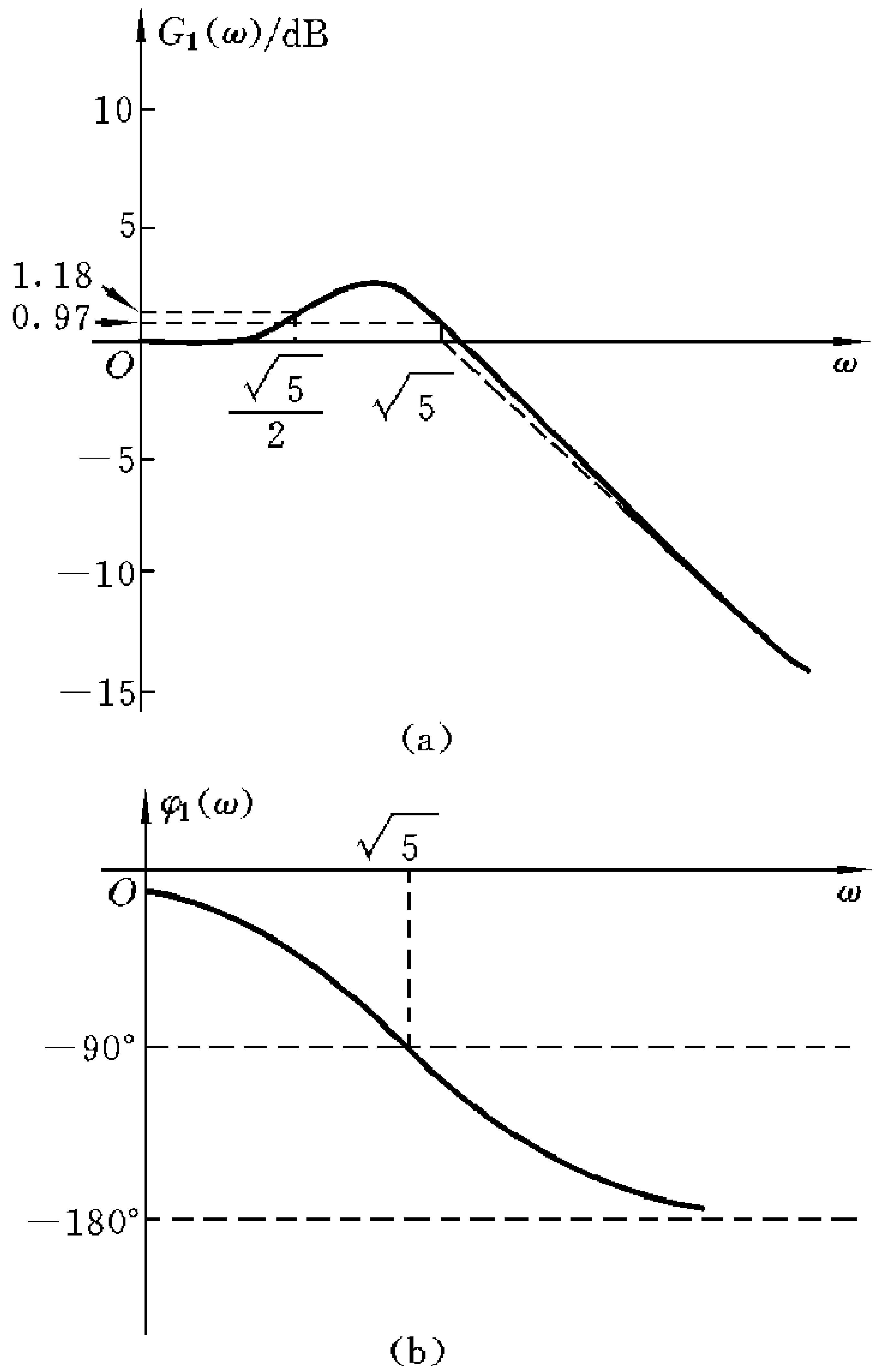


图 6-21

(b) 图 6-20(b)所示的系统函数

$$H(s)=\frac{s}{[s-(-1+\mathrm{j}2)][s-(-1-\mathrm{j}2)]}$$

令 $s=\mathrm{j}\omega$,则

$$H_2(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega}{1-\frac{1}{5}\omega^2+\frac{2}{5}\mathrm{j}\omega}$$

其增益为　$G_2(\omega)=20\lg\omega+G_1(\omega)$

相角为　$\varphi_2(\omega)=90°+\varphi_1(\omega)$

$G_2(\omega)$的第一项 $20\lg\omega$ 是通过 $\lg\omega=0$ 即 $\omega=1$ 处的斜率为 6dB/倍频程的直

线，第二项即为(a)中的分析，将两部分叠加便得增益特性，其波特图如图6-22(a)、(b)所示。

(c) 图6-20(c)所示的系统函数

$$H(s)=\frac{s^2}{[s-(-1+j2)][s-(-1-j2)]}$$

令 $s=j\omega$，则
$$H_3(j\omega)=\frac{j\omega^2}{1-\frac{1}{5}\omega^2+\frac{2}{5}j\omega}$$

其增益为
$$G_3(\omega)=40\lg\omega+G_1(\omega)$$

相角为
$$\varphi_3(\omega)=90°+\varphi_1(\omega)$$

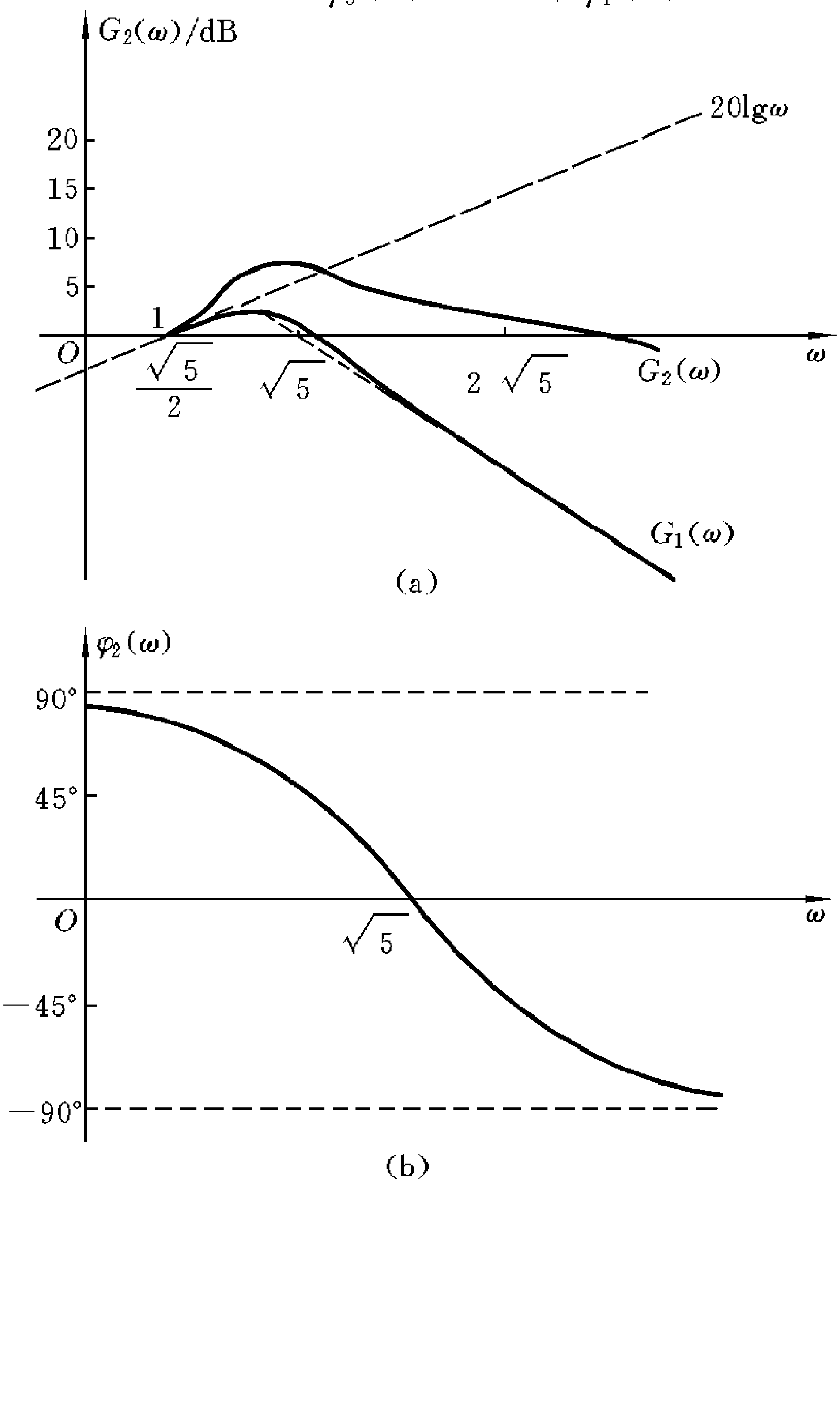


图6-22

$G_3(\omega)$的第一项$40\lg\omega$是通过$\lg\omega=0$,即$\omega=1$处的斜率为12dB/倍频程的直线,第二项即为(a)中的分析,将两部分叠加便得增益特性,其波特图如图6-23(a)、(b)所示。

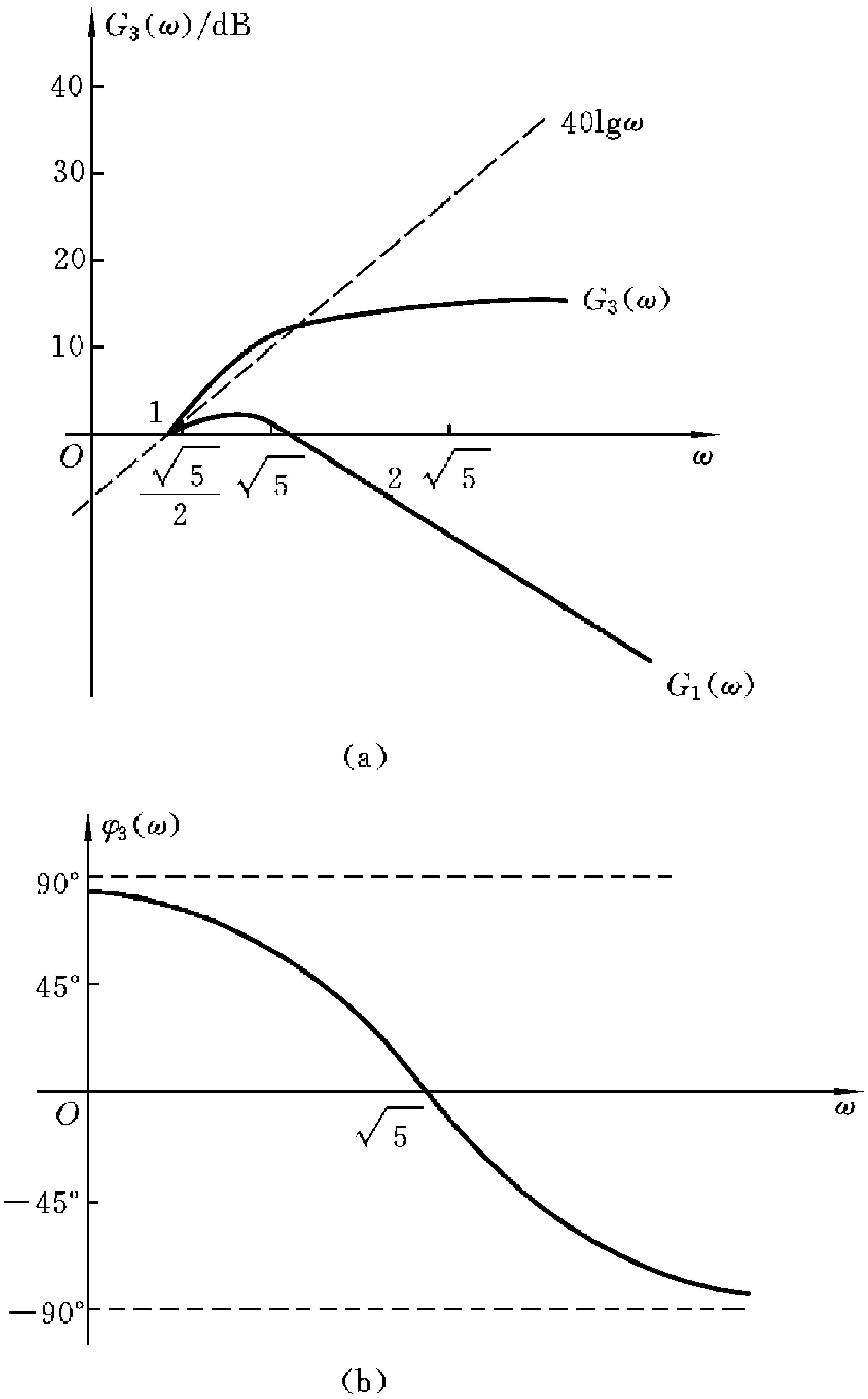


图6-23

【**6-13**】　有源滤波器如图6-24所示,设电路元件参数为$R_1=R_2=1$

Ω,$C_1=C_2=1$ F,运算放大器设为理想的,试作出 K 分别为0.5、1、1.4 三种情况下电压传输函数的波特图。

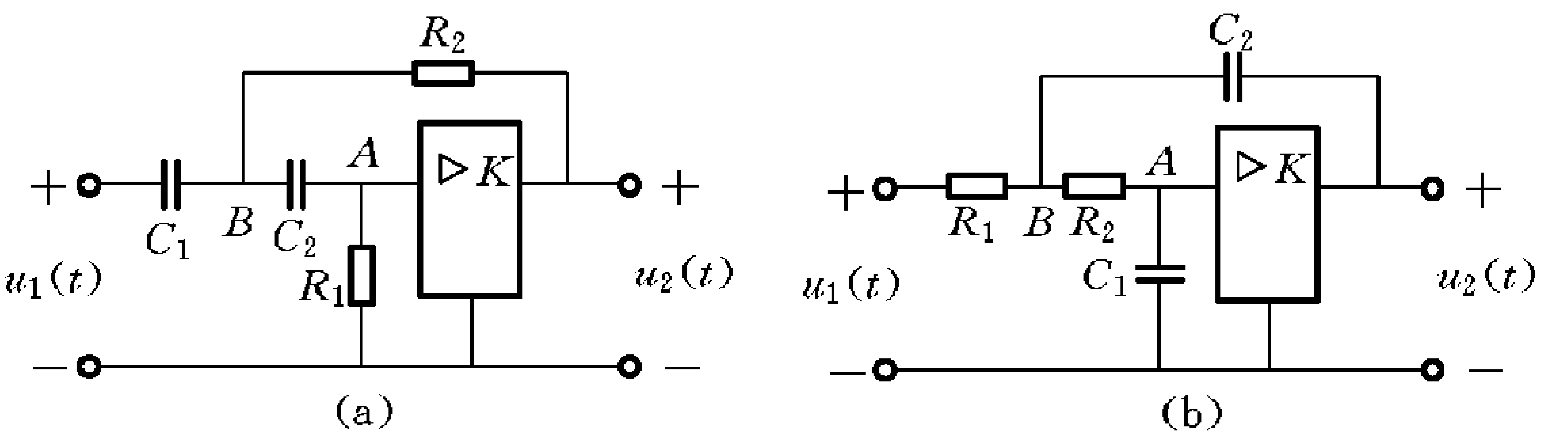


图 6-24

解　(a) 令 A,B 点电位分别为 u_A,u_B,列写结点电压方程

$$\begin{cases}\left[s(C_1+C_2)+\dfrac{1}{R_2}\right]U_B(s)-\dfrac{1}{R_2}U_2(s)-sC_2U_A(s)=sC_1U_1(s)\\ U_A(s)=\dfrac{R_1}{R_1+\dfrac{1}{sC_2}}U_B(s)\\ U_2(s)=KU_A(s)\end{cases}$$

代入数值化简得

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{Ks^2}{s^2+(3-K)s+1}$$

当 $K=0.5$ 时,

$$H(s)=0.5\cdot\frac{s^2}{s^2+2.5s+1}=0.5\cdot\frac{s^2}{(s+0.5)(s+2)}$$

令 $s=\mathrm{j}\omega$ 得

$$H(\mathrm{j}\omega)=-0.5\cdot\frac{\omega^2}{(0.5+\mathrm{j}\omega)(2+\mathrm{j}\omega)}=-0.5\cdot\frac{\omega^2}{(\mathrm{j}0.5\omega+1)(\mathrm{j}2\omega+1)}$$

则求得

$$G(\omega)=40\lg\omega-10\lg(0.25\omega^2+1)-10\lg(4\omega^2+1)+20\lg0.5$$

$$\varphi(\omega)=180°-\arctan(2\omega)-\arctan(0.5\omega)$$

当 $K=1$ 时,　$$H(s)=\frac{s^2}{s^2+2s+1}=\frac{s^2}{(s+1)^2}$$

令 $s=\mathrm{j}\omega$ 得

$$H(\mathrm{j}\omega)=-\frac{\omega^2}{1-\omega^2+\mathrm{j}2\omega}=-\frac{\omega^2}{(1+\mathrm{j}\omega)^2}$$

则求得
$$G(\omega)=40\lg\omega-20\lg(1+\omega^2)$$
$$\varphi(\omega)=180^\circ-2\arctan\omega$$

当 $K=1.4$ 时，　$H(s)=\dfrac{1.4s^2}{s^2+1.6s+1}=\dfrac{1.4s^2}{(s+0.8)^2+0.36}$

令 $s=\mathrm{j}\omega$ 得

$$H(\mathrm{j}\omega)=-\frac{1.4\omega^2}{(\mathrm{j}\omega+0.8)^2+0.36}$$

则求得

$$G(\omega)=40\lg\omega-10\lg[(1-\omega^2)^2+(1.6\omega)^2]+20\lg1.4$$
$$\varphi(\omega)=180^\circ-\arctan\frac{1.6\omega}{1-\omega^2}$$

(波特图略)

(b) 令 A,B 点电位分别为 u_A,u_B,列写结点电位方程

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+sC_2\right)U_B(s)-sC_2U_2(s)-\dfrac{1}{R_2}U_A(s)=\dfrac{1}{R_1}U_1(s)\\ U_A(s)=\dfrac{\dfrac{1}{sC_1}}{R_2+\dfrac{1}{sC_1}}U_B(s)=\dfrac{1}{R_2C_1s+1}U_B(s)\\ U_2(s)=KU_A(s)\end{cases}$$

代入数值化简得

$$H(s)=\frac{K}{s^2+(3-K)s+1}$$

当 $K=0.5$ 时,$H(s)=\dfrac{K}{s^2+2.5s+1}$,令 $s=\mathrm{j}\omega$ 得

$$H(\mathrm{j}\omega)=0.5\cdot\frac{1}{(\mathrm{j}0.5\omega+1)(\mathrm{j}2\omega+1)}$$

则求得　$$G(\omega)=-10\lg(0.25\omega^2+1)-10\lg(4\omega^2+1)+20\lg0.5$$
$$\varphi(\omega)=-\arctan(2\omega)-\arctan(0.5\omega)$$

当 $K=1$ 时，$H(s)=\dfrac{K}{s^2+2s+1}$，令 $s=\mathrm{j}\omega$ 得

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1-\omega^2+\mathrm{j}2\omega}=\frac{1}{(1+\mathrm{j}\omega)^2}$$

则求得
$$G(\omega)=-20\lg(1+\omega^2)$$
$$\varphi(\omega)=-2\arctan\omega$$

当 $K=1.4$ 时，$H(s)=\dfrac{K}{s^2+1.6s+1}$，令 $s=\mathrm{j}\omega$ 得

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1.4}{(\mathrm{j}\omega+0.8)^2+0.36}$$

则求得
$$G(\omega)=-10\lg[(1-\omega^2)^2+(1.6\omega)^2]+20\lg1.4$$
$$\varphi(\omega)=-\arctan\frac{1.6\omega}{1-\omega^2}$$

（波特图略）

【6-14】 系统特征方程如下，试判断该系统是否稳定。并确定具有正实部的特征根及负实部的特征根的个数。

（1）$s^4+7s^3+17s^2+17s+6=0$

（2）$s^4+5s^3+2s+10=0$

（3）$s^4+2s^3+7s^2+10s+10=0$

（4）$4s^5+6s^4+2s^3+4s^2+11s+10=0$

（5）$s^5+2s^4+2s^3+4s^2+11s+10=0$

（6）$s^6+7s^5+16s^4+14s^3+25s^2+7s+12=0$

解　（1）$s^4+7s^3+17s^2+17s+6=0$

R-H（罗斯-霍维茨）阵为

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 17 & 6\\
s^3 & 7 & 17 & \\
s^2 & \dfrac{102}{7} & 6 & \\
s^1 & \dfrac{240}{17} & 0 & \\
s^0 & 6 & 0 &
\end{array}$$

阵列中第一列元素符号无变化，由罗斯-霍维茨判据可知，系统稳定，有4个负实部特征根。

(2) $s^4+5s^3+2s+10=0$

R-H 阵为

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 0 & 10 \\ s^3 & 5 & 2 & \\ s^2 & -\dfrac{2}{5} & 10 & \\ s^1 & 127 & 0 & \\ s^0 & 10 & 0 & \end{array}$$

阵列中第一列元素的符号有改变，且变化了两次(从5变到$-\dfrac{2}{5}$，又从$-\dfrac{2}{5}$变到127)，故由罗斯-霍维茨判据可知，系统不稳定，有2个正实部特征根和2个负实部特征根。

(3) $s^4+2s^3+7s^2+10s+10=0$

R-H 阵为

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 7 & 10 \\ s^3 & 2 & 10 & \\ s^2 & 2 & 10 & \\ s^1 & 4 & & \\ s^0 & 10 & & \end{array}$$

可见第四行元素本应全部为零，第三行的最高幂次项为s^2，于是构造辅助多项式$P(s)=2s^2+10$，并以$\dfrac{\mathrm{d}P(s)}{\mathrm{d}s}=4s$的系数4组成$s^1$行的系数，再按原排列方法继续排列。

由于第一列元素的符号无改变，故肯定该系统在s平面的右半开平面上无极点。令$P(s)=2s^2+10=0$，可得$s_1=\mathrm{j}\sqrt{5}$，$s_2=-\mathrm{j}\sqrt{5}$，这对虚根来说实际就是$H(s)$的两个极点。故系统是临界稳定的，有2个负实部特征

根。

(4) $4s^5+6s^4+2s^3+4s^2+11s+10=0$

R-H 阵为

$$\begin{array}{llll}
s^5 & 4 & 2 & 11 \\
s^4 & 6 & 4 & 10 \\
s^3 & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{13}{3} & \\
s^2 & 43 & 10 & \\
s^1 & \dfrac{193}{43} & 0 & \\
s^0 & 10 & 0 &
\end{array}$$

阵列中第一列元素的符号有改变，且变化了两次（从 6 变到$-\dfrac{2}{3}$，又从$-\dfrac{2}{3}$变到43），故由罗斯-霍维茨判据可知，系统不稳定，有2 个正实部特征根和 3 个负实部特征根。

(5) $s^5+2s^4+2s^3+4s^2+11s+10=0$

因为在罗斯-霍维茨阵列中出现 0，故将$(s+1)$乘特征方程得

$$s^6+3s^5+4s^4+6s^3+15s^2+21s+10=0$$

R-H 阵为

$$\begin{array}{lllll}
s^6 & 1 & 4 & 15 & 10 \\
s^5 & 3 & 6 & 21 & \\
s^4 & 2 & 8 & 10 & \\
s^3 & -6 & 6 & & \\
s^2 & 10 & 10 & & \\
s^1 & 12 & 0 & & \\
s^0 & 10 & & &
\end{array}$$

阵列中第一列元素的符号有改变，且变化了两次（从 2 变到-6，又从-6 变到 10），故由罗斯-霍维茨判据可知，系统不稳定，有 2 个正实部特征根和 3 个负实部特征根。

(6) $s^6+7s^5+16s^4+14s^3+25s^2+7s+12=0$

R-H 阵为

$$\begin{array}{lcccc} s^6 & 1 & 16 & 25 & 12 \\ s^5 & 7 & 14 & 7 & \\ s^4 & 14 & 24 & 12 & \\ s^3 & 2 & 1 & & \\ s^2 & 17 & 12 & & \\ s^1 & -\dfrac{7}{17} & 0 & & \\ s^0 & 12 & 0 & & \end{array}$$

阵列中第一列元素的符号有改变，且变化了两次(从 17 变到$-\dfrac{7}{17}$，又从$-\dfrac{7}{17}$变到12)，故由罗斯-霍维茨判据可知，系统不稳定，有2 个正实部特征根和 4 个负实部特征根。

【6-15】 系统的特征方程如下，求系统稳定的 K 值范围。

(1) $s^3+4s^2+4s+K=0$

(2) $s^3+5s^2+(K+8)s+10=0$

(3) $s^4+9s^3+20s+Ks+K=0$

解 (1) $s^3+4s^2+4s+K=0$

R-H 阵为

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 4 & K \\ s^1 & 4-\dfrac{K}{4} & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array}$$

由罗斯-霍维茨判据可知，欲使系统稳定必有

$$\begin{cases} 4-\dfrac{K}{4}>0 \\ K>0 \end{cases}$$

故当 $0<K<16$ 时，系统稳定。

(2) $s^3+5s^2+(K+8)s+10=0$

R-H 阵为

$$\begin{array}{cccc} s^3 & 1 & K+8 \\ s^2 & 5 & 10 \\ s^1 & K+6 & 0 \\ s^0 & 10 & 0 \end{array}$$

由罗斯-霍维茨判据可知，欲使系统稳定必有

$$K+6>0$$

即

$$K>-6$$

故当 $K>-6$ 时，系统稳定。

(3) $s^4+9s^3+20s^2+Ks+K=0$

R-H 阵为

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 20 & K \\ s^3 & 9 & K & \\ s^2 & 20-\dfrac{K}{9} & K & \\ s^1 & K-\dfrac{81K}{180-K} & 0 & \\ s^0 & K & 0 & \end{array}$$

由罗斯-霍维茨判据可知，欲使系统稳定必有

$$\begin{cases} 180-K>0 \\ -K^2+99K>0 \\ K>0 \end{cases}$$

故当 $0<K<99$ 时，系统稳定。

【6-16】 如图 6-25 所示的有源反馈网络，已知元件参数为 $R_1=R_2=1\ \Omega$，$C_1=C_2=1$ F，$L=1$ H，求保证该网络稳定工作的 K 值范围。

解 由图 6-25 列写网孔电流方程如下：

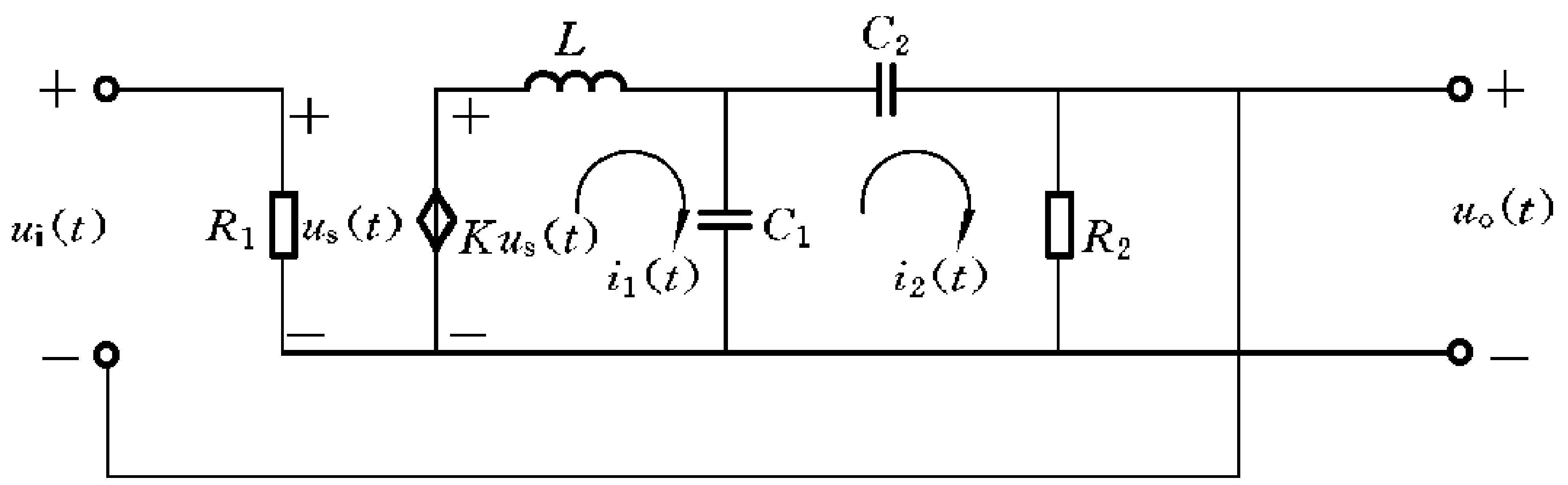


图 6-25

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}i_1(\tau)\mathrm{d}\tau-\dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}i_2(\tau)\mathrm{d}\tau=Ku_s(t) \\ R_2i_2(t)+\dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}i_2(\tau)\mathrm{d}\tau+\dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}i_2(\tau)\mathrm{d}\tau-\dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}i_1(\tau)\mathrm{d}\tau=0 \\ u_o(t)=R_2i_2(t) \\ u_i(t)=u_s(t)-u_o(t) \end{cases}$$

对方程组作拉普拉斯变换，则

$$\begin{cases} \left(s+\dfrac{1}{s}\right)I_1(s)-\dfrac{1}{s}I_2(s)=Ku_s(s) \\ \left(1+\dfrac{2}{s}\right)I_2(s)-\dfrac{1}{s}I_1(s)=0 \\ u_o(s)=I_2(s) \\ u_i(s)=u_s(s)-u_o(s) \end{cases}$$

化简可得$u_i(s)$与$u_o(s)$的关系为

$$[s^3+2s^2+(1-K)s+1]u_o(s)=Ksu_i(s)$$

系统函数

$$H(s)=\frac{Ks}{s^3+2s^2+(1-K)s+1}$$

R-H 阵为

s^3	1	$1-K$
s^2	2	1
s^1	$\dfrac{1}{2}-K$	0
s^0	1	0

由罗斯-霍维茨判据可知，若要系统稳定，则必有$\frac{1}{2}-K>0$，所以当$K<\frac{1}{2}$时该网络稳定工作。

【6-17】 图6-26(a)所示的为一反馈系统框图，图6-26(b)所示的为其在$K>0$时作出的$\omega\geqslant 0$部分的开环转移函数的复轨迹。如K可取负值，试用奈奎斯特判据确定系统稳定的K值范围。

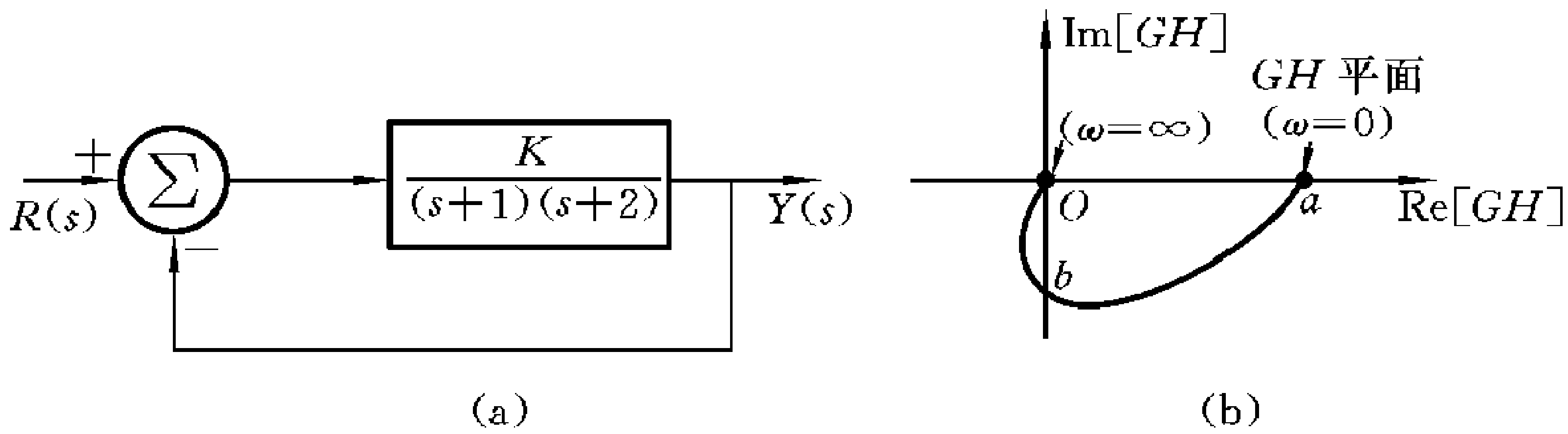


图6-26

解　因为奈奎斯特图中的ω从0到$+\infty$的部分与ω从0到$-\infty$的部分在GH平面上对于实轴成镜像对称。所以完整的奈奎斯特图如图6-27(a)所示。

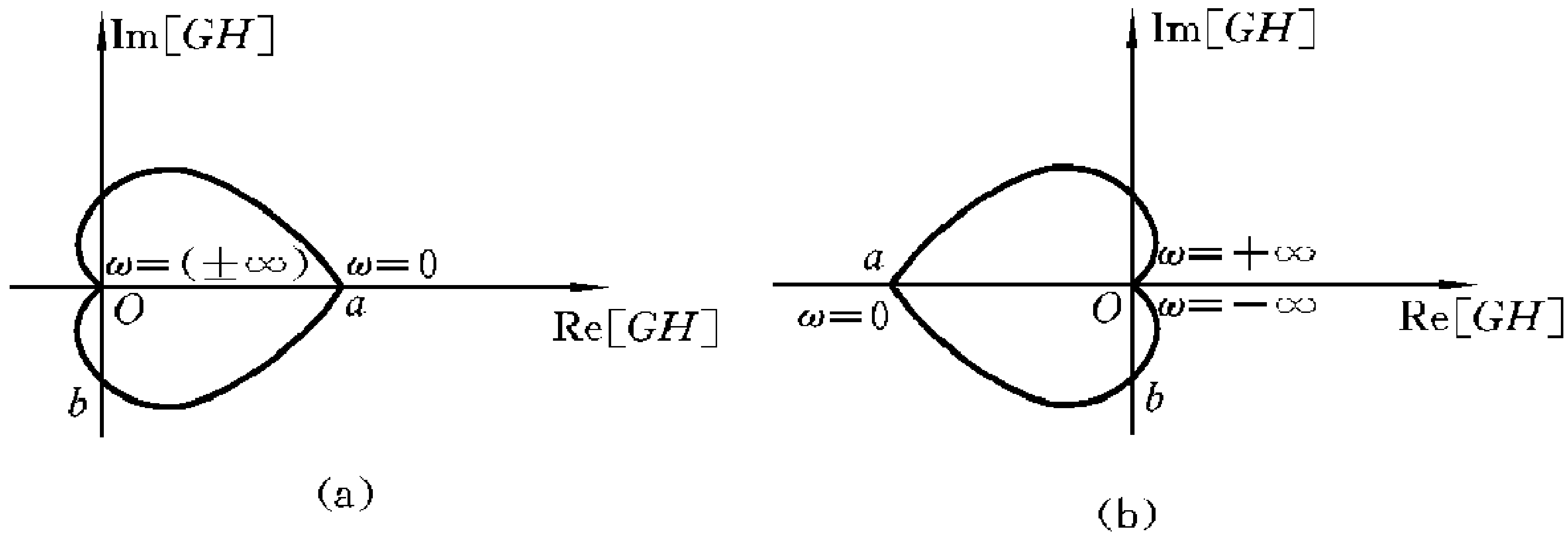


图6-27

由于
$$G(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)},\quad H(s)=1$$

$$GH=\frac{K}{(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+2)}=\frac{K(2-\omega^2)-\mathrm{j}3K\omega}{\omega^4+5\omega^2+4}$$

所以
$$a=\mathrm{Re}[GH]=\frac{K}{2},\quad \omega=0$$
$$b=\mathrm{Im}[GH]=-\frac{K}{3\sqrt{2}},\quad \omega=\sqrt{2}$$

若K取负值，则奈奎斯特图将绕原点顺时针方向旋转180°，如图6-27(b)所示。

由于$a=\frac{K}{2}$，当$\frac{K}{2}>-1$，即$K>-2$时，奈奎斯特图不包围$-1+\mathrm{j}0$的点，所以当$K>-2$时系统稳定。

【6-18】 一反馈系统如图6-28所示，作出奈奎斯特图，并确定$K>0$，系统稳定时的K值范围。

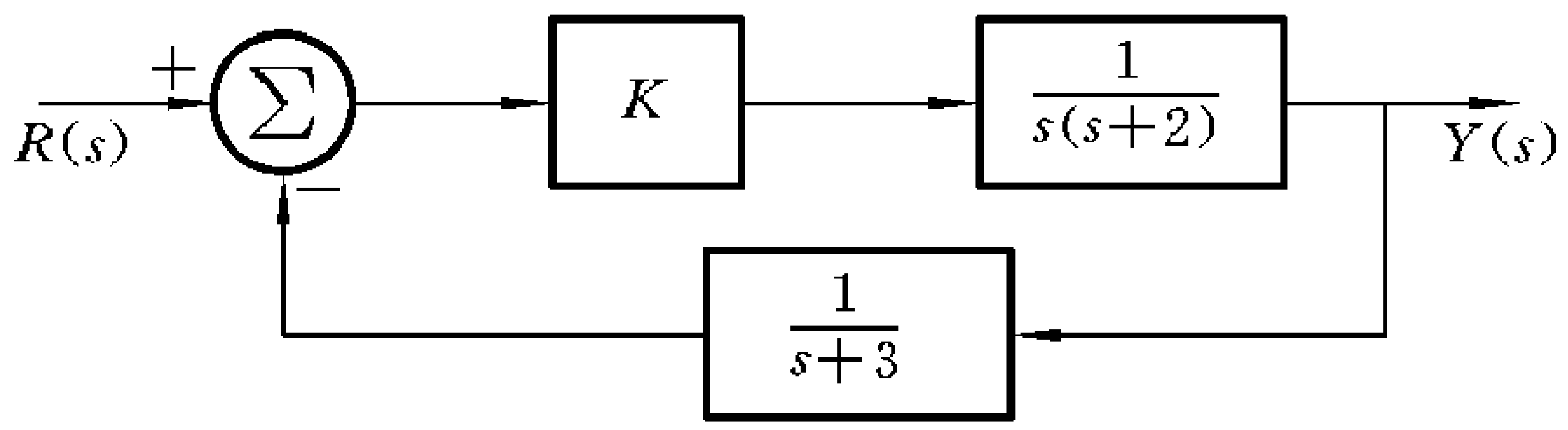


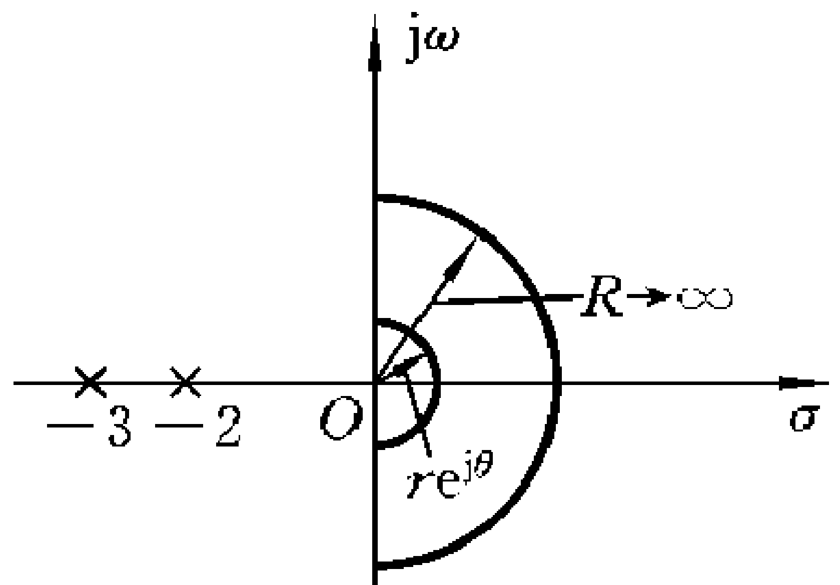
图6-28

解 由系统框图(见图6-28)写出
$$G(s)=\frac{K}{s(s+2)},\quad H(s)=\frac{1}{s+3}$$
$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s+3)}$$

当$\omega=0$时，$s=re^{\mathrm{j}\theta}$，$GH=\frac{K}{6r}e^{-\mathrm{j}\theta}$为半径等于$\frac{K}{6r}$，由$\frac{\pi}{2}\to-\frac{\pi}{2}$的半圆；当$r\to0$时，$GH$为右半平面，如图6-29(a)所示。

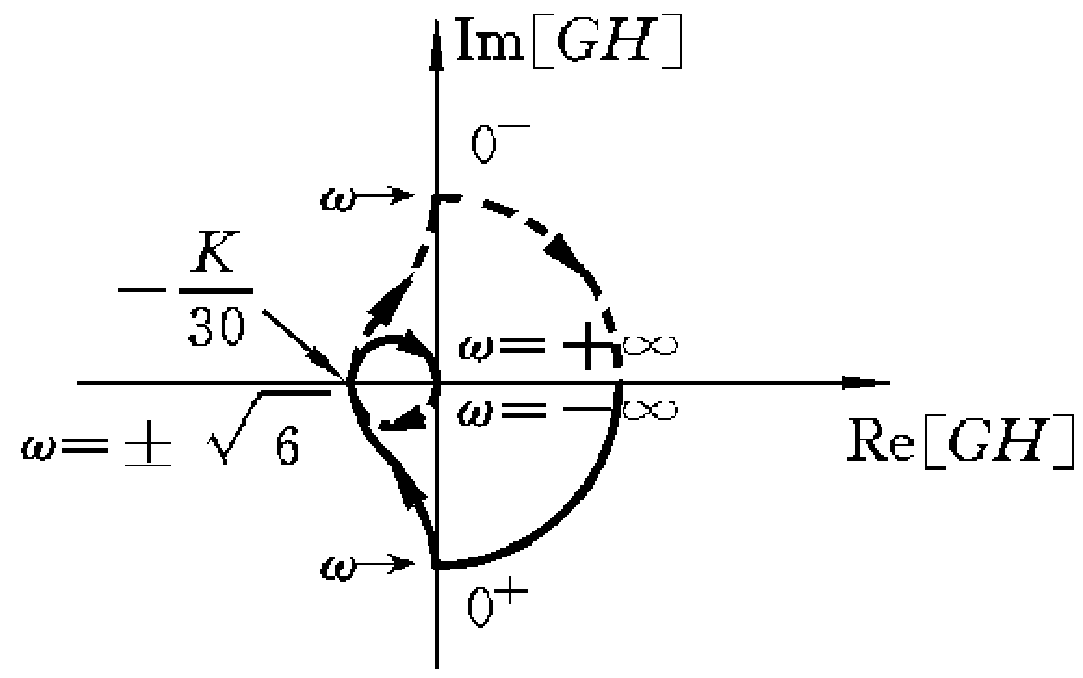
令$s=\mathrm{j}\omega$，可得
$$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{K}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega+2)(\mathrm{j}\omega+3)}=\frac{K[-5\omega+\mathrm{j}(\omega^2-60)]}{\omega[(\omega^2-6)^2+25\omega^2]}$$
$$=\frac{-5K}{\omega^4+13\omega^2+36}+\mathrm{j}\frac{(\omega^2-6)K}{\omega^5+13\omega^3+36\omega}$$

当$\omega=\pm\sqrt{6}$时，$GH(\pm\sqrt{6})=-\frac{K}{30}>-1$，如图6-29(b)所示。故当$0<K$



s 变化的路径

(a)



系统奈奎斯特图

(b)

图 6-29

<30 时,系统稳定。

【6-19】 已知反馈系统开环传输函数如下,试作其奈奎斯特图。

(1) $G(s)H(s)=\dfrac{2K}{(s+1)(s+2)}$　　(2) $G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(s+2)^2}$

(3) $G(s)H(s)=\dfrac{K}{s^2+2s+2}$　　(4) $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+2)}{(s+1)(s-3)}$

解　(1) $G(s)H(s)=\dfrac{2k}{(s+1)(s+2)}$

令 $s=\mathrm{j}\omega$,可得

$$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{2K}{(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+2)}=2K\,\frac{(2-\omega^2)-\mathrm{j}3\omega}{\omega^4+5\omega^2+4}$$

当 $\omega=0$ 时,　　$GH=K$

当 $\omega=\sqrt{2}$ 时,　　$GH=-\mathrm{j}\dfrac{\sqrt{2}}{3}K$

当 $\omega=\infty$ 时,　　$GH=0$

由奈奎斯特判据可得奈奎斯特图,如图 6-30 所示。

当 $K>0$ 时,奈奎斯特图不包围点$(-1,\mathrm{j}0)$,此时系统稳定,如图 6-30(a)所示。

当 $K<0$ 时,只有在 $K>-1$ 时,奈奎斯特图才不包围点$(-1,\mathrm{j}0)$,此时系统稳定,如图 6-30(b)所示。

(2) $G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(s+2)^2}$

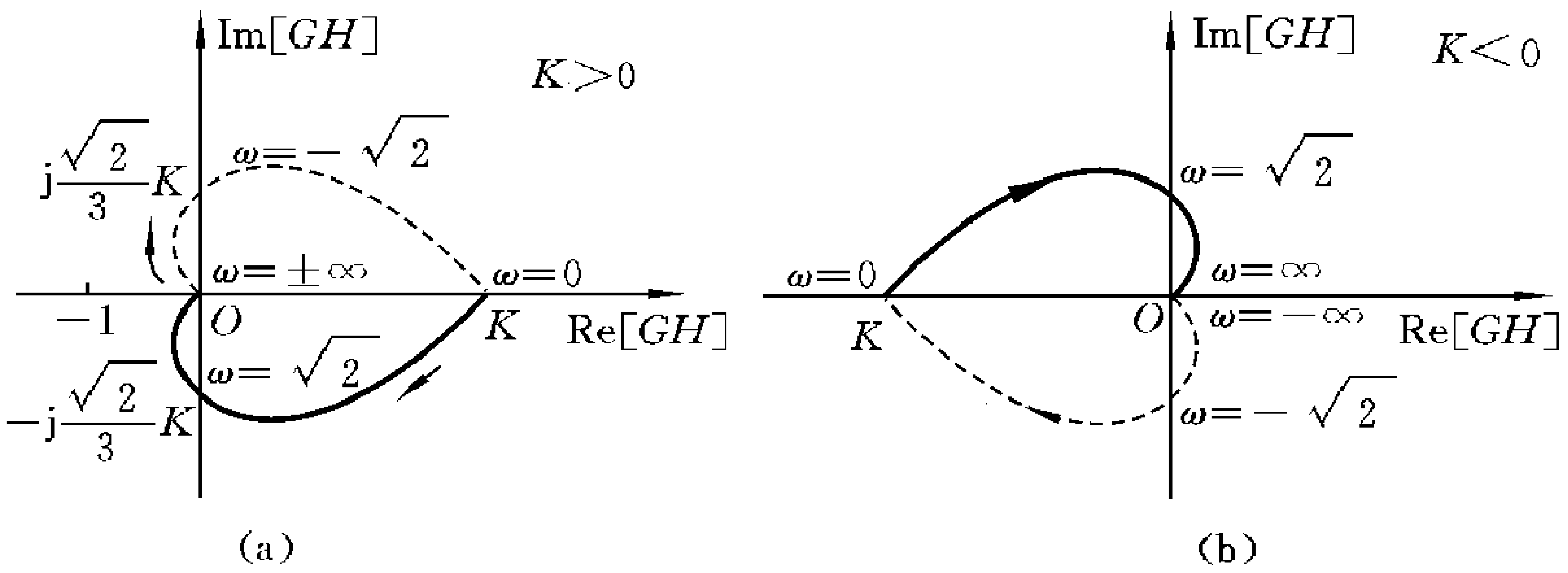


图 6-30

由于$G(s)H(s)$在 $\mathrm{j}\omega$ 轴上 $\omega=0$ 处有一极点，因此用半径为 r 的小半圆将该极点排除在外，这样，s 变化的闭合路径内不包含极点。用 $s=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$表示小半圆上的 s 值，当 s 绕过极点时，θ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$（逆时针方向），沿此半圆的函数 $G(s)H(s)$为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}(r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+2)(r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+2)}$$

由于 $r\ll 1$，故
$$G(s)H(s)\approx\frac{K}{4r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$$

由于极点$s=0$ 没有包含在s 平面围线内，所以随着s 沿小半圆变化而θ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，奈奎斯特图为一半径为 $\frac{K}{4r}$ 的半圆。当 $r\to 0$ 时，此半圆的半径无限趋大，奈奎斯特图包括 GH 右半平面。

当 s 沿 $\mathrm{j}\omega$ 轴 ω 由 $-\infty$ 到 0 再到 $+\infty$ 变化时，$G(s)H(s)$成为

$$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{K}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega+2)^2}=\frac{K}{-4\omega^2-\mathrm{j}\omega(\omega^2-4)}=\frac{-K[4\omega^2-\mathrm{j}\omega(\omega^2-4)]}{\omega^6+8\omega^4+16\omega^2}$$

按此式作奈奎斯特图的另一部分。其中，当 $\omega=2$ 时，$GH=-\frac{K}{16}$为实数。

$K>0$ 时的奈奎斯特图如图 6-31(a)所示，且当 $0<K<16$ 时系统稳定。$K<0$时的奈奎斯特图如图 6-31(b)所示。

(3) $G(s)H(s)=\frac{K}{s^2+2s+2}$

令 $s=\mathrm{j}\omega$，可得

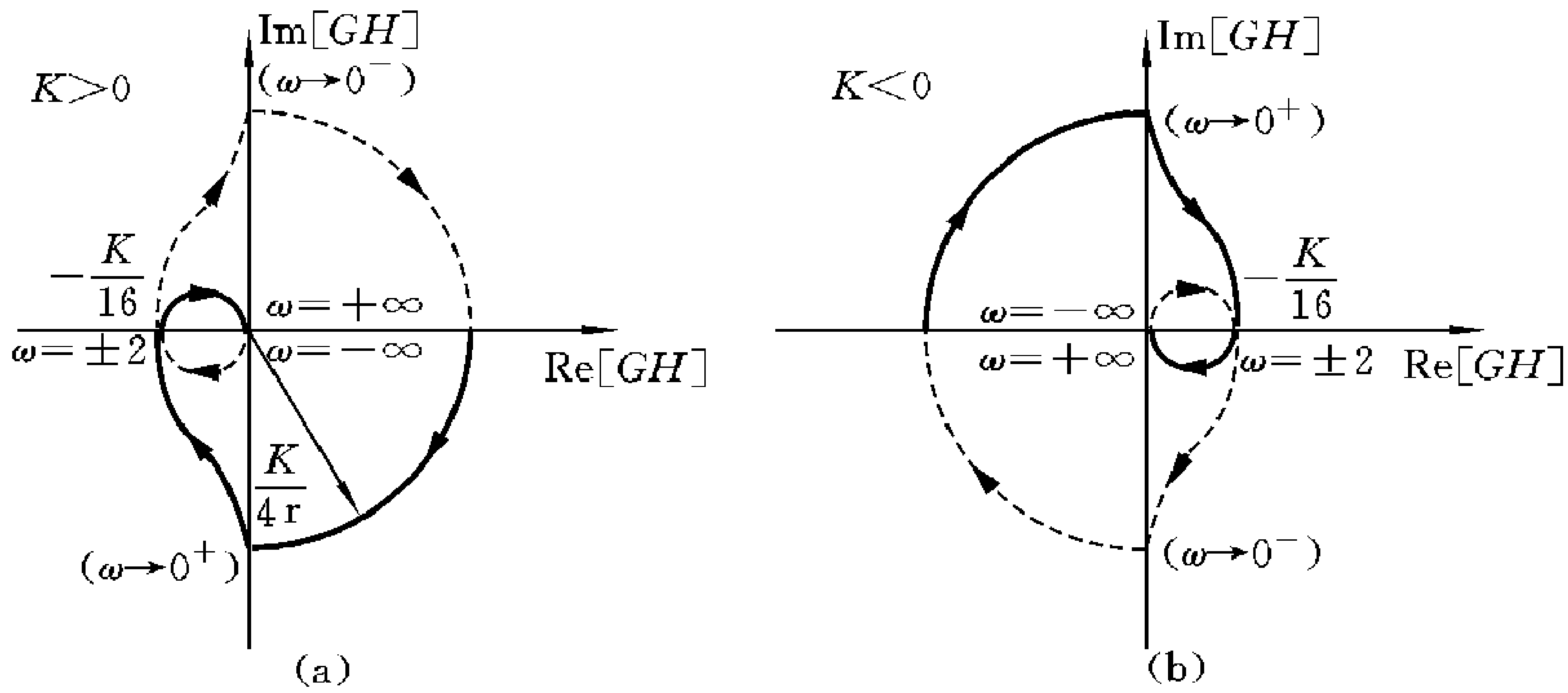


图 6-31

$$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{K}{2-\omega^2+\mathrm{j}2\omega}=\frac{K[(2-\omega^2)-\mathrm{j}2\omega]}{\omega^4+4}$$

当 $\omega=0$ 时，　　$GH=\dfrac{K}{2}$

当 $\omega=\infty$ 时，　　$GH=0$

当 $\omega=\sqrt{2}$ 时，　　$GH=-\mathrm{j}\dfrac{\sqrt{2}}{4}K$

由奈奎斯特判据得奈奎斯特图，如图 6-32 所示。

当 $K>0$ 时，奈奎斯特图不包围点$(-1,\mathrm{j}0)$，系统稳定，如图6-32(a)所示。

当 $K<0$ 时，只有当 $K>-2$ 时奈奎斯特图才不包围点$(-1,\mathrm{j}0)$，此时系统稳定，如图 6-32(b)所示。

(4) $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+2)}{(s+1)(s-3)}$

令 $s=\mathrm{j}\omega$，可得

$$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{K(\mathrm{j}\omega+2)}{(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega-3)}=-K\frac{2(2\omega^2+3)+\mathrm{j}\omega(\omega^2-1)}{\omega^4+10\omega^2+9}$$

当 $\omega=0$ 时，　　$GH=-\dfrac{2}{3}K$

当 $0<\omega<1$ 时，

$$\mathrm{Re}[GH]<0，且\ \mathrm{Im}[GH]>0\quad(K>0)$$

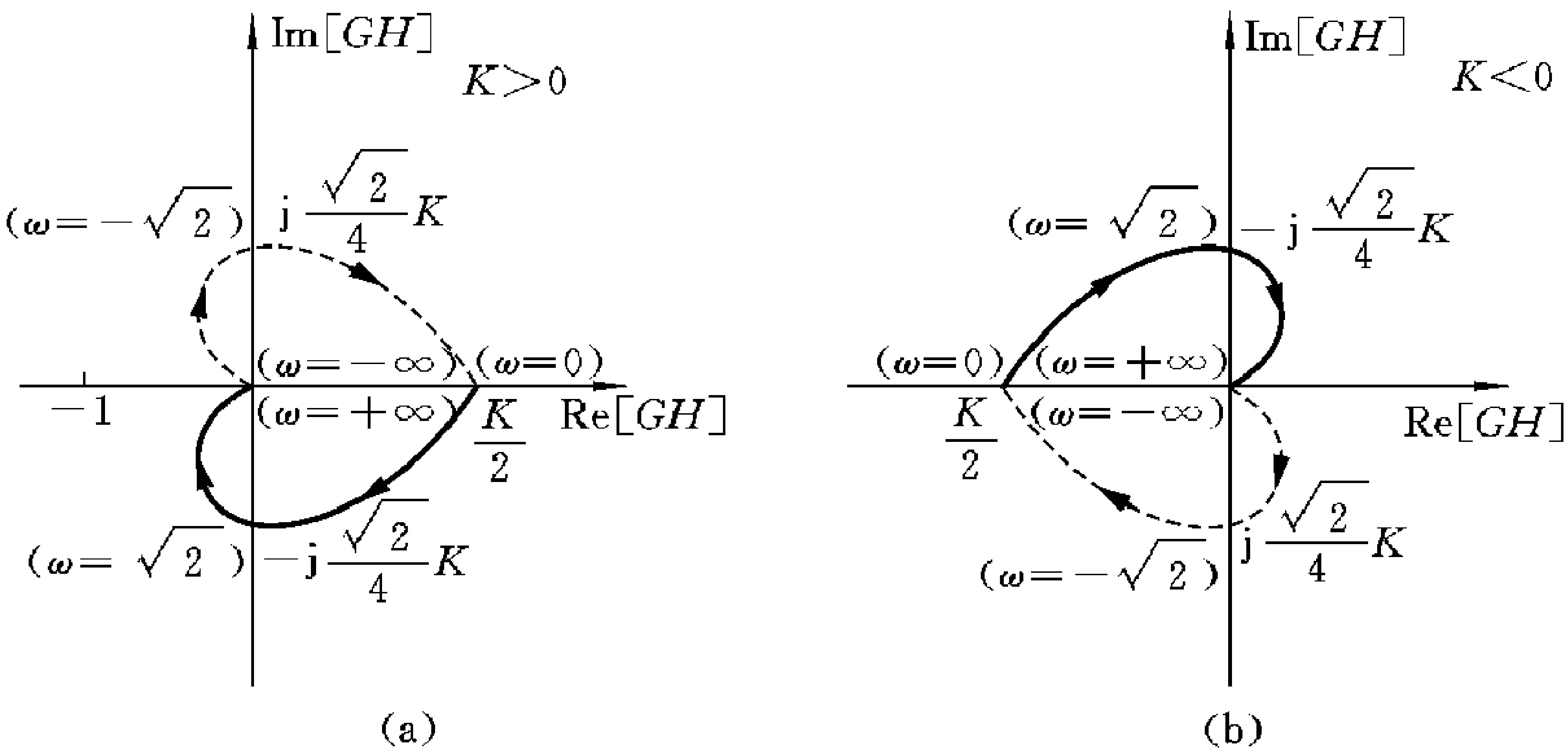


图 6-32

$$\mathrm{Re}[GH] > 0, \text{且}\ \mathrm{Im}[GH] < 0 \quad (K < 0)$$

当 $\omega=1$ 时，
$$GH=-\frac{1}{2}K$$

当 $1<\omega<\infty$ 时，
$$\mathrm{Re}[GH] < 0, \text{且}\ \mathrm{Im}[GH] < 0 \quad (K > 0)$$
$$\mathrm{Re}[GH] > 0, \text{且}\ \mathrm{Im}[GH] > 0 \quad (K < 0)$$

当 $\omega=\infty$ 时，
$$GH = 0$$

由奈奎斯特判据可得奈奎斯特图，如图 6-33(a)、(b)所示。

当 $K>0$ 时，只有在 $K<\frac{3}{2}$ 时，奈奎斯特图才不包围点$(-1,\mathrm{j}0)$，此时系统稳定。如图 6-33(a)所示。

当 $K<0$ 时，奈奎斯特图不包围点$(-1,\mathrm{j}0)$，此时系统稳定，如图 6-33(b)所示。

【6-20】 已知反馈系统开环转移函数如下，试作根轨迹图。

(1) $G(s)H(s)=\dfrac{K}{(s+5)(s+1)}$，　$K>0$

(2) $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+4)}{s(s+2)}$，　$K>0$

(3) $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+2)}{s(s+1)^2}$

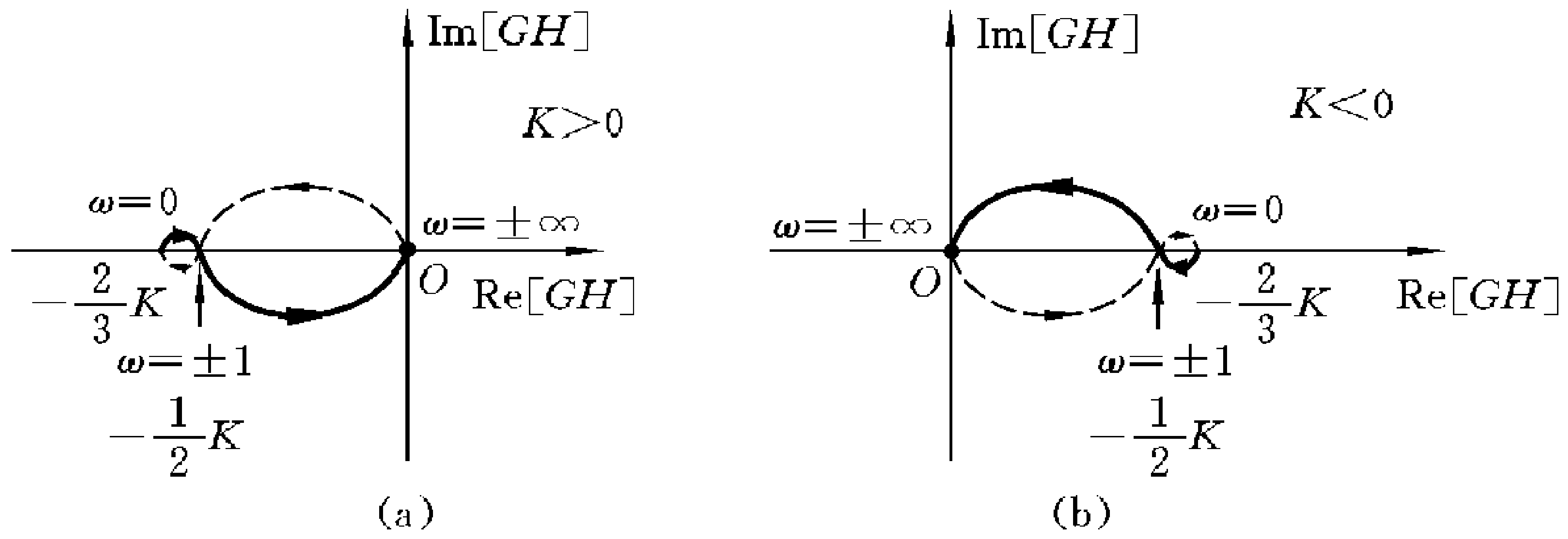


图 6-33

解　(1) $G(s)H(s)=\dfrac{K}{(s+5)(s+1)}$，　$K>0$

开环转移函数的极点为

$$p_1=-5,\quad p_2=-1$$

根轨迹渐近线与实轴的交角为

$$\theta=\frac{k\pi}{n-m}\quad (\text{其中 } n=2, m=0, k=1,3)$$

由此可知 θ 分别为 $\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$。

根轨迹渐近线的重心坐标为

$$\sigma_0=\frac{p_1+p_2}{n-m}=\frac{-5-1}{2}=-3$$

由根轨迹构作规则(5)可知，轨迹的交点将出现在下列方程的根上：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[G(s)H(s)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{K}{(s+5)(s+1)}\right]=0$$

即
$$(2s+6)K=0$$

此方程的根为
$$s=-3$$

根轨迹分别从点(−5,0)和点(−1,0)出发并互相靠拢，到点(−3,0)处再向上下分开，然后逐渐靠近渐近线。根轨迹图如图 6-34 所示。

(2) $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+4)}{s(s+2)}$，$K>0$

开环转移函数的极点为 $p_1=0$，$p_2=-2$，零点为 $z_1=-4$。根轨迹渐近线

与实轴的交角为

$$\theta = \frac{k\pi}{n-m}$$

式中，　$n=2$，　$m=1$，　$k=1$

由此可知，θ 为 π。

根轨迹渐近线的重心坐标为

$$\sigma_0 = \frac{p_1 + p_2 - z_1}{n-m} = \frac{0-2+4}{2-1} = 2$$

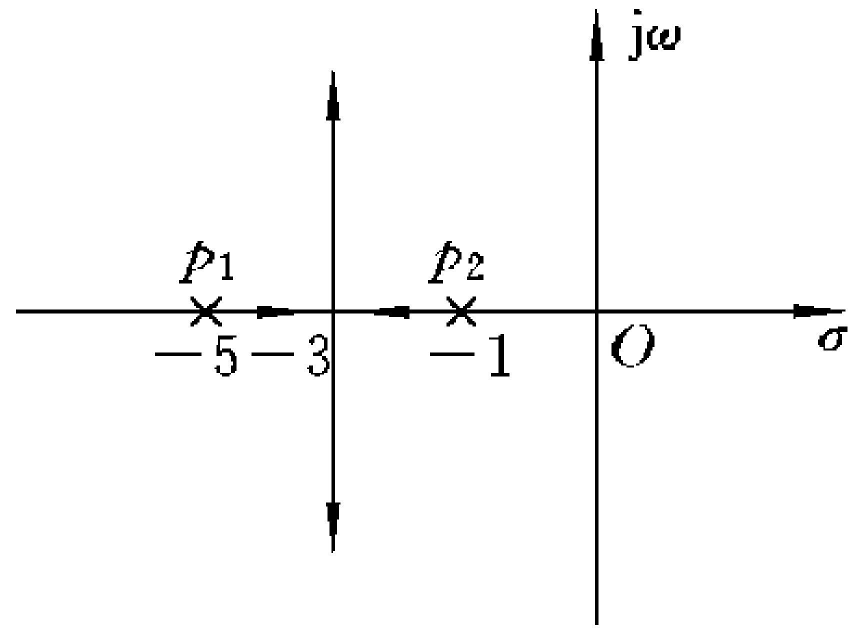


图 6-34

令　$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{K(s+4)}{s(s+2)}\right] = \frac{Ks(s+2)-2K(s+4)(s+1)}{s^2(s+2)^2} = 0$$

即　$$s^2+2s-2s^2-10s-8=0$$

$$s^2+8s+8=(s+4)^2-8=0$$

解之可得方程根为

$$s_1=-4+2\sqrt{2}\approx-1.17,\quad s_2=-4-2\sqrt{2}\approx-6.83$$

所以根轨迹的交点为(-1.17,0)和(-6.83,0)。

根轨迹分别从点(0,0)和(-2,0)出发，并互相靠拢到点(-1.17,0)处，再沿以点(-4,0)为圆心，$2\sqrt{2}$ 为半径的圆周上下分开，再在点(-6.83,0)相交，而后沿负实轴分成两支：一支伸向 $-\infty$ 处，一支终止于零点(-4,0)处。根轨迹图如图 6-35 所示。

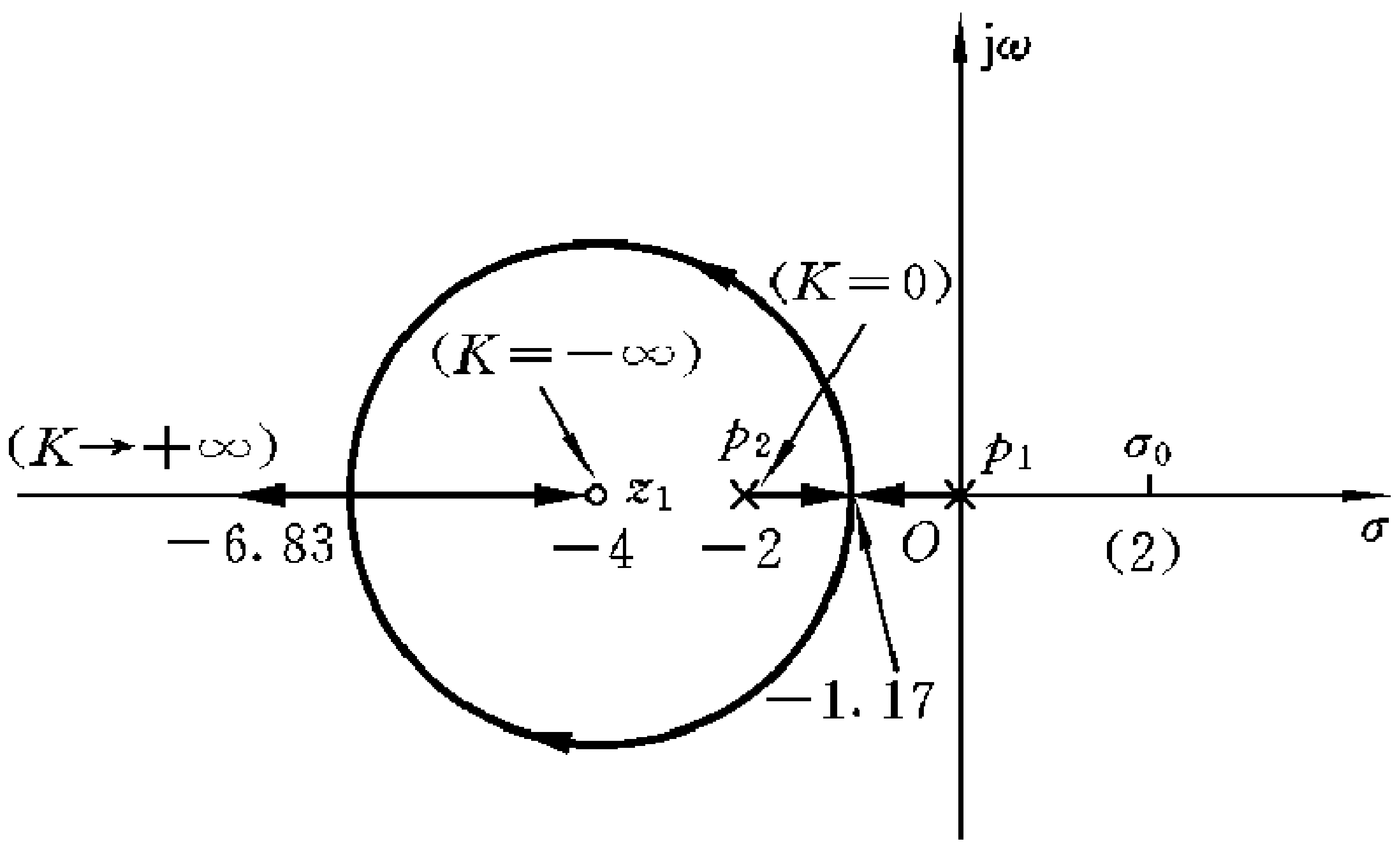


图 6-35

(3) $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+2)}{s(s+1)^2}$

系统的特征方程为

$$1+G(s)H(s)=0$$

即 $$1+\frac{K(s+2)}{s(s+1)^2}=\frac{s(s+1)^2+K(s+2)}{s(s+1)^2}=\frac{s^3+2s^2+(K+1)s+2K}{s(s+1)^2}=0$$

$$s^3+2s^2+(K+1)s+2K=0$$

构成罗斯-霍维茨阵列

s^3	1	$K+1$
s^2	2	$2K$
s^1	1	0
s^0	$2K$	0

由罗斯-霍维茨数列可知，因 1，2，1 均大于 0，故系统稳定条件为 $2K>0$，即 $K>0$。

$K>0$ 时，开环转移函数的极点为 $p_1=0$，$p_2=p_3=-1$，零点为 $z_1=-2$。根轨迹渐近线与实轴的交角为

$$\theta=\frac{k\pi}{n-m}\quad (\text{其中 } n=3,m=1,k=1,3)$$

由此可知 θ 分别为 $\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$。

根轨迹的重心坐标为

$$\sigma_0=\frac{p_1+p_2+p_3-z_1}{n-m}=\frac{0-1-1+2}{3-1}=0$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[G(s)H(s)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{K(s+2)}{s(s+1)^2}\right]=0$$

即 $$s^2+3s+1=0$$

解之可得方程根为

$$s_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\approx-0.38, s_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\approx-2.62$$

其中 $s_2=-2.62$ 不在实轴上根轨迹范围内，故舍去。所以根轨迹的交点为 $(-0.38,0)$。

根轨迹有三支，其中一支由 $(-1,0)$ 出发，沿负实轴终止于 $(-2,0)$；另外

两支分别由(0,0)和(−1,0)出发,互相靠拢到点(−0.38,0)处,再向上下分开,然后逐渐靠近渐近线。根轨迹图如图6-36所示。

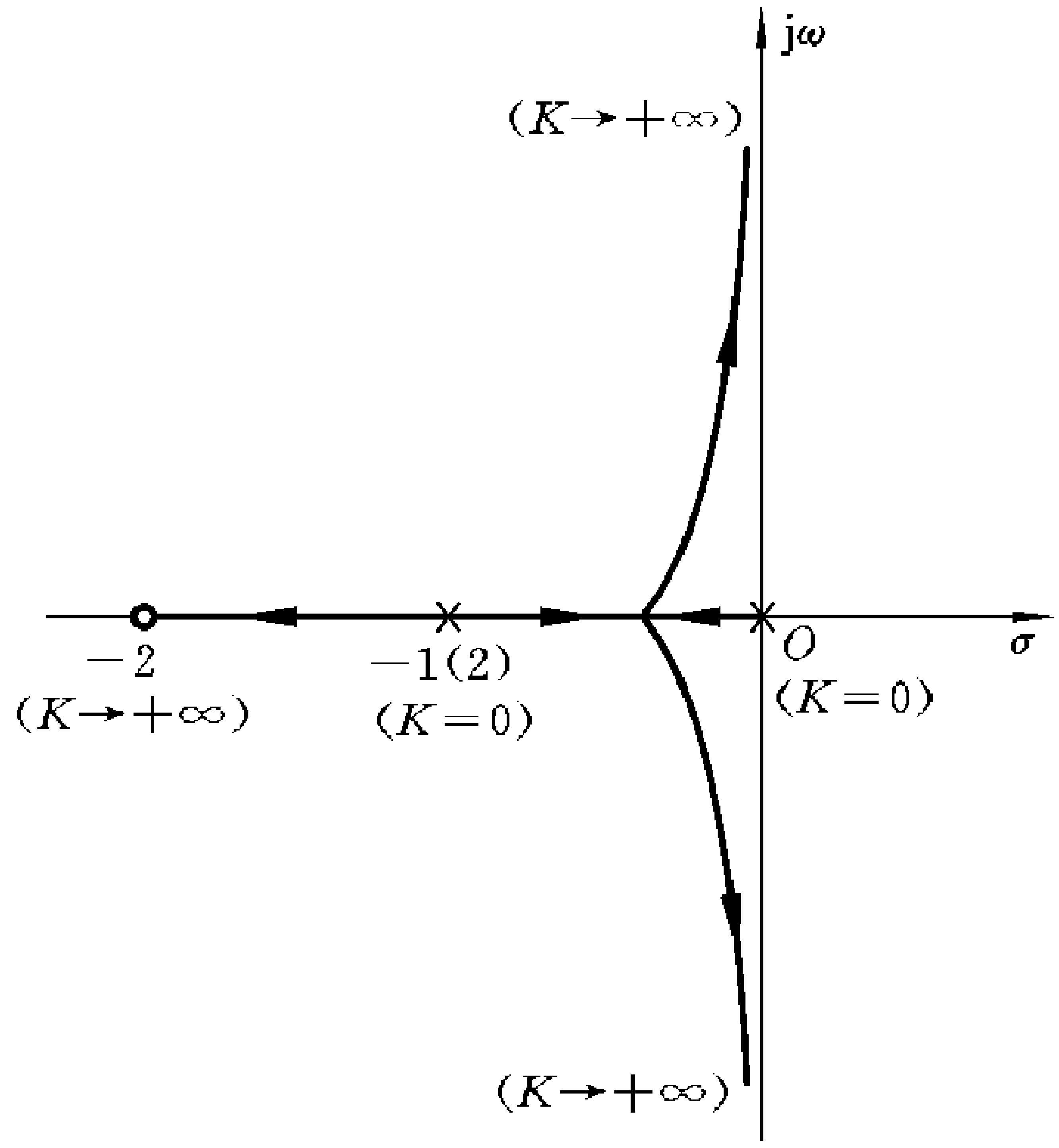


图 6-36

【6-21】 一反馈系统如图6-37所示,试作根轨迹图判断系统稳定的K值范围,并用罗斯-霍维茨判据校核。

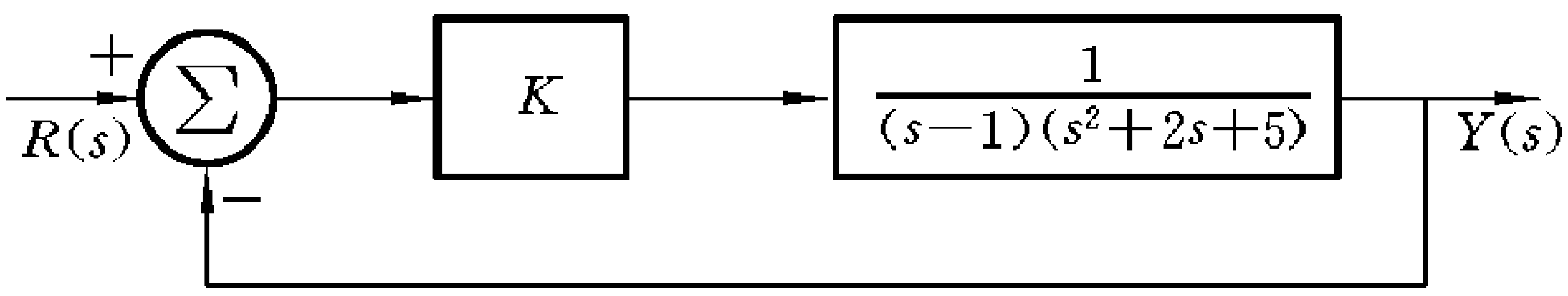


图 6-37

解　由系统框图(见图6-37)可知,开环转移函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(s-1)(s^2+2s+5)}=\frac{K}{(s-1)(s+1-\mathrm{j}2)(s+1+\mathrm{j}2)}$$

开环转移函数的极点为

$$p_1=1,\quad p_2=-1+\mathrm{j}2,\quad p_3=-1-\mathrm{j}2$$

根轨迹渐近线与实轴的交角为

$$\theta = \frac{k\pi}{3},\quad k = 1,3,5$$

故交角　　$\theta=\frac{\pi}{3},\quad \pi,\quad \frac{5}{3}\pi$

根轨迹渐近线的重心坐标为

$$\sigma_0 = \frac{1 - 1 + \mathrm{j}2 - 1 - \mathrm{j}2}{3} = -\frac{1}{3}$$

开环增益复极点的偏离角为

$$\varphi_2=-\arg(p_2-p_1)-\arg(p_2-p_3)+180^\circ=-135^\circ-90^\circ+180^\circ=-45^\circ$$

由对称性可知　　$\varphi_3=45^\circ$

从两复极点出发的根轨迹与实轴无交点

$$1 + GH = 1 + \frac{K}{(s-1)(s^2+2s+5)} = 0$$

特征方程为　　$s^3+s^2+3s+K-5=0$

令 $s=\mathrm{j}\omega$，则有

$$-\omega^2+\alpha-5-\mathrm{j}\omega(\omega^2-3)=0$$

由虚部为零可得$\omega_1=0$，$\omega_{2,3}=\pm\sqrt{3}$为根轨迹与$\mathrm{j}\omega$轴的交点。根轨迹图如图 6-38 所示。

令实部为零，$\omega_1=0$，则

$$-\omega_1^2+K-5=0\Rightarrow K=5$$

令实部为零，$\omega_{2,3}=\pm\sqrt{3}$，则

$$-\omega^2+K-5=0\Rightarrow K=8$$

所以当$K=5$和$K=8$时系统边界稳定。

由于p_1支根轨迹的ω、K由$0\to\infty$，由$RHP\to LHP$，所以$K<5$，根轨迹p_1支在RHP，$K>5$，根轨迹p_1在LHP。(注：RHP为右半平面，LHP为左半平面。)

同理，p_2，p_3两支根轨迹由$LHP\to$(与$\mathrm{j}\omega$交点)$\to RHP$，对应K由$K<8\to K=8\to K>8$，所以当$5<K<8$时系统稳定；当$K<5$，$K>8$时系统不稳定；当$K=5$，$K=8$时系统临界稳定，振荡频率$\omega=0$，$\omega=\sqrt{3}$。

用罗斯-霍维茨判据核对：

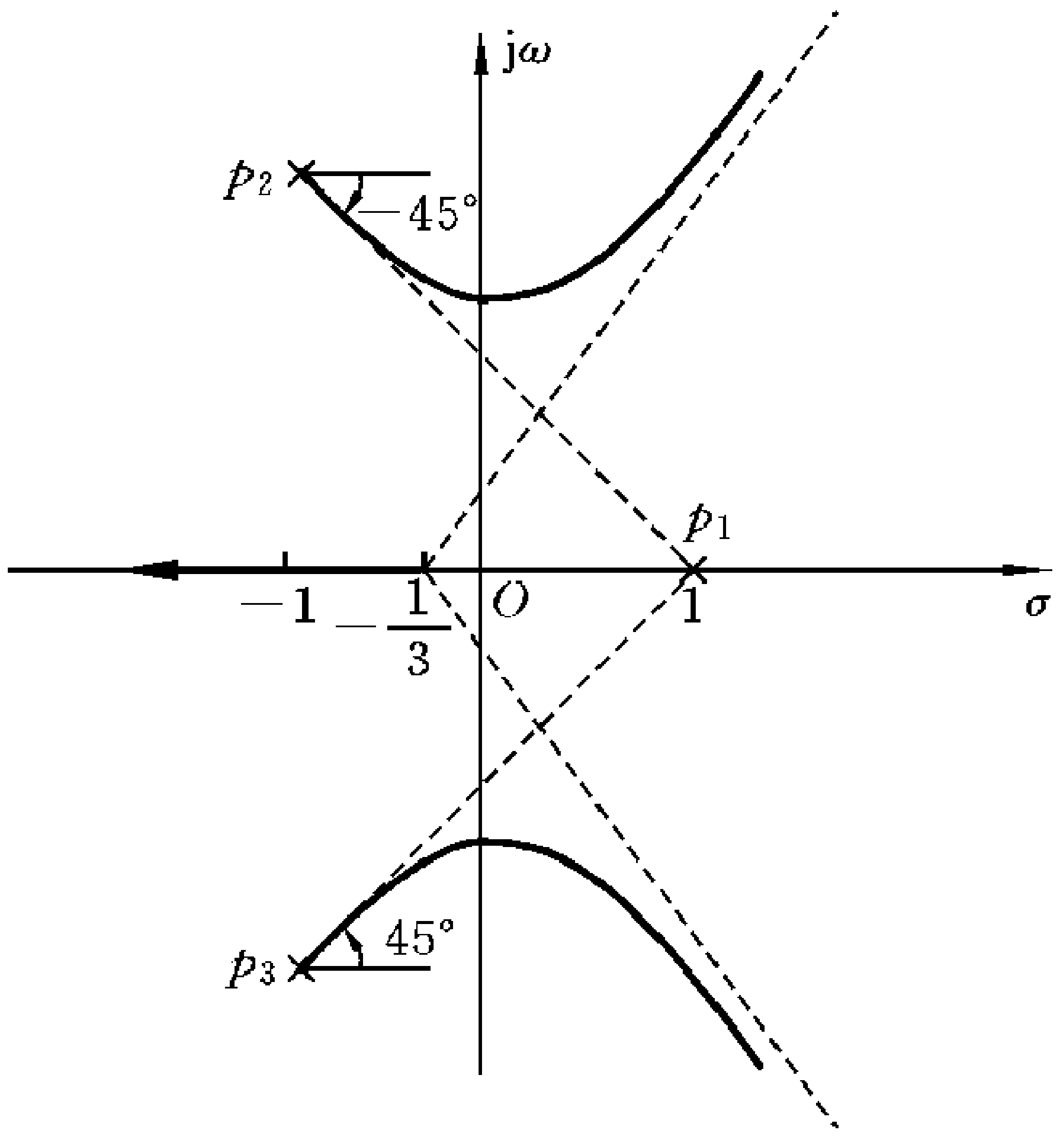


图 6-38

系统特征方程为　　$s^3+s^2+3s+K-5=0$

R-H 阵为

s^3	1	3
s^2	1	$K-5$
s^1	$8-K$	0
s^0	$K-5$	0

由罗斯-霍维茨判据可知，要系统稳定，必有$\begin{cases}8-K>0\\K-5>0\end{cases}$，所以当$5<K<8$时，系统稳定与根轨迹判断相一致。

【6-22】 如在图6-37上的反馈支路中加入一个转移函数为$H(s)=2s+1$的反馈网络，试作根轨迹图，分析系统稳定性改善的情况。

解　由题可知，开环转移函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K(2s+1)}{(s-1)(s^2+2s+5)}$$

开环转移函数的零点为$z_1=-\dfrac{1}{2}$，极点为$p_2=1$，$p_3=-1+\mathrm{j}2$，$p_4=-1-\mathrm{j}2$。根轨迹与实轴的交角为

$$\theta = \frac{k\pi}{n-m} \quad (k=1,3,\quad n-m=2)$$

由此可知
$$\theta = \frac{\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{2}$$

根轨迹渐近线的重心坐标为

$$\sigma_0 = \frac{\sum p_i - \sum q_i}{n-m} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$$

开环增益复极点的偏移角为

$$\varphi_3 = \arg[p_3 - z_1] - \arg[p_3 - p_2] - \arg[p_3 - p_4] + 180° = 59°$$

由对称性可知
$$\varphi_4 = -59°$$

根轨迹如图6-39所示，由根轨迹p_3、p_4两支可知其渐近线为$\sigma_0=-\frac{1}{4}$，是与jω轴平行的直线，可见它不能进入RHP，消除了图6-37系统中$\omega=\pm j\sqrt{3}$的振荡。根轨迹p_2一支在$K>5$时开始进入LHP，所以只要$K>5$，系统总是稳定的。

用罗斯-霍维茨判据核对：

$$1+GH = s^3+s^2+3s+2Ks+K-5 = 0$$

R-H 阵为

s^3	1	$3+2K$
s^2	1	$K-5$
s^1	$8+K$	0
s^0	$K-5$	0

要系统稳定必有

$$\begin{cases} 8+K>0 \\ K-5>0 \end{cases},\quad 即 \quad \begin{cases} K>-8 \\ K>5 \end{cases}$$

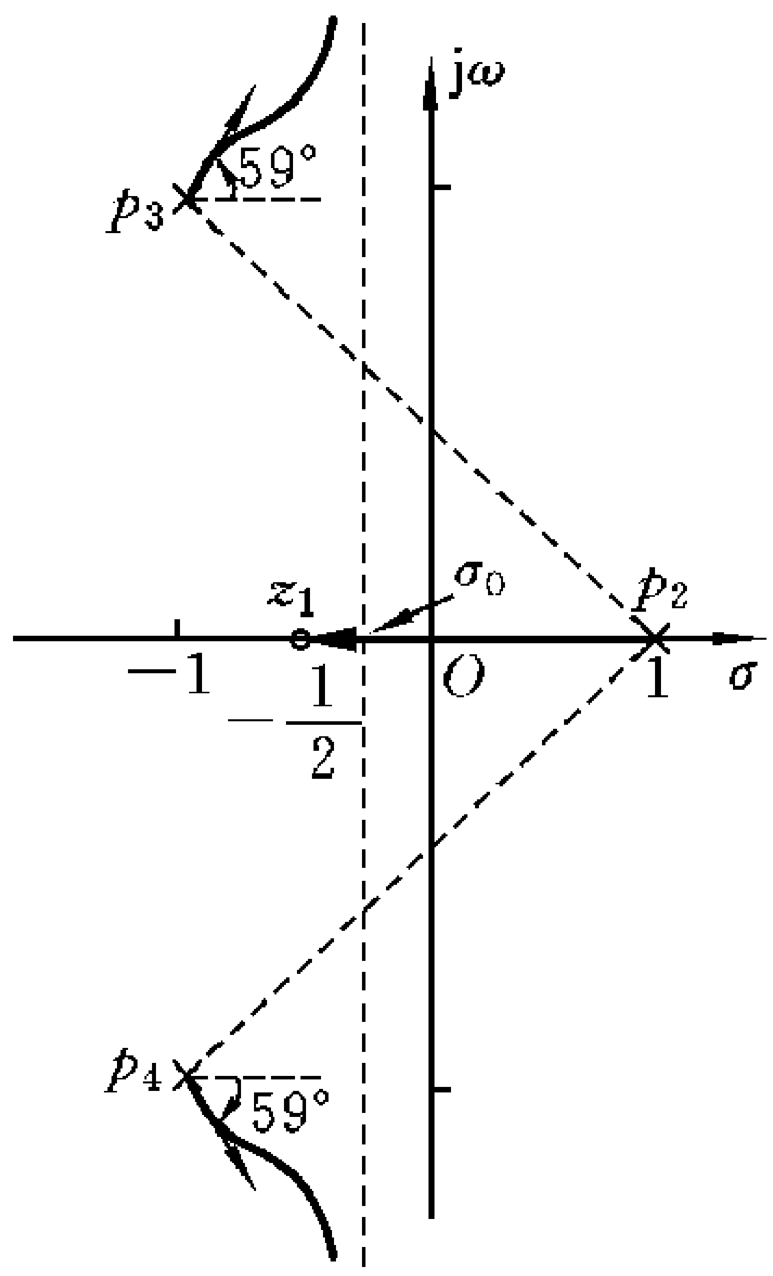


图6-39

故$K>5$时系统稳定。

【6-23】 一反馈系统如图6-40所示，试用罗斯-霍维茨判据，奈奎斯特判据及根轨迹图三种方法确定系统稳定的K值范围。

解　由系统框图可知，

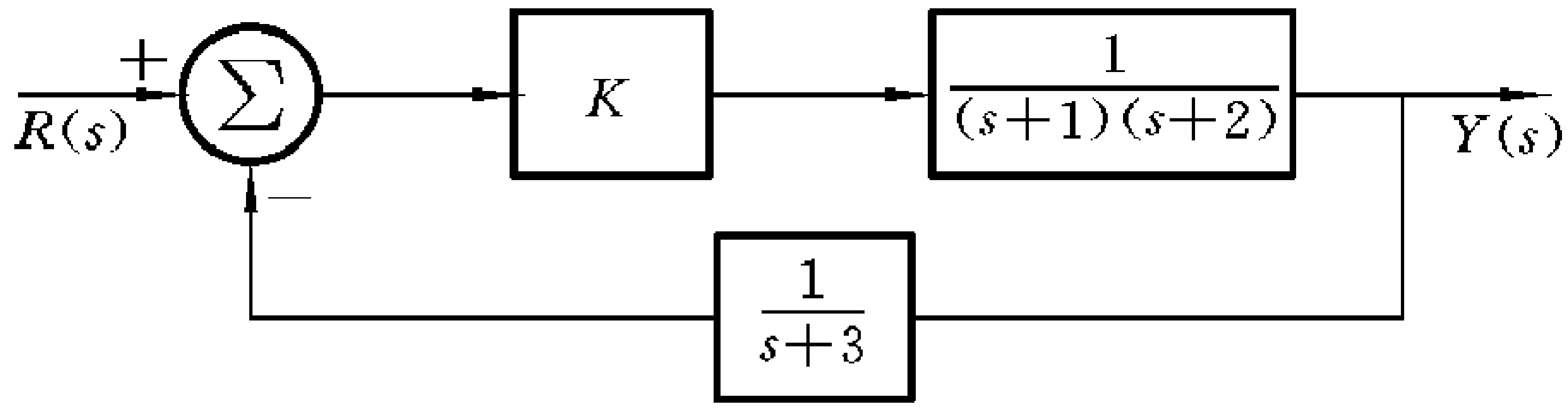


图 6-40

$$G(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)},\quad H(s)=\frac{1}{s+3}$$

此反馈系统的系统函数为

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}=\frac{\dfrac{K}{(s+1)(s+2)}}{1+\dfrac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}}$$

$$=\frac{K(s+3)}{s^3+6s^2+11s+6+K}$$

(1) 用罗斯-霍维茨判据。

系统特征方程为

$$s^3+6s^2+11s+6+K=0$$

R-H 阵为

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 6 & 6+K \\ s^1 & \dfrac{60-K}{6} & 0 \\ s^0 & 6+K & 0 \end{array}$$

要系统稳定则必有

$$\begin{cases}60-K>0\\6+K>0\end{cases},\quad 即\quad \begin{cases}K<60\\K>-6\end{cases}$$

由于 K 为正值,所以当 $0<K<60$ 时系统稳定。

(2) 用奈奎斯特图。

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

$$=\frac{-K}{6(\omega^2-1)+\mathrm{j}\omega(\omega^2-11)}$$

当 $\omega=0$ 时，　　$GH=\frac{K}{6}\approx 0.17K$

当 $\omega=1$ 时，　　$GH=-\mathrm{j}0.1K$

当 $\omega=\sqrt{11}$ 时，　　$GH=-\frac{K}{60}$

当 $\omega\to\infty$ 时，　　$GH\to 0$

当 ω 由 $-\infty\to 0$ 时，奈奎斯特图则以 $\mathrm{Re}[GH]$ 为轴成镜像对称。

由奈奎斯特判据可得奈奎斯特图，如图 6-41 所示。

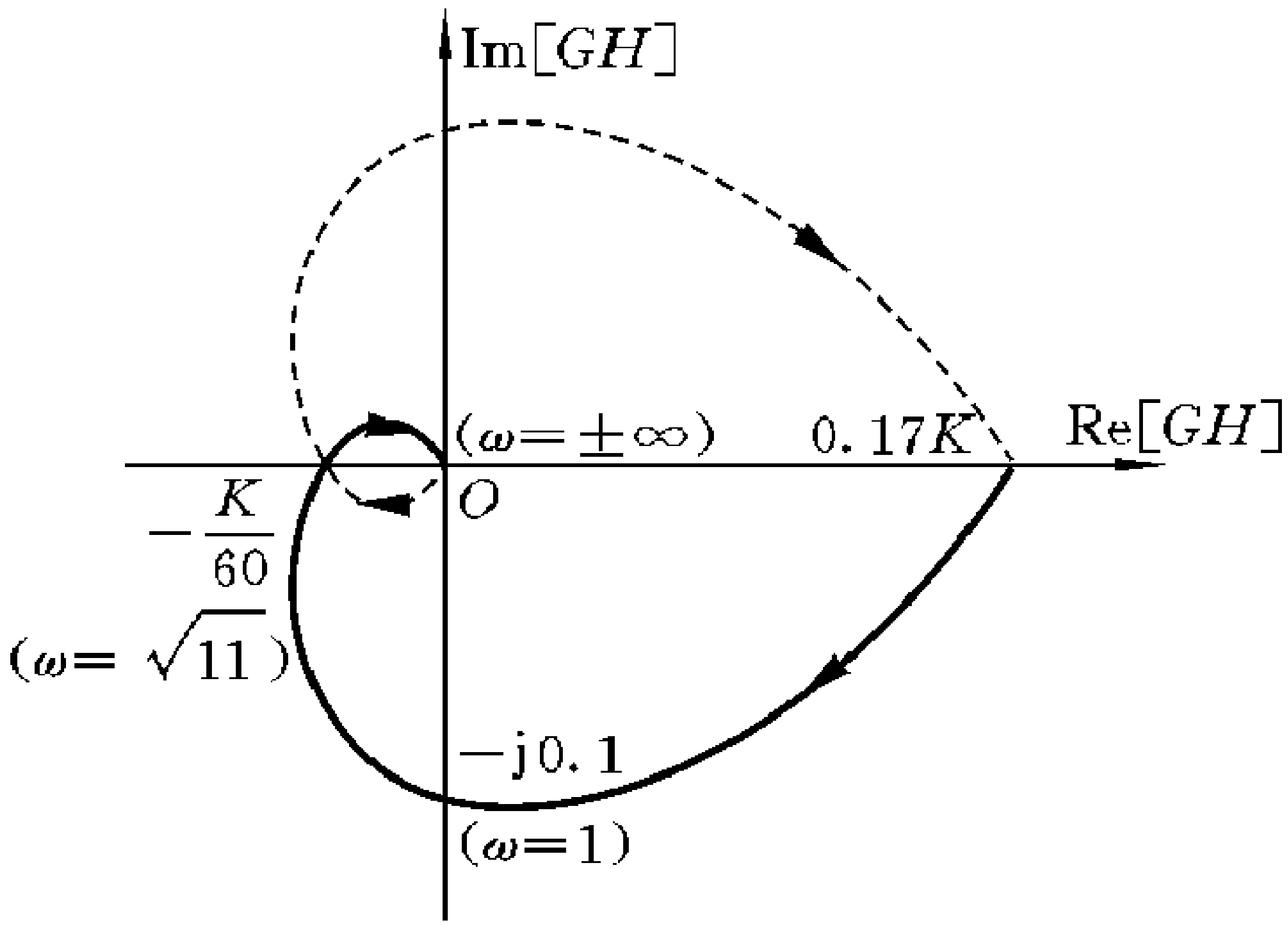


图 6-41

由 $|GH|=\left|\frac{K}{60}\right|<1$ 得，$0<K<60$，系统稳定；$K=60$，$GH=-1$，系统不稳定；$K>60$，$GH<-1$，系统不稳定。

(3) 用根轨迹图。

开环转移函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

开环转移函数极点为

$$p_1=-1,\quad p_2=-2,\quad p_3=-3$$

根轨迹与实轴的交角为

$$\theta=\frac{k\pi}{n-m}(k=1,3,5)$$

可知
$$\theta=\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5}{3}\pi$$

根轨迹渐近线的重心坐标为
$$\sigma_0=-\frac{(1+2+3)}{3}=-2$$

令
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[G(s)H(s)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right]=0$$

即
$$-K(3s^2+12s+11)=0$$

方程根为 $s_{1,2}=-2\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，即
$$s_1\approx-1.42,\quad s_2\approx-2.58$$

由于 $s_2=-2.58$ 的右端零极点数为偶数，故 $s_2=-2.58$ 不在根轨迹上，所以 $s_1=-1.42$ 为根轨迹的交点。由
$$1+GH=1+\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}=0$$

可得特征方程为
$$s^3+6s^2+11s+6+K=0$$

令 $s=\mathrm{j}\omega$，可得
$$-6\omega^2+6+K-\mathrm{j}\omega(\omega^2-11)=0$$

可知 $\omega_1=0$，$\omega_2=\sqrt{11}\approx3.32$，$\omega_3=-\sqrt{11}\approx-3.32$ 为根轨迹与 $\mathrm{j}\omega$ 轴的交点。

根轨迹如图 6-42 所示，由相位条件知，p_3 支根轨迹由 $-3\to-\infty$，所以 ω_1 不存在。由以上特征方程可知，在 $\omega=\pm\sqrt{11}$ 时实部 $=-6\omega_{2,3}^2+6+K=0$，可得 $K=60$，所以当 $K=60$ 时系统临界稳定。当 $K>60$ 时，p_1，p_2 支根轨迹到 RHP，系统不稳定。当 $K<60$ 时，三支根轨迹位于 LHP，此时系统稳定。

所以，以上三种判别方法所得结果完全一致，即当 $0<K<60$ 时，系统稳定。

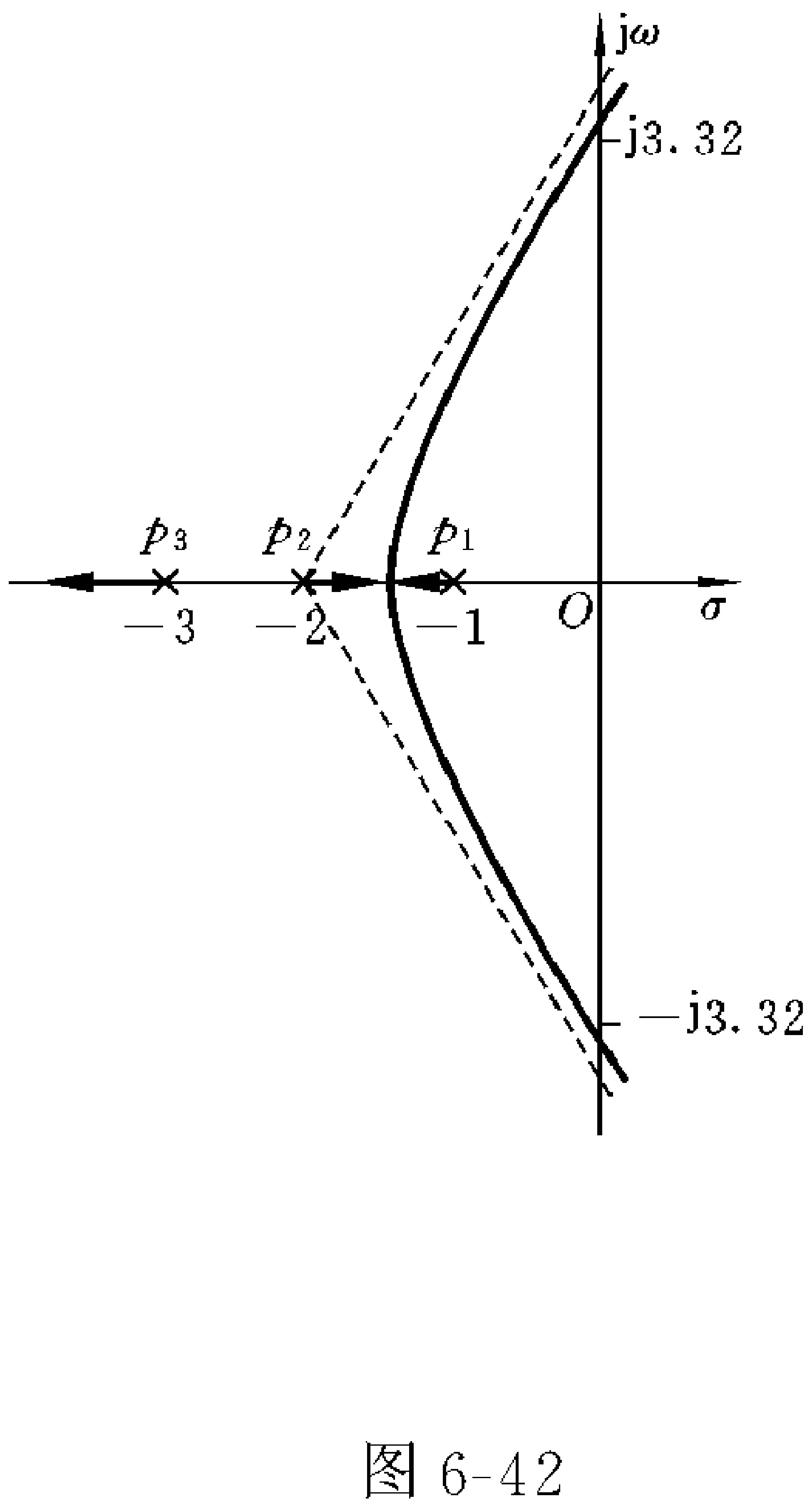


图 6-42

第七章　离散时间系统的时域分析

7-1　基 本 要 求

熟练掌握典型序列的性质、序列的运算。深刻理解线性系统全响应的可分解性，熟练掌握零输入响应、单位样值响应和零状态响应的时域求解方法。要牢固掌握将系统等效为一个差分方程、一个差分算子和单位样值响应的方法。要深刻理解抽样定理的内容，抽样信号频谱与原信号频谱之间的关系。本章重点掌握香农抽样定理，根据系统差分方程画系统模拟框图，根据模拟框图列写差分方程。

7-2　重点、难点学习指导

1．常用序列之间的关系

$$\delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)$$

$$\varepsilon(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(k-n)$$

2．离散信号的卷积和

(1) 定义

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_1(i) f_2(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_2(i) f_1(k-i)$$

式中，$f_1(k)$和$f_2(k)$为一般序列。

当$f_1(k)$和$f_2(k)$都是因果序列时，

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=0}^{k} f_1(i) f_2(k-i)$$

当$f_1(k)$是因果序列，$f_2(k)$是一般序列时，

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_1(i) f_2(k-i)$$

当 $f_1(k)$ 是一般序列，$f_2(k)$ 是因果序列时，

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} f_1(i) f_2(k-i)$$

(2) 性质

① 交换律：

$$f_1(k) * f_2(k) = f_2(k) * f_1(k)$$

② 结合律：

$$[f_1(k) * f_2(k)] * f_3(k) = f_1(k) * [f_2(k) * f_3(k)]$$

③ 分配律：

$$[f_1(k) + f_2(k)] * f_3(k) = f_1(k) * f_3(k) + f_2(k) * f_3(k)$$

④ 卷积和的求和：

$$\sum_{i=-\infty}^{k} [f_1(i) * f_2(i)] = \left[\sum_{i=-\infty}^{k} f_1(i)\right] * f_2(k) = f_1(k) * \left[\sum_{i=-\infty}^{k} f_2(i)\right]$$

⑤ $f(k)$ 与 $\delta(k)$ 的卷积和：

$$\begin{cases} f(k) * \delta(k) = f(k) f(k) * \delta(k-n) = f(k-n) \\ f(k) * \delta(k+n) = f(k+n) \\ f(k-n_1) * \delta(k-n_2) = f(k-n_1-n_2) \end{cases}$$

⑥ $f(k)$ 与 $\varepsilon(k)$ 的卷积和：

$$\begin{cases} f(k) * \varepsilon(k) = \sum\limits_{i=-\infty}^{k} f(i) \\ f(k) * \varepsilon(k-n) = \sum\limits_{i=-\infty}^{k-n} f(i) = \sum\limits_{i=-\infty}^{k} f(i-n) \end{cases}$$

⑦ 位移序列的卷积和：

$$\begin{cases} f_1(k) * f_2(k-n) = f_1(k-n) * f_2(k) \\ f_1(k) * f_2(k+n) = f_1(k+n) * f_2(k) \end{cases}$$

3. 抽样定理

香农抽样定理：为了能从抽样信号 $f_s(t)$ 中恢复出信号 $f(t)$，必须满足两个条件：

① 被抽样的信号 $f(t)$必须是限带信号，其带宽为 ω_m(或 f_m)；

② 抽样频率 $\omega_s \geqslant 2\omega_m$(或 $f_s \geqslant 2f_m$)，或抽样间隔 $T_s \leqslant \frac{1}{2f_m} = \frac{\pi}{\omega_m}$。其最低允许抽样频率 $f_N = 2f_m$ 或 $\omega_N \geqslant 2\omega_m$ 称为奈奎斯特频率，其最大允许抽样间隔 $T_N = \frac{1}{2f_m} = \frac{\pi}{\omega_m}$称为奈奎斯特抽样间隔。

4. 系统全响应的求解

与连续时间系统时域分析一样，离散时间系统时域分析也有经典法和卷积求和法。经典法就是直接求解描述系统输入输出关系的差分方程式的方法。而卷积求和法是利用卷积求和求系统零状态响应的方法。

系统全响应可按以下三种方式分解：

① 全响应 $y(k)$ = 零输入响应 $y_{zi}(k)$ + 零状态响应 $y_{zs}(k)$；

② 全响应 $y(k)$ = 自由响应 + 强迫响应；

③ 全响应 $y(k)$ = 瞬态响应 + 稳态响应。

对于系统全响应的求解方法，学生应该重点掌握由零输入响应 $y_{zi}(k)$和零状态响应 $y_{zs}(k)$来求全响应。这可归纳为如下过程：

① 根据系统建立差分方程；

② 根据差分方程求算子方程；

③ 令算子方程的左边等于 0，得到特征方程，并求特征根；

④ 由特征根求系统零输入响应 $y_{zi}(k)$；

⑤ 由算子方程求冲激响应 $h(k)$；

⑥ 求系统零状态响应 $y_{zs}(k) = e(k) * h(k)$；

⑦ 求系统全响应 $y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k)$。

7-3　习 题 详 解

【7-1】 绘出下列离散信号的图形。

(1) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}\varepsilon(k)$　　(2) $2\delta(k) - \varepsilon(k)$

(3) $\varepsilon(k) + \sin\frac{k\pi}{8}\varepsilon(k)$　　(4) $k(2)^{-k}\varepsilon(k)$

解　(1) 因为当$k \geqslant 0$时，$\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}$是一个以4为首项，以$-\frac{1}{2}$为公比的等比序列；当$k<0$时，

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}\varepsilon(k)=0$$

所以离散信号$\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}\varepsilon(k)$的图形如图7-1所示。

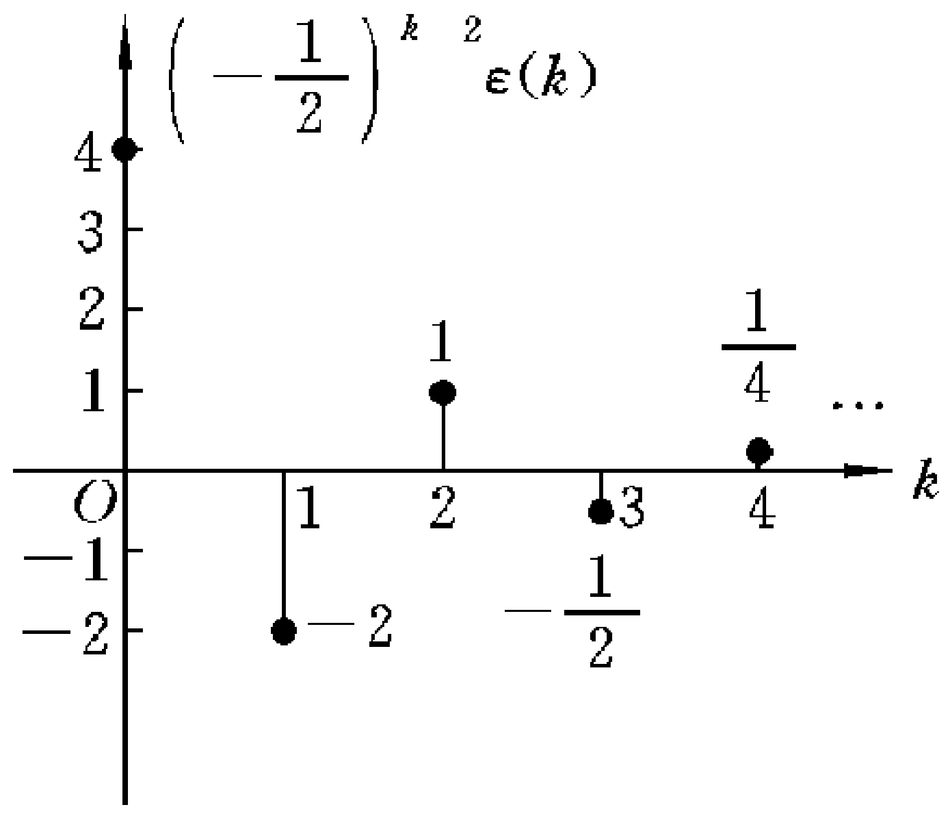


图 7-1

(2) 因为当$k<0$时，　$2\delta(k)-\varepsilon(k)=0$

当$k=0$时，　$2\delta(k)-\varepsilon(k)=2-1=1$

当$k \geqslant 1$时，　$2\delta(k)-\varepsilon(k)=0-1=-1$

所以离散信号$2\delta(k)-\varepsilon(k)$的图形如图7-2所示。

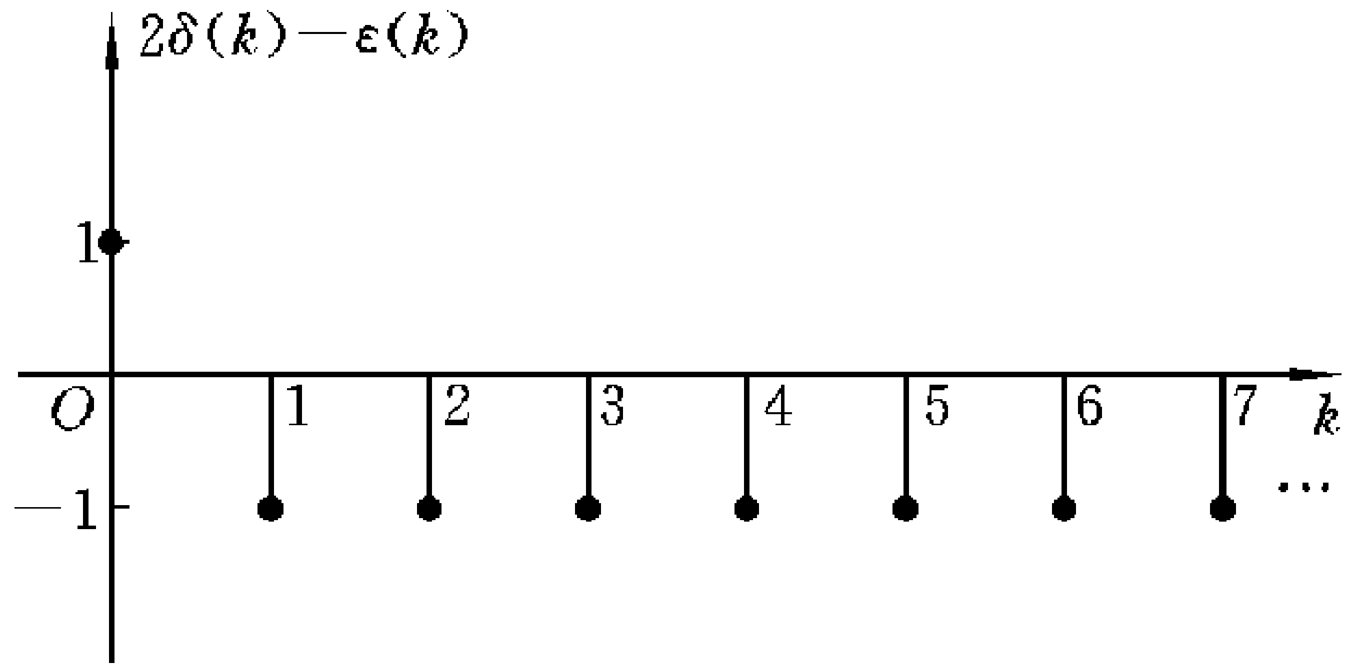


图 7-2

(3) 因为当$k<0$时，

$$\varepsilon(k)+\sin\frac{k\pi}{8}\varepsilon(k)=0$$

当$k \geqslant 0$时，该信号图形为$\sin\frac{k\pi}{8}$的图形向上平移一个单位。所以离散信号$\varepsilon(k)+\sin\frac{k\pi}{8}\varepsilon(k)$的图形如图7-3所示。

(4) 因为当$k \leqslant 0$时，

$$k(2)^{-k}\varepsilon(k)=0$$

当$k>0$时，即为$k(2)^{-k}$的图形。所以离散信号$k(2)^{-k}\varepsilon(k)$的图形如图7-4所示。

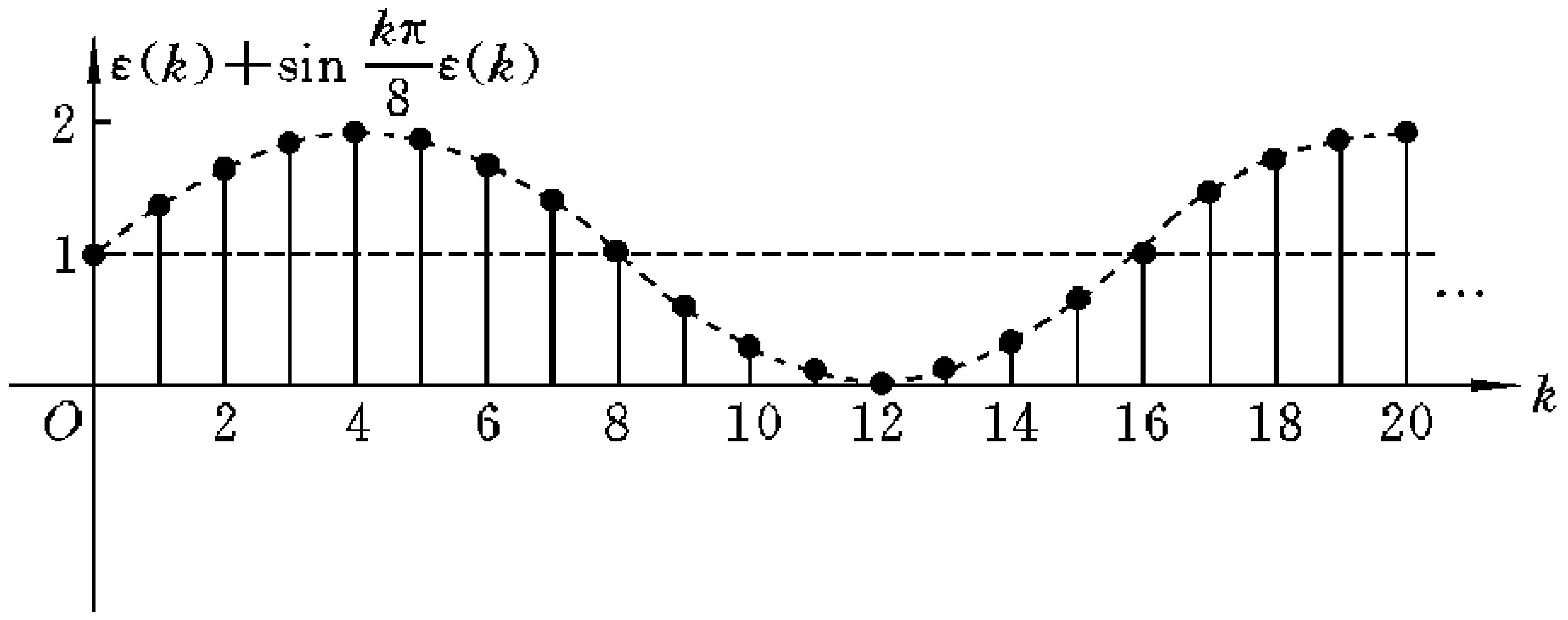


图 7-3

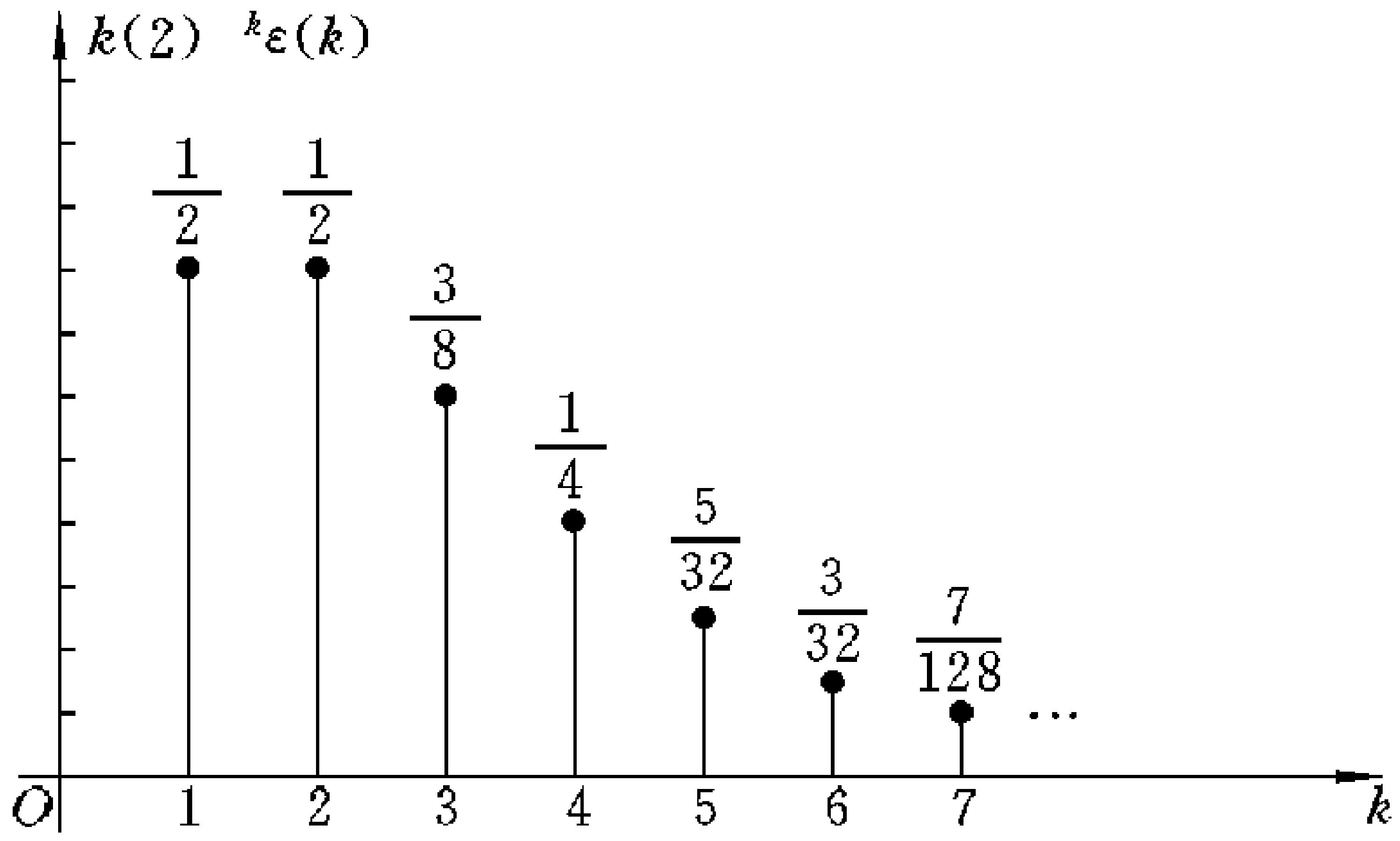


图 7-4

【7-2】 绘出下列离散信号的图形。

(1) $k[\varepsilon(k+4)-\varepsilon(k-4)]$　　　　(2) $1-\varepsilon(k-4)$

(3) $2^k[\varepsilon(-k)-\varepsilon(3-k)]$　　　　(4) $(k^2+k+1)[\delta(k+1)-2\delta(k)]$

解　(1) 因为

$$\varepsilon(k+4)-\varepsilon(k-4)=\begin{cases}1, & -4\leqslant k\leqslant 3\\ 0, & k<-4 \text{ 或 } k>3\end{cases}$$

所以离散信号 $k[\varepsilon(k+4)-\varepsilon(k-4)]$ 的图形如图 7-5 所示。

(2) 因为

$$\varepsilon(k-4)=\begin{cases}1, & k\geqslant 4\\ 0, & k<4\end{cases}$$

所以离散信号 $1-\varepsilon(k-4)$ 的图形如图 7-6 所示。

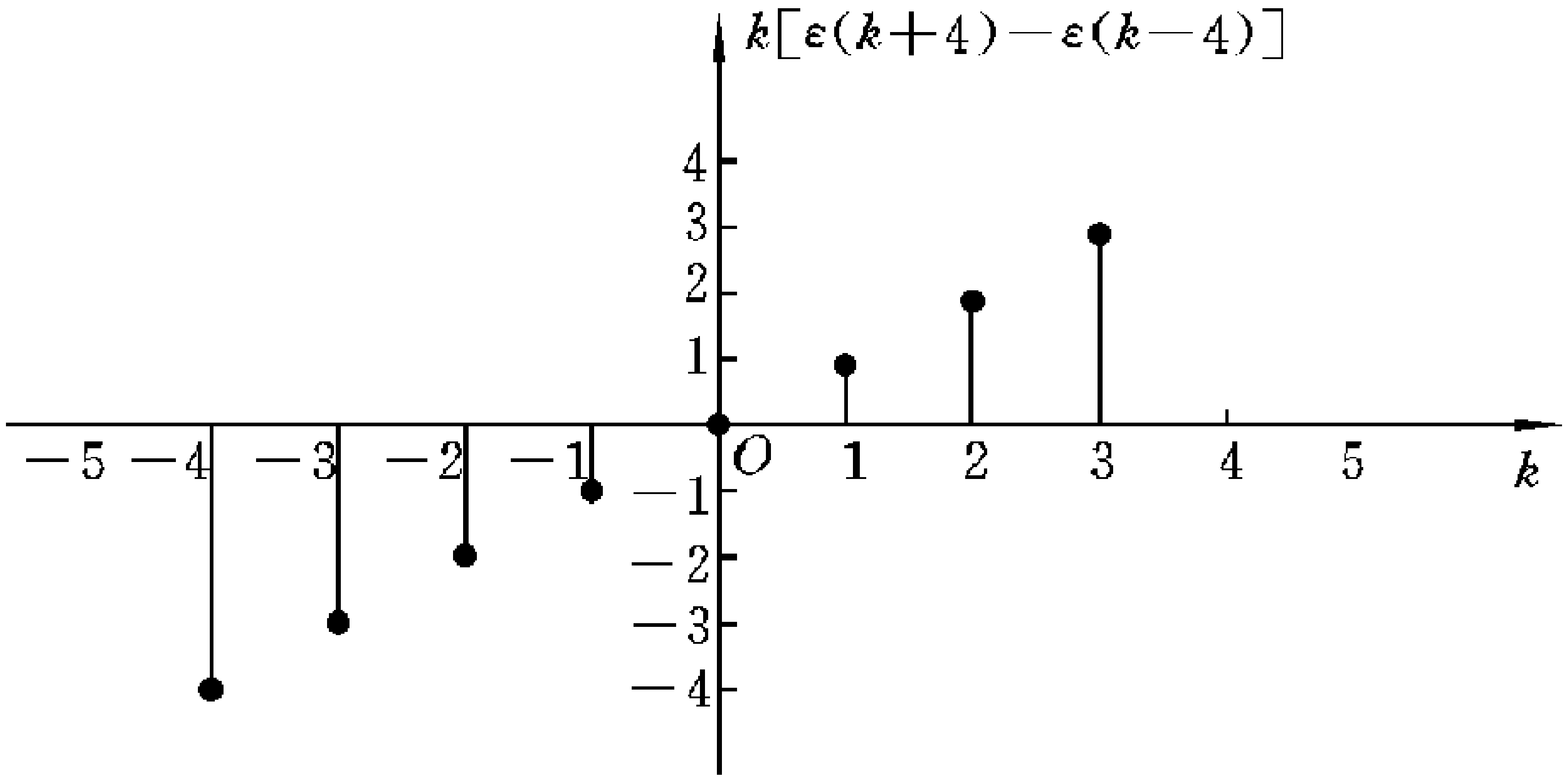


图 7-5

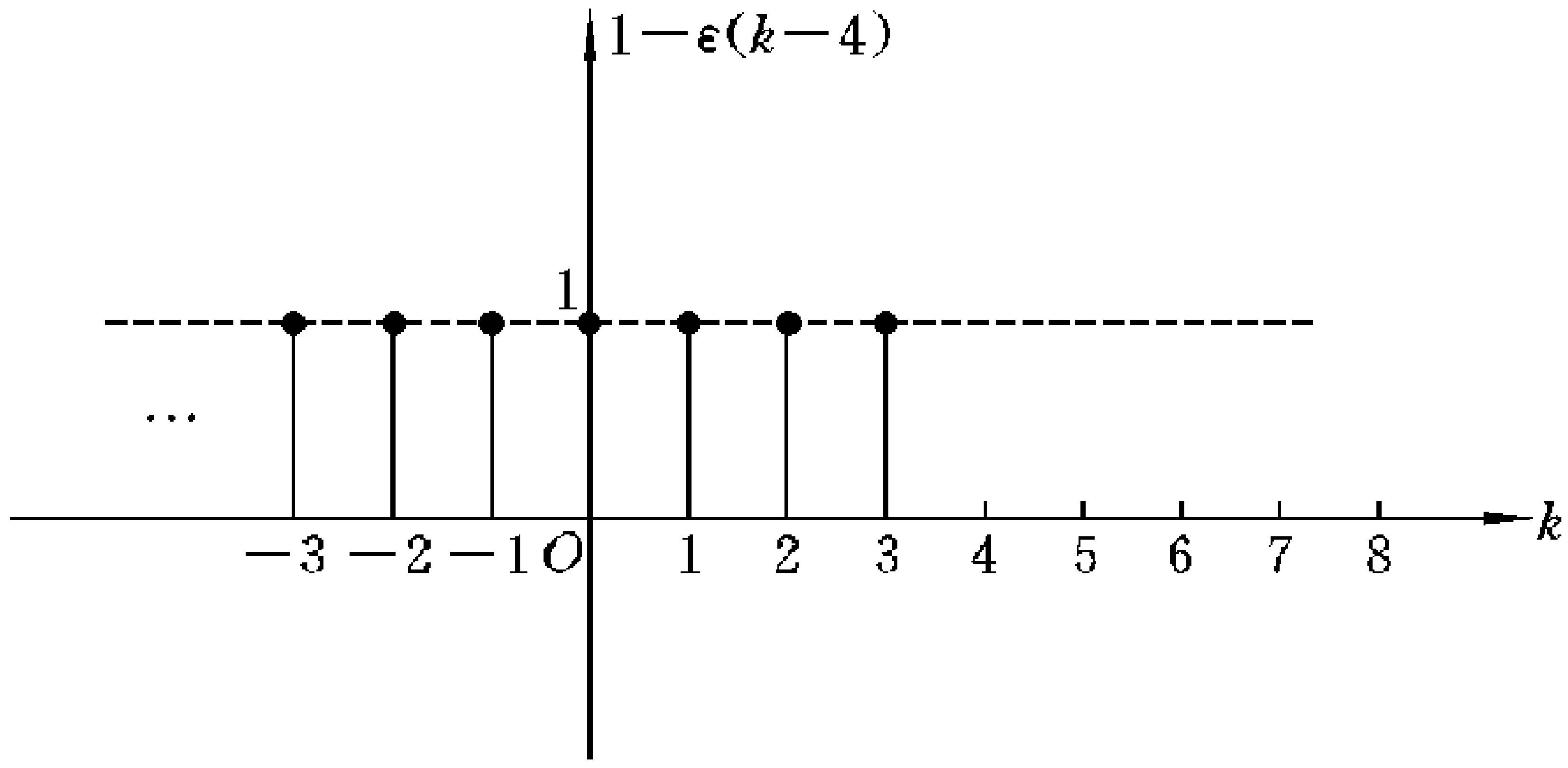


图 7-6

(3) 因为

$$\varepsilon(-k)-\varepsilon(3-k)=\begin{cases}-1, & 0<k\leqslant 3\\ 0, & k\leqslant 0 \text{ 或 } k>3\end{cases}$$

所以离散信号 $2^k[\varepsilon(-k)-\varepsilon(3-k)]$的图形如图 7-7 所示。

(4) 因为

$$\delta(k+1)-2\delta(k)=\begin{cases}-2, & k=0\\ 1, & k=-1\\ 0, & k>0 \text{ 或 } k<-1\end{cases}$$

所以离散信号$(k^2+k+1)[\delta(k+1)-2\delta(k)]$的图形如图 7-8 所示。

【7-3】 写出图 7-9 所示序列的函数表达式。

解 (a) 由图 7-9(a)可知序列仅在区间[0,4]上函数值为 2,故图 7-9(a)

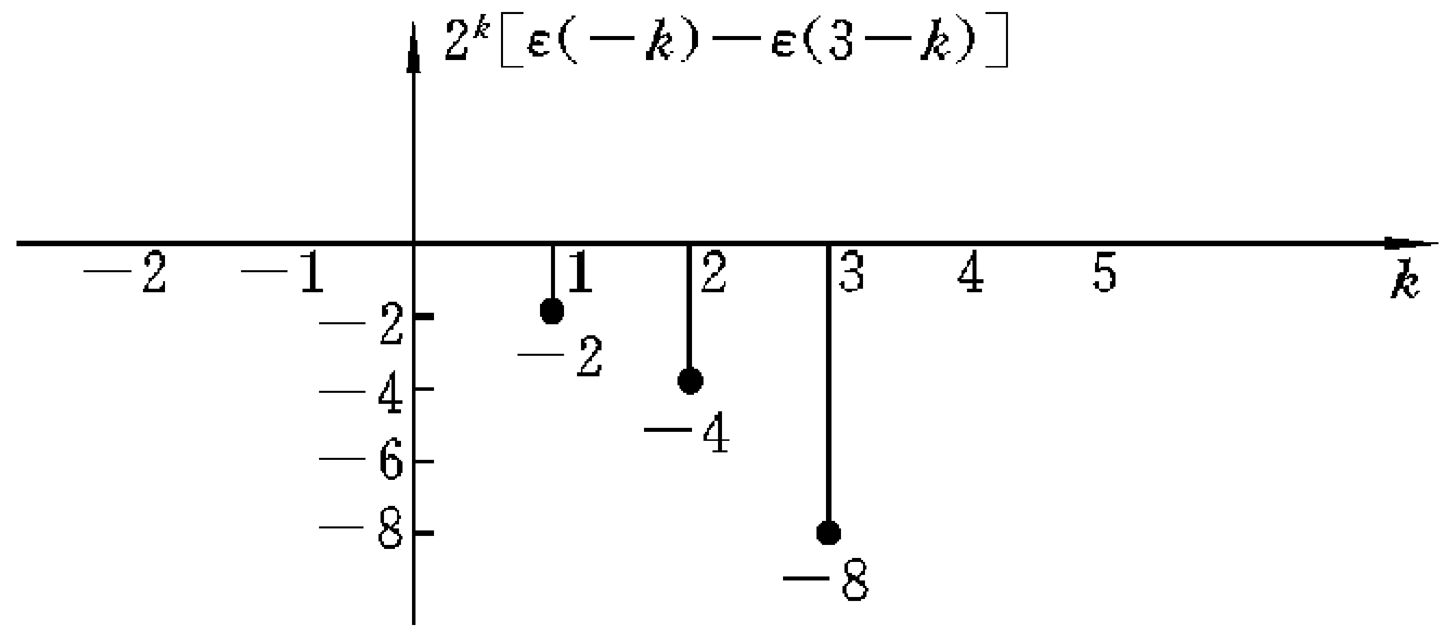


图 7-7

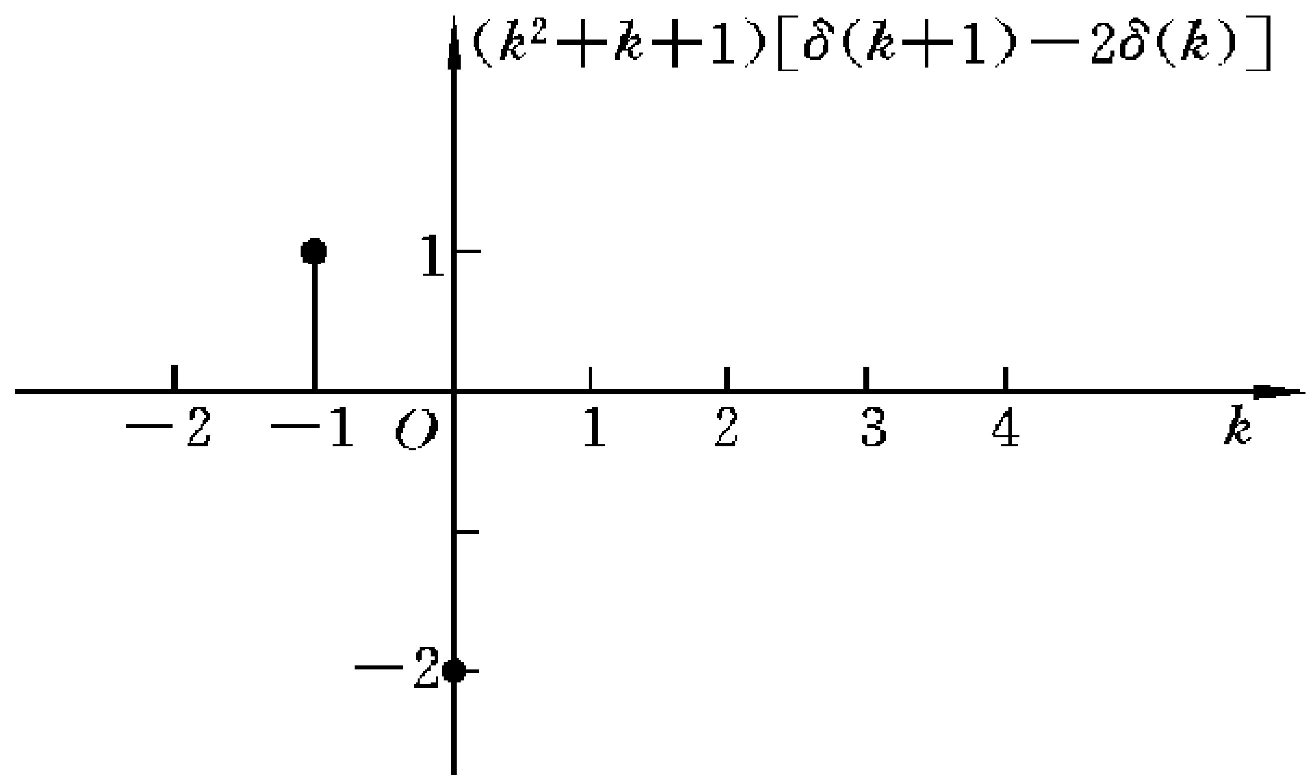


图 7-8

所示序列的函数表达式为

$$f(k)=2[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-5)]$$

(b) 由图7-9(b)可知该序列是一个以$\frac{1}{2}$为首项，以$\frac{1}{2}$为公差的等差右边序列，故图 7-9(b)所示序列的函数表达式为

$$f(k)=\frac{1}{2}(k+1)\varepsilon(k)$$

(c) 由图7-9(c)可知该序列在区间$[-3,-1]$上值为1，$[1,3]$上值为-1，故图 7-9(c)所示序列的函数表达式为

$$f(k)=-[\varepsilon(k-1)-\varepsilon(k-4)]+[\varepsilon(-k-1)-\varepsilon(-k-4)]$$

(d) 由图 7-9(d)可知该序列在区间$[-3,-1]$上值满足表达式$8+2k$，在区间$[1,3]$上满足表达式$8-2k$，且$k=0$ 时值为6，故图7-9(d)所示序列的函数表达式为

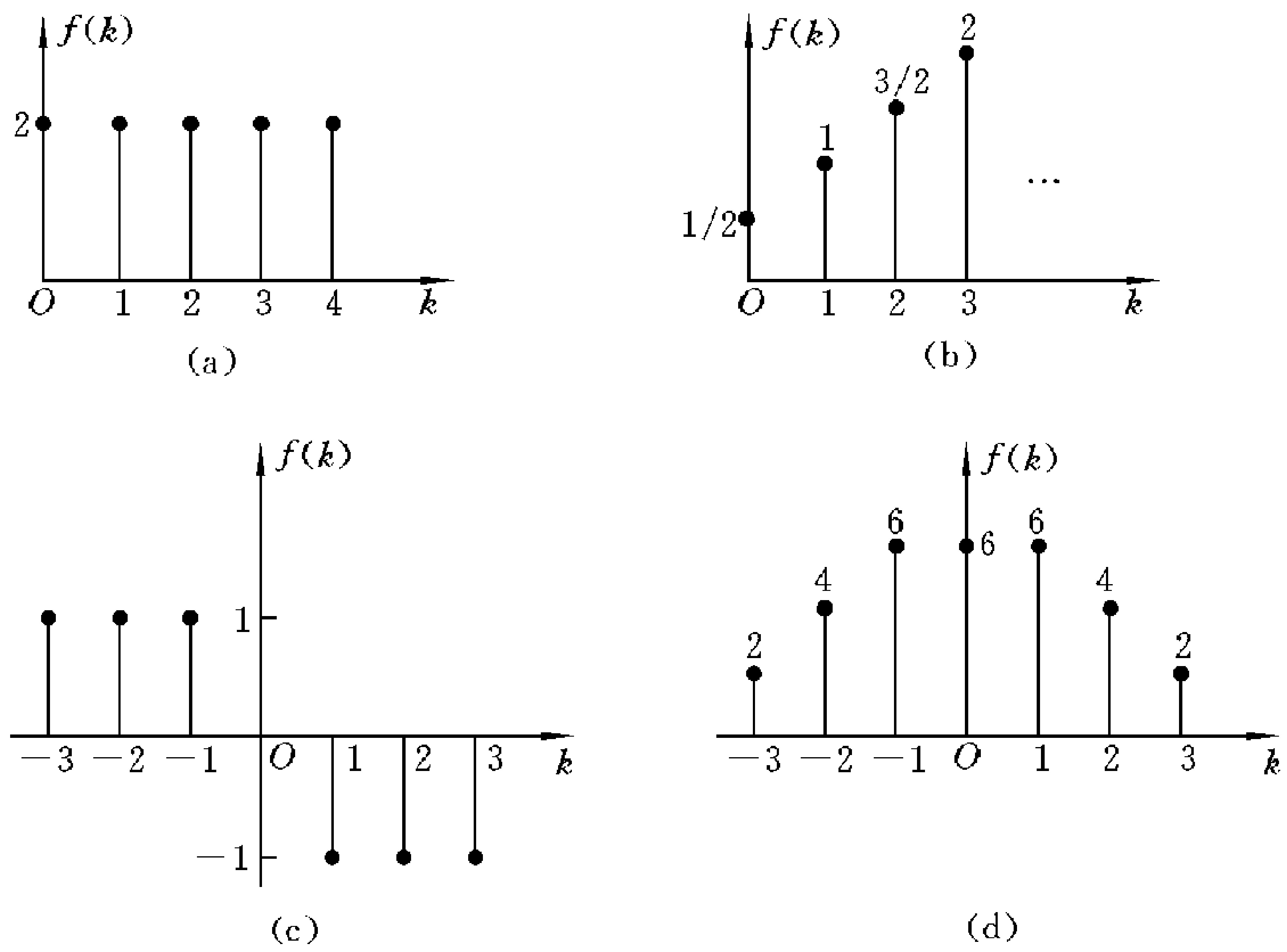


图 7-9

$$f(k)=(8-2k)[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-4)]-2\delta(k)$$
$$+(8+2k)[\varepsilon(-k-1)-\varepsilon(-k-4)]$$

【7-4】 用归纳法写出下列右边序列的闭式。

(1) $\{1,-1,1,-1,\cdots\}$

(2) $\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots\right\}$

(3) $\{-2,-1,2,7,14,23,\cdots\}$

(4) $\{3^2+8,5^2+11,7^2+14,9^2+17,\cdots\}$

解 (1) 由于该序列中 1 与 −1 交替出现，满足$(-1)^k$，故该序列的闭式为

$$y(k)=(-1)^k\varepsilon(k)$$

(2) 由于该序列满足$\frac{k}{k+1}$，故该序列的闭式为

$$y(k)=\frac{k}{k+1}\varepsilon(k)$$

(3) 由于该序列满足k^2-2，故该序列的闭式为

$$y(k)=(k^2-2)\varepsilon(k)$$

(4) 由于该序列满足$(3+2k)^2+3(3+k)-1$,故该序列的闭式为

$$y(k)=(4k^2+15k+17)\varepsilon(k)$$

【7-5】 判断下列信号是否是周期性信号,如果是则其周期为多少?

(1) $\sin(k)$　　(2) $e^{j0.4\pi k}$

(3) $\sin(0.2\pi k)+\cos(0.3\pi k)$　　(4) $\cos(0.512\pi k)$

(5) $\mathrm{sgn}[(-0.23)^k]$　　(6) $\sin(\pi k)\varepsilon(k)$

解　(1) 因为$\sin(k+T)=\sin k\Rightarrow T=2\pi n$(不为整数)

所以$\sin k$是非周期性信号。

(2) 因为$e^{j0.4\pi k}=\cos(0.4\pi k)+j\sin(0.4\pi k)$

$$\cos[0.4\pi(k+T)]=\cos(0.4\pi k)\Rightarrow 0.4\pi T$$
$$=2\pi n\Rightarrow T=5n\Rightarrow \text{当 } n=1 \text{ 时},T=5$$

同理$\sin(0.4\pi k)$的周期为5。所以$e^{j0.4\pi k}$是周期性信号,周期为5。

(3) 因为$\sin[0.2\pi(k+T)]=\sin(0.2\pi k)\Rightarrow 0.2\pi T=2\pi n\Rightarrow T=10n\Rightarrow$当$n=1$时,$T=10$。

$$\cos[0.3\pi(k+T)]=\cos(0.3\pi k)\Rightarrow 0.3\pi T=2\pi n\Rightarrow T$$
$$=\frac{20n}{3}\Rightarrow \text{当 } n=3 \text{ 时},T=20$$

所以$\sin(0.2\pi k)+\cos(0.3\pi k)$是周期性信号,周期为20。

(4) 因为$\cos[0.512\pi(k+T)]=\cos(0.512\pi k)\Rightarrow 0.512\pi T=2\pi n\Rightarrow T=\frac{125n}{32}\Rightarrow$当$n=32$时,$T=125$。所以$\cos(0.512\pi k)$是周期性信号,周期为125。

(5) 因为　$$\mathrm{sgn}[(-0.23)^k]=\begin{cases}1, & k=2n\\ -1, & k=2n+1\end{cases}$$

所以$\mathrm{sgn}[(-0.23)^k]$是周期性信号,周期为2。

(6) 因为$\varepsilon(k)$是非周期性信号,所以$\sin(\pi k)\varepsilon(k)$是非周期性信号。

【7-6】 一个有限长连续时间信号,时间长度为2 min,频谱包含有直流至100 Hz分量的连续时间信号。为便于计算机处理,对其取样以构成离散信号,求最小的理想取样点数。

解　　$f_m=100$ Hz

$$f_{\text{smin}} = 2f_{\text{m}} = 200\ \text{Hz}$$

$$T_{\text{smax}} = \frac{1}{f_{\text{smin}}} = \frac{1}{200}\ \text{s}$$

最小理想取样点数

$$n_{\min} = \frac{\tau}{T_{\text{smax}}} = \frac{2 \times 60}{\frac{1}{200}} = 24000$$

【7-7】 设一连续时间信号,其频谱包含有直流、1 kHz、2 kHz、3 kHz四个频率分量,幅度分别为0.5、1、0.5、0.25;相位谱为0,试以10 kHz的取样频率对该信号取样,画出取样后所得离散序列在0~25 kHz频率范围内的频谱。

解 由取样定理可知取样后的频谱为原序列频谱以取样频率为周期进行周期延拓。故在0~25 kHz范围内共有三个周期。其频谱如图7-10所示。

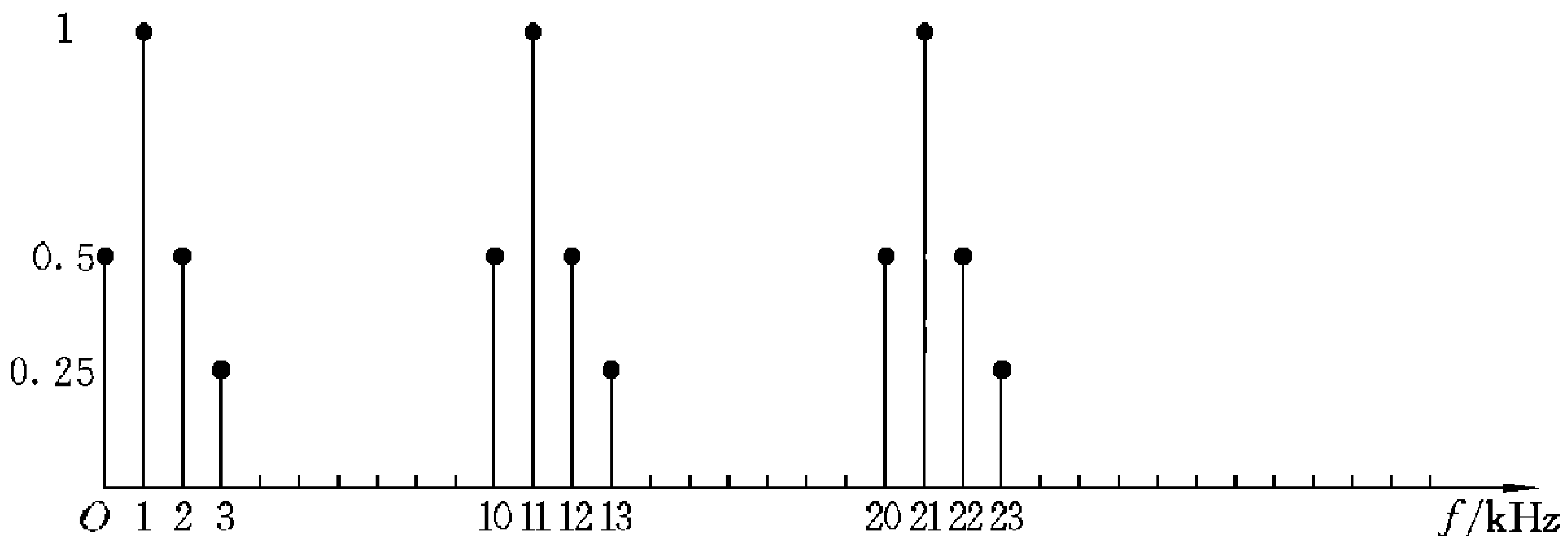


图7-10

【7-8】 对信号$f(t)=\text{sinc}^2(\pi B_s t)=\left[\frac{\sin(\pi B_s t)}{\pi B_s t}\right]^2$,以取样时间间隔分别为$T=\frac{1}{2B_s}$及$T=\frac{1}{B_s}$进行理想取样,试绘出取样后所得序列的频谱并作比较。

解 原信号$f(t)$的频谱$F(\mathrm{j}\omega)$为

$$F(\mathrm{j}\omega) = \mathscr{F}\left\{\left[\frac{\sin(\pi B_s t)}{\pi B_s t}\right]^2\right\}$$

由于
$$\left(1-\frac{|t|}{\tau}\right)[u(t+\tau)-u(t-\tau)] \longleftrightarrow \tau\left[\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right]^2$$

根据对称性,可得

$$\mathrm{Sa}^2\left(\frac{2\pi B_s}{2}t\right) \longleftrightarrow 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi B_s}\left(1-\frac{1}{2\pi B_s}\right)[u(\omega+2\pi B_s)-u(\omega-2\pi B_s)]$$
$$=\frac{1}{B_s}\left(1-\frac{|\omega|}{2\pi B_s}\right)[u(\omega+2\pi B_s)-u(\omega-2\pi B_s)]$$
$$=F(\mathrm{j}\omega)$$

取样频率为 $\omega_s=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi \cdot 2B_s=4\pi B_s$

理想取样信号为 $\hat{f}_s(t)=f(t) \cdot \delta_T(t)$

理想取样信号频谱为

$$\hat{F}_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\{f(t)\}*\mathscr{F}\{\delta_T(t)\}$$

因为 $\delta_T(t)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-\frac{k}{2B_s}\right)$

所以 $\mathscr{F}\{\delta_T(t)\}=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\omega_s\delta(\omega-n\omega_s)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega-n\frac{2\pi}{T}\right)$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}4\pi B_s\delta(\omega-4n\pi B_s)$$

于是得取样信号频谱为

$$\hat{F}_s(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*\mathscr{F}\{\delta_T(t)\}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{B_s}\left(1-\frac{|\omega|}{2\pi B_s}\right)[u(\omega+2\pi B_s)-u(\omega-2\pi B_s)]$$
$$*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}4\pi B_s\cdot\delta(\omega-4n\pi B_s)$$
$$=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(\omega-n\omega_s)$$
$$=2B_s\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{B_s}\left(1-\frac{|\omega-4n\pi B_s|}{2B_s}\right)\{u[(\omega-4n\pi B_s)$$
$$+2\pi B_s]-u[(\omega-4n\pi B_s)-2\pi B_s]\}$$

取样前后频谱图分别如图 7-11 和图 7-12 所示。

将取样前后频谱图进行比较可知，$\hat{F}_s(\mathrm{j}\omega)$ 是 $F(\mathrm{j}\omega)$ 以 $\omega_s=4\pi B_s$ 为周期重

复的函数，但所有的幅值均为 $F(\mathrm{j}\omega)$幅值的 $\frac{\omega_s}{2\pi}=\frac{1}{T}$倍。

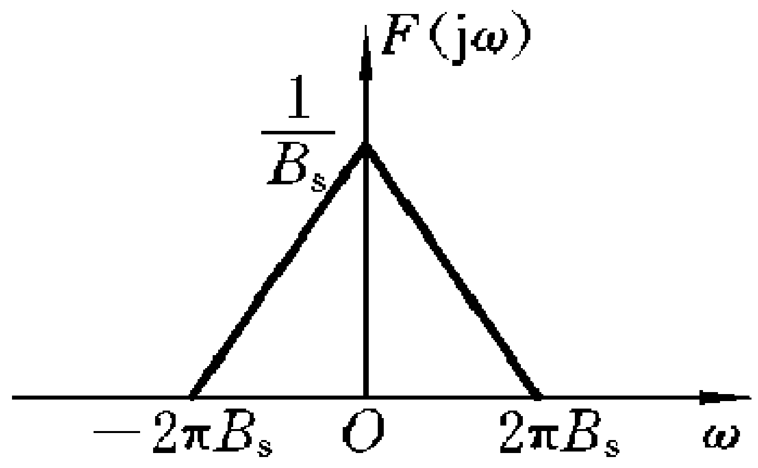


图 7-11

【7-9】 有人每年年初在银行存款一次，银行年利息为 β，每年年底所得利息亦转存下一年，试用差分方程表示第 k 年年初的存款额。

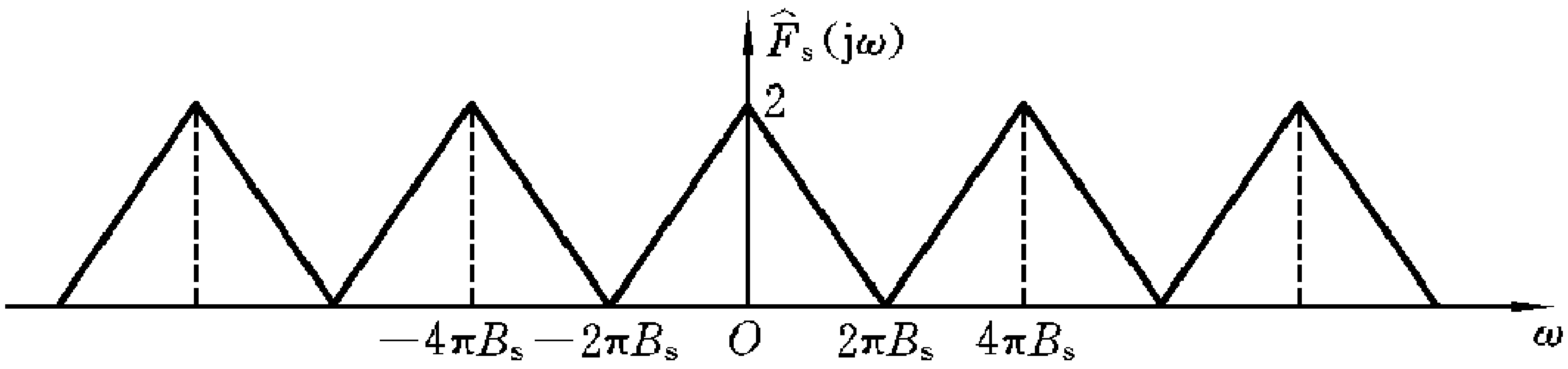


图 7-12

解　第 k 年的本利 $y(k)$包括下列三个方面：

(1) 第$(k-1)$年的本利 $y(k-1)$；

(2) 第$(k-1)$年的利息 $\beta y(k-1)$；

(3) 第 k 年的存款 $f(k)$。

所以得

$$y(k)=y(k-1)+\beta y(k-1)+f(k)$$

或

$$y(k)-(1+\beta)y(k-1)=f(k)$$

【7-10】 图 7-13 表示一离散信号 $e(kT)$经 D/A 转换为一阶梯形模拟信号激励的 RC 电路图。已知电路参数为 $C=1$ F，$R_1=R_2=1$ Ω，试写出描述 $y(kT)$与 $e(kT)$间关系的差分方程，这里 $y(kT)$为 $y(t)$在离散时间 kT 处的值组成的序列。

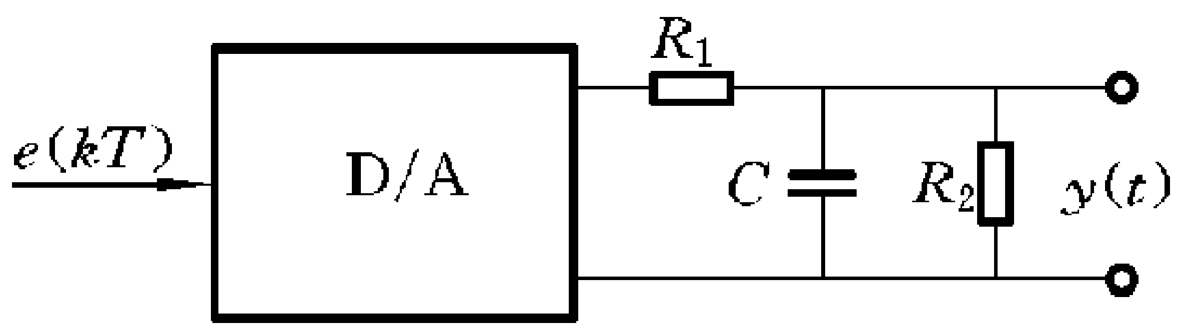


图 7-13

解　RC 电路的转移函数为

$$H(s)=\frac{R_2\cdot\frac{1}{Cs}}{R_1+\frac{R_2\cdot\frac{1}{Cs}}{R_2+\frac{1}{Cs}}}=\frac{R_2\cdot\frac{1}{Cs}}{R_1\left(R_2+\frac{1}{Cs}\right)+R_2\cdot\frac{1}{Cs}}$$

$$=\frac{\frac{1}{R_1C}}{s+\frac{1}{C\cdot\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}}=\frac{\frac{1}{R_1C}}{s+\frac{1}{\tau_0}}$$

式中，$\tau_0=C\cdot\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$为电路的时间常数；代入$C=1$ F，$R_1=R_2=1$ Ω，可得

$$\tau_0=\frac{1}{2},\quad H(s)=\frac{1}{s+2}$$

所以
$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\}=\frac{1}{R_1C}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_0}}=\mathrm{e}^{-2t}$$

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t),\quad y_{zi}(t)=C_1\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_0}}\quad(C_1\text{ 为一系数})$$

$e(kT)$是经 D/A 转换器转换成的一阶梯形激励。

在 $kT\leqslant t\leqslant(k+1)T$ 中，D/A 转换器输出为 $e(kT)$，即

$$e(t)=e(kT),\quad kT\leqslant t\leqslant(k+1)T$$

由起始条件，当 $t=kT$ 时，

$$y(kT)=C_1\mathrm{e}^{-\frac{kT}{\tau_0}}$$

即
$$C_1=y(kT)\mathrm{e}^{\frac{kT}{\tau_0}}$$

所以
$$y_{zi}(t)=y(kT)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau_0}(t-kT)}$$

在 $kT\leqslant t\leqslant(k+1)T$ 中，$e(t)$产生的零状态响应为

$$y_{zs}(t)=h(t)*e(t)=\frac{1}{R_1C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_0}}*e(t)=\frac{1}{R_1C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_0}}*e(kT)$$

$$=\frac{1}{R_1C}e(kT)\int_{kT}^{t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau_0}(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=\frac{\tau_0}{R_1C}e(kT)\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau_0}(t-kT)}\right]$$

$$=\frac{R_2e(kT)}{R_1+R_2}\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau_0}(t-kT)}\right]\qquad(kT\leqslant t\leqslant(k+1)T)$$

所以在 $kT \leqslant t \leqslant (k+1)T$ 中的总响应为

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \\ &= y(kT)e^{-\frac{1}{\tau_0}(t-kT)} + e(kT)\frac{R_2}{R_1+R_2}\left[1 - e^{-\frac{1}{\tau_0}(t-kT)}\right] \end{aligned}$$

将 $t=(k+1)T$，$\tau_0=\dfrac{1}{2}$，$R_1=R_2=1\ \Omega$ 代入上式，得所求差分方程为

$$y[(k+1)T] = y(kT)e^{-2T} + \frac{1}{2}(1-e^{2T})e(kT)$$

【7-11】 连续时间系统中，常用有限时间积分器求取信号的平均值，即

$$y(t) = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{+\tau} x(\lambda)d\lambda$$

试证明可以将上述积分方程转换为下列差分方程来近似求解。

$$y(k) = \frac{1}{N}[x(k) + x(k-1) + \cdots + x(k-N+1)] = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x(k-j)$$

解 令 $\tau = NT$，可得

$$y(t) = \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} x(\lambda)d\lambda = \frac{1}{NT}\int_{t-NT}^{t} x(\lambda)d\lambda$$

如果时间段 T 足够小，可认为在 T 内，$x(t)$ 保持区间左端点的值不变，则 $y(t)$ 可近似为黎曼和，即

$$y(t) = \frac{1}{NT}\sum_{j=0}^{N-1} x(t-jT)T$$

$$y(t) = \frac{1}{N}[x(t) + x(t-T) + \cdots + x(t-NT+T)]$$

当 $t=kT$ 时，即可得 $y(kT)$，通常记为 $y(k)$。所以

$$y(k) = \frac{1}{N}[x(k) + x(k-1) + \cdots + x(k-N+1)] = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x(k-j)$$

【7-12】 一初始状态不为零的离散系统。当激励为 $e(k)$ 时全响应为

$$y_1(k) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k + 1\right]\varepsilon(k)$$

当激励为 $-e(k)$ 时全响应为

$$y_2(k) = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 1\right]\varepsilon(k)$$

求当初始状态增加一倍且激励为 $4e(k)$ 时的全响应。

解　设初始状态不变,当激励为$e(k)$时,系统的零输入响应为$y_{zi}(k)$,零状态响应为$y_{zs}(k)$。依题意

$$y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k+1\right]\varepsilon(k) \qquad ①$$

根据线性非时变系统的性质,当激励为$-e(k)$时,全响应为

$$y(k)=y_{zi}(k)-y_{zs}(k)=\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k-1\right]\varepsilon(k) \qquad ②$$

联立式①、式②,可解得

$$\begin{cases} y_{zi}(k)=\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}\right]\varepsilon(k) \\ y_{zs}(k)=\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}+1\right]\varepsilon(k) \end{cases}$$

故当初始状态增加一倍且激励为$4e(k)$时,

$$\begin{aligned} y(k)&=2y_{zi}(k)+4y_{zs}(k) \\ &=2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right]\varepsilon(k)+4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}+1\right]\varepsilon(k) \\ &=\left[4+6\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+2\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right]\varepsilon(k) \\ &=\left[4+3\left(\frac{1}{2}\right)^{k}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\right]\varepsilon(k) \end{aligned}$$

【7-13】　试列出图 7-14 所示系统的差分方程。

解　(a) 由图 7-14(a)可得

$$y(k+1)+ay(k)=be(k)$$

(b) 由图 7-14(b)可得

$$y(k)+ay(k-1)=be(k)$$

(c) 由图 7-14(c)可得

$$y(k+2)+(a+b)y(k+1)+(ab-c)y(k)=e(k)$$

【7-14】　试绘出下列离散系统的直接型模拟框图。

(1) $y(k+1)+\dfrac{1}{2}y(k)=-e(k+1)+2e(k)$

(2) $y(k+2)+5y(k+1)+6e(k)=e(k+1)$

(3) $y(k+2)+3y(k+1)+2y(k-2)=e(k-1)$

(4) $y(k)=5e(k)+7e(k-2)$

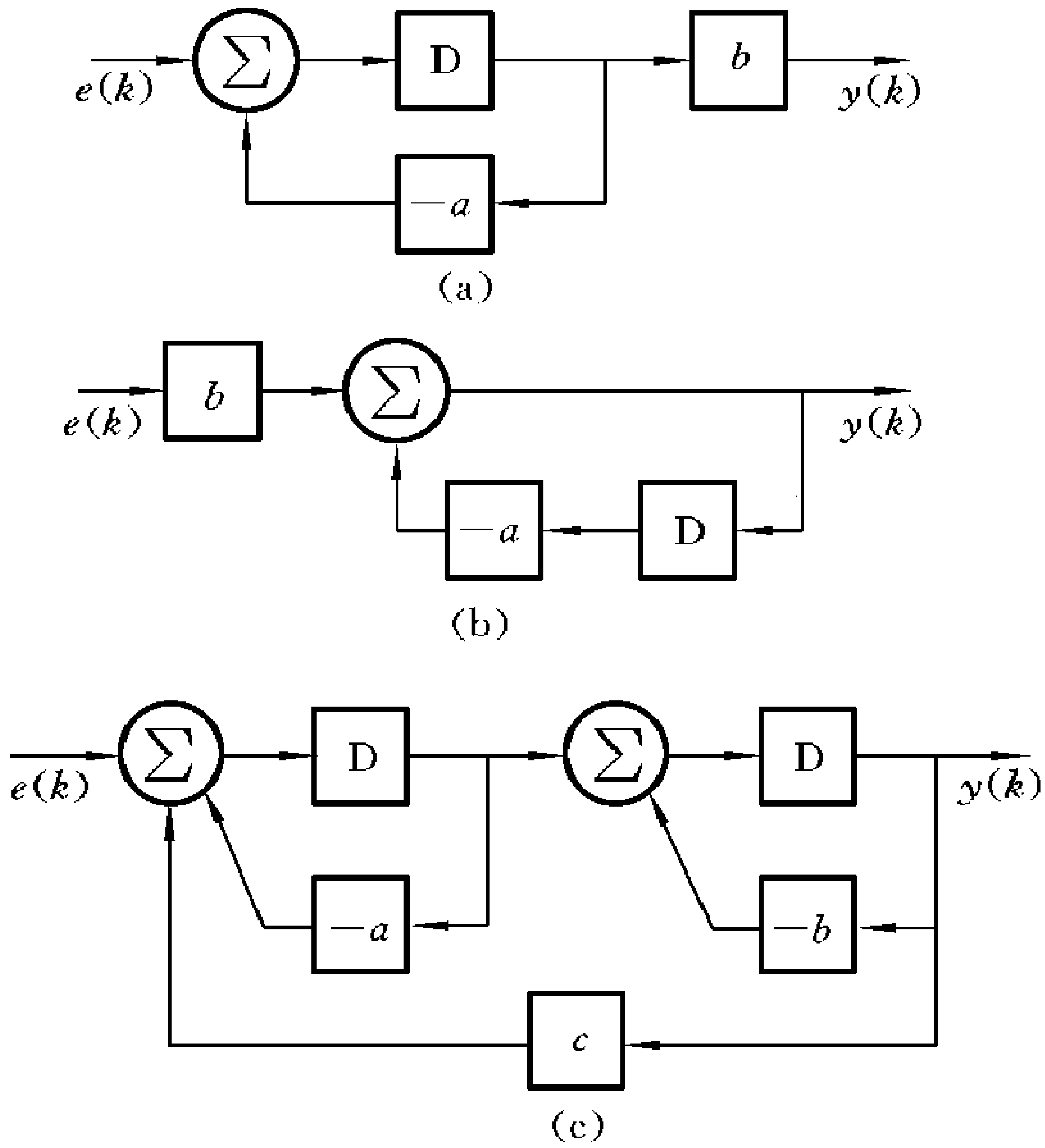


图 7-14

解 (1) $y(k+1)+\frac{1}{2}y(k)=-e(k+1)+2e(k)$离散系统的直接模拟框图如图 7-15 所示。

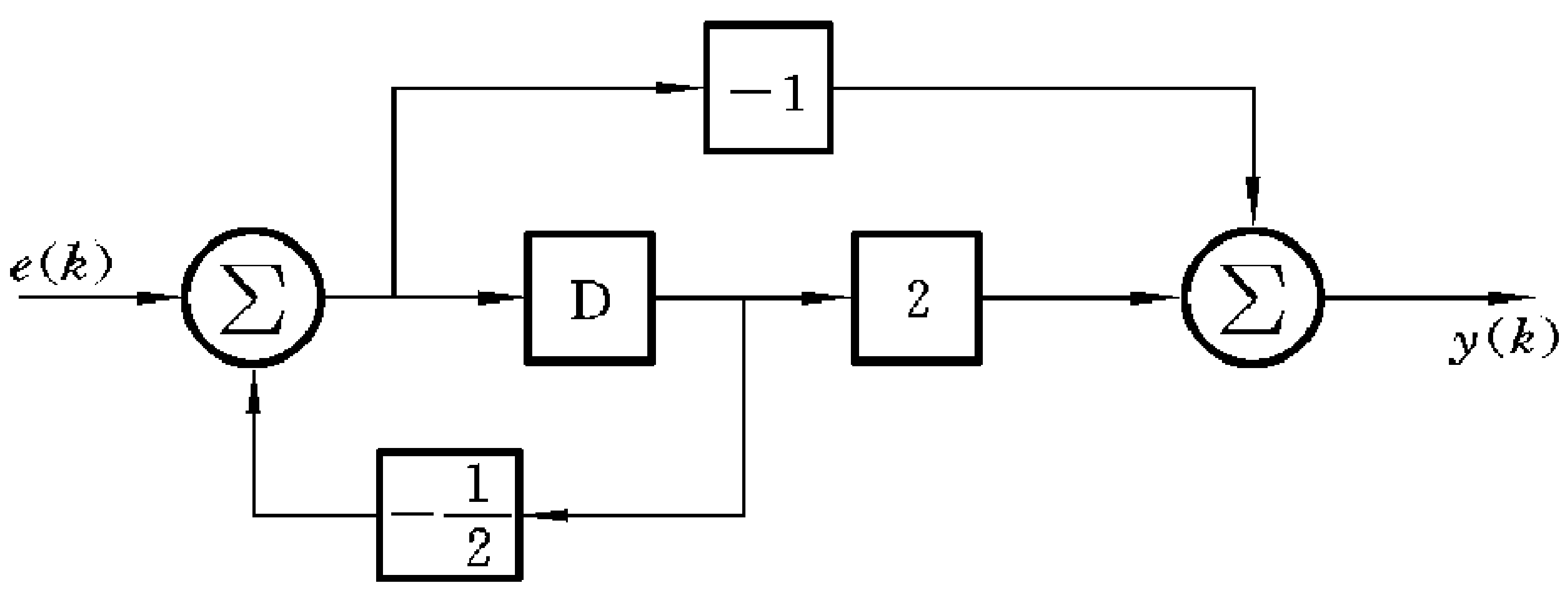


图 7-15

(2) $y(k+2)+5y(k+1)+6y(k)=e(k+1)$离散系统的直接模拟框图如图 7-16 所示。

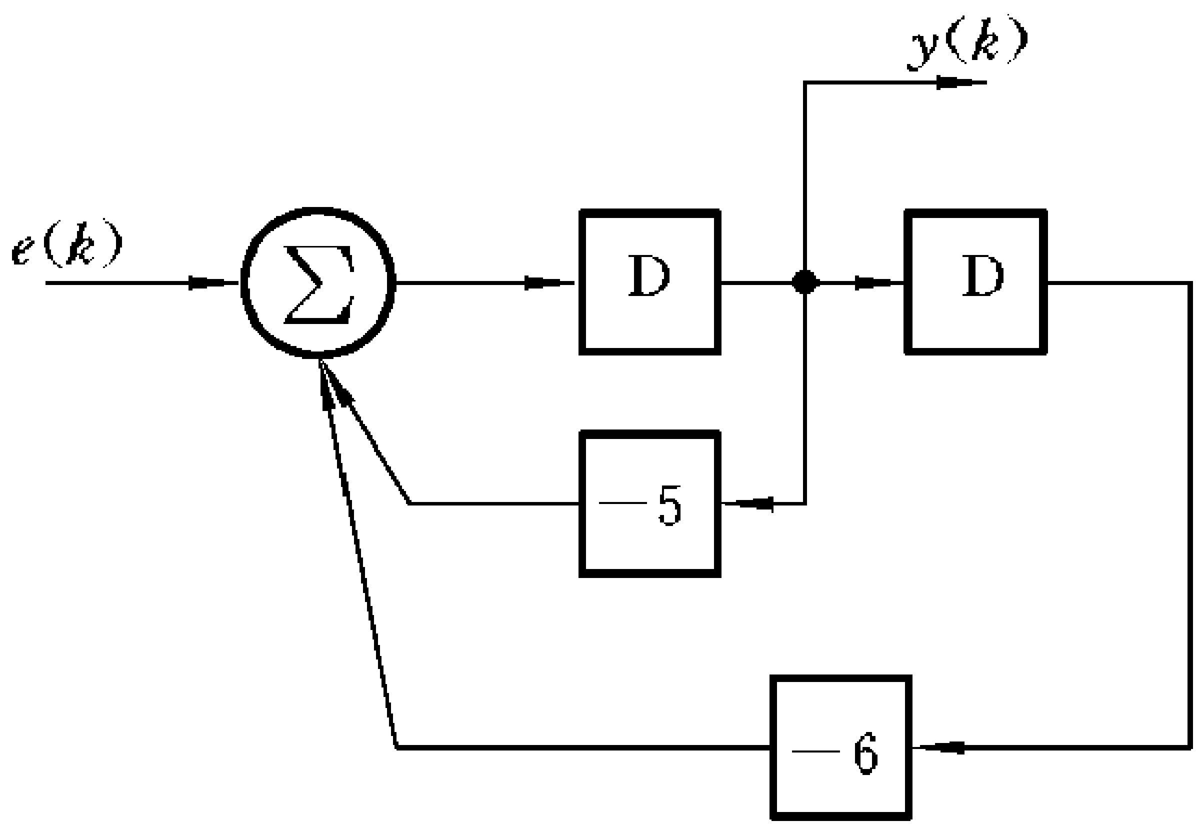


图 7-16

(3) $y(k+2)+3y(k+1)+2y(k-2)=e(k-1)$离散系统的直接模拟框图如图 7-17 所示。

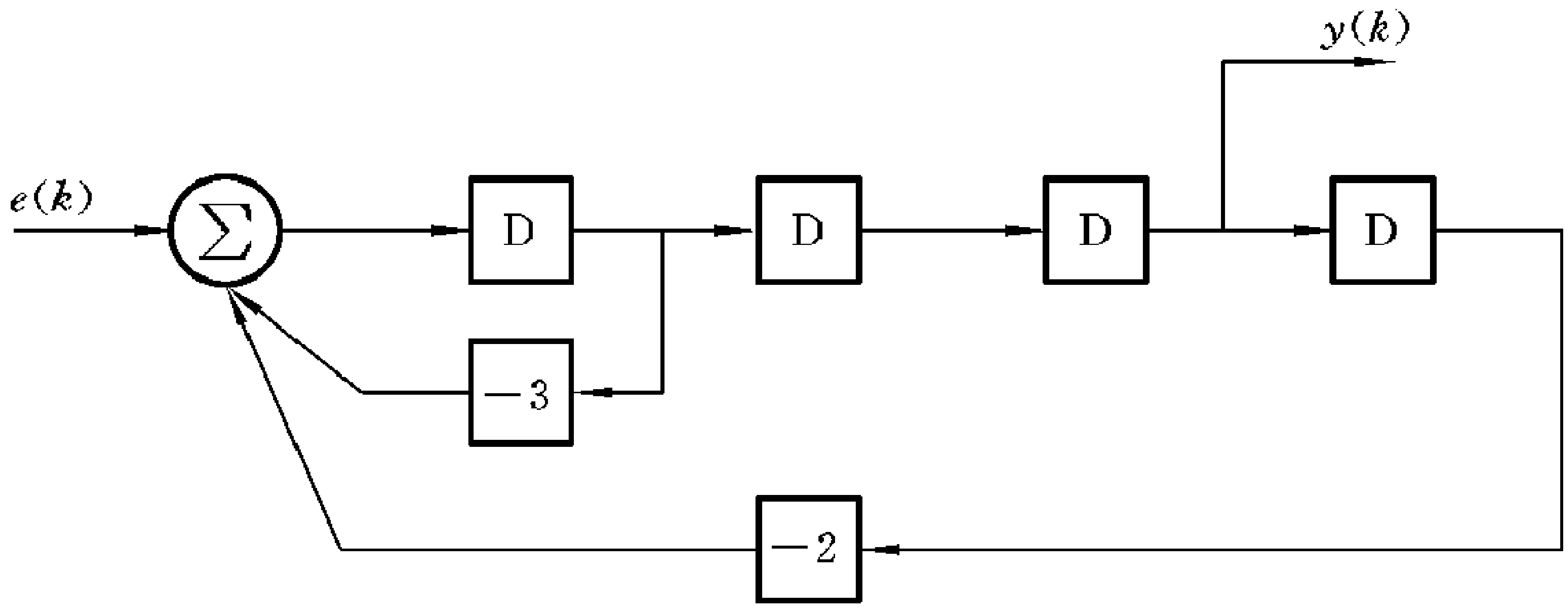


图 7-17

(4) $y(k)=5e(k)+7e(k-2)$离散系统的直接模拟框图如图7-18所示。

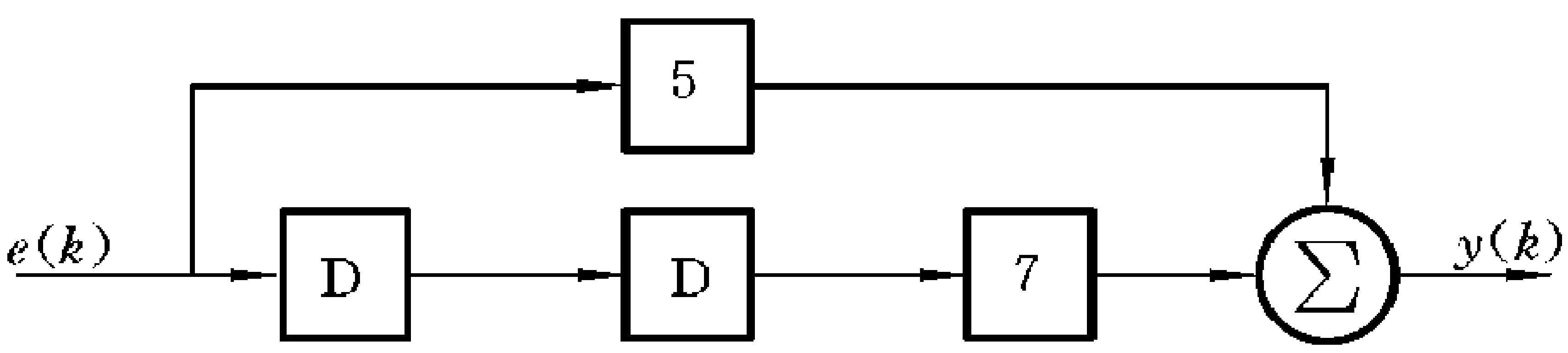


图 7-18

【7-15】 画出下列差分方程所示系统的直接型模拟框图、并联型模拟框

图、级联型模拟框图。

(1) $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=e(k)+3e(k-1)$

(2) $y(k+2)+2y(k+1)+y(k)=2e(k+1)+4e(k)$

解　(1) $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=e(k)+3e(k-1)$的直接型模拟框图如图 7-19 所示。

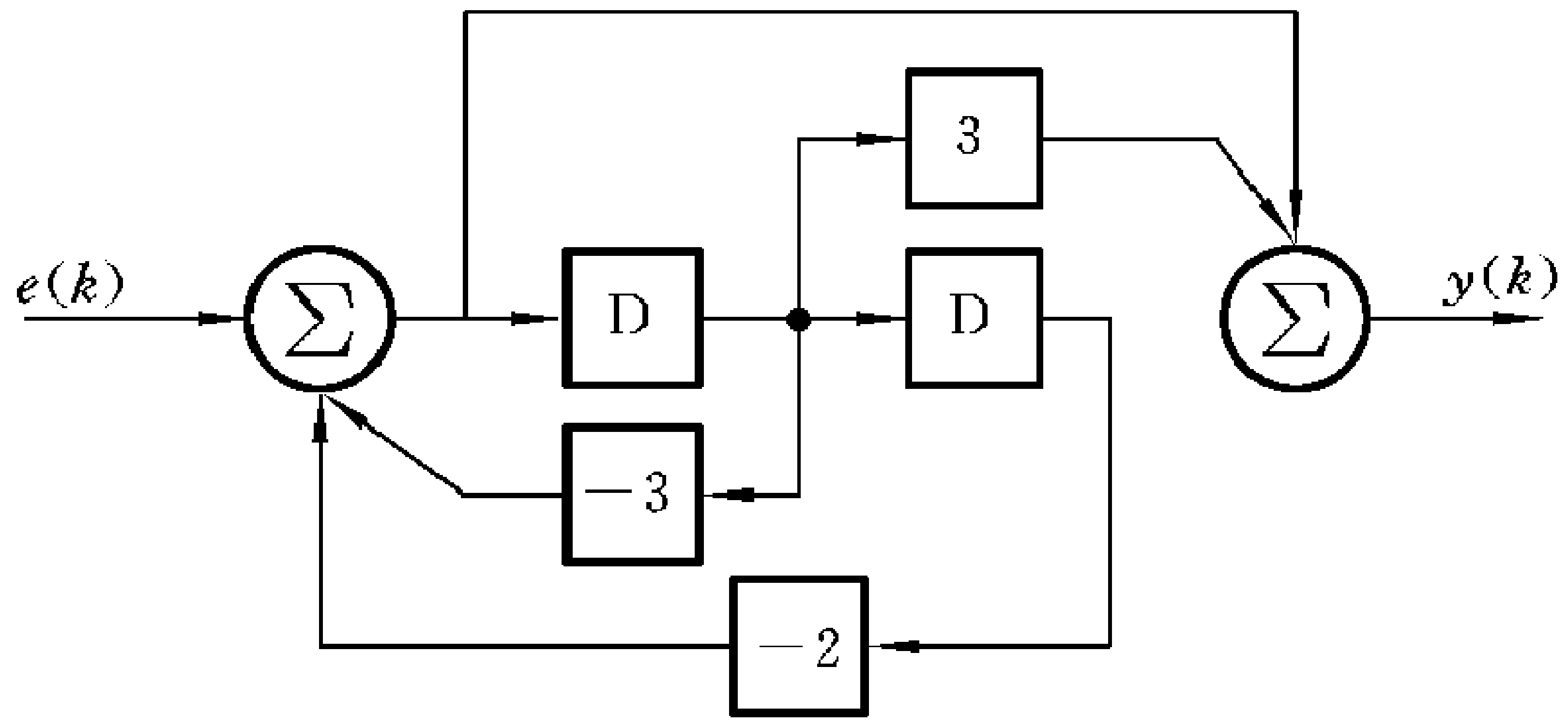


图 7-19

用移序算子将差分方程写成

$$S^2y(k)+3Sy(k)+2y(k)=S^2e(k)+3Se(k)$$

转移算子为
$$H(S)=\frac{S^2+3S}{S^2+3S+2}$$

并联时，
$$H(S)=1-\frac{2}{S+1}+\frac{2}{S+2}$$

级联时，
$$H(S)=\frac{S}{S+1}\cdot\frac{S+3}{S+2}$$

所以并联型模拟框图如图 7-20 所示，级联型模拟框图如图 7-21 所示。

(2) $y(k+2)+2y(k+1)+y(k)=2e(k+1)+4e(k)$的直接型模拟框图如图 7-22 所示。

用移序算子将差分方程写成

$$S^2y(k)+2Sy(k)+y(k)=2Se(k)+4e(k)$$

转移算子为
$$H(S)=\frac{2S+4}{S^2+2S+1}$$

并联时，
$$H(S)=\frac{2}{S+1}+\frac{2}{(S+1)^2}$$

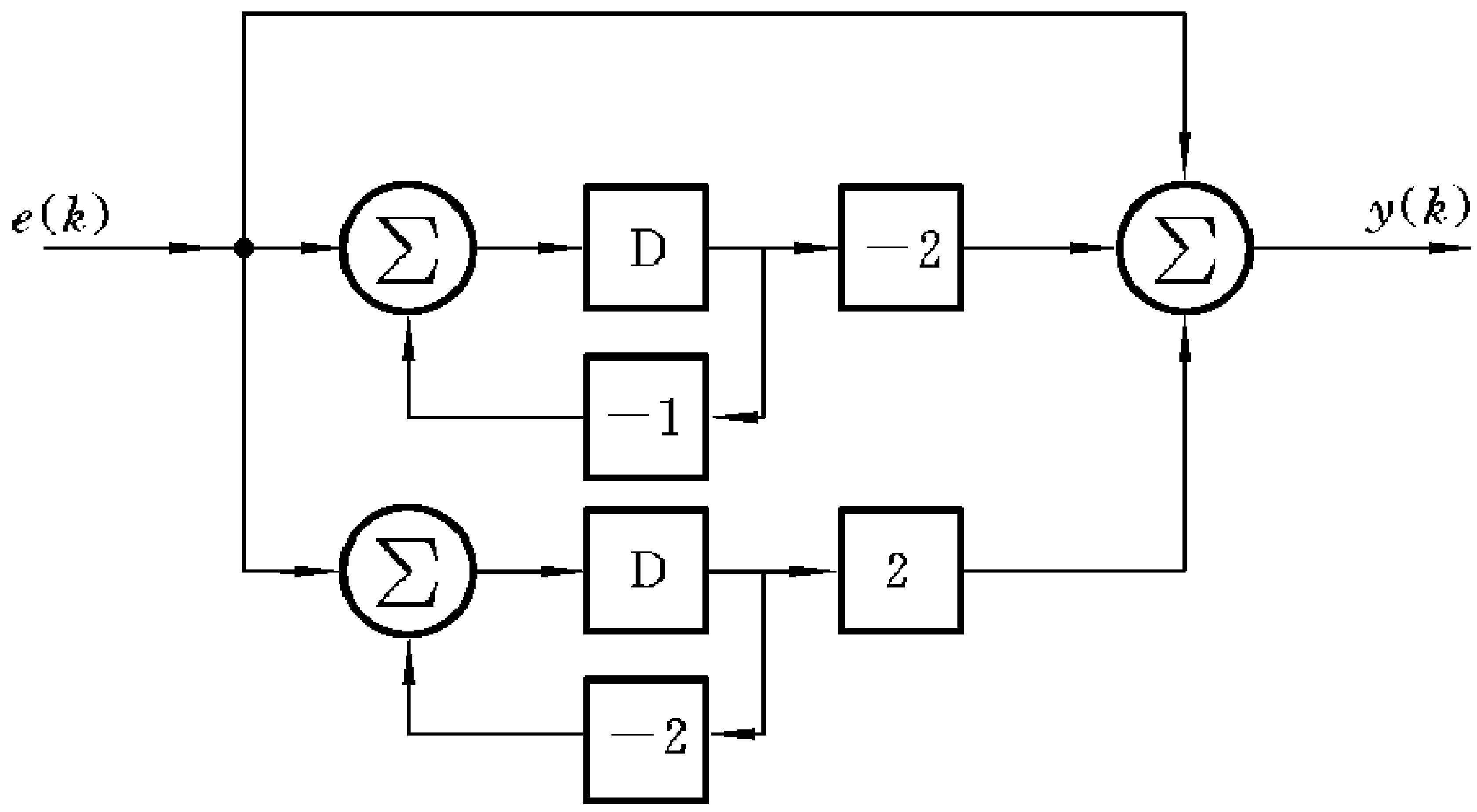


图 7-20

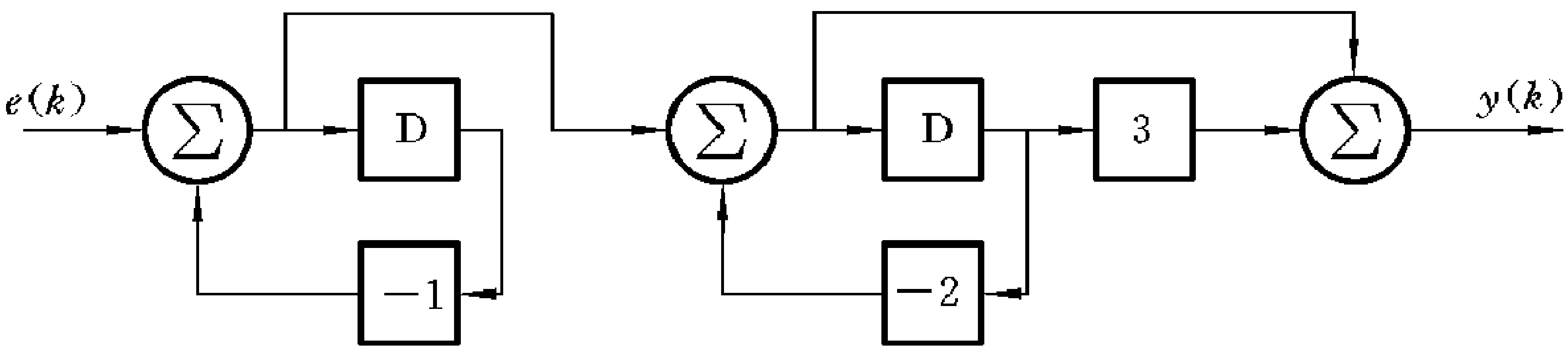


图 7-21

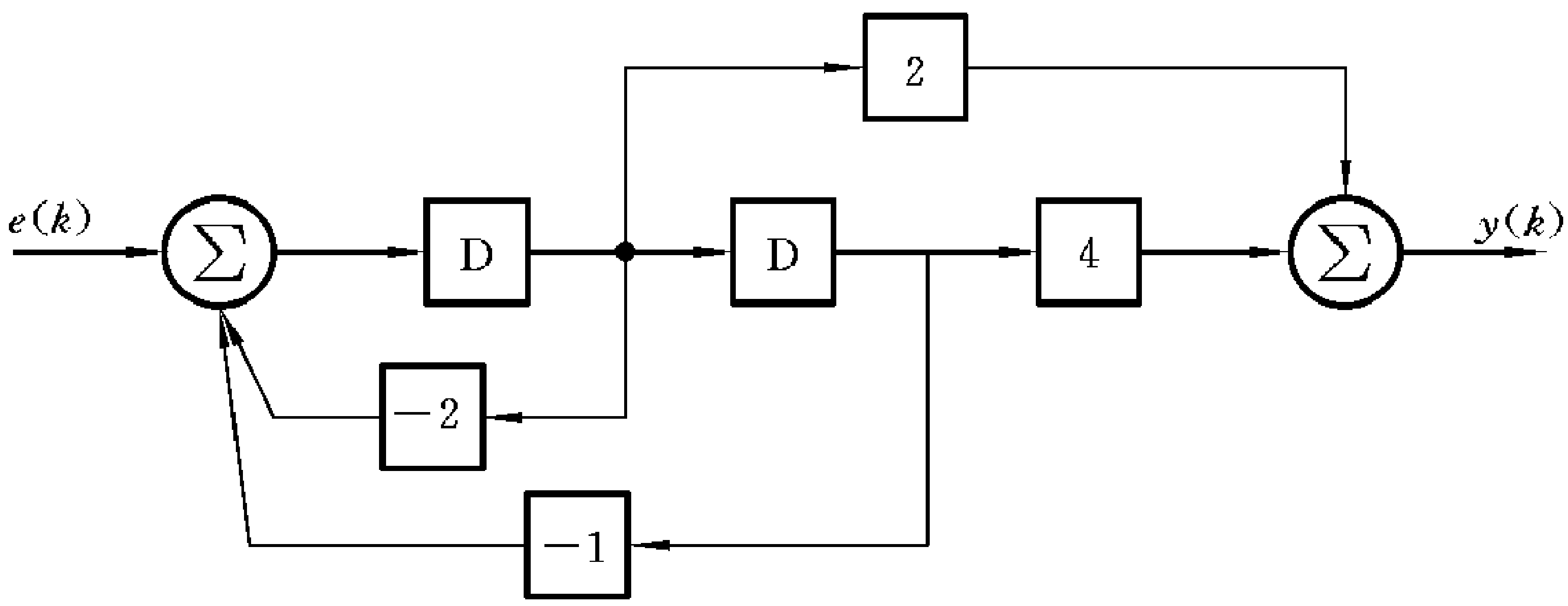


图 7-22

级联时，
$$H(S)=\frac{2}{S+1}\cdot\frac{S+2}{S+1}$$

故并联型模拟框图如图 7-23 所示，级联型模拟框图如图 7-24 所示。

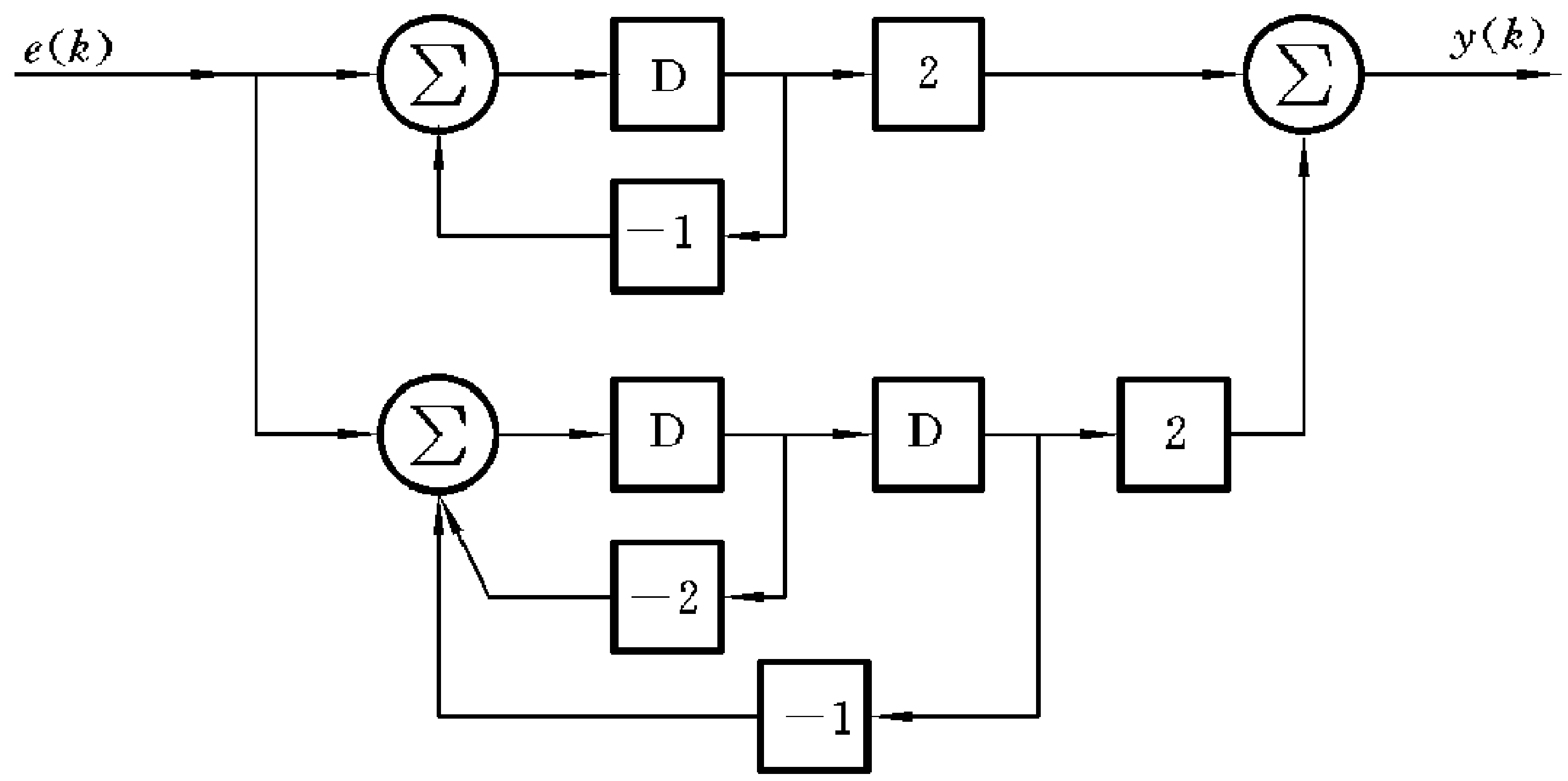


图 7-23

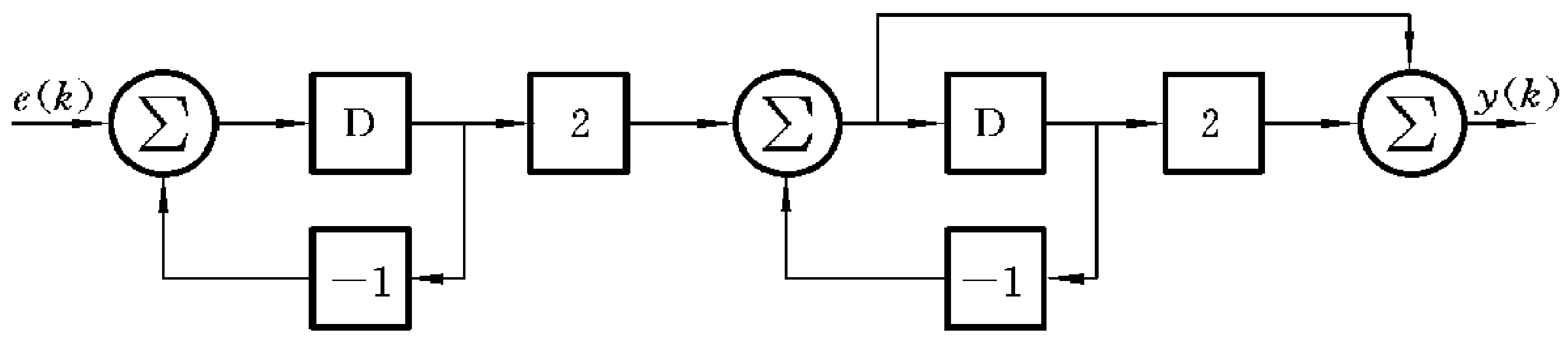


图 7-24

【7-16】 求下列齐次差分方程所示系统的零输入响应。

(1) $y(k+1)+2y(k)=0$, $y(0)=1$

(2) $y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=0$, $y(0)=2$, $y(1)=1$

(3) $y(k+2)+9y(k)=0$, $y(0)=4$, $y(1)=0$

(4) $y(k+2)+2y(k+1)+2y(k)=0$, $y(0)=0$, $y(1)=1$

(5) $y(k+2)+2y(k+1)+y(k)=0$, $y(0)=1$, $y(1)=0$

(6) $y(k+3)-2\sqrt{2}\,y(k+2)+y(k+1)=0$,

$y(0)=0$, $y(1)=-1$

解 (1) 运用移序算子,原方程可写为

$$Sy(k)+2y(k)=0$$

即

$$(S+2)y(k)=0$$

由特征方程　　$S+2=0$

解得　　$S=-2$

故　　$y(k)=C(-2)^k\varepsilon(k)$

由起始条件得 $y(0)=C=1$,所以

$$y(k)=(-2)^k\varepsilon(k)$$

(2) 运用移序算子,原方程可写为

$$(S^2+3S+2)y(k)=0$$

由特征方程　　$S^2+3S+2=0$

解得　　$S_1=-2,\quad S_2=-1$

所以　　$y(k)=[C_1(-2)^k+C_2(-1)^k]\varepsilon(k)$

由起始条件

$$\begin{cases}C_1+C_2=y(0)=2\\ -2C_1-C_2=y(1)=1\end{cases}$$

解得　　$\begin{cases}C_1=-3\\ C_2=5\end{cases}$

所以　　$y(k)=[-3(-2)^k+5(-1)^k]\varepsilon(k)$

(3) 运用移序算子,原方程可写为

$$(S^2+9)y(k)=0$$

由特征方程　　$S^2+9=0$

解得　　$S_1=3\mathrm{j},\quad S_2=-3\mathrm{j}$

所以　　$y(k)=[C_1(3\mathrm{j})^k+C_2(-3\mathrm{j})^k]\varepsilon(k)$

由起始条件　　$\begin{cases}y(0)=C_1+C_2=4\\ y(1)=(3\mathrm{j})C_1+(-3\mathrm{j})C_2=0\end{cases}$

解得　　$\begin{cases}C_1=2\\ C_2=2\end{cases}$

所以

$$\begin{aligned}y(k)&=[2(3\mathrm{j})^k+2(-3\mathrm{j})^k]\varepsilon(k)\\&=2[(3\mathrm{j})^k+(-3\mathrm{j})^k]\varepsilon(k)\\&=[2\cdot 3^k(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}k\pi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}k\pi})]\varepsilon(k)\end{aligned}$$

$$=4\cdot 3^k\cos\frac{k\pi}{2}\varepsilon(k)$$

(4) 运用移序算子,原方程可写为

$$(S^2+2S+2)y(k)=0$$

由特征方程
$$S^2+2S+2=0$$

解得
$$S_1=-1+\mathrm{j},\quad S_2=-1-\mathrm{j}$$

故
$$y(k)=[C_1(-1-\mathrm{j})^k+C_2(-1+\mathrm{j})^k]\varepsilon(k)$$

由起始条件
$$\begin{cases}y(0)=C_1+C_2=0\\ y(1)=(-1-\mathrm{j})C_1+(-1+\mathrm{j})C_2=1\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}C_1=-\dfrac{1}{2\mathrm{j}}\\ C_2=\dfrac{1}{2\mathrm{j}}\end{cases}$$

所以
$$y(k)=\left[-\frac{1}{2\mathrm{j}}(-1-\mathrm{j})^k+\frac{1}{2\mathrm{j}}(-1+\mathrm{j})^k\right]\varepsilon(k)$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[(\sqrt{2})^k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3}{4}k\pi}-(\sqrt{2})^k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{4}k\pi}\right]\varepsilon(k)$$

$$=(\sqrt{2})^k\sin\left(\frac{3}{4}k\pi\right)\varepsilon(k)$$

(5) 运用移序算子,原方程可写为

$$(S^2+2S+1)y(k)=0$$

由特征方程
$$S^2+2S+1=0$$

解得
$$S_1=S_2=-1\quad(\text{二重根})$$

所以
$$y(k)=[C_1(-1)^k+C_2k(-1)^k]\varepsilon(k)$$

由起始条件
$$\begin{cases}y(0)=C_1=1\\ y(1)=-C_1-C_2=0\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}C_1=1\\ C_2=-1\end{cases}$$

所以
$$y(k)=[(-1)^k-k(-1)^k]\varepsilon(k)$$

(6) 运用移序算子,原方程可写为

$$(S^2-2\sqrt{2}S+1)y(k+1)=0$$

由$S^2-2\sqrt{2}S+1=0$,可解得

$$S_1=-1+\sqrt{2},\quad S_2=1+\sqrt{2}$$

于是

$$y(k+1)=[C_1(-1+\sqrt{2})^{k+1}+C_2(1+\sqrt{2})^{k+1}]\varepsilon(k+1)$$

由起始条件

$$\begin{cases}y(0)=C_1+C_2=0\\ y(1)=C_1(-1+\sqrt{2})+C_2(1+\sqrt{2})=-1\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}C_1=\dfrac{1}{2}\\ C_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

所以

$$y(k+1)=\frac{1}{2}[(\sqrt{2}-1)^{k+1}-(\sqrt{2}+1)^{k+1}]\varepsilon(k+1)$$

故

$$y(k)=\left[\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2})^k-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^k\right]\varepsilon(k)$$

【7-17】 求下列齐次差分方程所示系统的零输入响应。

(1) $y(k)+\dfrac{1}{3}y(k-1)=0,\quad y(-1)=1$

(2) $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=0,\quad y(-1)=0,\quad y(-2)=1$

(3) $y(k)+2y(k-1)+y(k-2)=0,\quad y(0)=y(-1)=1$

(4) $y(k)-7y(k-1)+16y(k-2)-12y(k-3)=0$

$y(1)=-1,\quad y(2)=-3,\quad y(3)=-5$

解　(1) 由系统的差分方程可知特征方程为

$$S+\frac{1}{3}=0$$

解得特征根为

$$S=-\frac{1}{3}$$

所以

$$y(k)=C\left(-\frac{1}{3}\right)^k\varepsilon(k)$$

由起始条件

$$y(-1)=C\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}=1$$

得
$$C=-\frac{1}{3}$$
所以
$$y(k)=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\varepsilon(k)=\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}\varepsilon(k)$$

(2) 由系统的差分方程可知特征方程为
$$S^2+3S+2=0$$
解得特征根为
$$S_1=-2,\quad S_2=-1$$
所以
$$y(k)=[C_1(-2)^k+C_2(-1)^k]\varepsilon(k)$$
由起始条件
$$\begin{cases}y(-1)=C_1(-2)^{-1}+C_2(-1)^{-1}=0\\ y(-2)=C_1(-2)^{-2}+C_2(-1)^{-2}=1\end{cases}$$
得
$$\begin{cases}C_1=-4\\ C_2=2\end{cases}$$
所以
$$y(k)=[2(-1)^k-4(-2)^k]\varepsilon(k)$$

(3) 由系统差分方程可知特征方程为
$$S^2+2S+1=0$$
解得特征根为
$$S_1=S_2=-1\quad (二重根)$$
所以
$$y(k)=[C_1(-1)^k+C_2k(-1)^k]\varepsilon(k)$$
由起始条件
$$\begin{cases}y(0)=C_1+C_2\cdot 0=1\\ y(-1)=C_1(-1)^{-1}+C_2(-1)(-1)^{-1}=1\end{cases}$$
得
$$\begin{cases}C_1=1\\ C_2=2\end{cases}$$
所以
$$y(k)=[(-1)^k+2k(-1)^k]\varepsilon(k)=(2k+1)(-1)^k\varepsilon(k)$$

(4) 由系统差分方程可知特征方程为
$$S^3-7S+16S-12=0$$
即
$$(S-3)(S-2)^2=0$$
解得特征根为
$$S_1=3,\quad S_2=S_3=2$$
所以
$$y(k)=[C_1(3)^k+C_2(2)^k+C_3k(2)^k]\varepsilon(k)$$
由起始条件
$$\begin{cases}y(1)=3C_1+2C_2+2C_3=-1\\ y(2)=9C_1+4C_2+8C_3=-3\\ y(3)=27C_1+8C_2+24C_3=-5\end{cases}$$

得
$$\begin{cases}C_1=1\\C_2=-1\\C_3=-1\end{cases}$$

所以　　$y(k)=(3^k-2^k-k\cdot 2^k)\varepsilon(k)=[3^k-(k+1)2^k]\varepsilon(k)$

【7-18】 求下列差分方程所示系统的单位函数响应。

(1) $y(k+2)-0.6y(k+1)-0.16y(k)=e(k)$

(2) $y(k+3)-2\sqrt{2}y(k+2)+y(k+1)=e(k)$

(3) $y(k+2)-y(k+1)+0.25y(k)=e(k)$

(4) $y(k+2)+y(k)=e(k)$

(5) $y(k+2)-y(k)=e(k)$

(6) $y(k+2)-y(k)=e(k+1)-e(k)$

(7) $y(k+2)+2y(k+1)+2y(k)=e(k+1)+2e(k)$

解　(1) $(S^2-0.6S-0.16)y(k)=e(k)$

$$H(S)=\frac{1}{S^2-0.6S-0.16}=\frac{1}{S-0.8}-\frac{1}{S+0.2}$$

设$\gamma_1=0.8,\gamma_2=-0.2$,则

$$h(k)=\gamma_1^{k-1}\varepsilon(k-1)-\gamma_2^{k-1}\varepsilon(k-1)=[0.8^{k-1}-(-0.2)^{k-1}]\varepsilon(k-1)$$

(2) $(S^3-2\sqrt{2}S^2+S)y(k)=e(k)$

$$H(S)=\frac{1}{S^3-2\sqrt{2}S^2+S}=\frac{1}{S}-\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)(S-\sqrt{2}+1)}+\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)(S-\sqrt{2}-1)}$$

$$h(k)=\frac{-1}{2(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}-1)^{k-1}\varepsilon(k-1)+\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}(\sqrt{2}+1)^{k-1}\varepsilon(k-1)+\delta(k-1)$$

$$=\frac{1}{2}[(\sqrt{2}+1)^{k-2}-(\sqrt{2}-1)^{k-2}]\varepsilon(k-1)+\delta(k-1)$$

(3) $(S^2-S+0.25)y(k)=e(k)$

$$H(S)=\frac{1}{S^2-S+0.25}=\frac{1}{(S-0.5)^2}$$

$$\frac{H(S)}{S}=\frac{1}{S(S-0.5)^2}=\frac{4}{S}-\frac{4}{S-0.5}+\frac{2}{(S-0.5)^2}$$

所以
$$H(S)=4-4\times\frac{S}{S-0.5}+2\times\frac{S}{(S-0.5)^2}$$

$$h(k)=4\delta(k)-4(0.5)^k\varepsilon(k)+2k0.5^{k-1}\varepsilon(k)$$

且当 $k=0$ 时,$h(0)=0$,所以

$$h(k)=4(k-1)0.5^k\varepsilon(k-1)$$

(4) $(S^2+1)y(k)=e(k)$

$$H(S)=\frac{1}{S^2+1}=\frac{\mathrm{j}}{2(S+\mathrm{j})}-\frac{\mathrm{j}}{2(S-\mathrm{j})}$$

所以

$$\begin{aligned}h(k)&=\frac{\mathrm{j}}{2}[(-\mathrm{j})^{k-1}-\mathrm{j}^{k-1}]\varepsilon(k-1)=-\frac{1}{2}[\mathrm{j}^k+(-\mathrm{j})^k]\varepsilon(k-1)\\&=\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}(k-1)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}(k-1)}}{2\mathrm{j}}\right]\varepsilon(k-1)\\&=\left[\sin\frac{\pi}{2}(k-1)\right]\varepsilon(k-1)=-\cos\frac{k\pi}{2}\varepsilon(k-1)\end{aligned}$$

(5) $(S^2-1)y(k)=e(k)$

$$H(S)=\frac{1}{S^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{S-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{S+1}$$

所以
$$\begin{aligned}h(k)&=\frac{1}{2}[1^{k-1}-(-1)^{k-1}]\varepsilon(k-1)\\&=\frac{1}{2}[1-(-1)^{k-1}]\varepsilon(k-1)\end{aligned}$$

(6) $(S^2-1)y(k)=(S-1)e(k)$

$$H(S)=\frac{S-1}{S^2-1}=\frac{1}{S+1}$$

所以
$$h(k)=(-1)^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

(7) $(S^2+2S+2)y(k)=(S+2)e(k)$

$$H(S)=\frac{S+2}{S^2+2S+2}$$

所以

$$\frac{H(S)}{S}=\frac{S+2}{S(S^2+2S+2)}$$

$$=\frac{1}{S}+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{S+1+\mathrm{j}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{S+1-\mathrm{j}}$$

即
$$H(S)=1+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{S}{S+1+\mathrm{j}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{S}{S+1-\mathrm{j}}$$

根据教材第七章系统转移算子及其对应的单位函数响应表7-2中的公式(6),得

$$A=-\frac{1}{2},\quad \theta=0$$

$$\nu=-1-\mathrm{j}=-(1+\mathrm{j})=(-\sqrt{2})\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\pi},\quad \phi=\beta T=\frac{1}{4}\pi$$

所以
$$h(k)=\delta(k)+2\left(-\frac{1}{2}\right)(-\sqrt{2})^k\cos\left(\frac{k}{4}\pi\right)\varepsilon(k)$$

且当$k=0$时,$h(0)=0$,所以

$$h(k)=-(-\sqrt{2})^k\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\varepsilon(k-1)$$

【7-19】 求图7-25所示系统的单位函数响应。

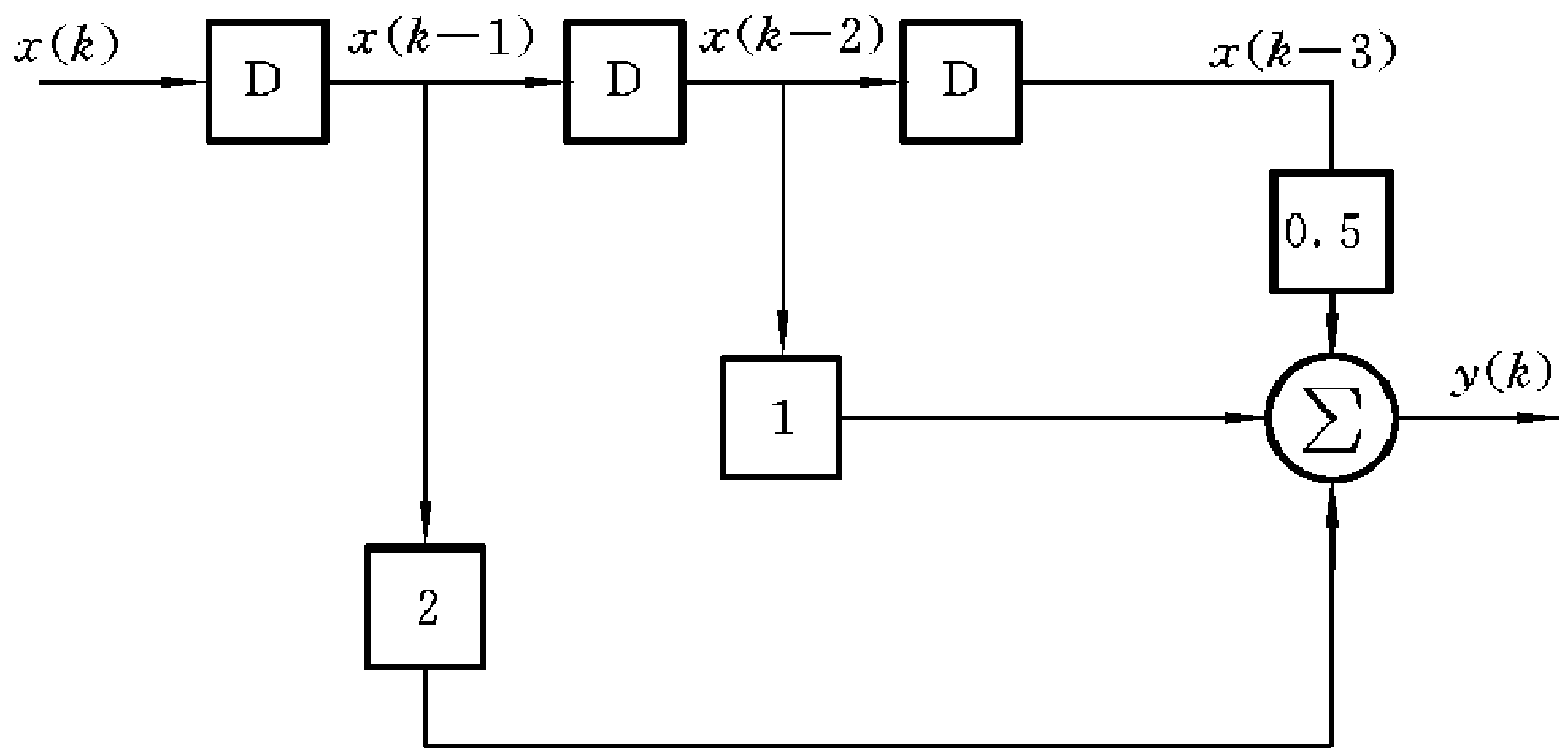


图7-25

解 根据系统框图,可写出系统的差分方程为

$$y(k)=0.5x(k-3)+x(k-2)+2x(k-1)$$

当$x(k)$为单位函数$\delta(k)$时,$y(k)$即为单位函数响应$h(k)$,即

$$h(k)=2\delta(k-1)+\delta(k-2)+0.5\delta(k-3)$$

【7-20】 证明单位阶跃序列响应 $r_\varepsilon(k)$ 与单位函数响应 $h(k)$ 存在有如下关系。

(1) $r_\varepsilon(k)=\sum_{j=0}^{k}h(j)$　　(2) $h(k)=r_\varepsilon(k)-r_\varepsilon(k-1)$

证明 (1)
$$\begin{aligned}r_\varepsilon(k)&=\varepsilon(k)*h(k)=\sum_{j=0}^{k}\varepsilon(k)h(k-j)=\sum_{j=0}^{k}h(k-j)\\&=h(k)+h(k-1)+\cdots+h(1)+h(0)\\&=h(0)+h(1)+\cdots+h(k-1)+h(k)\\&=\sum_{j=0}^{k}h(j)\end{aligned}$$

(2) 由(1)可知，

$$r_\varepsilon(k)=h(0)+h(1)+\cdots+h(k-1)+h(k) \quad ①$$

则
$$r_\varepsilon(k-1)=h(0)+h(1)+\cdots+h(k-2)+h(k-1) \quad ②$$

由①－②可得　$r_\varepsilon(k)-r_\varepsilon(k-1)=h(k)$

所以
$$h(k)=r_\varepsilon(k)-r_\varepsilon(k-1)$$

【7-21】 求图 7-26 所示系统的单位函数响应与单位阶跃序列响应。

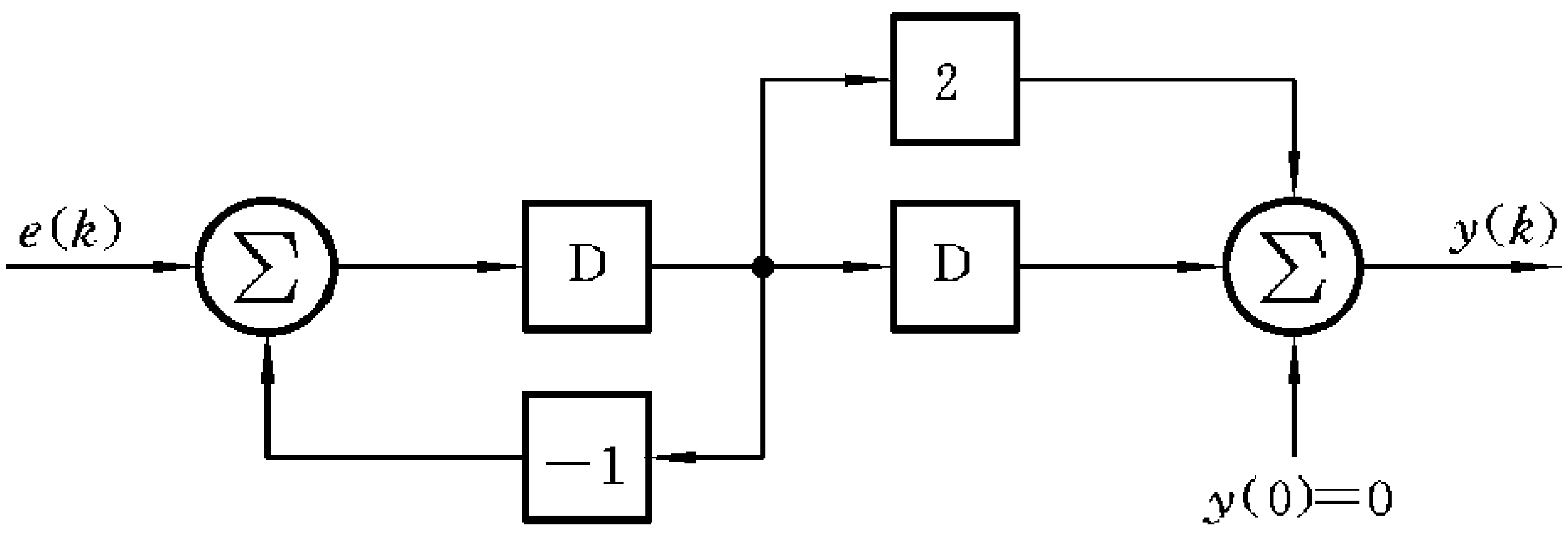


图 7-26

解 由所给模拟框图可知，该系统的转移算子为

$$H(S)=\frac{2S+1}{S^2+S}=\frac{1}{S}+\frac{1}{S+1}$$

所以系统的差分方程为

$$y(k+2)+y(k+1)=2e(k+1)+e(k)$$

由 $H(S)$ 可知系统的单位函数响应为

$$h(k)=\delta(k-1)+(-1)^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

系统的单位阶跃序列响应为

$$r_\varepsilon(k) = h(k) * \varepsilon(k) = \delta(k-1) * \varepsilon(k) + (-1)^{k-1}\varepsilon(k-1) * \varepsilon(k)$$

$$= \varepsilon(k-1) + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^k\right]\varepsilon(k-1)$$

$$= \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1)^k\right]\varepsilon(k-1)$$

【7-22】 用图解法求图7-27所示各时间序列的卷积和的图形，并归纳卷积和的表达式中上下限选定的原则。

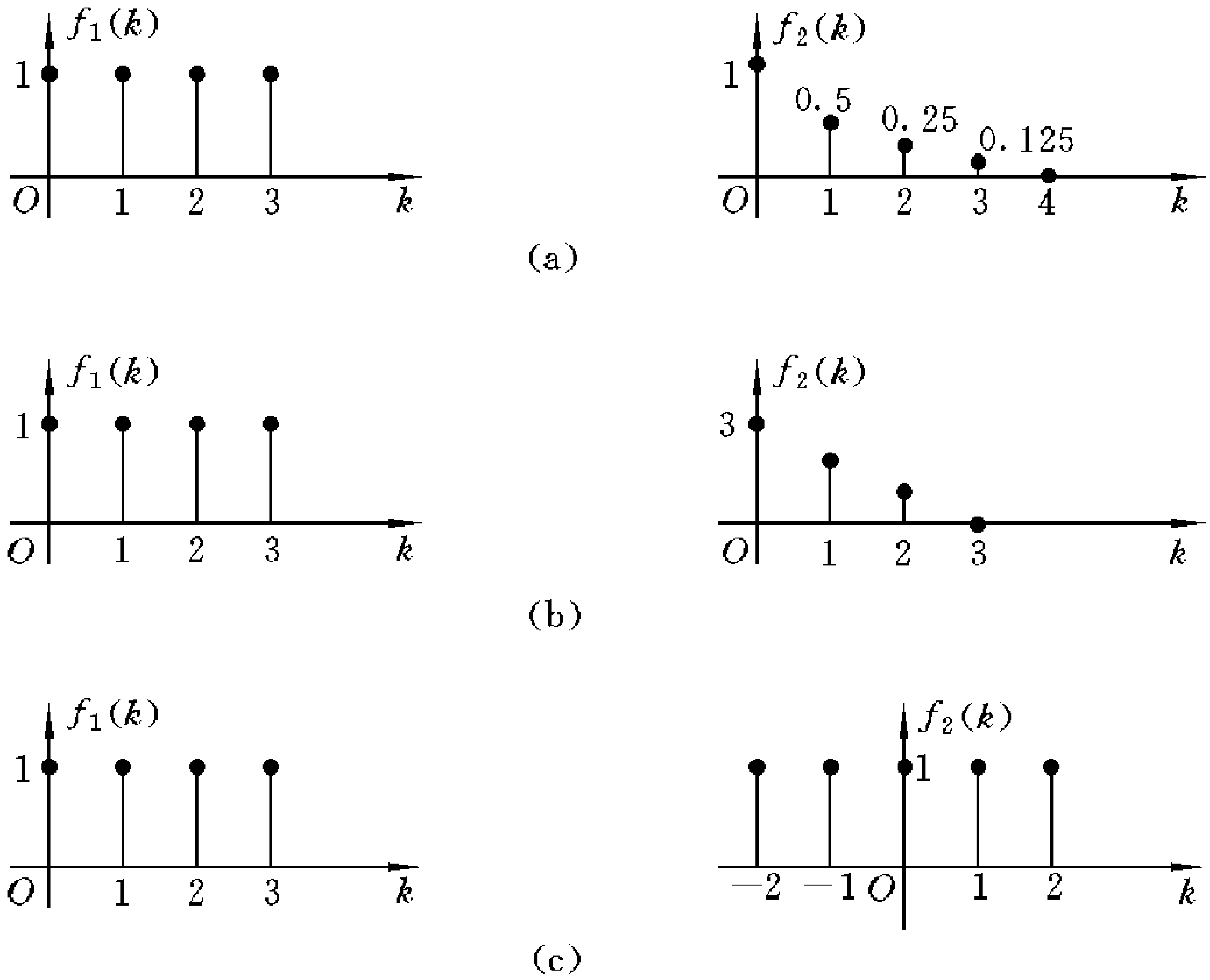


图 7-27

解　(a) 图7-27(a)中，

$$f(k) = f_2(k) * f_1(k) = \sum_{j=0}^{k} f_1(k-j)f_2(j)$$

图形如图7-28所示。

$$f(0) = 1 \times 1 = 1$$

$$f(1) = 1 \times 1 + 1 \times 0.5 = 1.5$$

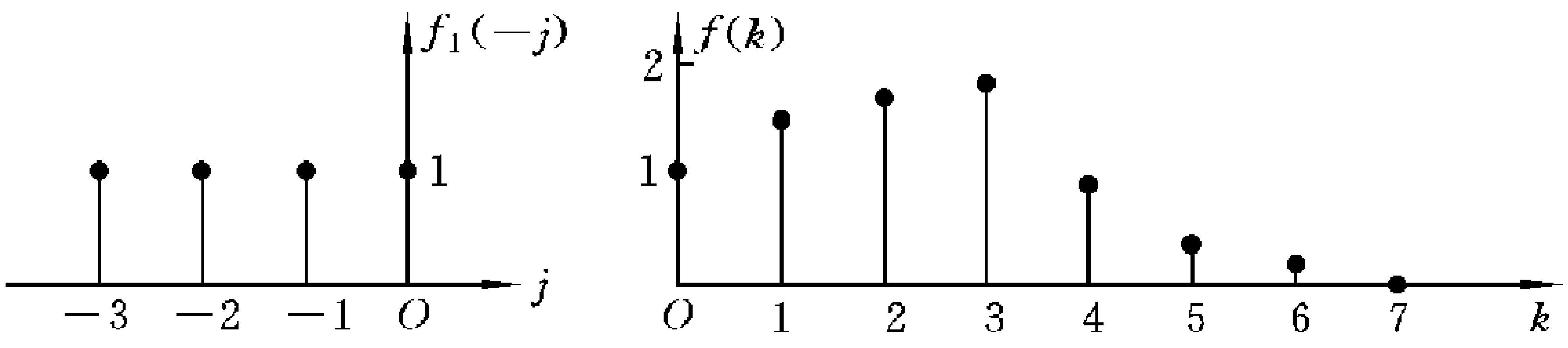


图 7-28

$$f(2) = 1 \times 1 + 1 \times 0.5 + 1 \times 0.25 = 1.75$$

$$f(3) = 1 \times 1 + 1 \times 0.5 + 1 \times 0.25 + 1 \times 0.125 = 1.875$$

$$f(4) = 1 \times 0.5 + 1 \times 0.25 + 1 \times 0.125 = 0.875$$

$$f(5) = 1 \times 0.25 + 1 \times 0.125 = 0.375$$

$$f(6) = 1 \times 0.125 = 0.125$$

$$f(7) = 0$$

(b) 图 7-27(b)中，

$$f(k) = f_2(k) * f_1(k) = \sum_{j=0}^{k} f_1(k-j) f_2(j)$$

图形如图 7-29 所示。

$$f(0) = 1 \times 3 = 3$$

$$f(1) = 1 \times 3 + 1 \times 2 = 5$$

$$f(2) = 1 \times 3 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 6$$

$$f(3) = 1 \times 3 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 6$$

$$f(4) = 1 \times 2 + 1 \times 1 = 3$$

$$f(5) = 1 \times 1 = 1$$

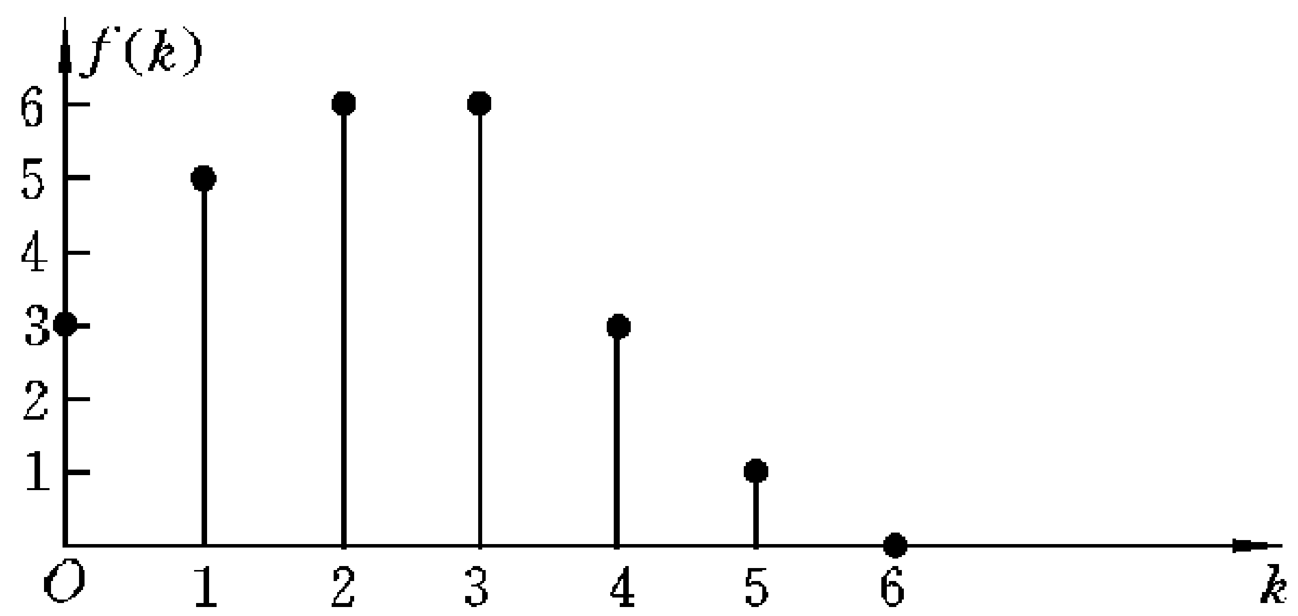


图 7-29

$$f(6)=0$$

(c) 图 7-27(c)中,

$$f(k)=f_2(k)*f_1(k)=\sum_{j=-\infty}^{k}f_1(k-j)f_2(j)$$

图形如图 7-30 所示。

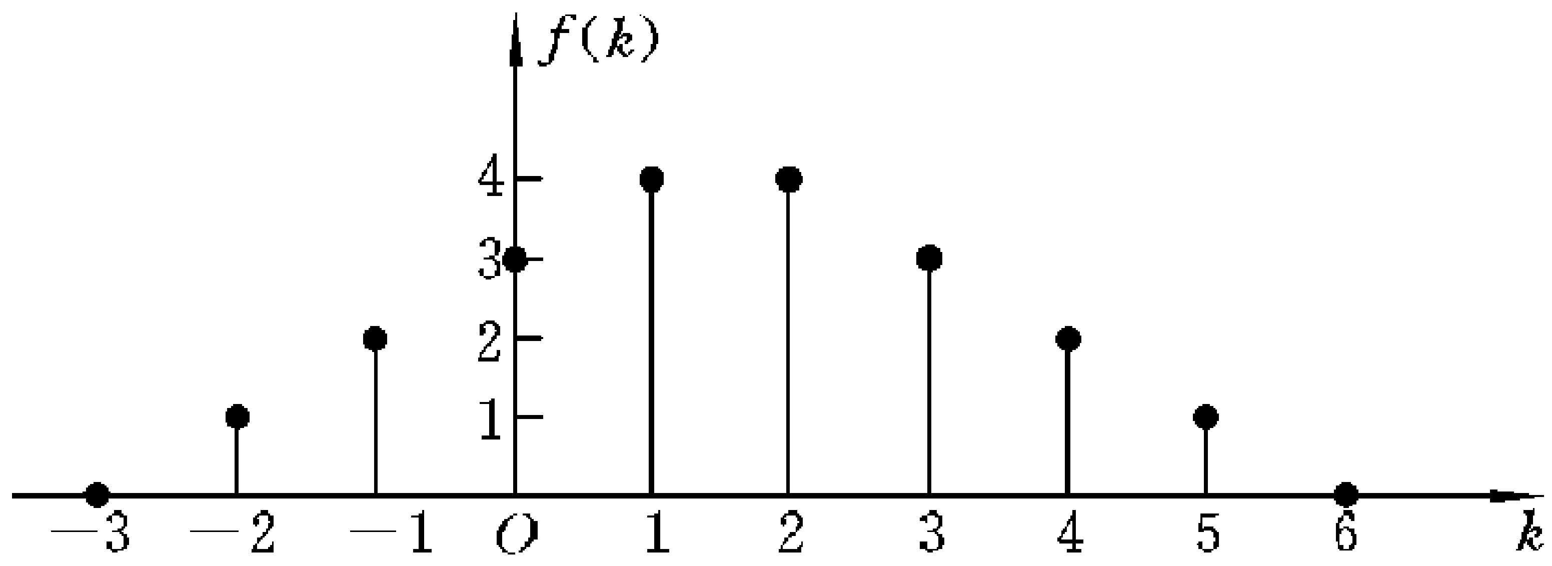


图 7-30

$$f(-1)=1\times1+1\times1=2$$
$$f(-2)=1\times1=1$$
$$f(-3)=0$$
$$f(0)=1\times1+1\times1+1\times1=3$$
$$f(1)=1\times1+1\times1+1\times1+1\times1=4$$
$$f(2)=1\times1+1\times1+1\times1+1\times1=4$$
$$f(3)=1\times1+1\times1+1\times1=3$$
$$f(4)=1\times1+1\times1=2$$
$$f(5)=1\times1=1$$
$$f(6)=0$$

卷积和的表达式中上下限选定的原则参见本章“重点、难点学习指导”。

【7-23】 用卷积图解法求题 7-18 的(4)、(5)、(6)小题所示系统在 $e(k)=k\varepsilon(k)$时零状态响应序列的前七项。

解 (1) 在题 7-18 的(4)小题中,

$$h(k)=\left[\sin\frac{\pi}{2}(k-1)\right]\varepsilon(k-1)$$

$$y_{zs}(k)=h(k)*e(k)=\sum_{j=0}^{k}e(k-j)h(j),\quad 0\leqslant k\leqslant 6$$

图形如图 7-31 所示。

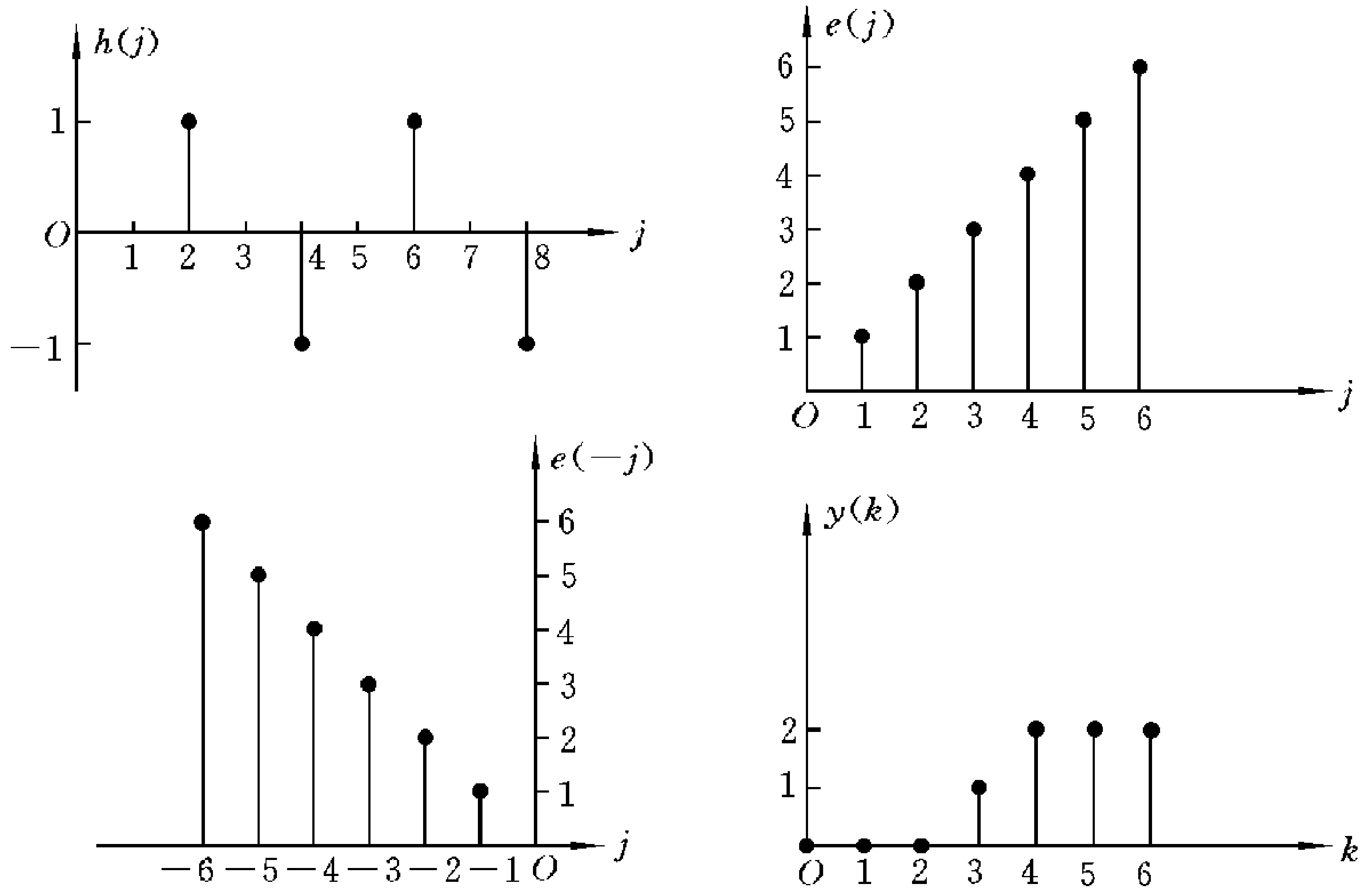


图 7-31

$$y_{zs}(0) = 0$$

$$y_{zs}(1) = 0$$

$$y_{zs}(2) = 0$$

$$y_{zs}(3) = 1 \times 1 = 1$$

$$y_{zs}(4) = 2 \times 1 = 2$$

$$y_{zs}(5) = 3 \times 1 + 1 \times (-1) = 2$$

$$y_{zs}(6) = 4 \times 1 + 2 \times (-1) = 2$$

(2) 在题 7-18 的(5)小题中，

$$h(k) = \frac{1}{2}[1 - (-1)^{k-1}]\varepsilon(k-1)$$

$$y_{zs}(k) = e(k) * h(k) = \sum_{j=0}^{k} e(k-j)h(j), \quad 0 \leqslant k \leqslant 6$$

图形如图 7-32 所示。

$$y_{zs}(0) = 0$$

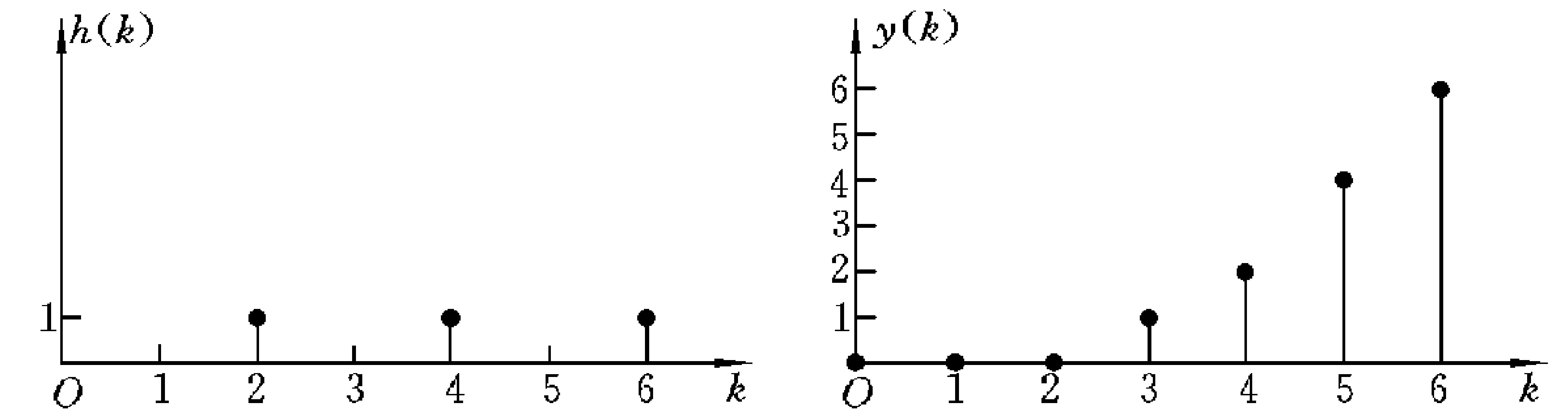


图 7-32

$$y_{zs}(1)=0$$
$$y_{zs}(2)=0$$
$$y_{zs}(3)=1\times1=1$$
$$y_{zs}(4)=2\times1=2$$
$$y_{zs}(5)=1\times1+3\times1=4$$
$$y_{zs}(6)=2\times1+4\times1=6$$

(3) 在题 7-18 的(6)小题中,

$$h(k)=(-1)^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$y_{zs}(k)=h(k)*e(k)=\sum_{j=0}^{k}e(k-j)h(j),\quad 0\leqslant k\leqslant 6$$

图形如图 7-33 所示。

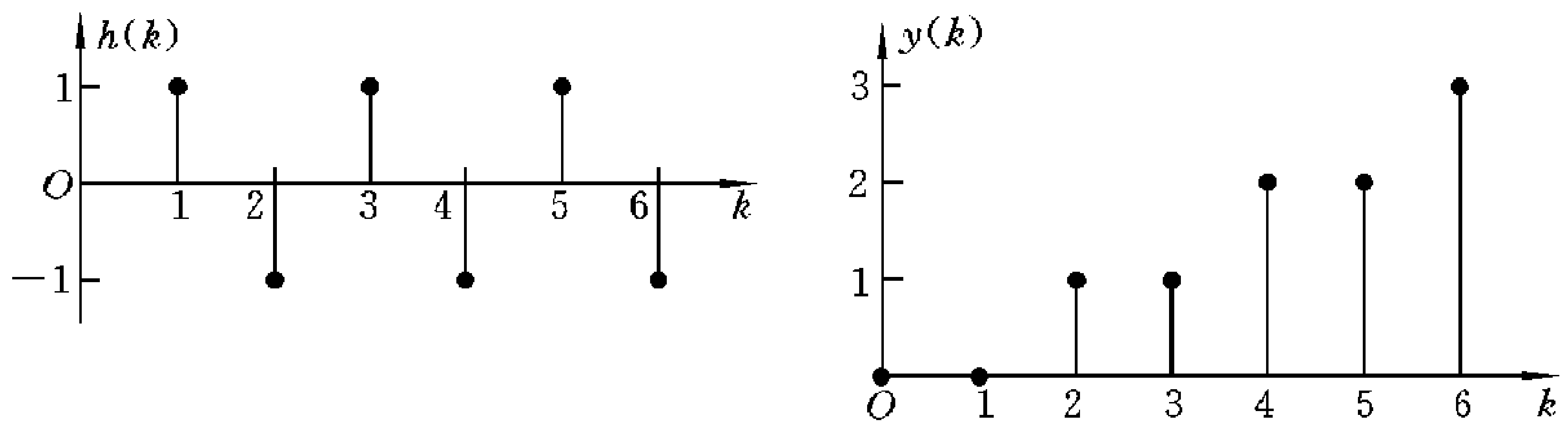


图 7-33

$y_{zs}(0)=0$

$y_{zs}(1)=0$

$y_{zs}(2)=1\times1=1$

$y_{zs}(3)=1\times(-1)+2\times1=1$

$y_{zs}(4)=1\times1+2\times(-1)+3\times1=2$

$y_{zs}(5)=1\times(-1)+2\times1+3\times(-1)+4\times1=2$

$y_{zs}(6)=1\times1+2\times(-1)+3\times1+4\times(-1)+5\times(-1)=3$

【7-24】 求下列序列的卷积和。

(1) $\varepsilon(k)*\varepsilon(k)$　　(2) $0.5^k\varepsilon(k)*\varepsilon(k)$

(3) $2^k\varepsilon(k)*3^k\varepsilon(k)$　　(4) $k\varepsilon(k)*\delta(k-1)$

解 (1) 查卷积和表得

$$\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=(k+1)\varepsilon(k)$$

(2) $0.5^k\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=\dfrac{1-0.5^{k+1}}{0.5}=2(1-0.5^{k+1})\varepsilon(k)$

(3) $2^k\varepsilon(k)*3^k\varepsilon(k)=\dfrac{2^{k+1}-3^{k+1}}{2-3}=(3^{k+1}-2^{k+1})\varepsilon(k)$

(4) 由卷积和的延迟性质得

$$k\varepsilon(k)*\delta(k-1)=(k-1)\varepsilon(k-1)$$

【7-25】 证明卷积和的移序特性，即：若 $e(k)*h(k)=y(k)$，则

$$e(k-k_1)*h(k-k_2)=y(k-k_1-k_2)$$

证 由卷积和的定义得

$$e(k-k_1)*h(k-k_2)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}e(j-k_1)h(k-j-k_2)$$

令 $j-k_1=x$，则

$$e(k-k_1)*h(k-k_2)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}e(x)h[(k-k_1-k_2)-x]=y(k-k_1-k_2)$$

【7-26】 求下列差分方程所示系统的零状态响应。

(1) $y(k+1)+2y(k)=e(k+1)$，　$e(k)=2^k\varepsilon(k)$

(2) $y(k+1)+2y(k)=e(k)$，　$e(k)=2^k\varepsilon(k)$

(3) $y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=e(k)$，　$e(k)=3^k\varepsilon(k)$

(4) $y(k+2)+2y(k+1)+2y(k)=e(k+1)+2e(k)$

　　$e(k)=\delta(k-1)$

解 (1) 运用移序算子，有

$$(S+2)y(k)=Se(k)$$

$$H(S)=\frac{S}{S+2}$$

所以
$$h(k)=(-2)^k\varepsilon(k)$$

$$y_{zs}(k)=e(k)*h(k)=[2^k\varepsilon(k)]*[(-2)^k\varepsilon(k)]$$
$$=\left[\frac{2^{k+1}-(-2)^{k+1}}{2-(-2)}\right]\varepsilon(k)=\frac{1}{2}[2^k+(-2)^k]\varepsilon(k)$$

(2) 运用移序算子,有

$$(S+2)y(k)=e(k)$$

$$H(S)=\frac{1}{S+2}$$

$$\frac{H(S)}{S}=\frac{1}{S(S+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{S+2}\right)$$

$$H(S)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{S}{S+2}$$

所以
$$h(k)=\frac{1}{2}\delta(k)-\frac{1}{2}(-2)^k\varepsilon(k)$$

$$y_{zs}(k)=e(k)*h(k)=[2^k\varepsilon(k)]*\left[\frac{1}{2}\delta(k)-\frac{1}{2}(-2)^k\varepsilon(k)\right]$$
$$=\left[\frac{1}{2}\cdot 2^k-\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{k+1}-(-2)^{k+1}}{2-(-2)}\right]\varepsilon(k)$$
$$=\frac{1}{4}[2^k-(-2)^k]\varepsilon(k)$$

(3) 运用移序算子,有

$$(S^2+3S+2)y(k)=e(k)$$

$$H(S)=\frac{1}{(S+1)(S+2)}$$

$$\frac{H(S)}{S}=\frac{1}{S(S+1)(S+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{S}-\frac{1}{S+1}+\frac{\frac{1}{2}}{S+2}$$

$$H(S)=\frac{1}{2}-\frac{S}{S+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{S+2}$$

所以
$$h(k)=\frac{1}{2}\delta(k)-(-1)^k\varepsilon(k)+\frac{1}{2}(-2)^k\varepsilon(k)$$

$$y_{zs}(k)=e(k)*h(k)$$

$$=[3^k\varepsilon(k)]*\left[\frac{1}{2}\delta(k)-(-1)^k\varepsilon(k)+\frac{1}{2}(-2)^k\varepsilon(k)\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cdot 3^k-\frac{3^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{k+1}-(-2)^{k+1}}{3+2}\right]\varepsilon(k)$$

$$=\left[\frac{1}{20}\cdot 3^k-\frac{1}{4}(-1)^k+\frac{1}{5}(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

(4) 运用移序算子，有

$$(S^2+2S+2)y(k)=(S+2)e(k)$$

$$H(S)=\frac{S+2}{S^2+2S+2}=\frac{1+\mathrm{j}}{2(S+1+\mathrm{j})}+\frac{1-\mathrm{j}}{2(S+1-\mathrm{j})}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}}{S+\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}}+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}}{S+\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}}$$

所以

$$h(k)=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\left(-\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\right)^{k-1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\left(-\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\right)^{k-1}\right]\varepsilon(k-1)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(-\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\right)^k+\left(-\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\right)^k\right]\varepsilon(k-1)$$

$$=-(-\sqrt{2})^k\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)\right]\varepsilon(k-1)$$

$$y_{zs}(k)=e(k)*h(k)$$

$$=\delta(k-1)*\left[-(-\sqrt{2})^k\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)\right]\varepsilon(k-1)$$

$$=-(-\sqrt{2})^{k-1}\left[\cos\frac{\pi}{4}(k-1)\right]\varepsilon(k-2)$$

【7-27】 一离散系统当激励 $e(k)=\varepsilon(k)$时的零状态响应为$2(1-0.5^k)\varepsilon(k)$，求当激励为$e(k)=0.5^k\varepsilon(k)$时的零状态响应。

解　$y_{zs}(k)=e(k)*h(k)$

当$e(k)=\varepsilon(k)$时，

$$y_{zs}(k)=\varepsilon(k)*h(k)=2(1-0.5^k)\varepsilon(k)$$

当$e(k)=\delta(k)$时，

$$y_{zs}(k)=h(k)=\delta(k)*h(k)$$

又因为
$$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$$

所以
$$\begin{aligned}h(k)&=[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)]*h(k)=\varepsilon(k)*h(k)-\varepsilon(k-1)*h(k)\\&=[2(1-0.5^{k})]\varepsilon(k)-[2(1-0.5^{k-1})]\varepsilon(k-1)\\&=0.5^{k-1}\varepsilon(k-1)\end{aligned}$$

所以当$e(k)=0.5^{k}\varepsilon(k)$时，查卷积和表并利用卷积的延迟性质，有

$$y_{zs}(k)=0.5^{k}\varepsilon(k)*0.5^{k-1}\varepsilon(k-1)=k0.5^{k-1}\varepsilon(k)$$

【7-28】 一离散系统的差分方程及初始条件如下：

$$y(k+2)+y(k+1)+y(k)=\varepsilon(k+1)$$

$$y_{zi}(0)=1,\quad y_{zi}(1)=2$$

求：(1) 零输入响应$y_{zi}(k)$，零状态响应$y_{zs}(k)$及全响应$y(k)$。

(2) 比较$k=0,1$时全响应值与给定的初始条件值，说明二者不同的原因。

(3) 绘出该系统的框图。

解 (1) $(S^{2}+S+1)y(k)=e(k)$

$$H(S)=\frac{1}{S^{2}+S+1}=\frac{1}{\left[S+\left(\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left[S+\left(\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{j}}{S+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}}-\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{j}}{S+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}}$$

$$h(k)=\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{3}}\left[\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)^{k-1}-\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)^{k-1}\right]\varepsilon(k-1)$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}(-1)^{k-1}\sin\frac{\pi}{3}(k-1)\varepsilon(k-1)$$

$$y_{zi}(k)=\left[C_{1}\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)^{k}+C_{2}\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)^{k}\right]\varepsilon(k)$$

由起始条件

$$\begin{cases}y_{zi}(0)=C_{1}+C_{2}=1\\y_{zi}(1)=-C_{1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}-C_{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}=2\end{cases}$$

得
$$\begin{cases} C_1=\dfrac{\mathrm{j}}{\sqrt{3}}\left(2+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right) \\ C_2=\dfrac{-\mathrm{j}}{\sqrt{3}}\left(2+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_{zi}(k)&=\left[\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{3}}\left(2+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)^k-\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{3}}(2+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}})(-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}})^k\right]\varepsilon(k) \\ &=\left[-\frac{4}{\sqrt{3}}(-1)^k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}k}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}k}}{2\mathrm{j}}-\frac{2}{\sqrt{3}}(-1)^k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}(k-1)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}(k-1)}}{2\mathrm{j}}\right]\varepsilon(k) \\ &=\left[-\frac{4}{\sqrt{3}}(-1)^k\sin\frac{\pi}{3}k-\frac{2}{\sqrt{3}}(-1)^k\sin\frac{\pi}{3}(k-1)\right]\varepsilon(k) \\ &=-\frac{2}{\sqrt{3}}(-1)^k\left[2\sin\frac{\pi}{3}k+\sin\frac{\pi}{3}(k-1)\right]\varepsilon(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{zs}(k)&=h(k)*e(k) \\ &=\varepsilon(k+1)*\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}(-1)^{k-1}\sin\frac{\pi}{3}(k-1)\varepsilon(k-1)\right] \\ &=\varepsilon(k+1)*\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{3}}(-1)^{k-1}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}(k-1)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}(k-1)}\right]\varepsilon(k-1) \end{aligned}$$

查卷积和表并利用卷积的延迟性质,有

$$\begin{aligned} y_{zs}(k)&=\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{3}}\left[\frac{1-\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)^k}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}}-\frac{1-\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)^k}{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}}\right]\varepsilon(k) \\ &=\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{3}}\left[\frac{\left[1-\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)^k\right]\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)-\left[1-\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)^k\right]\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)}\right]\varepsilon(k) \\ &=\frac{2}{3\sqrt{3}}\left[\sin\frac{\pi}{3}+(-1)^k\left(\sin\frac{\pi}{3}k+\sin\frac{\pi}{3}(k-1)\right)\right]\varepsilon(k) \\ &=\left\{\frac{1}{3}+\frac{2}{3\sqrt{3}}(-1)^k\left[\sin\frac{\pi}{3}k+\sin\frac{\pi}{3}(k-1)\right]\right\}\varepsilon(k) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} y(k)&=y_{zi}(k)+y_{zs}(k) \\ &=-\frac{2}{\sqrt{3}}(-1)^k\left[2\sin\frac{\pi}{3}k+\sin\frac{\pi}{3}(k-1)\right]\varepsilon(k) \\ &\quad+\left\{\frac{1}{3}+\frac{2}{3\sqrt{3}}(-1)^k\left[\sin\frac{\pi}{3}k+\sin\frac{\pi}{3}(k-1)\right]\right\}\varepsilon(k) \end{aligned}$$

$$=\left\{\frac{1}{3}+(-1)^{k-1}\left[\frac{10}{3\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}k+\frac{4}{3\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}(k-1)\right]\right\}\varepsilon(k)$$

(2) $y(0)=\frac{1}{3}+(-1)^{-1}\frac{4}{3\sqrt{3}}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

$$y(1)=\frac{1}{3}+\frac{10}{3\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=2$$

该全响应值与给定初始条件值相同,是因为零状态响应$y_{zs}(0)=y_{zs}(1)=0$。

(3) 系统的框图如图7-34所示。

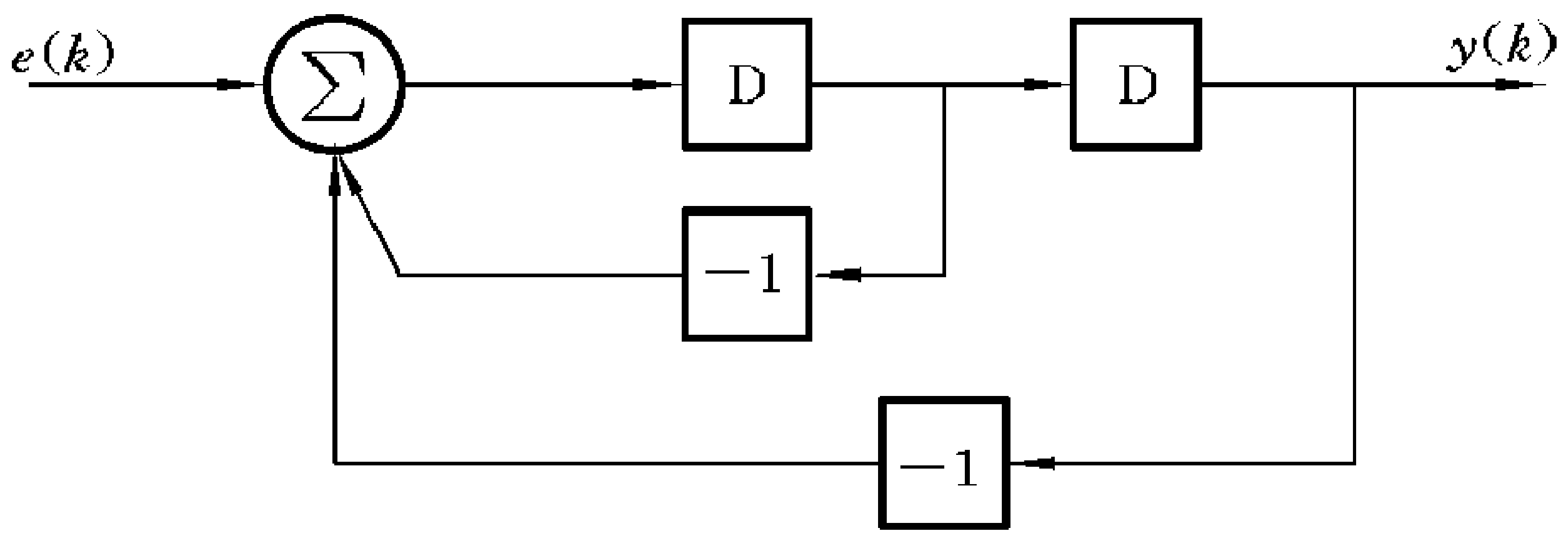


图7-34

【7-29】 一系统的系统方程及初始条件分别如下:

$$y(k+2)-3y(k+1)+2y(k)=e(k+1)-2e(k)$$

$$y_{zi}(0)=y_{zi}(1)=1,\quad e(k)=\varepsilon(k)$$

求:(1) 零输入响应$y_{zi}(k)$,零状态响应$y_{zs}(k)$及全响应$y(k)$。

(2) 判断该系统是否稳定。

(3) 绘出系统框图。

解 (1) 运用移序算子,系统方程可写为

$$(S^2-3S+2)y(k)=(S-2)e(k)$$

$$H(S)=\frac{S-2}{S^2-3S+2}=\frac{S-2}{(S-1)(S-2)}$$

$$y_{zi}(k)=[C_1(1)^k+C_2(2)^k]\varepsilon(k)$$

由初始条件得

$$\begin{cases}y_{zi}(0)=C_1+C_2=1\\ y_{zi}(1)=C_1+2C_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1\\ C_2=0\end{cases}$$

所以 $$y_{zi}(k)=1^k\varepsilon(k)=\varepsilon(k)$$

由$H(S)=\dfrac{S-2}{(S-1)(S-2)}=\dfrac{1}{S-1}$,可得

$$h(k)=(1)^{k-1}\varepsilon(k-1)=\varepsilon(k-1)$$

$$y_{zs}(k)=e(k)*h(k)=\varepsilon(k)*\varepsilon(k-1)=k\varepsilon(k)$$

$$y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)=\varepsilon(k)+k\varepsilon(k)$$

(2) 在复z平面中作系统的特征根γ,按照绝对值$|\gamma|$是否小于1,即γ是否在单位圆内来确定系统是否稳定。

γ及其所对应的自然响应模式如图7-35所示。

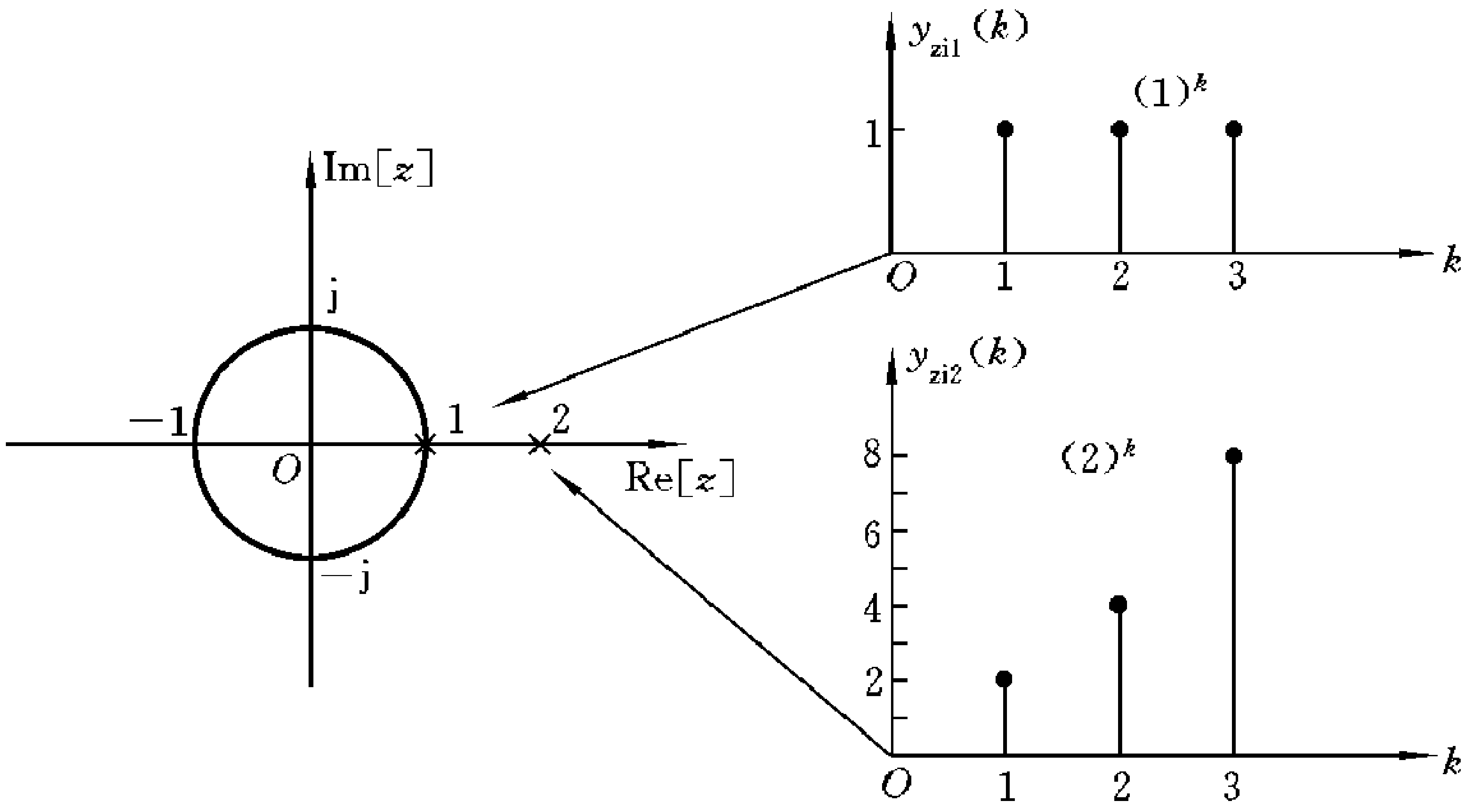


图7-35

因为$\gamma_2=2$,所以系统是不稳定的。

(3) 系统框图如图7-36所示。

【7-30】 有一球由10 m高度自由落下,设每次弹起高度为前次的3/4,求第5次及第8次弹起的高度。

解　依题意,设第k次球弹起的高度为$y(k)$,则差分方程为

$$y(k)-\frac{3}{4}y(k-1)=0,\quad y(0)=10$$

因为该差分方程中激励为零,所以求$y(k)$即是求该差分方程的零输入响应。

由于
$$\left(S-\frac{3}{4}\right)=0\ \Rightarrow\ S=\frac{3}{4}$$

所以
$$y(k)=\left[C\left(\frac{3}{4}\right)^k\right]\varepsilon(k)$$

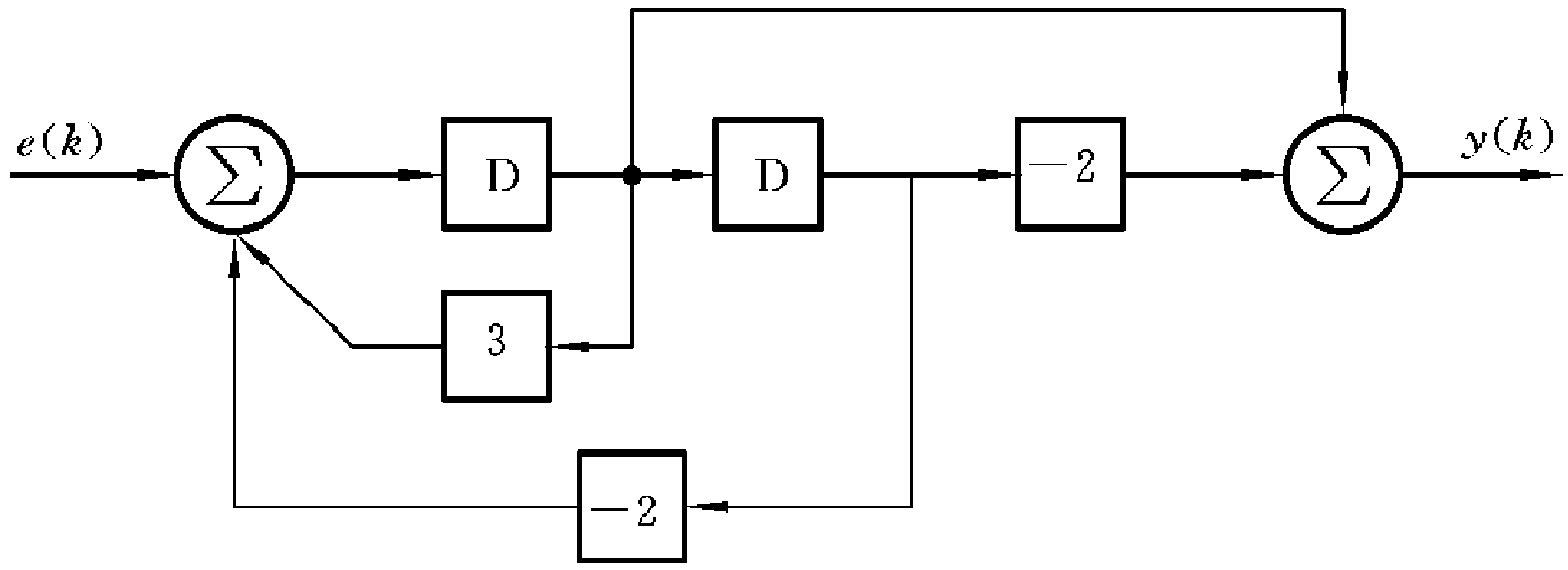


图 7-36

由起始条件知
$$y(0)=C=10$$

所以
$$y(k)=10\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\varepsilon(k)$$

所以
$$y(5)=10\left(\frac{3}{4}\right)^{5}\ \mathrm{m}=2.37\ \mathrm{m}$$
$$y(8)=10\left(\frac{3}{4}\right)^{8}\ \mathrm{m}=1\ \mathrm{m}$$

【7-31】 用差分方程求 0～k 的全部整数和 $y(k)=\sum\limits_{j=0}^{k}j$。

解　依题意，可列差分方程
$$y(k)-y(k-1)=k$$
即相当于 $e(k)=k\varepsilon(k)$，由于该差分方程中初始状态为零，所以求 $y(k)$ 即是求解该差分方程的零状态响应，有
$$Sy(k)-y(k)=e(k)$$
即
$$(S-1)y(k)=e(k)$$
$$H(S)=\frac{1}{S-1}$$
$$h(k)=1^{k-1}\varepsilon(k-1)$$
所以
$$y(k)=e(k)*h(k)=k\varepsilon(k)*1^{k-1}\varepsilon(k-1)$$
$$=k\varepsilon(k)*\varepsilon(k-1)=\sum_{j=0}^{k}j=\frac{k(k+1)}{2}$$

第八章　离散时间系统的变换域分析

8-1　基 本 要 求

本章要求学生深刻理解z变换的定义、收敛域以及z变换与拉普拉斯变换之间的关系。熟练掌握z变换的性质,卷积定理的意义和它们的运用。会根据z变换的定义和性质求解z变换与反z变换。用z变换分析法来分析离散时间系统,并求其响应,包括全响应、零输入响应、零状态响应和单位样值响应。深刻理解系统函数$H(z)$的定义、物理意义及其零极点概念,会用多种方法求解$H(z)$。能根据$H(z)$画出系统的模拟框图,以及根据模拟框图求出$H(z)$。掌握由$H(z)$的极点来判断系统的稳定性。重点掌握z变换、反z变换及其性质,线性时不变系统z域分析以及系统函数的意义和作用。

8-2　重点、难点学习指导

1. z变换

(1) 定义

离散时间信号$f(k)$的z变换定义为

双边z变换:　　$$F(z)=\mathscr{Z}\{f(k)\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k)z^{-k}$$

单边z变换:　　$$F(z)=\mathscr{Z}\{f(k)\}=\sum_{k=0}^{+\infty}f(k)z^{-k}$$

(2) 收敛域

级数$f(k)$收敛的充分必要条件是该级数绝对可和,即

双边z变换:$$\sum_{-\infty}^{+\infty}|f(k)z^{-k}|<+\infty$$

单边 z 变换：$\sum_{0}^{+\infty}|f(k)z^{-k}|<+\infty$

在 z 平面上，满足上式的 z 的取值范围称为 $F(z)$ 的绝对收敛域，简称收敛域。

(3) 常用信号的 z 变换

常用信号的单边 z 变换如表 8-1 所示。

表 8-1　常用信号的单边 z 变换

序号	$f(k)$	$F(z)$
1	$\delta(k)$	1
2	$\varepsilon(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
3	$a^k\varepsilon(k)$	$\dfrac{z}{z-a}$
4	$e^{\alpha k}\varepsilon(k)$	$\dfrac{z}{z-e^{\alpha}}$
5	$k\varepsilon(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
6	$k^2\varepsilon(k)$	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
7	$ka^k\varepsilon(k)$	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$
8	$\sin(\beta k)\varepsilon(k)$	$\dfrac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$
9	$\cos(\beta k)\varepsilon(k)$	$\dfrac{z(z-\cos\beta)}{z^2-2z\cos\beta+1}$

(4) z 变换的基本性质

单边 z 变换的性质如表 8-2 所示。

表 8-2　单边 z 变换的性质

序号	名称	时域	z 域
1	线性	$a_1 f_1(k)+a_2 f_2(k)$	$a_1 F_1(z)+a_2 F_2(z)$
2	移位 ($m>0$)	$f(k-m)\varepsilon(k)$	$z^{-m}F(z)+z^{-m}\sum_{k=-m}^{-1} f(k)z^{-k}$
		$f(k-m)\varepsilon(k-m)$	$z^{-m}F(z)$
		$f(k+m)\varepsilon(k)$	$z^{m}F(z)-z^{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{-k}$
3	z 域尺度变换	$a^k f(k)$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
4	时域卷积	$f_1(k) * f_2(k)$	$F_1(z)\cdot F_2(z)$
5	频域卷积	$f_1(k)\cdot f_2(k)$	$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C \frac{F_1(\eta)\cdot F_2\left(\frac{z}{\eta}\right)}{\eta}\mathrm{d}\eta$
6	z 域微分	$kf(k)$	$-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z)$
7	初值定理	$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)$	
8	终值定理	$f(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$	

(5) 反 z 变换

若已知 $F(z)$ 及其收敛域,则

$$f(k)=\mathscr{Z}^{-1}\{F(z)\}=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C F(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

称为 $F(z)$ 的反 z 变换。求反 z 变换的方法有三种:幂级数展开法、部分分式展开法、留数法。

① 幂级数展开法:将 $F(z)$ 展开成 z^{-k} 的幂级数,则 z^{-k} 的系数就是 $f(k)$ 的

相应项。

② 部分分式展开法：若$\dfrac{F(z)}{z}$为有理真分式，则可将$\dfrac{F(z)}{z}$展开成部分分式，然后乘以z得$F(z)$，再利用常用z变换进行反z变换求出$f(k)$。

③ 留数法：

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C F(z) z^{k-1} \mathrm{d}z \\ &= \sum_i \mathrm{Res}[F(z) z^{k-1}] \Big|_{C\text{内诸极点}z_i} \qquad (k \geqslant 0) \end{aligned}$$

式中，C为包围$F(z)z^{k-1}$全部极点的闭合路径；z_i为$F(z)z^{k-1}$的极点；Res表示极点的留数。

(6) s域与z域的关系

① z变换$F(z)$与拉普拉斯变换$F(s)$的关系：

$$F(s) = F(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{sT}}$$

$$F(z) = F(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$$

可见拉普拉斯变换中复变量s与z变换中复变量z满足关系$z=\mathrm{e}^{sT}$或$s=\dfrac{1}{T}\ln z$。

② 映射关系：根据$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$与$z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$之间的变换关系，有

$\sigma=0$时，$|z|=1$，即s平面的$\mathrm{j}\omega$轴映射成z平面的单位圆周；

$\sigma<0$时，$|z|<1$，即s平面的左半平面映射成z平面的单位圆内；

$\sigma>0$时，$|z|>1$，即s平面的右半平面映射成z平面的单位圆外。

2. 离散时间系统的系统函数$H(z)$

(1) 系统函数定义

系统零状态响应与激励的z变换之比，即

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{F(z)}$$

(2) 系统稳定条件

① 系统稳定的充分必要条件是其单位函数响应绝对可和，即

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$$

② 稳定的因果系统其收敛域为 $|z|\geqslant 1$，即 $H(z)$ 的全部极点必须落在单位圆之内。

(3) 离散时间系统的频率特性

$$H(e^{j\omega T}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}} = |H(e^{j\omega T})|e^{j\varphi(\omega)}$$

式中，$H(e^{j\omega T})$ 为系统频率特性，是频率 ω 的周期函数；$|H(e^{j\omega T})|$ 称为幅频特性，是 ω 的偶函数，$\varphi(\omega)$ 称为相频特性，是 ω 的奇函数。

(4) 离散系统的正弦稳态响应

若已知激励 $f(k)=A\cos(\omega Tk+\theta)\varepsilon(k)$，系统频率特性 $H(e^{j\omega T})=|H(e^{j\omega T})|e^{j\varphi(\omega T)}$，则系统的正弦稳态响应为

$$y(k) = A|H(e^{j\omega T})|\cos[\omega Tk + \theta + \varphi(\omega T)]\varepsilon(k)$$

3. 离散时间系统的 z 变换分析法

离散时间系统的 z 域分析的一般步骤：

① 建立系统差分方程；

② 对差分方程两边同时进行 z 变换，得 z 域代数方程；

③ 求解 z 域代数方程，求得响应的 z 域解；

④ 对 z 域解进行反 z 变换，求得响应的时域解。

8-3 习 题 详 解

【8-1】 利用定义式求下列序列的 z 变换并标注收敛区。

(1) $f(k)=\{1,-1,1,-1,1,\cdots\}$　　(2) $f(k)=\{0,1,0,1,0,\cdots\}$

(3) $f(k)=\delta(k-k_0)(k_0>0)$　　(4) $f(k)=\delta(k+k_0)(k_0>0)$

(5) $f(k)=0.5^k\varepsilon(k-1)$　　(6) $f(k)=-\varepsilon(-k-1)$

解 (1) 由 z 变换的定义得

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k}=1-z^{-1}+z^{-2}-z^{-3}+z^{-4}-\cdots=\frac{1}{1-z^{-2}}+\frac{-z^{-1}}{1-z^{-2}}$$

$$=\frac{z}{z+1}$$

收敛区：$|z|>1$

(2) 由 z 变换定义得

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k}=0\times1+1\times z^{-1}+0\times z^{-2}+1\times z^{-3}+0\times z^{-4}+\cdots$$

$$=\frac{z^{-1}}{1-z^{-2}}=\frac{z}{z^2-1}$$

收敛区：$|z|>1$

(3) 由 z 变换定义得

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(k-k_0)z^{-k}=z^{-k_0}$$

收敛区：除零点外的全 z 平面

(4) 由 z 变换定义得

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(k+k_0)z^{-k}=z^{k_0}$$

收敛区：除 $+\infty$ 点外的全 z 平面

(5) 由 z 变换定义得

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}0.5^k\varepsilon(k-1)z^{-k}=\sum_{k=1}^{+\infty}0.5^k z^{-k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2z)^k}=\frac{1}{2z-1}$$

收敛区：$|z|>\frac{1}{2}$

(6) 由 z 变换定义得

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}-\varepsilon(-k-1)z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{-1}-z^{-k}=-\frac{z}{1-z}$$

收敛区：$|z|<1$

【8-2】 求下列序列的 z 变换，并标注收敛区。

(1) $(k-3)\varepsilon(k-3)$　　(2) $(k-3)\varepsilon(k)$　　(3) $|k-3|\varepsilon(k)$

解　(1) $\mathscr{Z}\{(k-3)\varepsilon(k-3)\}=z^{-3}\cdot\mathscr{Z}[k\cdot\varepsilon(k)]$　(z 变换移序性质)

$$=z^{-3}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{1}{z^2(z-1)^2}$$

收敛区：$|z|>1$

(2) $\mathscr{Z}\{(k-3)\varepsilon(k)\}=\mathscr{Z}\{k\varepsilon(k)\}-\mathscr{Z}\{3\varepsilon(k)\}$　(z 变换线性性质)

$$=\frac{z}{(z-1)^2}-3\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{4z-3z^2}{(z-1)^2}$$

收敛区：$|z|>1$

(3) $\mathscr{Z}\{|k-3|\varepsilon(k)\}=\sum_{k=0}^{2}(3-k)z^{-k}+\sum_{k=3}^{+\infty}(k-3)z^{-k}$

$$=3+2z^{-1}+z^{-2}+\mathscr{Z}\{(k-3)\varepsilon(k-3)\}\quad (z\text{ 变换定义})$$

因为 $$\mathscr{Z}\{k\varepsilon(k)\}=\frac{z}{(z-1)^2},\quad |z|>1$$

所以 $\mathscr{Z}\{(k-3)\varepsilon(k-3)\}$

$$=\frac{z}{z^3(z-1)^2}=\frac{1}{z^2(z-1)^2},\quad |z|>1\quad (z\text{ 变换移序性质})$$

$$\mathscr{Z}\{|k-3|\varepsilon(k)\}=\frac{1}{z^2(z-1)^2}+3+2z^{-1}+z^{-2}$$

收敛区：$|z|>1$

【8-3】 运用 z 变换的性质求下列序列的 z 变换。

(1) $f(k)=\frac{1}{2}[1+(-1)^k]\varepsilon(k)$　　(2) $f(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-8)$

(3) $f(k)=k(-1)^k\varepsilon(k)$　　(4) $f(k)=k(k-1)\varepsilon(k)$

(5) $f(k)=\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\varepsilon(k)$　　(6) $f(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{k\pi}{2}\varepsilon(k)$

解　(1) 由 z 变换线性性质得

$$\mathscr{Z}\{f(k)\}=\mathscr{Z}\left\{\frac{1}{2}[1+(-1)^k]\varepsilon(k)\right\}=\mathscr{Z}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon(k)\right\}+\frac{1}{2}\mathscr{Z}\{(-1)^k\varepsilon(k)\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-(-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z+1}\right)$$

$$=\frac{2z^2}{2(z^2-1)}=\frac{z^2}{z^2-1},\quad |z|>1$$

(2) 由 z 变换线性性质得

$$\mathscr{Z}\{\varepsilon(k)-\varepsilon(k-8)\}=\mathscr{Z}\{\varepsilon(k)\}-\mathscr{Z}\{\varepsilon(k-8)\}$$

$$=\frac{z}{z-1}-z^{-8}\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$=(1-z^{-8})\frac{z}{z-1},\quad |z|>1$$

(3) 由 z 变换线性性质得

$$\mathscr{Z}\{k(-1)^k\varepsilon(k)\} = -\mathscr{Z}\{k(-1)^{k-1}\varepsilon(k)\}$$

$$= -\frac{z}{(z-(-1))^2} = \frac{-z}{(z+1)^2}, \quad |z|>1$$

(4) 由时域线性加权和 z 域微分特性得

$$\mathscr{Z}\{\varepsilon(k)\} = \frac{z}{z-1}$$

$$\mathscr{Z}\{k\varepsilon(k)\} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathscr{Z}\{\varepsilon(k)\} = -z\cdot\frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\mathscr{Z}\{k^2\varepsilon(k)\} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathscr{Z}\{k\varepsilon(k)\} = -z\cdot\frac{\mathrm{d}\dfrac{z}{(z-1)^2}}{\mathrm{d}z} = \frac{-z(1-z^2)}{(z-1)^4} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

由 z 变换线性性质得

$$\mathscr{Z}\{k(k-1)\varepsilon(k)\} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z(z+1)-z(z-1)}{(z-1)^3}$$

$$= \frac{2z}{(z-1)^3}, \quad |z|>1$$

(5) 由 z 变换线性性质得

$$\mathscr{Z}\left\{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\varepsilon(k)\right\} = \mathscr{Z}\left\{\frac{e^{j\frac{k\pi}{2}}+e^{-j\frac{k\pi}{2}}}{2}\varepsilon(k)\right\}$$

$$= \mathscr{Z}\left\{\frac{1}{2}(e^{\frac{j\pi}{2}})^k\varepsilon(k)\right\} + \mathscr{Z}\left\{\frac{1}{2}(e^{-j\frac{\pi}{2}})^k\varepsilon(k)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-e^{j\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \frac{z^2}{z^2+1}, |z|>1$$

(6) 由尺度变换特性得

$$\mathscr{Z}\left\{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\varepsilon(k)\right\} = \frac{z^2}{z^2+1}, \quad |z|>1$$

$$\mathscr{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\varepsilon(k)\right\} = \frac{(2z)^2}{(2z)^2+1} = \frac{4z^2}{4z^2+1}, \quad |z|>\frac{1}{2}$$

【8-4】 已知 $f(k)=(a)^k\varepsilon(k)$，用卷积定理求 $f_1(k)=\sum\limits_{n=0}^{k}f(n)$ 的 z 变换。

解 $f_1(k)=\sum\limits_{n=0}^{k}f(n)=\sum\limits_{n=0}^{k}f(n)\varepsilon(k-n)=f(k)*\varepsilon(k)$

对上式两边取 z 变换得

$$F_1(z) = \frac{z}{z-1}F(z)$$

因为
$$F(z)=\frac{z}{z-a},\quad |z|>|a|$$
所以
$$F_1(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-a)}$$

【8-5】 用终值定理求序列 $f(k)=b(1-\mathrm{e}^{-akT})\varepsilon(k)$ 的终值。

解 $$\mathscr{Z}\{f(k)\}=\mathscr{Z}\{b(1-\mathrm{e}^{-akT})\varepsilon(k)\}=\frac{bz}{z-1}-\frac{b\mathrm{e}^{-aT}}{z-\mathrm{e}^{-aT}}$$
$$=\frac{bz(z-\mathrm{e}^{-aT})-b(z-1)\mathrm{e}^{-aT}}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-aT})}$$
由终值定理得
$$f(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)F(z)=\lim_{z\to1}\frac{bz(z-\mathrm{e}^{-aT})-b(z-1)\mathrm{e}^{-aT}}{z-\mathrm{e}^{-aT}}=b$$

【8-6】 若序列的 z 变换如下，求该序列的前三项。

(1) $F(z)=\dfrac{z^2}{(z-2)(z-1)},\quad |z|>2$

(2) $F(z)=\dfrac{z^2+z+1}{(z-1)(z+0.5)},\quad |z|>1$

(3) $F(z)=\dfrac{z^2-z}{(z-1)^3},\quad |z|>1$

(4) $F(z)=\dfrac{z^2-z}{(z-1)^3},\quad |z|<1$

解 (1) $$F(z)=\frac{z^2-1+1}{(z-2)(z-1)}=\frac{z+1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)(z-1)}$$
$$=\frac{3}{z-2}+1+\frac{1}{(z-2)(z-1)}$$
$$=1+\frac{3}{z-2}+\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=1+\frac{4}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$
求反 z 变换：
$$f(k)=\delta(k)+4\cdot2^{k-1}\varepsilon(k-1)-\varepsilon(k-1)$$
序列头三项为1，3，7。

(2) $$F(z)=\frac{z^2+z+1}{z^2+0.5z-z-0.5}=\frac{z^2+z+1}{z^2-0.5z-0.5}=1+\frac{3(z+1)}{(z-1)(2z+1)}$$
$$=1+\frac{2}{z-1}+\frac{-1}{2z+1}=1+\frac{2}{z-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{z+\frac{1}{2}}$$

求反 z 变换：

$$f(k)=\delta(k)+2\varepsilon(k-1)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

序列头三项为 $1,\frac{3}{2},\frac{9}{4}$。

(3) $F(z)=\frac{z(z-1)}{(z-1)^3}=\frac{z}{(z-1)^2}$

求反 z 变换：

$$f(k)=k\varepsilon(k)$$

序列头三项为 0,1,2。

(4) $F(z)=\frac{z(z-1)}{(z-1)^3}=\frac{z}{(z-1)^2}$

令 $w=\frac{1}{z}$,则

$$F\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{\frac{1}{w}}{\left(\frac{1}{w}-1\right)^2}=\frac{w}{(w-1)^2}$$

求反 z 变换：　$\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{w}{(w-1)^2}\right\}=f(-n)=n\varepsilon(n)$

令 $k=-n$,则

$$f(k)=-k\varepsilon(-k)$$

序列头三项($k=0,-1,-2$)为 0,1,2。

【8-7】 用部分分式展开法及留数法求下列 $F(z)$ 对应的原右边序列。

(1) $F(z)=\frac{10z^2}{(z-1)(z+1)}$　　(2) $F(z)=\frac{z^2+2z}{(z^2-1)(z+0.5)}$

(3) $F(z)=\frac{2z^2-3z+1}{z^2-4z-5}$　　(4) $F(z)=\frac{4z^3+7z^2+3z+1}{z^3+z^2+z}$

(5) $F(z)=\frac{8(1-z^{-1}-z^{-2})}{2+5z^{-1}+2z^{-2}}$　　(6) $F(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}$

解　(1) 部分分式展开法：

因为　$F(z)=\frac{10z^2}{(z-1)(z+1)}$

则

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{10z}{(z-1)(z+1)}=\frac{5}{z-1}+\frac{5}{z+1}$$

所以 $$f(k)=[5+5(-1)^k]\varepsilon(k)$$

留数法：

$$F(z)z^{k-1}=\frac{10z^{k+1}}{(z-1)(z+1)}$$

当 $k\geqslant 0$ 时，$F(z)z^{k-1}$ 有两个极点 $z_1=1,z_2=-1$。它的两个极点处的留数如下。

$F(z)z^{k-1}$ 在 $z=-1$ 处的留数为

$$\operatorname{Res}[F(z)z^{k-1}]\Big|_{z=-1}=\frac{10z^{k+1}(z+1)}{(z-1)(z+1)}\Big|_{z=-1}=5(-1)^k$$

$F(z)z^{k-1}$ 在 $z=1$ 处的留数为

$$\operatorname{Res}[F(z)z^{k-1}]\Big|_{z=1}=\frac{10z^{k+1}(z+1)}{(z-1)(z+1)}\Big|_{z=1}=5$$

所以 $$f(k)=\sum\operatorname{Res}[F(z)z^{k-1}]=(5+5(-1)^k)\varepsilon(k)$$

(2) 部分分式展开法：

因为 $$\frac{F(z)}{z}=\frac{z+2}{(z+1)(z-1)(z+0.5)}=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}-\frac{2}{z+0.5}$$

$$F(z)=\frac{z}{z+1}+\frac{z}{z-1}-\frac{2z}{z+0.5}$$

所以 $$f(k)=\{(-1)^k+1-2(-0.5)^k\}\varepsilon(k)$$

留数法：

$$F(z)\cdot z^{k-1}=\frac{(z+2)z^k}{(z+1)(z-1)(z+0.5)}$$

当 $k\geqslant 0$ 时，$F(z)z^{k-1}$ 有三个极点 $z_1=-1,z_2=1,z_3=-0.5$。它的三个极点处的留数分别如下。

$F(z)z^{k-1}$ 在 $z=-1$ 处的留数为

$$\operatorname{Res}[F(z)z^{k-1}]\Big|_{z=-1}=\frac{(z+2)z^k}{(z-1)(z+0.5)}\Big|_{z=-1}=(-1)^k$$

$F(z)z^{k-1}$ 在 $z=1$ 处的留数为

$$\operatorname{Res}[F(z)z^{k-1}]\Big|_{z=1}=\frac{(z+2)z^k}{(z+1)(z+0.5)}\Big|_{z=1}=1$$

$F(z)z^{k-1}$ 在 $z=-0.5$ 处的留数为

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]\bigg|_{z=-0.5}=\frac{(z+2)z^k}{(z+1)(z-1)}\bigg|_{z=-0.5}=-2(-0.5)^k$$

所以　　$f(k)=\sum \mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]=[(-1)^k+1-2(-0.5)^k]\varepsilon(k)$

(3) 部分分式展开法：

因为　　$$\frac{F(z)}{z}=\frac{2z^2-3z+1}{(z^2-4z-5)z}=\frac{2z^2-3z+1}{z(z-5)(z+1)}=\frac{k_1}{z-5}+\frac{k_2}{z+1}+\frac{k_3}{z}$$

$$k_1=\frac{2z^2-3z+1}{z(z+1)}\bigg|_{z=5}=\frac{6}{5}$$

$$k_2=\frac{2z^2-3z+1}{z(z-5)}\bigg|_{z=-1}=1$$

$$k_3=\frac{2z^2-3z+1}{(z-5)(z+1)}\bigg|_{z=0}=-\frac{1}{5}$$

所以　　$$\frac{F(z)}{z}=\frac{6}{5(z-5)}+\frac{1}{z+1}+\frac{-\frac{1}{5}}{z}$$

$$F(z)=\frac{6z}{5(z-5)}+\frac{z}{z+1}-\frac{1}{5}$$

故　　$$f(k)=6\times 5^{k-1}\varepsilon(k)+(-1)^k\varepsilon(k)+\left(-\frac{1}{5}\right)\delta(k)$$

留数法：

$$F(z)z^{k-1}=\frac{(2z^2-3z+1)}{(z+1)(z-5)}z^{k-1}\quad(k\geqslant 0)$$

当$k=0$时，$F(z)z^{k-1}$有三个极点$z_1=0,z_2=-1,z_3=5$。各极点留数分别为

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]\bigg|_{z=0}=\frac{2z^2-3z+1}{(z+1)(z-5)}\bigg|_{z=0}=-\frac{1}{5}$$

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]\bigg|_{z=-1}=\frac{2z^2-3z+1}{z(z-5)}\bigg|_{z=-1}=1$$

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]\bigg|_{z=5}=\frac{2z^2-3z+1}{z(z+1)}\bigg|_{z=5}=\frac{6}{5}$$

$$f_1(k)=\sum \mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]=-\frac{1}{5}+1+\frac{6}{5}=2$$

当$k\geqslant 1$时，$F(z)z^{k-1}$有两个极点$z_1=-1,z_2=5$。各极点留数分别为

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]\Big|_{z=-1}=\frac{(2z^2-3z+1)z^{k-1}}{z-5}\Big|_{z=-1}=(-1)^k$$

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]\Big|_{z=5}=\frac{(2z^2-3z+1)z^{k-1}}{z+1}\Big|_{z=5}=6(5)^{k-1}$$

$$f_2(k)=\sum\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]$$

$$=[(-1)^k+6(-5)^{k-1}]\varepsilon(k-1)$$

因此　　$f(k)=f_1(k)+f_2(k)=2\delta(k)+[(-1)^k+6(5)^{k-1}]\varepsilon(k-1)$

(4) 部分分式展开法：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z}+2\left[\frac{z+\frac{1}{2}}{z^2+z+1}+\frac{\frac{3}{2}}{z^2+z+1}\right]$$

$$F(z)=\frac{1}{z}+2+2\left[\frac{z\left(z+\frac{1}{2}\right)}{z^2+z+1}+\frac{\frac{3}{2}z}{z^2+z+1}\right]$$

由反 z 变换得

$$f(k)=2\delta(k)+\delta(k-1)+2\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi k\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{2}{3}\pi k\right)\right)$$

$$=2\delta(k)+\delta(k-1)+4\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi k\right)\cos\frac{\pi}{3}+\sin\left(\frac{2}{3}\pi k\right)\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\delta(k)+\delta(k-1)+4\cos\left(\frac{2}{3}\pi k-\frac{\pi}{3}\right)\varepsilon(k)$$

留数法：

$$F(z)\cdot z^{k-1}=\frac{(4z^3+7z^2+3z+1)z^{k-1}}{z^3+z^2+z}$$

$$=\frac{(4z^3+7z^2+3z+1)z^{k-2}}{z^2+z+1}\quad(k\geqslant 0)$$

当 $k=0$ 时，$F(z)z^{k-1}$ 有四个极点

$$z_{1,2}=0,\quad z_3=\frac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{j}}{2},\quad z_4=\frac{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{j}}{2}$$

$$f_1(k)=\sum\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{4z^3+7z^2+3z+1}{z^2+z+1}\right)\Bigg|_{z_{1,2}=0}$$

$$+\left.\frac{(4z^3+7z^2+3z+1)}{z^2\left(z-\frac{-1-\sqrt{3}\,j}{2}\right)}\right|_{z=\frac{-1+\sqrt{3}\,j}{2}}$$

$$+\left.\frac{4z^3+7z^2+3z+1}{z^2\left(z-\frac{-1+\sqrt{3}\,j}{2}\right)}\right|_{z=\frac{-1-\sqrt{3}\,j}{2}}=4$$

当$k=1$时,$F(z)z^{k-1}$有三个极点

$$z_1=0,\quad z_2=\frac{-1+\sqrt{3}\,j}{2},\quad z_3=\frac{-1-\sqrt{3}\,j}{2}$$

$$f_2(k)=\sum\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]=\left.\frac{4z^3+7z^2+3z+1}{z^2+z+1}\right|_{z=0}$$

$$+\left.\frac{4z^3+7z^2+3z+1}{z^2\left(z-\frac{-1-\sqrt{3}\,j}{2}\right)}\right|_{z=\frac{-1+\sqrt{3}\,j}{2}}$$

$$+\left.\frac{4z^3+7z^2+3z+1}{z^2\left(z-\frac{-1+\sqrt{3}\,j}{2}\right)}\right|_{z=\frac{-1-\sqrt{3}\,j}{2}}=3$$

当$k\geqslant 2$时,$F(z)z^{k-1}$有两个极点

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{3}\,j}{2},\quad z_2=\frac{-1-\sqrt{3}\,j}{2}$$

$$f_3(k)=\sum\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]=\left.\frac{(4z^3+7z^2+3z+1)z^{k-2}}{z-\frac{-1+\sqrt{3}\,j}{2}}\right|_{z=\frac{-1-\sqrt{3}\,j}{2}}$$

$$+\left.\frac{(4z^3+7z^2+3z+1)z^{k-2}}{z-\frac{-1-\sqrt{3}\,j}{2}}\right|_{z=\frac{-1+\sqrt{3}\,j}{2}}$$

$$=4(-1)^{k-1}\cos\frac{\pi(k-2)}{3}\varepsilon(k-2)$$

所以

$$f(k)=f_1(k)+f_2(k)+f_3(k)$$

$$= 4\delta(k) + 3\delta(k-1) + 4(-1)^{k-1}\cos\frac{(k-2)\pi}{3}\varepsilon(k-2)$$

(5) 部分分式展开法：

因为 $$\frac{F(z)}{z}=\frac{8(1-z^{-1}-z^{-2})}{z(2+5z^{-1}+2z^{-2})}=\frac{-4}{z}+\frac{\frac{20}{3}}{z+2}+\frac{\frac{4}{3}}{z+\frac{1}{2}}$$

$$F(z)=-4+\frac{20}{3}\cdot\frac{z}{z+2}+\frac{\frac{4}{3}z}{z+\frac{1}{2}}$$

所以 $$f(k)=-4\delta(k)+\left[\frac{20}{3}(-2)^k+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right]\varepsilon(k)$$

留数法：

$$F(z)z^{k-1} = \frac{4(z^2-z-1)}{z^2+\frac{5}{2}z+1}z^{k-1} = \frac{4(z^2-z-1)}{(z+2)\left(z+\frac{1}{2}\right)}z^{k-1}$$

当 $k=0$ 时，$F(z)z^{k-1}$ 有三个极点

$$z_1 = 0, z_2 = -\frac{1}{2}, z_3 = -2$$

$$f_1(k) = \sum \mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}] = \left.\frac{4(z^2-z-1)}{(z+2)\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=0}$$

$$+\left.\frac{4(z^2-z-1)}{z(z+2)}\right|_{z=-\frac{1}{2}}+\left.\frac{4(z^2-z-1)}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=-2}$$

$$=-4+\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=4$$

当 $k\geqslant 1$ 时，$F(z)z^{k-1}$ 有两个极点

$$z_1=-\frac{1}{2},\quad z_2=-2$$

$$f_2(k)=\sum\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]=\left.\frac{4(z^2-z-1)}{z+2}\right|_{z=-\frac{1}{2}}+\left.\frac{4(z^2-z-1)}{z+\frac{1}{2}}\right|_{z=-2}$$

$$=\left[\frac{20}{3}(-2)^k+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right]\varepsilon(k-1)$$

所以　$f(k)=f_1(k)+f_2(k)=4\delta(k)+\left[\frac{20}{3}(-2)^k+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right]\varepsilon(k-1)$

(6) 部分分式展开法：

因为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{1+z^{-1}}{(1-z^{-1}-z^{-2})z}=\frac{z+1}{\left(z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)}{z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)}{z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$F(z)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)\left(\frac{z}{z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)\left(\frac{z}{z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)$$

所以 $f(k)=\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\right.$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]\varepsilon(k)$$

留数法：

$$F(z)z^{k-1}=\frac{(1+z^{-1})z^{k-1}}{(1-z^{-1}-z^{-2})}=\frac{(z^2+z)z^{k-1}}{z^2-z-1}=\frac{z^k(z+1)}{z^2-z-1}$$

当 $k\geqslant 0$ 时，$F(z)z^{k-1}$ 有两个极点

$$z_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad z_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$f(k)=\sum \mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]$$

$$=\left.\frac{z^k(z+1)}{\left(z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}\right|_{z=\frac{1-\sqrt{5}}{2}}+\left.\frac{z^k(z+1)}{\left(z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}\right|_{z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\Bigg]\varepsilon(k)$$

【8-8】 求下列z变换的原序列。

(1) $F(z)=7z^{-1}+3z^{-2}-8z^{-10},|z|>0$

(2) $F(z)=2z+3+4z^{-1},0<|z|<+\infty$

(3) $F(z)=\dfrac{z^4-1}{z^4-z^3},\quad |z|>1$

(4) $F(z)=\dfrac{z-5}{z+2},\quad |z|>2$

解 (1) $f(k)=7\delta(k-1)+3\delta(k-2)-8\delta(k-10)$

(2) 因为 $$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k)z^{-k}=2z+3z^{-0}+4z^{-1}$$

所以 $$f(k)=2\delta(k+1)+3\delta(k)+4\delta(k-1)$$

(3) 因为

$$\begin{aligned}F(z)&=\frac{(z^2-1)(z^2+1)}{z^3(z-1)}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}\\&=z^0+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}\end{aligned}$$

所以 $$\begin{aligned}f(k)&=\delta(k)+\delta(k-1)+\delta(k-2)+\delta(k-3)\\&=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-4)\end{aligned}$$

(4) 因为 $$F(z)=\frac{z-5}{z+2}=\frac{z}{z+2}-\frac{5}{z+2}$$

所以 $$f(k)=(-2)^k\varepsilon(k)-5(-2)^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

【8-9】 求下列序列的双边z变换。

(1) $f(k)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\varepsilon(-k-1)$

(2) $f(k)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\varepsilon(k)+2^k\varepsilon(-k-1)$　(3) $f(k)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|k|}$

解 (1) 由双边z变换定义得

$$\begin{aligned}F(z)&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(-k-1)z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^kz^{-k}\\&=\sum_{k=-\infty}^{-1}(2z)^{-k}\overline{\overline{\quad k=-n\quad}}\sum_{n=1}^{+\infty}(2z)^n=\frac{-2z}{2z-1}\end{aligned}$$

收敛区：$|z|<\dfrac{1}{2}$

(2) 由双边z变换定义得

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\varepsilon(k)+2^{k}\varepsilon(-k-1)\right]z^{-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}(3z)^{-k}+\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}z\right)^{-k}=\frac{1}{1-\frac{1}{3z}}+\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}z\right)^{-k}$$

$$\xlongequal{令\ n=-k}\frac{1}{1-\frac{1}{3z}}+\sum_{n=1}^{+\infty}2^{-n}z^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{3z}}+\frac{\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}$$

$$=\frac{3z}{3z-1}+\frac{z}{2-z}=\frac{-5z}{(z-2)(3z-1)}$$

收敛区：$\frac{1}{3}<|z|<2$

(3) $f(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\varepsilon(k)+\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}\varepsilon(-k-1)$

右边序列$\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\varepsilon(k)$的 z 变换为

$$F_{\mathrm{r}}(z)=\mathscr{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\varepsilon(k)\right\}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}=\frac{2z}{2z-1}$$

左边序列$\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}\varepsilon(-k-1)$的 z 变换为

$$F_{1}(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}z^{-k}\xlongequal{令\ n=-k}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{n}=\frac{\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}=\frac{z}{2-z}$$

所以　$$F(z)=F_{\mathrm{r}}(z)+F_{1}(z)=\frac{2z}{2z-1}+\frac{z}{2-z}=\frac{-3z}{(z-2)(2z-1)}$$

收敛区：$\frac{1}{2}<|z|<2$

【8-10】　求 $F(z)=\dfrac{z+2}{2z^{2}-7z+3}$的原序列，收敛区分别为

(1) $|z|>3$　(2) $|z|<\frac{1}{2}$　(3) $\frac{1}{2}<|z|<3$

解　将 $F(z)$展开为部分分式：

$$F(z)=\frac{z+2}{2z^{2}-7z+3}=\frac{\frac{z}{2}+1}{(z-3)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{\frac{2}{3}}{z}+\frac{\frac{1}{3}}{z-3}+\frac{-1}{z-\frac{1}{2}}$$

所以
$$F(z)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z-3}-\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

(1) 由收敛区 $|z|>3$ 可知各极点在收敛区内,故对应的均为右边序列。所以

$$f(k)=\frac{2}{3}\delta(k)+\frac{1}{3}\times 3^k\varepsilon(k)-\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k)$$

(2) 由收敛区 $|z|<\frac{1}{2}$ 可知各极点在收敛区外,故对应的均为左边序列。所以

$$f(k)=\frac{2}{3}\delta(k)-\frac{1}{3}\times 3^k\varepsilon(-k-1)+\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(-k-1)$$

(3) 由收敛区 $\frac{1}{2}<|z|<3$ 可知,极点 $z=\frac{1}{2}$ 在收敛区内,相应的部分分式项对应的序列为右边序列;极点 $z=3$ 在收敛区外,相应的部分分式项对应的序列为左边序列。所以

$$f(k)=\frac{2}{3}\delta(k)-\frac{1}{3}\times 3^k\varepsilon(-k-1)-\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k)$$

【8-11】 求 $F(z)=\dfrac{2z^3}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z-1)}$ 的原序列,收敛区分别为

(1) $|z|>1$　(2) $|z|<\frac{1}{2}$　(3) $\frac{1}{2}<|z|<1$

解　(1) 原序列为右边序列。由留数法可知

$$F(z)z^{k-1}=\frac{2z^{k+2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z-1)}$$

当 $k\geqslant 0$ 时,$F(z)z^{k-1}$ 有一个单极点 $z=1$,一个二阶极点 $z=\frac{1}{2}$。

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=1}=\left.\frac{2z^{k+2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}\right|_{z=1}=8$$

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=\frac{1}{2}}=\left.\frac{\mathrm{d}\left[\dfrac{2z^{k+2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z-1)}\right]}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\frac{1}{2}}=-(k+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

所以
$$f(k)=\left[8-(k+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]\varepsilon(k)$$

(2) $f(k)$为一个左边序列。由留数法可知
$$f(k)=-\sum \mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]$$
所以
$$f(k)=\left[(k+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-8\right]\varepsilon(-k-1)$$

(3) 由收敛区可知，原序列对应于极点$z=\dfrac{1}{2}$的部分为一个右序列，对应于极点$z=1$的部分为一个左序列。所以
$$f(k)=\left[-(k+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]\varepsilon(k)-8\varepsilon(-k-1)$$

【8-12】 用卷积定理求下列卷积和。

(1) $a^k\varepsilon(k)*\delta(k-2)$　(2) $a^k\varepsilon(k)*\varepsilon(k+1)$　(3) $a^k\varepsilon(k)*b^k\varepsilon(k)$

解　(1) 因为
$$\mathscr{Z}\{a^k\varepsilon(k)*\delta(k-2)\}=\mathscr{Z}\{a^k\varepsilon(k)\}\cdot\mathscr{Z}\{\delta(k-2)\}$$
$$=\frac{z}{z-a}\cdot z^{-2}=\frac{1}{z(z-a)}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z}\right)$$
$$\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z}\right)\right\}=\frac{1}{a}[a^{k-1}\varepsilon(k-1)-\delta(k-1)]=a^{k-2}\varepsilon(k-2)$$
所以
$$a^k\varepsilon(k)*\delta(k-2)=a^{k-2}\varepsilon(k-2)$$

(2) 因为　$\mathscr{Z}\{a^k\varepsilon(k)*\varepsilon(k+1)\}=\mathscr{Z}\{a^k\varepsilon(k)\}\cdot\mathscr{Z}\{\varepsilon(k+1)\}$
$$=\frac{z}{z-a}\cdot\frac{z^2}{z-1}=z+\frac{z^2(a+1)-az}{z^2-(a+1)z+a}$$
$$=z+(a+1)+\frac{(a^2+1+a)z-a^2-a}{z^2-(a+1)z+a}$$
$$=\frac{a^2+a+1-\dfrac{1}{1-a}}{z-a}+\frac{\dfrac{1}{1-a}}{z-1}+z+a+1$$
$$\mathscr{Z}^{-1}\left\{z+a+1+\frac{a^2+a+1-\dfrac{1}{1-a}}{z-a}+\frac{\dfrac{1}{1-a}}{z-1}\right\}=\delta(k+1)+(a+1)\delta(k)$$
$$+\left(a^2+a+1-\frac{1}{1-a}\right)(a)^{k-1}\varepsilon(k-1)+\frac{1}{1-a}\varepsilon(k-1)$$
$$=\frac{1-a^{k+2}}{1-a}\varepsilon(k+1)$$
所以
$$a^k\varepsilon(k)*\varepsilon(k+1)=\frac{1-a^{k+2}}{1-a}\varepsilon(k+1)$$

(3) 因为

$$\mathscr{Z}\{a^k\varepsilon(k)*b^k\varepsilon(k)\}=\mathscr{Z}\{a^k\varepsilon(k)\}\cdot\mathscr{Z}\{b^k\varepsilon(k)\}$$

$$=\frac{z}{z-a}\cdot\frac{z}{z-b}=1+\frac{\frac{a^2}{a-b}}{z-a}+\frac{\frac{-b^2}{a-b}}{z-b}$$

所以

$$a^k\varepsilon(k)*b^k\varepsilon(k)=\delta(k)+\frac{a^{k+1}}{a-b}\varepsilon(k-1)+\frac{-b^{k+1}}{a-b}\varepsilon(k-1)=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{b-a}\varepsilon(k)$$

【8-13】 用 z 变换与拉普拉斯变换间的关系，

(1) 由 $f(t)=t\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$ 的 $F(s)=\dfrac{1}{(s+a)^2}$，求 $k\mathrm{e}^{-ak}\varepsilon(k)$ 的 z 变换。

(2) 由 $f(t)=t^2\varepsilon(t)$ 的 $F(s)=\dfrac{2}{s^3}$，求 $k^2\varepsilon(k)$ 的 z 变换。

解 (1) 令 $f_1(t)=\dfrac{t}{T}\mathrm{e}^{-a\frac{t}{T}}\varepsilon\left(\dfrac{t}{T}\right)$，则

$$F_1(s)=\mathscr{L}\{f_1(t)\}=|T|F(sT)=T\cdot\frac{1}{(sT+a)^2}$$

$$F(z)=\mathscr{Z}\{f(k)\}=\mathscr{Z}\{f_1(kT)\}=\sum\mathrm{Res}\left[\frac{zF_1(s)}{z-\mathrm{e}^{sT}}\right]_{F_1(s)\text{的诸极点}}$$

$$=\sum\mathrm{Res}\left[\frac{z}{z-\mathrm{e}^{sT}}\cdot\frac{T}{(sT+a)^2}\right]$$

$$\mathrm{Res}_k=\frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}s^{p-1}}(s-s_k)^p\,\frac{zF_1(s)}{z-\mathrm{e}^{sT}}\right]_{s=s_k}$$

$F_1(s)$的极点为 $s=\dfrac{-a}{T}$，二阶，即 $p=2$。所以

$$F(z)=\left.\frac{\mathrm{d}\left[\dfrac{z}{z-\mathrm{e}^{sT}}\cdot\dfrac{T}{(sT+a)^2}\cdot\left(s+\dfrac{a}{T}\right)^2\right]}{\mathrm{d}s}\right|_{s=\frac{-a}{T}}=\frac{z\mathrm{e}^{-a}}{(z-\mathrm{e}^{-a})^2}$$

(2) 令 $f_1(t)=\left(\dfrac{t}{T}\right)^2\varepsilon\left(\dfrac{t}{T}\right)$，则

$$F_1(s)=\mathscr{L}\{f_1(t)\}=|T|F(sT)=\frac{T\times 2}{(sT)^3}=\frac{2}{T^2s^3}$$

$$F(z)=\sum\mathrm{Res}\left[\frac{zF_1(s)}{z-\mathrm{e}^{sT}}\right]_{F_1(s)\text{的诸极点}}=\sum\mathrm{Res}\left[\frac{z}{z-\mathrm{e}^{sT}}\cdot\frac{2}{T^2s^3}\right]$$

$F_1(s)$的极点为 $s=0$，三阶，即 $p=3$。所以

$$F(z)=\frac{\mathrm{d}^2\left[\dfrac{z}{z-\mathrm{e}^{sT}}\cdot\dfrac{2s^3}{T^2s^3}\right]}{2\cdot \mathrm{d}s^2}\Bigg|_{s=0}=\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

【8-14】 用z变换分析法求解第七章题7-16所示系统的零输入响应。

解　(1) $y_{zi}(k+1)+2y_{zi}(k)=0, y_{zi}(0)=1$

对方程两边取z变换：

$$zY_{zi}(z)-zy_{zi}(0)+2Y_{zi}(z)=0$$

$$(z+2)Y_{zi}(z)=zy_{zi}(0)$$

$$Y_{zi}(z)=\frac{z}{z+2}y_{zi}(0)=\frac{z}{z+2}$$

所以
$$y_{zi}(k)=(-2)^k\varepsilon(k)$$

(2) $y_{zi}(k+2)+3y_{zi}(k+1)+2y_{zi}(k)=0$

$$y_{zi}(0)=2,\quad y_{zi}(1)=1$$

对方程两边取z变换：

$$z^2Y_{zi}(z)-z^2y_{zi}(0)-zy_{zi}(1)+3zY_{zi}(z)$$
$$-3zy_{zi}(0)+2Y_{zi}(z)=0$$

$$(z^2+3z+2)Y_{zi}(z)=z^2y_{zi}(0)+z[y_{zi}(1)+3y_{zi}(0)]$$

$$Y_{zi}(z)=\frac{z^2y_{zi}(0)+z[y_{zi}(1)+3y_{zi}(0)]}{z^2+3z+2}=\frac{2z^2+7z}{z^2+3z+2}$$

对$\dfrac{Y_{zi}(z)}{z}$进行部分分式展开：

$$\frac{Y_{zi}(z)}{z}=\frac{2z^2+7z}{z(z^2+3z+2)}=\frac{2z^2+7z}{z(z+1)(z+2)}$$

$$=\frac{2z+7}{(z+1)(z+2)}=\frac{5}{z+1}-\frac{3}{z+2}$$

所以
$$y_{zi}(k)=5(-1)^k\varepsilon(k)-3(-2)^k\varepsilon(k)$$

(3) $y_{zi}(k+2)+9y_{zi}(k)=0, y_{zi}(0)=4, y_{zi}(1)=0$

$$z^2Y_{zi}(z)+9Y_{zi}(z)=z^2y_{zi}(0)+zy_{zi}(1)$$

$$Y_{zi}(z)=\frac{z^2y_{zi}(0)+zy_{zi}(1)}{z^2+9}=\frac{4z^2}{z^2+9}$$

将$\dfrac{Y_{zi}(z)}{z}$进行部分分式展开：

$$\frac{Y_{zi}(z)}{z}=\frac{4z}{z^2+9}=\frac{2}{z+3j}+\frac{2}{z-3j}$$

$$y_{zi}(k)=2[(3j)^k+(-3j)^k]\varepsilon(k)$$

$$=2(3)^k[j^k+(-j)^k]\varepsilon(k)=4\times 3^k\cos\frac{k\pi}{2}\varepsilon(k)$$

(4) $y_{zi}(k+2)+2y_{zi}(k+1)+2y_{zi}(k)=0, y_{zi}(0)=0, y_{zi}(1)=1$

$$z^2Y_{zi}(z)-z^2y_{zi}(0)-zy_{zi}(1)+2zY_{zi}(z)$$

$$-2zy_{zi}(0)+2Y_{zi}(z)=0$$

$$(z^2+2z+2)Y_{zi}(z)=z^2y_{zi}(0)+z[y_{zi}(1)+2y_{zi}(0)]$$

$$\frac{Y_{zi}(z)}{z}=\frac{zy_{zi}(0)+y_{zi}(1)+2y_{zi}(0)}{z^2+2z+2}=\frac{1}{z^2+2z+2}$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{z-(-1+j)}-\frac{1}{z-(-1-j)}\right]$$

所以

$$y_{zi}(k)=\frac{1}{2j}[(-1+j)^k-(-1-j)^k]\varepsilon(k)$$

$$=\frac{1}{2j}[(\sqrt{2})^k e^{j\frac{3\pi}{4}k}-(\sqrt{2})^k e^{-j\frac{3\pi}{4}k}]\varepsilon(k)$$

$$=(\sqrt{2})^k\sin\left(\frac{3}{4}k\pi\right)\varepsilon(k)$$

(5) $y_{zi}(k+2)+2y_{zi}(k+1)+y_{zi}(k)=0$, $y_{zi}(0)=1, y_{zi}(1)=0$

$$z^2Y_{zi}(z)-z^2y_{zi}(0)-zy_{zi}(1)+2zY_{zi}(z)-2zy_{zi}(0)+Y_{zi}(z)=0$$

$$(z^2+2z+1)Y_{zi}(z)=z^2y_{zi}(0)+z[y_{zi}(1)+2y_{zi}(0)]$$

$$\frac{Y_{zi}(z)}{z}=\frac{zy_{zi}(0)+y_{zi}(1)+2y_{zi}(0)}{z^2+2z+1}=\frac{z+2}{z^2+2z+1}=\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{z+1}$$

所以　$y_{zi}(k)=[-k(-1)^k+(-1)^k]\varepsilon(k)=(1-k)(-1)^k\varepsilon(k)$

(6) $y_{zi}(k+3)-2\sqrt{2}\,y_{zi}(k+2)+y_{zi}(k+1)=0$

$$y_{zi}(0)=0,\quad y_{zi}(1)=-1$$

令 $k=-1$,并将 $y_{zi}(0)=0, y_{zi}(1)=-1$ 代入方程得

$$y_{zi}(2)=2\sqrt{2}\,y_{zi}(1)-y_{zi}(0)=-2\sqrt{2}$$

对原差分方程取 z 变换,得

$$z^3Y_{zi}(z)-z^3y_{zi}(0)-z^2y_{zi}(1)-zy_{zi}(2)-2\sqrt{2}\,z^2Y_{zi}(z)$$

$$+2\sqrt{2}z^2y_{zi}(0)+2\sqrt{2}zy_{zi}(1)+zY_{zi}(z)-zy_{zi}(0)=0$$

$$(z^3-2\sqrt{2}z^2+z)Y_{zi}(z)=z^3y_{zi}(0)+z^2\{y_{zi}(1)-2\sqrt{2}y_{zi}(0)\}$$
$$+z\{y_{zi}(2)-2\sqrt{2}y_{zi}(1)+y_{zi}(0)\}=-z^2$$

所以

$$\frac{Y_{zi}(z)}{z}=\frac{-z}{z^3-2\sqrt{2}z^2+z}=\frac{1/2}{z-(-1+\sqrt{2})}+\frac{-1/2}{z-(1+\sqrt{2})}$$

$$y_{zi}(k)=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2})^k\varepsilon(k)-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^k\varepsilon(k)$$

【8-15】 用z变换分析法求解第七章题7-18所示系统的系统函数和单位函数响应，并判断该系统是否稳定。

解　(1) 对差分方程两边作z变换：

$$z^2Y(z)-0.6zY(z)-0.16Y(z)=E(z)$$

故系统函数$H(z)$为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{1}{z^2-0.6z-0.16}$$

对$H(z)$进行部分分式展开：

$$H(z)=\frac{1}{z-0.8}+\frac{-1}{z+0.2}=z^{-1}\frac{z}{z-0.8}-z^{-1}\frac{z}{z+0.2}$$

对上式作反z变换得单位函数响应$h(k)$：

$$h(k)=[(0.8)^{k-1}-(-0.2)^{k-1}]\varepsilon(k-1)$$

因为$H(z)$有两个极点$z_1=0.8$，$z_2=-0.2$，收敛区$|z|>0.8$，包含单位圆，所以系统稳定。

(2) 对差分方程两边作z变换：

$$z^3Y(z)-2\sqrt{2}z^2Y(z)+zY(z)=E(z)$$

故系统函数$H(z)$为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{1}{z^3-2\sqrt{2}z^2+z}$$

将$H(z)$进行部分分式展开：

$$H(z)=\frac{1}{z[z-(\sqrt{2}+1)][z-(\sqrt{2}-1)]}$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}\cdot\frac{1}{z-(\sqrt{2}+1)}$$

$$+\frac{1}{-2(\sqrt{2}-1)}\cdot\frac{1}{z-(\sqrt{2}-1)}$$

$$H(z)=z^{-1}+\frac{z^{-1}}{2(\sqrt{2}+1)}\cdot\frac{z}{z-(\sqrt{2}+1)}$$

$$-\frac{z^{-1}}{2(\sqrt{2}-1)}\cdot\frac{z}{z-(\sqrt{2}-1)}$$

对 $H(z)$ 作反 z 变换得单位函数响应 $h(k)$：

$$h(k)=\delta(k-1)+\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}(\sqrt{2}+1)^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$-\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}-1)^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$=\delta(k-1)+\frac{1}{2}[(\sqrt{2}+1)^{k-2}-(\sqrt{2}-1)^{k-2}]\varepsilon(k-1)$$

因为 $H(z)$ 有三个极点 $z_1=0, z_2=\sqrt{2}+1, z_3=\sqrt{2}-1$，收敛区 $|z|>\sqrt{2}+1$，不包含单位圆，故系统不稳定。

(3) 对差分方程两边作 z 变换：

$$z^2Y(z)-zY(z)+0.25Y(z)=E(z)$$

故系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{1}{z^2-z+0.25}=\frac{1}{(z-0.5)^2}=z^{-1}\frac{z}{(z-0.5)^2}$$

对上式作反 z 变换得单位函数响应 $h(k)$：

$$h(k)=(k-1)0.5^{k-2}\varepsilon(k-1)=4(k-1)0.5^k\varepsilon(k-1)$$

因为 $H(z)$ 有二阶重极点 $z_{1,2}=0.5$，收敛区 $|z|>0.5$，包含单位圆，故系统稳定。

(4) 对差分方程两边作 z 变换：

$$z^2Y(z)+Y(z)=E(z)$$

故系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{1}{z^2+1}$$

将 $H(z)$ 部分分式展开：

$$H(z)=\frac{\frac{1}{-2j}}{z+j}+\frac{\frac{1}{2j}}{z-j}=-\frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{z+j}+\frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{z-j}$$

$$=-\frac{z^{-1}}{2j}\cdot\frac{z}{z+j}+\frac{z^{-1}}{2j}\cdot\frac{z}{z-j}$$

对 $H(z)$ 作反 z 变换得单位函数响应 $h(k)$：

$$h(k)=-\frac{1}{2j}(-j)^{k-1}\varepsilon(k-1)+\frac{1}{2j}j^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$=\left[-\frac{j^k+(-j)^k}{2}\right]\varepsilon(k-1)=-\cos\frac{k\pi}{2}\varepsilon(k-1)$$

因为 $H(z)$ 的极点 $z_1=j, z_2=-j$ 均落在单位圆上且是单阶的，故系统临界稳定。

(5) 对差分方程两边作 z 变换：

$$z^2Y(z)-Y(z)=E(z)$$

故系统函数
$$H(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{1}{z^2-1}$$

将 $H(z)$ 部分分式展开：

$$H(z)=\frac{\frac{1}{2}}{z-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{z+1}=\frac{z^{-1}}{2}\cdot\frac{z}{z-1}-\frac{z^{-1}}{2}\cdot\frac{z}{z+1}$$

对 $H(z)$ 作反 z 变换得单位函数响应 $h(k)$：

$$h(k)=\frac{1}{2}\varepsilon(k-1)-\frac{1}{2}(-1)^{k-1}\varepsilon(k-1)=\frac{1}{2}[1-(-1)^{k-1}]\varepsilon(k-1)$$

因为 $H(z)$ 的极点 $z_1=1, z_2=-1$ 均落在单位圆上，且是单阶的，故系统临界稳定。

(6) 对差分方程两边作 z 变换：

$$z^2Y(z)-Y(z)=zE(z)-E(z)$$

故系统函数
$$H(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{z-1}{z^2-1}$$

$$H(z)=\frac{z-1}{(z-1)(z+1)}=\frac{1}{z+1}=z^{-1}\frac{z}{z+1}$$

对 $H(z)$ 作反 z 变换得单位函数响应 $h(k)$：

$$h(k)=(-1)^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

因为 $H(z)$ 的极点 $z_1=1, z_2=-1$ 均落在单位圆上，且是单阶的，故系统临界稳定。

(7) 对差分方程两边作 z 变换：

$$z^2Y(z)+2zY(z)+2Y(z)=zE(z)+2E(z)$$

故系统函数
$$H(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{z+2}{z^2+2z+2}$$

将 $H(z)$ 部分分式展开：

$$H(z)=\frac{1-\mathrm{j}}{2}\frac{1}{z-(-1+\mathrm{j})}+\frac{1+\mathrm{j}}{2}\frac{1}{z-(-1-\mathrm{j})}$$

对 $H(z)$ 作反 z 变换得单位函数响应 $h(k)$：

$$\begin{aligned}
h(k)&=\frac{1-\mathrm{j}}{2}(-1+\mathrm{j})^{k-1}\varepsilon(k-1)+\frac{1+\mathrm{j}}{2}(-1-\mathrm{j})^{k-1}\varepsilon(k-1)\\
&=-\frac{1}{2}[(-1+\mathrm{j})^k+(-1-\mathrm{j})^k]\varepsilon(k-1)\\
&=-\frac{1}{2}[(-\sqrt{2})^k\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}k}+(-\sqrt{2})^k\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}k}]\varepsilon(k-1)\\
&=-(-\sqrt{2})^k\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}k}+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}k}}{2}\right)\varepsilon(k-1)\\
&=-(-\sqrt{2})^k\cos\frac{k\pi}{4}\varepsilon(k-1)
\end{aligned}$$

因为 $H(z)$ 有一阶极点 $z_1=-1+\mathrm{j}, z_2=-1-\mathrm{j}$，收敛区 $|z|>\sqrt{2}$，不包含单位圆，故系统不稳定。

【8-16】 用 z 变换分析法求解第七章题 7-26 所示系统的零状态响应。

解　(1) 对差分方程两边作 z 变换：

$$zY(z)+2Y(z)=zE(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{z}{z+2}$$

又已知
$$e(k)=2^k\varepsilon(k)$$

所以
$$E(z)=\frac{z}{z-2}$$

故系统零状态响应

$$Y_{zs}(z)=H(z)E(z)=\frac{z^2}{(z-2)(z+2)}$$

将$\frac{Y_{zs}(z)}{z}$进行部分分式展开：

$$\frac{Y_{zs}(z)}{z}=\frac{1/2}{z-2}+\frac{1/2}{z+2}$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z+2}$$

所以 $$y_{zs}(k)=\mathscr{Z}^{-1}\{y_{zs}(z)\}=\frac{1}{2}[2^k+(-2)^k]\varepsilon(k)$$

(2) 对差分方程两边作z变换：

$$zY(z)+2Y(z)=E(z)$$

$$H(z)=\frac{1}{z+2}$$

又 $$E(z)=\mathscr{Z}\{e(k)\}=\frac{z}{z-2}$$

故系统零状态响应

$$Y_{zs}(z)=H(z)E(z)=\frac{z}{(z+2)(z-2)}$$

将$\frac{Y_{zs}(z)}{z}$进行部分分式展开：

$$\frac{Y_{zs}(z)}{z}=\frac{-1/4}{z+2}+\frac{1/4}{z-2}$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z-2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z+2}$$

所以 $$y_{zs}(k)=\frac{1}{4}[2^k-(-2)^k]\varepsilon(k)$$

(3) 对差分方程两边作z变换：

$$z^2Y(z)+3zY(z)+2Y(z)=E(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{1}{z^2+3z+2}$$

又 $$E(z)=\mathscr{Z}\{e(k)\}=\frac{z}{z-3}$$

故系统零状态响应

$$Y_{zs}(z)=H(z)E(z)=\frac{z}{(z+2)(z+1)(z-3)}$$

将$\dfrac{Y_{zs}(z)}{z}$进行部分分式展开：

$$\frac{Y_{zs}(z)}{z}=\frac{1/5}{z+2}+\frac{-1/4}{z+1}+\frac{1/20}{z-3}$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{1}{5}\frac{z}{z+2}-\frac{1}{4}\frac{z}{z+1}+\frac{1}{20}\frac{z}{z-3}$$

所以

$$\begin{aligned}y_{zs}(k)&=\mathscr{Z}^{-1}\{Y_{zs}(z)\}=\frac{1}{5}(-2)^k\varepsilon(k)-\frac{1}{4}(-1)^k\varepsilon(k)+\frac{1}{20}\times 3^k\varepsilon(k)\\&=\frac{1}{20}[4(-2)^k-5(-1)^k+3^k]\varepsilon(k)\end{aligned}$$

(4) 对差分方程两边作z变换：

$$z^2Y(z)+2zY(z)+2Y(z)=zE(z)+2E(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{z+2}{z^2+2z+2}$$

又
$$E(z)=\mathscr{Z}\{e(k)\}=\frac{1}{z}$$

故系统零状态响应

$$Y_{zs}(z)=H(z)E(z)=\frac{z+2}{z(z^2+2z+2)}=z^{-1}\cdot\frac{z+2}{z^2+2z+2}$$

先作$\dfrac{z+2}{z^2+2z+2}$的反z变换：

$$Y_1(z)=\frac{(1-\mathrm{j})/2}{z-(-1+\mathrm{j})}+\frac{(1+\mathrm{j})/2}{z-(-1-\mathrm{j})}$$

所以

$$\begin{aligned}y_1(k)&=\mathscr{Z}\{Y_1(z)\}=\frac{1-\mathrm{j}}{2}(-1+\mathrm{j})^{k-1}\varepsilon(k-1)\\&\quad+\frac{1+\mathrm{j}}{2}(-1-\mathrm{j})^{k-1}\varepsilon(k-1)\\&=-\frac{1}{2}[(-1+\mathrm{j})^k+(-1-\mathrm{j})^k]\varepsilon(k-1)\\&=-\frac{1}{2}[(-\sqrt{2})^k\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}k}+(-\sqrt{2})^k\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}k}]\varepsilon(k-1)\\&=-(-\sqrt{2})^k\cos\frac{k\pi}{4}\varepsilon(k-1)\end{aligned}$$

根据 z 变换的移序性有

$$y_{zs}(k)=\mathscr{Z}\{z^{-1}y_1(z)\}=-(\sqrt{2})^{k-1}\cos\frac{\pi}{4}(k-1)\varepsilon(k-2)$$

【8-17】 用 z 变换分析法求下列系统的全响应。

(1) $y(k+1)-0.2y(k)=\varepsilon(k+1)$，　$y(0)=1$

(2) $y(k+1)-y(k)=\varepsilon(k+1)$，　$y_{zi}(0)=-1$

(3) $2y(k+2)+3y(k+1)+y(k)=(0.5)^k\varepsilon(k)$，

$y(0)=0$，　$y(1)=-1$

解　(1) 对差分方程两边作 z 变换，有

$$zY(z)-zy(0)-0.2Y(z)=z\cdot\frac{z}{z-1}-z\varepsilon(0)$$

得
$$zY(z)-z-0.2Y(z)=\frac{z^2}{z-1}-z$$

将上式整理可得

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z}{(z-1)(z-0.2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{z-1}-\frac{1}{z-0.2}\right)$$

$$Y(z)=\frac{1}{4}\left(\frac{5z}{z-1}-\frac{z}{z-0.2}\right)$$

所以
$$y(k)=\frac{1}{4}[5-(0.2)^k]\varepsilon(k)$$

(2) 先求零输入响应的 z 变换，由差分方程有

$$z[Y_{zi}(z)-y_{zi}(0)]-Y_{zi}(z)=0$$

整理得
$$Y_{zi}(z)=\frac{zy_{zi}(0)}{z-1}=\frac{-z}{z-1}$$

再求零状态响应的 z 变换，由差分方程有

$$zY_{zs}(z)-Y_{zs}(z)=z\cdot\frac{z}{z-1}$$

整理得
$$Y_{zs}(z)=\frac{z^2}{(z-1)^2}$$

则全响应的 z 变换为

$$Y(z)=Y_{zi}(z)+Y_{zs}(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$$

所以
$$y(k)=k\varepsilon(k)$$

(3) 对差分方程两边作 z 变换,有

$$2[z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)]+3[zY(z)-zy(0)]+Y(z)=\frac{z}{z-0.5}$$

$$2[z^2Y(z)-0+z]+3[zY(z)-0]+Y(z)=\frac{z}{z-0.5}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1-z}{(z-0.5)(z+1)(z+0.5)}=\frac{1/3}{z-0.5}+\frac{8/3}{z+1}-\frac{3}{z+0.5}$$

则
$$Y(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{z-0.5}+\frac{\frac{8}{3}z}{z+1}-\frac{3z}{z+0.5}$$

所以
$$y(k)=\left[\frac{1}{3}(0.5)^k+\frac{8}{3}(-1)^k-3(-0.5)^k\right]\varepsilon(k)$$

【8-18】 用 z 变换分析法求下列系统的全响应。

(1) $y(k)-0.9y(k-1)=0.1\varepsilon(k)$,　$y(-1)=2$

(2) $y(k)+2y(k-1)=(k-2)\varepsilon(k)$,　$y(0)=1$

(3) $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=\varepsilon(k)$,　$y(-1)=0$,　$y(-2)=\frac{1}{2}$

(4) $y(k)+2y(k-1)+y(k-2)=\frac{4}{3}(3)^k\varepsilon(k)$,

$y(-1)=0$,　$y(0)=\frac{4}{3}$

(5) $y(k+2)+y(k+1)+y(k)=\varepsilon(k)$,　$y(0)=1$,　$y(1)=2$

解　(1) 对差分方程两边作 z 变换,有

$$Y(z)-0.9[z^{-1}Y(z)+y(-1)]=\frac{0.1z}{z-1}$$

$$\frac{z-0.9}{z}Y(z)=\frac{1.9z-1.8}{z-1}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{z-1}+\frac{0.9}{z-0.9}$$

$$Y(z)=\frac{z}{z-1}+\frac{0.9z}{z-0.9}$$

所以
$$y(k)=\mathscr{Z}^{-1}\{Y(z)\}=[1+(0.9)^{k+1}]\varepsilon(k)$$

(2) 对差分方程两边作 z 变换,有

$$(1+2z^{-1})Y(z)+2y(-1)=\frac{-2z^2+3z}{(z-1)^2}$$

令 $k=0$ 代入差分方程得

$$y(0)+2y(-1)=2$$

因为 $y(0)=1$,所以

$$y(-1)=-\frac{3}{2}$$

$$\frac{z+2}{z}Y(z)=\frac{z^2-3z+3}{(z-1)^2}$$

$$Y(z)=\frac{z}{3(z-1)^2}-\frac{4z}{9(z-1)}+\frac{13z}{9(z+2)}$$

所以 $$y(k)=\mathscr{Z}^{-1}\{Y(z)\}=\left[\frac{1}{3}k-\frac{4}{9}+\frac{13}{9}(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

(3) 对差分方程两边作 z 变换,有

$$Y(z)+3[z^{-1}Y(z)+y(-1)]$$
$$+2[z^{-2}Y(z)+y(-2)+z^{-1}y(-1)]=\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)(1+3z^{-1}+2z^{-2})+1=\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{\frac{1}{6}}{z-1}+\frac{\frac{1}{2}}{z+1}+\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{z+2}$$

$$Y(z)=\frac{\frac{1}{6}z}{z-1}+\frac{\frac{1}{2}z}{z+1}+\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)z}{z+2}$$

所以 $$y(k)=\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{2}(-1)^k-\frac{2}{3}(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

(4) 对方程两边作 z 变换,有

$$Y(z)+2[z^{-1}Y(z)+y(-1)]+z^{-2}Y(z)$$
$$+y(-2)+z^{-1}y(-1)=\frac{4}{3}\cdot\frac{z}{z-3}$$

令 $k=0$ 代入差分方程得

$$y(0)+2y(-1)+y(-2)=\frac{4}{3}$$

因为 $y(-1)=0$,$y(0)=\frac{4}{3}$,所以 $y(-2)=0$。

$$(1+2z^{-1}+z^{-2})Y(z)=\frac{4}{3}\cdot\frac{z}{z-3}$$

$$Y(z)=\frac{4}{3}\ \frac{z^3}{(z-3)(z+1)^2}=-\frac{z}{3(z+1)^2}+\frac{7z}{12(z+1)}+\frac{3z}{4(z-3)}$$

所以 $$y(k)=\left[-\frac{1}{3}k(-1)^{k-1}+\frac{7}{12}(-1)^k+\frac{3}{4}\times 3^k\right]\varepsilon(k)$$

$$=\left[\left(\frac{1}{3}k+\frac{7}{12}\right)(-1)^k+\frac{3}{4}\times 3^k\right]\varepsilon(k)$$

(5) 对差分方程两边作 z 变换，有

$$[z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)]+[zY(z)-zy(0)]+Y(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)(z^2+z+1)-z^2y(0)-zy(0)-zy(1)=\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)(z^2+z+1)=\frac{z}{z-1}+(z^2+3z)$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{(z^2+z+1)(z-1)}+\frac{z+3}{z^2+z+1}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{\frac{1}{3}}{z-1}+\frac{2}{z^2+z+1}+\frac{\frac{2}{3}\left(z+\frac{1}{2}\right)}{z^2+z+1}$$

$$Y(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{z-1}+\frac{2z}{z^2+z+1}+\frac{\frac{2}{3}z\left(z+\frac{1}{2}\right)}{z^2+z+1}$$

$$y(k)=\mathscr{Z}\{Y(z)\}=\left[\frac{1}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}k\right)+\frac{2}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right)\right]\varepsilon(k)$$

【8-19】 已知系统函数如下，试作其直接形式、并联形式及串联形式的模拟框图。

(1) $H(z)=\dfrac{3+3.6z^{-1}+0.6z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}$　　(2) $H(z)=\dfrac{1+z^{-1}+z^{-2}}{1-0.2z^{-1}+z^{-2}}$

(3) $H(z)=\dfrac{z^2}{(z+0.5)^3}$

解 (1) $$H(z)=\frac{3z^2+3.6z+0.6}{z^2+0.1z-0.2}=3+\frac{2.8}{z-0.4}+\frac{0.5}{z+0.5}$$

$$=\frac{3(z+1)(z+0.2)}{(z-0.4)(z+0.5)}$$

系统的模拟框图如图 8-1 所示。

图 8-1(a)所示为直接形式模拟框图。

图 8-1(b)所示为并联形式模拟框图。

图 8-1(c)所示为串联形式模拟框图。

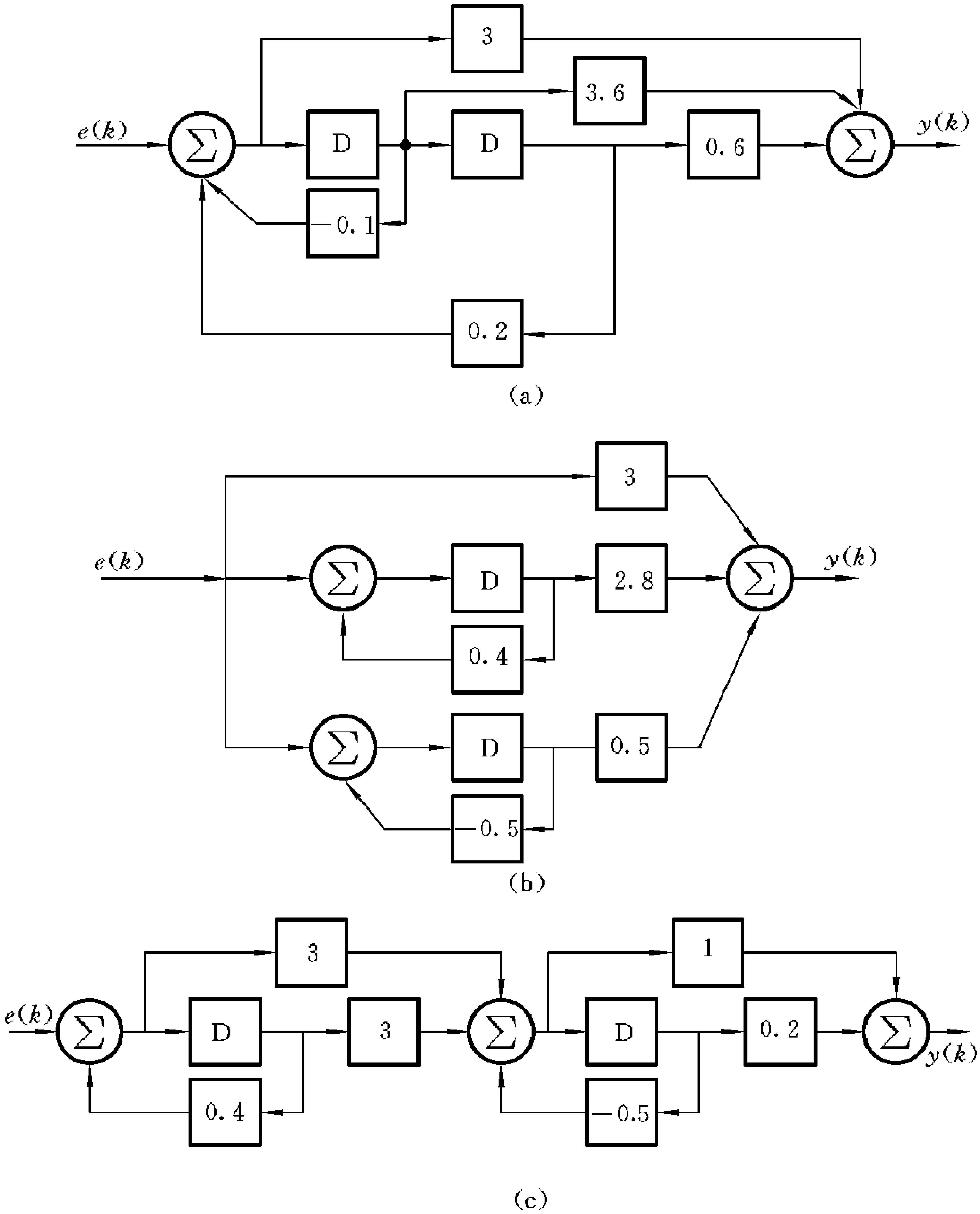


图 8-1

(2) $H(z)=\dfrac{z^3+z^2+1}{z^3-0.2z^2+z}=\dfrac{z^3+z^2+1}{z(z^2-0.2z+1)}=1+\dfrac{1.2z^2-z+1}{z^3-0.2z^2+z}$

$$=1+\frac{1}{z}+\frac{0.2z-0.8}{z^2-0.2z+1}=1+\frac{1.2z^2-z+1}{z(z^2-0.2z+1)}$$

系统模拟框图如图 8-2 所示。

图 8-2(a)所示为直接形式模拟框图。

图 8-2(b)所示为并联形式模拟框图。

图 8-2(c)所示为串联形式模拟框图。

(3) $H(z)=\dfrac{z^2}{(z+0.5)^3}=\dfrac{z^2}{z^3+1.5z^2+0.75z+0.125}$

$$=\frac{z}{(z+0.5)}\cdot\frac{z}{(z+0.5)}\cdot\frac{1}{z+0.5}$$

$$=\frac{1}{z+0.5}+\frac{-1}{(z+0.5)^2}+\frac{0.25}{(z+0.5)^3}$$

$$=\frac{1}{z+0.5}+\frac{-1}{z^2+z+0.25}+\frac{0.25}{z^3+1.5z^2+0.75z+0.125}$$

系统的模拟框图如图 8-3 所示。

图 8-3(a)所示为直接形式模拟框图。

图 8-3(b)所示为并联形式模拟框图。

图 8-3(c)所示为串联形式模拟框图。

【8-20】 已知系统的阶跃序列响应为 $r_\varepsilon(k)=k0.5^k\varepsilon(k)$，试绘出该系统的模拟框图。

解

$$r_\varepsilon(k)=k(0.5)^k\varepsilon(k)$$

$$\varepsilon(k)*h(k)=r_\varepsilon(k)$$

对等式左右两边进行 z 变换，得

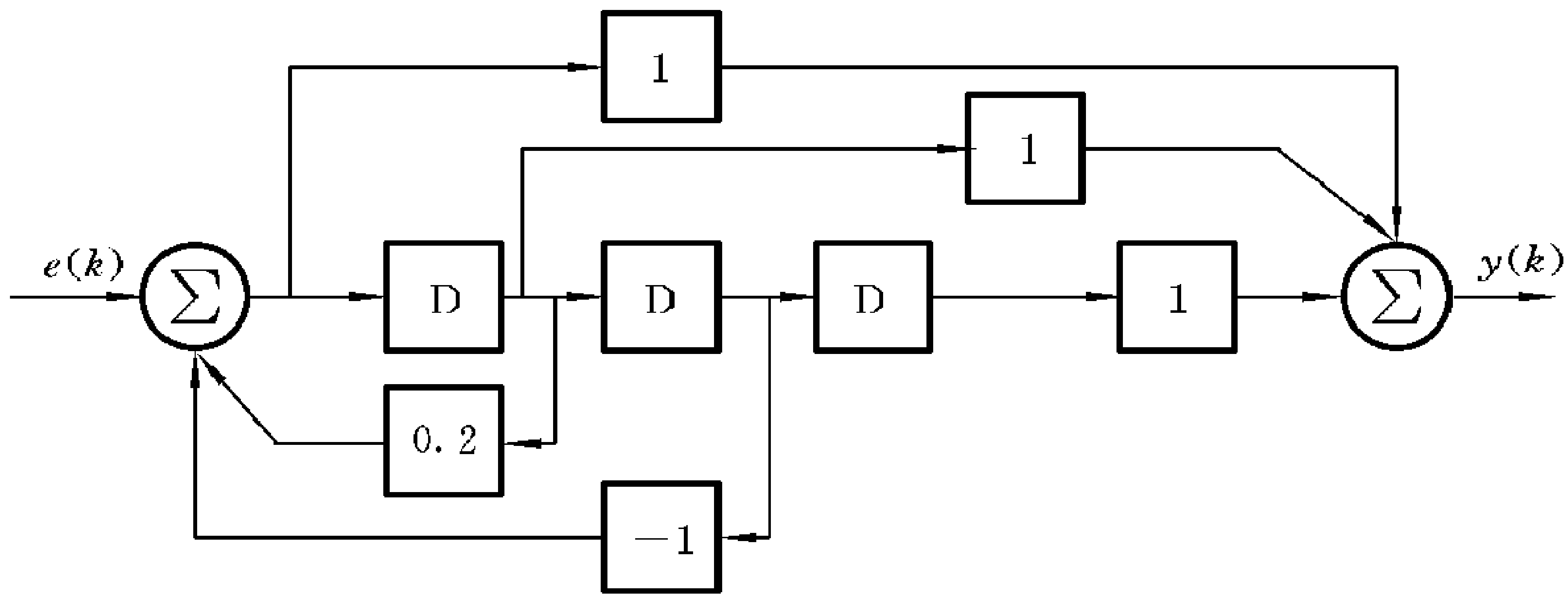
$$\frac{z}{z-1}\cdot H(z)=\frac{0.5z}{(z-0.5)^2}$$

所以

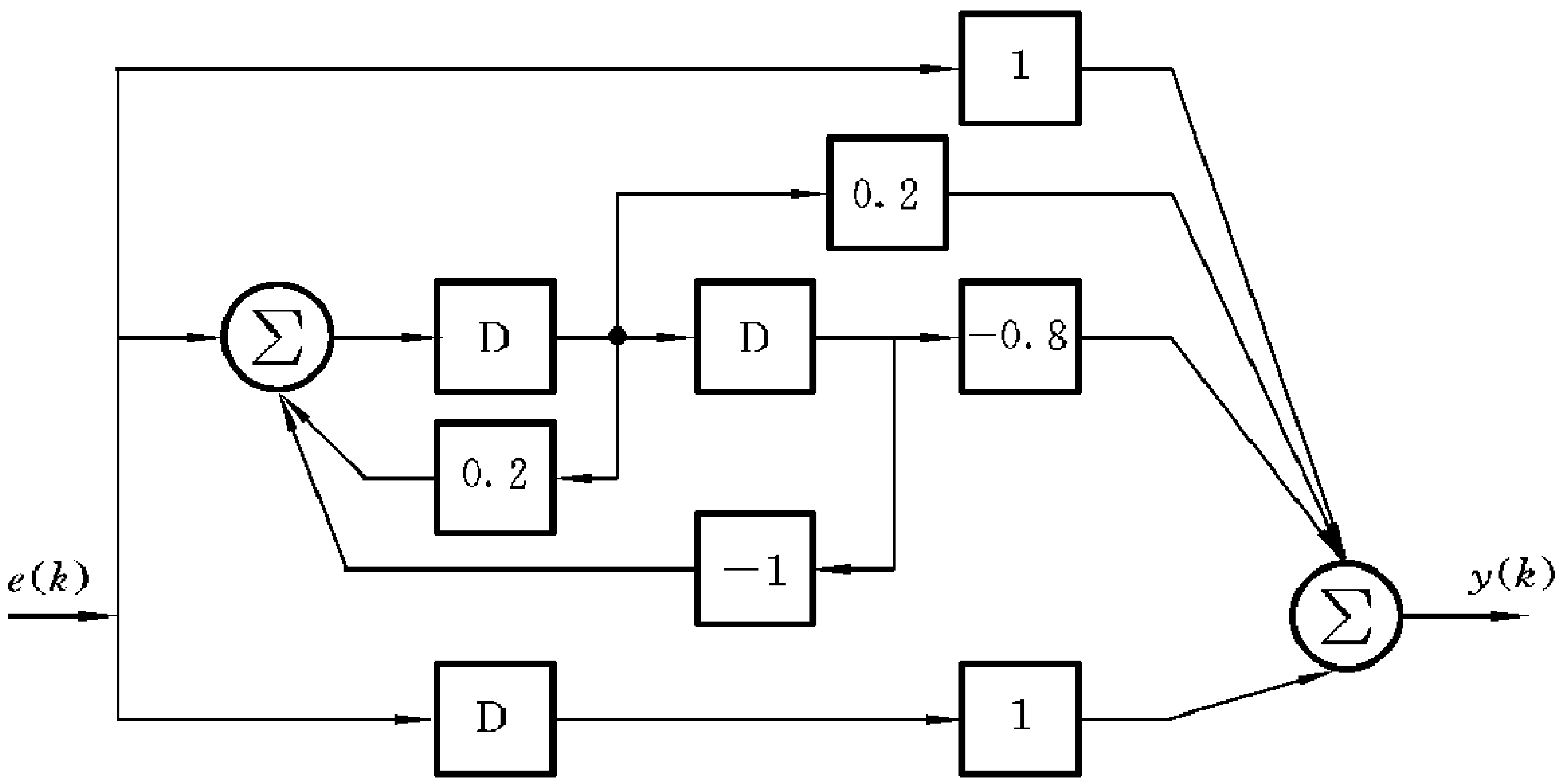
$$H(z)=\frac{0.5z}{(z-0.5)^2}\cdot\frac{z-1}{z}=\frac{0.5(z-1)}{(z-0.5)^2}=\frac{0.5z-0.5}{z^2-z+0.25}$$

系统模拟框图如图 8-4 所示。

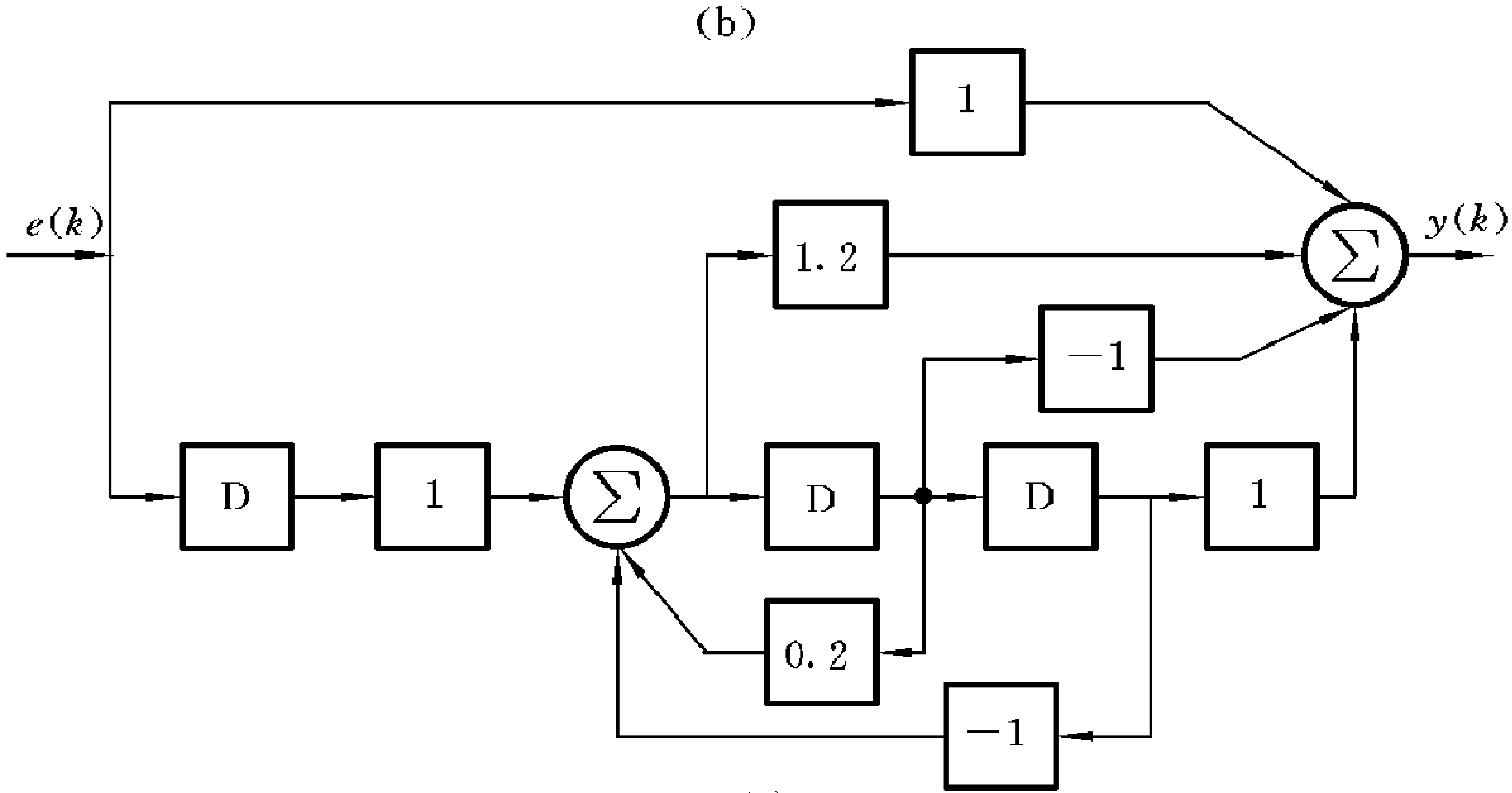
【8-21】 已知某离散系统的系统函数的分母多项式如下，求系统稳定时常数 P 的取值范围。



(a)

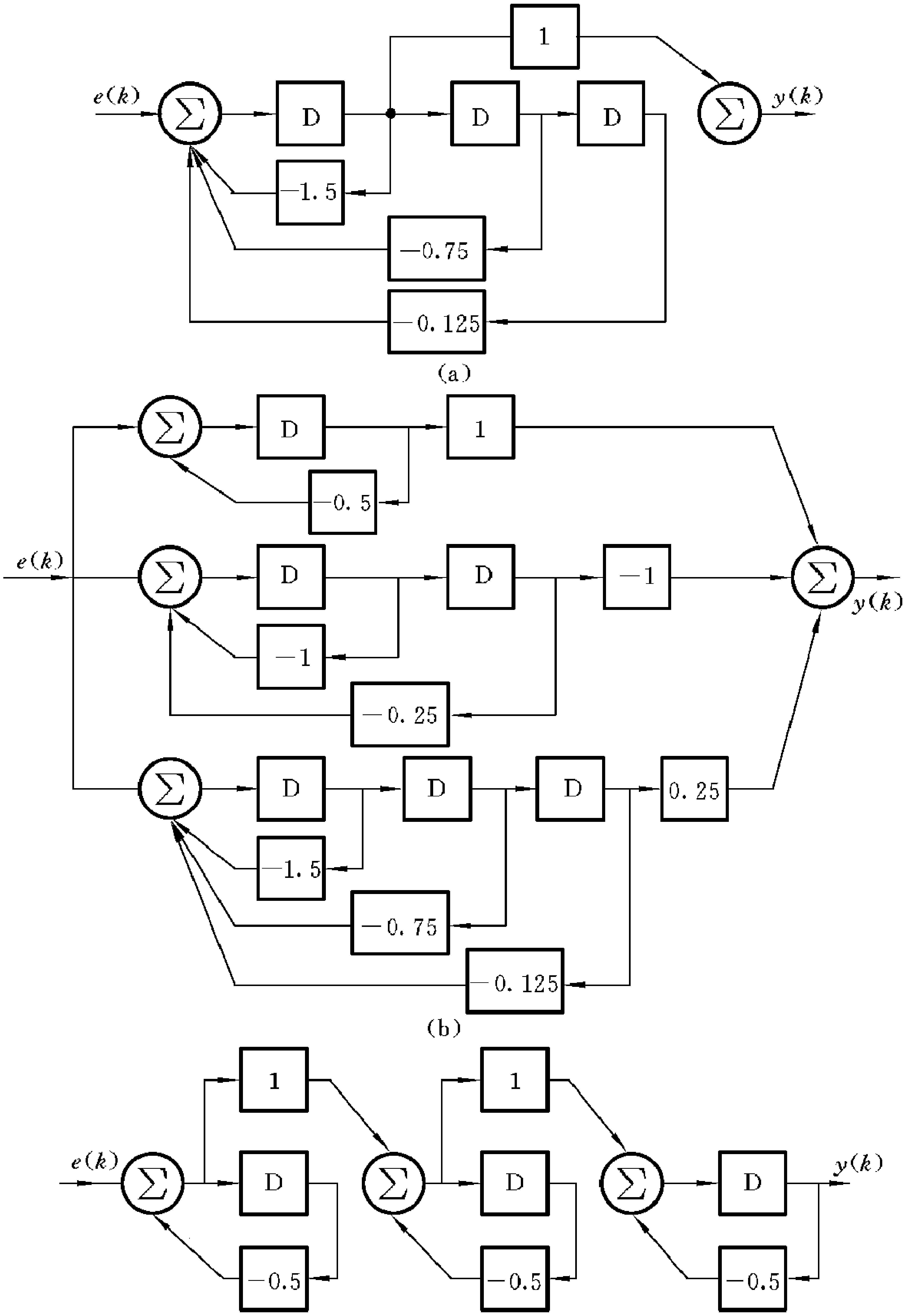


(b)



(c)

图 8-2



e(k)
D
D
D
1
y(k)
−1.5
−0.75
−0.125
(a)
e(k)
D
1
−0.5
D
D
−1
−1
−0.25
y(k)
D
D
D
0.25
−1.5
−0.75
−0.125
(b)
e(k)
1
D
−0.5
1
D
−0.5
D
−0.5
y(k)
(c)

图 8-3

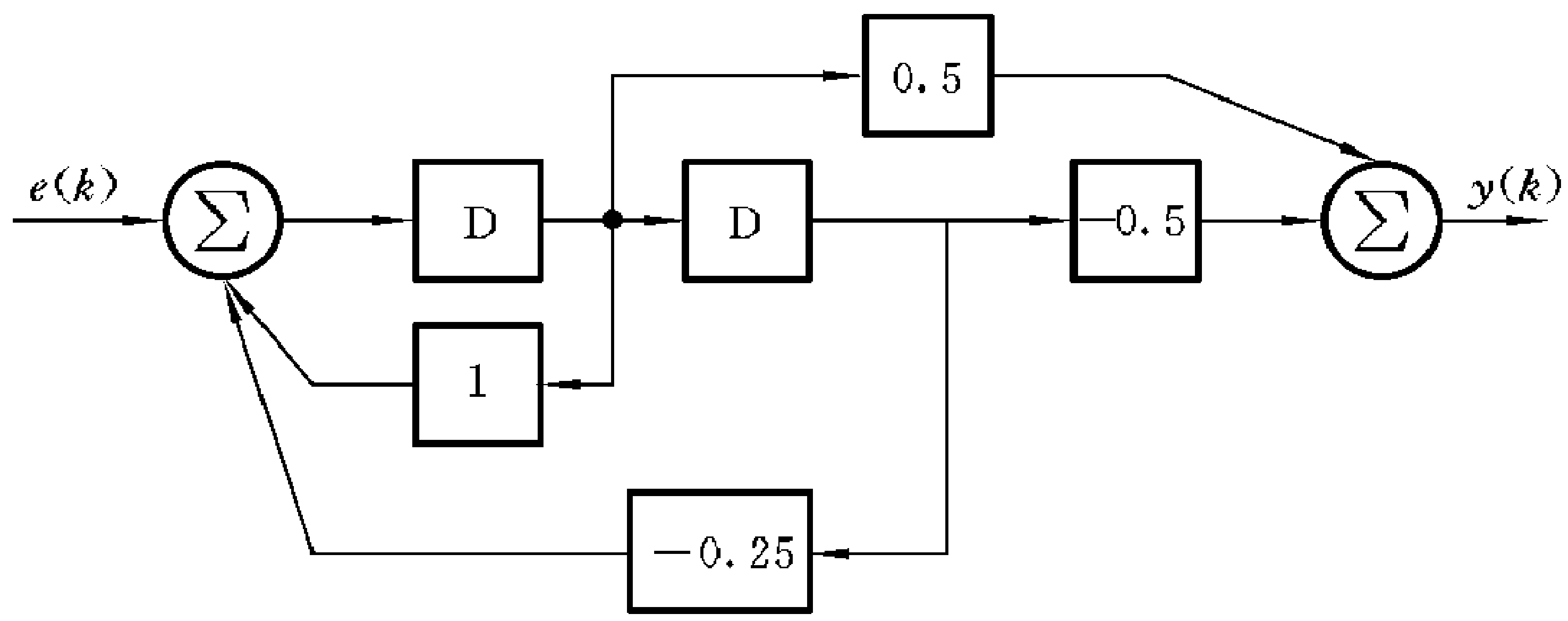


图 8-4

(1) $D(z)=z^2+0.25z+P$

(2) $D(z)=z^3-0.5z^2+0.25z+P$

解　(1) 令 $z=\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}$,代入 $D(z)$ 并化简,则

$$G(\lambda)=D\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)=\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^2+0.25\,\frac{\lambda+1}{\lambda-1}+P$$

$$=\frac{\left(\dfrac{5}{4}+P\right)\lambda^2+2(1-p)\lambda+\dfrac{3}{4}+P}{(\lambda-1)^2}$$

$G(\lambda)=0$ 的根就是其分子多项式的根,用罗斯-霍维茨准则对分子多项式进行判定:

$$\begin{array}{lll} A_2 & \dfrac{5}{4}+P & \dfrac{3}{4}+P \\ A_1 & 2(1-p) & \\ A_0 & \dfrac{3}{4}+P & \end{array}$$

要使系统稳定,须满足

$$\begin{cases} \dfrac{5}{4}+P>0 \\ 2(1-P)>0 \\ \dfrac{3}{4}+P>0 \end{cases}$$

解得
$$-\frac{3}{4}<P<1$$

(2) 令 $z=\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}$，代入 $D(z)$ 并化简，则

$$G(\lambda)=D\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)=\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^3-0.5\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^2+0.25\,\frac{\lambda+1}{\lambda-1}+P$$

$$=\frac{\left(\frac{3}{4}+P\right)\lambda^3+\left(\frac{9}{4}-3P\right)\lambda^2+\left(\frac{13}{4}+3P\right)\lambda+\frac{7}{4}-P}{(\lambda-1)^3}$$

$G(\lambda)=0$ 的根就是其分子多项式的根，用罗斯-霍维茨准则对分子多项式进行判定：

$$\begin{array}{lll}
A_3 & \dfrac{3}{4}+P & \dfrac{13}{4}+3P \\[2ex]
A_2 & \dfrac{9}{4}-3P & \dfrac{7}{4}-P \\[2ex]
A_1 & \dfrac{6-4P-8P^2}{\frac{9}{4}-3P} & 0 \\[2ex]
A_0 & \dfrac{7}{4}-P &
\end{array}$$

要使系统稳定，须满足

$$\begin{cases}
\dfrac{3}{4}+P>0 \\[2ex]
\dfrac{9}{4}-3P>0 \\[2ex]
\dfrac{6-4P-8P^2}{\frac{9}{4}-3P}>0 \\[2ex]
\dfrac{7}{4}-P>0
\end{cases}$$

解得

$$-\frac{3}{4}<P<\frac{-2+\sqrt{52}}{8}$$

【8-22】 求图 8-5 所示系统的系统函数并粗略绘其频率响应。

解 (a) 对于图 8-5(a)，

① $$E(z)-0.99z^{-1}Y(z)=Y(z)$$

$$zE(z)=0.99Y(z)+zY(z)$$

故

$$H(z)=\frac{z}{0.99+z}$$

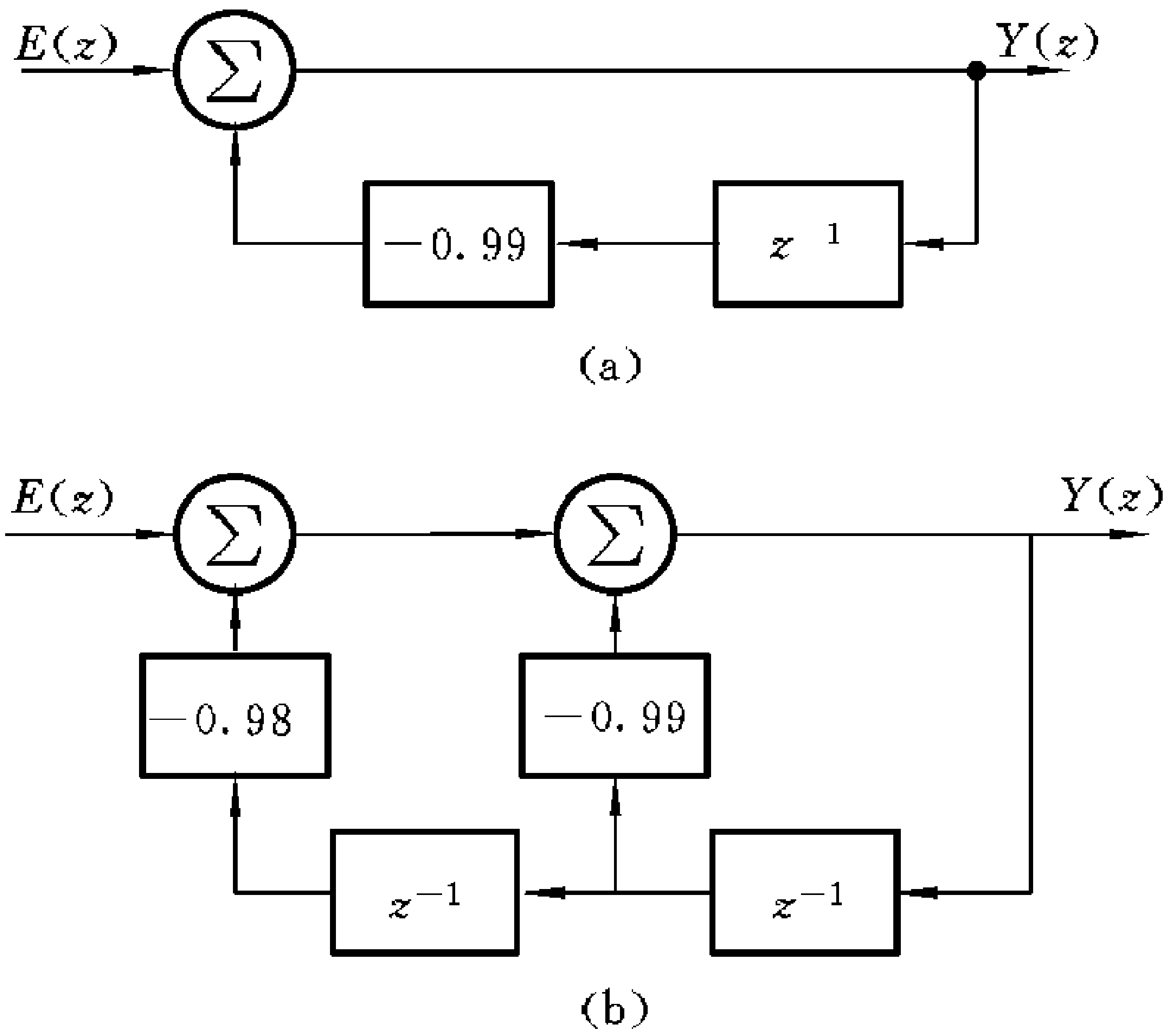


图 8-5

作极零图如图 8-6(a)所示。

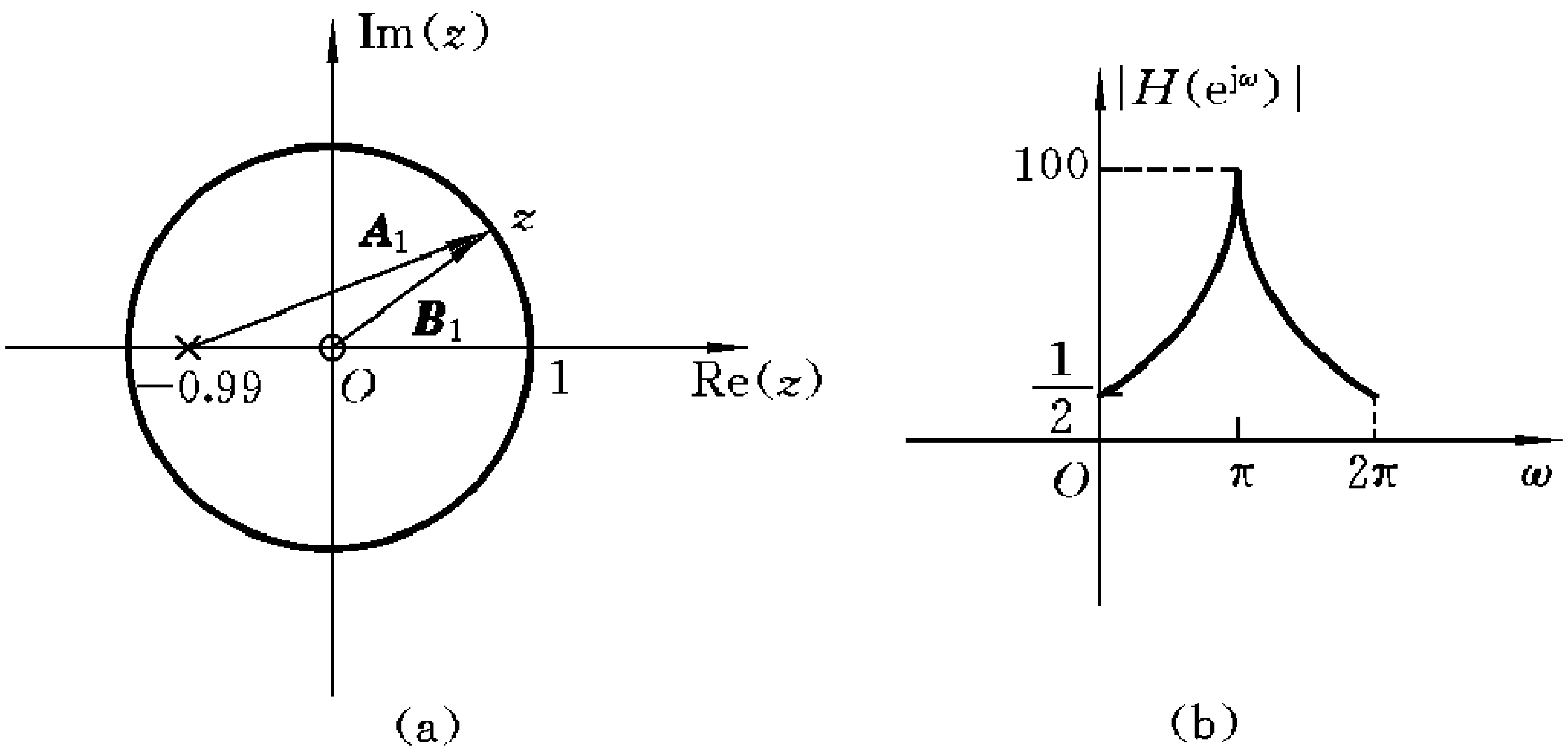


图 8-6

② $H(e^{j\omega})=\dfrac{e^{j\omega}}{0.99+e^{j\omega}}$　（令 $z=e^{j\omega}$）

ω 由 0 增至 2π 过程如下：

a. 当 $\omega=0$ 时，　　$|H(e^{j\omega})|=\dfrac{|\boldsymbol{B}_1|}{|\boldsymbol{A}_1|}=\dfrac{1}{1.99}$

b. 当 ω 增加时，$|\boldsymbol{A}_1|$ 减小，$|H(e^{j\omega})|$ 增大。

c. 当 $\omega=\pi$ 时，　$|H(e^{j\omega})|=\dfrac{|\boldsymbol{B}_1|}{|\boldsymbol{A}_1|}=\dfrac{1}{0.01}=100$

d. 当 ω 增加时，$|\boldsymbol{A}_1|$ 增大，$|H(e^{j\omega})|$ 减小。

e. 当 $\omega=2\pi$ 时，同 $\omega=0$ 的情况。

如此周期循环($T=2\pi$)，将此五点描于坐标系中，画出粗略频响，系统幅频响应曲线如图 8-6(b)所示。

(b) 对于图 8-5(b)，

① $E(z)-0.99\times\dfrac{Y(z)}{z}-0.98\times\dfrac{Y(z)}{z^2}=Y(z)$

$$z^2E(z)-0.99zY(z)-0.98Y(z)=z^2Y(z)$$

故
$$H(z)=\frac{z^2}{z^2+0.99z+0.98}$$

$$=\frac{z^2}{\left(z-\dfrac{-0.99+\sqrt{2.94}j}{2}\right)\left(z-\dfrac{-0.99-\sqrt{2.94}j}{2}\right)}$$

作极零图如图 8-7(a)所示。

② 令 $z=e^{j\omega}$，则

$$H(e^{j\omega})=\frac{e^{j2\omega}}{e^{j2\omega}+0.99e^{j\omega}+0.98}$$

ω 由 0 增至 2π 过程如下：

a. 当 $\omega=0$ 时，

$$|H(e^{j\omega})|=\frac{|\boldsymbol{B}_1|\cdot|\boldsymbol{B}_2|}{|\boldsymbol{A}_1|\cdot|\boldsymbol{A}_2|}=\frac{1}{\left(\dfrac{0.99}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2.94}}{2}+1\right)^2}=\frac{1}{3.68}=0.27$$

b. 当 ω 增加时，$|\boldsymbol{A}_1|\cdot|\boldsymbol{A}_2|$ 增大，则 $|H(e^{j\omega})|$ 减小。

c. 当 $\omega=\pi$ 时，　$|H(e^{j\omega})|=\dfrac{|\boldsymbol{B}_1|\cdot|\boldsymbol{B}_2|}{|\boldsymbol{A}_1|\cdot|\boldsymbol{A}_2|}=1$

d. 当 ω 增加时，$|\boldsymbol{A}_1|\cdot|\boldsymbol{A}_2|$ 减小，则 $|H(e^{j\omega})|$ 增大。

e. 当 $\omega=2\pi$ 时，同 $\omega=0$ 的情况。

如此周期循环($T=2\pi$)，将此五点描于坐标系中，画出粗略频响，系统幅频响应曲线如图 8-7 所示。

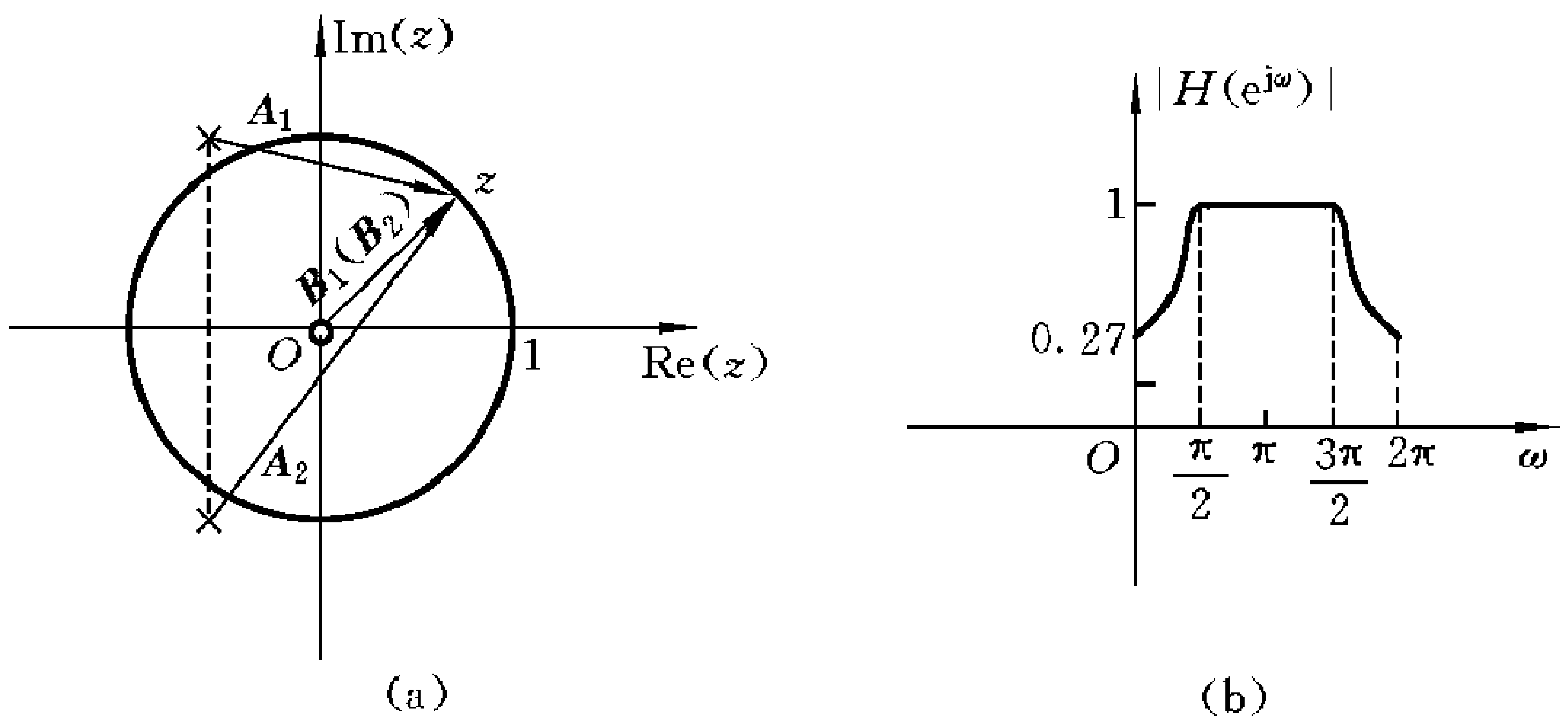


图 8-7

【8-23】 粗略绘出具有下列系统函数的幅频响应曲线。

(1) $H(z)=\dfrac{1}{1+z^{-1}}$　　　　(2) $H(z)=\dfrac{(1+z^{-1})^2}{1+0.16z^{-2}}$

(3) $H(z)=\dfrac{2z}{z^2+\sqrt{2}\,z+1}$

解　(1) 作极零图如图 8-8(a)所示。

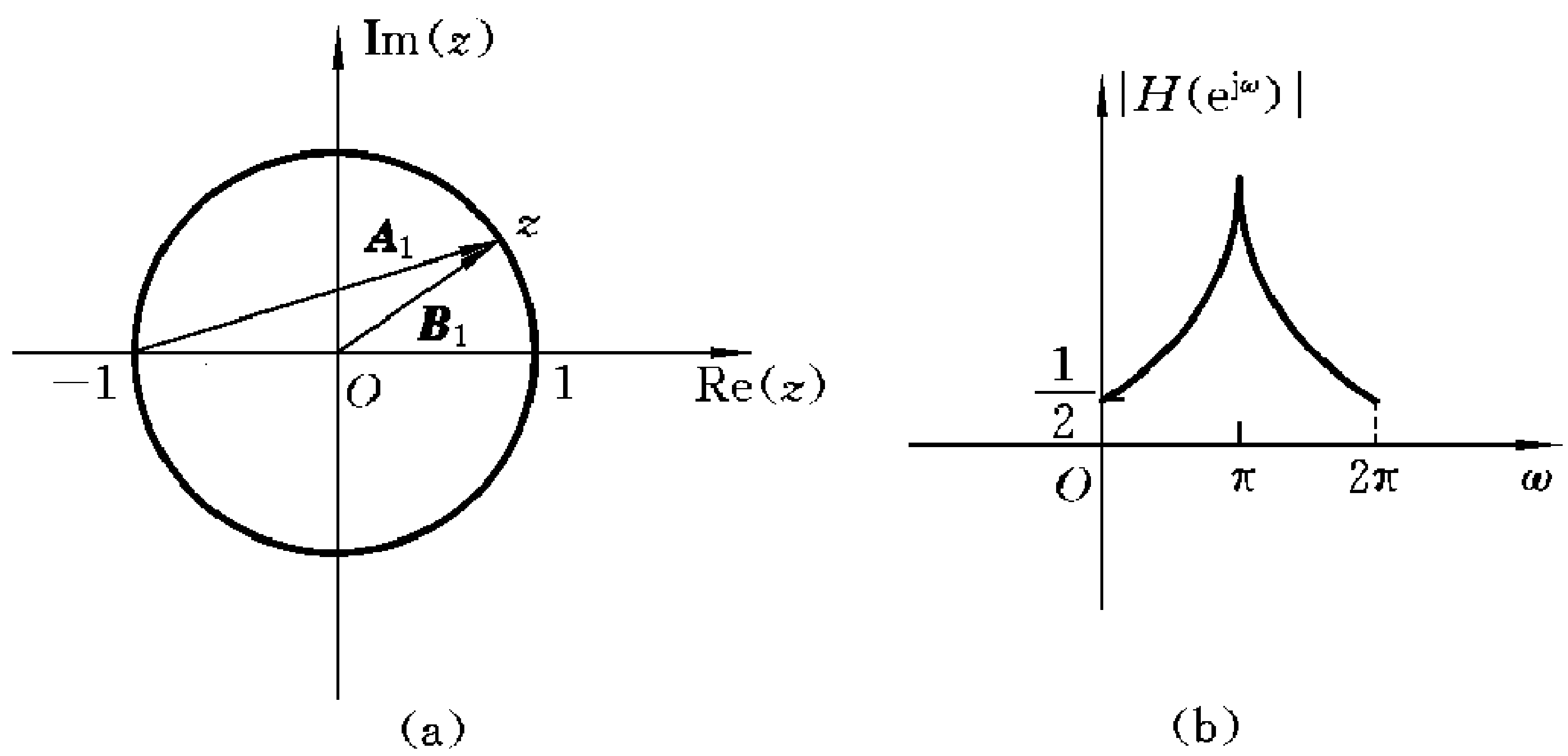


图 8-8

令 $z=e^{j\omega}$,则

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}+1}$$

ω 由 0 增至 2π 的过程如下：

a. 当 $\omega=0$ 时，$\left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|=\dfrac{|\boldsymbol{B}_1|}{|\boldsymbol{A}_1|}=\dfrac{1}{2}$

b. 当 ω 增加时，$|\boldsymbol{A}_1|$ 减小，$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$ 增大。

c. 当 $\omega=\pi$ 时，$|\boldsymbol{A}_1|=0$，$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=\dfrac{|\boldsymbol{B}_1|}{|\boldsymbol{A}_1|}\to\infty$

d. 当 ω 增加时，$|\boldsymbol{A}_1|$ 增大，$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$ 减小。

e. 当 $\omega=2\pi$ 时，$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=\dfrac{|\boldsymbol{B}_1|}{|\boldsymbol{A}_1|}=\dfrac{1}{2}$

如此周期循环（$T=2\pi$），将此五点描于坐标系中，画出粗略频响，系统幅频响应曲线如图 8-8(b)所示。

(2) 作极零图如图 8-9(a)所示。

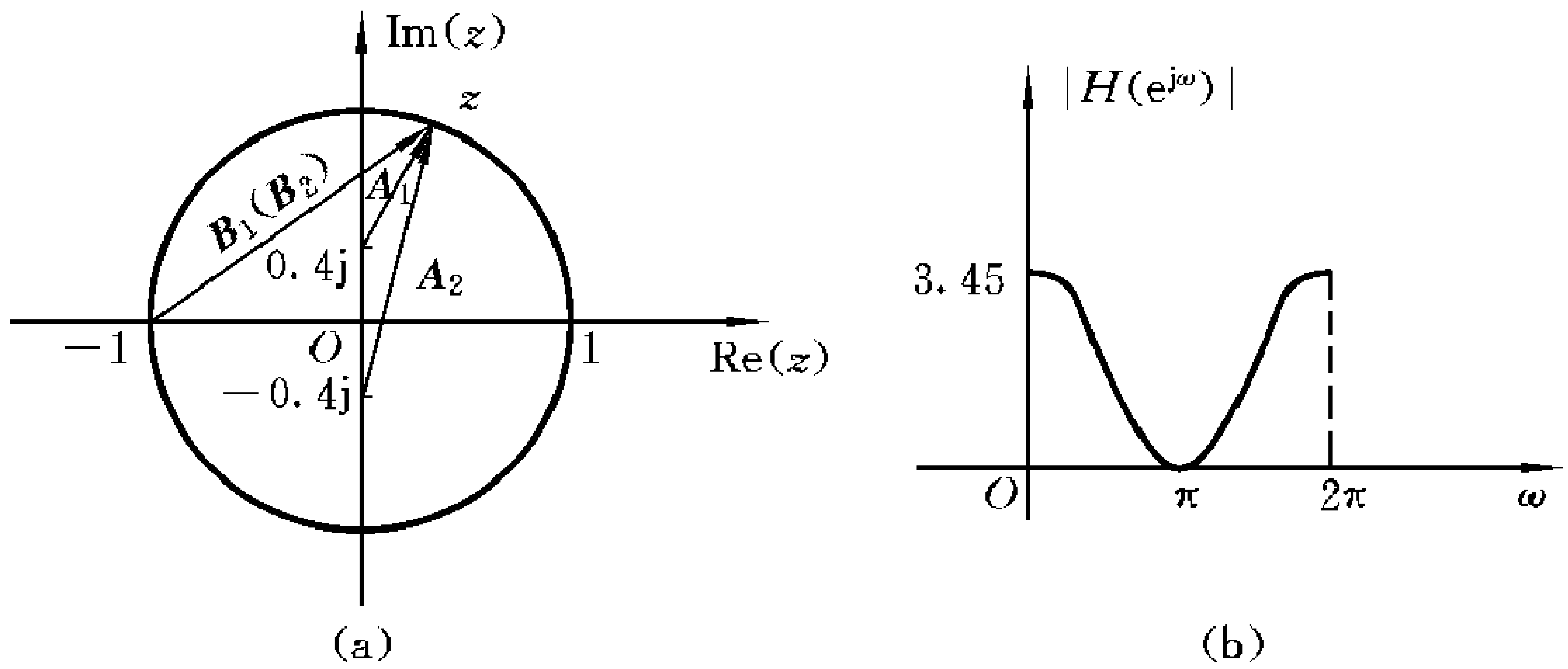


图 8-9

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$，则

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\frac{(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})^2}{(1+0.16\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega})}=\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}+1)^2}{\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega}+0.16}$$

ω 由 0 增至 2π 的过程如下：

a. 当 $\omega=0$ 时，$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=\dfrac{|\boldsymbol{B}_1|\,|\boldsymbol{B}_2|}{|\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|}=\dfrac{2\times 2}{\sqrt{1.16}\times\sqrt{1.16}}=3.45$

b. 当 ω 增加时，$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$ 减小。

c. 当 $\omega=\pi$ 时，$|\boldsymbol{B}_1|=|\boldsymbol{B}_2|=0$，$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=0$

d. 当 ω 增加时，$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$ 增加。

e. 当 $\omega=2\pi$ 时，

$$|H(e^{j\omega})|=\frac{|\boldsymbol{B}_1||\boldsymbol{B}_2|}{|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|}=\frac{2\times2}{\sqrt{1.16}\times\sqrt{1.16}}=3.45$$

如此周期循环($T=2\pi$)，将此五点描于坐标系中，画出粗略频响，系统幅频响应曲线如图8-9(b)所示。

(3) 作极零图如图8-10(a)所示。

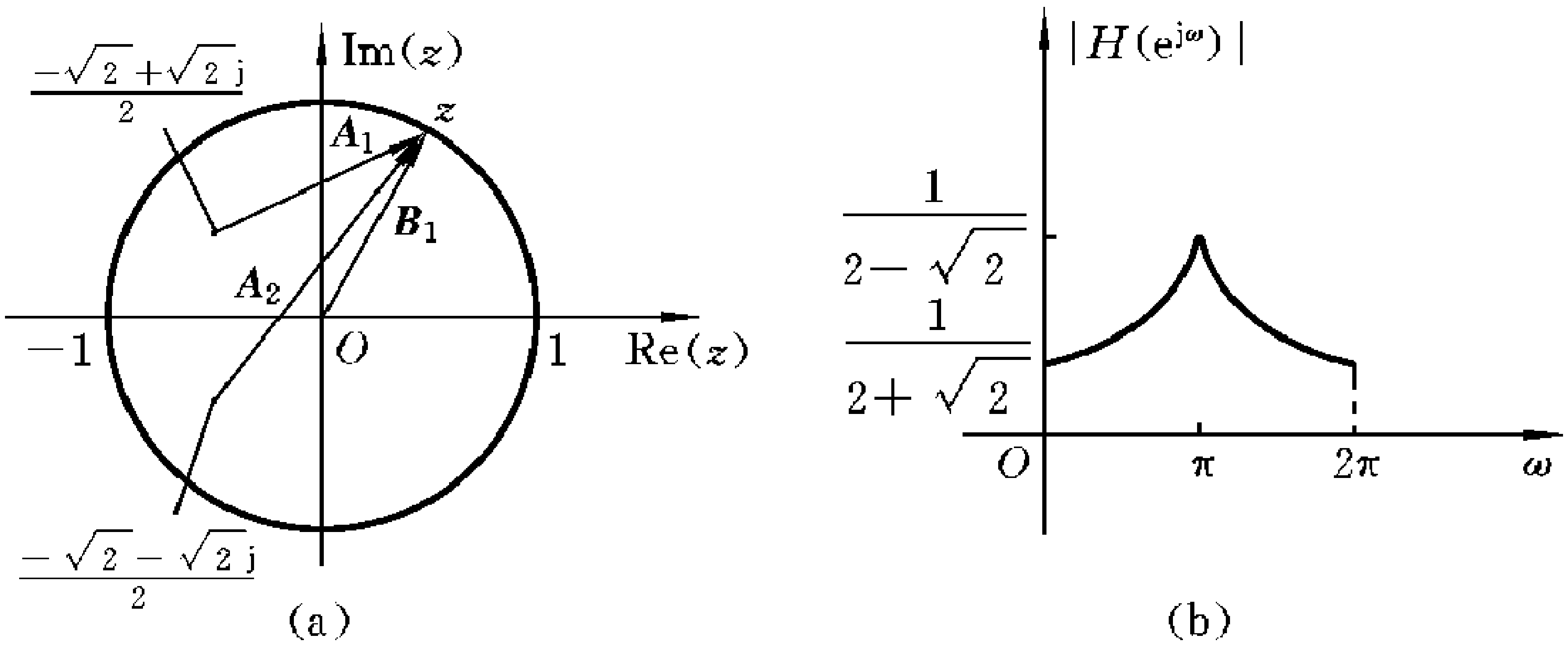


图8-10

令$z=e^{j\omega}$，则

$$H(e^{j\omega})=\frac{2e^{j\omega}}{e^{2j\omega}+\sqrt{2}e^{j\omega}+1}$$

ω由0增至2π的过程如下：

a. 当$\omega=0$时，$|H(e^{j\omega})|=\frac{|\boldsymbol{B}_1|}{|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$

b. 当ω增加时，$|H(e^{j\omega})|$增加。

c. 当$\omega=\pi$时，$|H(e^{j\omega})|=\frac{|\boldsymbol{B}_1|}{|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}$

d. 当ω增加时，$|H(e^{j\omega})|$减小。

e. 当$\omega=2\pi$时，$|H(e^{j\omega})|=\frac{|\boldsymbol{B}_1|}{|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$

如此周期循环($T=2\pi$)，将此五点描于坐标系中，画出粗略频响，系统幅频响应曲线如图8-10(b)所示。

【8-24】 求图8-11所示三阶非递归滤波器的系统函数，并绘出其极零图

与粗略的幅频响应曲线。假设输入信号的取样间隔为 1 ms。

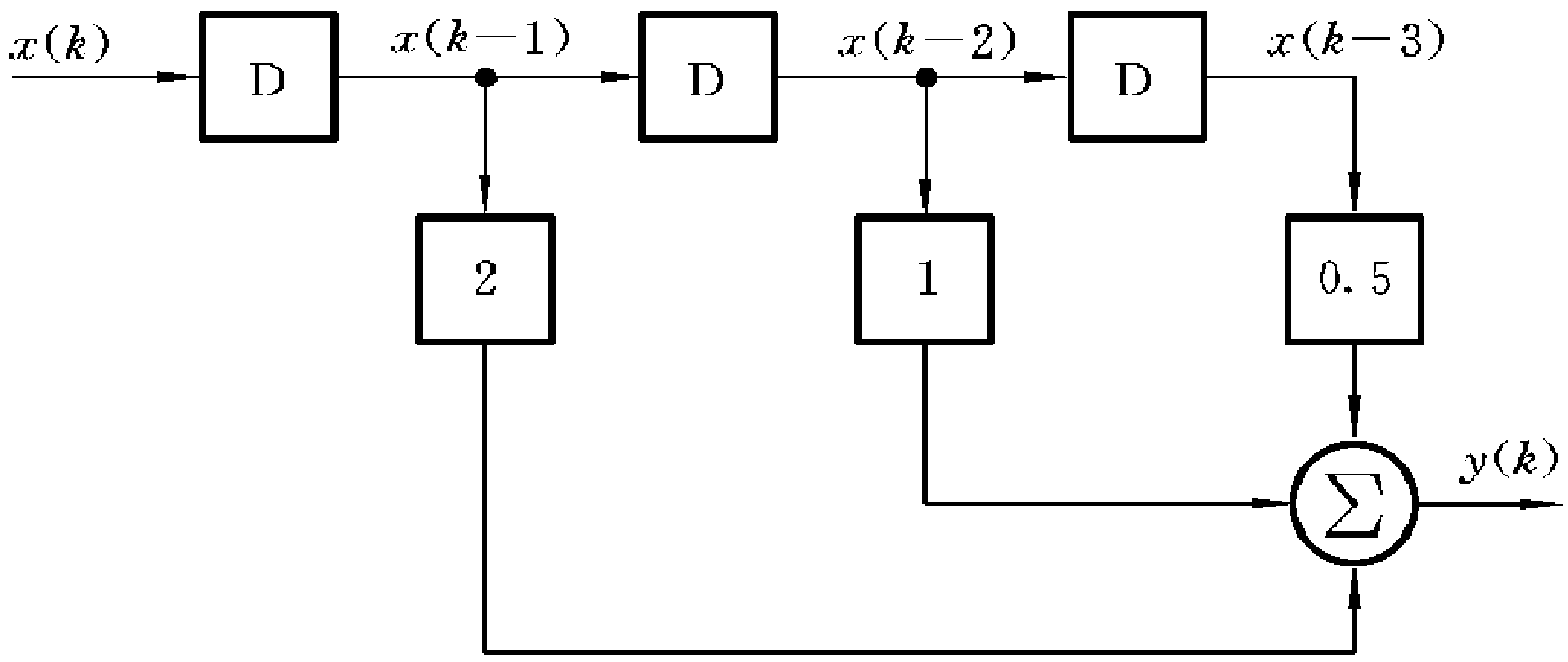


图 8-11

解　(1) 由图 8-11 的框架图得该系统差分方程为

$$y(k)=0.5x(k-3)+x(k-2)+2x(k-1)$$

所以

$$H(z)=0.5z^{-3}+z^{-2}+2z^{-1}=\frac{2z^2+z+0.5}{z^3}$$

$$=\frac{2\left(z+\frac{1}{4}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(z+\frac{1}{4}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{z^3}$$

两个零点：$z_0=\frac{-1}{4}\pm\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{4}$

一个三重极点：$z_p=0$

系统的极零图如图 8-12 所示。

(2) 求系统的传输函数：

$$\begin{aligned}H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})&=0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega T}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega T}+2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}\\&=[0.5\cos(3\omega T)+\cos(2\omega T)+2\cos(\omega T)]\\&\quad-\mathrm{j}[0.5\sin(3\omega T)+\sin(2\omega T)+2\sin(\omega T)]\end{aligned}$$

$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})|$

$$=\sqrt{[0.5\cos(3\omega T)+\cos(2\omega T)+2\cos(\omega T))^2+(0.5\sin(3\omega T)+\sin(2\omega T)+2\sin(\omega T)]^2}$$

$$=\sqrt{\frac{21}{4}+5\cos(\omega T)+2\cos(2\omega T)}$$

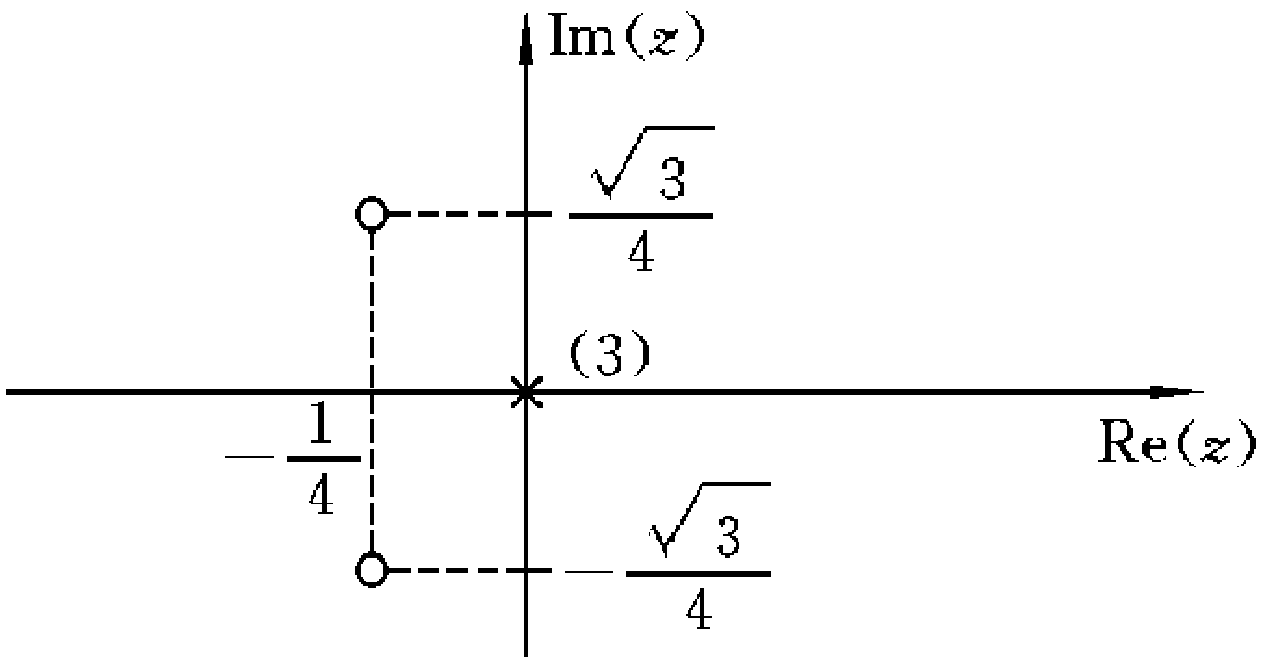


图 8-12

计算结果如表 8-3 所示。

表 8-3

ωT	0.2π	$\frac{\pi}{6}$, $\frac{11}{6}\pi$	$\frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi$	$\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$	π
$\lvert H(e^{j\omega T})\rvert$	3.5	3.25	2.96	2.6	1.8	1.32	1.31	1.39	1.5

系统幅频响应曲线如图 8-13 所示。

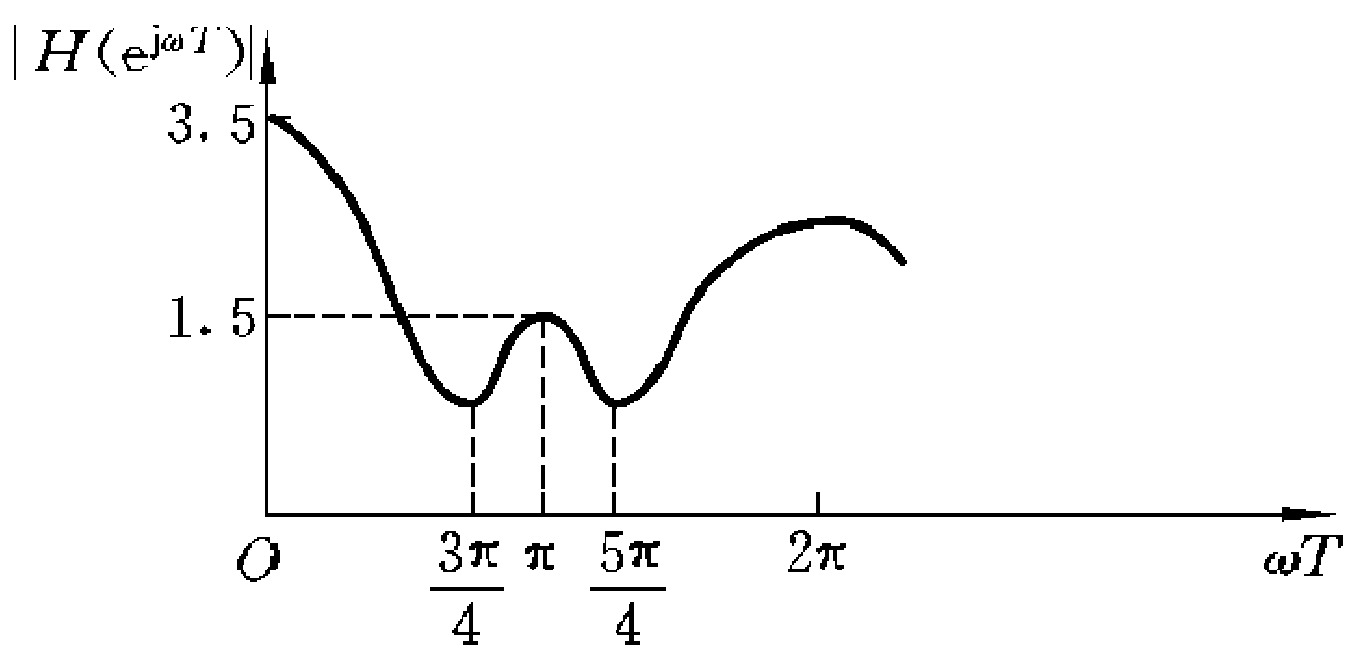


图 8-13

【8-25】 图 8-14 所示抽头滤波器，如要求其传输系数在 $\omega_1=0$ 时为 1；在 $\omega_2=\frac{\pi}{2}\times10^3\,\mathrm{rad/s}$ 及 $\omega_3=\pi\times10^3\,\mathrm{rad/s}$ 时为零，求图中各标量乘法器的传输

值 a_0, a_1, a_2, a_3，并绘其幅频响应曲线。

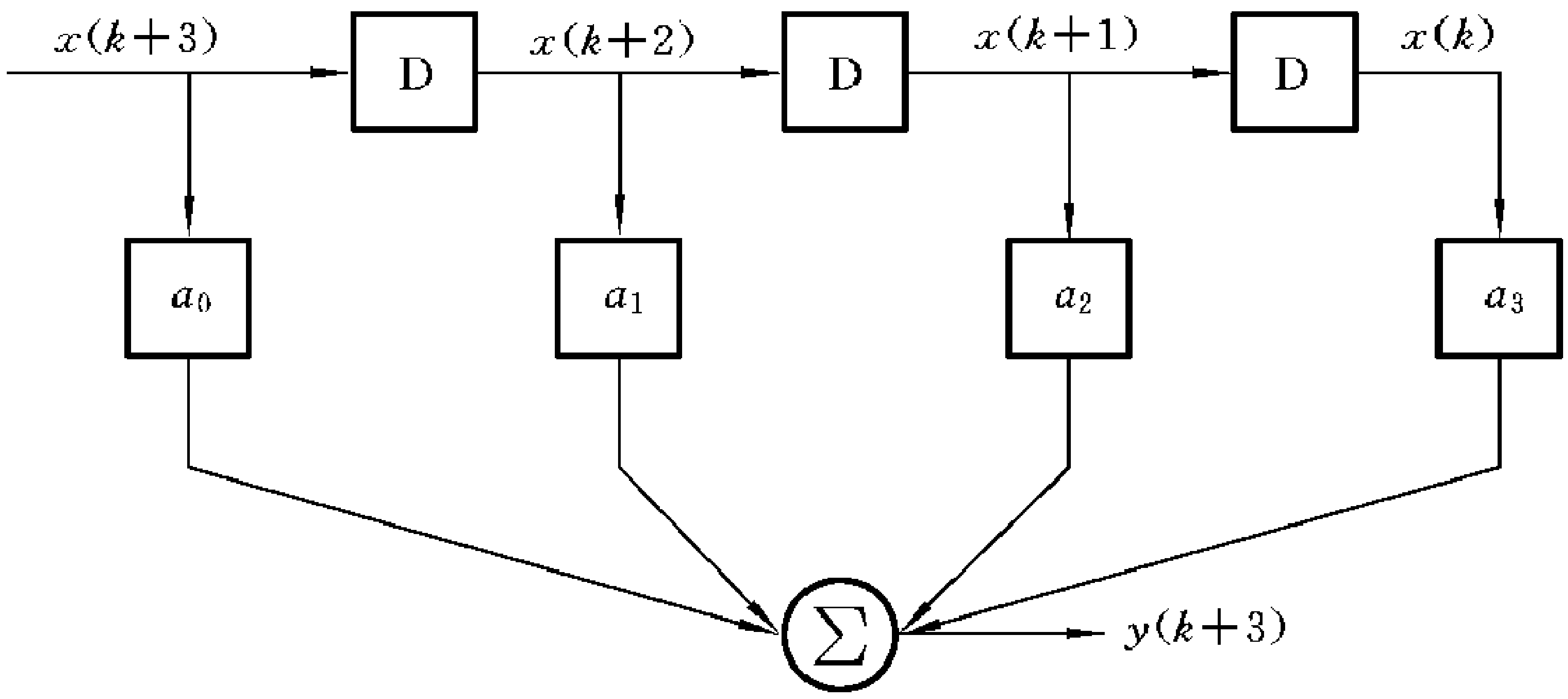


图 8-14

解　(1) $y(k+3)=a_0x(k+3)+a_1x(k+2)$

$$+a_2x(k+1)+a_3x(k)$$

对上述方程两边取 z 变换：

$$z^3Y(z)=(a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3)X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}$$

故频响特性为　$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=a_0+a_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}+a_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega T}+a_3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega T}$

根据题意有

当 $\omega_1=0, \omega_1T=0$ 时，

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1T})=a_0+a_1+a_2+a_3=1$$

当 $\omega_2=\frac{\pi}{2}\times10^3\,\mathrm{rad/s}, \omega_2T=\frac{\pi}{2}$ 时，

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2T})=a_0+a_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}+a_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi}+a_3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{2}\pi}=0$$

当 $\omega_3=\pi\times10^3\,\mathrm{rad/s}, \omega_3T=\pi$ 时，

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_3T})=a_0+a_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi}+a_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi}+a_3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\pi}=0$$

得

$$\begin{cases}a_0+a_1+a_2+a_3=1\\ a_0-\mathrm{j}a_1-a_2+\mathrm{j}a_3=0\\ a_0-a_1+a_2-a_3=0\end{cases}\Rightarrow\quad a_0=a_2,\quad a_1=a_3$$

解得
$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{4}$$

(2) 计算得系统传输函数为

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{1}{4}(1 + e^{-j\omega T} + e^{-j2\omega T} + e^{-j3\omega T}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - e^{-j4\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}}$$

系统幅频响应曲线如图 8-15 所示。

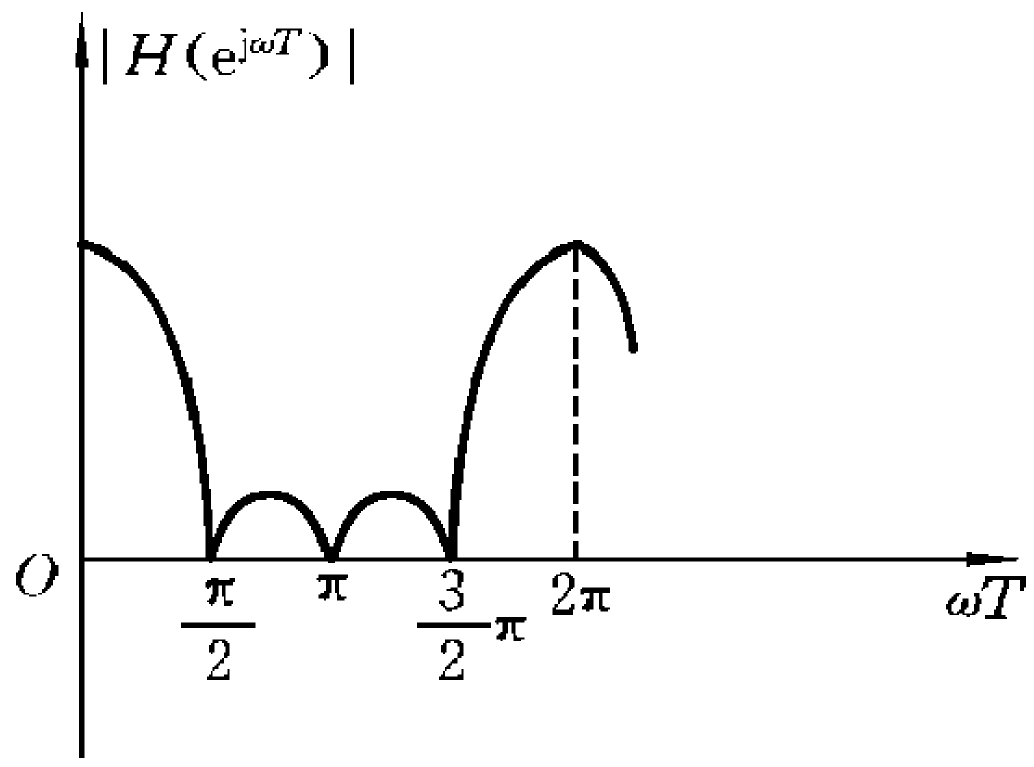


图 8-15

【8-26】 已知某离散时间系统的系统方程为

$$H(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)}{(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_n)z^{k_0}}$$

其中k_0是任意大于零的整数，系统的任意第i个极点p_i和第i个零点$z_i(i=1, 2,\cdots,n)$之间满足辐角相等、幅度互为倒数的关系，即假设$z_i = r_i e^{j\phi_i}$，则$p_i = \frac{1}{r_i}e^{j\phi_i}$。证明这个系统是对任意的频率都具有相同的幅频特性的全通系统。

证　令$z = e^{j\omega}$，则系统的幅频响应为

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\prod_{i=1}^{n} |e^{j\omega} - r_i e^{j\phi_i}|}{\left(\prod_{i=1}^{n} \left|e^{j\omega} - \frac{1}{r_i}e^{j\phi_i}\right|\right) \cdot |e^{j\omega k_0}|}$$

$$\begin{aligned}
|e^{j\omega} - r_i e^{j\phi_i}|^2 &= |\cos\omega + j\sin\omega - r_i(\cos\phi_i + j\sin\phi_i)|^2 \\
&= |(\cos\omega - r_i\cos\phi_i) + j(\sin\omega - r_i\sin\phi_i)|^2 \\
&= (\cos\omega - r_i\cos\phi_i)^2 + (\sin\omega - r_i\sin\phi_i)^2 \\
&= \cos^2\omega - 2r_i\cos\omega\cos\phi_i + r_i^2\cos^2\phi_i + \sin^2\omega
\end{aligned}$$

$$-2r_i\sin\omega\sin\phi_i+r_i^2\sin^2\phi_i$$

$$=1+r_i^2-2r_i(\cos\omega\cos\phi_i+\sin\omega\sin\phi_i)$$

$$=1+r_i^2-2r_i\cos(\omega-\phi_i)$$

同理
$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{r_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_i}\right|^2=1+\frac{1}{r_i^2}-2\frac{1}{r_i}\cos(\omega-\phi_i)$$

则
$$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}[1+r_i^2-2r_i\cos(\omega-\phi_i)]}{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{r_i^2}-2\frac{1}{r_i}\cos(\omega-\phi_i)\right)}\cdot\frac{1}{|\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega k_0}|}$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}r_i^2\left(1+\frac{1}{r_i^2}-2\frac{1}{r_i}\cos(\omega-\phi_i)\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{r_i^2}-2\frac{1}{r_i}\cos(\omega-\phi_i)\right)}\cdot\frac{1}{|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}|^{2k_0}}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}r_i^2\cdot 1=\prod_{i=1}^{n}r_i^2$$

所以
$$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=\prod_{i=1}^{n}r_i$$

由于幅频响应与频率无关，所以这个系统是对任意频率都具有相同幅频特性的全通系统。

第九章　线性系统的状态变量分析

9-1　基 本 要 求

深刻理解系统状态、状态变量、状态方程、输出方程的定义与意义。熟练掌握根据状态方程中的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵求状态转移矩阵 $\phi(t)=\mathrm{e}^{At}$，或根据 $\phi(t)$ 求 $\boldsymbol{A}$ 矩阵。本章的重点是依据系统的微分方程或差分方程、系统的模拟框图、系统的信号流图或电路图来建立系统的状态方程和输出方程，并用状态变量分析法求解系统的状态方程和输出方程以及系统函数。

9-2　重点、难点学习指导

1. 状态变量分析法

以状态变量为完备的独立变量，以状态方程和输出方程为研究对象，对多输入多输出系统进行分析的方法，称为状态变量分析法。该方法的基本步骤如下：

① 状态变量的选取；

② 状态方程的建立；

③ 把上面各方程中的非状态变量都用状态变量来表示，写成矩阵形式的状态方程和输出方程；

④ 求解状态方程，得到状态矢量 $\boldsymbol{x}(t)$；

⑤ 求解输出方程，得到状态矢量 $\boldsymbol{y}(t)$。

2. 连续时间系统状态方程和输出方程的建立

(1) 由电路图直观列写

① 选所有独立电容电压和独立电感电流作为状态变量；

② 分别列写只含一个独立电容电压一阶导数在内的结点KCL 方程；只含一个独立电感电流一阶导数的回路KVL 方程；

③ 用状态变量表示上述方程中的非状态变量；

④ 写成矩阵的形式。

(2) 由系统的模拟框图、信号流图或$H(s)$直接列写

根据已知系统的微分方程可写出系统函数为

$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

设$H(s)$的分子与分母无公因子相消，则可根据系统的微分方程或$H(s)$，画出系统的直接形式、并联形式、级联形式的模拟框图和信号流图，然后选取积分器的输出信号作为状态变量列写状态方程。

① 直接形式：

a. 当$m<n$时，根据状态方程和输出方程的标准形式

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}$$

各个系统矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=[0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{C}=[b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0],\quad \boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$$

b. 当$m=n$时，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$矩阵同上，$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$矩阵为

$$\boldsymbol{C}=[b_0-b_n a_0 \quad b_1-b_n a_1 \quad \cdots \quad b_{n-1}-b_n a_{n-1}],\quad \boldsymbol{D}=[b_n]$$

② 并联形式：

$$H(s)=\frac{Y(s)}{E(s)}=b_n+\frac{K_1}{s-\lambda_1}+\frac{K_2}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{K_n}{s-\lambda_n}$$

则各系数矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=[1\quad 1\quad \cdots\quad 1]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{C}=[K_1\quad K_2\quad \cdots\quad K_n],\quad \boldsymbol{D}=[b_n]$$

3. 状态方程和输出方程的求解

(1) 连续时间系统

① 连续时间系统状态方程与输出方程的时域解

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}*\boldsymbol{Be}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+[\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(t)]*\boldsymbol{e}(t)$$

零输入响应：　　$\boldsymbol{y}_{\mathrm{zi}}(t)=\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$

零状态响应：　　$\boldsymbol{y}_{\mathrm{zs}}(t)=[\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(t)]*\boldsymbol{e}(t)$

单位冲激响应：　　$\boldsymbol{h}(t)=\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(t)$

② 状态转移矩阵

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$$

其拉普拉斯变换

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$$

$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵；$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，亦即 $H(s)$ 的分母多项式；$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程，其根称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根，也称为系统的自然频率或固有频率。

③ 连续时间系统状态方程与输出方程的 s 域解

$$\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)+(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BE}(s)$$

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)+[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{E}(s)$$

$$\boldsymbol{H}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)+(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BE}(s)\}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)+[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{E}(s)\}$$

零输入响应：　　$\boldsymbol{y}_{\mathrm{zi}}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)\}$

零状态响应：　　$\boldsymbol{y}_{\mathrm{zs}}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{E}(s)\}$

单位冲激响应：　　$\boldsymbol{h}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\}$

(2) 离散时间系统

① 离散时间系统状态方程与输出方程的时域解

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1-j}\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}(j)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-1-j}\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}(j)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}(k)$$

零输入响应：　$\boldsymbol{y}_{zi}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0)$

零状态响应：　$\boldsymbol{y}_{zs}(k)=\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-1-j}\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}(j)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}(k)$

单位样值响应：　$\boldsymbol{h}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(k)$

② 状态转移矩阵

$$\boldsymbol{\phi}(k)=\boldsymbol{A}^k$$

其 z 变换　$\boldsymbol{\Phi}(z)=(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}z$

$|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$称为离散时间系统的特征多项式；$|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 称为离散时间系统的特征方程，其根称为特征根，也称为系统的自然频率或固有频率。

③ 离散时间系统状态方程与输出方程的 z 域解

$$\boldsymbol{X}(z)=(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}z\boldsymbol{x}(0)+(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}(z)$$

$$\boldsymbol{Y}(z)=\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}z\boldsymbol{x}(0)+[\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{E}(z)$$

$$\boldsymbol{H}(z)=\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathscr{Z}^{-1}\{(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}z\boldsymbol{x}(0)+(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}(z)\}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\mathscr{Z}^{-1}\{\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}z\boldsymbol{x}(0)+[\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{E}(z)\}$$

零输入响应：

$$\boldsymbol{y}_{zi}(t)=\mathscr{Z}^{-1}\{\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}z\boldsymbol{x}(0)\}$$

零状态响应：

$$\boldsymbol{y}_{zs}(t)=\mathscr{Z}^{-1}\{[\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{E}(z)\}$$

单位样值响应：

$$\boldsymbol{h}(t)=\mathscr{Z}^{-1}\{\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\}$$

(3) 系统稳定性判别

对于连续时间稳定系统，若 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的所有特征值都为负的实数，则系统稳定。

对于离散时间稳定系统，若A矩阵的所有特征值的绝对值小于1，则系统稳定。

9-3　习 题 详 解

【9-1】 写出图9-1所示框图表示的系统的状态方程及输出方程。

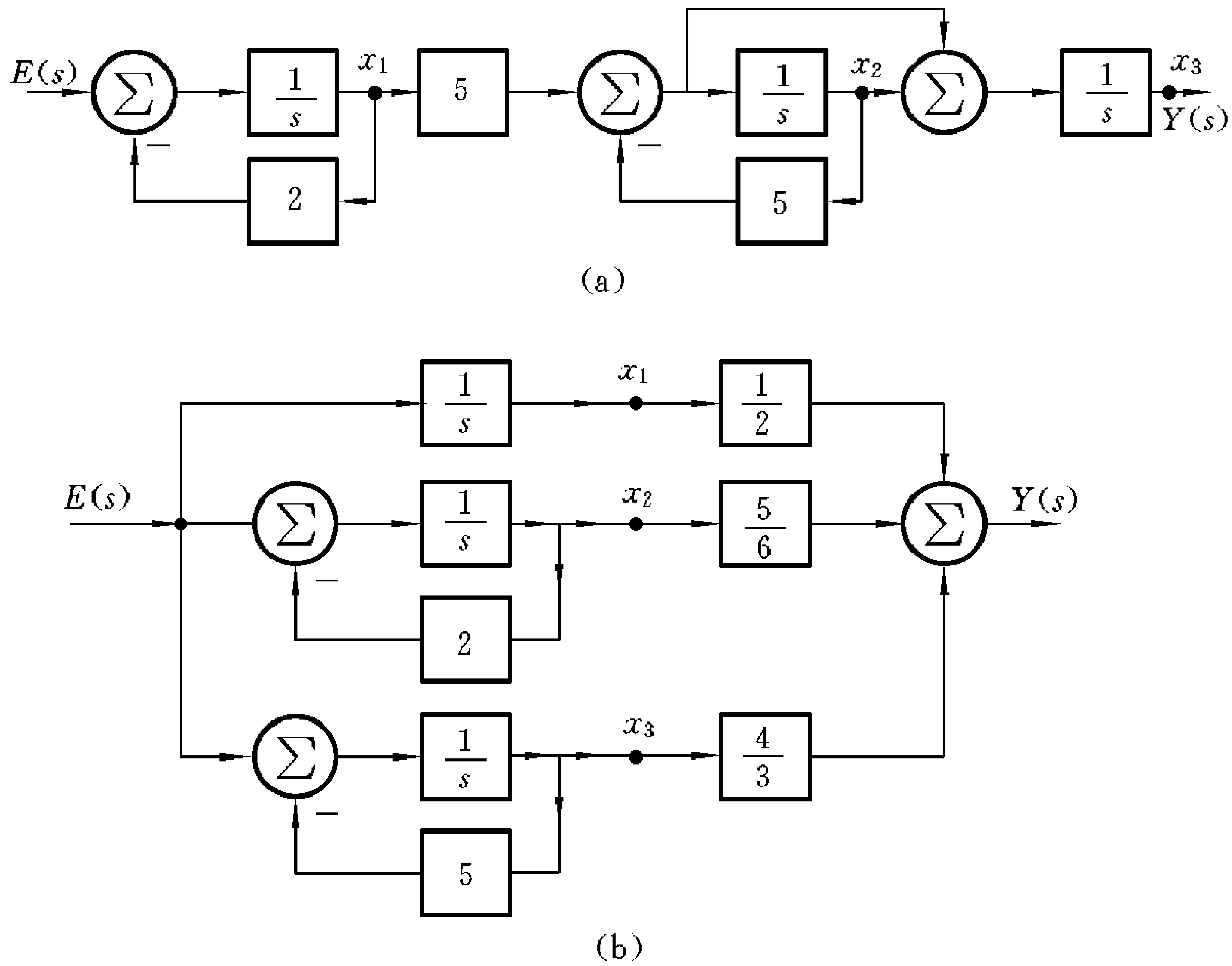


图 9-1

解　(a) 对于图9-1(a)，由框图可得

$$\begin{cases} x'_1 = -2x_1 + e(t) \\ x'_2 = 5x_1 - 5x_2 \\ x'_3 = x_2 + x'_2 = 5x_1 - 4x_2 \\ y = x_3 \end{cases}$$

所以状态方程为

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

输出方程为

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(b) 对于图 9-1(b),由框图可得

$$\begin{cases} x'_1 = e(t) \\ x'_2 = -2x_2 + e(t) \\ x'_3 = -5x_3 + e(t) \\ y = \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{5}{6}x_2 + \dfrac{4}{3}x_3 \end{cases}$$

所以状态方程为

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

输出方程为

$$y = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{5}{6} & \dfrac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

【9-2】 选图 9-2 所示各子系统的辅助变量为状态变量,写出图 9-2 所示系统的状态方程及输出方程。

解 因为

$$W(s)=V(s)+E(s)$$

所以

$$w(t) = v(t) + e(t)$$

因为

$$Z(s) = \frac{W(s)}{s+2}$$

$$sZ(s) = -2Z(s) + W(s)$$

所以

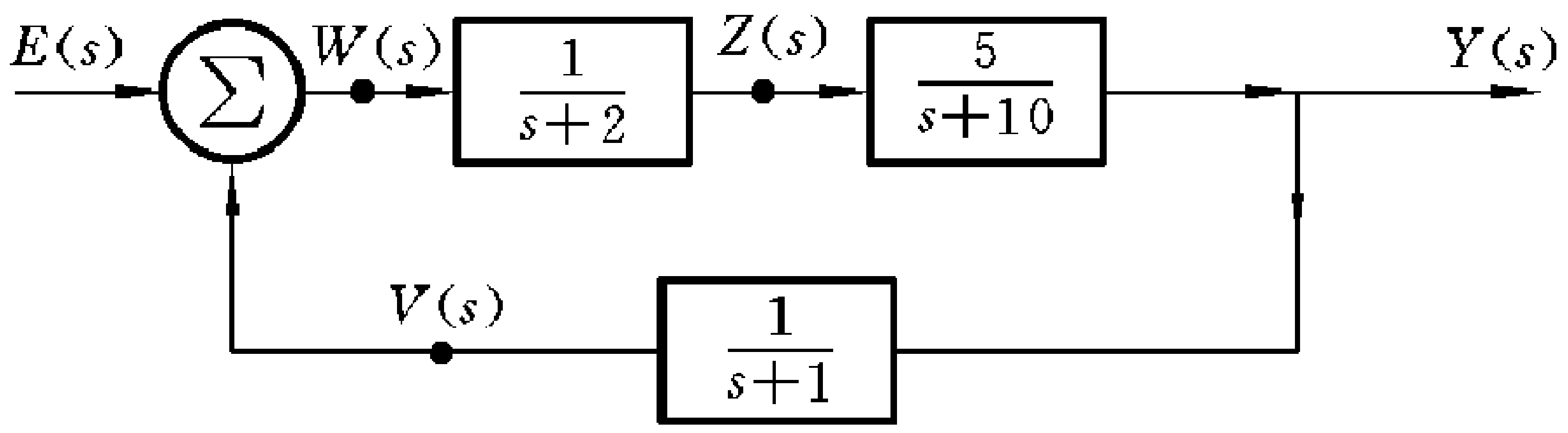


图 9-2

$$z'(t)=-2z(t)+w(t)=-2z(t)+v(t)+e(t)$$

因为

$$Y(s)=\frac{5}{s+10}Z(s)$$

$$sY(s)=-10Y(s)+5Z(s)$$

所以

$$y'(t)=-10y(t)+5z(t)$$

因为

$$V(s)=\frac{1}{s+1}Y(s)$$

$$sV(s)=-V(s)+Y(s)$$

所以

$$v'(t)=y(t)-v(t)$$

故状态方程为

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \\ v' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -10 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \\ v \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}e(t)$$

输出方程为

$$y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \\ v \end{bmatrix}$$

【9-3】 已知系统函数如下，列写系统的相变量状态方程与输出方程。

(1) $H(s)=\dfrac{2s^2+9s}{s^2+4s+29}$　　(2) $H(s)=\dfrac{4s}{(s+1)(s+2)^2}$

(3) $H(s)=\dfrac{4s^3+16s^2+23s+13}{(s+1)^3(s+2)}$

解　(1) 利用系统函数与状态方程和输出方程的关系，可直接写出状态方程为

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -29 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

输出方程为　$y = [-58 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2e(t)$

(2) 因为　$H(s) = \dfrac{4s}{(s+1)(s+2)^2} = \dfrac{4s}{s^3+5s^2+8s+4}$

所以状态方程为

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -8 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

输出方程为　$y = [0 \quad 4 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

(3) 因为

$$H(s) = \frac{4s^3+16s^2+23s+13}{(s+1)^3(s+2)} = \frac{4s^3+16s^2+23s+13}{s^4+5s^3+9s^2+7s+2}$$

所以状态方程为

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -7 & -9 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

输出方程为　$y = [13 \quad 23 \quad 16 \quad 4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

【9-4】　已知系统函数如下，列写系统的相变量与对角线变量的状态方程。

(1) $H(s) = \dfrac{3s+10}{s^2+7s+12}$　(2) $H(s) = \dfrac{2s^2+10s+14}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

解　(1) ① 相变量状态方程为

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

输出方程为
$$y = [10 \quad 3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

② 因为
$$H(s) = \frac{3s+10}{s^2+7s+12} = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s+4}$$

所以对角线变量状态方程为

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

输出方程为
$$y = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(2) ① 因为
$$H(s) = \frac{2s^2+10s+14}{s^3+6s^2+11s+6}$$

所以相变量状态方程为

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

输出方程为
$$y = [14 \quad 10 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

② 因为
$$H(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

所以对角线变量状态方程为

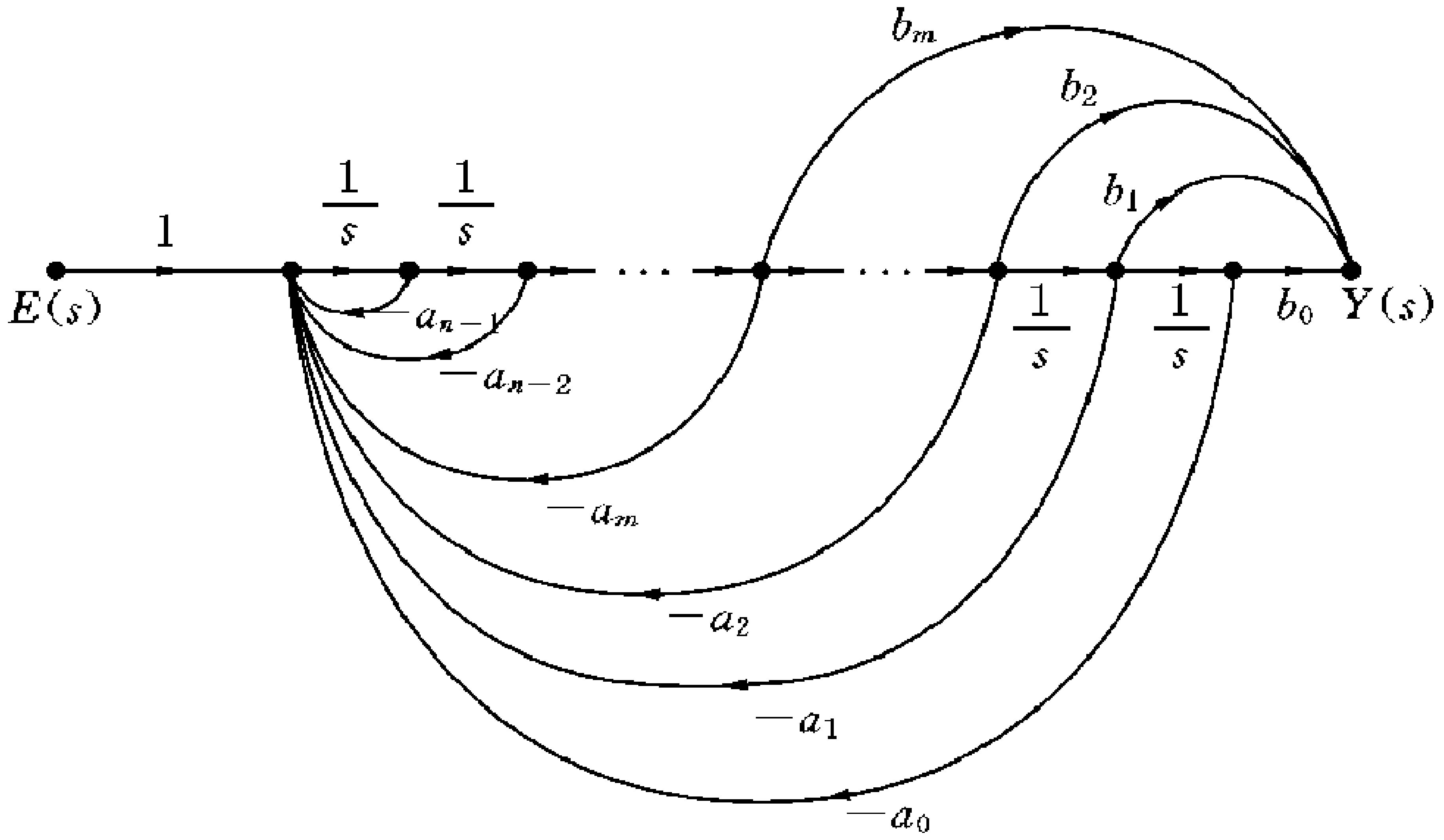
$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

输出方程为
$$y = [3 \quad -2 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

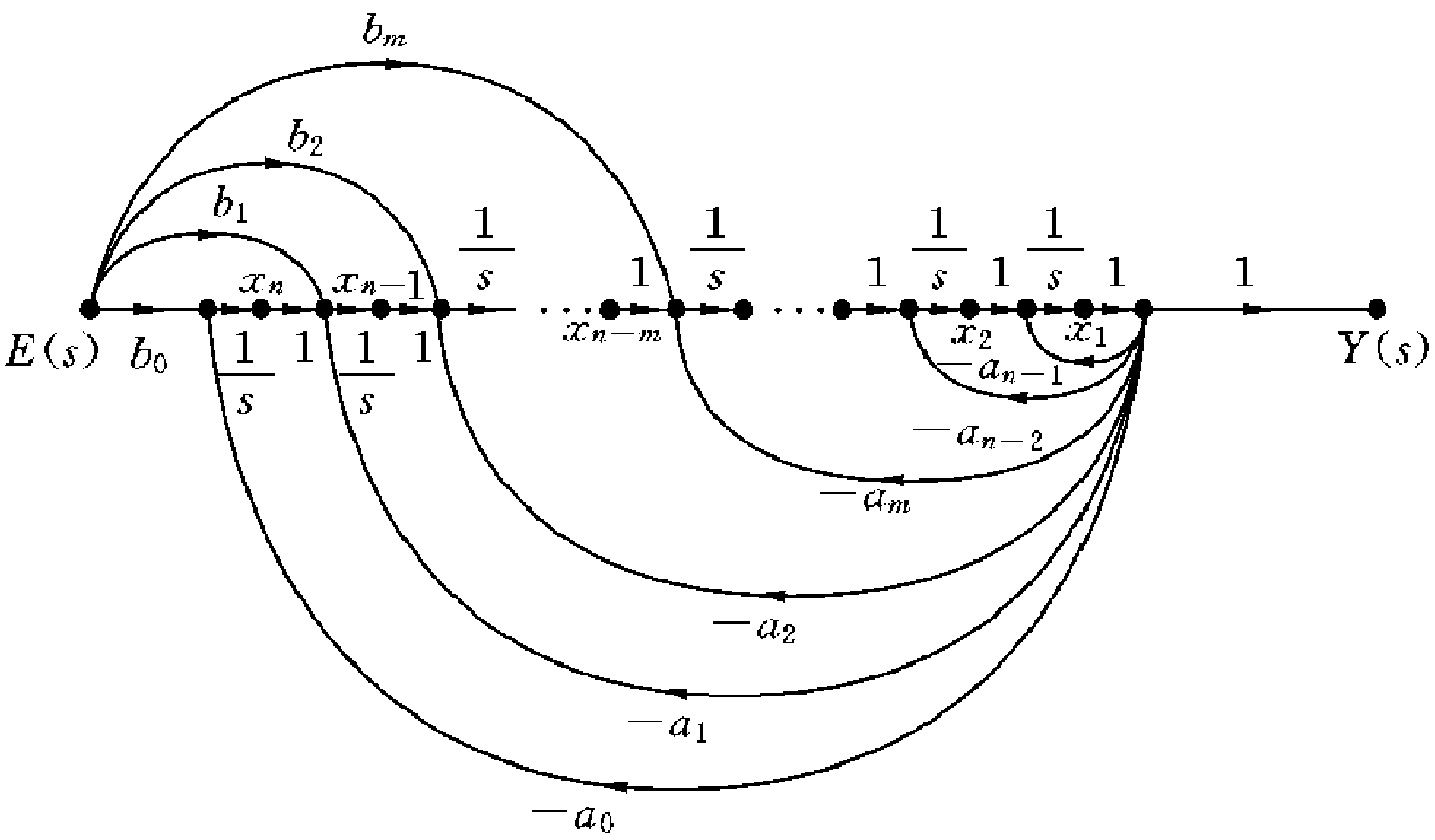
【9-5】 n 阶系统函数的一般形式为

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

如以图 9-3(a)所示流图表示该系统,则所列状态方程即为相变量方程。但该系统函数亦可用图 9-3(b)所示的流图表示,试列出此时的状态方程。



(a)



(b)

图 9-3

解　由图 9-3(b)所示的信号流图可以写出

$$
\begin{cases}
x'_1 = x_2 - a_{n-1}x_1 \\
x'_2 = x_3 - a_{n-2}x_1 \\
\quad\vdots \\
x'_{n-(m+1)} = x_{n-m} - a_{m+1}x_1 \\
x'_{n-m} = x_{n-m+1} - a_m x_1 + b_m e(t) \\
\quad\vdots \\
x'_{n-2} = x_{n-1} - a_2 x_1 + b_2 e(t) \\
x'_{n-1} = x_n - a_1 x_1 + b_1 e(t) \\
x'_n = -a_0 x_1 + b_0 e(t)
\end{cases}
$$

及

$$y = x_1$$

写成矩阵形式,得状态方程为

$$
\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ \vdots \\ x'_{n-(m+1)} \\ x'_{n-m} \\ x'_{n-m+1} \\ \vdots \\ x'_{n-2} \\ x'_{n-1} \\ x'_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-a_{n-2} & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-a_{n-3} & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
-a_{m+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-a_m & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-a_{m-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
-a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
-a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
-a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-(m+1)} \\ x_{n-m} \\ x_{n-m+1} \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} e(t)
$$

【9-6】 离散时间系数由下列差分方程描述,列写该系统的状态方程与

输出方程。

(1) $y(k+2)+2y(k+1)+y(k)=e(k+2)$

(2) $y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=e(k+1)+e(k)$

(3) $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)+y(k-3)$

$=e(k-1)+2e(k-2)+e(k-3)$

解　(1) 根据差分方程,可直接写出状态方程和输出方程。

状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(k)$$

输出方程为

$$y(k) = [-1 \quad -2] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + e(k)$$

(2) 状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(k)$$

输出方程为

$$y(k) = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

(3) 状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(k)$$

输出方程为

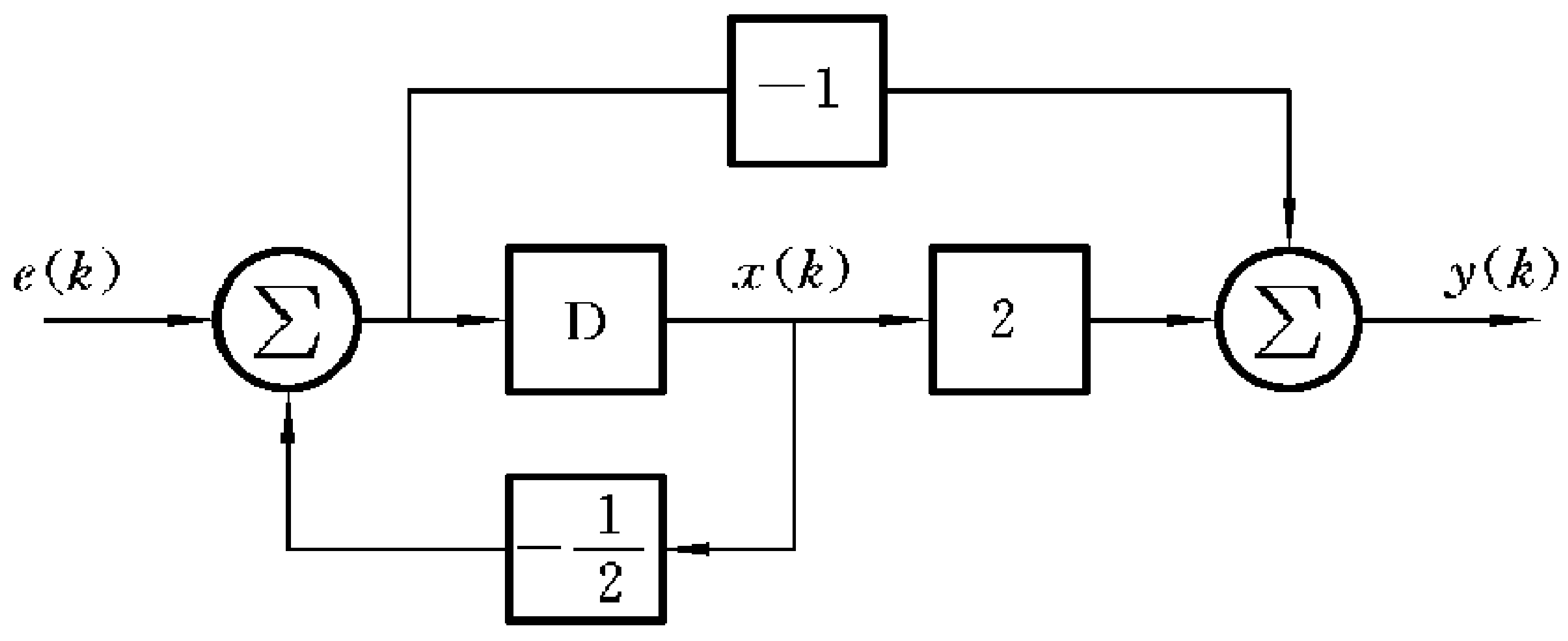
$$y(k) = [1 \quad 2 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

【9-7】　列写图 9-4 所示框图表示的系统的状态方程和输出方程。

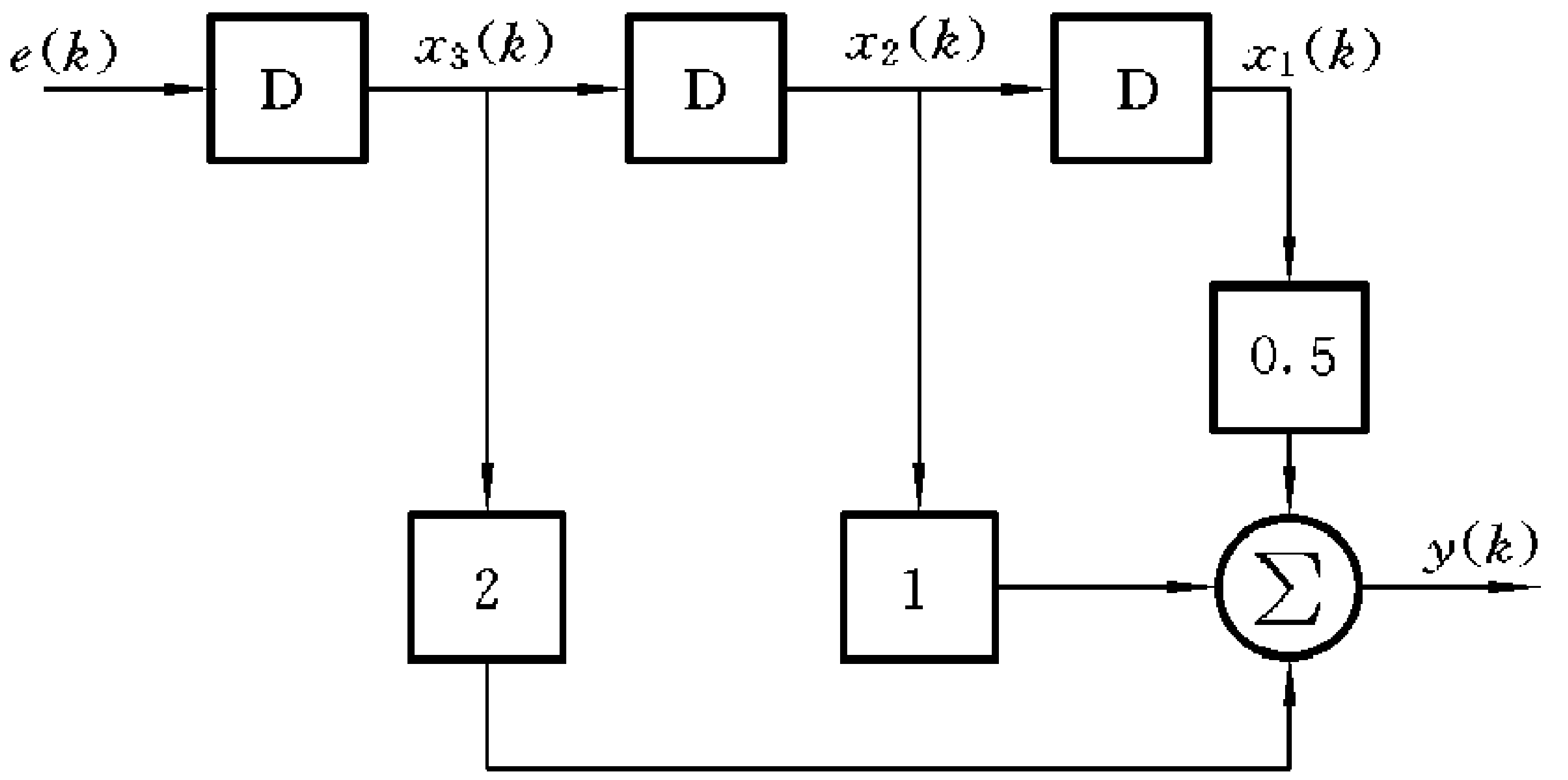
解　(a) 对于图 9-4(a),取延时器输出 $x(k)$ 为状态变量,则状态方程为

$$x(k+1) = -\frac{1}{2}x(k) + e(k)$$

输出方程为



(a)



(b)

图 9-4

$$y(k)=-x(k+1)+2x(k)=\frac{5}{2}x(k)-e(k)$$

(b) 对于图 9-4(b)，由框图可知

$$\begin{cases} x_2(k)=x_1(k+1) \\ x_3(k)=x_2(k+1) \\ e(k)=x_3(k+1) \end{cases}$$

及
$$y(k)=0.5x_1(k)+x_2(k)+2x_3(k)$$

所以状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}e(k)$$

输出方程为

$$y(k)=[0.5\quad 1\quad 2]\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{bmatrix}$$

【9-8】 已知离散时间系统的系统函数如下，列写系统的状态方程与输出方程。

$$H(z)=\frac{1}{1-z^{-1}-0.11z^{-2}}$$

解　根据系统的系统函数，可得该系统的差分方程为

$$y(k)-y(k-1)-0.11y(k-2)=e(k)$$

则系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0.11&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}e(k)$$

输出方程为

$$y(k)=[0.11\quad 1]\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+e(k)$$

【9-9】 列写图 9-5 所示电路的状态方程。

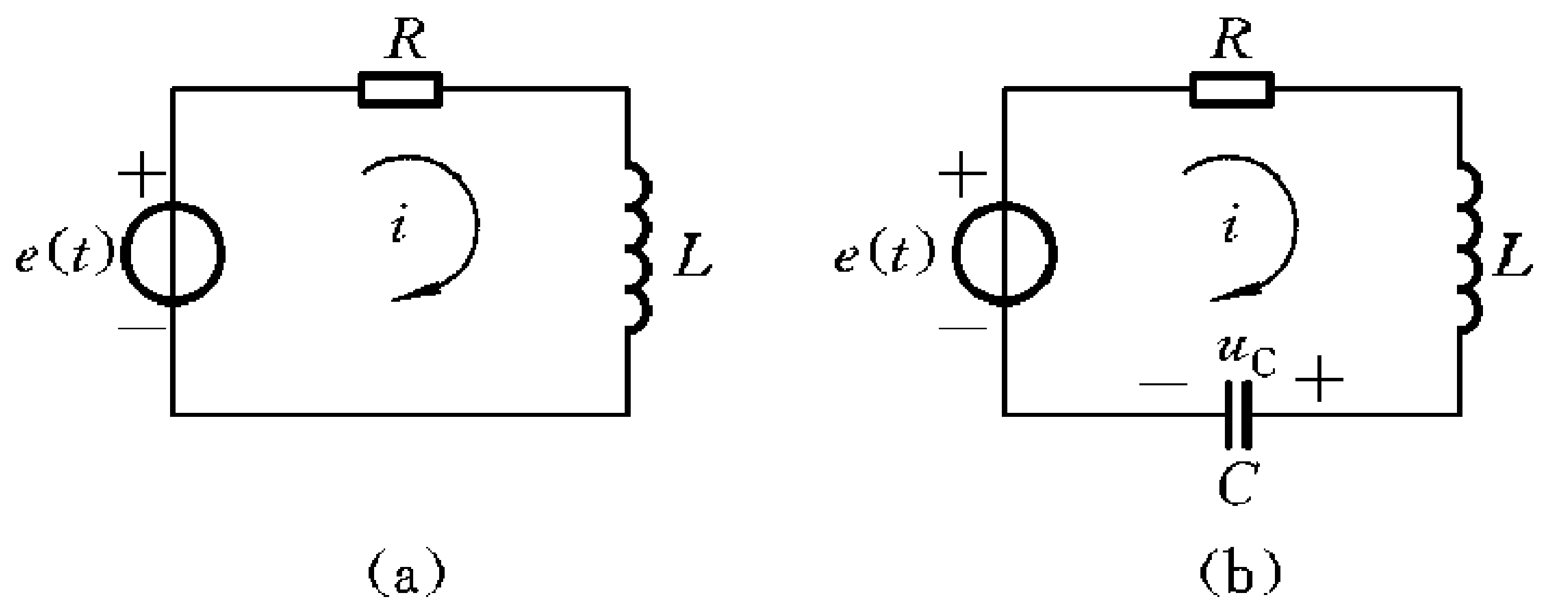


图 9-5

解　(a) 对于图 9-5(a)，选电感电流 i 为状态变量，按照基尔霍夫定律，可得

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=e(t)$$

所以

$$i'=-\frac{R}{L}i+\frac{1}{L}e(t)$$

(b) 对于图9-5(b)，选电感电流i 和电容电压u_C 为状态变量，则按照基尔霍夫定律有

$$\begin{cases} Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_{\mathrm{C}} = e(t) \\ C\dfrac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} = i \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} i' = -\dfrac{R}{L}i - \dfrac{1}{L}u_{\mathrm{C}} + \dfrac{1}{L}e(t) \\ u'_{\mathrm{C}} = \dfrac{1}{C}i \end{cases}$$

写成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} i' \\ u'_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

【9-10】 列写图 9-6 所示电路的状态方程。

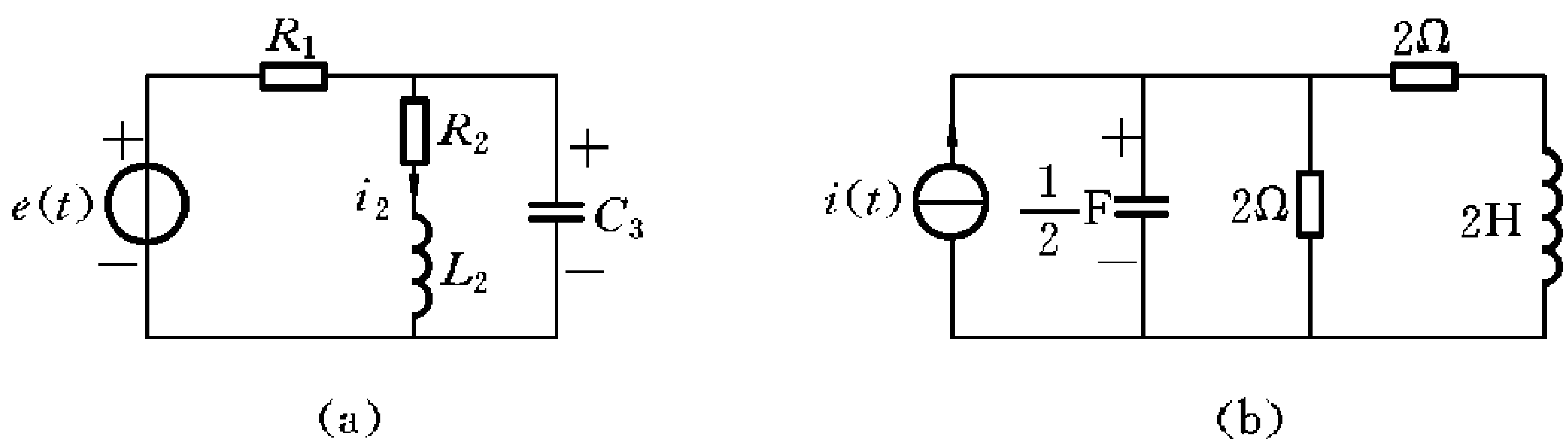


图 9-6

解　(a) 对于图 9-6(a)，选 L_2 的电流 i_2 和 C_3 的电压 u_3 为状态变量，有

$$\begin{cases} R_2 i_2 + L_2 i'_2 = u_3 & ① \\ R_1(i_2 + C_3 u'_3) + u_3 = e(t) & ② \end{cases}$$

由式①，有
$$i'_2 = -\frac{R_2}{L_2}i_2 + \frac{1}{L_2}u_3$$

由式②，有
$$u'_3 = -\frac{1}{C_3}i_2 - \frac{1}{R_1C_3}u_3 + \frac{1}{R_1C_3}e(t)$$

写成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} i'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_2}{L_2} & \dfrac{1}{L_2} \\ -\dfrac{1}{C_3} & -\dfrac{1}{R_1C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{R_1C_3} \end{bmatrix} e(t)$$

(b) 对于图 9-6(b)，其电路即为图 9-7 所示的电路。选 L_2 的电流 i_2 和 C_1 的电压 u_1 为状态变量，有

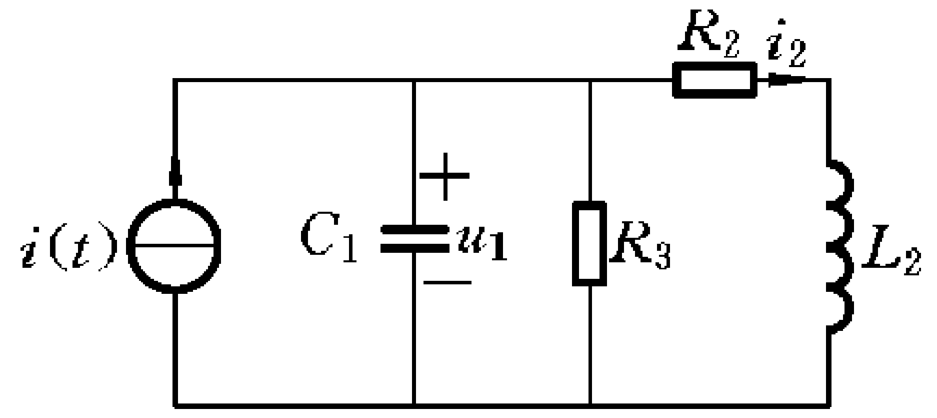


图 9-7

$$\begin{cases} R_2 i_2 + L_2 i'_2 = u_1 & ① \\ C_1 u'_1 + i_2 + \dfrac{1}{R_3} u_1 = i(t) & ② \end{cases}$$

由式②，有　$u'_1 = -\dfrac{1}{R_3 C_1} u_1 - \dfrac{1}{C_1} i_2 + \dfrac{1}{C_1} i(t)$

由式①，有　$i'_2 = \dfrac{1}{L_2} u_1 - \dfrac{R_2}{L_2} i_2$

得

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ i'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_3 C_1} & -\dfrac{1}{C_1} \\ \dfrac{1}{L_2} & -\dfrac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} i(t)$$

代入参数值，得

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ i'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ \dfrac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} i(t)$$

【9-11】 列写图 9-8 所示电路的状态方程。

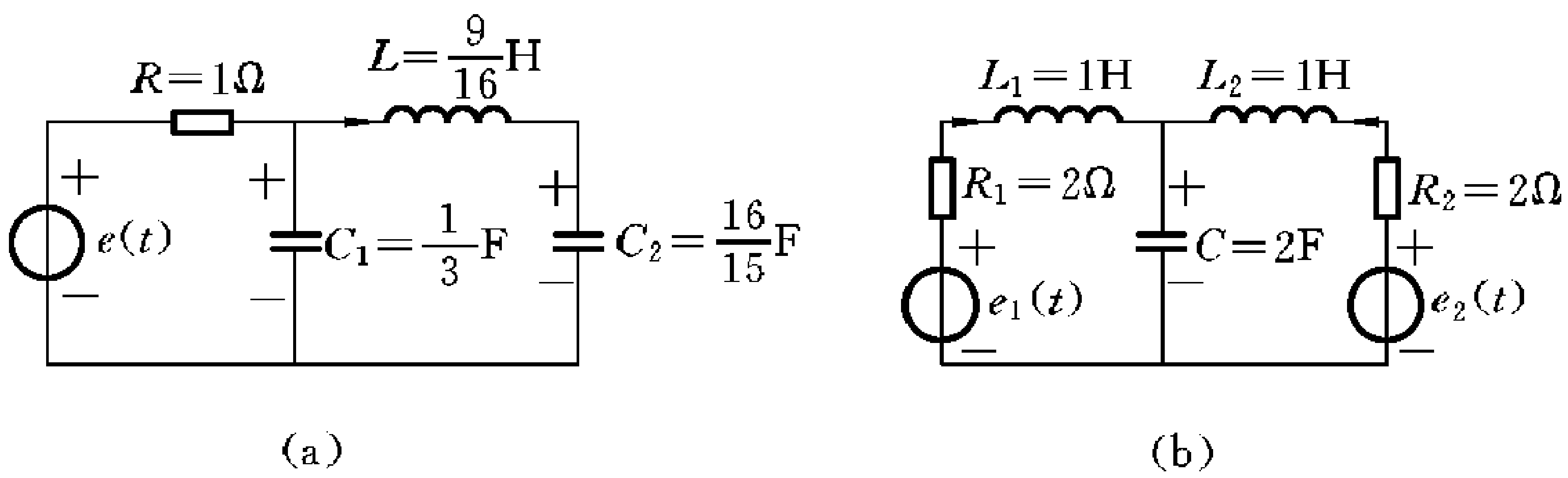


图 9-8

解　(a) 对于图9-8(a)，选 L 的电流 i，C_1 的电压 u_1 和 C_2 的电压 u_2 作为状态变量，有

$$\begin{cases} u_1 = Li' + u_2 & ① \\ C_2 u'_2 = i & ② \\ R(C_1 u'_1 + i) + u_1 = e(t) & ③ \end{cases}$$

由式③，有
$$u'_1=-\frac{1}{RC_1}u_1-\frac{1}{C_1}i+\frac{1}{RC_1}e(t)$$

由式②，有
$$u'_2=\frac{1}{C_2}i$$

由式①，有
$$i'=\frac{1}{L}u_1-\frac{1}{L}u_2$$

所以
$$\begin{bmatrix}u'_1\\u'_2\\i'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{RC_1} & 0 & -\frac{1}{C_1}\\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2}\\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{RC_1}\\0\\0\end{bmatrix}e(t)$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & 0 & -3\\ 0 & 0 & \frac{15}{16}\\ \frac{16}{9} & -\frac{16}{9} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}e(t)$$

(b) 对于图9-8(b)，选L_1的电流i_1，L_2的电流i_2和C_3的电压u_3为状态变量，有

$$\begin{cases}C_3u'_3=i_1+i_2 & ①\\ R_1i_1+L_1i'_1+u_3=e_1(t) & ②\\ R_2i_2+L_2i'_2+u_3=e_2(t) & ③\end{cases}$$

由式②，有
$$i'_1=-\frac{R_1}{L_1}i_1-\frac{1}{L_1}u_3+\frac{1}{L_1}e_1(t)$$

由式③，有
$$i'_2=-\frac{R_2}{L_2}i_2-\frac{1}{L_2}u_3+\frac{1}{L_2}e_2(t)$$

由式①，有
$$u'_3=\frac{1}{C_3}i_1+\frac{1}{C_3}i_2$$

所以

$$\begin{bmatrix}i'_1\\i'_2\\u'_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1}\\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2}\\ \frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_3} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\u_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{L_2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1(t)\\e_2(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -1\\ 0 & -2 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ u_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1(t)\\ e_2(t)\end{bmatrix}$$

【9-12】 列写图 9-9 所示电路的状态方程。

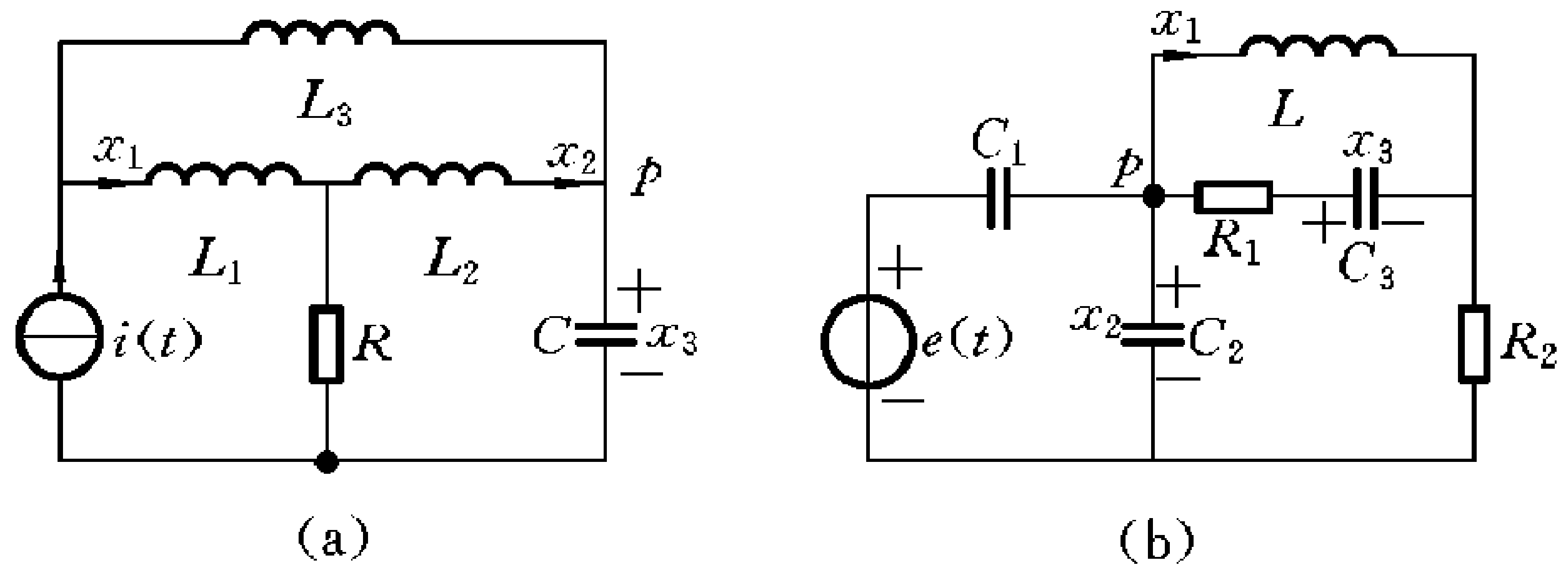


图 9-9

解　(a) 对于图 9-9(a)所示 R-L_2-C 回路，有

$$R(x_1-x_2)=L_2x'_2+x_3$$

即
$$x'_2=\frac{R}{L_2}x_1-\frac{R}{L_2}x_2-\frac{1}{L_2}x_3 \tag{①}$$

对于结点 p，有　$Cx'_3=x_2+i(t)-x_1$

即
$$x'_3=-\frac{1}{C}x_1+\frac{1}{C}x_2+\frac{1}{C}i(t) \tag{②}$$

对于 L_1-L_3-L_2 回路，有

$$L_3[i'(t)-x'_1]=L_1x'_1+L_2x'_2$$

即
$$(L_1+L_3)x'_1-L_3i'(t)=-L_2x'_2$$

$$x'_1=-\frac{L_2}{L_1+L_3}x'_2+\frac{L_3}{L_1+L_3}i'(t) \tag{③}$$

将式①代入式③得

$$x'_1=-\frac{R}{L_1+L_3}x_1+\frac{R}{L_1+L_3}x_2+\frac{1}{L_1+L_3}x_3+\frac{L_3}{L_1+L_3}i'(t)$$

所以写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1+L_3} & \frac{R}{L_1+L_3} & \frac{1}{L_1+L_3} \\ \frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{L_3}{L_1+L_3} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ i'(t) \end{bmatrix}$$

(b) 对于图 9-9(b)所示 R_1-C_3-R_2-C_2 回路，有

$$R_1C_3x'_3 + x_3 + R_2(x_1 + C_3x'_3) = x_2$$

即　$$x'_3 = \frac{-R_2}{(R_1+R_2)C_3}x_1 + \frac{1}{(R_1+R_2)C_3}x_2 - \frac{1}{(R_1+R_2)C_3}x_3 \qquad ①$$

对于 R_1-C_3-L 回路，有

$$Lx'_1 = R_1C_3x'_3 + x_3$$

将式①代入上式，整理得

$$x'_1 = \frac{-R_1R_2}{(R_1+R_2)L}x_1 + \frac{R_1}{(R_1+R_2)L}x_2 + \frac{R_2}{(R_1+R_2)L}x_3 \qquad ②$$

对于结点 p，有

$$C_1[e'(t) - x'_2] = x_1 + C_3x'_3 + C_2x'_2$$

即　$$(C_1+C_2)x'_2 - C_1e'(t) = -x_1 - C_3x'_3$$

将式①代入上式，整理得

$$x'_2 = \frac{-R_1}{(R_1+R_2)(C_1+C_2)}x_1 + \frac{-1}{(R_1+R_2)(C_1+C_2)}x_2 + \frac{1}{(R_1+R_2)(C_1+C_2)}x_3 + \frac{C_1e'(t)}{C_1+C_2}$$

所以写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1R_2}{(R_1+R_2)L} & \frac{R_1}{(R_1+R_2)L} & \frac{R_2}{(R_1+R_2)L} \\ \frac{-R_1}{(R_1+R_2)(C_1+C_2)} & \frac{-1}{(R_1+R_2)(C_1+C_2)} & \frac{1}{(R_1+R_2)(C_1+C_2)} \\ \frac{-R_2}{(R_1+R_2)C_3} & \frac{1}{(R_1+R_2)C_3} & \frac{-1}{(R_1+R_2)C_3} \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{C_1}{C_1 + C_2} \\ 0 \end{bmatrix} e'(t)$$

【9-13】 设图 9-5(b)所示电路的元件参数如下：$R=\dfrac{5}{6}\ \Omega$，$C=1$ F，$L=\dfrac{1}{6}$ H，$e(t)=5\sin t\varepsilon(t)$(V)。电路初始状态为 $i_L(0)=5$ A，$u_C(0)=4$ V。

(1) 求状态过渡矩阵 $\phi(t)=\mathscr{L}^{-1}\{\boldsymbol{\Phi}(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\}$ 及系统的自然频率。

(2) 用复频域解法求响应电流 $i(t)$，并指出其中的零输入响应与零状态响应。

解 (1) 由题 11-9 求得的系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} i' \\ u'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e(t) = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

故
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\begin{bmatrix} s+5 & 6 \\ -1 & s \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} s+5 & 6 \\ -1 & s \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} s & -6 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix}}{s^2+5s+6}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{-6}{(s+2)(s+3)} \\ \dfrac{1}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{s+5}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-2}{s+2} + \dfrac{3}{s+3} & \dfrac{-6}{s+2} + \dfrac{6}{s+3} \\ \dfrac{1}{s+2} - \dfrac{1}{s+3} & \dfrac{3}{s+2} - \dfrac{2}{s+3} \end{bmatrix}$$

故得状态过渡矩阵为

$$\phi(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\boldsymbol{\Phi}(s)\} = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{-3t} & -6e^{-2t} + 6e^{-3t} \\ e^{-2t} - e^{-3t} & 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \end{bmatrix} \varepsilon(t)$$

系统的自然频率为

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3$$

(2) 状态方程的复频域解为

$$\begin{bmatrix} I(s) \\ U_C(s) \end{bmatrix} = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\begin{bmatrix} i(0) \\ u_C(0) \end{bmatrix} + (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BE}(s)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3} & \frac{-6}{s+2} + \frac{6}{s+3} \\ \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} & \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3} & \frac{-6}{s+2} + \frac{6}{s+3} \\ \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} & \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{5}{s^2+1}$$

所以

$$I(s) = 5\left(\frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3}\right) + 4\left(\frac{-6}{s+2} + \frac{6}{s+3}\right) + \frac{6 \times 5}{s^2+1}\left(\frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{-34}{s+2} + \frac{39}{s+3}}_{I_{zi}(s)} \underbrace{- \frac{12}{s+2} + \frac{12s-24}{s^2+1} + \frac{9}{s+3} - \frac{9s-27}{s^2+1}}_{I_{zs}(s)}$$

$$= \frac{-46}{s+2} + \frac{48}{s+3} + \frac{3s+3}{s^2+1}$$

所以

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\}$$
$$= (-46\mathrm{e}^{-2t} + 48\mathrm{e}^{-3t} + 3\cos t + 3\sin t)\varepsilon(t)$$

其中零输入响应为

$$i_{zi}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-34}{s+2} + \frac{39}{s+3}\right\}$$
$$= (-34\mathrm{e}^{-2t} + 39\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

零状态响应为

$$i_{zs}(t) = i(t) - i_{zi}(t)$$
$$= [-12\mathrm{e}^{-2t} + 9\mathrm{e}^{-3t} + 3\cos t + 3\sin t]\varepsilon(t)$$

【9-14】 设图 9-8(b)所示电路中，激励 $e_1(t) = \varepsilon(t)$，$e_2(t) = \delta(t)$，电容初始电压 $u_C(0) = 1$ V，电感初始电流均为零。用复频域解法求状态过渡矩阵

$\boldsymbol{\Phi}(t)$和状态矢量。

解　由题9-11求得的状态方程为

$$\begin{bmatrix} i'_1 \\ i'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

可见

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} s+2 & 0 & 1 \\ 0 & s+2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & s \end{bmatrix}$$

$$\det|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = s(s+2)^2 + \left(\frac{1}{2}s+1\right) + \left(\frac{1}{2}s+1\right) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2$$

$$\operatorname{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} s(s+2)+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -(s+2) \\ -\frac{1}{2} & s(s+2)+\frac{1}{2} & -(s+2) \\ \frac{1}{2}s+1 & \frac{1}{2}s+1 & (s+2)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s^2+2s+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -(s+2) \\ -\frac{1}{2} & s^2+2s+\frac{1}{2} & -(s+2) \\ \frac{1}{2}(s+2) & \frac{1}{2}(s+2) & (s+2)^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(s) = \frac{\operatorname{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}{\det|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{bmatrix} s^2+2s+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -(s+2) \\ -\frac{1}{2} & s^2+2s+\frac{1}{2} & -(s+2) \\ \frac{1}{2}(s+2) & \frac{1}{2}(s+2) & (s+2)^2 \end{bmatrix}}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$
=\begin{bmatrix}
\dfrac{-\frac{1}{2}}{(s+1)^2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{s+1}+\dfrac{\frac{1}{2}}{s+2} & \dfrac{-\frac{1}{2}}{(s+1)^2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{s+1}+\dfrac{-\frac{1}{2}}{s+2} & -\dfrac{1}{(s+1)^2} \\
\dfrac{-\frac{1}{2}}{(s+1)^2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{s+1}+\dfrac{-\frac{1}{2}}{s+2} & \dfrac{-\frac{1}{2}}{(s+1)^2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{s+1}+\dfrac{\frac{1}{2}}{s+2} & \dfrac{-1}{(s+1)^2} \\
\dfrac{\frac{1}{2}}{(s+1)^2} & \dfrac{\frac{1}{2}}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{(s+1)^2}+\dfrac{1}{s+1}
\end{bmatrix}
$$

得状态过渡矩阵

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi}(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{\boldsymbol{\Phi}(s)\} \\
&= \begin{bmatrix}
-\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} & -\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t} & -te^{-t} \\
-\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t} & -\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} & -te^{-t} \\
\frac{1}{2}te^{-t} & \frac{1}{2}te^{-t} & te^{-t}+e^{-t}
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

状态矢量的零输入分量为

$$
\begin{bmatrix} i_{1zi}(t) \\ i_{2zi}(t) \\ u_{3zi}(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\phi}(t)\begin{bmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \\ u_3(0) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\phi}(t)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -te^{-t} \\ -te^{-t} \\ te^{-t}+e^{-t} \end{bmatrix}
$$

状态矢量的零状态分量为

$$
\begin{bmatrix} I_{1zs}(s) \\ I_{2zs}(s) \\ U_{3zs}(s) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{BE}(s) = \boldsymbol{\Phi}(s)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(s)\begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\dfrac{s^2+2s+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s}{s(s+1)^2(s+2)} \\
\dfrac{-\frac{1}{2}+s\left(s^2+2s+\frac{1}{2}\right)}{s(s+1)^2(s+2)} \\
\dfrac{\frac{1}{2}(s+2)+\frac{1}{2}s(s+2)}{s(s+1)^2(s+2)}
\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
\dfrac{s^2+\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}}{s(s+1)^2(s+2)} \\
\dfrac{s^3+2s^2+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}{s(s+1)^2(s+2)} \\
\dfrac{\frac{1}{2}s^2+\frac{3}{2}s+1}{s(s+1)^2(s+2)}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\dfrac{\frac{1}{4}}{s}+\dfrac{-\frac{3}{4}}{s+2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{s+1} \\
\dfrac{-\frac{1}{4}}{s}+\dfrac{\frac{3}{4}}{s+2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{s+1} \\
\dfrac{\frac{1}{2}}{s}+\dfrac{-\frac{1}{2}}{s+1}
\end{bmatrix}
$$

所以

$$
\begin{bmatrix} i_{1zs}(t) \\ i_{2zs}(t) \\ u_{3zs}(t) \end{bmatrix}=\mathscr{L}^{-1}\begin{bmatrix} I_{1zs}(s) \\ I_{2zs}(s) \\ u_{3zs}(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}
\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} \\
-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} \\
\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}
\end{bmatrix}
$$

所以状态矢量的完全解为

$$
\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_{1zi}(t)+i_{1zs}(t) \\ i_{2zi}(t)+i_{2zs}(t) \\ u_{3zi}(t)+u_{3zs}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}
\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-t\mathrm{e}^{-t} \\
-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-t\mathrm{e}^{-t} \\
\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+t\mathrm{e}^{-t}
\end{bmatrix}
$$

【9-15】 图 9-10 所示电路中，如 $e_s(t)=\varepsilon(t)$ (V)，$i_s(t)=\delta(t)$ (A)，初始状态为零，列写电路的状态方程并用复频域解法求 $u_{C_1}(t)$。

解　对于 R-L-C_2-$e_s(t)$ 回路，有

$$
L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+u_{C_2}+e_s(t)=R[i_s(t)-i_L(t)]
$$

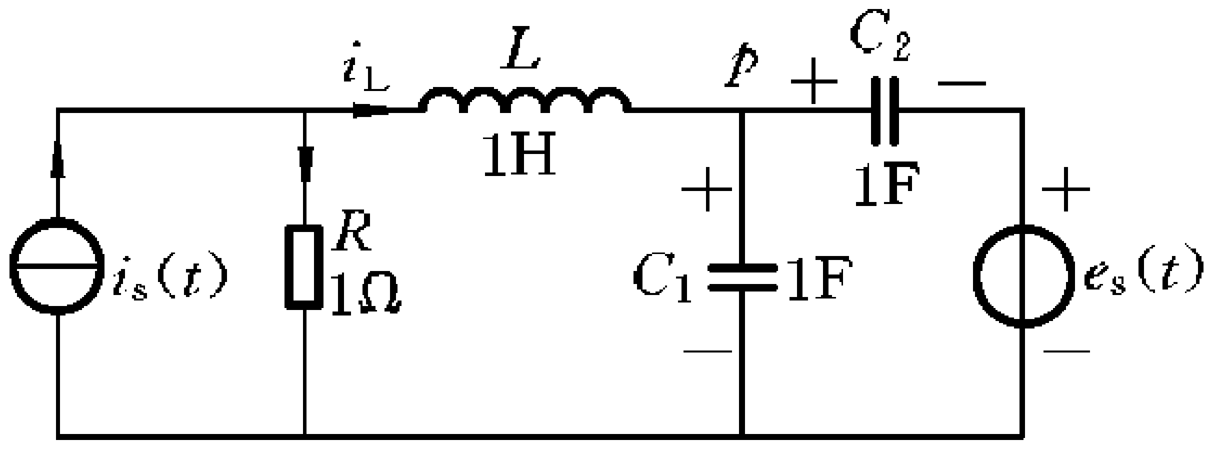


图 9-10

将元件参数代入上式，经整理得

$$i'_{\mathrm{L}}(t) = -i_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{C}_2} - e_{\mathrm{s}}(t) + i_{\mathrm{s}}(t) \qquad ①$$

对于结点 p，有

$$i_{\mathrm{L}}(t) = C_1 \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}_1}}{\mathrm{d}t} + C_2 \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}_2}}{\mathrm{d}t}$$

$$= C_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u_{\mathrm{C}_2} + e_{\mathrm{s}}(t)] + C_2 \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}_2}}{\mathrm{d}t}$$

所以
$$(C_1 + C_2) \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}_2}}{\mathrm{d}t} = i_{\mathrm{L}}(t) - C_1 \frac{\mathrm{d}e_{\mathrm{s}}(t)}{\mathrm{d}t}$$

即
$$\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}_2}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C_1 + C_2} i_{\mathrm{L}}(t) - \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{\mathrm{d}e_{\mathrm{s}}(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{1}{2} i_{\mathrm{L}}(t) - \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}e_{\mathrm{s}}(t)}{\mathrm{d}t} \qquad ②$$

式①、式②即为所求之状态方程，可写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} i'_{\mathrm{L}} \\ u'_{\mathrm{C}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\mathrm{L}} \\ u_{\mathrm{C}_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\mathrm{s}}(t) \\ i_{\mathrm{s}}(t) \\ e'_{\mathrm{s}}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\mathrm{L}} \\ u_{\mathrm{C}_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \delta(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}$$

得
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & s \end{bmatrix}$$

所以
$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{s^2 + s + \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{1}{2} & s+1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} & \dfrac{-1}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\\ \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} & \dfrac{s+1}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\end{bmatrix}$$

则
$$\begin{bmatrix}I_{\mathrm{L}}(s)\\ U_{\mathrm{C}_2}(s)\end{bmatrix}=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BE}(s)$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} & \dfrac{-1}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\\ \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} & \dfrac{s+1}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s}\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} & \dfrac{-1}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\\ \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} & \dfrac{s+1}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{s}+1\\ -\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s-1}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\\ \dfrac{-1}{s}\cdot\dfrac{s+\dfrac{1}{2}}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(s+1)}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\dfrac{2\times\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\\ -\dfrac{1}{s}+\dfrac{\frac{3}{2}\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\end{bmatrix}$$

即
$$\begin{bmatrix}i_L(t)\\ u_{C_2}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\dfrac{t}{2}-2e^{-\frac{t}{2}}\sin\dfrac{t}{2}\\ -1+\dfrac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}}\cos\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\sin\dfrac{t}{2}\end{bmatrix}\varepsilon(t)$$

故
$$u_{C_2}(t)=\left(-1+\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2}\right)\varepsilon(t)$$

即
$$u_{C_1}(t)=u_{C_2}(t)+e_s(t)=\left(\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2}\right)\varepsilon(t)$$

【9-16】 列出下列微分方程所描述的系统的状态方程与输出方程。求系统函数矩阵$\boldsymbol{H}(s)$并求输出响应。

(1) $y'''(t)+4y''(t)+5y'(t)+6y(t)=4e(t)$，$e(t)=\delta(t)$

$y''(0)=y'(0)=y(0)=0$

(2) $y''(t)+7y'(t)+12y(t)=e'(t)+2e(t)$，$e(t)=\varepsilon(t)$

$y'(0)=y(0)=0$

解　(1) 先求系统状态方程和输出方程。

令
$$x_1(t)=y(t)$$
$$x_2(t)=y'(t)$$
$$x_3(t)=y''(t)$$

则
$$\begin{cases}x'_1(t)=x_2(t)\\ x'_2(t)=x_3(t)\\ x'_3(t)=y'''(t)=4e(t)-4y''(t)-5y'(t)-6y(t)\\ \qquad\quad=-6x_1(t)-5x_2(t)-4x_3(t)+4e(t)\end{cases}$$

$$y(t)=x_1(t)$$

故状态方程为

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} e(t)$$

输出方程为

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

所以
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = [1 \quad 0 \quad 0], \quad \boldsymbol{D} = 0$$

于是
$$\boldsymbol{H}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

式中，

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 5 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s(s+4)+5 & s+4 & 1 \\ 6 & s(s+4) & s \\ -6s & -s^2-6 & s^2 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 5 & s+4 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1}{s^3+4s^2+6+5s} \begin{bmatrix} s^2+4s+5 & s+4 & 1 \\ 6 & s^2+4s & s \\ -6s & -s^2-6 & s^2 \end{bmatrix}$$

故
$$\boldsymbol{H}(s) = [1 \quad 0 \quad 0] \frac{\begin{bmatrix} s^2+4s+5 & s+4 & 1 \\ 6 & s^2+4s & s \\ -6s & -s^2-6 & s^2 \end{bmatrix}}{s^3+4s^2+6+5s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad 0 \quad 0] \frac{\begin{bmatrix} 4 \\ 4s \\ 4s^2 \end{bmatrix}}{s^3+4s^2+6+5s} = \frac{4}{s^3+4s^2+6+5s}$$

$$Y(s)=H(s)E(s)=\frac{4}{s^3+4s^2+5s+6}\cdot 1=\frac{4}{(s+3)(s^2+s+2)}$$

$$=\frac{4}{(s+3)\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{s+3}+\frac{-\frac{1}{2}s+1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{s+3}+\frac{-\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}+\frac{\frac{5}{4}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

输出响应 $y(t)$ 为

$$y(t)=\left(\frac{1}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t+\frac{5}{2\sqrt{7}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\varepsilon(t)$$

(2) 先求系统状态方程和输出方程

由微分方程作出的直接型模拟框图如图 9-11 所示。

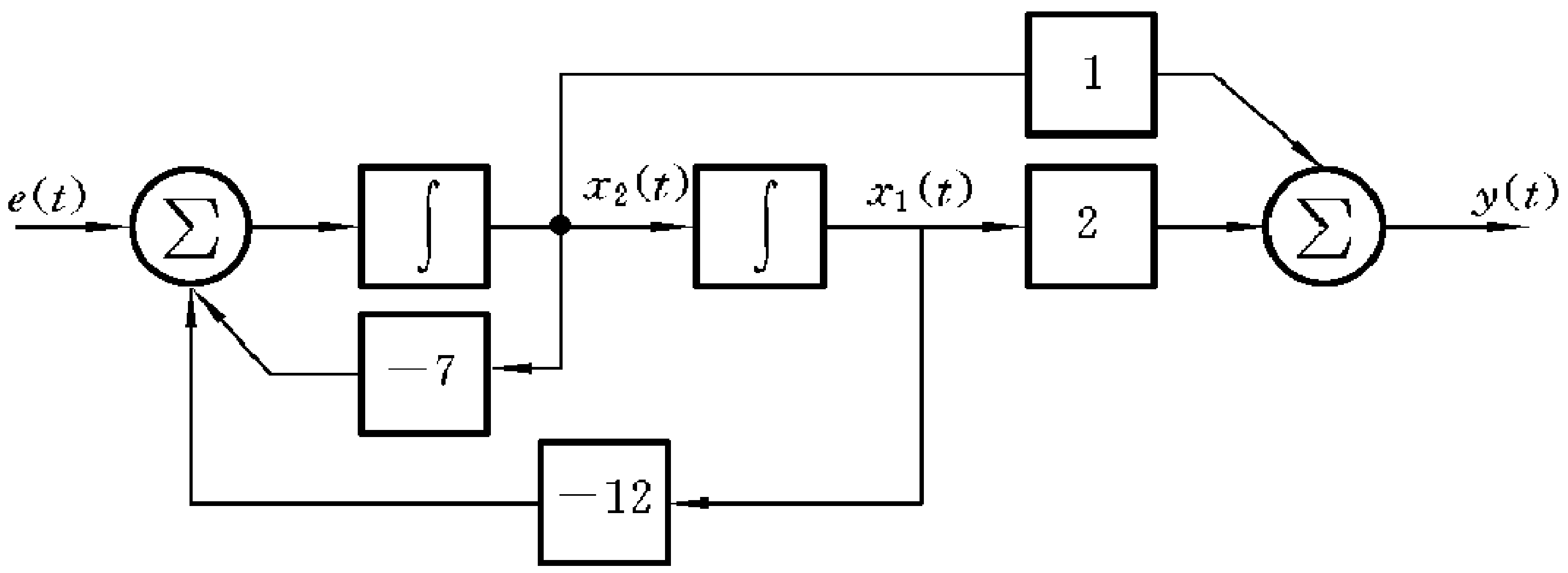


图 9-11

取各积分器的输出作为状态变量 $x_1(t)$, $x_2(t)$, 由框图可得

$$\begin{cases} x'_1=x_2 \\ x'_2=-12x_1-7x_2+e(t) \end{cases}$$

$$y(t)=2x_1+x_2$$

故系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

输出方程为

$$y(t) = [2 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = [2 \quad 1], \quad \boldsymbol{D} = 0$$

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 12 & s+7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+7 & 1 \\ -12 & s \end{bmatrix}}{s(s+7)+12} = \frac{\begin{bmatrix} s+7 & 1 \\ -12 & s \end{bmatrix}}{(s+3)(s+4)}$$

故

$$\boldsymbol{H}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} = [2 \quad 1] \frac{\begin{bmatrix} s+7 & 1 \\ -12 & s \end{bmatrix}}{(s+3)(s+4)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [2 \quad 1] \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}}{(s+3)(s+4)}$$

$$= \frac{2+s}{(s+3)(s+4)} = \frac{s+2}{s^2+7s+12}$$

$$Y(s) = H(s)E(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\frac{1}{6}}{s} + \frac{\frac{1}{3}}{s+3} - \frac{\frac{1}{2}}{s+4}$$

输出响应 $y(t)$ 为

$$y(t) = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4t} \right) \varepsilon(t)$$

【9-17】 已知系统函数如下，求此系统的状态方程与输出方程。如系统初始状态为零，激励 $e(t)=\varepsilon(t)$，用状态方程的复频域解法求其零状态响应。

$$H(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+8}$$

解 （1）求状态方程与输出方程。

由 $H(s)=\dfrac{s^2+3s+2}{s^2+4s+8}$ 作出的系统模拟框图如图 9-12 所示。

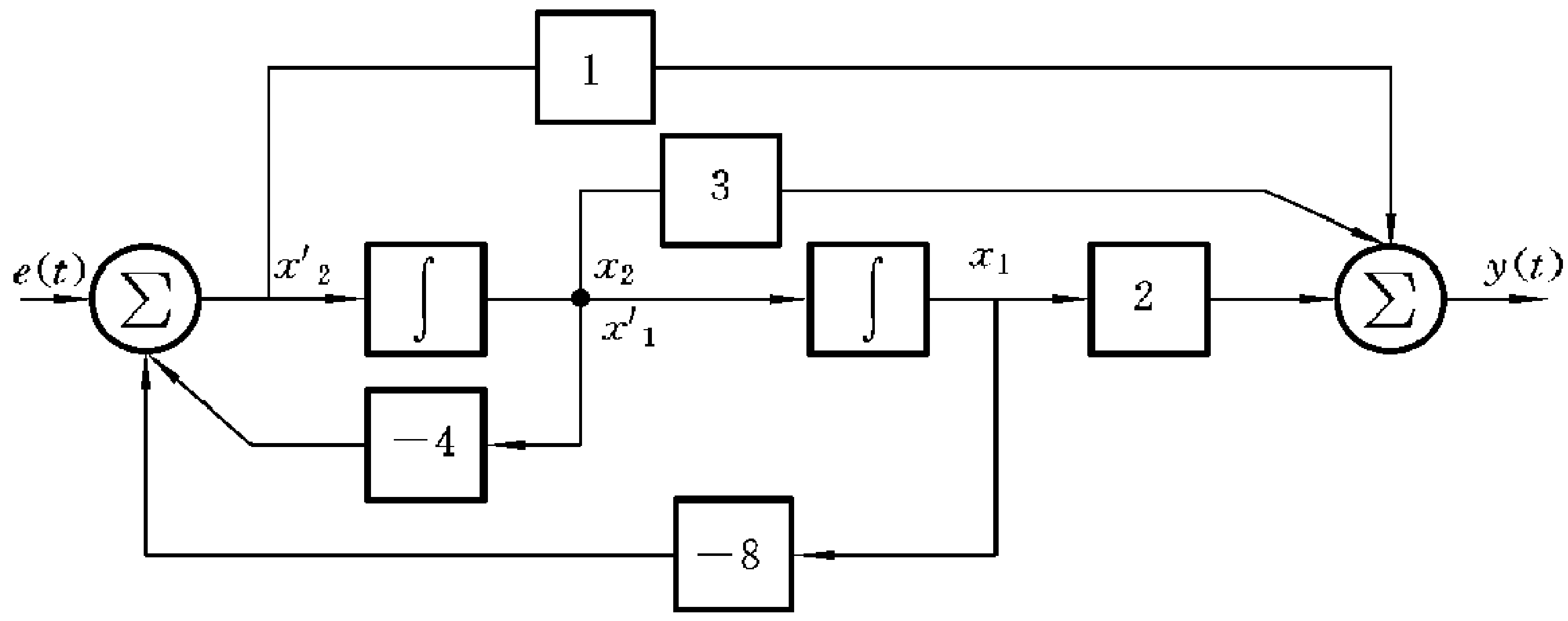


图 9-12

由图 9-12 所示的框图可得

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -8x_1 - 4x_2 + e(t) \end{cases}$$

$$y(t) = 2x_1 + 3x_2 + e(t) - 8x_1 - 4x_2 = -6x_1 - x_2 + e(t)$$

矩阵形式的状态方程为

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

输出方程为

$$y(t) = [-6 \quad -1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + e(t)$$

(2) 求零状态响应 $y_{zs}(t)$。

$$Y_{zs}(s) = H(s)E(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 4s + 8} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\frac{1}{4}}{s} + \frac{\frac{3}{4}s + 2}{s^2 + 4s + 8}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{s} + \frac{\frac{3}{4}(s+2) + \frac{2}{4}}{(s+2)^2 + 2^2}$$

所以　　$$y_{zs}(t) = \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-2t}\cos(2t) + \frac{1}{4}e^{-2t}\sin(2t)\right]\varepsilon(t)$$

【9-18】 系统矩阵方程参数如下，求系统函数矩阵 $\boldsymbol{H}(s)$、零输入响应及零状态响应。

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{C}=[0\quad 1]$，　$\boldsymbol{D}=0$

$$e(t)=\varepsilon(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{C}=[1\quad 1]$，　$\boldsymbol{D}=1$

$$e(t)=\varepsilon(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

解　(1) $s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}s+3 & -1\\ 2 & s\end{bmatrix}$

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{s(s+3)+2}\begin{bmatrix}s & 1\\ -2 & s+3\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s & 1\\ -2 & s+3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}+\dfrac{-1}{s+2}\\ \dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{2}{s+1}+\dfrac{-1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=[0\quad 1]\begin{bmatrix}\dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}+\dfrac{-1}{s+2}\\ \dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{2}{s+1}+\dfrac{-1}{s+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$=[0\quad 1]\begin{bmatrix}\dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\\ \dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}=\frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2}=\frac{-2}{s^2+3s+2}$$

$$Y_{zi}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)=[0\quad 1]\begin{bmatrix}\dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}+\dfrac{-1}{s+2}\\ \dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{2}{s+1}+\dfrac{-1}{s+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

$$=[0\quad 1]\begin{bmatrix}\dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{4}{s+2}\\ \dfrac{-4}{s+1}+\dfrac{4}{s+2}\end{bmatrix}=\frac{-4}{s+1}+\frac{4}{s+2}$$

故系统的零输入响应和零状态响应分别为

$$y_{zi}(t)=(-4\mathrm{e}^{-t}+4\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$Y_{zs}(s)=H(s)E(s)=\frac{-2}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{-1}{s}+\frac{2}{s+1}+\frac{-1}{s+2}$$

$$y_{zs}(t)=(-1+2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

(2) $s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 1 & s+1\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{(s+1)^2+1}\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ -1 & s+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1} & \dfrac{1}{(s+1)^2+1}\\[2ex] \dfrac{-1}{(s+1)^2+1} & \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}_{zi}(s)=\boldsymbol{C\Phi}(s)\boldsymbol{x}(0)=[1\quad 1]\begin{bmatrix}\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1} & \dfrac{1}{(s+1)^2+1}\\[2ex] \dfrac{-1}{(s+1)^2+1} & \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s}{(s+1)^2+1} & \dfrac{s+2}{(s+1)^2+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{3s+2}{(s+1)^2+1}=3\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+\frac{-1}{(s+1)^2+1}$$

$$y_{zi}(t)=(3\mathrm{e}^{-t}\cos t-\mathrm{e}^{-t}\sin t)\varepsilon(t)$$

$$Y_{zs}(s)=\{\boldsymbol{C\Phi}(s)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\}\boldsymbol{E}(s)$$

$$=\left\{[1\quad 1]\begin{bmatrix}\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1} & \dfrac{1}{(s+1)^2+1}\\[2ex] \dfrac{-1}{(s+1)^2+1} & \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+1\right\}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\frac{s^2+3s+4}{(s+1)^2+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{2}{s}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$y_{zs}(t)=(2-\mathrm{e}^{-t}\cos t)\varepsilon(t)$$

所以　$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=2+2\mathrm{e}^{-t}\cos t-\mathrm{e}^{-t}\sin t=2+\mathrm{e}^{-t}(2\cos t-\sin t)$

系统转移函数为

$$\boldsymbol{H}(s)=\boldsymbol{C\Phi}(s)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=\frac{s^2+3s+4}{(s+1)^2+1}=\frac{s^2+3s+4}{s^2+2s+2}$$

【9-19】　设 $\boldsymbol{A}$ 矩阵如下所示，求矩阵指数函数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 及系统的自然频率。

(1) $\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix}0 & 2\\-1 & -2\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}-4 & -3\\1 & 0\end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix}4 & 3\\-3 & 4\end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$　　(6) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -2 & -3\end{bmatrix}$

解　(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}$,　$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}s+1 & -1\\0 & s+2\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+2 & 1\\0 & s+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\0 & \dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathscr{L}^{-1}\{\boldsymbol{\Phi}(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\0 & \dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1}+\dfrac{-1}{s+2}\\0 & \dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\0 & \mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$$

令$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$，则

$$\begin{vmatrix}s+1 & -1\\0 & s+2\end{vmatrix}=(s+1)(s+2)=0$$

特征根即自然频率为

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2$$

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2\\-1 & -2\end{bmatrix}$,　$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}s & -2\\1 & s+2\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{s(s+2)+2}\begin{bmatrix}s+2 & 2\\-1 & s\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^2+2s+2}\begin{bmatrix} s+2 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+2s+2} & \frac{2}{s^2+2s+2} \\ \frac{-1}{s^2+2s+2} & \frac{s}{s^2+2s+2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+1)^2+1}+\frac{1}{(s+1)^2+1} & \frac{2}{(s+1)^2+1} \\ \frac{-1}{(s+1)^2+1} & \frac{s+1}{(s+1)^2+1}+\frac{-1}{(s+1)^2+1} \end{bmatrix}$$

所以　$e^{At}=\mathscr{L}^{-1}\{\boldsymbol{\Phi}(s)\}=\begin{bmatrix} e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t & 2e^{-t}\sin t \\ -e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} \sqrt{2}\,e^{-t}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) & 2e^{-t}\sin t \\ -e^{-t}\sin t & \sqrt{2}\,e^{-t}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$$

令 $|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$，则

$$\begin{vmatrix} s & -2 \\ 1 & s+2 \end{vmatrix}=s(s+2)+2=s^2+2s+2=0$$

特征根即自然频率为

$$\lambda_{1,2}=-1\pm j$$

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，　$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} s+4 & 3 \\ -1 & s \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{s(s+4)+3}\begin{bmatrix} s & -3 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+3)} & \frac{-3}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{s+4}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{-\frac{1}{2}}{s+1}+\frac{\frac{3}{2}}{s+3} & \frac{-\frac{3}{2}}{s+1}+\frac{\frac{3}{2}}{s+3} \\ \frac{\frac{1}{2}}{s+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{s+3} & \frac{\frac{3}{2}}{s+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{s+3} \end{bmatrix}$$

所以 $\mathrm{e}^{At}=\mathscr{L}^{-1}\{\boldsymbol{\Phi}(s)\}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t} & -\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t}\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t} & \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}$

令 $|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$,则

$$\begin{vmatrix}s+4 & 3\\ -1 & s\end{vmatrix}=s(s+4)+3=s^2+4s+3$$

$$=(s+1)(s+3)=0$$

特征根即自然频率为

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-3$$

(4) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{bmatrix}$, $s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}s-4 & -3\\ 3 & s-4\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{(s-4)^2+9}\begin{bmatrix}s-4 & 3\\ -3 & s-4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s-4}{(s-4)^2+3^2} & \dfrac{3}{(s-4)^2+3^2}\\ \dfrac{-3}{(s-4)^2+3^2} & \dfrac{s-4}{(s-4)^2+3^2}\end{bmatrix}$$

所以

$$\mathrm{e}^{At}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{4t}\cos 3t & \mathrm{e}^{4t}\sin 3t\\ -\mathrm{e}^{4t}\sin 3t & \mathrm{e}^{4t}\cos 3t\end{bmatrix}$$

令 $s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=0$,则

$$\begin{vmatrix}s-4 & 3\\ -3 & s-4\end{vmatrix}=(s-4)^2+9=0$$

特征根即自然频率为

$$\lambda_{1,2}=4\pm 3\mathrm{j}$$

(5) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$, $s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}s-2 & 0 & 0\\ 0 & s-1 & 0\\ 0 & 0 & s-3\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s-2} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{s-1} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{s-3}\end{bmatrix}$$

所以
$$e^{At}=\mathscr{L}^{-1}\{\boldsymbol{\Phi}(s)\}=\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

令 $|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$,则
$$(s-2)(s-1)(s-3)=0$$

特征根即自然频率为
$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=1,\quad \lambda_3=3$$

$$(6)\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix},\quad s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(s)&=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\\
&=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s(s+3)+2 & s+3 & 1 \\ 0 & s(s+3) & s \\ 0 & -2s & s^2 \end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{\frac{3}{2}}{s}+\frac{-2}{s+1}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2} & \frac{\frac{1}{2}}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2} \\ 0 & \frac{2}{s+1}+\frac{-1}{s+2} & \frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+2} \\ 0 & \frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

所以

$$e^{At}=\mathscr{L}^{-1}\{\boldsymbol{\Phi}(s)\}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2}-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} \\ 0 & 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ 0 & -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

令 $|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$,则

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 2 & s+3 \end{vmatrix} = s[s(s+1)+2] = s(s+1)(s+2)$$

特征根即自然频率为

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -2$$

【9-20】 用时域解法求题9-13到题9-15的状态变量。

解　(1) 由题9-13已求得状态方程为

$$\begin{bmatrix} i' \\ u'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

求得输出　$y(t)=i(t)$

由上可知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} s+5 & 6 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

令 $|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$，则

$$s(s+5)+6=0$$

即　$s^2+5s+6=0, \quad (s+2)(s+3)=0$

所以特征根为

$$\lambda_1=-2, \quad \lambda_2=-3$$

此即系统自然频率。

设　$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=C_0\boldsymbol{I}+C_1\boldsymbol{A}$

则　$\begin{cases} \mathrm{e}^{\lambda_1 t}=C_0+C_1\lambda_1 \\ \mathrm{e}^{\lambda_2 t}=C_0+C_1\lambda_2 \end{cases}$

即　$\begin{cases} \mathrm{e}^{-2t}=C_0+(-2)C_1 \\ \mathrm{e}^{-3t}=C_0-3C_1 \end{cases}$

解得　$C_0=3\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t}, \quad C_1=\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t}$

故状态过渡矩阵

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = (3\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t})\begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t}-5\mathrm{e}^{-2t}+5\mathrm{e}^{-3t} & -6\mathrm{e}^{-2t}+6\mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t} & 3\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -2e^{-2t}+3e^{-3t} & -6e^{-2t}+6e^{-3t} \\ e^{-2t}-e^{-3t} & 3e^{-2t}-2e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_{zi}(t) \\ u_{Czi}(t) \end{bmatrix}=\phi(t)\begin{bmatrix} i(0) \\ u_C(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2e^{-2t}+3e^{-3t} & -6e^{-2t}+6e^{-3t} \\ e^{-2t}-e^{-3t} & 3e^{-2t}-2e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

所以

$$i_{zi}(t)=-10e^{-2t}+15e^{-3t}-24e^{-2t}+24e^{-3t}=-34e^{-2t}+39e^{-3t}$$

$$\begin{bmatrix} i_{zs}(t) \\ u_{Czs}(t) \end{bmatrix}=\phi(t) * \boldsymbol{Be}(t)$$

$$=\begin{bmatrix} -2e^{-2t}+3e^{-3t} & -6e^{-2t}+6e^{-3t} \\ e^{-2t}-e^{-3t} & 3e^{-2t}-2e^{-3t} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 30\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以

$$i_{zs}(t)=(-2e^{-2t}+3e^{-3t}) * 30\sin t=-60\int_0^{\tau} e^{-2(t-\tau)}\sin\tau d\tau+90\int_0^t e^{-3(t-\tau)}\sin\tau d\tau$$

$$e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}\sin\tau d\tau=e^{-2t}\cdot\frac{e^{2\tau}(2\sin\tau-\cos\tau)}{2^2+1^2}\Bigg|_0^t=\frac{1}{5}e^{-2t}+\frac{1}{5}(2\sin t-\cos t)$$

$$e^{-3t}\int_0^t e^{3\tau}\sin\tau d\tau=e^{-3t}\cdot\frac{e^{3\tau}(3\sin\tau-\cos\tau)}{3^2+1^2}\Bigg|_0^t=\frac{1}{10}e^{-3t}+\frac{1}{10}(3\sin t-\cos t)$$

所以

$$\begin{aligned} i_{zs}(t)&=-12e^{-2t}-24\sin t+12\cos t+9e^{-3t}+27\sin t-9\cos t \\ &=-12e^{-2t}+9e^{-3t}+3\sin t+3\cos t \end{aligned}$$

故全解为

$$i(t)=i_{zs}(t)+i_{zi}(t)=-46e^{-2t}+48e^{-3t}+3\cos t+3\sin t$$

（2）由题 9-14 知

$$\boldsymbol{e}=\begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \\ u_3(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(t)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{-1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t} & -te^{-t} \\ -\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{-1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} & -te^{-t} \\ \frac{1}{2}te^{-t} & \frac{1}{2}te^{-t} & te^{-t}+e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -1\\ 0 & -2 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}i_{1zi}\\ i_{2zi}\\ u_{3zi}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\phi}(t)\begin{bmatrix}i_1(0)\\ i_2(0)\\ u_3(0)\end{bmatrix}=\boldsymbol{\phi}(t)\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-te^{-t}\\ -te^{-t}\\ te^{-t}+e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}i_{1zs}\\ i_{2zs}\\ u_{3zs}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{B}*\boldsymbol{e}(t)$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} & -\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\\ -\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t} & -\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ \frac{1}{2}te^{-t} & \frac{1}{2}te^{-t}\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\varepsilon(t)\\ \delta(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\left(-\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)\varepsilon(t)*\varepsilon(t)+\left(\frac{-1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)*\delta(t)\\ \left(-\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)\varepsilon(t)*\varepsilon(t)+\left(\frac{-1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)*\delta(t)\\ \frac{1}{2}te^{-t}\varepsilon(t)*\varepsilon(t)+\frac{1}{2}te^{-t}*\delta(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}+\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\left(-\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-t}\right)\\ -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{4}e^{-2t}+\left(-\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}-\frac{3}{4}e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-t}\\ -\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-t}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-t}\end{bmatrix}$$

故全解为

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{1zi} + i_{1zs} \\ i_{2zi} + i_{2zs} \\ u_{3zi} + u_{3zs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t} - te^{-t} \\ -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t} - te^{-t} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix}$$

（3）由题 9-15 求得状态方程为

$$\begin{bmatrix} i'_L \\ u'_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \delta(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}$$

故
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

可设
$$e^{\boldsymbol{A}t} = C_0\boldsymbol{I} + C_1\boldsymbol{A}$$

令 $|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$，则

$$\begin{vmatrix} s+1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & s \end{vmatrix} = s(s+1) + \frac{1}{2} = \left(s + \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)\left(s + \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right) = 0$$

故特征根为

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

于是
$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = C_0 + C_1\lambda_1 \\ e^{\lambda_2 t} = C_0 + C_1\lambda_2 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} e^{\left(-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)t} = C_0 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)C_1 \\ e^{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)t} = C_0 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)C_1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1+j}{2}e^{\left(-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)t} + \frac{1-j}{2}e^{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)t} = e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{1}{2}t + e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{1}{2}t \\ C_1 = je^{\left(-\frac{1}{2}t - j\frac{1}{2}t\right)} - je^{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)t} = 2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{1}{2}t \end{cases}$$

故得状态过渡矩阵为

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=C_0\boldsymbol{I}+C_1\boldsymbol{A}=\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{t}{2}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{t}{2}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$+2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{t}{2}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2} & -2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2}\\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2} & \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2}\end{bmatrix}$$

在初始状态的条件下，有

$$\begin{bmatrix}i_{\mathrm{L}}\\u_{\mathrm{C}_2}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\phi}(t)*\boldsymbol{Be}(t)$$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2} & -2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2}\\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2} & \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2}\end{bmatrix}$$

$$*\begin{bmatrix}-\varepsilon(t)+\delta(t)\\ -\frac{1}{2}\delta(t)\end{bmatrix}$$

所以　$u_{\mathrm{C}_2}(t)=\left(-1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}\right)\varepsilon(t)$

$$u_{\mathrm{C}_1}(t)=u_{\mathrm{C}_2}(t)+e_{\mathrm{s}}(t)=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{t}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}\right)\varepsilon(t)$$

【9-21】　用时域解法求题 9-16 到题 9-18 的单位冲激响应 $\boldsymbol{h}(t)$ 及系统的输出响应。

解　(1) 题 9-16(1)：

由题 9-16(1)求得系统的状态方程与输出方程分别为

$$\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-6 & -5 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\4\end{bmatrix}e(t)$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

可见
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-6 & -5 & -4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\4\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{C}=[1\quad 0\quad 0],\quad \boldsymbol{D}=0$$

单位冲激响应矩阵为
$$\boldsymbol{h}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(t)$$

式中，
$$\boldsymbol{\phi}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\}$$
$$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\0 & s & -1\\6 & 5 & s+4\end{bmatrix}$$
$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}s(s+4)+5 & s+4 & 1\\-6 & s(s+4) & s\\-6s & -(5s+6) & s^2\end{bmatrix}}{s^2(s+4)+6+5s}$$
$$=\frac{1}{(s+3)(s^2+s+2)}\begin{bmatrix}s^2+4s+5 & s+4 & 1\\-6 & s^2+4s & s\\-6s & -5s-6 & s^2\end{bmatrix}$$

所以
$$\boldsymbol{\phi}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\b_{21} & b_{22} & b_{23}\\c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{bmatrix}$$

式中，
$$a_{13}=-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t+\frac{5}{8\sqrt{7}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$$
$$b_{23}=-\frac{3}{8}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{3}{8}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t-\frac{1}{4\sqrt{7}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$$
$$c_{33}=\frac{9}{8}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{9}{8}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t+\frac{15}{4\sqrt{7}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$$

(注：因为$\boldsymbol{\phi}(t)$与$\boldsymbol{B}$矩阵相乘时，a_{11}，a_{12}，b_{21}，b_{22}，c_{31}，c_{32}的值与结果无关，所以不必求出。)

于是

$$\boldsymbol{h}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{B}$$

$$=[1\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t+\frac{5}{2\sqrt{7}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$$

求输出响应：

因为 $e(t)=\delta(t)$，故

$$y(t)=h(t)=\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t+\frac{5}{2\sqrt{7}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right]\varepsilon(t)$$

题 9-16(2)：

由题 9-16(2)求得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=[2\quad 1],\quad \boldsymbol{D}=0$$

$$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} s & -1 \\ 12 & s+7 \end{bmatrix}$$

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} s+7 & 1 \\ -12 & s \end{bmatrix}}{s(s+7)+12}=\frac{\begin{bmatrix} s+7 & 1 \\ -12 & s \end{bmatrix}}{(s+3)(s+4)}=\begin{bmatrix} \frac{4}{s+3}-\frac{3}{s+4} & \frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+4} \\ \frac{-12}{s+3}+\frac{12}{s+4} & \frac{-3}{s+3}+\frac{4}{s+4} \end{bmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{\phi}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\}=\begin{bmatrix} 4\mathrm{e}^{-3t}-3\mathrm{e}^{-4t} & \mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-4t} \\ -12\mathrm{e}^{-3t}+12\mathrm{e}^{-4t} & -3\mathrm{e}^{-3t}+4\mathrm{e}^{-4t} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{h}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(t)$$

$$=[2\quad 1]\begin{bmatrix} 4\mathrm{e}^{-3t}-3\mathrm{e}^{-4t} & \mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-4t} \\ -12\mathrm{e}^{-3t}+12\mathrm{e}^{-4t} & -3\mathrm{e}^{-3t}+4\mathrm{e}^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=[2\quad 1]\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-4t} \\ -3\mathrm{e}^{-3t}+4\mathrm{e}^{-4t} \end{bmatrix}=-\mathrm{e}^{-3t}+2\mathrm{e}^{-4t}$$

求输出响应：

因为　　$e(t)=\varepsilon(t)$，　$h(t)=-\mathrm{e}^{-3t}+2\mathrm{e}^{-4t}$

所以 $y(t)=e(t)*h(t)=e(t)*(-\mathrm{e}^{-3t}+2\mathrm{e}^{-4t})=-\mathrm{e}^{-3t}*\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-4t}*\varepsilon(t)$

$$=-\int_0^t \mathrm{e}^{-3(t-\tau)}\mathrm{d}\tau+2\int_0^t \mathrm{e}^{-4(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=\left[\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{-3t}-1)+\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4t})\right]\varepsilon(t)$$

$$=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

(2) 题 9-17：

由题 9-17 求得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=[-6 \quad -1],\quad \boldsymbol{D}=1$$

$$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 8 & s+4\end{bmatrix}$$

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}s+4 & 1\\ -8 & s\end{bmatrix}}{s(s+4)+8}=\frac{\begin{bmatrix}s+4 & 1\\ -8 & s\end{bmatrix}}{(s+2)^2+2^2}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{(s+2)+2}{(s+2)^2+2^2} & \dfrac{1}{(s+2)^2+2^2}\\ \dfrac{-8}{(s+2)^2+2^2} & \dfrac{(s+2)-2}{(s+2)^2+2^2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2t}\cos 2t+\mathrm{e}^{-2t}\sin 2t & \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\sin 2t\\ -4\mathrm{e}^{-2t}\sin 2t & \mathrm{e}^{-2t}\cos 2t-\mathrm{e}^{-2t}\sin 2t\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{h}(t)=\boldsymbol{C\phi}(t)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(t)$$

$$=[-6 \quad -1]\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2t}(\cos 2t+\sin 2t) & \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\sin 2t\\ -4\mathrm{e}^{-2t}\sin 2t & \mathrm{e}^{-2t}(\cos 2t-\sin 2t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\delta(t)$$

$$=[-6 \quad -1]\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\sin 2t\\ \mathrm{e}^{-2t}\cos 2t-\mathrm{e}^{-2t}\sin 2t\end{bmatrix}+\delta(t)$$

求输出响应：

因为　$e(t)=\varepsilon(t)$，　$h(t)=-2\mathrm{e}^{-2t}\sin2t-\mathrm{e}^{-2t}\cos2t+\delta(t)$

所以

$$
\begin{aligned}
y(t) &= e(t) * h(t) \\
&= \varepsilon(t) * (-2\mathrm{e}^{-2t}\sin2t) - \varepsilon(t) * \mathrm{e}^{-2t}\cos2t + \varepsilon(t) * \delta(t) \\
&= -2\int_0^t \mathrm{e}^{-2\tau}\sin2\tau\mathrm{d}\tau - \int_0^t \mathrm{e}^{-2\tau}\cos2\tau\mathrm{d}\tau + \delta(t) * \varepsilon(t) \\
&= -2\left.\frac{\mathrm{e}^{-2\tau}(-2\sin2\tau - 2\cos2\tau)}{(-2)^2+2^2}\right|_0^t \\
&\quad - \left.\frac{\mathrm{e}^{-2\tau}(-2\cos2\tau + 2\sin2\tau)}{(-2)^2+2^2}\right|_0^t + \varepsilon(t) \\
&= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t}\cos2t + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}\sin2t\right)\varepsilon(t)
\end{aligned}
$$

(3) 题 9-18(1)：

由题 9-18(1)知

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{C} = [0 \quad 1],\quad \boldsymbol{D} = 0
$$

由题 9-18(1)求得

$$
\boldsymbol{\Phi}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{s+1} + \dfrac{2}{s+2} & \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{-1}{s+2} \\ \dfrac{-2}{s+1} + \dfrac{2}{s+2} & \dfrac{2}{s+1} + \dfrac{-1}{s+2} \end{bmatrix}
$$

故状态过渡矩阵

$$
\boldsymbol{\phi}(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\boldsymbol{\Phi}(s)\} = \begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}
$$

单位冲激响应矩阵为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{h}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\delta(t) \\
&= [0 \quad 1]\begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= [0 \quad 1]\begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix} = -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}$$

且已知　$e(t)=\varepsilon(t)$，　$\boldsymbol{C}=[0 \quad 1]$，　$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

所以　$y_{zi}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{x}(0)$

$$=[0 \quad 1]\begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=[0 \quad 1]\begin{bmatrix} -2\mathrm{e}^{-t}+4\mathrm{e}^{-2t} \\ -4\mathrm{e}^{-t}+4\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}=-4\mathrm{e}^{-t}+4\mathrm{e}^{-2t}$$

$$y_{zs}(t)=e(t)*h(t)=\varepsilon(t)*(-2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)=-2\int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau+2\int_0^t \mathrm{e}^{-2\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=-2\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\tau}}{-1}\bigg|_0^t+2\cdot\frac{\mathrm{e}^{-2\tau}}{-2}\bigg|_0^t=(2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}-1)\varepsilon(t)$$

故输出响应　$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(3\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-t}-1)\varepsilon(t)$

题 9-18(2)：

由题 9-18(2)知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=[1 \quad 1],\quad \boldsymbol{D}=1$$

由题 9-18(2)求得

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1} & \dfrac{1}{(s+1)^2+1} \\ \dfrac{-1}{(s+1)^2+1} & \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1} \end{bmatrix}$$

故状态过渡矩阵

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{\boldsymbol{\Phi}(s)\}=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}\cos t & \mathrm{e}^{-t}\sin t \\ -\mathrm{e}^{-t}\sin t & \mathrm{e}^{-t}\cos t \end{bmatrix}$$

单位冲激响应：

$$\boldsymbol{h}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(t)=[1 \quad 1]\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}\cos t & \mathrm{e}^{-t}\sin t \\ -\mathrm{e}^{-t}\sin t & \mathrm{e}^{-t}\cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\delta(t)$$

$$=[1 \quad 1]\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}\sin t \\ \mathrm{e}^{-t}\cos t \end{bmatrix}+\delta(t)=\delta(t)+\mathrm{e}^{-t}\sin t+\mathrm{e}^{-t}\cos t$$

求输出响应：

$$e(t)=\varepsilon(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=[1\quad 1]$$

$$h(t)=\delta(t)+\mathrm{e}^{-t}\sin t+\mathrm{e}^{-t}\cos t$$

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}\cos t & \mathrm{e}^{-t}\sin t\\ -\mathrm{e}^{-t}\sin t & \mathrm{e}^{-t}\cos t\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}y_{zi}(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{x}(0)=[1\quad 1]\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}\cos t & \mathrm{e}^{-t}\sin t\\ -\mathrm{e}^{-t}\sin t & \mathrm{e}^{-t}\cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\\&=[\mathrm{e}^{-t}\cos t-\mathrm{e}^{-t}\sin t\quad \mathrm{e}^{-t}\sin t+\mathrm{e}^{-t}\cos t]\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\\&=2(\mathrm{e}^{-t}\cos t-\mathrm{e}^{-t}\sin t)+1\cdot(\mathrm{e}^{-t}\sin t+\mathrm{e}^{-t}\cos t)\\&=(3\mathrm{e}^{-t}\cos t-\mathrm{e}^{-t}\sin t)\varepsilon(t)\end{aligned}$$

$$y_{zs}(t)=h(t)*e(t)=[\delta(t)+\mathrm{e}^{-t}\sin t+\mathrm{e}^{-t}\cos t]*\varepsilon(t)$$

$$\delta(t)*\varepsilon(t)=\varepsilon(t)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-t}\sin t*\varepsilon(t)&=\int_0^t\mathrm{e}^{-\tau}\sin\tau\mathrm{d}\tau=\left.\frac{\mathrm{e}^{-\tau}(-\sin\tau-\cos\tau)}{(-1)^2+1^2}\right|_0^t\\&=-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t}\sin t+\mathrm{e}^{-t}\cos t)\varepsilon(t)+\frac{1}{2}\varepsilon(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-t}\cos t*\varepsilon(t)&=\int_0^t\mathrm{e}^{-\tau}\cos\tau\mathrm{d}\tau=\left.\frac{\mathrm{e}^{-\tau}(-\cos\tau+\sin\tau)}{(-1)^2+1^2}\right|_0^t\\&=\frac{1}{2}(-\mathrm{e}^{-t}\cos t+\mathrm{e}^{-t}\sin t)\varepsilon(t)+\frac{1}{2}\varepsilon(t)\end{aligned}$$

所以

$$y_{zs}(t)=2\varepsilon(t)-\mathrm{e}^{-t}\cos t\cdot\varepsilon(t)$$

故输出响应

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(2+2\mathrm{e}^{-t}\cos t-\mathrm{e}^{-t}\sin t)\varepsilon(t)$$

【9-22】 已知系统的对角线变量的状态方程与输出方程以及激励与系统的初始状态如下，求系统的输出。

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{e}$$

$$\boldsymbol{y}=[1\quad 3\quad 1]\boldsymbol{x},\quad e(t)=\varepsilon(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

解　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{C}=[1\quad 3\quad 1],\quad \boldsymbol{D}=\boldsymbol{0},\quad e(t)=\varepsilon(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}s+1&0&0\\0&s+3&0\\0&0&s+2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1}&0&0\\0&\frac{1}{s+3}&0\\0&0&\frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{\boldsymbol{\Phi}(s)\}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}&0&0\\0&\mathrm{e}^{-3t}&0\\0&0&\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$y_{\mathrm{zi}}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{x}(0)=[1\quad 3\quad 1]\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}&0&0\\0&\mathrm{e}^{-3t}&0\\0&0&\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$=[\mathrm{e}^{-t}\quad 3\mathrm{e}^{-3t}\quad \mathrm{e}^{-2t}]\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\mathrm{e}^{-t}+6\mathrm{e}^{-3t}+\mathrm{e}^{-2t}$$

$$y_{\mathrm{zs}}(t)=[\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(t)]*\boldsymbol{e}(t)=[1\quad 3\quad 1]\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}&0&0\\0&\mathrm{e}^{-3t}&0\\0&0&\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}*\varepsilon(t)$$

$$=(\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{-3t}+\mathrm{e}^{-2t})*\varepsilon(t)=(1-\mathrm{e}^{-t})+(1-\mathrm{e}^{-3t})+\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2t})$$

$$=\frac{5}{2}-e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-3t}$$

所以
$$y(t)=\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}+5e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

【9-23】 列写图9-13所示系统的状态方程与输出方程。并由初始状态 $x_1(0)$，$x_2(0)$ 导出系统的初始条件 $y(0)$，$y'(0)$。

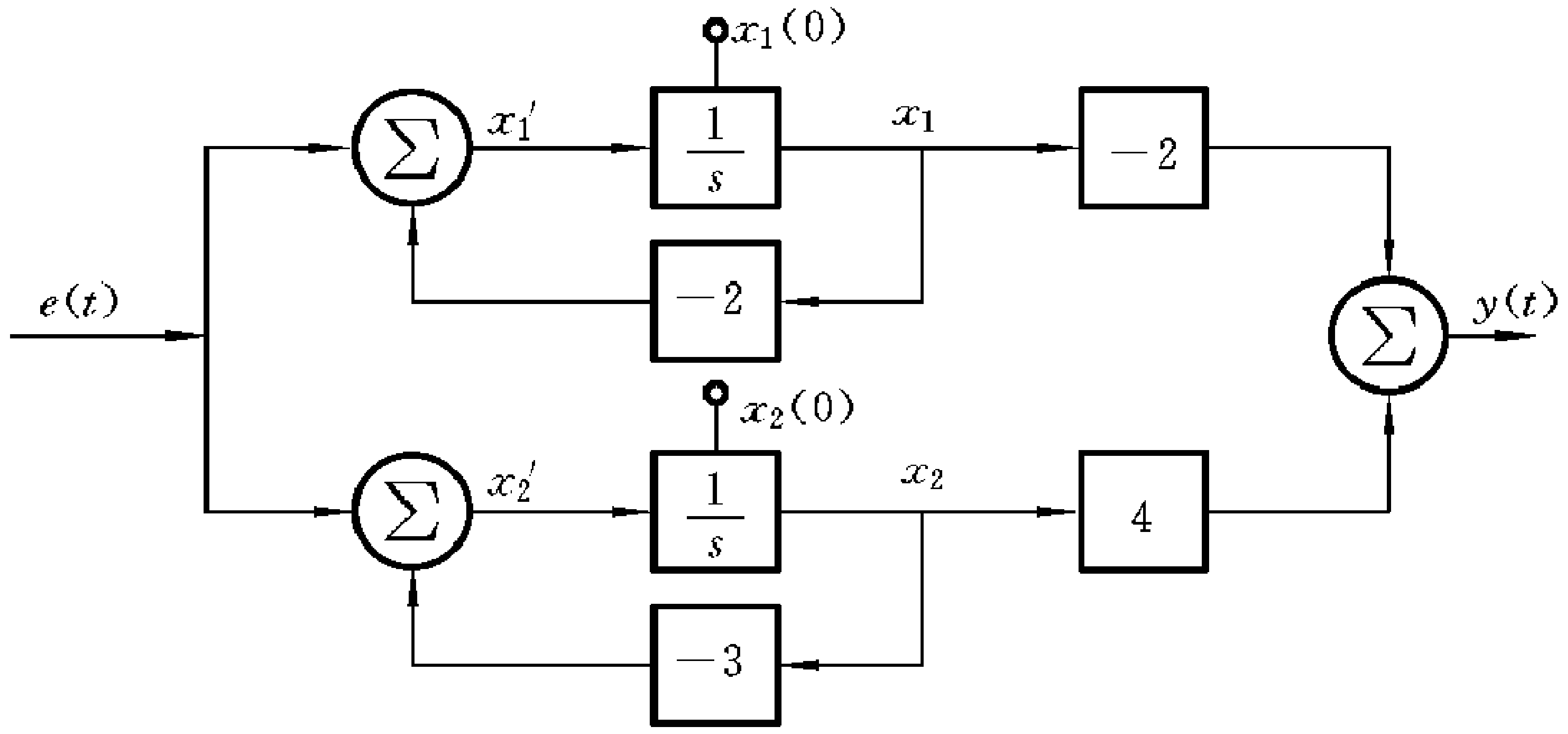


图 9-13

解　由图9-13可知，系统转移函数为

$$H(s)=\frac{-2}{s+2}+\frac{4}{s+3}=\frac{2s+2}{s^2+5s+6}$$

故该系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=2e'(t)+2e(t)$$

由框图得系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e(t)$$

输出方程为

$$y(t)=\begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

所以
$$y(0)=-2x_1(0)+4x_2(0)$$

$$y'(0)=-2x'_1(0)+4x'_2(0)$$

$$x'_1(0)=-2x_1(0)+e(0)$$

$$x'_2(0) = -3x_2(0) + e(0)$$

由于初始条件是指零输入时的初始条件，即 $e(0)=0$，所以

$$y'(0)=4x_1(0)-12x_2(0)$$

【9-24】 用时域解法及 z 域解法求题 9-7 中离散时间系统的状态过渡矩阵 $\boldsymbol{\phi}(k)=\boldsymbol{A}^k$。

解 (1) 求图 9-4(a)所示系统 $\boldsymbol{\phi}(k)$。

由题 9-7(a)求得

$$x(k+1) = -\frac{1}{2}x(k) + e(k)$$

所以

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{A}^k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \boldsymbol{\phi}(k)$$

(2) 求图 9-4(b)所示系统 $\boldsymbol{\phi}(k)$。

由题 9-7(b)求得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{\phi}(k)=\mathscr{Z}^{-1}\{(\boldsymbol{I}-z^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\}=\mathscr{Z}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}1 & -z^{-1} & 0\\ 0 & 1 & -z^{-1}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\right\}$$

$$=\mathscr{Z}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}1 & z^{-1} & z^{-2}\\ 0 & 1 & z^{-1}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}\delta(k) & \delta(k-1) & \delta(k-2)\\ 0 & \delta(k) & \delta(k-1)\\ 0 & 0 & \delta(k)\end{bmatrix}$$

【9-25】 设题 9-8 所示离散系统的初始状态为零且激励 $e(k)=\delta(k)$，用时域解法及 z 域解法求状态矢量 $\boldsymbol{x}(k)$ 与输出矢量 $\boldsymbol{y}(k)$。

解 (1) z 域解法。

$$\boldsymbol{X}(z) = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}(z)$$

又

$$H(z)=\frac{z^2}{z^2-z-0.11}$$

所以

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0.11 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}e(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\begin{bmatrix}0.11 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+e(k)$$

$$z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}z & -1\\-0.11 & z-1\end{bmatrix}$$

$$(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{z-1}{z^2-z-0.11} & \dfrac{1}{z^2-z-0.11}\\ \dfrac{0.11}{z^2-z-0.11} & \dfrac{z}{z^2-z-0.11}\end{bmatrix}$$

$$(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}(z)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{z^2-z-0.11}\\ \dfrac{z}{z^2-z-0.11}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k)&=\mathscr{Z}^{-1}\{(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}(z)\}\\&=\begin{bmatrix}\dfrac{5}{6}(1.1)^{k-1}-\dfrac{5}{6}(-0.1)^{k-1}\\ \dfrac{11}{12}(1.1)^{k-1}+\dfrac{1}{12}(-0.1)^{k-1}\end{bmatrix}\varepsilon(k-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(k)&=\mathscr{Z}^{-1}\{\boldsymbol{H}(z)\}=\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1.2}\left(\frac{z^2}{z-1.1}-\frac{z^2}{z+0.1}\right)\right\}\\&=\left[\frac{11}{12}(1.1)^k+\frac{1}{12}(-0.1)^k\right]\varepsilon(k+1)\end{aligned}$$

且因为当 $k=-1$ 时，$y(k)=0$，所以

$$y(k)=\left[\frac{11}{12}(1.1)^k+\frac{1}{12}(-0.1)^k\right]\varepsilon(k)$$

(2) 时域解法。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k)&=\sum_{j=0}^{k=1}\phi(k-1-j)\boldsymbol{B}e(j)=\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0.11 & 1\end{bmatrix}^{k-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\dfrac{5}{6}(1.1)^{k-1}-\dfrac{5}{6}(-0.1)^{k-1}\\ \dfrac{11}{12}(1.1)^{k-1}+\dfrac{1}{12}(-0.1)^{k-1}\end{bmatrix}\varepsilon(k-1)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}e(k)$$

$$= [0.11 \quad 1]\begin{bmatrix} \frac{5}{6}(1.1)^{k-1} - \frac{5}{6}(-0.1)^{k-1} \\ \frac{11}{12}(1.1)^{k-1} + \frac{1}{12}(-0.1)^{k-1} \end{bmatrix}\varepsilon(k-1) + \delta(k)$$

$$= \left[\frac{11}{12}(1.1)^{k} + \frac{1}{12}(-0.1)^{k}\right]\varepsilon(k)$$

【9-26】 列写下列差分方程所示系统的状态方程与输出方程,并据此作系统的模拟框图。

(1) $y(k+2)+11y(k+1)+28y(k)=e(k)$

(2) $y(k+3)+3y(k+2)+3y(k+1)+y(k)=2e(k+1)+e(k)$

解 (1) 状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -28 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}e(k)$$

输出方程为

$$\boldsymbol{y}(k) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -28 & -11 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = [1 \quad 0], \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$$

系统的模拟框图如图 9-14 所示。

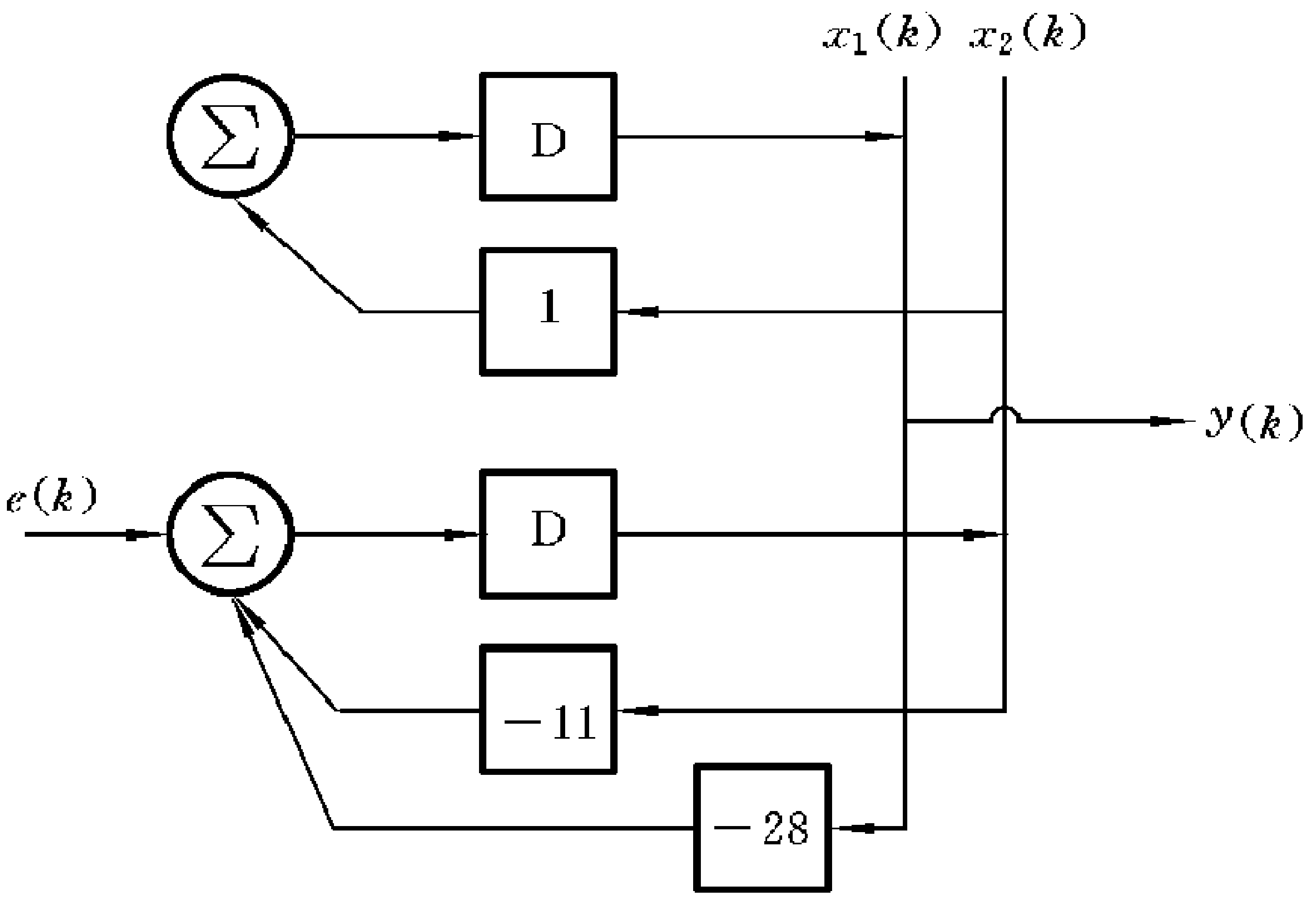


图 9-14

(2) 状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(k)$$

输出方程为

$$\boldsymbol{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = 0$$

系统的模拟框图如图 9-15 所示。

【9-27】 已知系统的状态方程与输出方程如下，试分析系统的可控性与可观性。

(1) $\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

解 (1) ① $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{M}_c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \xlongequal{n=2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{M}_c) = 2$$

$\boldsymbol{M}_c$满秩，所以系统是完全可控制的。

② $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{M}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \xlongequal{n=2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

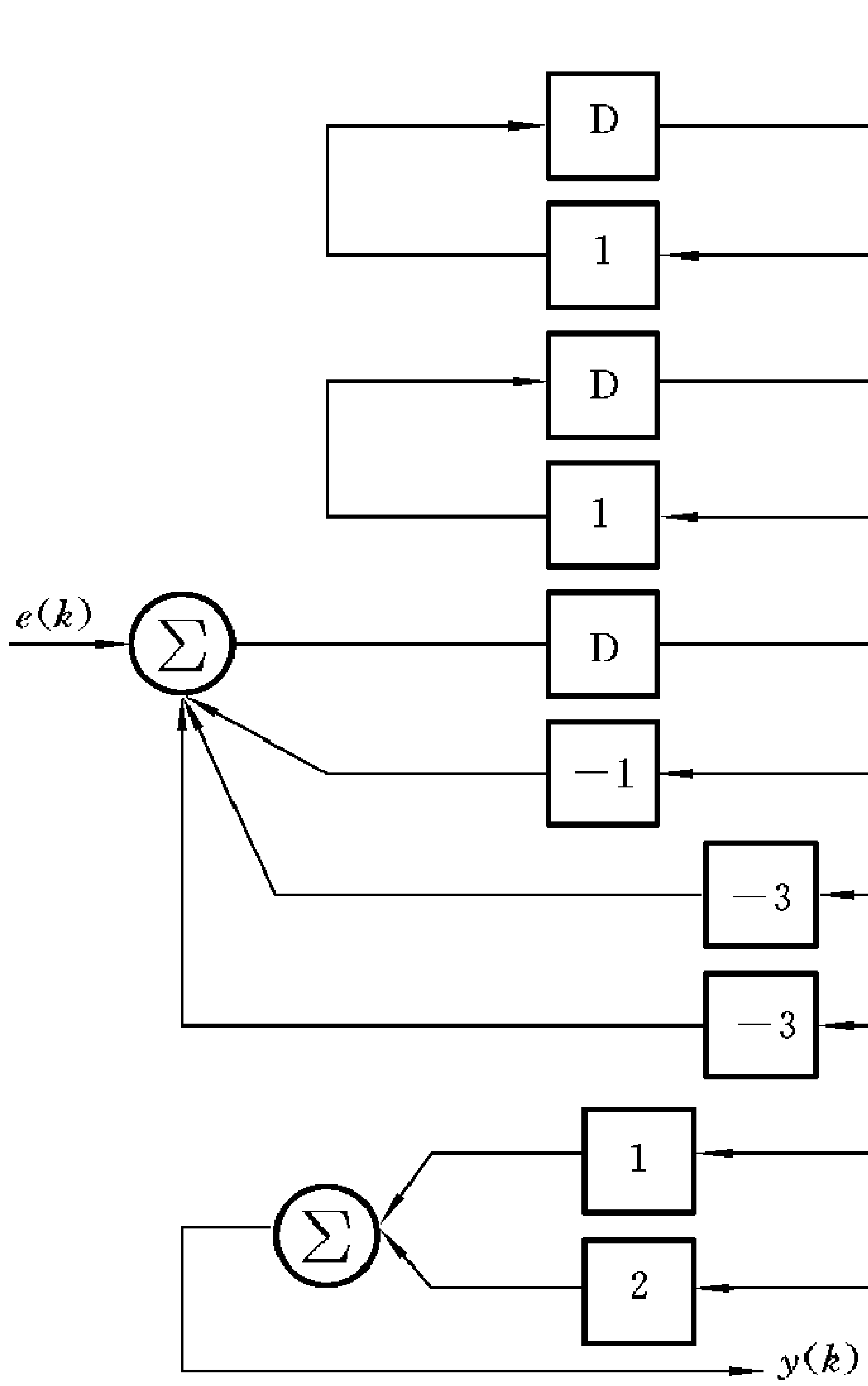


图 9-15

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}_o)=2$$

$\boldsymbol{M}_o$ 满秩，所以系统是完全可观测的。

(2) ① $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{M}_c=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]\xlongequal{n=2}[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}_c)=2$$

$\boldsymbol{M}_c$满秩，故系统是完全可控制的。

② $\boldsymbol{C}=[1\quad 0]$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{o}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{CA}^{n-1}\end{bmatrix}\xlongequal{n=2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{o}})=1$$

$\boldsymbol{M}_{\mathrm{o}}$ 非满秩,故系统是不完全可观测的。

(3) ① $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}})=1$$

$\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}$非满秩,故系统为不完全可控制的。

② $\boldsymbol{C}=[0\quad 1]$, $\boldsymbol{M}_{\mathrm{o}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{o}})=2$$

$\boldsymbol{M}_{\mathrm{o}}$ 满秩,故系统为完全可观测的。

【9-28】 已知系统的参数矩阵如下,试分析该系统的可控性与可观性。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=[4\quad 5\quad 1],\quad \boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$$

解 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]\xlongequal{n=3}[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}]$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -6\\ 1 & -6 & 25\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{o}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{CA}^{n-1}\end{bmatrix}\xlongequal{n=3}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\\ \boldsymbol{CA}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5 & 1\\ -6 & -7 & -1\\ 6 & 5 & -1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}})=3$$

$\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}$ 满秩,故系统完全可控制。

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{o}})=2<3$$

$\boldsymbol{M}_{\mathrm{o}}$ 不满秩,故系统不完全可观测。

附录　模拟试题及解答

信号与线性系统课程考试模拟试题

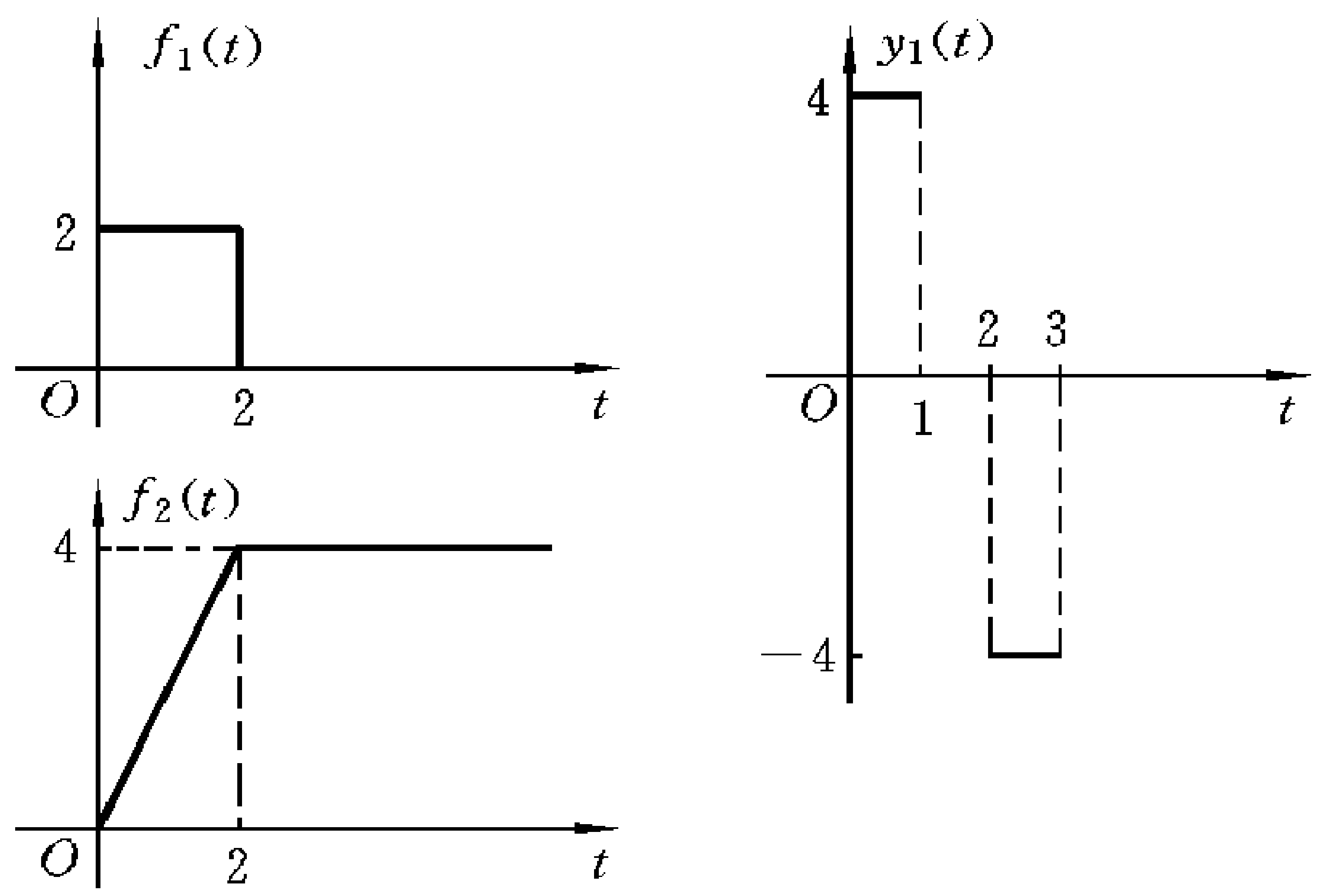
一、(40 分)简答题:

1.(4 分)试判断系统 $y(n)=T[x(n)]=e^{x(n)}$ 是否为线性系统、非时变系统、稳定系统和因果系统,并说明理由。

2.(4 分)设 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(j\omega)$,求信号 $f^2(t)\cos(\omega_0 t)$ 的傅里叶变换。

3.(4 分)设 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(j\omega)$,求 $F(0)$ 和 $f(0)$。

4.(6 分)一线性非时变系统在零状态条件下,激励 $f_1(t)$ 与响应 $y_1(t)$ 的波形如图附Ⅰ-1 所示,那么在同样条件下,当激励波形为 $f_2(t)$ 时,求响应 $y_2(t)$ 的波形。



图附Ⅰ-1

5. (6 分)求象函数 $F(s)=\dfrac{1-e^{-2s}}{s^2(s^2+4)}$ 的原函数 $f(t)$;并求其初值和终值。

6. (4 分)系统函数为 $H(s)=\dfrac{s^3+s^2+s+1}{s^4+2s^3+7s^2+10s+10}$ 的系统是否稳定。

7. (6 分)连续信号 $f(t)$ 的占有频带为 0～10 kHz,经进行均匀抽样后构成一离散时间信号。为了保证能够从离散时间信号恢复出原信号 $f(t)$,求其最大奈奎斯特间隔 T_N;并求信号 $f(2t)$ 的奈奎斯特频率 f_N。

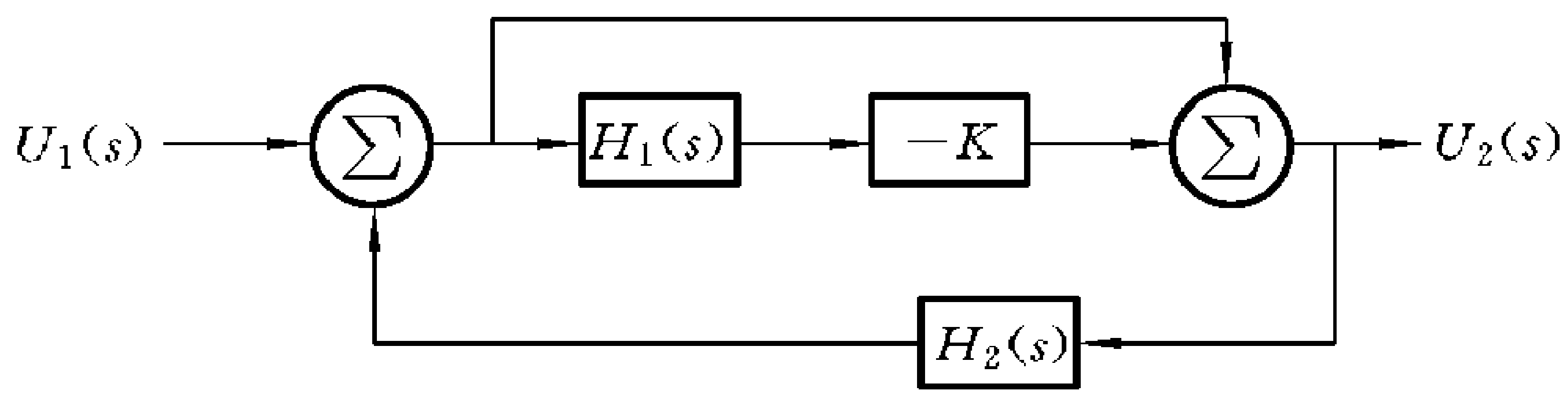
8. (6 分)求收敛域为 $\dfrac{1}{2}<|z|<3$, $F(z)=\dfrac{z+2}{2z^2-7z+3}$ 的原序列 $f(k)$。

二、(10 分)一线性时不变系统,在相同的初始条件下,当激励为 $f(t)$ 时,其全响应为 $y_1(t)=(2e^{-3t}+\sin 2t)\varepsilon(t)$;当激励为 $2f(t)$ 时,全响应为 $y_2(t)=(e^{-3t}+2\sin(2t))\varepsilon(t)$。求:

(1) 初始条件不变,当激励为 $f(t-t_0)$ 时的全响应 $y_3(t)$,t_0 为大于零的实常数。

(2) 初始条件增大一倍,当激励为 $0.5f(t)$ 时的全响应 $y_4(t)$。

三、(15 分)如图附 Ⅰ-2 所示系统,已知



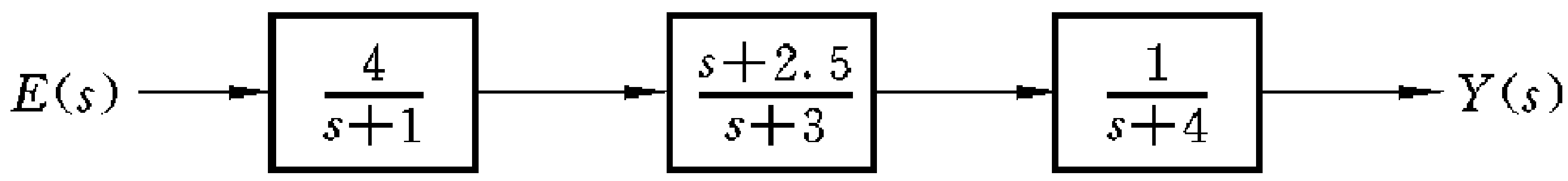
图附 Ⅰ-2

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=2,H_1(s)=\frac{1}{s+3}$$

(1) 求 $H_2(s)$;

(2) 要使子系统 $H_2(s)$ 为稳定系统,求 K 值的范围。

四、(15 分)如图附 Ⅰ-3 所示系统的模拟框图,

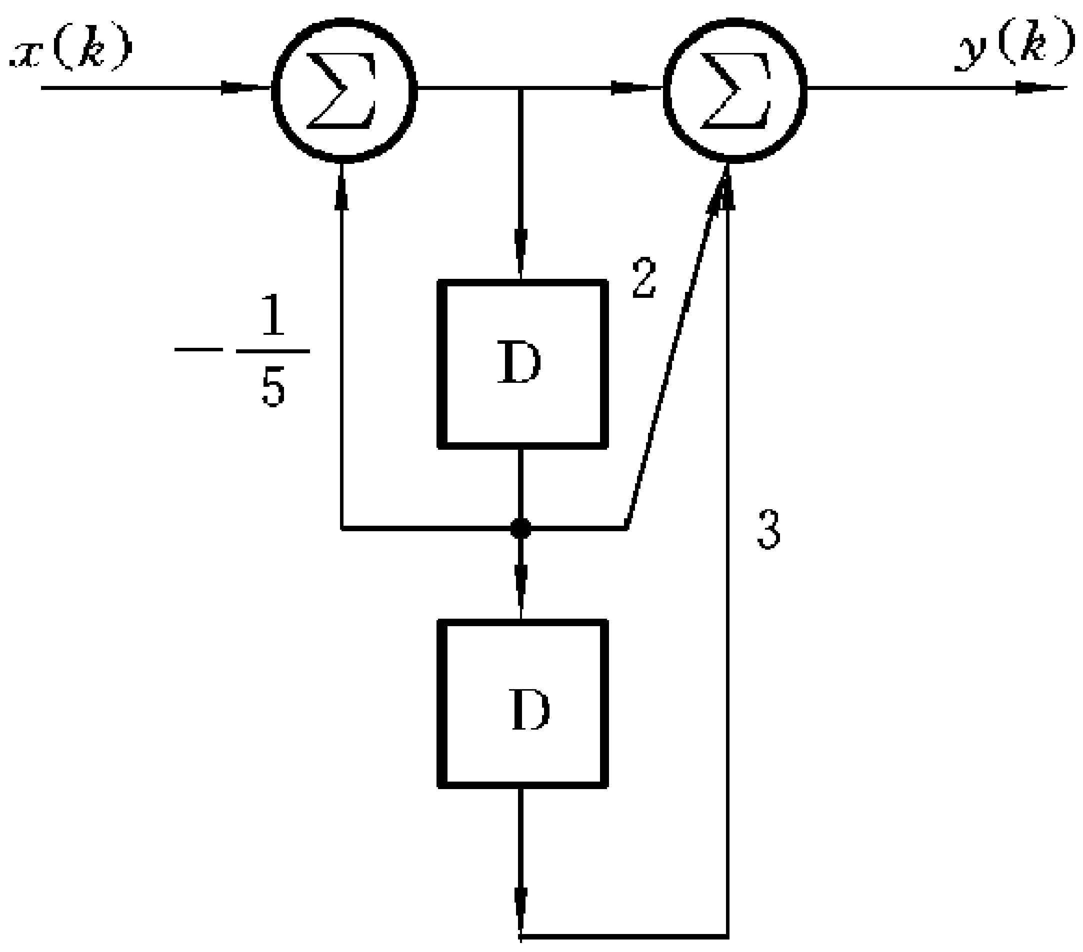


图附 Ⅰ-3

(1) 试列出它的状态方程和输出方程；

(2) 当输入$e(t)=\mathrm{e}^{-1}\varepsilon(t)$时，求输出$y(t)$。

五、(20分)如图附Ⅰ-4所示系统的模拟框图，



图附Ⅰ-4

(1) 写出系统差分方程；

(2) 求单位样值响应$h(k)$；

(3) 判断系统稳定性；

(4) 若$x(k)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega k}$，求系统零状态响应$y(k)$。

信号与线性系统课程考试模拟试题解答

一、

1. (1) $T[k_1x_1(n)+k_2x_2(n)]=\mathrm{e}^{[k_1x_1(n)+k_2x_2(n)]}$　①

$k_1y_1(n)+k_2y_2(n)=k_1\mathrm{e}^{x_1(n)}+k_2\mathrm{e}^{x_2(n)}$　②

易知①≠②，不满足齐次性和叠加性，所以系统为非线性系统。

(2) $T[x(n-n_0)]=\mathrm{e}^{x(n-n_0)}$　①

$y(n-n_0)=\mathrm{e}^{x(n-n_0)}$　②

易知①＝②，满足系统时不变性质，所以系统为时不变系统。

(3) 若$|x(n)|<M$，则$\left|\mathrm{e}^{x(n)}\right|<\infty$，所以系统为稳定系统。

(4) 因为输出仅取决于输入当前时刻的值，而不取决于输入未来时刻的

值，所以系统为因果系统。

2. 已知　$f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$

由傅里叶变换的频域卷积性质得

$$f(t)\cos(\omega_0 t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega)*\{\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]\}$$

$$=\frac{1}{2}\{F[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)]+F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]\}$$

$$f^2(t)\cos(\omega_0 t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega)*\frac{1}{2}\{F[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)+F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]\}$$

$$=\frac{1}{4\pi}F(\mathrm{j}\omega)*\{F[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)]+F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]\}$$

3. 因为　$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

所以令 $\omega=0$，得

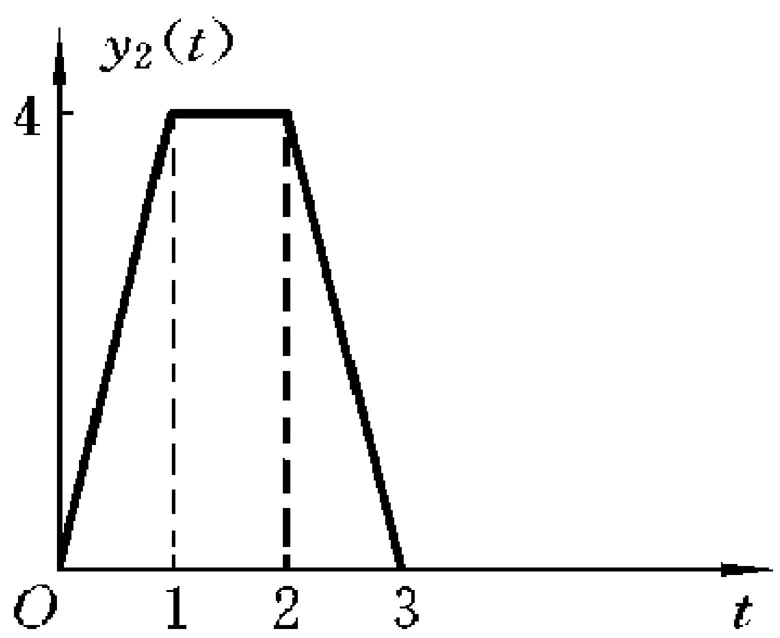
$$F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$$

因为　$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$

所以令 $t=0$，得

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega$$

4. 因为 $f_2(t)=\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau$，故 $y_2(t)=\int_{-\infty}^{t}y_1(\tau)\mathrm{d}\tau$，其波形如图附Ⅰ-5所示。



图附Ⅰ-5

5. 将 $F(s)$ 进行部分分式展开：

$$F(s)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}\right)\mathrm{e}^{-2s}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+2^2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+2^2}\right)\mathrm{e}^{-2s}$$

对上式进行拉普拉斯反变换：

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\varepsilon(t)-\frac{1}{4}\left[(t-2)-\frac{1}{2}\sin(2(t-2))\right]\varepsilon(t-2)$$

$f(t)$ 的初值为

$$f(0)=\lim_{s\to+\infty}sF(s)=\lim_{s\to+\infty}\frac{1-e^{-2s}}{s(s^2+4)}=0$$

由于$F(s)$在$s=0$处有二阶极点，因此$f(t)$不存在终值。

6．罗斯-霍维茨阵列：

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 7 & 10 \\ s^3 & 2 & 10 & 0 \\ s^2 & 2 & 10 & 0 \\ s^1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

可见罗斯-霍维茨阵列的第四行全为零元素，第三行的最高幂次项为s^2，于是构成辅助多项式$p(s)=2s^2+10$，并以$\frac{\mathrm{d}p(s)}{\mathrm{d}s}=4s$的分数组成全零行($s'$行)的分数，再按原排列方法继续排列下去，可得

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 7 & 10 \\ s^3 & 2 & 10 & 0 \\ s^2 & 2 & 10 & 0 \\ s^1 & 4 & 0 & 0 \\ s^0 & 4 & 0 & 0 \end{array}$$

由此可知，第一列元素的符号没有改变，故肯定该系统在s平面的右半开平面上无极点。今令$p(s)=2s^2+10=0$，可得$s_1=\mathrm{j}\sqrt{5}$，$s_2=-\mathrm{j}\sqrt{5}$为一对共轭虚根。这一对虚根实际上也就是$H(s)$的两个极点。故系统是临界稳定的。

7．根据抽样定理，可知该信号的最高频率$f_\mathrm{m}=10\ \mathrm{kHz}$，则最大奈奎斯特间隔为

$$T_N=\frac{1}{2f_\mathrm{m}}=\frac{1}{2\times10\times10^3}\ \mathrm{s}=50\ \mu\mathrm{s}$$

由于信号$f(2t)$的带宽为20 kHz，所以信号$f(2t)$的奈奎斯特频率为

$$f_s=2f_\mathrm{m}=2\times20\ \mathrm{kHz}=40\ \mathrm{kHz}$$

8．将$\frac{F(z)}{z}$进行部分分式展开：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{\frac{z}{2}+1}{z(z-3)\left(z-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{2}{3}}{z}+\frac{\frac{1}{3}}{z-3}+\frac{-1}{z-\frac{1}{2}}$$

$$F(z)=\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{2}z}{z-3}-\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

由收敛域$\frac{1}{2}<|z|<3$可知，极点$z=\frac{1}{2}$在收敛域内，相应的部分分式所对应的序列为右边序列；极点$z=3$在收敛域外，相应的部分分式所对应的序列为左边序列，所以

$$\begin{aligned}f(k)&=\mathscr{Z}^{-1}\{F(z)\}\\&=\frac{2}{3}\delta(k)-\frac{1}{3}\cdot(3)^k\varepsilon(-k-1)-\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k)\end{aligned}$$

二、

(1) 设系统的零输入响应为$y_{zi}(t)$，零状态响应为$y_{zi}(t)$，则有

$$\begin{cases}y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=[2e^{-3t}+\sin(2t)]\varepsilon(t)\\y_{zi}(t)+2y_{zs}(t)=[e^{-3t}+2\sin(2t)]\varepsilon(t)\end{cases}$$

解方程得

$$\begin{cases}y_{zi}(t)=3e^{-3t}\varepsilon(t)\\y_{zs}(t)=[-e^{-3t}+\sin(2t)]\varepsilon(t)\end{cases}$$

则
$$\begin{aligned}y_3(t)&=y_{zi}(t)+y_{zs}(t-t_0)\\&=3e^{-3t}\varepsilon(t)+[-e^{-3(t-t_0)}+\sin(2(t-t_0))]\varepsilon(t-t_0)\end{aligned}$$

(2) 由题意得

$$\begin{aligned}y_4(t)&=2y_{zi}(t)+0.5y_{zs}(t)\\&=6e^{-3t}\varepsilon(t)-0.5e^{-3t}\varepsilon(t)+0.5\sin(2t)\varepsilon(t)\\&=[5.5e^{-3t}+0.5\sin(2t)]\varepsilon(t)\end{aligned}$$

三、

(1) 由图附Ⅰ-2所示反馈网络可列写方程

$$[U_1(s)+H_2(s)U_2(s)]-KH_1(s)[U_1(s)+H_2(s)U_2(s)]=U_2(s)$$

由上式整理得

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{1-KH_1(s)}{1-H_2(s)+KH_1(s)H_2(s)}$$

因为$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=2$，$H_1(s)=\frac{1}{s+3}$，故代入上式，有

$$\frac{1-K\cdot\dfrac{1}{s+3}}{1-H_2(s)+K\cdot\dfrac{1}{s+3}\cdot H_2(s)}=2$$

则
$$H_2(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{s+3+K}{s+3-K}$$

(2) 要使子系统 $H_2(s)$ 稳定，则极点必在 s 平面的左半平面，所以

$$3-K>0,\quad K<3$$

四、

(1) 根据系统模拟框图可直接写出系统转移函数 $H(s)$，即

$$H(s)=\frac{4}{s+1}\cdot\frac{s+2.5}{s+3}\cdot\frac{1}{s+4}$$
$$=\frac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12}$$

状态方程

$$\begin{bmatrix}x'_1(t)\\x'_2(t)\\x'_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-12&-19&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}e(t)$$

输出方程

$$y(t)=[10\quad 4\quad 0]\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}$$

(2) 因为　$\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s+1}$

$$Y(s)=H(s)E(s)$$
$$=\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{-\dfrac{1}{6}}{s+1}+\frac{-\dfrac{1}{2}}{s+3}+\frac{\dfrac{2}{3}}{s+4}$$

所以

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=\left(t\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$
$$=\left[\left(t-\frac{1}{6}\right)\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right]\varepsilon(t)$$

五、

(1) 由图附 I -4 所示系统的模拟框图,可列写系统差分方程如下:

$$y(k)+\frac{1}{5}y(k-1)=x(k)+2x(k-1)+3x(k-2)$$

(2) 对上式两边做单边 z 变换,则

$$Y(z)+\frac{1}{5}z^{-1}Y(z)=X(z)+2z^{-1}X(z)+3z^{-2}X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+2z^{-1}+3z^{-2}}{1+\frac{1}{5}z^{-1}}$$

$$=\frac{z^2+2z+3}{z^2+\frac{1}{5}z}$$

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{z^2+2z+3}{z^2\left(z+\frac{1}{5}\right)}=\frac{15}{z^2}+\frac{-65}{z}+\frac{66}{z+\frac{1}{5}}$$

$$H(z)=\frac{15}{z}-65+\frac{66z}{z+\frac{1}{5}}$$

对 $H(z)$ 进行反 z 变换得

$$h(k)=\mathscr{Z}^{-1}\{F(z)\}$$

$$=15\delta(k-1)-65\delta(k)+66\left(-\frac{1}{5}\right)^k\varepsilon(k)$$

(3) 因为 $H(z)$ 的极点分别为 $0,-\frac{1}{5}$,均落在单位圆内,所以系统稳定。

(4) 由于系统为零状态,则

$$y(k)=x(k)*h(k)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega k}\cdot H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

而

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=H(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}=15\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}-65+\frac{66}{1+\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

所以

$$y(k)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega k}\left(15\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}-65+\frac{66}{1+\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}\right)\varepsilon(k)$$

信号与线性系统硕士研究生入学考试模拟试题

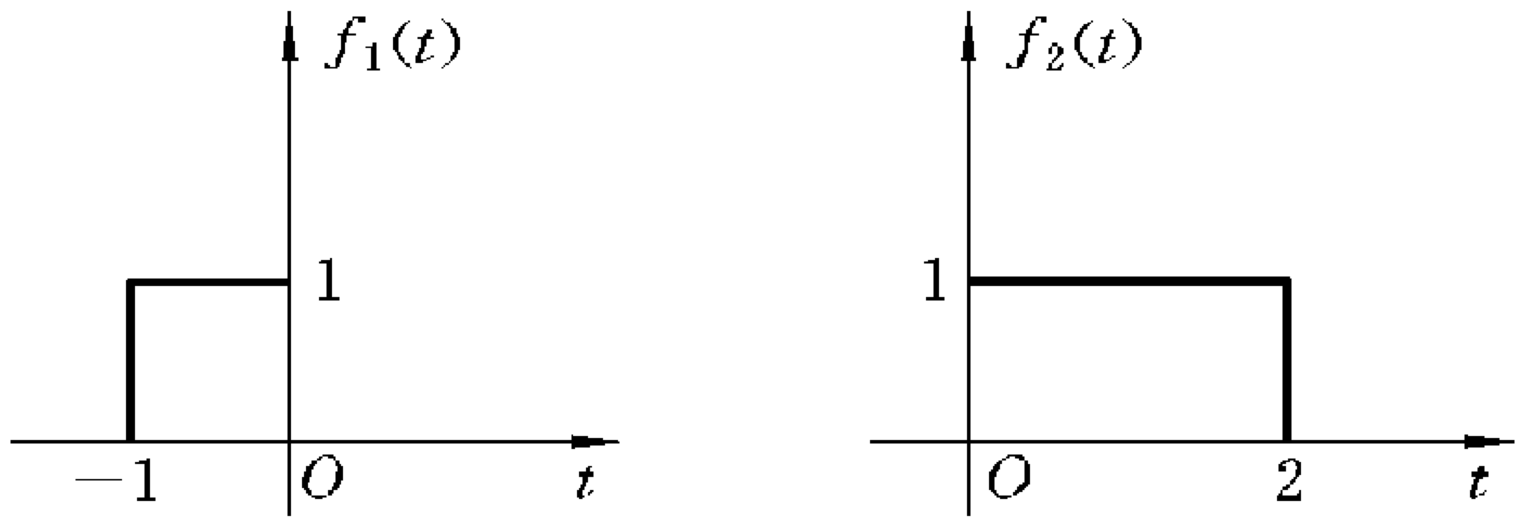
一、(22 分)简答题：

1. (4 分)画出函数 $\delta'(\sin(\pi t))$ 的波形。

2. (4 分)求函数 $f(t)=\varepsilon\left(\dfrac{t}{2}-1\right)$ 的傅里叶变换。

3. (4 分)求序列 $f(k)=|k-3|\varepsilon(k)$ 的 z 变换。

4. (6 分)$f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 波形如图附Ⅱ-1 所示，试利用卷积的性质，画出 $f_1(t)*f_2(t)$ 的波形。



图附Ⅱ-1

5. (4 分)说明系统函数为

$$H(s)=\frac{s^2+6}{s^5+s^4+3s^3+3s^2+2s+2}$$

的系统的稳定性。

二、(8 分)判断并说明理由：

1. (2 分) $r(t)=T[e(t)]=ae(t)+b$ 是否为线性系统？

2. (2 分) $r(t)=T[e(t)]=te(t)$ 是否为非时变系统？

3. (2 分) $r(t)=T[e(t)]=\mathrm{e}^{e(t)}$ 是否为稳定系统？

4. (2 分) $r(t)=T[e(t)]=e(t-2)$ 是否为因果系统？

三、(10 分)求象函数 $F(s)=\dfrac{(s^2+1)+(s^2-1)\mathrm{e}^{-s}}{s^2(1+\mathrm{e}^{-s})}$ 的拉普拉斯反变换。

四、(10 分)设 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\mathrm{j}\omega)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(at+b)$ 的傅里叶变换以及 $F(0)$、$f(0)$。

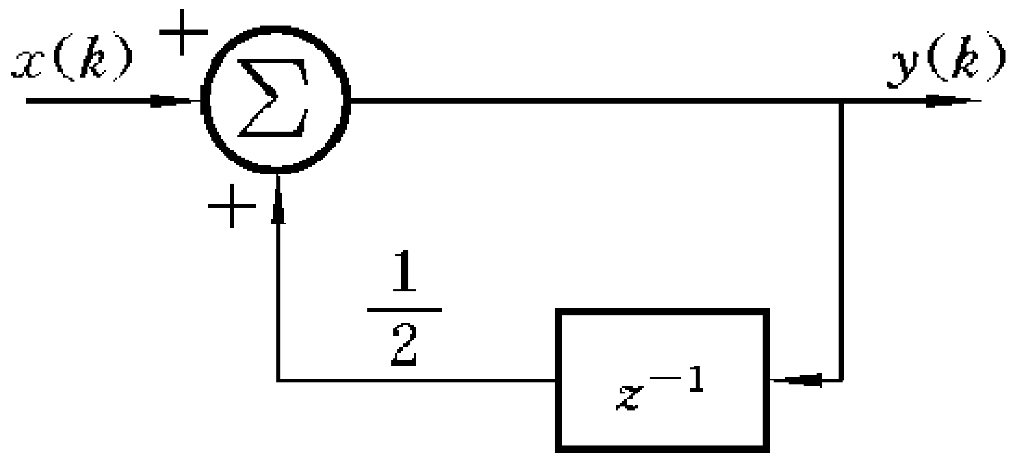
五、(10 分)证明 $f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$，并计算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\delta(t)\right]$。

六、(15 分)已知LTI 系统的冲激响应 $h(t)=\delta(t)-4\mathrm{e}^{-t}(\cos t-\sin t)\varepsilon(t)$。试求：

(1) 系统电压传输比 $H(s)$ 的表达式，画出其极零图；

(2) 求该系统的幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 和相频响应 $\varphi(\omega)$ 的表达式，并画出其示意图，该系统属于何种系统？求 $h(0^+)$ 为何值，并讨论系统因果性与稳定性。

七、(15 分)已知图附Ⅱ-2 所示离散系统模型，



图附Ⅱ-2

(1) 写出描述系统的差分方程；

(2) 设此系统为因果系统，求单位冲激响应 $h(k)$、系统函数 $H(z)$；

(3) 若 $x(k)=(\frac{1}{3})^k\varepsilon(k-1)$，求零状态响应 $y(k)$；

(4) 在 z 平面上画出 $H(z)$ 的零、极点分布图，设加于此系统的离散信号时间间隔为 $T=1$，画出系统的幅频响应特性图。

八、(10 分)已知某系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}f(k)$$

$$y(k)=[1\quad 1]\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}$$

当 $k\geqslant 0$，　$f(k)=0$ 时，　$y(k)=8(-1)^k-5(-2)^k$，求常数 a,b。

信号与线性系统硕士研究生入学考试模拟试题解答

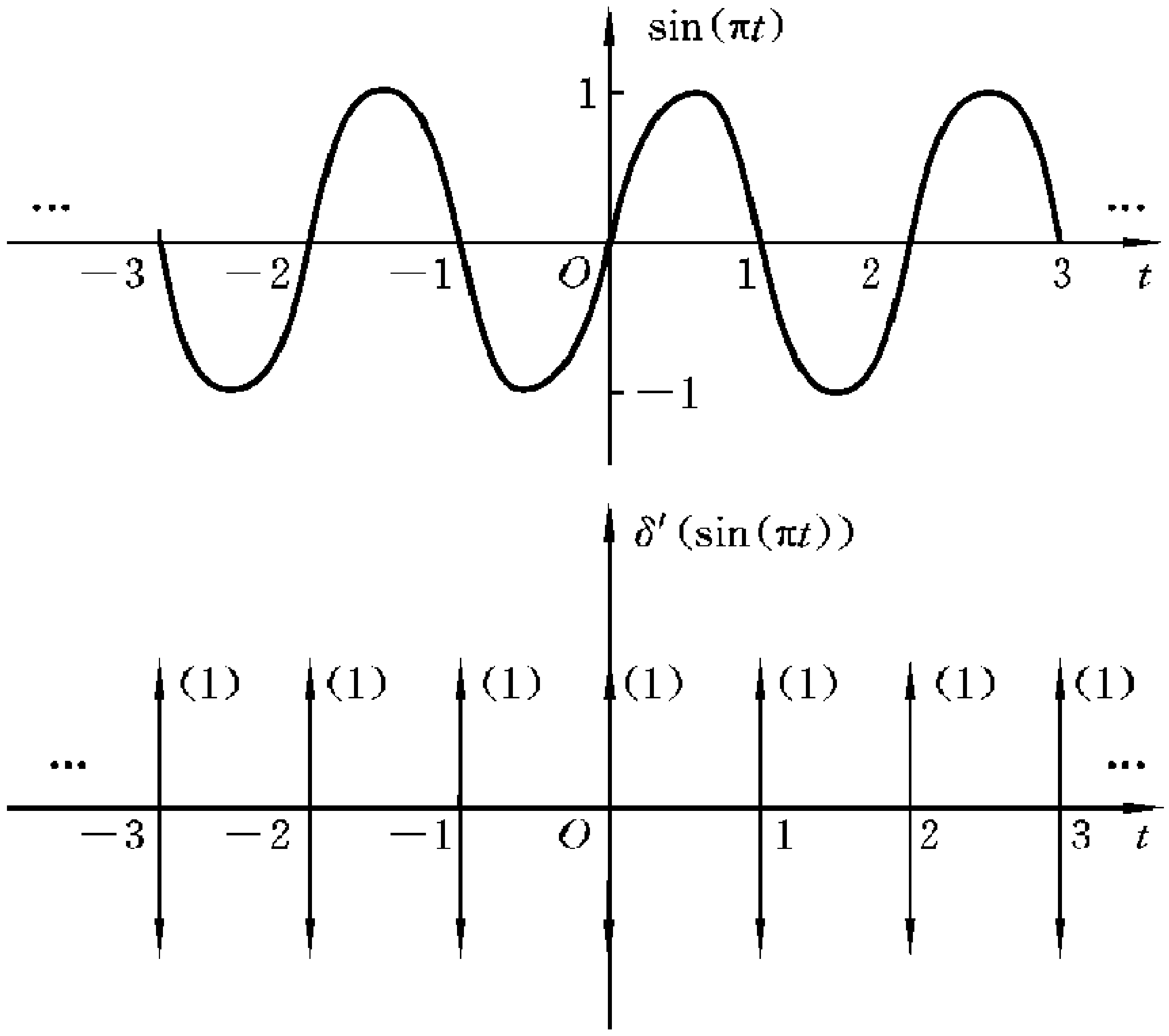
一、

1. $\delta'(\sin(\pi t))$ 的波形如图附Ⅱ-3 所示。

2. 已知

$$\varepsilon(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

由傅里叶变换的尺度变换性质有



图附Ⅱ-3

$$\varepsilon\left(\frac{t}{2}\right)\leftrightarrow 2\left[\pi\delta(2\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}2\omega}\right]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

$$\varepsilon\left(\frac{t}{2}-1\right)\leftrightarrow\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

3．根据z变换定义，有

$$\mathscr{Z}\{|k-3|\varepsilon(k)\}=\sum_{k=0}^{+\infty}|k-3|z^{-k}=3+2z^{-1}+z^{-2}+\sum_{k=3}^{+\infty}|k-3|z^{-k}$$

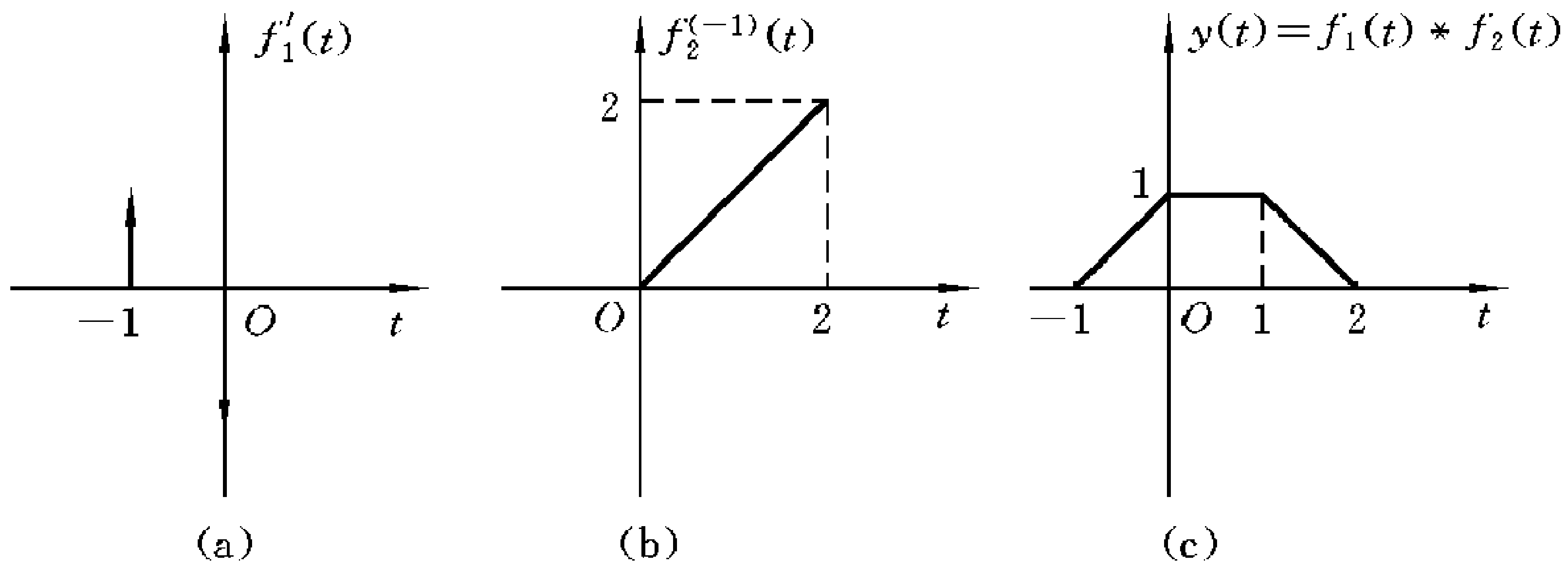
为了将上式第四项(和式项)变换成可直接应用幂级数求和公式的形式，令$m=k-3$，即$k=m+3$，于是有

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}\{|k-3|\varepsilon(k)\}&=3+2z^{-1}+z^{-2}+\sum_{m=0}^{+\infty}mz^{-(m+3)}\\&=3+2z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}\sum_{m=0}^{+\infty}mz^{-m}\\&=3+2z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{3z^4-4z^3+2}{z^2(z-1)^2}\end{aligned}$$

4．根据卷积性质

$$f_1(t) * f_2(t) = \frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t} * \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

先作出 $f'_1(t)$ 的波形，如图附Ⅱ-4(a)所示，再作出 $f_2^{(-1)}(t)$ 的波形，如图附Ⅱ-4(b)所示，最后得 $f_1(t) * f_2(t)$ 的波形，如图附Ⅱ-4(c)所示。



图附Ⅱ-4

5. 罗斯-霍维茨阵列

s^5	1	3	2
s^4	1	3	2
s^3	0	0	0

由罗斯-霍维茨阵列可见第三行全为零元素，第二行的最高幂次项为 s^4，于是构成辅助多项式 $p(s)=s^4+3s^2+2$，并以 $\frac{\mathrm{d}p(s)}{\mathrm{d}s}=4s^3+6s$ 的系数组成全零行(s^3 行)的系数，再按原排列方法继续排列下去，可得

s^5	1	3	2
s^4	1	3	2
s^3	4	6	0
s^2	$\frac{3}{2}$	4	0
s^1	$\frac{2}{3}$	0	0
s^0	4	0	0

由此可知，第一列元素的符号没有改变，故肯定该系统在 s 平面的右半开平

面上无极点。今令$p(s)=s^4+3s^2+2=0$,可得$s_{1,2}=\pm \mathrm{j}$,$s_{3,4}=\pm \mathrm{j}\sqrt{2}$,故系统是临界稳定的。

二、

1. $T[k_1e_1(t)+k_2e_2(t)]=a[k_1e_1(t)+k_2e_2(t)]+b$ ①

$k_1r_1(t)+k_2r_2(t)=k_1[ae_1(t)+b]+k_2[ae_2(t)+b]$ ②

易见①≠②,不满足齐次性与叠加性,所以系统为非线性系统。

2. $T[e(t-t_0)]=te(t-t_0)$ ①

$r(t-t_0)=(t-t_0)e(t-t_0)$ ②

易见①≠②,不满足系统时不变性质,所以该系统为时变系统。

3. 若$|e(t)|<M$,则$|\mathrm{e}^{e(t)}|<+\infty$,所以系统稳定。

4. 因为输出信号仅取决于输入过去时刻的值,不取决于输入未来时刻的值,所以系统为因果系统。

三、

将$F(s)=\dfrac{(s^2+1)+(s^2-1)\mathrm{e}^{-s}}{s(1+\mathrm{e}^{-s})}$进行部分分式展开,可得

$$F(s)=1-\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^2(H\mathrm{e}^{-s})}=1-\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^2}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{1-\mathrm{e}^{-2s}}$$

其中
$$\mathscr{L}^{-1}\{1\}=\delta(t),\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t\varepsilon(t)$$

$\dfrac{1-\mathrm{e}^{-s}}{1-\mathrm{e}^{-2s}}$可看成$\dfrac{F_1(s)}{1-\mathrm{e}^{-2s}}$,其中

$$F_1(s)=1-\mathrm{e}^{-s}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\}=\delta(t)-\delta(t-1)=f_1(t)$$

所以$\dfrac{1-\mathrm{e}^{-s}}{1-\mathrm{e}^{-2s}}$的原函数$g(t)$是一将$f_1(t)$以2为周期进行周期延拓的有始周期函数,即

$$g(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{1-\mathrm{e}^{-2s}}\right\}=\sum_{n=0}^{+\infty}f_1(t-2n)$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}[\delta(t-2n)-\delta(t-2n-1)]$$

由时域卷积定理得

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{1-\mathrm{e}^{-2s}}\right\}=2t\varepsilon(t)*g(t)$$

$$=2\sum_{n=0}^{+\infty}\{t\varepsilon(t)*[\delta(t-2n)-\delta(t-2n-1)]\}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}[2(t-2n)\varepsilon(t-2n)-2(t-2n-1)\varepsilon(t-2n-1)]$$

所以 $f(t)=\delta(t)-t\varepsilon(t)+\sum_{n=0}^{+\infty}[2(t-2n)\varepsilon(t-2n)-2(t-2n-1)\varepsilon(t-2n-1)]$

四、

已知 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$

由傅里叶变换的尺度变换性质有

$$f(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F\left(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{a}\right)$$

由傅里叶变换的时移性质有

$$f\left[a\left(t+\frac{b}{a}\right)\right]\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F\left(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{a}\right)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{b}{a}}$$

由傅里叶变换的时移微分性质有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(at+b)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F\left(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{a}\right)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{b}{a}}\cdot\mathrm{j}\omega$$

因为
$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

所以令 $\omega=0$,得
$$F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$$

因为
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\omega)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

所以令 $t=0$,得
$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega$$

五、

因为　$[f(t)\delta(t)]'=f'(t)\delta(t)+f(t)\delta'(t)$

所以　$[f(0)\delta(t)]'=f'(0)\delta(t)+f(t)\delta'(t)$

$f(0)\delta'(t)=f'(0)\delta(t)+f(t)\delta'(t)$

故
$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$$

利用上述结果得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\delta(t)\right]=\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\delta'(t)-\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\delta(t)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\delta'(t)+\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\delta(t)-\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\delta(t)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\delta'(t)$$

六、

(1) 由 $h(t)=\delta(t)-4\mathrm{e}^{-t}(\cos t-\sin t)\varepsilon(t)$

有
$$H(s)=1-\frac{4(s+1)}{(s+1)^2+1}+\frac{4}{(s+1)^2+1}=\frac{(s-1)^2+1}{(s+1)^2+1}$$
其零点为 $z_{1,2}=1\pm\mathrm{j}$，极点为 $p_{1,2}=-1\pm\mathrm{j}$，极零图如图附Ⅱ-5(a)所示。

(2) $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{(\mathrm{j}\omega-1)^2+1}{(\mathrm{j}\omega+1)^2+1}=\dfrac{2-\omega^2-2\mathrm{j}\omega}{2-\omega^2+2\mathrm{j}\omega}$

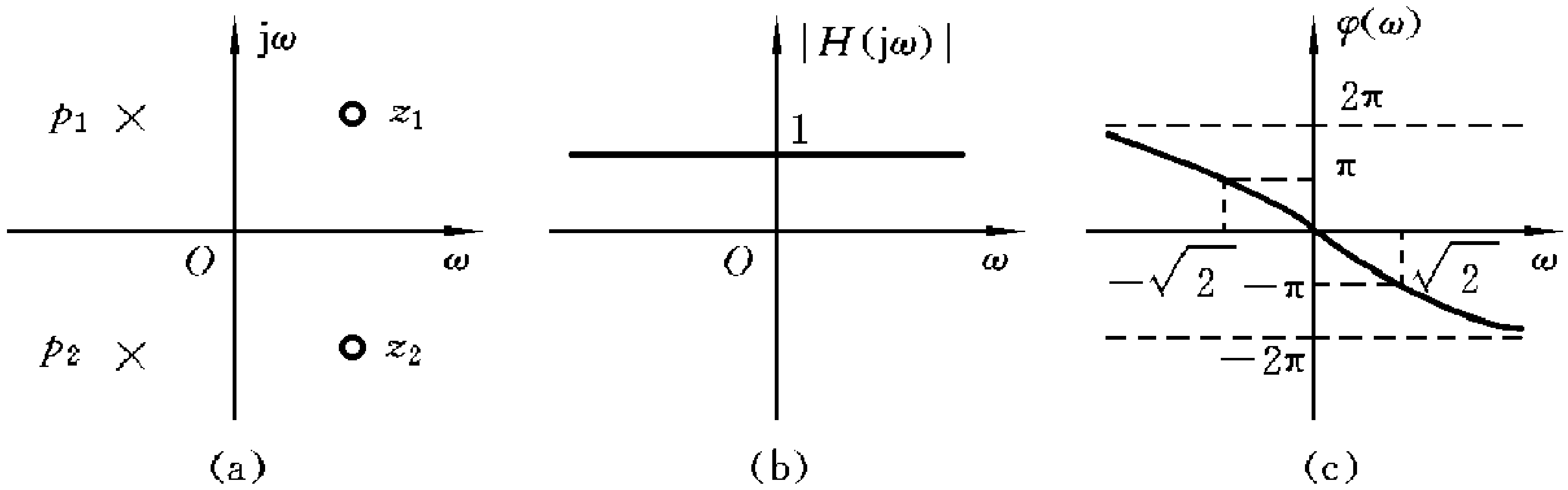
$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\sqrt{\frac{(2-\omega^2)^2+(-2\omega)^2}{(2-\omega^2)^2+(2\omega)^2}}=1$$

$$\varphi(\omega)=\mathrm{ang}H(\mathrm{j}\omega)=-2\arctan\frac{2\omega}{2-\omega^2}$$

$|H(\mathrm{j}\omega)|$、$\varphi(\omega)$ 如图附Ⅱ-5(b)、(c)所示。

$$h(0^+)=\lim_{s\to\infty}sH(s)=\infty$$

系统的极点在左半平面，收敛域为 $\sigma>-1$，收敛域包含 $\mathrm{j}\omega$ 轴，故系统是稳定的；又由于收敛域包含 $\sigma\to+\infty$，故系统是因果的。



图附Ⅱ-5

七、

(1) 根据离散系统的模型，系统的差分方程为

$$y(k)-\frac{1}{2}y(k-1)=x(k)$$

(2) 对该系统差分方程在零状态情况下取 z 变换

$$Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)=X(z)$$

可得系统函数

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}},|z|>\frac{1}{2}$$

单位冲激响应

$$h(k)=\mathscr{Z}^{-1}\{H(z)\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\varepsilon(k)$$

(3) $x(k)=\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\varepsilon(k-1)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\varepsilon(k-1)$

则　$X(z)=\frac{1}{3}\frac{1}{z-\frac{1}{3}},|z|>\frac{1}{3}$

此时

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{1}{3}\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}=2\left[\frac{z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{z}{z-\frac{1}{3}}\right],$$

$|z|>\frac{1}{2}$

所以,零状态响应为

$$y(k)=2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\right]\varepsilon(k)$$

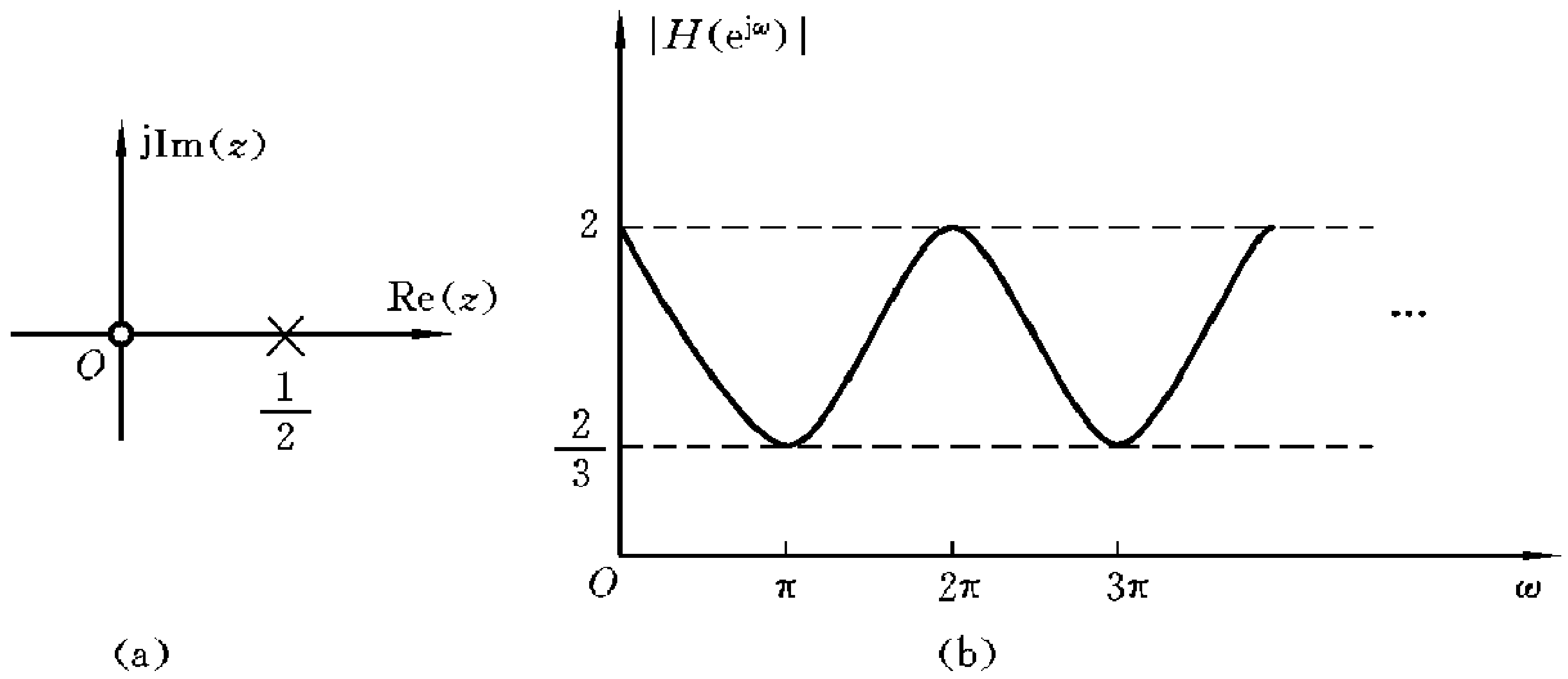
(4) $H(z)$的零、极点分布图如图附Ⅱ-6(a)所示。

系统的极点分布于单位圆内,该系统为稳定系统,其频响特性为

$$H(e^{j\omega})=H(z)|_{z=e^{j\omega}}=\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-\frac{1}{2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos\omega+j\frac{1}{2}\sin\omega}$$

幅频特性为

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}-\cos\omega}}$$



图附Ⅱ-6

相频特性为

$$\varphi(\omega)=-\arctan\left[\frac{\frac{1}{2}\sin\omega}{1-\frac{1}{2}\cos\omega}\right]$$

幅频特性如图附Ⅱ-6(b)所示。

八、

因为当$k\geqslant 0, f(k)=0$时，

$$y(k)=8(-1)^k-5(-2)^k$$

故系统的特征根为-1和-2,特征方程为

$$(z+1)(z+2)=z^2+3z+2$$

由

$$|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} z-1 & 2 \\ -a & z-b \end{vmatrix}$$

$$=z^2-(b+1)z+b+2a=z^2+3z+2$$

得

$$a=3,\quad b=-4$$