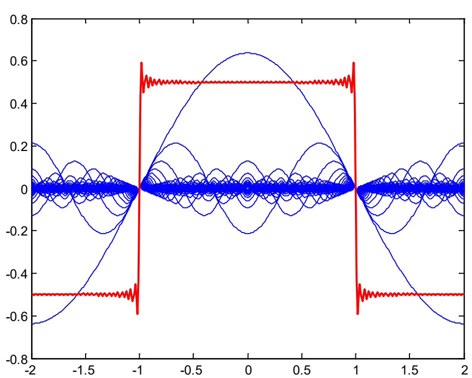
信号与系统

第7讲 傅里叶变换的性质及其应用

郭红星

华中科技大学计算机学院

May 7, 2020



上一讲内容回顾

- 频谱的概念
- 典型周期信号的频谱分析
- 非周期信号的傅里叶变换
- 典型非周期信号的频谱分析
- **傅里叶变换尺度性质的科学及工程意义**

本讲内容

- 傅里叶变换的基本性质
  - 线性性
  - 对称性
  - 时移特性和频移特性
  - 微分和积分特性
  - 卷积定理
  - Paseval定理
  - 奇偶虚实性—结合课本自学

- 学习目标
  - ✓ 熟悉基本性质所揭示的时频对应关系，初步探讨部分性质的应用
  - ✓ 体验傅里叶正反变换的对称美

3.5 傅里叶变换的几个基本性质及其应用

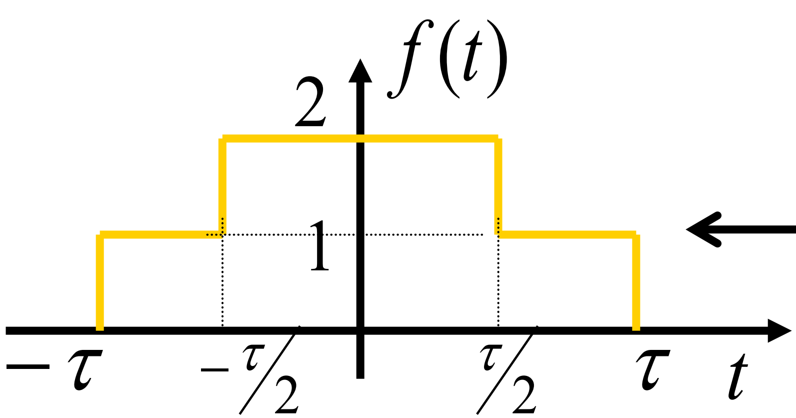
线性性及应用

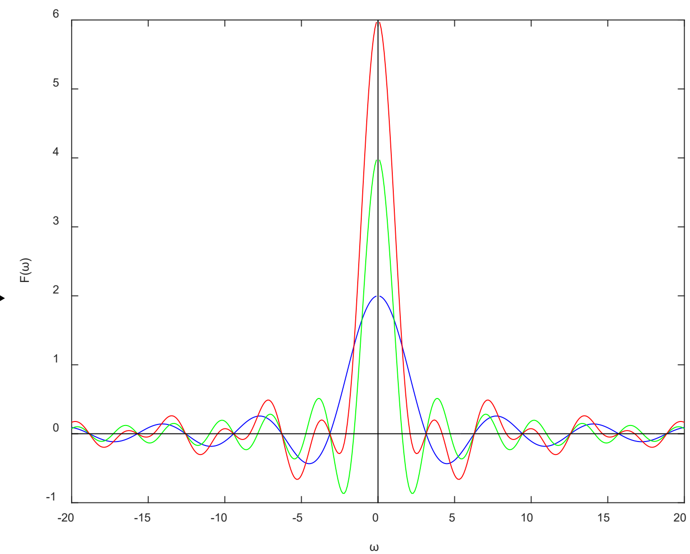
若: $f_i(t) \leftrightarrow Fi(\omega)$

则: $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i F_i(\omega)$

例题1：求$f(t)$的傅里叶变换。

$f(t)=[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]+[u(t+\tau)-u(t-\tau)] \longleftrightarrow F(\omega)=\tau[Sa(\omega\tau/2)+2Sa(\omega\tau)]$





对称性

若：$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则：$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

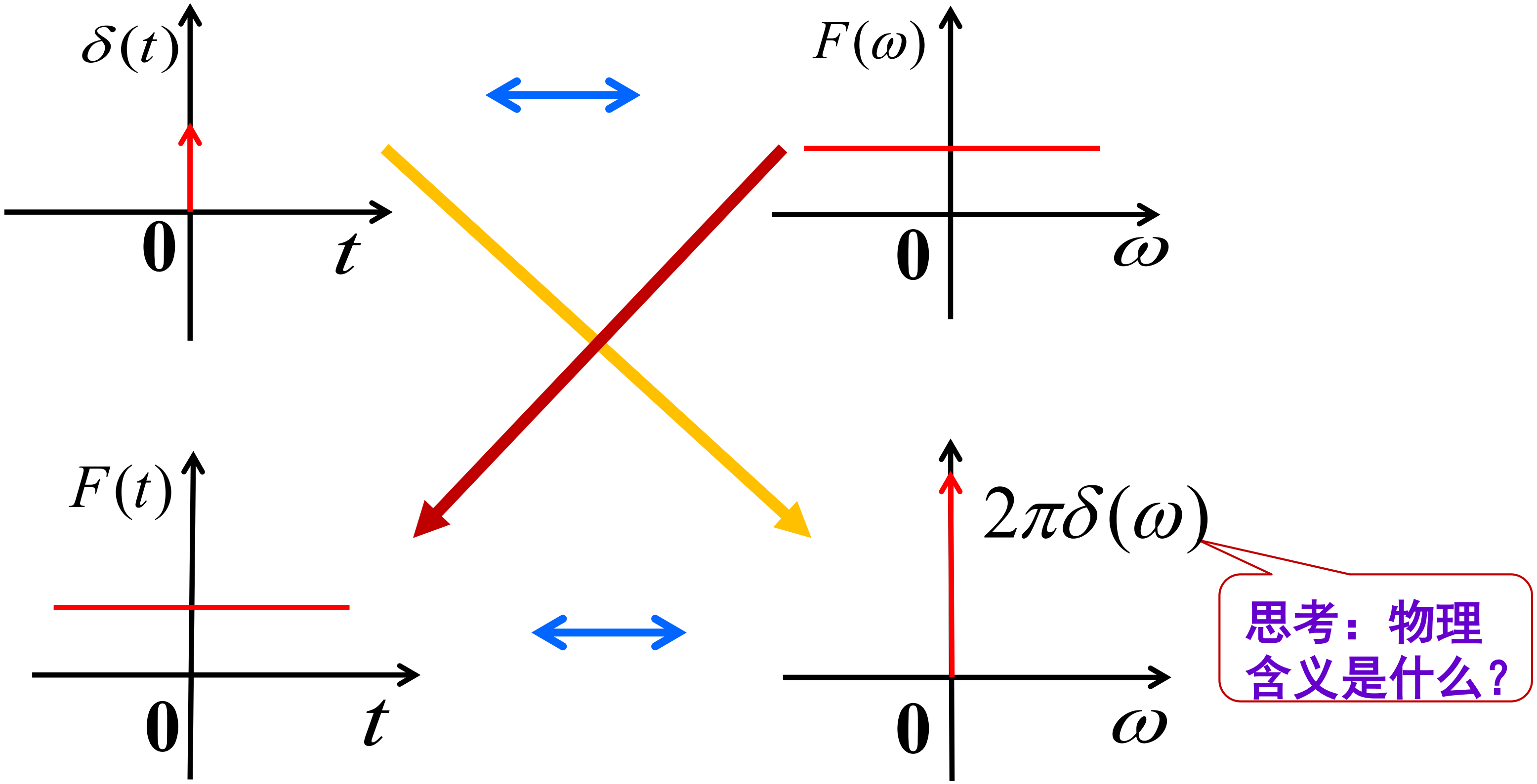
若$f(t)$为**偶函数**，则：

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$$

▪证明见p131－132

对称性－ $f(t)$为偶函数

- 若$f(t)$为偶函数，则时域和频域完全对称



- 直流和冲激信号的频谱的对称性是一例子

利用对称性求傅里叶变换

例题2：求$\frac{1}{t^2+1}$的傅里叶变换。

解：P113有 $$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{1}{1+\omega^2}$$

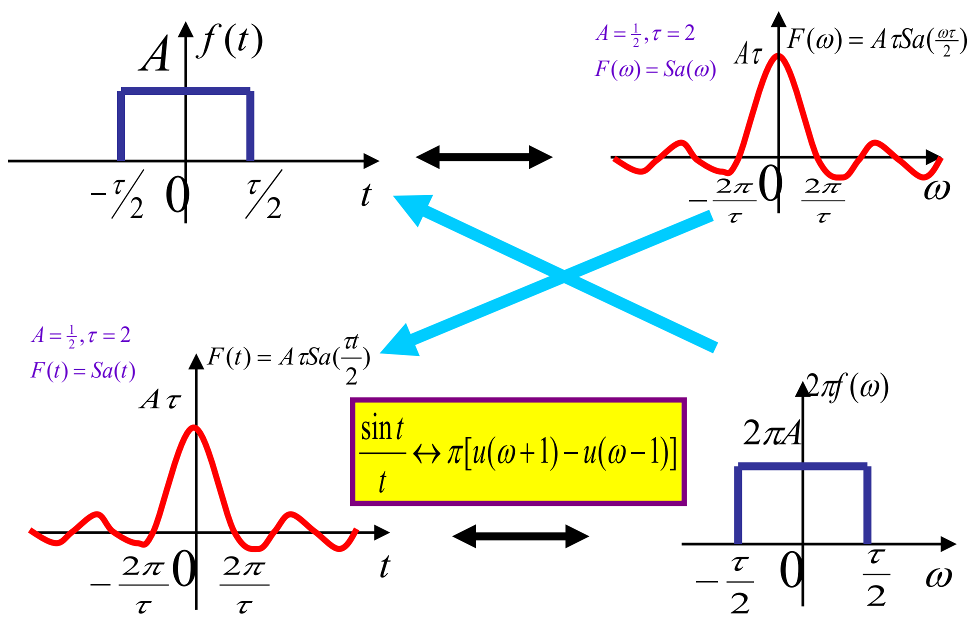
$$\therefore \frac{1}{t^2+1} \leftrightarrow 2\pi\frac{1}{2}e^{-|\omega|} = \pi e^{-|\omega|}$$

利用对称性求傅里叶变换及应用

例题3：试求信号$\dfrac{\sin t}{t}$的傅里叶变换

解：若直接用 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin t}{t}e^{-j\omega t}dt$ **是不容易的！**

- **这里可考虑用对称性来求解。**



- **我们也可以用此来求** $S_a=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin at}{t}dt$

$$S_a=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin at}{at}d(at)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}d(x)$$

- **上式是$\dfrac{\sin t}{t}$的傅里叶变换**

$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin t}{t}e^{-j\omega t}dt$在ω=0处的值

$$\therefore S_a=F(j\omega)\Big|_{\omega=0}=\pi$$

时移特性

若： $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则： $f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$

证明： $FT[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t}dt$

令 $x = t - t_0$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x+t_0)}d(x+t_0)$$

$$= e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx = e^{-j\omega t_0}F(\omega)$$

$$f(at - t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

带尺度变换的时移特性

频移特性(p125-126)

若: $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则: $f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega-\omega_0)$

频移性质在网络通信系统中有非常重要的应用，从下面的讨论出发，帮助大家初步认识这一点。

- 声音信号能直接发送吗？
- 直接发送引起的问题
  - 功率太大
  - 速度太慢
  - 相互干扰太厉害
  - ……

频移特性的应用：调制(幅)

调制信号

$g(t) \rightarrow$ 相乘 $\rightarrow f(t) = g(t)\cos\omega_0 t$

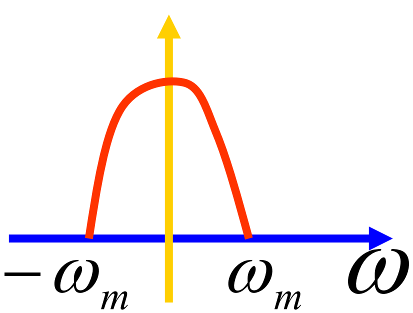
$\cos\omega_0 t$

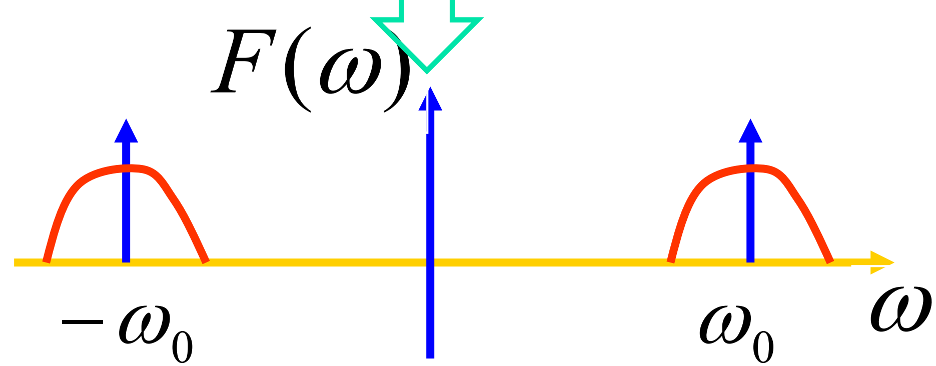
载波信号

$g(t) \leftrightarrow G(\omega)$

利用频移性质

$$F(\omega) = \frac{1}{2}[G(\omega+\omega_0) + G(\omega-\omega_0)]$$





卷积定理

1. 时域卷积定理

若: $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$; $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则: $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow ?\ F_1(\omega) \bullet F_2(\omega)$

证明:见P144

2. 频域卷积定理

若: $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$; $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则: $f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$

- 时域中两信号卷积的傅里叶变换，为频域中它们频谱的乘积
- 时域中两信号乘积的傅里叶变换，为频域中它们频谱的卷积

频域卷积性质的证明

$$\because FT[f_1(t)\bullet f_2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\bullet f_2(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\boxed{f_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)e^{jut}du}$$

■代入上式得：

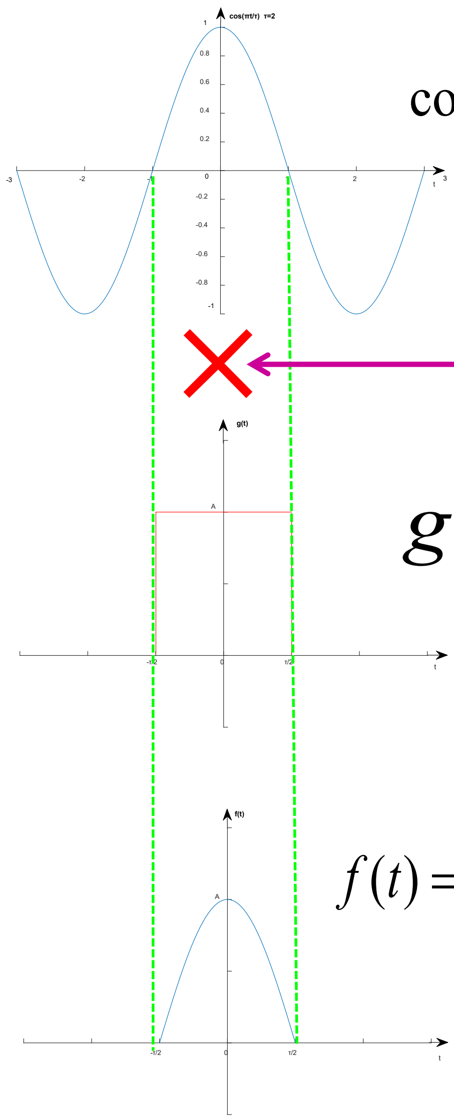
$$FT[f_1(t)f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)du[f_2(t)e^{jut}]e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)du\underline{\int_{-\infty}^{\infty}[f_2(t)e^{jut}]e^{-j\omega t}dt}$$

利用频移性质

$$\therefore FT[f_1(t)f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)F_2(\omega-u)du$$

例4：求单个余弦脉冲的频谱

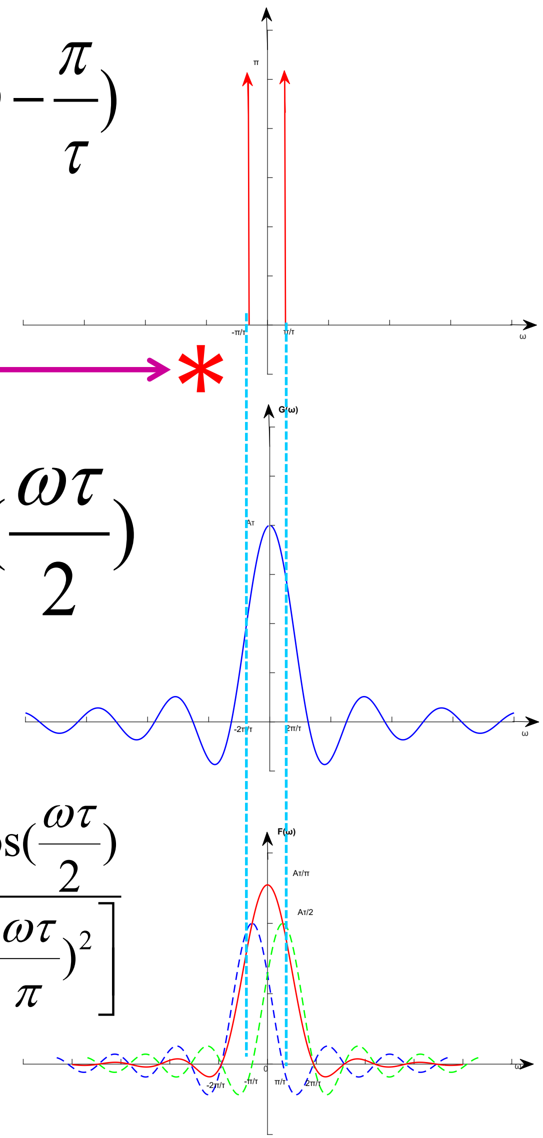


$$\cos\frac{\pi t}{\tau} \longleftrightarrow \pi\delta(\omega+\frac{\pi}{\tau})+\pi\delta(\omega-\frac{\pi}{\tau})$$

周期信号的傅里叶变换

$$g(t) \longleftrightarrow G(\omega)=A\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$f(t)=g(t)\cdot\cos\frac{\pi t}{\tau} \longleftrightarrow F(\omega)=\frac{2A\tau\cos(\frac{\omega\tau}{2})}{\pi\left[1-(\frac{\omega\tau}{\pi})^2\right]}$$



(题3－16b)

3.6 傅里叶变换的微积分性质及其应用

傅里叶变换的微分特性

A. 时间微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $\dfrac{df(t)}{dt} \leftrightarrow ?\ j\omega F(\omega)$

及 $\dfrac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$

B.频率微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $(-jt)f(t)? \leftrightarrow \dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$

及 $(-jt)^n f(t) \leftrightarrow \dfrac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$

- 证明见p133

频率微分特性的应用

例题5：求t的傅里叶变换。

注：此例再次说明，绝对可积是傅里叶变换存在的充分而非必要条件

解： $$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$(-jt)\cdot 1 \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}[2\pi\delta(\omega)]$$

$$\therefore t \leftrightarrow 2\pi j\delta'(\omega)$$

$$f(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

时域积分特性

若：$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow ?F(\omega)$

- **推导**：令 $g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ 或 $\dfrac{dg(t)}{dt}=f(t)$

思考：此积分的常数项值？

两个公式互推的条件，即公式A成立的前提条件是$g(t)$不含常数项

若$g(t)$满足狄氏条件,即：$g(t) \leftrightarrow G(j\omega)$

则$f(t) \leftrightarrow j\omega G(j\omega)$, 即：$F(j\omega)=j\omega G(j\omega)$

公式A

$$\therefore \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}F(j\omega)$$

公式B

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}F(j\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$$

正确吗？用δ(t)和u(t)验证

联系：卷积的微分和积分性质也存在类似的问题！

借助卷积定理导出时域积分特性

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = f(t)*u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow F(j\omega)[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)]$$

公式B

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}F(j\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

对应$f(t)$的直流分量

例题6：P152 3.17(a)

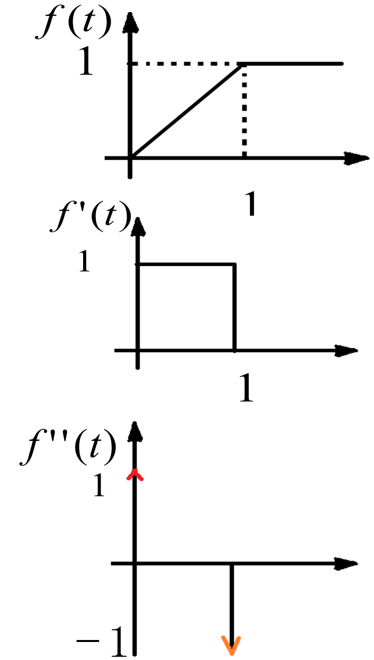
解： $f(t)=t[u(t)-u(t-1)]+u(t-1)$

$$f'(t)=u(t)-u(t-1)$$

$$f''(t)=\delta(t)-\delta(t-1)$$

$$FT\{f''(t)\}=1-e^{-j\omega}\big|_{\omega=0}=0$$

$$FT[f'(t)]=\frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega}\bigg|_{\omega=0}=1$$



$$\therefore F(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega}}{(j\omega)^2}+\pi\cdot 1\cdot\delta(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1-e^{-j\omega}}{(j\omega)^2}$$

$$=\pi\delta(\omega)+e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(\frac{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}{(j\omega)^2}\right)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}sa\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\frac{\omega}{2}}$$

思路：要求某信号的FT，先求其若干阶导数的FT，然后再利用公式B反推

频域积分性质及应用

若：$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 根据**对称法则**，不难得到：

$$\frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(v)dv$$

类似时域积分性质，借助频域卷积定理证明

例题7：求$\frac{1}{t}$的傅里叶变换。

$$\because f(t) = 1, f(0) = 1, f(t) \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\therefore \pi f(0)\delta(t) + \frac{f(t)}{-jt} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} 2\pi\delta(v)dv = 2\pi u(\omega)$$

$$\pi\delta(t) + \frac{1}{-jt} \leftrightarrow 2\pi u(\omega) \Rightarrow \frac{1}{t} \leftrightarrow -j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

Pasevalå®šç†æˆ–Pasevalæ’ç‰å¼

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt \quad ? \quad \int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega$$

ä½ èƒ½æ ¹æ®å¯¹ç§°æ³•åˆ™çŒœå‡ºå—ï¼Ÿ

ç”±å·ç§¯å®šç†å¾—ï¼š $FT[f_1(t)\bullet f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$

ä¸å¦¨ä»¤ä¸Šå¼ä¸ $f_1(t) = f(t); f_2(t) = f^*(t)$

ç”±å¥‡å¶è™šå®žæ€§çŸ¥ $f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega)$

Paseval定理或Paseval恒等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)F^*(-(\omega-u))du$$

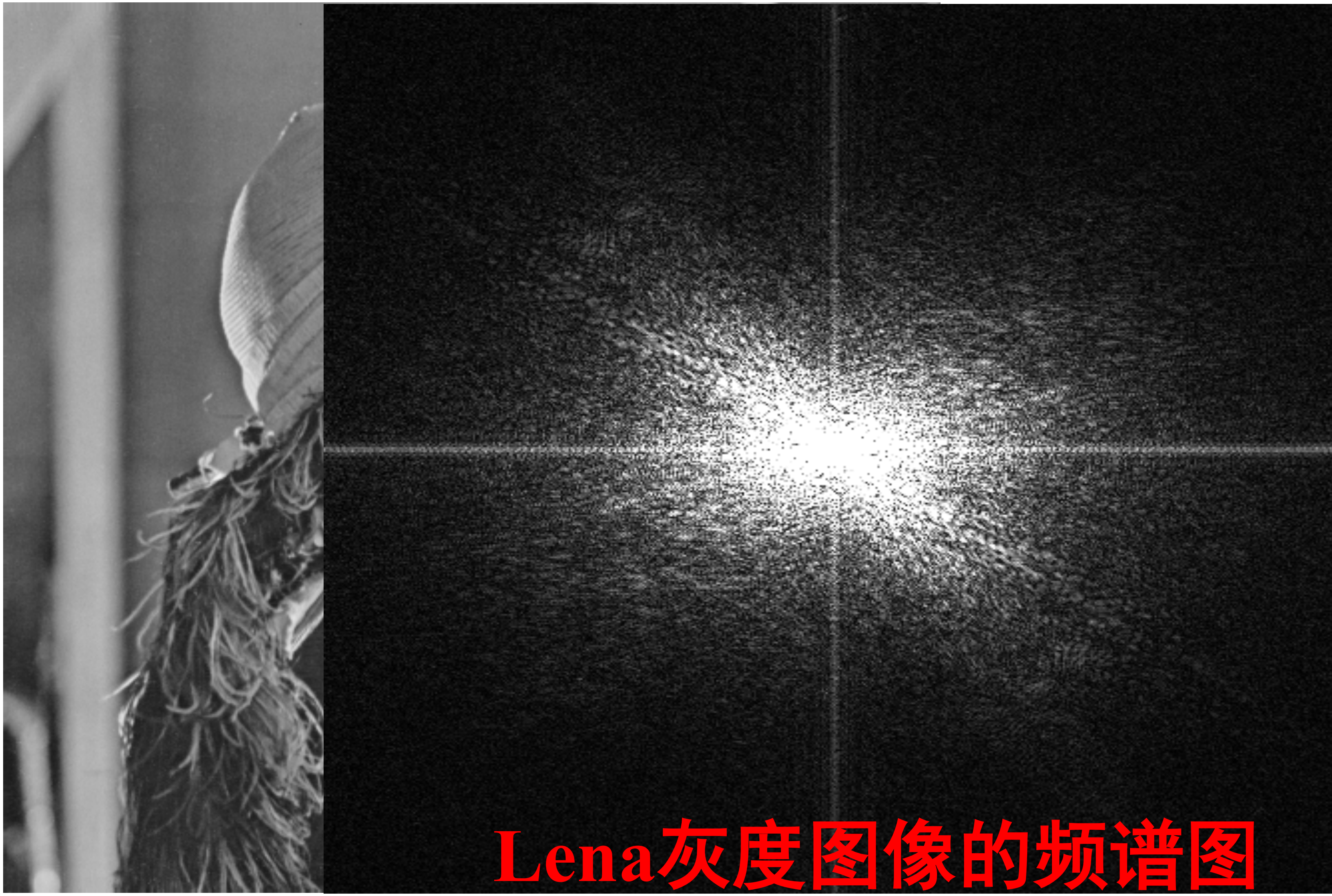
- 上式对任意的ω都成立，不妨取$\omega=0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)F^*(u)du$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 d\omega}$$

再次体现
对称之美！

能量守恒定理的应用意义



小结

- 傅里叶变换的线性性、对称性、时移和频移特性为信号与系统分析提供了重要工具
- 傅里叶变换的卷积定理、微积分性质将时/频域的复杂运算转化为对应的频/时域的简单乘法运算，极大简化信号与系统分析的求解过程
- 傅里叶变换性质深刻揭示了时域和频域的对应关系，具有重要的理论意义和应用价值，从帕萨瓦尔定理可见一斑
- 初步体验了自然法则的对称之美

课外作业

- 阅读3.8,3.9; 选学3.10;预习:4.1,4.2
- 作业：3.14，3.16(a)图信号，3.24
- 每星期三晚23:59:59前交上星期布置的作业
  - 请按照新版教学指南要求按时上传提交
- 地点:在南一楼中402室
- 课外实践-用Matlab画信号的频谱图

第二周作业情况

- **值得表扬：有43位学生获得通报表扬，其中15位取得满分成绩**
- **存在问题：**
  ① 2.7：不少同学直接得出结果完全没有过程，仍然有部分同学存在计算错误
  ② 2.17：发现有同学做题时，已知条件与书上给出的不一样。可能存在抄袭网上习题集答案的现象（由于书本版本不同，题目内容有改变都不知道，因此错的太明显）
  ③ 补充题：部分同学没有通过图解，讨论卷积计算过程的所有情况，导致遗漏

附录：奇偶虚实性的证明

- 考虑$f(t)$为复函数的一般情形，令$r_f(t)$和$x_f(t)$分别代表其实部和虚部，即：

$$f(t) = r_f(t) + jx_f(t)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [r_f(t) + jx_f(t)]e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} [r_f(t) + jx_f(t)](\cos\omega t - j\sin\omega t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [r_f(t)\cos\omega t + x_f(t)\sin\omega t]dt + j\int_{-\infty}^{\infty} [x_f(t)\cos\omega t - r_f(t)\sin\omega t]dt$$

$$F^*(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [r_f(t)\cos(-\omega t) + x_f(t)\sin(-\omega t)]dt - j\int_{-\infty}^{\infty} [x_f(t)\cos(-\omega t) - r_f(t)\sin(-\omega t)]dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [r_f(t)\cos\omega t - x_f(t)\sin\omega t]dt - j\int_{-\infty}^{\infty} [x_f(t)\cos\omega t + r_f(t)\sin\omega t]dt$$

$$FT[f^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [r_f(t) - jx_f(t)]e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} [r_f(t) - jx_f(t)](\cos\omega t - j\sin\omega t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [r_f(t)\cos\omega t - x_f(t)\sin\omega t]dt - j\int_{-\infty}^{\infty} [x_f(t)\cos\omega t + r_f(t)\sin\omega t]dt$$

$$= F^*(-\omega)$$

$$FT[f^*(t)] = F^*(-\omega)$$

时域共轭
频域反褶并共轭