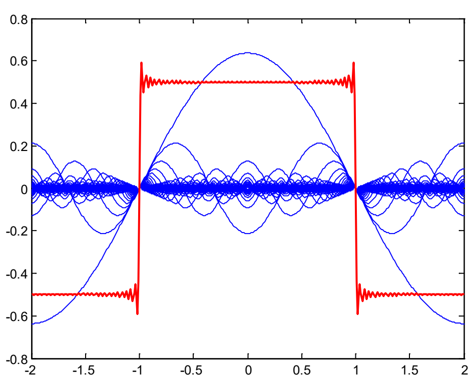
信号与系统

第15讲 DTFT与离散系统的频响

郭红星

华中科技大学计算机学院

June 2, 2020



上次课内容回顾

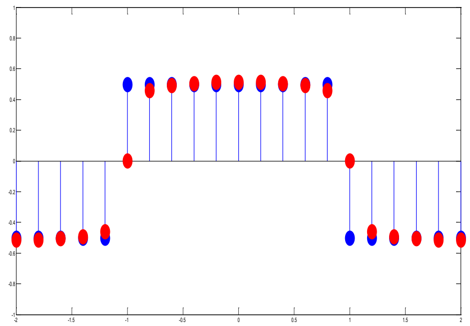
- 反z变换的求解
- 用z变换法求解差分方程，分析系统响应
- 系统函数与系统稳定性

本讲内容

- 离散时间傅里叶变换(DTFT)
- 离散时间系统的频率响应
- 学习目标
  - 从连续信号离散化的角度理解DTFT
  - 掌握通过系统函数勾画频响曲线的几何方法

7.5　离散时间傅里叶变换

信号的频域分析:从连续到离散



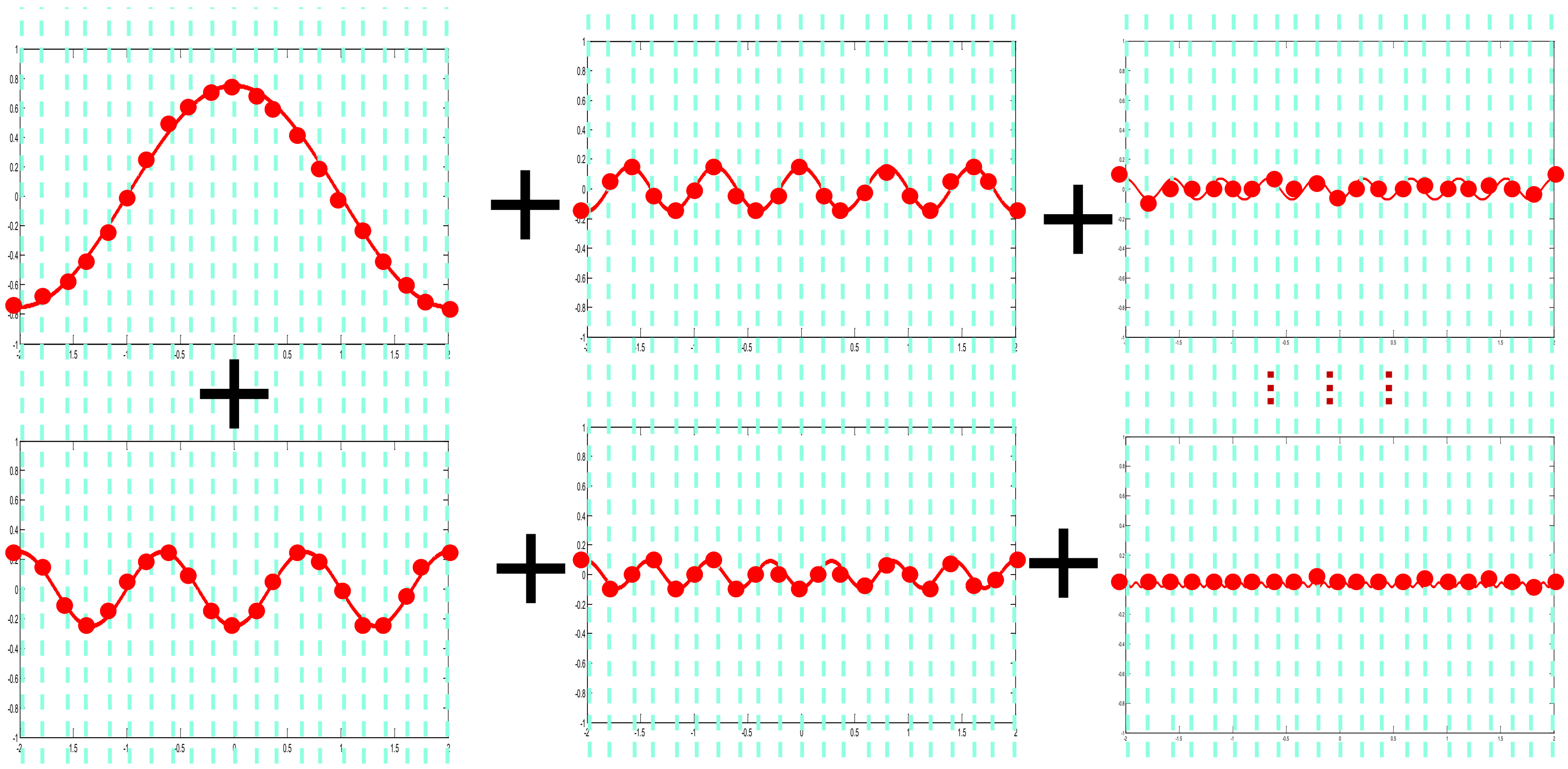
连续时间信号$x(t)$ ⟶ 离散时间信号$x(nT_s)$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$t = nT_s$

采样

$$x(nT_s)=?$$



信号的频域分析:从连续到离散

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt \Longleftrightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \downarrow \sum$

$t\rightarrow nT \quad dt\rightarrow T$

$x(t)\rightarrow x(nT)\rightarrow x(n)$

$e^{j\Omega t}\rightarrow e^{j\Omega nT}\rightarrow e^{j\omega n}$

$\int_{-\infty}^{\infty} \downarrow \int_{-\pi}^{\pi}$

$\because \omega=\Omega T,$

$\therefore d\Omega\rightarrow\frac{1}{T}d\omega$

$$X(j\Omega)\rightarrow T\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-j\omega n}\rightarrow T\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=TX(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n} \Longleftrightarrow x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

离散时间傅里叶正变换

两种变换中的Ω与ω的含义?

离散时间傅里叶反变换

例题1及解答

若$x(n)=u(n)-u(n-5)$,求此序列的傅里叶变换。

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\frac{5}{2}\omega}}{e^{-j\frac{1}{2}\omega}}\left(\frac{e^{j\frac{5}{2}\omega}-e^{-j\frac{5}{2}\omega}}{e^{j\frac{1}{2}\omega}-e^{-j\frac{1}{2}\omega}}\right)$$

$$=e^{-j2\omega}\left[\frac{\sin(\frac{5}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}\right]=\left|X(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

其中，幅频特性为：

$$\left|X(e^{j\omega})\right|=\left|\frac{\sin(\frac{5}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}\right|$$

而相频特性为：

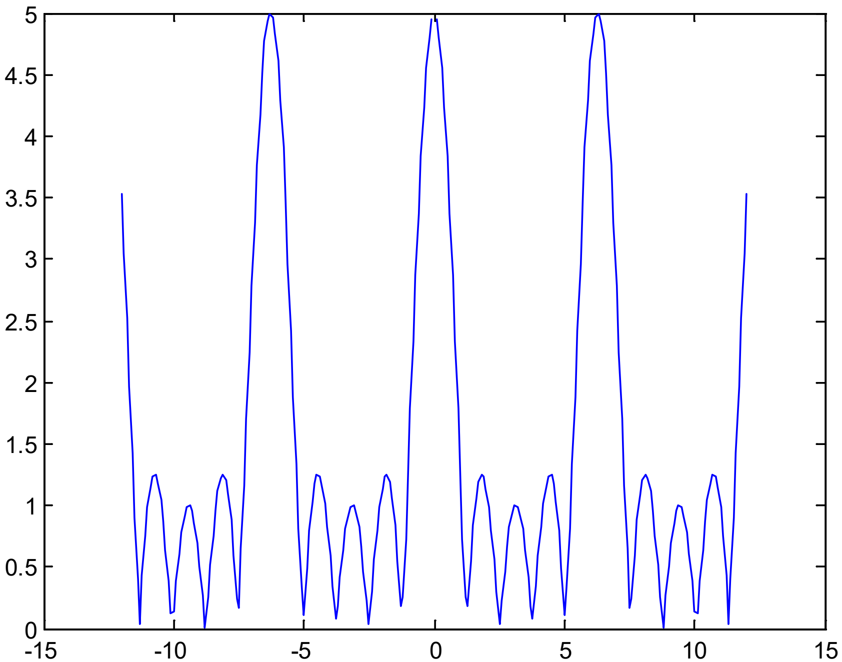
$$\varphi(\omega)=-2\omega+\arg\left[\frac{\sin(\frac{5}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}\right]$$

$0<\omega\leq\pi$

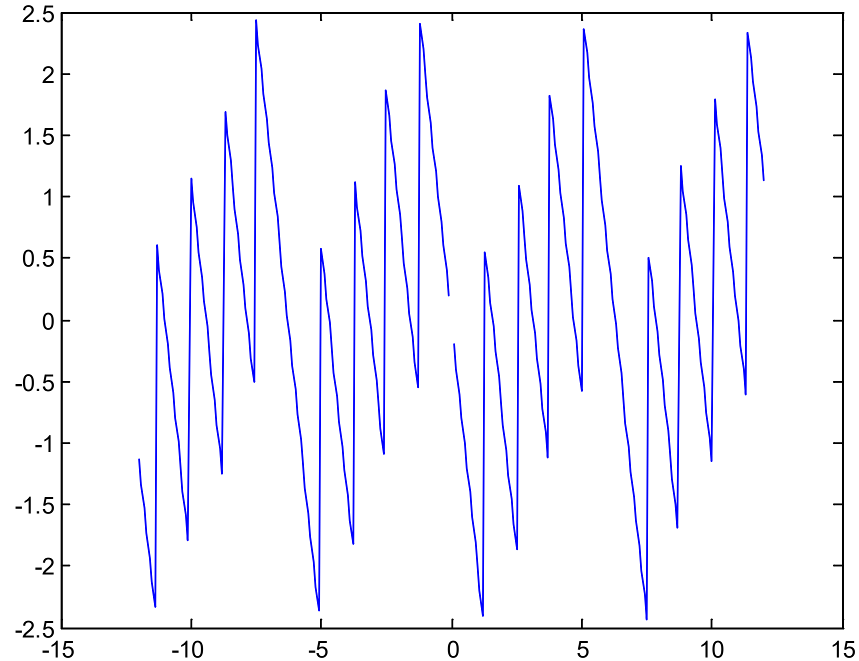
Matlab program

```
k=0;
for w=-12:0.1:12 %角频率
    k=k+1;
    wc(k)=w;%The value of the kth w
    X(k)=exp(-j*2*w)*sin(2.5*w)/sin(0.5*w);
end
%the complex modulus (magnitude)
XA=abs(X);
plot(wc,XA);
%phase angles, in radians
XP=angle(X);
figure,plot(wc,XP);
```

例题1及解答



图：信号$x(n)$的幅度谱图



图：信号$x(n)$的相位谱图

与矩形方波
的谱的联系？

思考：为何
周期为2π？

7.6　离散系统的频响特性

离散时间系统的频率响应

- **复正弦序列作用下系统的响应**

$$x(n)=e^{j\omega_1 n} \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y_{zsr}(n)=h(n)*x(n) \quad ?$$

$$y_{zsr}(n)=\boxed{H(e^{j\omega_1})}e^{j\omega_1 n}$$

输入序列

系统功用

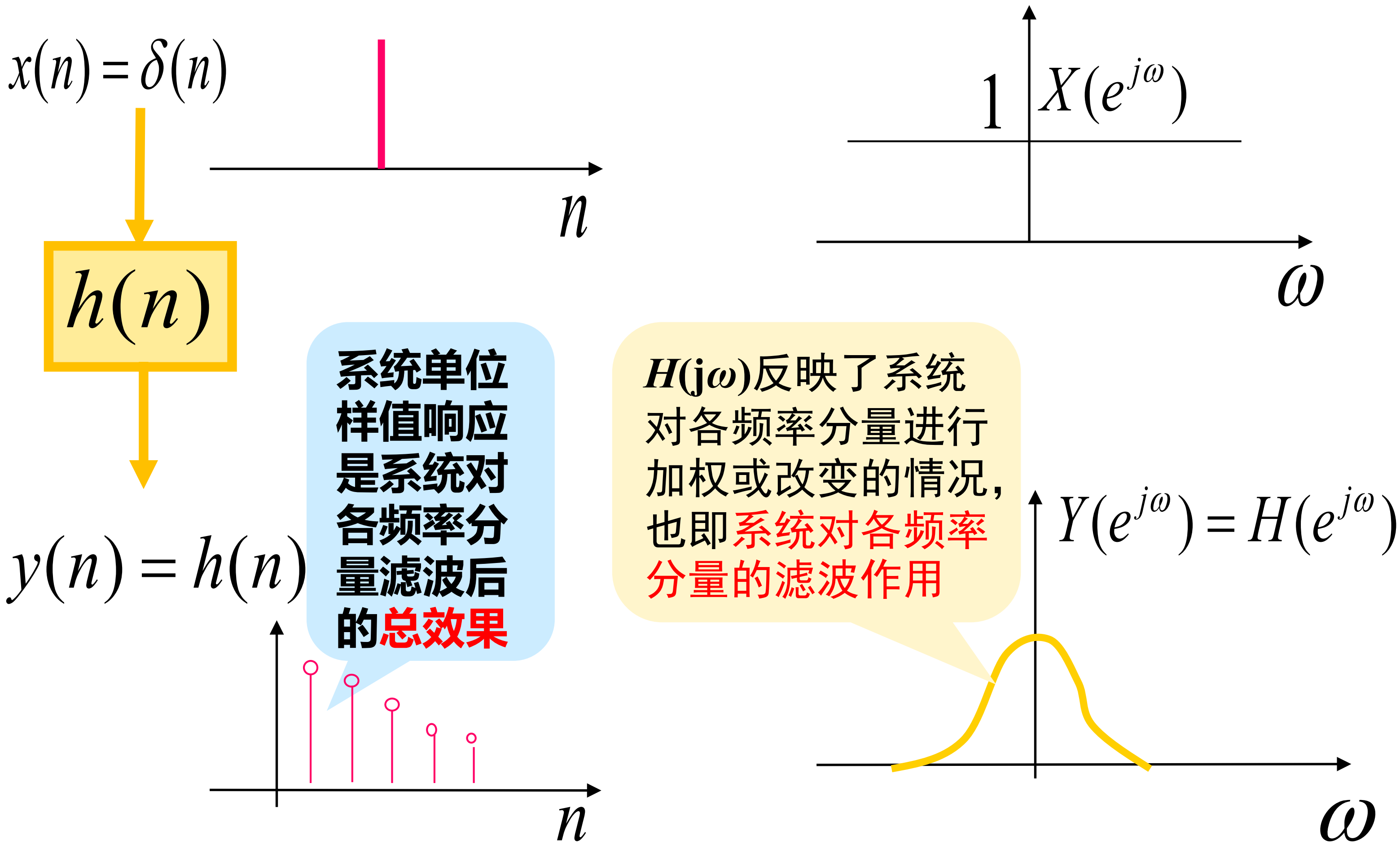
- **离散时间系统频率响应函数即系统单位样值响应的离散时间傅里叶变换**

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}$$

思考：为什么$h(n)$的DTFT就反映了系统的频响特性呢？

频响函数作用的物理解释

- 系统激励为$\delta(n)$时，其频谱覆盖了$-\infty \le \omega \le \infty$ 的频率范围

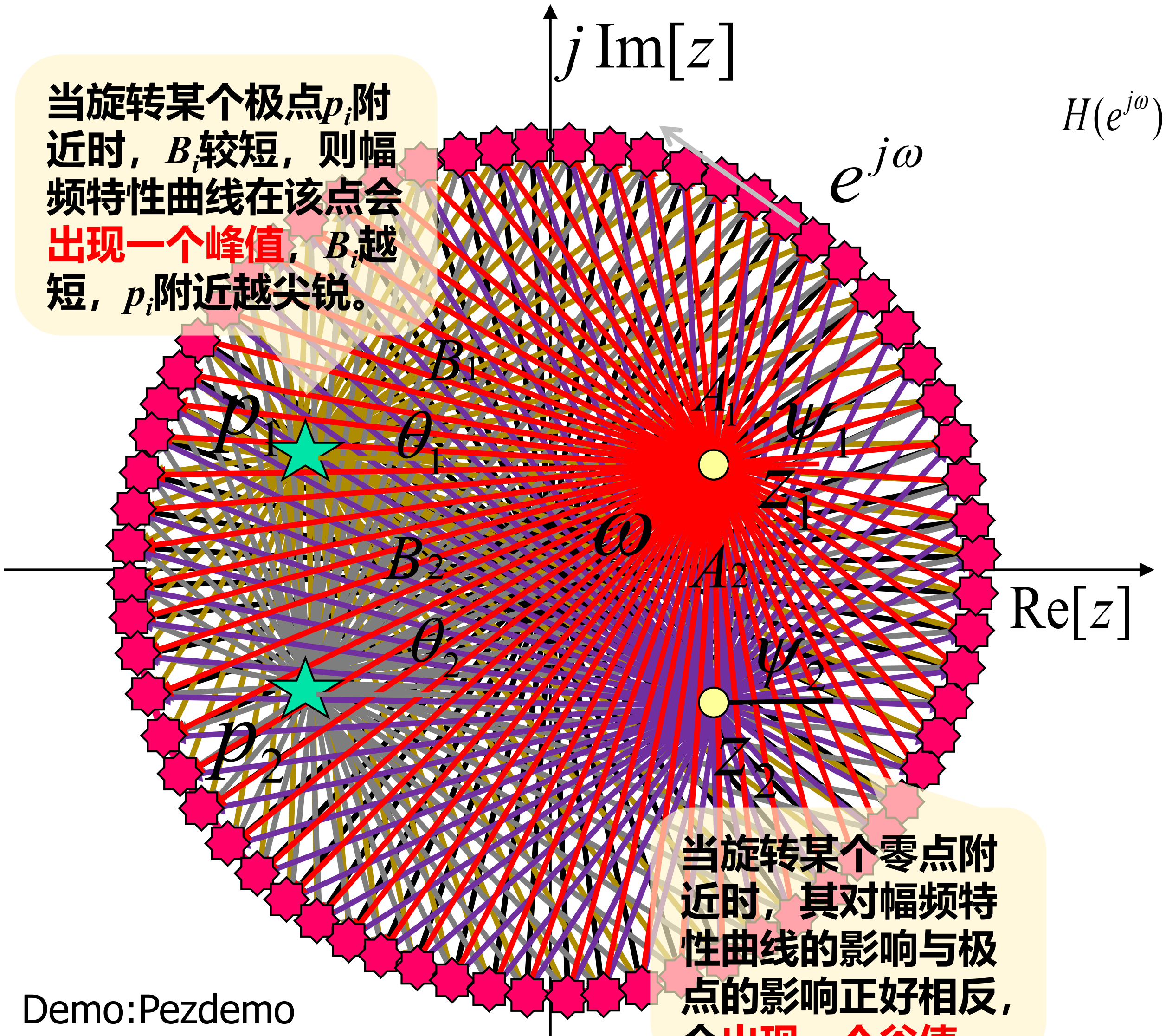


系统频率响应函数的作用分解

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

- 滤波器的幅频特性是$|H(e^{j\omega})|$，且对信号有相移作用$\varphi(\omega)$
- 因为$e^{j\omega}$是周期的，所以$|H(e^{j\omega})|$也是周期的，其周期为重复频率2π

系统的频率响应的几何确定法



当旋转某个极点p_i附近时，B_i较短，则幅频特性曲线在该点会**出现一个峰值**，B_i越短，p_i附近越尖锐。

当旋转某个零点附近时，其对幅频特性曲线的影响与极点的影响正好相反，会**出现一个谷值**

Demo:Pezdemo

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = G\left.\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}\right|_{z=e^{j\omega}}$$

$$= G\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)} = \left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$e^{j\omega}-z_r = A_r e^{j\psi_r}$ $\quad$ $e^{j\omega}-p_k = B_k e^{j\theta_k}$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{\prod_{r=1}^{M} A_r}{\prod_{k=1}^{N} B_k}$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{r=1}^{M}\psi_r - \sum_{k=1}^{N}\theta_k$$

例题2

- 已知因果系统的差分方程为：

$$y(n)=x(n)-\cos(\tfrac{2\pi}{N})x(n-1)$$
$$+2\cos(\tfrac{2\pi}{N})y(n-1)-y(n-2)$$

试求：

$$(1)h(n)=? \qquad (2)H(z)=?$$

$$(3)p_k=? \quad z_r=? \quad (4)H(e^{j\omega})=?$$

例题2解答

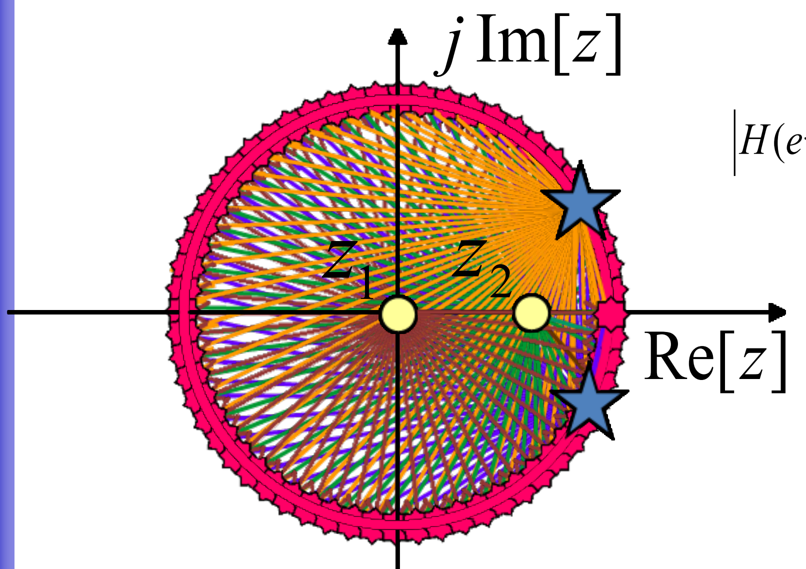
解：$H(z)=\dfrac{1-\cos(\frac{2\pi}{N})z^{-1}}{1-2\cos(\frac{2\pi}{N})z^{-1}+z^{-2}}=\dfrac{z[z-\cos(\frac{2\pi}{N})]}{1-2\cos(\frac{2\pi}{N})z+z^{2}}$

$$=\frac{z[z-\cos(\frac{2\pi}{N})]}{(z-e^{j\frac{2\pi}{N}})(z-e^{-j\frac{2\pi}{N}})}$$

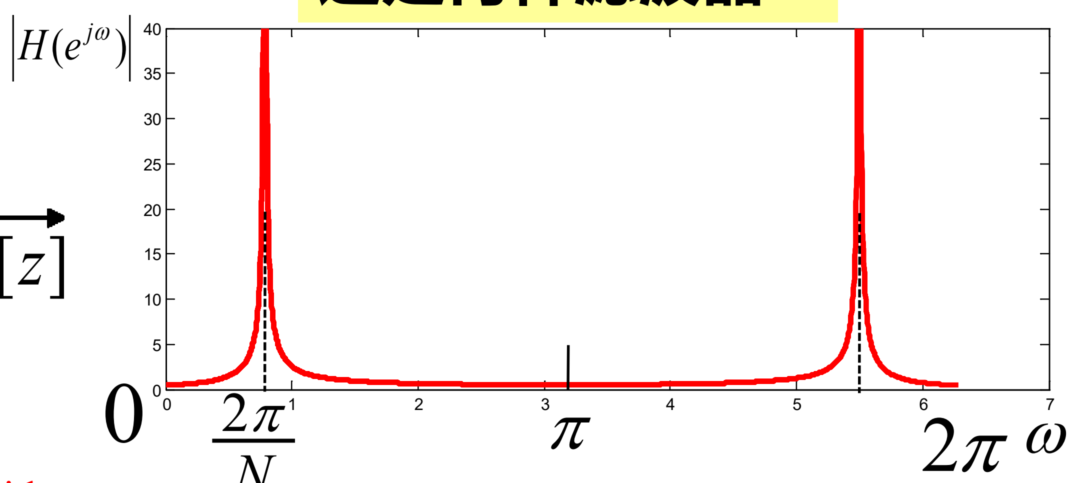
$z_1=0\quad z_2=\cos(\frac{2\pi}{N})$

$p_1=e^{j\frac{2\pi}{N}}\quad p_2=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

$$h(n)=\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)u(n)$$



这是何种滤波器?



Demo:dltidemo

小结

①离散时间傅里叶变换是单位圆上的z变换

②根据离散时间傅里叶变换可研究系统的频率响应特性

课外作业

阅读：8. 7—8. 8节

作业：8.23(2)小题

- 每星期三晚23:59:59前交上星期布置的作业
  - 请按照新版教学指南要求按时上传提交

地点：南一楼中402室

附录：由z变换导出DTFT

根据$s \rightarrow z$的映射关系，当σ＝0时，$s = j\Omega$,

所以$z = e^{sT} = e^{j\Omega T} = e^{j\omega}$, 其中：

$$\omega = \Omega T$$

归一频率　实际频率　采样周期

▪即自变量沿着$|z|=1$单位圆周变化，则：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})}$$

离散时间傅里叶正变换

z变换的退化（特殊）情形，具有同样的性质

序列的离散时间傅里叶反变换

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}X(z)z^{n-1}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}X(e^{j\omega})e^{jn\omega}e^{-j\omega}d(e^{j\omega})$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

离散时间傅里叶反变换

思考:反变换的物理意义是什么?