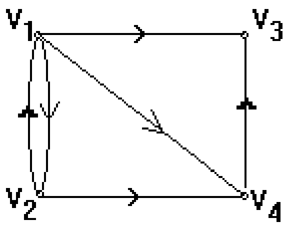
得分	评卷人

一．单项选择（每小题 3 分，总共 15 分）

(A) 1、在如下的有向图中，从 V_1 到 V_4 长度为 3 的道路有（ A ）条。



A． 1； B． 2； C． 3； D． 4 。

(B) 2、假设 S、T 是两个有限集合。那么下面正确的是：

A. |S∪T| = |S| + |T| B. |S∪T| = |S| + |T| - |S∩T|

C. |S×T|= |S| × |T| - |S∩T| D. |S-T|= |S| - |T|

(B)3、假定递归算法把一个规模为 n 的问题分解为 a 个子问题，每个子问题规模为 n/b. 再假定把子问题的解组合成原来问题的解的算法处理中，需要总量为 $g(n)$的运算数. 用 $f(n)$表示求解规模为 n 的问题所需的运算数，则得出运算数 $f(n)$的递推关系为：

A． $f(n) = b\,f(n/a) + g(n)$； B． $f(n) = af(n/b) + g(n)$；

C． $f(n) = f(n/b) + ag(n)$； D． $f(n) = ag(n/b) + f(n)$；

(D) 4、如果两个图 H 与 G 同构，且结点数大于 1，则下面不正确的是：

A． 如果 H 有一个子图是非平面图，则 G 是非平面图

B． 如果 H 是连通图，则 G 没有孤立点。

C． H 是偶图则 G 也是偶图，反之也成立

D． f 是 H 的结点集到 G 的结点集的双射，则 H 的任一结点 h 的度数等于 G 中结点 f(h)的度数。

(D) 5、下面说法不正确的是：
A：不同算法求出的两个不同结点的最短通路的长度是一样的。
B: 不同算法求得的两个不同结点的最短通路可能不一样。
C: 连通有权图的任两个不同结点的最短通路一定是存在的。
D：最短通路未必就是简单路。

得分	评卷人

二. 填空（每小题 3 分，总共 15 分）

1、连通无向图有欧拉开路（非回路）的充要条件是

恰好有两个度为奇数的结点

2、 8 位座机号码，如果不能以 0 开头，而且不容许数字全部相同，有多少个可以选择的号码 9*10^7 - 9 ;

3、从 n 种不同的元素中，取 r（r<n）个必须有重复的组合，其方案数为 n+r-1 个取 r 个的组合数 减去 n 个取 r 个的组合数 ;

4、将 5 个相同的球放到 3 个不同的盒子中, 方案数为 21 （7 个里面取 5 个的组合数） .
.
5、 n（n>1）个结点的简单连通无向图，如果不是树，结点总度数至少是多少 2n .

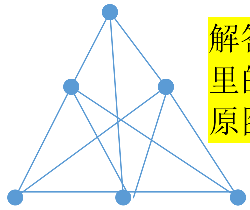
得分	评卷人

三. 解答题（总共 40 分，每小题 5 分）

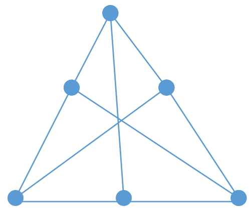
1、 一个(n,m)简单无向图是 2-色图(m>0)，那么它上面的所有回路是否都是偶数长？为什么？

解答：简单无向图是 2-色图(m>0) 就必然是偶图。图为偶图的充分必要条件是所有回路都是偶数长。

2、 判断下图是否为平面图。如果是，用不交叉的方式重画出来；否则说明不是的理由。



解答：非平面图。原图去掉两条边后，成下面的图（教材里的练习题）。该图实际上就是 $K_{3,3.}$ 图为非平面图。所有原图有一个子图为非平面图，故本身是非平面图。



3、 有 8 块饼干，分给 3 个小朋友，其中每一个小朋友最少 2 块，最多 4 块，求共有多少种分法。

解答：既然每个小朋友之上 2 块，那么先给每个人分两块。总数只剩 2 块。这 2 块的不同种类的分配方案数就是总的分配方案数。于是答案就是 2+3-1 = 4 取 2 的组合数，也即 6 种不同的分配方案。

4、 求解下面的列递推关系 $a_n-6a_{n-1}+8a_{n-2}=0$， $a_{0=1}$, $a_1=2$。

解答：这是一个常系数线性齐次的 2 阶的递推方程。解其相应的特征方程：$r^2-6r+8=0$， 特征根为 2 和 4. 所以该递推方程的通解必然是：$a_n=t_1(r_2)^n+t_2(r_2)^n = t_1*2^n + t_2*4^n$，其中 t_1, t_2 都是常系数。将两个初始值带入，容易求得 t_1, t_2 分别是 1 和 0. 如是递推方程的解是 $a_n=2^n$

5、 用质量分别为1克，3克，5克，7克的4个砝码，在天平上能称几种质量的物体？每种质量的物体有几种不同称法？（砝码只能放在一边）

解：构造生成函数$f(x) = (1+x^1)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^7)$

展开化简后，可以得到 x^i的系数即为能称i克物体的方案数。于是用着4个砝码能称出来：1， 3， 4， 5， 6， 7， 8， 9， 10， 11， 12， 13， 15， 16克的物体。 其中8克的有两种陈法，其它都只有1种称法。

6、下面哪些编码是前缀码？如果是，构造出相应的二元树，并标记每一个码对应的位置：

（1）0，1，01，001

(2) 101，11，001，011，010

解：第(1)组不是钱缀码，第(2)组是前缀码。

相关二叉树（略）

7、 设计一个在连通无向有权图中求最大生成树的算法。

解：仿照最小生成树算法，将最小改为最大，具体算法如下：

(1) 用 G 表示原图，T 表示即将形成的最大生成树，假设 G 有 n 个结点。T 开始时没有边，但拥有 G 的所有结点。
(2) 选择 G 中权最大的边，将这条边添加到 T 中；从 G 中删除这条已经添加到 T 中的边。
(3) 如果 G 中还有边，从 G 中所有剩余的边集中选择权最大的边，准备添加到 T 中；如果该边加入到 T 中不会形成简单回路，则将该边添加到 T 中，否则则放弃该边；无论是否放弃都从 G 中删除该边；
(4) 重复（3），直到 T 中有 n-1 条边，结束循环。
(5) 求得的 T 即为 G 的最大生成树。

8、 10 个人聚会，有些人之间是朋友或者老乡，有些之间没有关系。是否所有人的朋友或者老乡的数目（限于这 10 个人范围内的）都不一样？要求用图论知识解答。

解答：(1)构造图模型：分别用 10 个不同结点表示这 10 个人；如果两个人是朋友或者老乡，则在相应的两个结点间画一条无向边。 形成一个简单无向图。 于是每个人的朋友或者老乡数目就是相应结点的度数。

(2) 问题转化为建立起的图上面，是否所有结点的度都不一样；每个结点的度最小可能的值为 0，最大可能是 9.

(3) 如果所有 10 个结点都都不一样，则度分别是 0,1,2,...,9. 度的总和为 45， 与图的握手原理矛盾。 所有至少有两个结点的度是相同的。

得分	评卷人

四. 证明题（每小题 10 分，总共 30 分）

1、随意地把一个 9×3 棋盘的每个方格涂成红色或蓝色，求证：必有两行方格的涂色是一样的。

证明思路：对应 3 个格子的行，用两个颜色涂抹，只可能有 $2^3=8$ 种不同的可能。由于有 9 行，根据鸽巢原理，知道至少有两个的涂色是相同的。

2、证明一个至少有一条边的简单连通图为树的充分必要条件是它的任一边都是割边。

证明思路：(1) 必要性：
任何一棵树的任何一条边都是关联这条边的两个结点之间的简单路。而树中任意两点之间的简单路是唯一存在的，如果从树中删除这条边，则关联这条边的两个结点之间不再有路，必然使得树从一个连通分支变成两个连通分支。所以任一条边都是割边。

(2) 充分性：
加入一个连通简单图的任一条边都是割边，说明边不在任何简单回路里出现。也即该图不存在简单回路。一个连通的、没有简单回路的图就是树。充分性得证。

3、设 G 是具有 n 个结点的无向简单图，其边数 $m=(n-1)(n-2)/2+2$，证明 G 是哈密顿图 ；如果 $m<(n-1)(n-2)/2+2$ 则不一定是哈密顿图，具体说明 （6+4 分）。

证明思路：(1) 考虑到判断简单图的充分条件：任何两个不邻接的结点的度之和都大于等于 n(结点数)，则该图为哈密尔顿图。

如果 图 G 有两个不邻接的结点 a 与 b，它们的度数之和小于 n,

去分析 G 作为简单图（这里略，实际不能省略这个部分。）…其边数就不可能达到 $m=(n-1)(n-2)/2 + 2$. 进而说明满足哈密尔顿图的充分条件。说明 G 为哈密尔顿图。

(2) 举例说明即可。例如：3 个结点，两条边的树，满足条件 $m=(n-1)(n-2)/2+2$，但显然不是哈密尔顿图。