得分	评卷人

一. 单项选择（每小题 3 分，共 15 分）

(　　) 1.　5 种不同的球中取出 8 个，共有多少种取法

(A) C(8, 5)　　(B) C(12, 5)　　(C) C(12, 8)　　(D) C(13, 5)

(　　) 2.　递推式 $x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}$ 的通解是

(A)$C_1+C_2 2^n$　　(B)$C_1 n+C_2 2^n$　　(C) $C_1 n+C_2 n2^n$　　(D) $(C_1+C_2 n)2^n$

(　　) 3.　5 个结点的完全图去掉一条边后，一定不是

(A) 连通图　　(B) 欧拉图　　(C) 哈密顿图　　(D) 平面图

(　　) 4.　5 个结点的简单平面图的边数最多是

(A) 7　　(B) 8　　(C) 9　　(D) 10

(　　) 5.　完全正则二元树（满二叉树）的叶结点数是 t， 则该树的结点数一定是

(A) t+t/2+1　　(B) 2t-1　　(C) 2t　　(D) 2t+1

得分	评卷人

二. 填空（每小题 3 分，共 15 分）

1. 6 个人平均分到 3 个不同部门的分法有___90___种；
2. 5 个不同的球分成 3 堆的分法有___25___种；
3. 图 G 分支数是 3，节点数是 10，则其边数至少是___7___；
4. n 个结点的多重图（无单边弧）的邻接矩阵的主对角线以上部分所有项的和等于图的_____边数______；
5. 利用欧拉定理，可得 $11^{890} \equiv$___1___ (mod 15)

得分	评卷人

三. 解答题（共 40 分）

1. 排列26个字母，使得a与b之间恰有7个字母，求方法数。（6分）

2×C(24,7)A(7，7)A(18，18) = 36×24!

这道题的解答并不难， 可以有以下的几种解法。

解法 1：从 24 个字母（a,b 除外）中任选 7 个字母，放置于 ab 之间，然后将这选出来 7 个字母与 ab 构成一个整体当成一个对象，再于剩下的 17 个字母(已经选了 7 个，再除掉 ab)，共 18 个对象全排列。结论是 C(24,7)A(7，7)A(18，18) = 36×24! 但还需要考虑到 a 在前 b 在后和 b 在前 a 在后两种不同的情况，所以答案是：2×C(24,7)A(7，7)A(18，18) = 36×24!

这种做法中，不少同学没有考虑到上面 ab 两个字母顺序的问题，没有乘以 2; 也有不少同学只考虑了剩下 17 个字母的全排列，没有考虑的 a*******b 这个整体在整个排列中的位置不同的问题。

解法 2：先考虑选定字母 a 的位置，由于 ab 之间一定要放置 7 个字母，所以在 a 前 b 后的排列时，a 的位置只有 26 – 8 = 18 种选择可能；a 位置确定后，b 的位置就是唯一对应确定的，不再有变化；再考虑剩下的 24 个字母全排列就可以； 当然这种解法也需要考虑到 b 前 a 后的问题，同样是要乘以 2. 结论是一样的。 2×18A(24，24) = 36×24!

2. 把 9 个苹果分给 3 个孩子，如果要求第一个孩子的苹果数跟第二个孩子的苹果数必须相同，而且每个孩子至少分得 1 个苹果。那么有多少种分法？（要求用生成函数）（6 分）

4 种方法

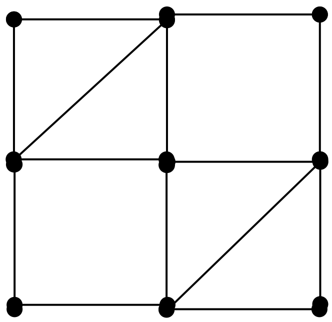
解答：这道题由于数字比较小，在规定的约束下，答案方案数很简单，就

是 4 种方法；很多同学没有任何表达式，就是采取拼凑的方法得到答案。这种做法只有答案分 2 分；因为题目明确要求用生成函数，就必须写出正确的生成函数。

这题的生成函数的构成并不复杂。 考虑到第一个孩子必须跟第 2 个孩子分得的苹果数相同，将这两个孩子当成一个人对待，这一个人分得的苹果只能是正偶数(2,4,6,8)；第 3 个孩子分得的苹果数就是正整数 1,2,3,4,5,6,7. 所以生成函数就是 $(x^2+x^4+x^6+x^8)(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)$ $(x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots)(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+\ldots)$也是正确的。有些同学觉得第 3 个孩子分得的苹果数不可能再试偶数，于是$(x^2+x^4+x^6+x^8)(x^1+x^3+x^5+x^7)$也是正确的。从这个生成函数中求出 x^9 的系数就是题目的答案。

有同学答生成函数是 $(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)^3$， 并且展开时，第一个表达式跟第 2 个表达式选到的 x 的指数必须相同的情况下，求出 x^9 的系数。严格说来，这种做法不是太好的做法。

3 下图是不是欧拉图，是不是哈密顿图，是不是二部图，说明理由。(9 分)



不是二部图；是欧拉图；不是哈密尔顿图；

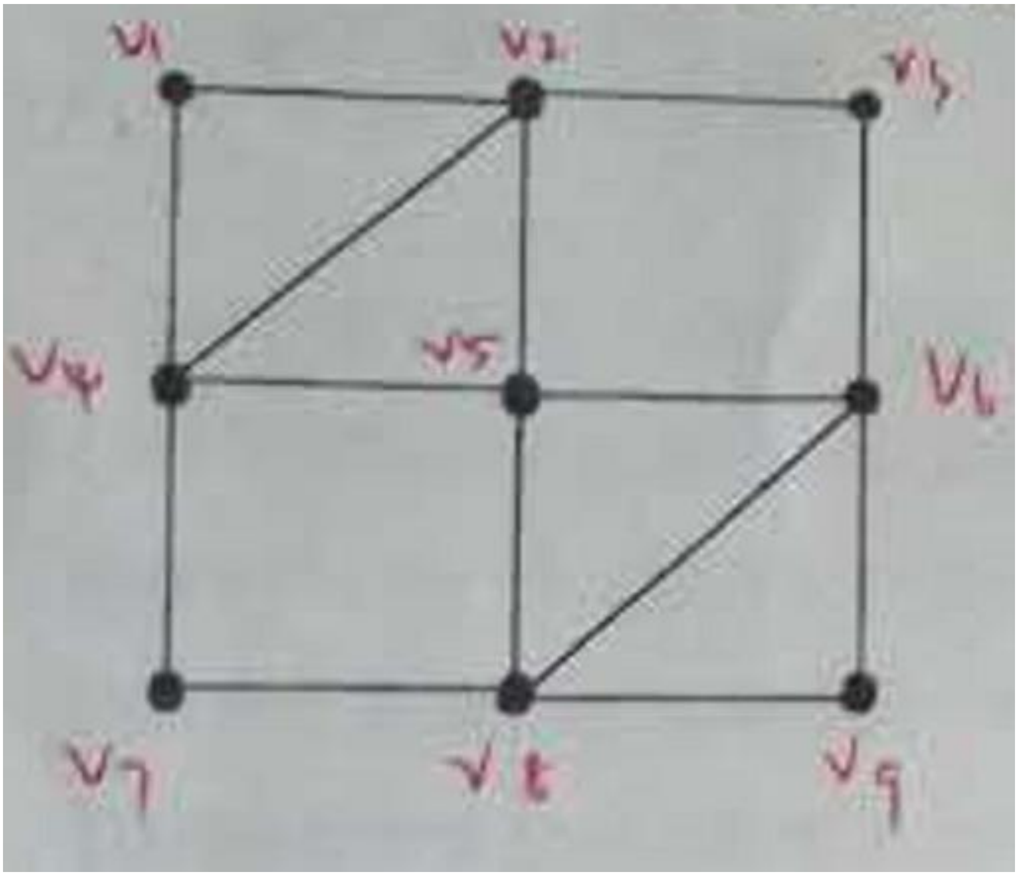
解答说明：这道题分三个问题，每个问题 3 分。都需要给出结论，也需要给出理由。有些同学只给出结论不给出理由，就只有结论分。

(1) 不是二部图。因为二部图（偶图）的每一条回路都一定是偶数长。这

个图显然不满足这点。

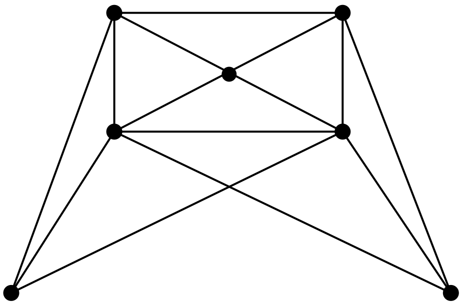
(2) 只要每个结点的度都是偶数，又是连通的，就一定是欧拉图。显然这个图的所有结点的度都是偶数，而且连通，所有是欧拉图。

(3) 不是哈密尔顿图。



从这个图中去掉 v2,v4,v6,v8 四个结点后，连通分支数为 5. 由哈密尔顿图的必要条件，知道该图不是哈图。

判断下图是否为平面图，并说明理由。（7 分）



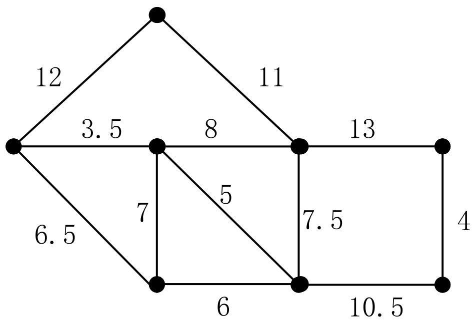
解答：不是平面图。 （有少数几位同学回答是平面图）。

必须说理由。不少同学的理由是：该图有一个子图跟 $K_{3,3}$ 同胚。 看起来好像理由正确，但几乎等于没有说。 需要指出哪个子图（画出来，标注每个结点），然后经什么样的变换后跟 $K_{3,3}$ 同胚。

这个图跟 $K_{3,3}$ 同胚的子图不是唯一的，所以有多种做法。也有找到子图经变换后跟 k_5 同胚的，也是正确的。

还有一些同学，利用欧拉公式，说明不满足。这里几乎没有办法数围城的区域数，因为本来就做不到在一个平面上无交叉画出来。
另外还有少数几个同学，说没有办法换种画法在平面上不交叉地画出来，所以是非平面图。题目就是要证明没有办法在平面上不交叉地画出来，不是要说这个结论，而是要证明之。

求下图的最小生成树。（6 分）



这里的最小生成树是唯一的
解答： 这个图的各边的长度都不一样，所有最小生成树是唯一的。利用

求最小生成树的算法，很容易得到结果。但要求把最小生成树画出来；

求同余方程 $4x \equiv 5 \bmod 9$ 的所有解。（6 分）

答案是：$x \equiv 8 \bmod 9$ 或者 $x = 8 + 9k$ (k 为任意整数，包括负整数和零)

说明：这道题的本意是，希望同学们理解这个方程，然后求出 4 关于 mod9 的模逆，再利用模逆求解出同余方程。
由于这里的数字很小，比较简单，不少同学没有任何解法，就是拼凑出一个解 8，然后再把答案写出来。

也有些同学就像解普通方程，得到答案：$x = (5 + 9k)/4$. 显然是不对的。

得分	评卷人

四. 应用与证明（每小题 10 分，共 30 分）

1. 请给出下列生态变迁的递推关系模型：

在一个封闭的生态系统中，蜜蜂的繁殖常常是以月为周期。繁殖出来的蜜蜂会在下下个月（隔月）开始每月都繁殖新蜜蜂。假定每个蜜蜂每次都繁殖两个小蜜蜂。那么每个月（比如，第 n 个月）的蜜蜂总数量，除了上一个月的蜜蜂数量外，还有上上月的蜜蜂繁殖出新的数量。如果不考虑蜜蜂的死亡：

1）请给出 n 个月后生态系统中蜜蜂的总数量的递推公式；

2）假设蜜蜂数量第 0 个月为 $a_0=2$，第一月 $a_1=7$。求出递推关系的解。

解答：(1) 递推关系：$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$

(2) $a_n = (-1)^{n+1} + 3\times 2^n$

这道题按系统的方法做就可以。不需要再解释多少。

2. 假设 G 是 n（$n\geq 5$）个结点的简单图，证明 G 中有简单回路或者 G 的

补图$\bar{G}$包含有简单回路。

解答：谈到简单回路，很容易联想到树的概念。

用反正法是基本的证明方法和思路。反设G以及补图$\bar{G}$都没有简单回路。那么它们的每一个连通分支都是一个简单图而且没有简单回路，如是，每一个连通分支都是树；G 以及补图$\bar{G}$都是树或者是树林。 一个图如果是树或者是树林，那么它们的边的数目顶多是 n-1(树林的边数更少).

这样图与补图的边的综合数目不超过 2n-2. 但图与其补图的边数是一个 n 个结点的完全图的边的数目 n(n-1)/2. 当 $n\geq 5$ 时，$2n-2 < n(n-1)/2$. 矛盾！

所以结论成立。

在 n<5 时，结论不一定成立。

3. 如果从无向图 G 中任意删除一条边，其连通分支数都增加。证明图 G 要么是树要么是树林；说明删除一条边后会增加多少个连通分支？为什么？

解答：这道题跟上一道题都涉及到了树与树林的知识。

大部分同学都用了反证法。 同学们在回答这道题出现得比较多的问题如下：

(1) （出现最多的）就是假设不是树或者树林，图就没有回路。这个结论是一个错误的结论。 一个图只要有边就一定会有路，也有回路。 可以是原路去原路回，就是回路。

正确的应该是没有简单回路！相信不少人是疏忽，但这种疏忽导致错误结论。从逻辑上说，这是不容许的。

(2) 有些同学说树和树林里有一个特征就是删除任一条边后，连通分支数会增加，所以题目的条件符合树或者树林的特征，所以就是树或者树林。

不可以这样回答问题，逻辑上不可以。

举个例子：人有一个特征就是有两个眼睛，然后某个特定的对象也有两个眼睛，所以可以证明那个对象也就是人。 显然是错误的逻辑。

(3) 还有些同学（不少），说在题目条件下，每条边都是割边（这个没错），然后立马下结论说图不是树就是树林。 结论没错，但理由没说清楚。为什么就是？这里就是要你把其中的理由说清楚。

(4) 第 2 问，有些同学回答了删除一条边后，会增加一个连通分支。但是，没有说任何理由。 题目明确问了为什么？就必须说明理由的。

也有些同学很不错，还说清楚了，在题目条件下，不可能有多重边；也不可能有单边环，于是是简单图；并且说证明清楚了每个连通分支都是一颗树；当图连通时是树，不连通时是树林。