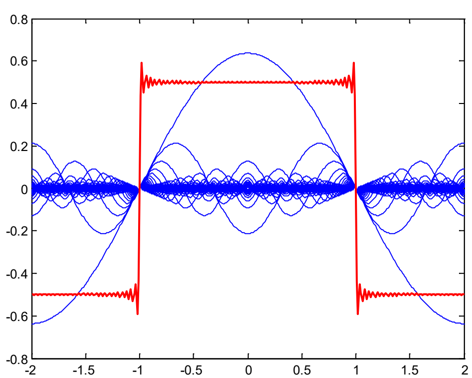
信号与系统

第10讲 线性系统的拉氏变换分析法

郭红星

华中科技大学计算机学院

May 14, 2020



上次课回顾

- 复频域分析的数学基础
  - 拉普拉斯变换的引出及其收敛域
  - 常用信号的拉普拉斯变换
  - 拉普拉斯变换的性质
  - 拉普拉斯反变换求解
- 线性系统响应的拉氏变换分析法
  - 作为数学工具的拉普拉斯变换
  - S域的元器件模型

拉氏变换的基本性质

线性	$\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot L[f_i(t)]$
时移	$f(t-t_0)u(t-t_0)$	$e^{-st_0}F(s)$
频移	$f(t)e^{-\alpha t}$	$F(s+\alpha)$
尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
微分/积分	$\frac{df(t)}{dt}$ / $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$sF(s)-f(0^-)$ / $\frac{F(s)}{s}+\frac{\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau}{s}$
卷积定理	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)\cdot F_2(s)$
	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}F_1(s) * F_2(s)$

本讲内容

- 线性系统的拉普拉斯变换分析法
  - 系统函数的定义与极零点分布
  - 系统稳定性及其判定
  - 通过系统函数研究系统频响特性
  - 系统的框图模拟 --- 重点内容之一
- 学习目标
  - 理解系统稳定性这一重要工程概念
  - 掌握如何通过系统函数分析系统频响特性
  - 熟悉系统模拟框图实现，初步认识其意义

5.3 系统函数与系统特性

系统的单位冲激响应与系统函数

- 系统的零状态响应为：$r(t)=e(t)*h(t)$
- 对应的复频域关系为：$R(s)=E(s)H(s)$

$$h(t) \xleftrightarrow{LT} H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}$$

系统函数

系统零状态下，响应的拉氏变换与激励拉氏变换之比

- 注意H(s)与H(p)的差别（p235)

系统函数的零极点与单位冲激响应

$$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_1 s+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}$$

系统函数

因式分解

$$H(s)=\frac{a_m}{b_n}\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

部分分式分解

$$H(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}$$

拉氏反变换

$$h(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i e^{p_i t}$$

单位冲激响应

H(s)的极点

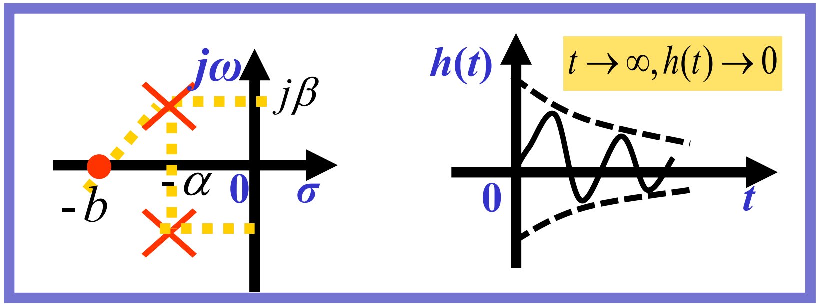
$H(s)$的极点位置对$h(t)$的影响

①左半开平面的共轭极点：不在负实轴上

$$H(s)=\frac{s+b}{(s+\alpha)^2+\beta^2}=\frac{s+b}{(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}$$

$$h(t)=\frac{\sqrt{\left((b-\alpha)^2+\beta^2\right)}}{\beta}e^{-\alpha t}\cos(\beta t-\phi)$$

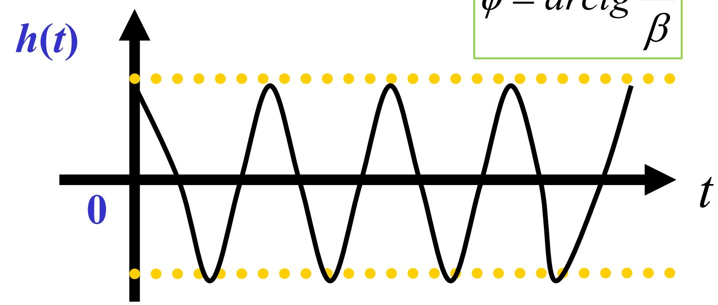
$$\boxed{\phi=arctg\frac{b-\alpha}{\beta}}$$



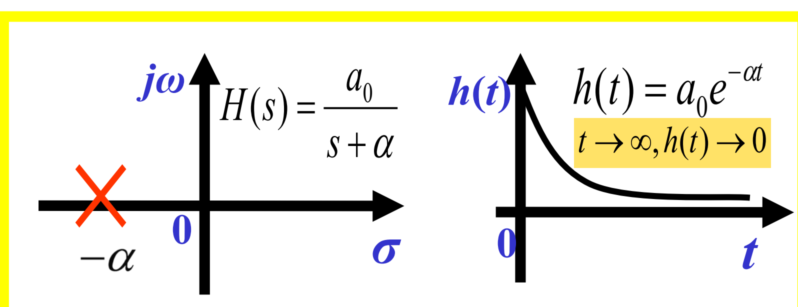
②虚轴上的共轭极点

$$\frac{s+b}{s^2+\beta^2}\leftrightarrow\frac{\sqrt{\left(\beta^2+b^2\right)}}{\beta}\cos(\beta t-\phi)$$

$$\boxed{\phi=arctg\frac{b}{\beta}}$$



③退化情况：负实轴上的单极点



④右半开平面的极点

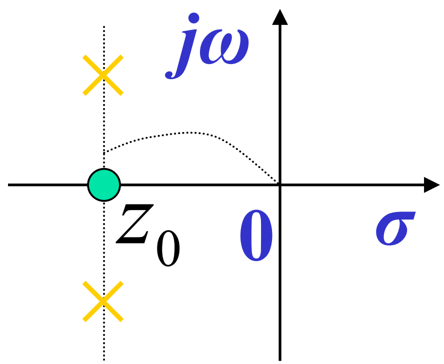
$$\frac{1}{(s-\alpha)}\leftrightarrow e^{\alpha t}u(t)\quad t\to\infty, f(t)\to\infty$$

$$\frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]}\leftrightarrow e^{\alpha t}\cos(\beta t-\phi)u(t)$$

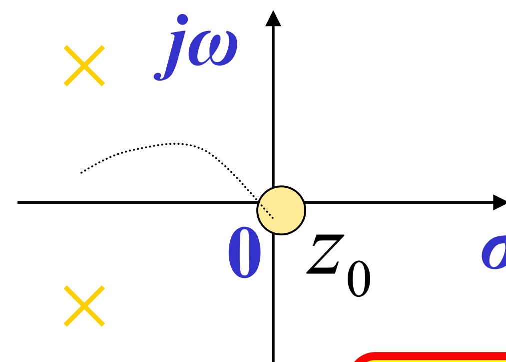
$H(s)$的零点位置对$h(t)$的影响

$$H_1(s)=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$H_2(s)=\frac{s}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$



零点移动到原点



$$h(t)=e^{-\alpha t}\cos\beta t$$

$$h(t)=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}e^{-\alpha t}\cos(\beta t-\varphi)$$

幅度多了一个因子

$$\varphi=tg^{-1}\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

多了相移

结论：零点分布只影响时域函数的幅度和相移，不影响振荡频率

零极点与$h(t)$时域波形的对应关系小结

① $H(s)$在左半平面的极点给出$h(t)$的**暂态分量**

② $H(s)$在虚轴上的单极点给出$h(t)$的**稳态分量**

③ $H(s)$在虚轴上二阶或更高阶极点及右半平面的极点给出的$h(t)$将随时间的增长而**增长**

④ 极点的分布只能说明$h(t)$所具有的函数的**模式**，而不能说明$h(t)$的大小及相位，**大小及相位与零点有关**

线性系统的稳定性

- **系统稳定性的定义：** 系统稳定性是指系统要素在外界影响下表现出的某种稳定状态。其含义大致有以下三类：
  ① 外界温度的、机械的以及其他的各种变化，不致于对系统的状态发生显著的影响。
  ② 系统受到某种干扰而偏离正常状态，当干扰消除后，能恢复其正常状态，则系统是稳定的;相反，如果系统一旦偏离其正常状态，再也不能恢复到正常状态，而且偏离越来越大，则系统是不稳定的。
  ③ 系统自动发生或容易发生的总趋势，如果一个系统能自动地趋向某一状态，就可以说，这一状态比原来的状态更稳定。

- **线性系统稳定性的输入输出表示(BIBO)：如果一个系统对于任何有界的输入，其响应也是有界的，即若$|e(t)| < Me$，则有：$|r(t)| < Mr$。其中M_e, M_r为有限的正实数。**

- **线性系统稳定性的充要条件** $\Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$

系统稳定等价条件的证明

- **充分性：**

$$r(t)=e(t)*h(t)$$

$$\left|r(t)\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}e(t-\tau)h(\tau)d\tau\right|\le\int_{-\infty}^{\infty}\left|e(t-\tau)h(\tau)\right|d\tau$$

$$\because \left|e(t-\tau)\right|<M_e \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(\tau)\right|d\tau<\infty}$$

$$\therefore \left|r(t)\right|\le M_e\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(\tau)\right|d\tau=M_r$$

系统稳定等价条件的证明

■**必要性：** 对稳定系统，激励$f(t)$有界，所以响应$r(t)$有界。

$$\because r(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

见P291

$$\therefore r(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(-\tau)h(\tau)d\tau$$

■上式对任意的有界信号$f(t)$都成立，故不妨令$f(-t)=\dfrac{h(t)}{|h(t)|}$ 则：

矛盾

$$r(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(\tau)^2}{|h(\tau)|}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|d\tau$$

如果：$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt\to\infty$ 则系统在t=0处的响应无界。

■**必要性的证明思路:** 用一个特例,如果$h(t)$不绝对可积，则确实存在一个有界的函数在该系统所引起的响应是无界的(反证法).

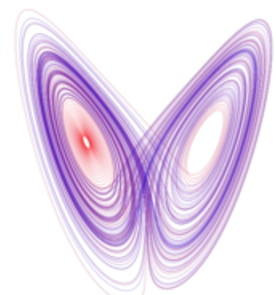
由$H(s)$判定系统稳定性

- 系统$H(s)$的极点一般是复数，讨论它们实部和虚部对研究系统的稳定性很重要
  - 不稳定系统，$\mathrm{Re}[p_i]>0$—增幅
  - 临界稳定系统，$\mathrm{Re}[p_i]=0$—等幅
  - 稳定系统，$\mathrm{Re}[p_i]<0$—衰减

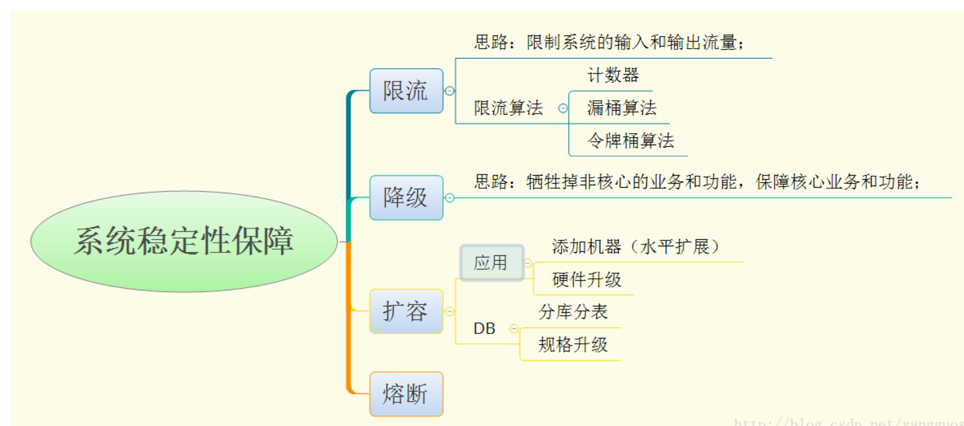
- 从z-p点在s平面的分布来考察因果系统的稳定性可以得到如下的结论:$H(s)$在右半平面内不能有极点

系统稳定性的例子

■蝴蝶效应：“一只南美洲亚马逊河流域热带雨林中的蝴蝶，偶尔扇动几下翅膀，可以在两周以后引起美国得克萨斯州的一场龙卷风。”



■软件系统的稳定性，主要决定于整体的系统架构设计，然而也不可忽略编程的细节，正所谓“千里之堤，溃于蚁穴”，一旦考虑不周，看似无关紧要的代码片段可能会带来整体软件系统的崩溃。究其原因，一方面是程序员对代码质量的追求不够，在项目进度的压力下，只考虑了功能实现，而不用过多的追求质量属性；第二则是对编程语言的正确编码方式不够了解，不知如何有效而正确的编码；第三则是知识量的不足，在编程时没有意识到实现会对哪些因素造成影响。



由系统函数的z-p点确定频响特性

- **频响特性**是系统在正弦信号激励下响应随信号频率的变化

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

相频特性

幅频特性

- 当系统**稳定**时，令$H(s)$中 $s=j\omega$，则得系统频响函数

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$$

- 对于零极增益表示的系统函数

$$H(s)=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

零点

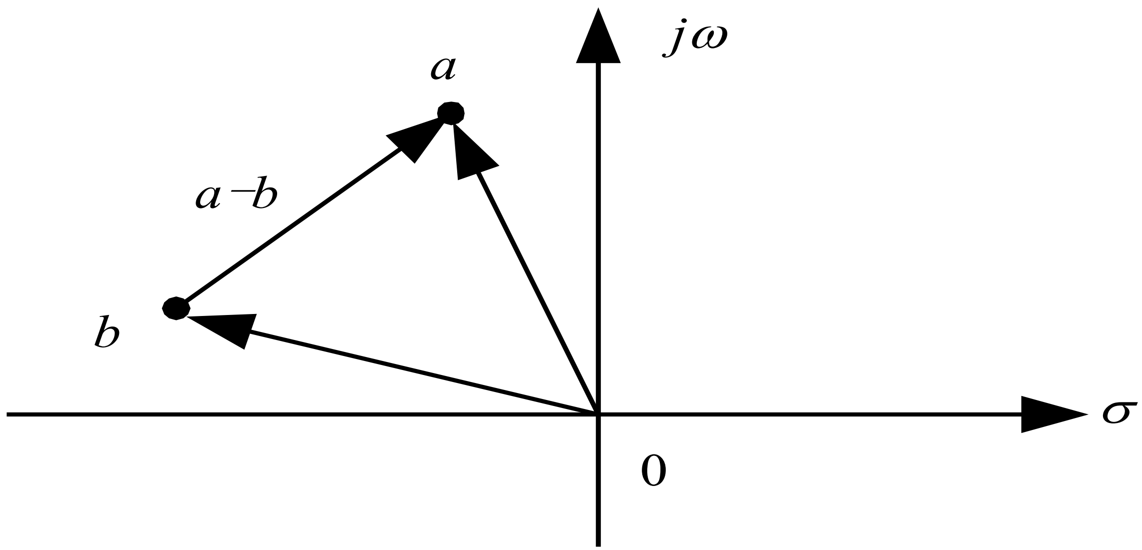
极点

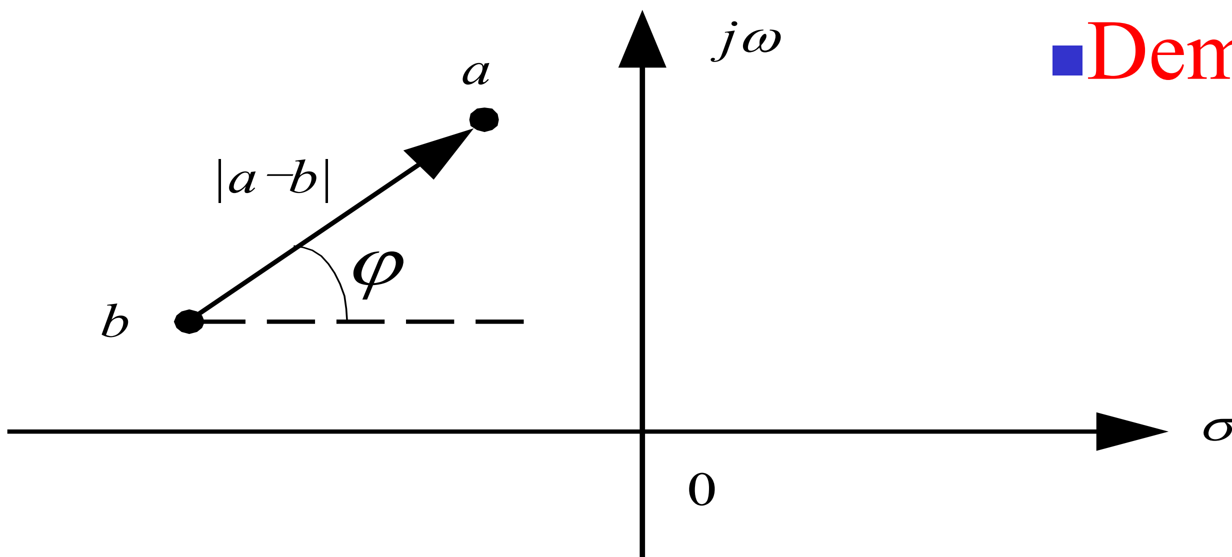
- 令$s=j\omega$，则得系统频响函数：

$$H(j\omega)=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(j\omega-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(j\omega-p_i)}$$

思考：你能画出系统的频响特性曲线吗?

复数a和b及a-b的向量表示



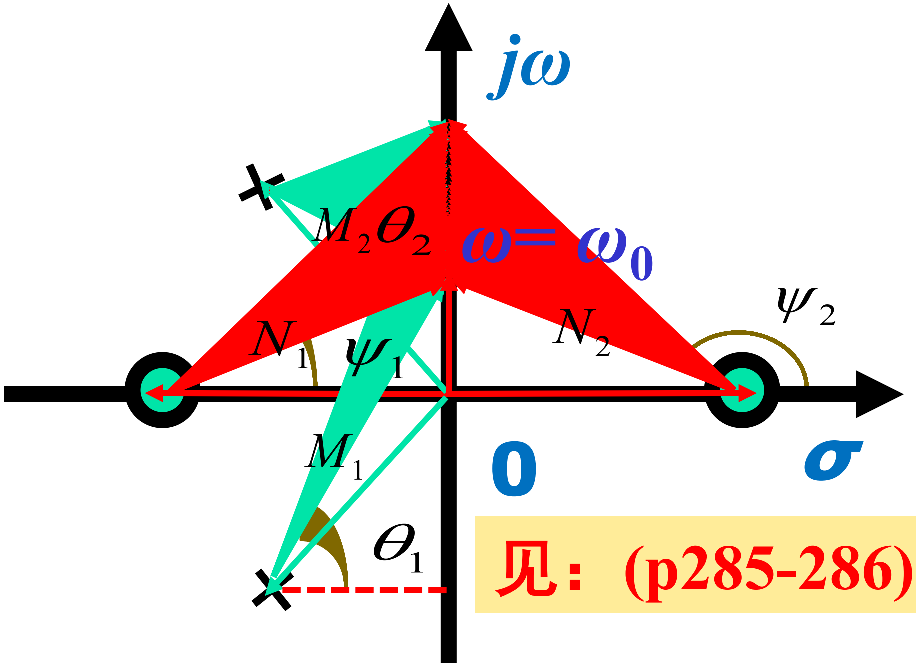


■Demo:Zdrill

系统频响函数的向量表示

$$(\mathrm{j}\omega - z_j) = N_j e^{j\psi_j}$$

$$(\mathrm{j}\omega - p_i) = M_i e^{j\theta_i}$$



见：(p285-286)

$$\therefore \left|H(j\omega)\right| = \frac{\prod_j N_j}{\prod_i M_i}$$

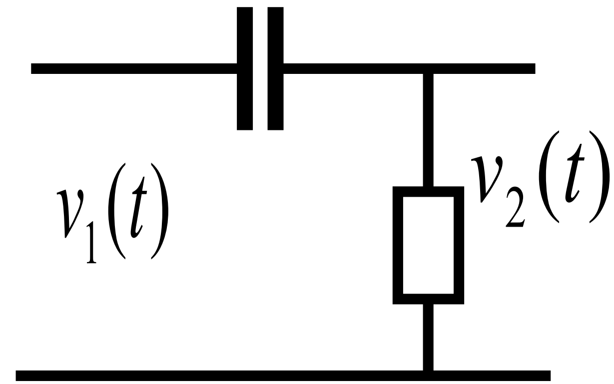
$$\varphi(\omega) = \sum_j \psi_j - \sum_i \theta_i$$

$$\therefore \left|H(j\omega)\right| = \frac{N_1 N_2}{M_1 M_2}$$

$$\varphi(\omega) = (\psi_1 + \psi_2) - (\theta_1 + \theta_2)$$

例题1：一阶高通系统的s域的分析

解： $\because H(s)=\dfrac{V_2(s)}{V_1(s)}=\dfrac{R}{R+1/sc}$



$$=\frac{s}{s+1/Rc}$$

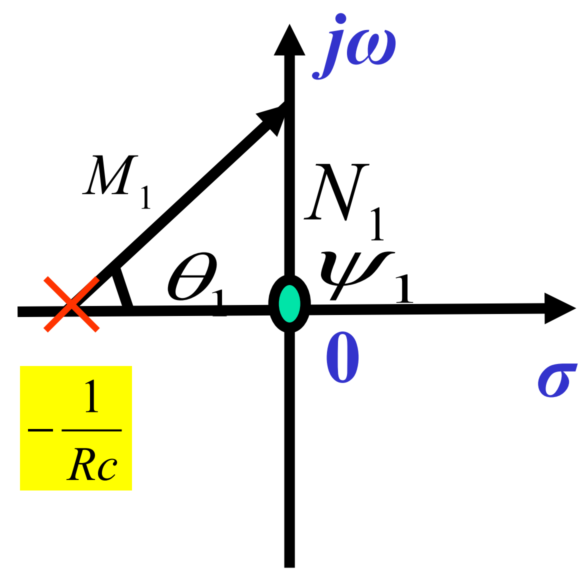
$$\therefore H(j\omega)=\frac{j\omega}{j\omega+\dfrac{1}{Rc}}=\frac{N_1}{M_1}e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{N_1}{M_1}$$

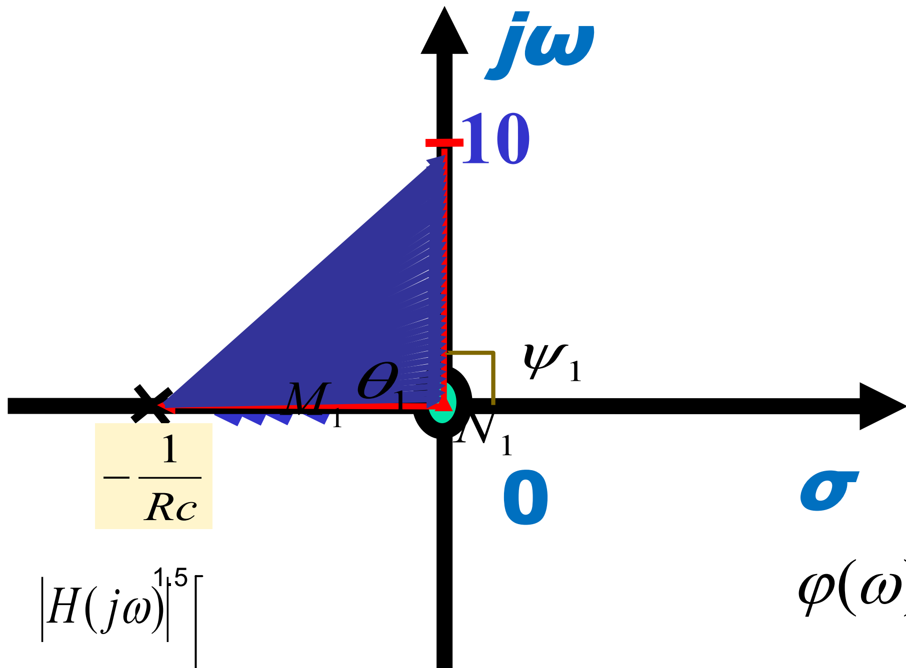
幅频特性

$$\varphi(\omega)=\psi_1-\theta_1$$

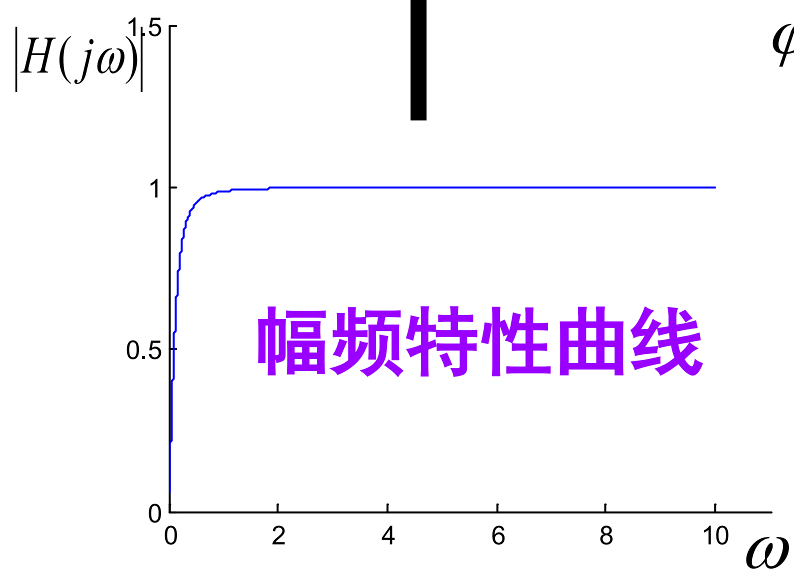
相频特性

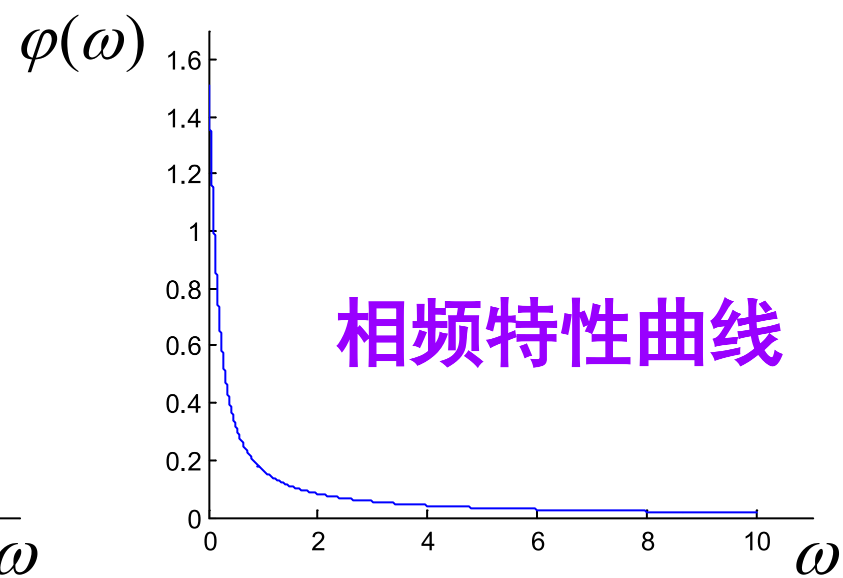


频率响应特性曲线



ω	N_1	M_1	$\lvert H(j\omega)\rvert$	φ	ϑ	ϕ
0	0	$\frac{1}{Rc}$	0	90°	0°	90°
$\frac{1}{Rc}$	$\frac{1}{Rc}$	$\sqrt{2}\frac{1}{Rc}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	90°	45°	45°
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1	90°	90°	0°



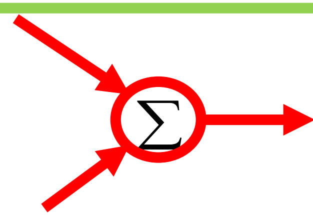
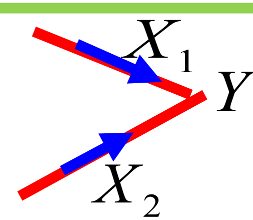
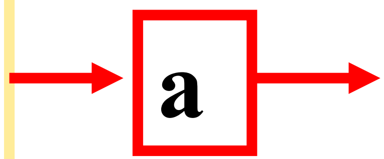
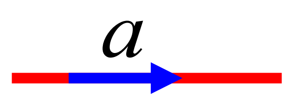
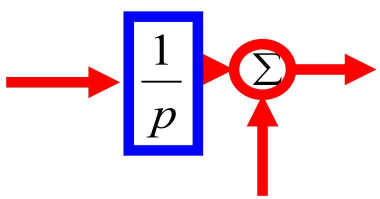
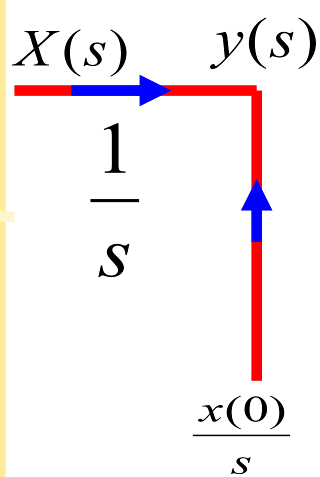
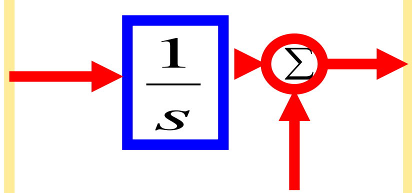


5.4 连续LTI系统的模拟

线性系统的模拟

- **系统模拟**:模拟系统和原系统在输入输出关系上满足同样的微分方程或系统函数
- 系统模拟的**用途**
  - 为系统**分析**提供一个方便的**验证**途径
  - 为系统**实现**提供一个有效的**优化**途径
- 系统模拟的**途径**:

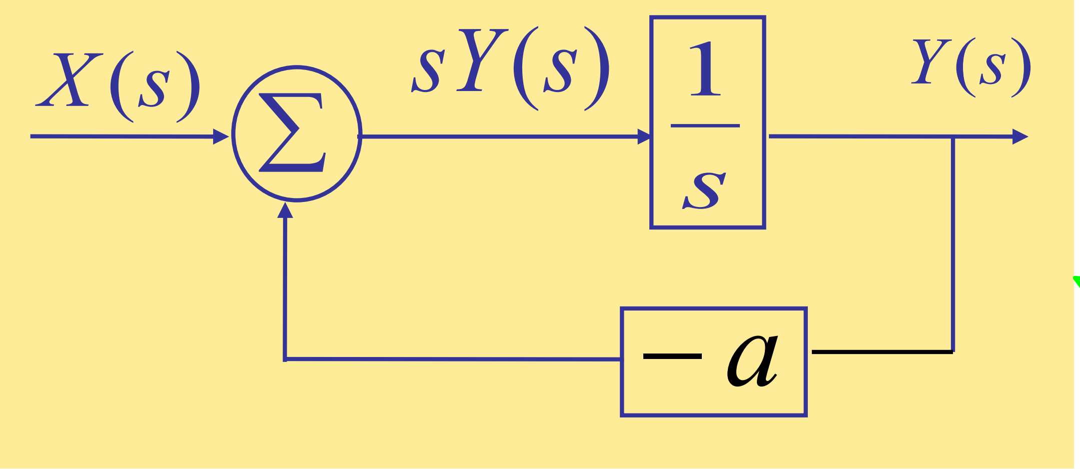
用于系统模拟的基本部件(积木块)

序号	名称		方框图	信号流图	数学模型	器件
1	加法器				$Y(s)=X_1+X_2$	运算放大器
2	乘法器				$y(s)=aX(s)$	
3	积分器	时域			$y(s)=\frac{F(s)}{s}+\frac{x(0)}{s}$	
		频域				

一阶系统的模拟

$$\frac{dy}{dt}+ay=x(t) \Leftrightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s+a}$$

$$sY(s)=X(s)-aY(s)$$



系统框图：对信号进行单向运算的方框和一些连线组成。它表明了信号流动的方向及对系统变量所作的运算

例题2：根据系统方程建立系统模拟框图

$$(p^3+8p^2+19p+12)y(t)=(4p+10)x(t)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12}$$

$$=\frac{(4s+10)F(s)}{(s^3+8s^2+19s+12)F(s)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&y(t)=(4p+10)f(t)\\&x(t)=(p^3+8p^2+19p+12)f(t)\end{aligned}}$$

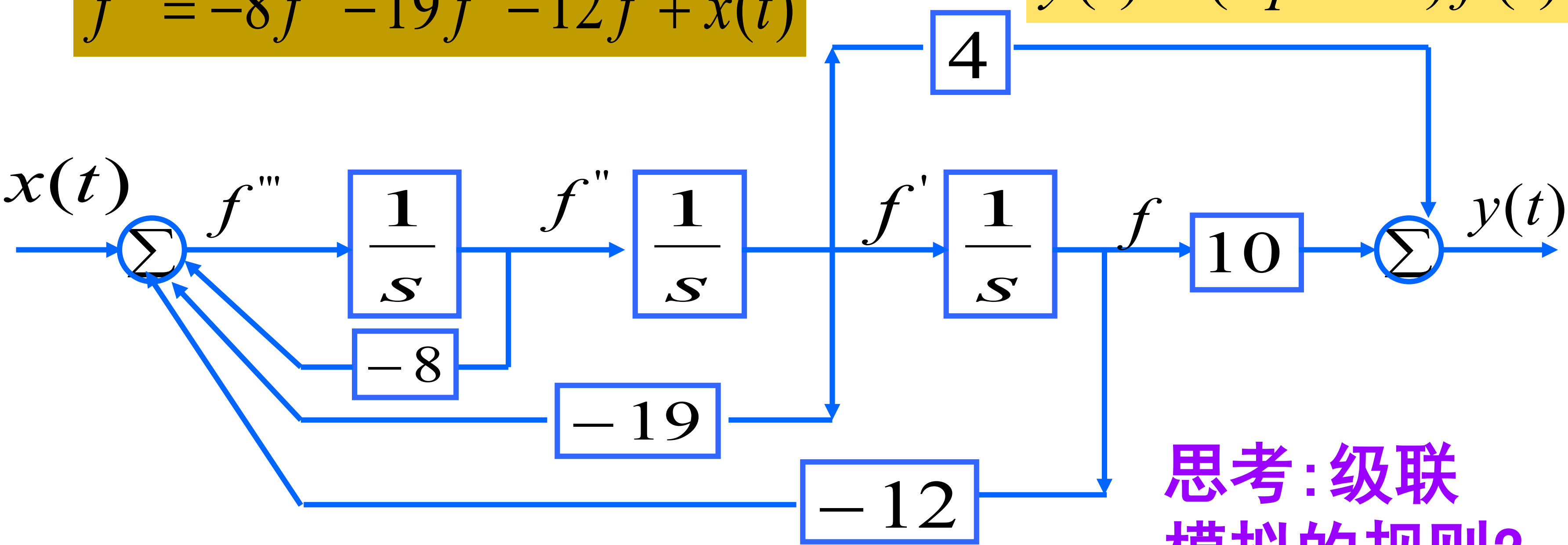
见课本P252的说明，也可像此处一样用拉氏变换证明此结论。

$$f'''=-8f''-19f'-12f+x(t)$$

直接(级联)模拟

$$f''' = -8f'' - 19f' - 12f + x(t)$$

$$y(t) = (4p + 10)f(t)$$



思考:级联模拟的规则?

实现代价:加法器:2,乘法器:5,积分器:3

寻找其他的模拟方案

$$(p^3+8p^2+19p+12)y(t)=(4p+10)x(t)$$

$$H(s)=\frac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12}$$

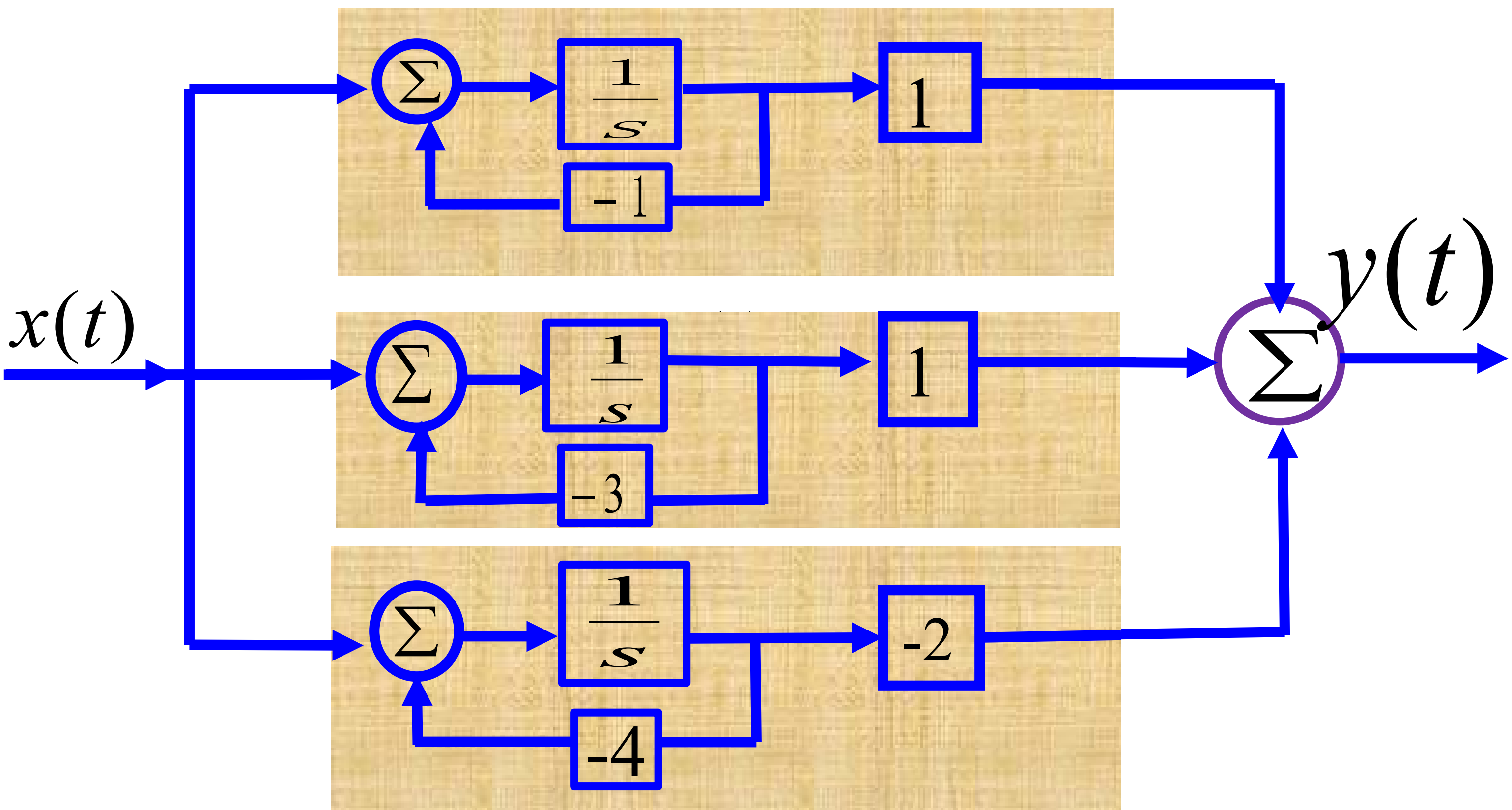
$$=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}-\frac{2}{s+4}$$

思考:除级联外，还有其他实现方式吗?

并联模拟法

$$H(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}-\frac{2}{s+4}$$

思考：并联模拟法的规律是什么？



实现代价：加法器：4，乘法器：6，积分器：3

寻找其他的模拟方案

$$H(s)=\frac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12}\text{（级联）}$$

$$=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}+\frac{-2}{s+4}\text{(并联）}$$

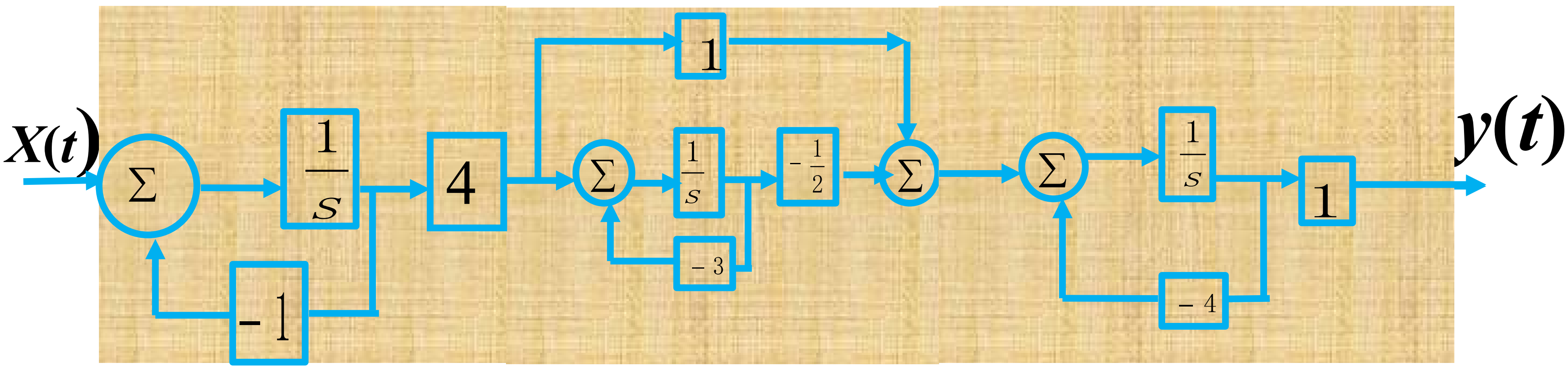
$$=\frac{4(s+\frac{5}{2})}{(s+1)(s+3)(s+4)}\text{(串联）}$$

思考:除级联外，还有其他实现方式吗?

串联模拟

$$H(s)=\frac{4}{s+1}\cdot\frac{s+2.5}{s+3}\cdot\frac{1}{s+4}$$

分子分解的
方法不唯一



实现代价:加法器：4，乘法器：7，积分器：3

三种实现方式的对比分析

实现方式	加法器	乘法器	积分器
级联	2	5	3
并联	4	6	3
串联	4	7	3

思考:哪一种实现方式最好?

小结

- 系统函数极点决定系统冲激响应的变化趋势，零点只影响冲激响应的幅度和相移
- 由系统函数的极点分布可以判定系统的稳定性
- 由系统函数的零极点分布可以直接勾画系统的频响特性曲线
- 系统的模拟与系统的物理实现只有一步之遥, 同时也是对系统进行优化设计的基础

课外作业

- 阅读5.9，6.1-6.2, 6.4-6.5; 预习:7.1-7.2
- 作业:5.32(1)小题，6.6题

- 每星期三晚23:59:59前交上星期布置的作业
  - 请按照新版教学指南要求按时上传提交
- 地点:在南一楼中402室