启航教育 云图 2023版

张宇数学教育系列丛书·一

张宇考研数学基础30讲——基础300题

主编 张宇

【概率论与数理统计分册】

本书配套习题课
扫码听讲

启航教育 云图 YUN TU

张宇考研数学基础30讲——基础300题

【概率论与数理统计分册】

主编 张宇

张宇数学教育系列丛书编委（按姓氏拼音排序）

蔡燧林 陈静静 方春贤 高昆轮 胡金德 贾建厂 李志龙 刘硕
柳叶子 吕倩 秦艳鱼 沈利英 史明洁 石臻东 王慧珍 王燕星
吴金金 徐兵 严守权 亦一（笔名） 曾凡（笔名） 张乐 张青云 张婷婷
张宇 郑利娜 朱杰

目录

习题演练

第 1 讲　随机事件与概率 …… 3
第 2 讲　一维随机变量及其分布 …… 4
第 3 讲　多维随机变量及其分布 …… 6
第 4 讲　随机变量的数字特征 …… 8
第 5 讲　大数定律与中心极限定理 …… 10
第 6 讲　数理统计 …… 11

参考答案

第 1 讲　随机事件与概率 …… 17
第 2 讲　一维随机变量及其分布 …… 19
第 3 讲　多维随机变量及其分布 …… 22
第 4 讲　随机变量的数字特征 …… 27
第 5 讲　大数定律与中心极限定理 …… 31
第 6 讲　数理统计 …… 33

习题演练

第1讲 随机事件与概率

1.1 设 A,B,C 是三个事件，则 A,B,C 中恰好有一个发生的事件是（ ）.

(A) $A\cup B\cup C$　　(B) $\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{C}\,\overline{A}$

(C) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$　　(D) $\Omega-\overline{AB\cup BC\cup CA}$

1.2 在区间(0,1)中随机地取两个数，则事件"两数之和小于$\frac{6}{5}$"的概率为________.

1.3 袋中有 3 个新球，2 个旧球，有放回抽取两次，每次抽取 1 个，则第二次抽取到新球的概率为（ ）.

(A) $\frac{3}{4}$　　(B) $\frac{3}{5}$　　(C) $\frac{2}{5}$　　(D) $\frac{3}{10}$

1.4 已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$，随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B|A)=0.8$，则和事件 $A\cup B$ 的概率 $P(A\cup B)=$________.

1.5 设随机事件 A,B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4，0.3 和 0.6. 若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$________.

1.6 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，则事件 A,B,C 全不发生的概率为________.

1.7 已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$________.

1.8 设工厂 A 和工厂 B 的产品次品率分别为 1% 和 2%，现从由 A 厂和 B 厂的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该次品是 A 厂生产的概率是________.

1.9 对于任意两个事件 A 和 B，下列说法正确的是（ ）.

(A) 若 $AB\neq\varnothing$，则 A,B 一定独立　　(B) 若 $AB\neq\varnothing$，则 A,B 有可能独立

(C) 若 $AB=\varnothing$，则 A,B 一定独立　　(D) 若 $AB=\varnothing$，则 A,B 一定不独立

1.10 设 A,B,C 为三个相互独立的事件，且 $0<P(C)<1$，则在下列给定的 4 对随机事件中不相互独立的是（ ）.

(A) $\overline{A\cup B}$ 与 C　　(B) $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$　　(C) $\overline{A\cup B}$ 与 $\overline{C}$　　(D) $\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$

1.11 随机事件 A,B 相互独立，已知只有 A 发生的概率为$\frac{1}{4}$，只有 B 发生的概率为$\frac{1}{4}$，则 $P(A)=$________.

第2讲 一维随机变量及其分布

2.1 设 $f(x)$ 是连续型随机变量 X 的概率密度，$F(x)$ 为其分布函数，则(　　).

(A) $0\leqslant f(x)\leqslant 1$　　(B) $P\{X=x\}=f(x)$

(C) $P\{X=x\}\leqslant F(x)$　　(D) $P\{X=x\}=F'(x)$

2.2 设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数，则下列函数中一定不是分布函数的是(　　).

(A) $F^2(x)$　　(B) $F^3(x)$　　(C) $F(2x)$　　(D) $2F(x)$

2.3 下列函数中，可以作为连续型随机变量概率密度的是(　　).

(A) $f_1(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　　(B) $f_2(x)=\begin{cases}\sin x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(C) $f_3(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\pi,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　　(D) $f_4(x)=\begin{cases}1-\sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

2.4 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$(　　).

(A) 0　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$　　(D) $1-\mathrm{e}^{-1}$

2.5 已知离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=p^{k+1}\,(k=0,1)$，则 $p=$(　　).

(A) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$　　(C) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$　　(D) $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

2.6 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，若

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0,\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}\quad(a>0,b>0)$$

为概率密度，则 a,b 应满足(　　).

(A) $2a+3b=4$　　(B) $3a+2b=4$　　(C) $a+b=1$　　(D) $a+b=2$

2.7 设 $X\sim f(x)=\begin{cases}Ax, & 1<x<2,\\ B, & 2\leqslant x<3,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 且 $P\{1<X<2\}=P\{2<X<3\}$.

求：常数 A,B；分布函数 $F(x)$；$P\{2<X<4\}$.

2.8 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$________.

2.9 假设测量的随机误差 $X\sim N(0,10^2)$，求在 100 次独立重复测量中，至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α，并利用泊松分布求出 α 的近似值(要求小数点后取两位有效数字).

注：$\Phi(1.96)=0.975$，另附表

λ	1	2	3	4	5	6	7	…
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	…

2.10 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}(-\infty<x<+\infty)$，则 $Y=2X$ 的概率密度为 $f_Y(y)=($　　$)$.

(A) $\frac{1}{\pi(1+4y^2)}$　　(B) $\frac{1}{\pi(4+y)^2}$　　(C) $\frac{2}{\pi(4+y^2)}$　　(D) $\frac{2}{\pi(1+y^2)}$

2.11 设 $X\sim E\left(\frac{1}{5}\right)$，令 $Y=\min\{X,2\}$，求 Y 的分布函数 $F(y)$.

2.12 设 X 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & 0\leqslant x<3,\\ \frac{1}{4}, & 3\leqslant x<5,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

且

$$Y=\begin{cases}0, & X<1,\\ 1, & 1\leqslant X<4,\\ 2, & X\geqslant 4.\end{cases}$$

求 Y 的分布律和分布函数.

第3讲 多维随机变量及其分布

3.1 已知二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right)$，则(　　).

(A)$A=\frac{1}{\pi^2},B=\frac{\pi}{4},C=\frac{\pi}{6}$　　(B)$A=\frac{1}{\pi^2},B=C=\frac{\pi}{2}$

(C)$A=1,B=\frac{\pi}{4},C=\frac{\pi}{6}$　　(D)$A=1,B=C=\frac{\pi}{2}$

3.2 已知二维随机变量(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{12}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{12}$

则$P\{X=2Y\}=$________.

3.3 设随机变量X,Y相互独立，且概率分布分别为

X	-1	1
$P\{X=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	-1	1
$P\{Y=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则下列式子中正确的是(　　).

(A)$X=Y$　　(B)$P\{X=Y\}=0$　　(C)$P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$　　(D)$P\{X=Y\}=1$

3.4 设随机变量X与Y有相同的概率分布

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

并且满足$P\{XY=0\}=1$，则(X,Y)的分布律为________.

3.5 已知二维随机变量(X,Y)在矩形区域$D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$上服从均匀分布，则$P\{X\geqslant 1\mid Y\geqslant 1\}=$________.

3.6 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：(1) $f_{X|Y}(x|y)$，$f_{Y|X}(y|x)$；

(2) $P\{X\leqslant 2|Y\leqslant 1\}$.

3.7 已知随机变量 X_1 与 X_2 的概率分布分别为

$$X_1\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix},\quad X_2\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

且 $P\{X_1X_2=0\}=1$.

(1)求 X_1 与 X_2 的联合分布律；

(2)问 X_1 与 X_2 是否独立？为什么？

3.8 设 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0,0\leqslant y\leqslant 2x+1\right\}$ 上服从均匀分布，求 (X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，并讨论 X 和 Y 的独立性.

3.9 设 (X,Y) 的分布律为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

则随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律为________.

3.10 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\leqslant x<1,0\leqslant y<1-x,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度.

3.11 设随机变量 X 和 Y 的联合分布是正方形 $G=\{(x,y)\,|\,1\leqslant x\leqslant 3,1\leqslant y\leqslant 3\}$ 上的均匀分布，求随机变量 $U=|X-Y|$ 的概率密度 $p(u)$.

3.12 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从参数为 1 的指数分布，$V=\min\{X,Y\}$. 求 V 的概率密度 $f_V(v)$.

3.13 已知随机变量 X,Y 相互独立，X 服从标准正态分布，Y 的概率分布为

Y	-1	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

求 $Z=XY$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

第4讲 随机变量的数字特征

4.1 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{2}{\pi(4+x^2)},x\in(-\infty,+\infty),$$

则 EX(　　).

(A)等于0　　(B)等于1　　(C)等于 π　　(D)不存在

4.2 已知随机变量 X,Y 相互独立,且都服从泊松分布,又知 $EX=2,EY=3$,则 $E[(X+Y)^2]=$(　　).

(A)10　　(B)25　　(C)30　　(D)51

4.3 已知连续型随机变量 X 与 Y 有相同的概率密度,且

$$f(x)=\begin{cases}3x^2\theta^3, & 0<x<\frac{1}{\theta},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}(\theta>0),$$

$E[a(X+2Y)]=\frac{1}{\theta}$,则 $a=$(　　).

(A)$\frac{2}{9}$　　(B)$\frac{1}{3}$　　(C)$\frac{4}{9}$　　(D)$\frac{2}{3}$

4.4 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}kx^{\alpha}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}(k,\alpha>0).$$

又知 $EX=\frac{3}{4}$,则 k,α 分别为________.

4.5 设离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.2, & -1\leqslant x<2,\\ 0.5, & 2\leqslant x<5,\\ 1, & x\geqslant 5,\end{cases}$$

则 $EX=$________.

4.6 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 $E\left(\frac{1}{X^2}\right)=$________.

4.7 设相互独立的两个随机变量 X,Y 具有同一分布律,且 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的数学期望 $EZ=$ ________.

4.8 设 $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2}, & \dfrac{1}{x}<y<x,x>1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 $EY=$ ________, $E\left(\dfrac{1}{XY}\right)=$ ________.

4.9 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(1,4)$，则 $D(XY)=($　　$)$.

(A)6　　(B)8　　(C)14　　(D)15

4.10 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，且 $X_1\sim B\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$，$X_2\sim B\left(6,\dfrac{1}{3}\right)$，$X_3\sim B\left(6,\dfrac{1}{5}\right)$，则 $E[X_1(X_1+X_2-X_3)]=$ ________.

4.11 设 X 为连续型随机变量，方差存在，则对任意常数 C 和 $\varepsilon>0$，必有(　　).

(A) $P\{|X-C|\geqslant\varepsilon\}=\dfrac{E(|X-C|)}{\varepsilon}$　　(B) $P\{|X-C|\geqslant\varepsilon\}\geqslant\dfrac{E(|X-C|)}{\varepsilon}$

(C) $P\{|X-C|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{E(|X-C|)}{\varepsilon}$　　(D) $P\{|X-C|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$

4.12 设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从参数为 $p(0<p<1)$ 的几何分布，令 $Z=X+Y$，求：

(1) Z 的概率分布；

(2) X 与 Z 的相关系数.

4.13 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

4.14 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 相互独立，且同服从泊松分布 $P(\lambda_i)(i=1,2,\cdots,6)$，且 $Y_1=X_1+X_2+X_3$，$Y_2=X_4+X_5+X_6$，则(　　).

(A) $\mathrm{Cov}(X_1,Y_1)=\sum\limits_{i=1}^{3}\lambda_i$　　(B) $\mathrm{Cov}(X_1,Y_2)=\sum\limits_{i=4}^{6}\lambda_i$

(C) $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)=0$　　(D) $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)=\sum\limits_{i=1}^{6}\lambda_i$

4.15 设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant|y|\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$ ________.

4.16 二维正态分布一般表示为 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，设 $(X,Y)\sim N(1,1;\ 4,9;0.5)$，令 $Z=2X-Y$，则 Z 与 Y 的相关系数为________.

第5讲 大数定律与中心极限定理

5.1 有一大批量产品，其正品率为0.8，从中有放回地重复抽取n批产品样品，每批10件，若X_k $(k=1,2,\cdots,n)$表示第k批产品的正品数，则当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$依概率收敛于________.

5.2 设随机变量序列$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立，且同服从参数为$\lambda$的泊松分布，则下列随机变量序列不满足切比雪夫大数定律条件的是(　　).

(A)$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$　　(B)$X_1-1,X_2-2,\cdots,X_n-n,\cdots$

(C)$X_1,2X_2,\cdots,nX_n,\cdots$　　(D)$X_1,\frac{1}{2}X_2,\cdots,\frac{1}{n}X_n,\cdots$

5.3 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，则根据切比雪夫大数定律，对任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

只要$X_1,X_2,\cdots,X_n$(　　).

(A)具有相同的分布　　(B)期望与方差都存在

(C)期望与方差都存在且相等　　(D)方差存在并一致有界

5.4 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$为独立同分布序列且均服从$[-2,4]$上的均匀分布，记$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-1}{\sqrt{3n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{3}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{3n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-1}{\sqrt{3}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

5.5 已知随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立且均在$(-1,1)$上服从均匀分布，根据独立同分布中心极限定理有$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\leqslant\sqrt{n}\right\}=$(　　).

(A)$\Phi(0)$　　(B)$\Phi(1)$　　(C)$\Phi(\sqrt{3})$　　(D)$\Phi(2)$

5.6 设某种型号的螺丝钉的重量是随机变量，期望值为50克，标准差为5克. 求：

(1)一袋100个螺丝钉的重量超过5.1千克的概率；

(2)每箱装有500袋螺丝钉，每袋100个，500袋中最多有4%的重量超过5.1千克的概率.

$(\Phi(2)=0.977\ 2,\Phi(2.58)=0.995\ 1)$

5.7 根据中心极限定理，投掷一枚硬币，要使出现正面的频率与每次出现正面的概率之差的绝对值不大于0.01的概率不小于0.99，至少应投掷的次数为________.$(\Phi(2.58)=0.995\ 1)$

第6讲 数理统计

6.1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，μ 是未知参数，$\overline{X}$是样本均值，则下列各式是统计量的为(　　).

(A) $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$　　(B) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

(C) $\overline{X}-\mu$　　(D) $(\overline{X}-\mu)^2+\sigma^2$

6.2 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(0,3^2)$，而 $X_1,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,\cdots,Y_9$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则统计量 $U=\frac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$服从________分布，参数为________.

6.3 设 $X\sim N(0,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_7$ 是来自总体 X 的样本，$\frac{c\sum\limits_{i=1}^{4}X_i}{\sqrt{X_5^2+X_6^2+X_7^2}}(c>0)$服从 $t(n)$ 分布，则 (c,n) 为(　　).

(A) $(\sqrt{3},3)$　　(B) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},3\right)$　　(C) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},4\right)$　　(D) $(\sqrt{3},2)$

6.4 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值，S^2 为样本方差，则(　　).

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$　　(B) $nS^2\sim\chi^2(n)$

(C) $\frac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$　　(D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$

6.5 设 $x_1,x_2,\cdots,x_5$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的样本观测值，若 $\sum\limits_{i=1}^{5}x_i=5$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=9$，则样本方差 $s^2=$________.

6.6 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，则统计量 $Y=\frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{4}(X_i-\mu)^2$ 服从________分布，其自由度为________.

6.7 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，记统计量 $T=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$，则 $ET=$________.

6.8 从装有1个白球和2个黑球的罐子里有放回地取球，记

$$X=\begin{cases}0, & \text{取到白球},\\ 1, & \text{取到黑球},\end{cases}$$

这样连续取5次得样本 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5. 记 $Y=X_1+X_2+\cdots+X_5$，求：

(1) Y 的分布律，EY，$E(Y^2)$；

(2)$E\overline{X}$,$E(S^2)$(其中$\overline{X}$,S^2 分别为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 的样本均值与样本方差).

6.9 口袋里有 N 个大小相同重量相等的球,每个球上写上号码 $k,k=1,2,\cdots,N$,从中任取一个球,设其号码为 X,又 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\leqslant N)$为取自总体 X 的简单随机样本,$\overline{X}$为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本均值,将$E\overline{X}$,$D\overline{X}$表示为 N 的函数.

6.10 设总体 X 服从参数为 λ 的指数分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个简单随机样本,则参数 λ 的矩估计量为(　　).

(A)$\dfrac{1}{2\overline{X}}$　　(B)$\dfrac{1}{\overline{X}}$　　(C)$\overline{X}$　　(D)$\dfrac{1}{2}\overline{X}$

6.11(仅数学一) 设$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是未知参数 θ 的两个估计量,则 $D\hat{\theta}_1<D\hat{\theta}_2$是$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$更有效的(　　).

(A)必要非充分条件　　(B)充分非必要条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分也非必要条件

6.12(仅数学一) 设 X_1,X_2,X_3 取自存在有限数学期望 μ 和方差 σ^2 的总体 X,下列统计量中不为总体 X 数学期望 μ 的无偏估计量的是(　　).

(A)$\hat{\mu}_1=\dfrac{1}{5}X_1+\dfrac{3}{10}X_2+\dfrac{1}{2}X_3$　　(B)$\hat{\mu}_2=\dfrac{1}{3}X_1+\dfrac{1}{4}X_2+\dfrac{5}{12}X_3$

(C)$\hat{\mu}_3=\dfrac{1}{4}X_1+\dfrac{1}{4}X_2+\dfrac{1}{4}X_3$　　(D)$\hat{\mu}_4=\dfrac{1}{3}X_1+\dfrac{3}{4}X_2-\dfrac{1}{12}X_3$

6.13 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个简单随机样本,X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}-\theta^x\ln\theta, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

$0<\theta<1$,求参数 θ 的矩估计量.

6.14 设总体 X 服从参数为 $p(0<p<1)$的 0-1 分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个简单随机样本,求参数 p 的最大似然估计量.

6.15 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$1-3\theta$	$2\theta^2$	$3\theta(1-\theta)$

其中 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{1}{3}\right)$为未知参数,给定总体 X 的样本值为 3,1,3,0,3,1,2,3,求参数 θ 的最大似然估计值.

6.16 设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & x<\theta,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数.又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本观测值,求参数 θ 的最大似然估计值.

6.17(仅数学一) 设$\overline{X}$为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$(σ^2 未知)的一个简单随机样本的样本均值,若已知在置信水平 $1-\alpha$ 下,μ 的置信区间长度为 2,则在显著性水平 α 下,对于假设检验问题 $H_0:\mu=1,H_1:\mu\neq 1$,要使得检验结果接受 H_0,则应有(　　).

(A)$\overline{X}\in(-1,1)$　　(B)$\overline{X}\in(-1,3)$

(C)$\overline{X}\in(-2,2)$　　(D)$\overline{X}\in(0,2)$

6.18(仅数学一) 某大学学生身高 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ,σ^2 均未知. $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$是从总体中抽取的16个样本,假设检验问题为

$$H_0:\mu\leqslant 140\ \text{cm},\quad H_1:\mu>140\ \text{cm}.$$

由样本观察值计算得 $\bar{x}=170$ cm,$s^2=16$,$\alpha=0.05$,$t_{0.05}(15)=1.75$,则检验的结果为(　　).

(A)接受 H_0,可能会犯第二类错误

(B)拒绝 H_0,可能会犯第二类错误

(C)接受 H_0,可能会犯第一类错误

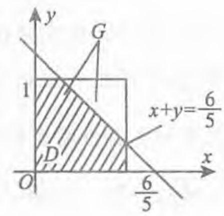
(D)拒绝 H_0,可能会犯第一类错误

参考答案

第1讲 随机事件与概率

1.1 (C) **解** 事件 A,B,C 中恰好有一个发生，是指其中必有一个发生同时另外两个不发生，因此，所述事件应表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$. 另外，$A\cup B\cup C$ 表示三个事件中至少有一个发生，$\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{C}\,\overline{A}$ 表示三个事件中至少有两个同时不发生，又由 $\Omega-\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{C}\,\overline{A}=\overline{\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{C}\,\overline{A}}=AB\cup BC\cup CA$，则表示三个事件中至少有两个同时发生，综上讨论，应选(C).

1.2 $\frac{17}{25}$(或 0.68) **解** 设这两个数为 x 和 y，则 (x,y) 的取值范围为图中正方形 G，那么"两数之和小于 $\frac{6}{5}$"即"$x+y<\frac{6}{5}$"，此时 (x,y) 的取值范围为图中阴影部分 D. 本题为几何概型求概率题，所求概率为 $p=\frac{D\text{的面积}}{G\text{的面积}}$. 而 G 的面积为1，D 的面积为 $1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{17}{25}$，故 $p=\frac{17}{25}$(或 0.68).



1.3 (B) **解** 本题是古典概型中连续抽取问题的概率计算. 连续抽取通常分有放回抽取和无放回抽取两种方式，其中，有放回抽取，每次抽取都是在袋中新、旧球的数量不变的情况下进行，每次抽取结果相互独立，因此，第二次抽取到新球的概率为 $\frac{3}{5}$，故选(B).

【注】 若是无放回抽取，设 $A_i(i=1,2,\cdots,5)$ 表示第 i 次抽取到新球，则有 $A_2=A_1A_2\cup\overline{A_1}A_2$，又 $P(A_1)=\frac{3}{5}$，$P(\overline{A_1})=\frac{2}{5}$，于是由全概率公式，得

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5},$$

结果表明第二次抽取到新球仍然与第一次是否抽取到新球无关，这就是所谓的"抽签原理".

1.4 0.7 **解** 由 $0.8=P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$，得 $P(AB)=0.8P(A)=0.8\times0.5=0.4$. 故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7.$$

1.5 0.3 **解** 由已知得 $0.6=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.3-P(AB)$，即 $P(AB)=0.1$，故

$$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3.$$

1.6 $\frac{3}{8}$ **解** 因为 $ABC\subset AB$，所以 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，即 $P(ABC)=0$. 所求概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]\end{aligned}$$

$$=1-\left(\frac{1}{4}\times3-0-\frac{1}{16}\times2+0\right)=\frac{3}{8}.$$

1.7 $1-p$ 解 由

$$P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=1-p-P(B)+P(AB),$$

知 $P(B)=1-p$.

1.8 $\frac{3}{7}$ 解 记 $C=\{$取的产品是 A 厂生产的$\}$，$D=\{$取的是次品$\}$. 由题意知：

$$P(C)=0.6,\quad P(\overline{C})=0.4,\quad P(D|C)=0.01,\quad P(D|\overline{C})=0.02.$$

故

$$P(C|D)=\frac{P(CD)}{P(D)}=\frac{P(C)P(D|C)}{P(C)P(D|C)+P(\overline{C})P(D|\overline{C})}$$

$$=\frac{0.6\times0.01}{0.6\times0.01+0.4\times0.02}=\frac{3}{7}.$$

1.9 (B) 解 本题主要考查事件的相容性和独立性的关系. 严格地说，两个事件之间的“不相容”即“互斥”与“相互独立”之间没有任何关系，它们是不同层面上的两个概念. 因此，当 $AB\neq\varnothing$ 时，A,B 可能独立，也可能不独立，换一个角度讲，事件的独立性只能由概率公式 $P(AB)=P(A)P(B)$ 判断，仅由事件的关系是不能推断事件独立性的. 故选择(B). 另：若 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(A|B)=\frac{2}{3}$，又 $P(AB)=\frac{1}{3}\neq 0$，显然 $AB\neq\varnothing$，但 A,B 不独立，因此，(A)不成立. 而当 $AB=\varnothing$ 时，若 $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$，则 A,B 相互独立，否则不相互独立. 故(C)，(D)也不成立.

1.10 (B) 解 本题主要考查的是事件独立性的一个重要性质，即如果有若干个事件相互独立，则其中一部分事件的运算生成的事件与另一部分事件的运算生成的事件仍然相互独立. 根据这个性质，在事件 A,B,C 相互独立的条件下，其中由事件 A 和 B 运算生成的事件 $\overline{A\cup B}$，$\overline{AB}$ 与事件 C 或 $\overline{C}$ 依然相互独立. 因此，选项(A)，(C)，(D)中 3 对随机事件相互独立，故由排除法，应选(B).

1.11 $\frac{1}{2}$ 解 本题求解的关键是对“只有 A 发生”的事件的理解，并用符号准确地描述为 $A\overline{B}$，类似地，“只有 B 发生”的事件，即指 $\overline{A}B$，又根据题设及事件独立性的性质，由随机事件 A,B 相互独立，从而有 A 与 $\overline{B}$ 及 $\overline{A}$ 与 B 相互独立，即有

$$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)[1-P(B)]=\frac{1}{4},\quad P(\overline{A}B)=[1-P(A)]P(B)=\frac{1}{4},$$

联立两个式子解得 $P(A)=\frac{1}{2}$.

第2讲 一维随机变量及其分布

2.1 (C) 解 本题重点考查的是连续型随机变量的概率密度、分布函数及在一定点的概率三者之间的关系.首先,概率密度 $f(x)$不是概率,只是描绘连续型随机变量概率分布密集程度的度量,因此,只要求函数值非负,但不要求 $f(x)\leqslant 1$.其次,$P\{X=x\}$是连续型随机变量在定点 x 的概率,由于连续型随机变量在任何单点 $X=x$ 的概率均为零,因此有 $P\{X=x\}=0$.另外,分布函数 $F(x)$是概率,即 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$,所以总有 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$.综上,$P\{X=x\}=0\leqslant F(x)$恒成立,故选(C).

2.2 (D) 解 本题集中讨论分布函数的问题.判断一个函数是否构成某个随机变量的分布函数,应该抓住分布函数的两个基本特征:一是函数属性,即在实数范围内,$F(x)$非对称,且单调不减,并在任何取值点处右连续,同时有 $F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$;二是概率属性,即有 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$.由此判定,选项(A),(B),(C)中函数均为分布函数.由 $2F(+\infty)=2$,知 $2F(x)$不是分布函数,故选(D).

2.3 (A) 解 由非负性,可以排除选项(B),又由

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_3(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_4(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-1,$$

知选项(A)符合题意,故选(A).

2.4 (C) 解 由题设,X 的分布函数有间断点,但又非阶梯形函数,因此,可以确定 X 为混合型随机变量,且所求概率的取值点 $X=1$ 为 $F(x)$的间断点,必有正概率,且其概率值为该点函数值与该点左极限的差值,即 $P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=1-\mathrm{e}^{-1}-\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$.故选择(C).

2.5 (A) 解 离散型随机变量 X 的分布律是描述离散型随机变量概率分布的最基本的概念.一般地,若随机变量的取值点(即正概率点)为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$,则 $P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots,n)$为 X 的分布律的充分必要条件是

$$p_i>0(i=1,2,\cdots,n)\text{且}\sum_{i=1}^{n}p_i=1.$$

因此,有
$$\sum_{k=0}^{1}P\{X=k\}=p+p^2=1\text{ 且 }p>0,$$

解得 $p=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$,其中 $p=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0$,不合题意,舍去,故 $p=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

2.6 (A) 解 因为

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}af_1(x)\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}bf_2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+b\int_0^3 f_2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b,$$

所以$2a+3b=4$,即选项(A)是正确的.

2.7 解 由于
$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 Ax\mathrm{d}x+\int_2^3 B\mathrm{d}x=\frac{3}{2}A+B,$$

又 $P\{1<X<2\}=P\{2<X<3\}$，即 $\int_1^2 Ax\mathrm{d}x=\int_2^3 B\mathrm{d}x$，$\frac{3}{2}A=B$，解得 $A=\frac{1}{3}$，$B=\frac{1}{2}$，且

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<1,\\ \int_1^x\frac{1}{3}t\mathrm{d}t, & 1\leqslant x<2,\\ \int_1^2\frac{1}{3}t\mathrm{d}t+\int_2^x\frac{1}{2}\mathrm{d}t, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & x<1,\\ \frac{1}{6}(x^2-1), & 1\leqslant x<2,\\ \frac{1}{2}(x-1), & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3,\end{cases}$$

$$P\{2<X<4\}=F(4-0)-F(2)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

或
$$P\{2<X<4\}=\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_2^3\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

2.8 $\frac{9}{64}$ **解** 由题意，$Y\sim B(3,p)$，其中 $p=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$，故

$$P\{Y=2\}=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{3-2}=\frac{9}{64}.$$

2.9 解 每次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率为

$$p=P\{|X|>19.6\}=P\left\{\frac{|X|}{10}>1.96\right\}=2[1-\Phi(1.96)]=0.05.$$

设 Y 为 100 次独立重复测量中事件 $\{|X|>19.6\}$ 出现的次数，Y 服从参数为 $n=100$，$p=0.05$ 的二项分布，所求概率

$$\alpha=P\{Y\geqslant 3\}=1-P\{Y<3\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}-P\{Y=2\}$$

$$=1-0.95^{100}-100\times 0.05\times 0.95^{99}-\frac{100\times 99}{2}\times 0.05^2\times 0.95^{98}.$$

由泊松定理，Y 近似服从参数为 $\lambda=np=100\times 0.05=5$ 的泊松分布，从而

$$\alpha\approx 1-\mathrm{e}^{-\lambda}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}-\frac{\lambda^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}=1-\mathrm{e}^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}\right)=1-0.007\times(1+5+12.5)\approx 0.87.$$

2.10 (C) **解** 因为 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{2X\leqslant y\}=P\left\{X\leqslant\frac{y}{2}\right\}=F_X\left(\frac{y}{2}\right)$，所以

$$f_Y(y)=\frac{1}{2}f_X\left(\frac{y}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi\left(1+\frac{y^2}{4}\right)}=\frac{2}{\pi(4+y^2)},$$

故选(C).

2.11 解 当 $0\leqslant X<2$ 时，$Y=X<2$；当 $X\geqslant 2$ 时，$Y=2$. 因此随机变量 Y 的取值一定不小于 0 且不大于 2，即 $P\{0\leqslant Y\leqslant 2\}=1$. 由于 X 服从参数 $\frac{1}{5}$ 的指数分布，因此当 $x>0$ 时，$P\{X\leqslant x\}=1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$；当 $0\leqslant y<2$ 时，

$$P\{Y\leqslant y\}=P\{\min\{X,2\}\leqslant y\}=P\{X\leqslant y\}=1-\mathrm{e}^{-\frac{y}{5}}.$$

于是，Y 的分布函数为 $F(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{y}{5}}, & 0\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$

【注】 这里 Y 的分布函数 $F(y)$ 有间断点 $(y=2)$，且非阶梯形函数，则 Y 是混合型随机变量，自然没有 $F(y)$ 求导得概率密度 $f(y)$ 之说.

2.12 解 显然，Y 的正概率点为 0,1,2. 于是

$$P\{Y=0\}=P\{X<1\}=\int_{-\infty}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{1}{6}\mathrm{d}x=\frac{1}{6};$$

$$P\{Y=1\}=P\{1\leqslant X<4\}=\int_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{3}\frac{1}{6}\mathrm{d}x+\int_{3}^{4}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12};$$

$$P\{Y=2\}=P\{X\geqslant 4\}=\int_{4}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{4}^{5}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

或 $$P\{Y=2\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}=1-\frac{1}{6}-\frac{7}{12}=\frac{1}{4}.$$

因此，Y 的分布律为

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$

对应分布函数是以 0,1,2 为分段点的阶梯形函数：

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{1}{6}, & 0\leqslant y<1,\\ \frac{3}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

第3讲 多维随机变量及其分布

3.1 (B) **解** 本题是根据二维连续型随机变量分布函数的性质确定其中的待定常数，从题型结构观察，该函数无分段点，含三个待定常数，只要从联合分布在 x,y 趋于无穷大时的性质出发，列出三个方程，可以求解定值. 由

$$F(+\infty,+\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

$$F(-\infty,+\infty)=A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

$$F(+\infty,-\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

解得 $A=\frac{1}{\pi^2},B=C=\frac{\pi}{2}$. 故选(B).

3.2 $\frac{1}{4}$ **解** $P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}$.

3.3 (C) **解** 由加法公式，可得

$$\begin{aligned}P\{X=Y\}&=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}\\&=P\{X=-1\}P\{Y=-1\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故选(C).

【注】 讨论随机变量的分布时，经常会遇到两个或多个独立同分布的随机变量的概念，往往有人误以为，两个随机变量 X,Y 独立同分布，则必相等或 $P\{X=Y\}=1$，这都是错误的. 如本题中，随机变量 X,Y 相互独立，事件 $\{X=Y\}$ 等价于两个互斥事件 $\{X=Y=-1\}$ 与 $\{X=Y=1\}$ 的并集.

3.4

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0

解 设 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	p_{11}	p_{12}
1	p_{21}	p_{22}

根据联合分布律性质，有 $p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22}=1$,

又由题设 $P\{XY=0\}=1$，即

$$\begin{aligned}&P\{XY=0\}\\=&P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}\end{aligned}$$

$$=p_{11}+p_{12}+p_{21}=1,$$

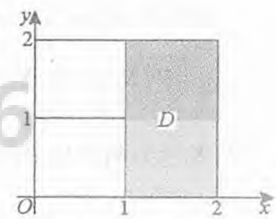
得 $p_{22}=0$. 又由事件组 $\{Y=0\}$, $\{Y=1\}$ 为完备事件组,因此有

$$P\{X=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=p_{21}+p_{22}=\frac{1}{3},$$

得 $p_{21}=\frac{1}{3}$,同理可得 $p_{12}=\frac{1}{3}$,进而得 $p_{11}=1-p_{12}-p_{21}=\frac{1}{3}$. 于是,$(X,Y)$的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0

3.5 1 **解** 由条件概率公式 $P\{X\geqslant1|Y\geqslant1\}=\dfrac{P\{X\geqslant1,Y\geqslant1\}}{P\{Y\geqslant1\}}$,因此,概率值即为事件$\{X\geqslant1,Y\geqslant1\}$的覆盖区域与正概率密度定义区域的公共面积和事件$\{Y\geqslant1\}$的覆盖区域与正概率密度定义区域的公共面积之比,如图所示,它们对应的区域均为同一区域,面积比为1,所以有



$$P\{X\geqslant1|Y\geqslant1\}=1.$$

【注】 本题在二维均匀分布下计算条件概率 $P\{X\geqslant1|Y\geqslant1\}$,主要考查考生运用几何直观背景处理概率计算的能力. 一般地,若设二维随机变量(X,Y)服从均匀分布,则该分布的概率(包括条件概率)都应考虑用几何直观背景计算,实际表现为面积比.

3.6 **分析** 讨论二维连续型随机变量的条件概率分布,必须要牢记类似随机事件的条件概率公式的关系式

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\quad f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},$$

可以看到若要计算 $f_{X|Y}(x|y)$必须同时有联合概率密度 $f(x,y)$和相应的边缘概率密度 $f_Y(y)$,而且知道其中任意两项就可推出另一项. 因此,计算其条件概率密度,首先要在已知联合概率密度的条件下计算出各自的边缘概率密度.

解 (1)由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\mathrm{d}y=2\mathrm{e}^{-2x}$ 知

$$f_X(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同理,有

$$f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此,得条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

事实上,可观察出

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

变量可分离，X,Y 相互独立，必有

$$f_{X|Y}(x|y)=f_X(x),\quad f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y).$$

(2) $P\{X\leqslant 2\mid Y\leqslant 1\}=\dfrac{P\{X\leqslant 2,Y\leqslant 1\}}{P\{Y\leqslant 1\}}=\dfrac{\int_0^2 dx\int_0^1 2e^{-(2x+y)}dy}{\int_0^1 e^{-y}dy}=2\int_0^2 e^{-2x}dx=1-e^{-4}.$

【注】 由本题可看到，无论一维随机变量还是二维随机变量，它们的相互关系和概念，如独立性、条件概率等，以及概率的加法运算、乘法运算等与第1讲涉及的内容是一脉相承的，学习时应该紧密联系起来，而不能相互隔离开来. 另外，分段函数的乘除运算只在非零区域内的非零函数之间进行.

3.7 解 (1)**方法一** 按照求离散型随机变量联合分布的一般步骤.

由于 $P\{X_1X_2=0\}=1$，因此 $P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0$，从而有

$$P\{X_1=-1,X_2=0\}=P\{X_1=-1,X_2=0\}+P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=-1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{X_1=-1,X_2=1\}+P\{X_1=0,X_2=1\}+P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{X_2=1\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{X_1=1,X_2=0\}+P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{X_1=1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X_1=0,X_2=0\}=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=0,$$

得 X_1 和 X_2 的联合分布律为

X_2 \ X_1	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

方法二 利用联合分布律结构.

由于 $P\{X_1X_2=0\}=1$，因此 $P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0$.

从而联合分布律有如下结构

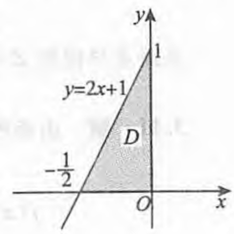
X_2 \ X_1	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
0	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\frac{1}{2}$
1	0	p_{22}	0	$\frac{1}{2}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

容易得到 $p_{11}=\frac{1}{4},p_{12}=0,p_{13}=\frac{1}{4},p_{22}=\frac{1}{2}$，即得 X_1 和 X_2 的联合分布律.

(2)由 $p_{21}\neq p_{2\cdot}\,p_{\cdot 1}$，知 X_1 与 X_2 不相互独立.

【注】 本题再次说明掌握联合分布律的结构的重要性.在判断 X_1 与 X_2 是否相互独立时,只要找到一对 i,j 的值,不满足 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$,就可以判定 X_1 与 X_2 不相互独立.为此,常选择那些 $p_{ij}=0$ 的 i,j,因为它们对应的 $p_{i\cdot},p_{\cdot j}$ 是不会为零的.

3.8 分析 本题主要计算的是二维连续型随机变量的边缘概率密度,并在此基础上讨论两个随机变量的独立性.为此,首先要由均匀分布的性质自行生成其联合概率密度.另外,题中的难点是正概率密度的定义区域较为复杂,计算边缘概率密度时,需要借助区域图确定积分限.



解 如图所示,正概率密度的定义区域为三角形,面积为 $\frac{1}{4}$,由二维均匀分布的定义,知 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此,(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$,$f_Y(y)$ 分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{2x+1}4\mathrm{d}y, & -\frac{1}{2}<x<0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}4+8x, & -\frac{1}{2}<x<0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{\frac{y-1}{2}}^{0}4\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2-2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$,因此 X 和 Y 不相互独立.

3.9 $Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}$ **解** 依题设,随机变量 $Z=X+Y$ 的正概率取值点为 $Z=0,1,2,3$.于是,由联合分布律得

$$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{10},$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{2}{5},$$

$$P\{Z=2\}=P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{2}{5},$$

$$P\{Z=3\}=P\{X=1,Y=2\}=\frac{1}{10},$$

从而得 $Z=X+Y$ 的概率分布

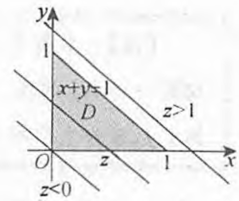
$$Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}.$$

3.10 解 由区域图(见图),容易看到,正概率密度的定义区域与积分区间之间有三种组合形式,因此,要分别在 $z<0,0\leqslant z<1,z\geqslant 1$ 三种情况下计算二重积分,具体求解如下:

依题设,当 $z<0$ 时,$F(z)=P\{Z\leqslant z\}=0$;

当 $z\geqslant 1$ 时,$F(z)=P\{Z\leqslant z\}=1$;

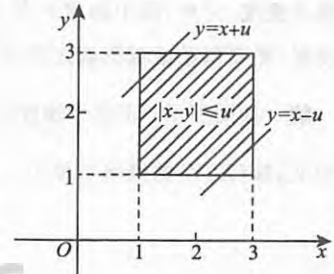
当 $0\leqslant z<1$ 时，$F(z)=P\{Z\leqslant z\}=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{z-x}6x\mathrm{d}y=z^3$. 所以



$$F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ z^3, & 0\leqslant z<1,\\ 1, & z\geqslant 1.\end{cases}$$

从而求导得到 $Z=X+Y$ 的概率密度为 $f(z)=\begin{cases}3z^2, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

3.11 解 由条件知 X 和 Y 的联合概率密度为



$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 1\leqslant x\leqslant 3,1\leqslant y\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

以 $F_U(u)=P\{U\leqslant u\}(-\infty<u<+\infty)$ 表示随机变量 U 的分布函数(见图). 显然，当 $u<0$ 时，$F_U(u)=0$；当 $u\geqslant 2$ 时，$F_U(u)=1$.

设 $0\leqslant u<2$，则

$$F_U(u)=\iint\limits_{|x-y|\leqslant u}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{|x-y|\leqslant u\\ 1\leqslant x\leqslant 3\\ 1\leqslant y\leqslant 3}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}[4-(2-u)^2]=1-\frac{1}{4}(2-u)^2.$$

于是，随机变量 U 的概率密度为 $p(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(2-u), & 0<u<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

3.12 解 X 与 Y 的分布函数均为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ 根据 X 与 Y 的独立性，$V=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_V(v)&=P\{\min\{X,Y\}\leqslant v\}=1-P\{\min\{X,Y\}>v\}\\&=1-P\{X>v,Y>v\}=1-[1-F(v)]^2=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2v}, & v\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\end{aligned}$$

故 V 的概率密度为

$$f_V(v)=F_V'(v)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2v}, & v>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

3.13 解 设 $Z=XY$ 的分布函数为 $F_Z(z)$，则

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{XY\leqslant z\}=P\{XY\leqslant z,Y=-1\}+P\{XY\leqslant z,Y=1\}\\&=P\{-X\leqslant z,Y=-1\}+P\{X\leqslant z,Y=1\}=\frac{1}{4}\Phi(z)+\frac{3}{4}\Phi(z)=\Phi(z),\end{aligned}$$

式中，$\Phi(z)$ 为标准正态分布的分布函数.

故 $Z=XY$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}$，$z\in\mathbf{R}$.

【注】 离散型和连续型随机变量结合来考查，是近几年很热门的命题点. 在做这类习题的时候，往往需要将离散型随机变量的可能取值看作完备事件组，用全概率公式，将离散型随机变量的取值代入，根据另一个连续型随机变量的分布函数的特征来求解随机变量 Z 的分布函数.

第4讲 随机变量的数字特征

4.1 (D) **解** 由于$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x}{\pi(4+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\ln(4+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$不存在，故选择(D).

【注】 一般情况下，连续型随机变量的数学期望是概率密度与积分变量乘积的无穷积分，必然会遇到收敛性问题.就本题而言，被积函数为奇函数，积分区间关于原点对称，似乎积分为零，其实不然，对称性只适用于定积分及收敛条件下的广义积分，由于积分$\int_0^{+\infty}\frac{2x}{\pi(4+x^2)}\mathrm{d}x$不收敛，因此结论不正确.本题表明，掌握好高等数学的知识是正确求解概率论问题的基础.

4.2 (C) **解** 由于X,Y相互独立，因此有$E(X+Y)=EX+EY=5,D(X+Y)=DX+DY=5$，从而得

$$E[(X+Y)^2]=D(X+Y)+[E(X+Y)]^2=5+25=30.$$

故选(C).

4.3 (C) **解** 由于X与Y同分布，因此$EX=EY$，于是

$$E[a(X+2Y)]=a(EX+2EY)=3aEX=3a\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=3a\int_0^{\frac{1}{\theta}}3x^3\theta^3\mathrm{d}x$$

$$=9a\cdot\frac{1}{4}x^4\theta^3\Big|_0^{\frac{1}{\theta}}=\frac{9a}{4\theta}=\frac{1}{\theta},$$

解得$a=\frac{4}{9}$，故选(C).

4.4 3;2 **解** 由

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1kx^\alpha\mathrm{d}x=k\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\Big|_0^1=\frac{k}{\alpha+1}=1,\text{即 }k-\alpha=1,$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1kx^{\alpha+1}\mathrm{d}x=k\frac{1}{\alpha+2}x^{\alpha+2}\Big|_0^1=\frac{k}{\alpha+2}=\frac{3}{4},\text{即 }4k-3\alpha=6,$$

联立上式解得$k=3,\alpha=2$.

4.5 2.9 **解** 由题设，X的取值点，即$F(x)$的分段点为$-1,2,5$.由

$$P\{X=-1\}=F(-1)-F(-1-0)=0.2-0=0.2,$$

$$P\{X=2\}=F(2)-F(2-0)=0.5-0.2=0.3,$$

$$P\{X=5\}=1-0.2-0.3=0.5,$$

有$X\sim\begin{pmatrix}-1&2&5\\0.2&0.3&0.5\end{pmatrix}$，于是$EX=-1\times0.2+2\times0.3+5\times0.5=2.9$.

4.6 $\frac{3}{4}$ **解** $E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$

4.7 $\frac{3}{4}$ **解** 由题设,得

$$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=\frac{3}{4}.$$

故 Z 的分布律为

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

故 $EZ=\frac{3}{4}$.

4.8 $\frac{3}{4}$;$\frac{3}{5}$ **解** 由题设知

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{1}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}y\cdot\frac{3}{2x^3y^2}\mathrm{d}y=3\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{3}{4},$$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{1}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{xy}\cdot\frac{3}{2x^3y^2}\mathrm{d}y=\frac{3}{5}.$$

【注】 若是先求 $f_Y(y)$,再利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y$ 求 EY 也可以,但不如上述当作二维随机变量函数计算简单.

4.9 (C) **解** X,Y 相互独立时,有

$$D(XY)=DXDY+DX(EY)^2+DY(EX)^2$$
$$=2\times4+2\times1^2+4\times1^2=14,$$

选(C).

4.10 $\frac{33}{5}$ **解** 由数学期望的性质,有

$$E[X_1(X_1+X_2-X_3)]=E(X_1^2+X_1X_2-X_1X_3)$$
$$=E(X_1^2)+EX_1EX_2-EX_1EX_3$$
$$=DX_1+(EX_1)^2+EX_1EX_2-EX_1EX_3$$
$$=4\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(4\times\frac{1}{2}\right)^2+\left(4\times\frac{1}{2}\right)\left(6\times\frac{1}{3}\right)-\left(4\times\frac{1}{2}\right)\left(6\times\frac{1}{5}\right)=\frac{33}{5}.$$

4.11 (C) **解** 因为

$$P\{|X-C|\geqslant\varepsilon\}=\int_{|x-C|\geqslant\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{|x-C|\geqslant\varepsilon}\frac{|x-C|}{\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x-C|}{\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\varepsilon}E(|X-C|),$$

故选(C).

4.12 **解** (1)X 与 Y 相互独立且都服从参数为 $p(0<p<1)$ 的几何分布,

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},k=1,2,\cdots,$$

故 $Z=X+Y$ 的取值为 $2,3,\cdots$，则

$$P\{Z=z\}=P\{X+Y=z\}=\sum_{i=1}^{z-1}P\{X=i,Y=z-i\}=\sum_{i=1}^{z-1}P\{X=i\}P\{Y=z-i\}$$

$$=\sum_{i=1}^{z-1}[p(1-p)^{i-1}][p(1-p)^{z-i-1}]=\sum_{i=1}^{z-1}p^2(1-p)^{z-2}$$

$$=(z-1)p^2(1-p)^{z-2},z=2,3,\cdots.$$

(2) X 与 Y 相互独立，则 $D(X+Y)=DX+DY,\mathrm{Cov}(X,Y)=0$. 故 X 与 Z 的相关系数为

$$\rho_{XZ}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}=\frac{\mathrm{Cov}(X,X+Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{D(X+Y)}}=\frac{\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DX+DY}}$$

$$=\frac{\mathrm{Cov}(X,X)}{\sqrt{DX}\sqrt{2DX}}=\frac{DX}{\sqrt{DX}\sqrt{2DX}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4.13 解 由 (X,Y) 的分布律，容易得到 (X,Y) 的边缘分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix},\quad Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

从而得

$$EX=\frac{2}{3},\quad E(X^2)=1,\quad DX=\frac{5}{9},$$

$$EY=1,\quad E(Y^2)=\frac{5}{3},\quad DY=\frac{2}{3}.$$

又 $E(XY)=\sum_{i,j=1}^{3}x_iy_jp_{ij}=1\times1\times\frac{1}{3}+2\times2\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$，因此

$$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,Y)=E(XY)-EXEY-DY=-\frac{2}{3}.$$

4.14 (C) **解** 一般地，若干随机变量相互独立，则其中一部分随机变量构成的函数与另外一部分随机变量构成的函数之间也相互独立. 因此，由题设，随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 相互独立，且 Y_1,Y_2 分别为由 X_1,X_2,X_3 和 X_4,X_5,X_6 构成的和，则 Y_1,Y_2 必相互独立，于是，Y_1,Y_2 不相关，即有 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)=0$，知选项(C)正确. 另外有

$$\mathrm{Cov}(X_1,Y_1)=\mathrm{Cov}(X_1,X_1+X_2+X_3)=\mathrm{Cov}(X_1,X_1)=DX_1=\lambda_1,\quad \mathrm{Cov}(X_1,Y_2)=0.$$

4.15 0 **解** 因为 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant|y|\leqslant x\leqslant1\}$ 由 $y=-x,y=x,x=1$ 三条直线围成，关于 x 轴对称，所以

$$E(XY)=\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\quad EY=\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

故

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=0.$$

4.16 $-\frac{1}{\sqrt{13}}$ **解** 由 $(X,Y)\sim N(1,1;4,9;0.5)$ 得

$$EX=1,\quad EY=1,\quad DX=4,\quad DY=9,\quad \rho_{XY}=0.5,$$

$$\mathrm{Cov}(Z,Y)=\mathrm{Cov}(2X-Y,Y)=2\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,Y)$$

$$=2\rho_{XY}\sqrt{DXDY}-DY$$

$$=2\times0.5\times\sqrt{4\times9}-9=-3,$$

$$DZ=D(2X-Y)=4DX+DY-2\mathrm{Cov}(2X,Y)$$

$$=4\times4+9-4\times0.5\times\sqrt{4\times9}=13,$$

则

$$\rho_{ZY}=\frac{\mathrm{Cov}(Z,Y)}{\sqrt{DZ}\sqrt{DY}}=\frac{-3}{\sqrt{13}\times3}=-\frac{1}{\sqrt{13}}.$$

第5讲 大数定律与中心极限定理

5.1 8 解 依题设，每次从该批产品中有放回地重复抽取，每批产品的正品率均与整批产品的正品率是相同的，每批抽取正品数 $X_k(k=1,2,\cdots,n)$ 均独立且服从参数为 10，0.8 的二项分布，因此 $EX_k=10\times0.8=8$，期望存在，满足辛钦大数定律. 因此，根据辛钦大数定律，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 依概率收敛于 $EX_k=8$.

5.2 (C) **解** 满足切比雪夫大数定律要有 3 个条件：

①要求构成随机变量序列的各随机变量相互独立，显然，各选项均能满足；

②要求各随机变量的期望和方差都存在，由

$$EX_n=\lambda,\quad E(X_n-n)=\lambda-n,\quad E(nX_n)=n\lambda,\quad E\left(\frac{1}{n}X_n\right)=\frac{1}{n}\lambda,$$

$$DX_n=\lambda,\quad D(X_n-n)=\lambda,\quad D(nX_n)=n^2\lambda,\quad D\left(\frac{1}{n}X_n\right)=\frac{1}{n^2}\lambda,$$

知各选项也都满足；

③要求方差有公共上界，即 $DX_n<C$，其中 C 是与 n 无关的常数，而选项(C)中 $D(nX_n)=n^2\lambda$ 无上界，从而知，选项(C)不能全部满足切比雪夫大数定律的 3 个条件，故选(C).

5.3 (D) **解** 由切比雪夫大数定律成立的条件，在 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立的前提下，并不要求同分布也不要求有相同的期望和方差，关键是要求方差存在(内含期望存在)，且一致有界. 因此，选择(D).

5.4 (C) **解** 由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从$[-2,4]$上的均匀分布，有

$$EX_n=\frac{-2+4}{2}=1,\quad DX_n=\frac{[4-(-2)]^2}{12}=3,$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=n,\quad D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=3n,$$

因此，当 n 充分大时，$\sum_{i=1}^{n}X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(n,3n)$，从而有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{3n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x),$$

故选择(C).

5.5 (C) **解** 由题设知 $EX_n=0,DX_n=\frac{1}{3}$. 由独立同分布中心极限定理，对任意 x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}}\leqslant x\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{\frac{n}{3}}}\leqslant x\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\leqslant\sqrt{\frac{n}{3}}x\right\}=\Phi(x).$$

取 $x=\sqrt{3}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\leqslant\sqrt{n}\right\}=\Phi(\sqrt{3})$.

5.6 解 (1)设 $X_i(i=1,2,\cdots,100)$ 表示袋中第 i 个螺丝钉的重量，则 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 相互独立同分布，且 $EX_i=50,DX_i=25$. 记一袋螺丝钉的重量为 $S_{100}=\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$，则 $ES_{100}=5\,000,DS_{100}=2\,500$，根据独立同分布中心极限定理，$S_{100}$ 近似服从正态分布 $N(5\,000,2\,500)$，从而有

$$P\{S_{100}>5\,100\}=1-P\{S_{100}\leqslant 5\,100\}=1-P\left\{\frac{S_{100}-5\,000}{50}\leqslant 2\right\}\approx 1-\Phi(2)=0.022\,8.$$

(2)设每箱 500 袋螺丝钉中重量超过 5.1 千克的袋数为 Y，则 Y 服从参数为 $n=500,p=0.022\,8$ 的二项分布，且 $EY=np=11.4,DY=np(1-p)=11.14$.

于是由棣莫弗-拉普拉斯定理，Y 近似服从正态分布 $N(11.4,11.14)$，从而有

$$P\left\{\frac{Y}{500}\leqslant 0.04\right\}=P\{Y\leqslant 20\}=P\left\{\frac{Y-11.4}{\sqrt{11.14}}\leqslant\frac{20-11.4}{\sqrt{11.14}}\right\}\approx\Phi(2.58)=0.995\,1.$$

5.7 16 641 解 硬币投掷 1 次出现正面的概率为 $p=\frac{1}{2}$，记硬币投掷 n 次出现正面的次数为 X，则

$$X\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right),\quad EX=\frac{n}{2},\quad DX=np(1-p)=\frac{n}{4},$$

又 X 出现正面的频率为 $\frac{X}{n}$，于是，由中心极限定理，则有

$$P\left\{\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{2}\right|\leqslant 0.01\right\}=P\left\{\left|\frac{X-n/2}{\sqrt{n}/2}\right|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{50}\right\}\approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{50}\right)-1\geqslant 0.99,$$

解得 $n\geqslant 129^2=16\,641$，即至少要投掷 16 641 次才能满足题目要求.

第6讲 数理统计

6.1 (A) **解** 不包含未知数的总体样本的函数 $\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为一个统计量,可见统计量与一般的样本函数的区别关键是观察函数中是否含有未知参数. 由题设可知,总体的参数 μ 未知,故选(A).

6.2 t;9 **解** 令 $X_i'=\dfrac{X_i}{3}, Y_i'=\dfrac{Y_i}{3}(i=1,2,\cdots,9)$,则 $X_i'\sim N(0,1), Y_i'\sim N(0,1), i=1,2,\cdots,9$,

$$X'=X_1'+\cdots+X_9'\sim N(0,3^2),\quad Y'=Y_1'^2+\cdots+Y_9'^2\sim\chi^2(9),$$

因此

$$U=\frac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}=\frac{X_1'+\cdots+X_9'}{\sqrt{Y_1'^2+\cdots+Y_9'^2}}=\frac{X'}{\sqrt{Y'}}=\frac{X'/3}{\sqrt{Y'/9}}.$$

由于 $X'/3\sim N(0,1), Y'\sim\chi^2(9)$,故 $U\sim t(9)$.

6.3 (B) **解** 由于 $X_i\sim N(0,1)$ 且相互独立,因此 $\sum\limits_{i=1}^{4}X_i\sim N(0,4), X_5^2+X_6^2+X_7^2\sim\chi^2(3)$ 且相互独立,而

$$\sum_{i=1}^{4}X_i/2\sim N(0,1),$$

于是

$$\frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{4}X_i}{\sqrt{(X_5^2+X_6^2+X_7^2)/3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}X_i}{\sqrt{X_5^2+X_6^2+X_7^2}}\sim t(3),$$

所以 $c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, n=3$. 故选(B).

6.4 (D) **解** **方法一** 直选法. 选项(D)为两个平方和之比,是服从 F 分布的典型模式. 由于在 $X\sim N(0,1)$ 的条件下,$\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n-1), X_1^2\sim\chi^2(1)$,且相互独立,因此,

$$\frac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}=\frac{X_1^2/1}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2\Big/(n-1)}\sim F(1,n-1),$$

故选择(D).

方法二 排除法. 在 $X\sim N(0,1)$ 的条件下,由于 $E(n\overline{X})=0, D(n\overline{X})=n^2D\overline{X}=n\neq1, n\overline{X}\sim N(0,n)$,知选项(A)不正确. 对于取自正态总体的样本方差 S^2,有 $(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$,知选项(B)不正确. 又由 t 分布的典型模式,$\dfrac{\sqrt{n}\,\overline{X}}{S}=\dfrac{n\overline{X}-0}{\sqrt{n}}\Big/\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{n-1}}\sim t(n-1)$,知选项(C)不正确. 综上讨论,仅(D)结论正确,故选之.

6.5 1 **解** 利用 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$ 计算. 即有

$$s^2=\frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\left(\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left[9-5\times\left(\frac{1}{5}\times5\right)^2\right]=1.$$

6.6 $\chi^2;4$ 解 依题设,题中统计量 $Y=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ 表现为平方和的形式,且 $\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$,根据 χ^2 分布的典型模式,可以确定 $\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ 为 χ^2 分布,又因为和式中各项相互独立,所以分布自由度为 4.

6.7 $\sigma^2+\mu^2$ 解 依题设,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,因此相互独立且与总体同分布,即有 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)(i=1,2,\cdots,n)$,于是

$$E(X_i^2)=DX_i+(EX_i)^2=\sigma^2+\mu^2,\quad ET=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)=\sigma^2+\mu^2.$$

6.8 解 (1)记 Y 是连续 5 次取球中取得黑球的个数,则 $Y\sim B\left(5,\frac{2}{3}\right)$. 从而 Y 的分布律为

$$P\{Y=k\}=C_5^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{5-k},k=0,1,2,3,4,5,$$

于是

$$EY=5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3},$$

$$E(Y^2)=DY+(EY)^2=5\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{110}{9}.$$

(2)由于 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

因此

$$E\overline{X}=EX=\frac{2}{3},\quad E(S^2)=DX=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}.$$

6.9 解 依题设,口袋里有 N 个大小相同重量相等的球,从中任取一个,号码为 k 的概率为 $\frac{1}{N}$,即总体 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{1}{N}(k=1,2,\cdots,N)$,又 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 X 的简单随机样本,因此,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,且与总体 X 同分布. 根据样本均值数字特征的性质,从而有

$$E\overline{X}=EX=\sum_{i=1}^{N}\frac{i}{N}=\frac{N+1}{2},$$

$$D\overline{X}=\frac{DX}{n}=\frac{1}{n}[E(X^2)-(EX)^2]=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{6}(2N+1)(N+1)-\frac{1}{4}(N+1)^2\right]$$

$$=\frac{1}{12n}(N+1)(N-1).$$

6.10 (B) 解 本题是对指数分布的总体参数 λ 的矩估计,基本的做法是总体的均值对应样本的一阶原点矩,即由 $EX=\frac{1}{\lambda}$,令

$$EX=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X},$$

得方程 $\frac{1}{\lambda}=\overline{X}$,解得 $\hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{X}}$,故选(B).

6.11 (A) 解 本题主要考查统计量有效性的概念,要强调的是,对于未知参数 θ 的两个估计量,$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,当且仅当 $E\hat{\theta}_1=\theta$,$E\hat{\theta}_2=\theta$,且 $D\hat{\theta}_1<D\hat{\theta}_2$ 时,可以确定 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效,可知 $D\hat{\theta}_1<D\hat{\theta}_2$ 是 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效的必要非充分条件,故选(A).

6.12 (C) **解** 无偏性是评价参数点估计的优良性的三个重要指标之一.本题考查的是总体期望的估计量的无偏性,实际上就是通过对估计量的期望运算验证是否等于 μ.

依题设,X_1,X_2,X_3 取自总体 X,且 X 存在有限数学期望 μ 和方差 σ^2,即有 $EX_i=\mu(i=1,2,3)$.所以由

$$E\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}EX_1+\frac{3}{10}EX_2+\frac{1}{2}EX_3=\frac{1}{5}\mu+\frac{3}{10}\mu+\frac{1}{2}\mu=\mu,$$

$$E\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}EX_1+\frac{1}{4}EX_2+\frac{5}{12}EX_3=\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{4}\mu+\frac{5}{12}\mu=\mu,$$

$$E\hat{\mu}_3=\frac{1}{4}EX_1+\frac{1}{4}EX_2+\frac{1}{4}EX_3=\frac{1}{4}\mu+\frac{1}{4}\mu+\frac{1}{4}\mu=\frac{3}{4}\mu\neq\mu,$$

$$E\hat{\mu}_4=\frac{1}{3}EX_1+\frac{3}{4}EX_2-\frac{1}{12}EX_3=\frac{1}{3}\mu+\frac{3}{4}\mu-\frac{1}{12}\mu=\mu,$$

知估计量 $\hat{\mu}_3$ 不是 μ 的无偏估计量,故选(C).

6.13 **解** 本题是求连续型总体的概率密度中的参数 θ 的矩估计,做法是将总体的均值对应样本的一阶原点矩,即由

$$\begin{aligned}EX&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}(-x\theta^x\ln\theta)\mathrm{d}x\\&=-\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}\theta^x=-x\theta^x\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\theta^x\mathrm{d}x\\&=\frac{\theta^x}{\ln\theta}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{\ln\theta},\end{aligned}$$

于是,令 $EX=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$,解得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{\overline{X}}}$.

6.14 **解** 本题要计算的是服从 0−1 分布的总体中参数 p 的最大似然估计.按照离散型总体的最大似然估计法的步骤计算.

由 $X\sim\begin{pmatrix}0&1\\1-p&p\end{pmatrix}$,$0<p<1$,即有

$$P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x},x=0,1.$$

似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i},$$

取对数得

$$\ln L=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p),$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0,$$

解得 p 的最大似然估计量为 $\hat{p}=\overline{X}$.

6.15 **解** 按照离散型总体的最大似然估计的计算步骤进行,依题设,似然函数为

$$\begin{aligned}L(x_1,x_2,\cdots,x_8;\theta)&=\prod_{i=1}^{8}P\{X_i=x_i\}=\theta^2(1-3\theta)^2(2\theta^2)[3\theta(1-\theta)]^4\\&=2\times3^4\theta^8(1-3\theta)^2(1-\theta)^4,\end{aligned}$$

取对数 $\ln L=\ln 162+8\ln\theta+2\ln(1-3\theta)+4\ln(1-\theta)$,令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{8}{\theta}-\frac{6}{1-3\theta}-\frac{4}{1-\theta}=\frac{42\theta^2-42\theta+8}{\theta(1-3\theta)(1-\theta)}=0,$$

解得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{21-\sqrt{105}}{42}\approx 0.256\left(\frac{21+\sqrt{105}}{42}\text{舍去}\right)$.

6.16 解 似然函数为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases}2^n\exp\left\{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)\right\},x_i\geqslant\theta(i=1,2,\cdots,n),\\0, \qquad\qquad\qquad\qquad \text{其他},\end{cases}$$

当 $x_i\geqslant\theta(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$L(\theta)>0$，取对数，得

$$\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta),$$

因为 $\frac{\mathrm{d}[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}=2n>0$，所以 $L(\theta)$ 单调增加.

由于 θ 必须满足 $\theta\leqslant x_i(i=1,2,\cdots,n)$，因此当 θ 取 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最小值时，$L(\theta)$ 取最大值. 所以 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

6.17 (D) 解 因 σ^2 未知，置信区间为 $\left(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$，则置信区间长度为

$$2t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}=2,$$

故 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}=1$.

要使得检验结果接受 H_0，则应有 $|T|=\left|\frac{\overline{X}-1}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right|<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，即

$$\overline{X}\in\left(1-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},1+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=(0,2)$$

时，接受 H_0.

6.18 (D) 解 $H_0:\mu\leqslant\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$，检验统计量 $T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，拒绝域为 $T\geqslant t_\alpha(n-1)$.

由样本值得到 $T=\frac{170-140}{4/\sqrt{16}}=30\geqslant t_{0.05}(15)=1.75$，所以拒绝 H_0，可能会犯第一类错误.

张宇

博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部“国家精品课程建设骨干教师”，全国畅销书《张宇考研数学基础30讲》《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》《张宇概率论与数理统计9讲》《张宇考研数学题源探析经典1000题》《张宇考研数学真题大全解》《考研数学命题人终极预测8套卷》《张宇考研数学最后4套卷》《张宇经济类联考综合能力数学通关优题库》作者，高等教育出版社原《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》及新编《全国硕士研究生招生考试经济类专业学位联考综合能力考试大纲解析》编者之一，北京、上海、广州、西安等全国著名考研数学辅导班首席主讲。

张宇数学教育系列丛书

◦ 教材类

张宇考研数学基础30讲 · 高等数学分册 书课包

张宇考研数学基础30讲 · 线性代数分册 书课包

张宇考研数学基础30讲 · 概率论与数理统计分册 书课包

张宇高等数学18讲 书课包

张宇线性代数9讲 书课包

张宇概率论与数理统计9讲 书课包

◦ 题集类

张宇考研数学题源探析经典1000题（分数学一、数学二、数学三） 书课包

张宇考研数学真题大全解（上册）（分数学一、数学二、数学三）

张宇考研数学真题大全解（下册）（分数学一、数学二、数学三） 书课包

考研数学命题人终极预测8套卷（分过关版、高分版）（分数学一、数学二、数学三）

张宇考研数学最后4套卷（分过关版、高分版）（分数学一、数学二、数学三）

北京理工大学出版社网址：http://www.bitpress.com.cn

宇哥考研
新浪微博二维码

张宇考研数学
微信公众号

启航教育
微信公众号