启航教育 云图 YUN TU 2023版

张宇数学教育系列丛书·一

张宇考研数学基础30讲

基础300题

【线性代数分册】

主编 张宇

赠

本书配套习题课
扫码听讲

张宇考研数学基础30讲——基础300题

【线性代数分册】

主编 张宇

张宇数学教育系列丛书编委（按姓氏拼音排序）

蔡燧林 陈静静 方春贤 高昆轮 胡金德 贾建厂 李志龙 刘硕
柳叶子 吕倩 秦艳鱼 沈利英 史明洁 石臻东 王慧珍 王燕星
吴金金 徐兵 严守权 亦一（笔名） 曾凡（笔名） 张乐 张青云 张婷婷
张宇 郑利娜 朱杰

启航教育 云图 YUN TU

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

目 录

习题演练

参考答案

习题演练

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

第1讲 行列式

1.1 下列行列式中等于零的是(　　).

(A) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$　　(B) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -7 & -6 \end{vmatrix}$　　(D) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

1.2 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 & x \\ d & c & b & a \end{vmatrix}=$________.

1.3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.4 $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}=$________.

1.5 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 维列向量，且 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$ 等于(　　).

(A) $m+n$　　(B) $-(m+n)$　　(C) $n-m$　　(D) $m-n$

1.6 已知 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|=a$，$|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1|=b$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 均为 4 维列向量，计算 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\gamma}|$.

1.7 $\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & -a_2 & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & -a_3 & 1 \\ 0 & 0 & a_3 & 1 \end{vmatrix}=$________.

1.8 已知方程 $\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -3 & x-1 & a \\ 2 & a & x-1 \end{vmatrix}=0$ 有二重根，求满足条件的常数 a 及方程的根.

1.9 设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$是 3 阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=4$，若

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3],$$

则$|\boldsymbol{B}|=$________.

1.10 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$A_{ij}$为 D 的(i,j)元的代数余子式，则 $A_{31}+2A_{32}+3A_{33}=($　　$)$.

(A) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(B) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 2 \\ a_{31} & a_{32} & 3 \end{vmatrix}$

(D) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & -2 \\ a_{31} & a_{32} & 3 \end{vmatrix}$

第2讲 矩 阵

2.1 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，E 为 m 阶单位矩阵，则下列结论错误的是(　　).

(A)$A^{\mathrm{T}}A$ 是对称矩阵　　(B)AA^{T} 是对称矩阵

(C)$A^{\mathrm{T}}A+AA^{\mathrm{T}}$ 是对称矩阵　　(D)$E+AA^{\mathrm{T}}$ 是对称矩阵

2.2 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$n\geqslant 2$ 为正整数，则 $A^n-2A^{n-1}=$________.

2.3 设 A 为 n 阶可逆方阵，k 为非零常数，则有(　　).

(A)$(kA)^{-1}=kA^{-1}$　　(B)$(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$

(C)$|kA|=k|A|$　　(D)$(kA)^*=kA^*$

2.4 设 A 为可逆矩阵，则 $[(A^{-1})^{\mathrm{T}}]^{-1}=$(　　).

(A)A　　(B)A^{T}　　(C)A^{-1}　　(D)$(A^{-1})^{\mathrm{T}}$

2.5 设 $A=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$________.

2.6 设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A|=1$，则 $(A^*)^*=$(　　).

(A)A^{-1}　　(B)$-A$　　(C)A　　(D)A^2

2.7 设 $A=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$________.

2.8 若 $A=E_{12}^2E_{23}(1)$，其中 E_{12}，$E_{23}(1)$ 为 4 阶初等矩阵，则 $A^{-1}=$(　　).

(A)$E_{23}(1)$　　(B)$E_{23}(-1)$　　(C)E_{12}　　(D)E

2.9 $E_2^3(k)\begin{bmatrix}1&3&6\\2&5&8\\4&7&9\end{bmatrix}E_{21}^2(-2)=$________.

2.10 设 A，B 均为 3 阶矩阵，E 为 3 阶单位矩阵，已知 $AB=2A+B$，$B=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{bmatrix}$，求 $A-E$.

2.11 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&3&-2\\-1&0&4\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}0&-2&1\\1&2&1\\3&-3&2\end{bmatrix}$，$ABC=E$，求 B^{-1}.

2.12 设3阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$,若$\boldsymbol{A}$的秩为2,则有(　　).

(A)$a=1$或$a=-2$　　　　(B)$a\neq-2$

(C)$a=-2$　　　　(D)$a\neq1$且$a\neq-2$

2.13 设$\boldsymbol{A}$是4×3矩阵,且$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A})=2$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,则$r(\boldsymbol{AB})=$________.

2.14 设$\boldsymbol{A}$为$n(n\geqslant2)$阶方阵,$\boldsymbol{A}^*$为其伴随矩阵,证明:若$r(\boldsymbol{A})=n-1$,则$r(\boldsymbol{A}^*)=1$.

2.15 设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$,分别计算$\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$及$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$,$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

第3讲 向量组

3.1 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是(　　).

(A)存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 成立

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有两个向量成比例

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个向量可以被其余 $s-1$ 个向量线性表示

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个部分向量组线性相关

3.2 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性无关的充分条件是(　　).

(A)存在一组数 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 成立

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中不含零向量

(C)当 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为零时,总有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$ 成立

(D)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中向量两两线性无关

3.3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维向量,则下列结论正确的是(　　).

(A)若 $\boldsymbol{\beta}$ 不能被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 必线性无关

(B)若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示

(C) $\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的部分向量组线性表示,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示

(D) $\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被其任何一个部分向量组线性表示

3.4 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}=[a,1,1]^{\mathrm{T}}$,已知 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关,则 $a=$________.

3.5 (1)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-1,2,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,-1,3,a]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,-1,1]^{\mathrm{T}}$ 线性相关,则 $a=$________;

(2)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,a,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,a]^{\mathrm{T}}$ 线性无关,则 $a\neq$________.

3.6 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是________.

3.7 已知 3 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是________.

3.8 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,-1,2,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,4,9]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[1,-1,8,27]^{\mathrm{T}}$,证明:任意一个 4 维列向量均可以被该向量组线性表示,且表达式唯一.

3.9 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-1,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,a,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,2]^{\mathrm{T}}$,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)与 a 的取值有关

3.10 已知列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则向量组 $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩是(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

3.11 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[2,0,1,1],\quad \boldsymbol{\alpha}_2=[-1,-1,-1,-1],\quad \boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,0,0],\quad \boldsymbol{\alpha}_4=[0,-2,-1,-1],$$

判断该向量组是否线性相关，若线性相关，找出一个极大线性无关组，并将其余向量由该极大线性无关组线性表示.

3.12 已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}a\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix}$ 具有相同的秩，且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，求 a,b 的值.

3.13 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与同维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价，则(   ).

(A) $r=s$

(B) $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$

(C)两向量组有相同的线性相关性

(D)矩阵 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r]$ 与矩阵 $[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s]$ 等价

3.14(仅数学一) 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix},$$

求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$.

第4讲 线性方程组

4.1 若非齐次线性方程组

$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+kx_2=3, \\ 3x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$$

有唯一解,则(　　).

(A)$k=0$ 或 $k=3$　　(B)$k\neq 0$

(C)$k\neq 3$　　(D)$k\neq 0$ 且 $k\neq 3$

4.2 线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3=2, \\ 4x_1+9x_2-x_3=4 \end{cases}$$

的解是________.

4.3 求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$的基础解系.

4.4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的全部解.

4.5 设 $\boldsymbol{\xi}_1=[1,-2,3,2]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=[2,0,5,-2]^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,则下列向量中是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解向量的是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-3,3,3]^{\mathrm{T}}$　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_2=[0,0,5,-2]^{\mathrm{T}}$

(C)$\boldsymbol{\alpha}_3=[-1,-6,-1,10]^{\mathrm{T}}$　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_4=[1,6,1,0]^{\mathrm{T}}$

4.6 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3, \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3, \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3, \\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3. \end{cases} \qquad (*)$$

(1)证明:若 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不相等,则此线性方程组无解;

(2)设 $a_1=a_3=k$, $a_2=a_4=-k(k\neq 0)$,且已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是该方程组的两个解,其中 $\boldsymbol{\beta}_1=[-1,1,1]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=[1,1,-1]^{\mathrm{T}}$,写出此方程组的通解.

4.7 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 $n(n>0)$阶方阵,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有相同的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$,则下列方程组中也以 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 为基础解系的是(　　).

(A)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$　　(B)$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$　　(C)$(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$　　(D)$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

4.8 设 $\boldsymbol{A}$ 是任意的 $m\times n$ 矩阵，证明：方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 一定有解.

4.9 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量，且 $r(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,2,3]^{\mathrm{T}}$，$C$ 表示任意常数，则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=$(　　).

(A) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+C\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+C\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+C\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+C\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$

4.10 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充要条件是(　　).

(A)$m=n$ 且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$

(B)$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有唯一零解

(C)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 是等价向量组

(D)$r(\boldsymbol{A})=n$，$\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表出

4.11 设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=0,\\x_1+2x_2+x_3=0,\\x_1-x_2+ax_3=0\end{cases}$$

与方程 $x_1-2x_2+3x_3=1$ 有公共解，则 $a=$______.

4.12 设线性方程组

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=1,\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda^2,\end{cases}\qquad(\text{Ⅱ})\,x_1-x_2+2x_3=-4.$$

问 λ 取何值时，两方程组有公共解？在有无穷多公共解的情况下，给出公共解.

4.13 已知方程组(Ⅰ)$\begin{cases}x_1+3x_2-3x_4=1,\\-7x_2+3x_3+x_4=-3\end{cases}$ 及方程组(Ⅱ)的通解为

$$k_1[-1,1,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[2,-1,0,1]^{\mathrm{T}}+[-2,-3,0,0]^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数. 求方程组(Ⅰ),(Ⅱ)的公共解.

4.14 已知方程组

$$\begin{cases}x_1+x_4+x_5=0,\\x_2-2x_4+2x_5=0,\\x_3+x_4-x_5=0\end{cases}\tag{$*$}$$

与方程组

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+ax_3-5x_4+x_5=0,\\x_1+x_2-x_3+bx_4+4x_5=0,\\3x_1+x_2+x_3+2x_4+cx_5=0.\end{cases}\tag{$**$}$$

(1)求方程组($*$)的基础解系和通解；

(2)问参数 a,b,c 满足什么条件时，方程组($*$)和($**$)是同解方程组？

第5讲 特征值与特征向量

5.1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix}$，则在下列向量中是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda=-2$ 的特征向量的是(　　).

(A) $\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$

5.2 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，则 $2\boldsymbol{A}^*$ 的特征值是(　　).

(A)1,2,3　　(B)4,6,12　　(C)2,4,6　　(D)8,16,24

5.3 (1)设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值是________；

(2)设 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$，则矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值是________.

5.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和都为 a，则 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为________，对应的一个特征向量为________.

5.5 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ -2 & 3 & -1\\ 3 & -2 & x\end{bmatrix}$ 有一个特征值为零，则 $x=$________.

5.6 已知 -2 是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & x & -2\\ -2 & 2 & b\end{bmatrix}$ 的特征值，其中 $b(b\neq 0)$ 是任意常数，则 $x=$________.

5.7 已知 $\boldsymbol{\alpha}=[a,1,1]^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & a & -2\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}$ 的逆矩阵的特征向量，那么 $a=$________.

5.8 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，已知 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0,|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=0,|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}|=$________.

5.9 下列矩阵中能相似于对角矩阵的是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$　　(B) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(C) $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$　　(D) $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

5.10 设 $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&2\\2&0&5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\3&0&5\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}3&0&2\\0&1&0\\2&0&5\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\3&1&5\end{bmatrix}$，其中与对角矩阵相似的有(　　).

(A) A,B,C　　(B) B,D　　(C) A,C,D　　(D) A,C

5.11 设 A 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 A 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 A 的属于特征值 -1 的特征向量，则满足 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 的可逆矩阵 P 可为(　　).

(A) $[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3]$　　(B) $[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3]$

(C) $[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2]$　　(D) $[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2]$

5.12 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似.

(1)求 x 与 y；

(2)求一个满足 $P^{-1}AP=B$ 的可逆矩阵 P.

5.13 设 3 阶矩阵 A 满足 $A\boldsymbol{\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,2]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,-2,1]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[-2,-1,2]^{\mathrm T}$，求矩阵 A.

5.14 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，求 A^{99}.

第6讲 二次型

6.1 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\\7&8&5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 的矩阵是________.

6.2 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为________.

6.3 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+ax_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 经正交变换化为标准形 $f=2y_1^2+5y_2^2+by_3^2$,则( ).

(A)$a=3,b=1$ (B)$a=3,b=-1$

(C)$a=-3,b=1$ (D)$a=-3,b=-1$

6.4 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶实对称矩阵,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,且二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正、负惯性指数均为1,则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换可化为标准形( ).

(A)$y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$ (B)$-3y_1^2+y_2^2$ (C)$3y_1^2-y_2^2$ (D)$3y_1^2-2y_2^2-y_3^2$

6.5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$,则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为( ).

(A)$\begin{bmatrix}-2&1\\1&-2\end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$

(C)$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}$

6.6 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 的规范形是( ).

(A)$z_1^2+z_2^2+z_3^2$ (B)$z_1^2-z_2^2-z_3^2$

(C)$z_1^2-z_2^2$ (D)z_1^2

6.7 若实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$ 合同,则二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为________.

6.8 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为1,求常数 a 的取值范围.

6.9 用配方法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-6x_2x_3$ 化为规范形,并写出变换矩阵.

6.10 利用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2$ 化为标准形.

6.11 已知 $\boldsymbol{\alpha}=[1,-2,2]^{\mathrm{T}}$ 是二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=ax_1^2+4x_2^2+bx_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,求正交变换化二次型为标准形,并写出所用正交变换.

6.12 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶正定矩阵,下列各矩阵中不一定是正定矩阵的是( ).

(A)$\boldsymbol{AB}$ (B)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ (C)$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ (D)$3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$

6.13 下列矩阵为正定矩阵的是(   ).

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&2&3\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}6&2&1\\2&0&5\\1&5&2\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}4&3&2\\3&4&1\\2&1&-1\end{bmatrix}$

6.14 若 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-tx_2x_3$ 是正定二次型,则 t 的取值范围是________.

6.15 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_2x_3$,则对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,均有(   ).

(A) $f(x_1,x_2,x_3)>0$ (B) $f(x_1,x_2,x_3)\geqslant 0$

(C) $f(x_1,x_2,x_3)<0$ (D) $f(x_1,x_2,x_3)\leqslant 0$

参考答案

第1讲 行列式

1.1 (C) **解** 由

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}=12-6+10-6=10,\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=8-6-4+6=4,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -7 & -6 \end{vmatrix}=24-24=0,\quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}=4,$$

知选(C).

1.2 $(x^2-y^2)(b^2-c^2)$ **解** $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 & x \\ d & c & b & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & d & b & c \\ x & y & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ d & a & c & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ a & d & b & c \\ d & a & c & b \end{vmatrix}$

$$=(x^2-y^2)(b^2-c^2).$$

1.3 **解** 将第二到第四行元素依次加上第一行，则有

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(4321)}(-1)(-2)^3=8.$$

【注】 需要注意的是，对于以副对角线为界的三角形行列式，其大小虽然同为对角线元素的乘积，但符号应按行列式定义的规则确定.

1.4 1 **解** 从第一行开始，依次将每行加至下一行，得

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

【注】 行列式恒等变形时，逐行(列)相加是一个重要的思路.

1.5 (C) **解** 因为

$$|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2|$$

$$=-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2|$$
$$=-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|$$
$$=n-m,$$

故应选(C).

1.6 解 由行列式的性质,有$|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1|=|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1|+|\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1|$,其中

$$|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1|\xlongequal{[1]\leftrightarrow[4]}-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|=-a,$$

$$|\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1|\xlongequal[{[2]\leftrightarrow[3]}]{[1]\leftrightarrow[4]}|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\gamma}|,$$

从而有
$$-a+|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\gamma}|=b,$$
即
$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\gamma}|=a+b.$$

1.7 $-4a_1a_2a_3$ **解** 本题为含字母的行列式计算题.字母沿主对角线双线分布,含有特殊结构.有两种计算方法.

方法一 由于行列式中含零元素较多,可直接用降阶法处理,即

$$\begin{vmatrix}-a_1&0&0&1\\a_1&-a_2&0&1\\0&a_2&-a_3&1\\0&0&a_3&1\end{vmatrix}=-a_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-a_2&0&1\\a_2&-a_3&1\\0&a_3&1\end{vmatrix}+a_1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&0&1\\a_2&-a_3&1\\0&a_3&1\end{vmatrix}$$
$$=-a_1(3a_2a_3+a_2a_3)=-4a_1a_2a_3.$$

方法二 利用行列式的性质和特殊结构,化为三角形行列式计算,即从第一行开始,滚动式把上一行加至下一行,即有

$$\begin{vmatrix}-a_1&0&0&1\\a_1&-a_2&0&1\\0&a_2&-a_3&1\\0&0&a_3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-a_1&0&0&1\\0&-a_2&0&2\\0&a_2&-a_3&1\\0&0&a_3&1\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}-a_1&0&0&1\\0&-a_2&0&2\\0&0&-a_3&3\\0&0&a_3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-a_1&0&0&1\\0&-a_2&0&2\\0&0&-a_3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix}=-4a_1a_2a_3.$$

1.8 解 由

$$\begin{vmatrix}x-2&0&0\\-3&x-1&a\\2&a&x-1\end{vmatrix}=(x-2)\begin{vmatrix}x-1&a\\a&x-1\end{vmatrix}=(x-2)[(x-1)^2-a^2]=0,$$

知方程有一解$x=2$,若$x=2$为二重根,则$f(x)=(x-1)^2-a^2$必含一个因子$x-2$,即有$f(2)=1-a^2=0$,得$a=\pm1$;若$x=2$为单根,则$(x-1)^2-a^2$为完全平方式,故$a=0$.

因此,当$a=\pm1$时,方程有二重根$x=2$,单根$x=0$;当$a=0$时,方程有二重根$x=1$,单根$x=2$.

1.9 20 **解** **方法一** 利用行列式的性质.

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,5\boldsymbol{\alpha}_3|$$
$$=5|\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$
\begin{aligned}
&=5|\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\\
&=5|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\\
&=20.
\end{aligned}
$$

方法二 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&2\\2&-2&1\end{bmatrix}$,

故
$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&0&0\\-3&1&2\\2&-2&1\end{vmatrix}=4\times5=20.$$

1.10 (A) **解** 本题计算的是行列式中第三行元素对应的代数余子式的代数和,在未知行列式元素的具体取值的情况下,可以直接将第三行元素用所求和式的组合系数1,2,3置换,置换后得到的行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\1&2&3\end{vmatrix}$ 即为和式$A_{31}+2A_{32}+3A_{33}$,故选(A).

第2讲 矩 阵

2.1 (C) 解 因为

$$(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA,\quad (AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T,$$

$$(E+AA^T)^T=E^T+(AA^T)^T=E+AA^T,$$

由排除法,知选项(C)符合题意,故选之.选项(C)的问题是 A^TA 与 AA^T 为两个不同阶的矩阵,不能相加.

2.2 O 解 由 $A^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{bmatrix}=2A$,知

$$A^n=2A^{n-1},\quad A^n-2A^{n-1}=O.$$

2.3 (B) 解 由于 $(kA)(k^{-1}A^{-1})=kk^{-1}(AA^{-1})=E$,因此有 $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$.

由于 $(kA)^T=(ka_{ij})^T=(ka_{ji})=k(a_{ji})$,因此有 $(kA)^T=kA^T$.

又 $|kA|=k^n|A|$,有 $(kA)^*=|kA|(kA)^{-1}=k^n|A|(k^{-1}A^{-1})=k^{n-1}|A|A^{-1}$,所以有 $(kA)^*=k^{n-1}A^*$.

因此,对照各选项,应选(B).

2.4 (B) 解 由

$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1},\quad (A^{-1})^{-1}=A,$$

不难得到结论 $[(A^{-1})^T]^{-1}=A^T$.应选(B).

2.5 $\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ 解 令 $B=\begin{bmatrix}5&2\\2&1\end{bmatrix}$,$C=\begin{bmatrix}1&-2\\1&1\end{bmatrix}$,则 $A=\begin{bmatrix}B&O\\O&C\end{bmatrix}$ 为分块对角矩阵,

由于 $|B|=5-4=1\neq0$,$|C|=1+2=3\neq0$,故 B,C 均可逆.下面利用公式法求 B^{-1} 及 C^{-1}.

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}B^*=\begin{bmatrix}5&2\\2&1\end{bmatrix}^*=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&5\end{bmatrix},$$

$$C^{-1}=\frac{1}{|C|}C^*=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2\\1&1\end{bmatrix}^*=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

根据分块对角矩阵求逆矩阵的方法,得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1}&O\\O&C^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

2.6 (C) **解** 由$|\boldsymbol{A}|=1$,知矩阵$\boldsymbol{A}$可逆,方能用公式$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$,再用公式对矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$求伴随矩阵,得到$(\boldsymbol{A}^*)^*=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.因此,应选(C).

2.7 $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$ **解** 本题是求已知矩阵的伴随矩阵的逆矩阵.有两种方法:一种是按照由$\boldsymbol{A}$先求伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$再求$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$的顺序进行;另一种是在字母层面作简化运算,由$|\boldsymbol{A}|=-2$,知矩阵$\boldsymbol{A}$可逆,于是

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}.$$

显然,后一种方法要简单得多,每一位考生都应当掌握.

2.8 (B) **解** 由初等矩阵的运算性质,有

$$\boldsymbol{E}_{12}^2=\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{E}_{23}^{-1}(1)=\boldsymbol{E}_{23}(-1),$$

从而有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=[\boldsymbol{E}_{12}^2\boldsymbol{E}_{23}(1)]^{-1}=\boldsymbol{E}_{23}^{-1}(1)=\boldsymbol{E}_{23}(-1),$$

故应选(B).

【注】 本题在求逆前先进行了化简,计算过程就简便很多,另外,初等矩阵的逆运算经常要用到,应掌握好以下计算公式:

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij},\quad \boldsymbol{E}_i^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_i\left(\frac{1}{k}\right),\quad \boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_{ij}(-k).$$

2.9 $\begin{bmatrix}-11&3&6\\-18k^3&5k^3&8k^3\\-24&7&9\end{bmatrix}$ **解** 由

$$\boldsymbol{E}_2^3(k)=\boldsymbol{E}_2(k^3),$$
$$\boldsymbol{E}_{21}^2(-2)=\boldsymbol{E}_{21}(-2\times2)=\boldsymbol{E}_{21}(-4),$$

有

$$\boldsymbol{E}_2^3(k)\begin{bmatrix}1&3&6\\2&5&8\\4&7&9\end{bmatrix}\boldsymbol{E}_{21}^2(-2)=\boldsymbol{E}_2(k^3)\begin{bmatrix}1&3&6\\2&5&8\\4&7&9\end{bmatrix}\boldsymbol{E}_{21}(-4)$$
$$=\begin{bmatrix}1&3&6\\2k^3&5k^3&8k^3\\4&7&9\end{bmatrix}\boldsymbol{E}_{21}(-4)=\begin{bmatrix}1+3\times(-4)&3&6\\2k^3+5k^3\times(-4)&5k^3&8k^3\\4+7\times(-4)&7&9\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-11&3&6\\-18k^3&5k^3&8k^3\\-24&7&9\end{bmatrix}.$$

2.10 **解** 由$\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,整理得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E},$$

其中$\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{bmatrix}$,$|\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}|=-8\neq0$,故$\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}$可逆,且

$$(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&0\end{bmatrix}\text{(用初等行变换求得)},$$

因此解得

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

2.11 解 由 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$,有 $|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{E}|=1\neq0$,从而知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 可逆,方程两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$,右乘 $\boldsymbol{C}^{-1}$,得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}$,两边再求逆,即得

$$\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1})^{-1}=(\boldsymbol{C}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{CA}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-2&1\\1&2&1\\3&-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&3&-2\\-1&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&-6&8\\4&5&1\\-5&-12&17\end{bmatrix}.$$

【注】 从求解过程看,先对算式简化,直到 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{CA}$ 后再代入数值计算,十分必要.另外,必须先验证 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 可逆,这是运算的前提,是不可缺少的步骤.最后一点,题中矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 的左、右位置很容易产生错误.

2.12 (C) 解 由

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&1\\a&1&1\\1&1&a\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&a&1\\0&1-a^2&1-a\\0&1-a&a-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&1\\0&1-a&a-1\\0&0&(1-a)(a+2)\end{bmatrix},$$

知若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为2,则 $a=-2$,故选(C).

2.13 2 解 由

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{vmatrix}=10\neq0,$$

知 $\boldsymbol{B}$ 可逆,从而确定 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})=2$.

2.14 证明 由题设,$r(\boldsymbol{A})=n-1$,知 $|\boldsymbol{A}|=0$,从而有 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,得

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}^*)\leqslant n,$$

即有 $r(\boldsymbol{A}^*)\leqslant n-r(\boldsymbol{A})=n-(n-1)=1$.又因 $r(\boldsymbol{A})=n-1$,知 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个 $n-1$ 阶子式不为零,也即至少有一个代数余子式不为零,从而知 $\boldsymbol{A}^*$ 非零,因此同时有 $r(\boldsymbol{A}^*)\geqslant1$.

综上讨论,可得 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$.

2.15 解 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[1,3,4]=\begin{bmatrix}1&3&4\\2&6&8\\3&9&12\end{bmatrix}$,这是一个任意两行(列)都成比例的方阵;

$$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}[1,2,3]=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&6&9\\4&8&12\end{bmatrix}$$,这是一个任意两行(列)都成比例的方阵;

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[1,2,3]=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}$$,这是一个任意两行(列)都成比例的方阵.

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=[1,3,4]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=1+6+12=19,$$

这是一个数,且该数就是方阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的对角线元素之和;

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=[1,2,3]\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}=1+6+12=19,$$

这是一个数,且该数就是方阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的对角线元素之和;

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=1+4+9=14,$$

这是一个数,且该数就是方阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的对角线元素之和.

【注】 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 都是列在前、行在后,其结果都是一个任意两行(列)都成比例的方阵(秩为1),且该方阵三行之比就是左端的列,该方阵三列之比就是右端的行,即秩为1的方阵总是可以分解为一个列向量乘一个行向量. $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 都是行在前、列在后,其结果都是一个数.

第3讲 向量组

3.1 (C) **解** 证明向量组线性相关有多个角度,其中能作为其充要条件的主要有:

①向量组线性相关的定义,存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 成立;

②从秩的角度,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s$;

③从向量组内向量之间的线性组合关系角度,向量组内至少有一个向量可以被其余向量线性表示;

④从向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 对应的齐次线性方程组解的角度,线性方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 必有无穷多解.

对照比较,选项(A)中缺少关键词“不全为零”,选项(B),(D)仅为充分条件,均不符合题意,选项(C)与③表述一致,故选(C).

3.2 (C) **解** 证明向量组线性无关有多个角度,其中能作为其充要条件的主要有:

①向量组线性无关的定义,要使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 成立,当且仅当组合系数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 均为零;

②从秩的角度,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=s$;

③从向量组内向量之间的线性组合关系角度,向量组内任何一个向量均不能被其余向量线性表示;

④从向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 对应的齐次线性方程组解的角度,线性方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 仅有零解.

对照比较,选项(A)中的表述无实际意义,与定义没有任何关联.选项(B),(D)仅为必要条件,均不符合题意,选项(C)与①表述一致,故选(C).

3.3 (C) **解** ①若 $\boldsymbol{\beta}$ 不能被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)+1$,至于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 是否线性无关,取决于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是否线性无关,由于题中未明示,故(A)不正确.

②若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则其中至少有一个向量可以被其余向量线性表示,但“有一个”未必一定是 $\boldsymbol{\beta}$,故(B)不正确.

③$\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的部分向量组线性表示,则也一定可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示.事实上,若 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被部分向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\,(r<s)$ 线性表示,有 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$,也有 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+0\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_s$,故(C)正确.

④$\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,但不一定被其任何一个部分向量组线性表示,如 $\boldsymbol{\beta}=[2,0]^{\mathrm{T}}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[0,2]^{\mathrm{T}}$ 线性表示,但不能由部分组 $\boldsymbol{\alpha}_2=[0,2]^{\mathrm{T}}$ 线性表示,故(D)不正确.

3.4 -1 **解** 两向量线性相关的充要条件是两向量各分量之间成比例,即存在一个非零的比例系数 k,使得 $\boldsymbol{A\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}$,从而得到一个矩阵方程,即有

$$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka\\k\\k\end{bmatrix},$$

比较对应位置上的元素，可得 $k=1, a=-1$.

3.5 (1)3;(2)-2 和 1 **解** (1)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$，而

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&-1&1\\2&3&-1\\1&a&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&a-3&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

故当 $a=3$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2<3$，此时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(2)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关$\Leftrightarrow|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq0$，而

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2,$$

故当 $a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq0$，此时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

【注】 第(1)题是 3 个 4 维列向量，不能使用行列式，而第(2)题可以用秩.

3.6 $\boldsymbol{A}$ 可逆 **解** 由题设，有

$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n]=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n],$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件为

$$r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n)=n,$$

即

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n|\neq0,$$

也即 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\neq0$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，故 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\neq0$，从而知 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 因此，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

3.7 $k\neq1$ **解** $[\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-k&1\end{bmatrix}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是

$$\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-k&1\end{vmatrix}=1-k\neq0,\text{即 }k\neq1.$$

3.8 **证明** 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，由

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\end{vmatrix}$$

$$=(3-2)(3+1)(3-1)(2+1)(2-1)(-1-1)$$

$$=-48\neq0,$$

知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

设 $\boldsymbol{\beta}=[a,b,c,d]^{\mathrm{T}}$ 为任意一个 4 维列向量，下面证明，$\boldsymbol{\beta}$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，且表达式唯一.

方法一 从方程组角度. 设存在一组数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta},$$

即有方程组

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=a,\\k_1-k_2+k_3-k_4=b,\\k_1+2k_2+4k_3+8k_4=c,\\k_1+3k_2+9k_3+27k_4=d,\end{cases}$$

由于系数矩阵 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，且表达式唯一.

方法二 从秩的角度. 由于矩阵 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，即有

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=4,$$

又向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 的向量个数大于维数，必线性相关，即有

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=4,$$

故 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，且表达式唯一.

方法三 利用极大线性无关组的性质考虑向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$. 由于矩阵 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，知其部分向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，再添加向量 $\boldsymbol{\beta}$ 后线性相关，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为该向量组的一个极大线性无关组. 因此，$\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，且表达式唯一.

【注】 题中行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 是由元素 $1,-1,2,3$ 构造的范德蒙德行列式，可利用其计算公式定值.

3.9 (B) **解** 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩即为向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 组成的矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$ 的秩. 因此，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩可以由 $\boldsymbol{A}$ 的子式或初等变换来确定.

方法一 考查 $\boldsymbol{A}$ 的子式，由 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&a&0\\2&2&2\end{vmatrix}=0$ 及矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中存在 2 阶子式 $\begin{vmatrix}1&1\\-1&0\end{vmatrix}\neq0$，知 $r(\boldsymbol{A})=2$.

方法二 对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&a&0\\2&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&a+1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

知 $r(\boldsymbol{A})=2$，故选(B).

3.10 (C) **解** $r(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\xlongequal{\text{记}}r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)$.

方法一

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix}2&0&0&0&2\\0&1&0&1&1\\1&0&1&1&1\\1&-1&1&0&0\end{bmatrix},$$

因 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=4$，故

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)=r\left(\begin{bmatrix}2&0&0&0&2\\0&1&0&1&1\\1&0&1&1&1\\1&-1&1&0&0\end{bmatrix}\right)=3.$$

方法二 易知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_5=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$，故 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)=3$.

3.11 解 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 按矩阵行向量组排列，并施以初等行变换，有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\alpha}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&1&1\\-1&-1&-1&-1\\1&-1&0&0\\0&-2&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\2&0&1&1\\-1&-1&-1&-1\\0&-2&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&2&1&1\\0&-2&-1&-1\\0&-2&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&2&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

容易看到，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是该向量组的一个极大线性无关组，并有

$$\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

【注】 题中提供的向量组恰好可以组成方阵，可以由方阵的行列式确定该向量组是否线性相关，但确定不了向量组的秩和极大线性无关组的选取及向量间的线性表达式，故没有采用此方法. 从求解过程看，极大线性无关组的选取与构建矩阵的向量排序有关，因此结果不唯一. 事实上，向量组内任意两个向量都是一个极大线性无关组，并可以将其他向量线性表示.

3.12 解 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，且秩为 2，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是它的一个极大线性无关组.

由于向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 具有相同的秩，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，从而

$$\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-(a-3b)=0,$$

由此解得 $a=3b$.

又 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，从而可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关. 于是

$$\begin{vmatrix}1&3&b\\2&0&1\\-3&1&0\end{vmatrix}=2b-10=0,$$

解得 $2b-10=0$，于是得 $a=15,b=5$.

3.13 (B) **解** ①两向量组等价即两向量组可以互相线性表出，与向量组的向量个数无关，也与两向量组自身的线性相关性无关. 故(A)，(C)不正确.

②两向量组等价与向量组组成的矩阵等价是两个不同的概念，后者是由初等变换联系的矩阵关系，两个等价矩阵的向量组之间未必有线性关系，反之，两个等价向量组对应的矩阵间未必同结构. 故(D)不正确.

③两向量组等价与矩阵等价的共同点：两者的秩都相等，而且秩相等是两向量组等价与矩阵等价的必要但非充分条件，选(B).

3.14 解 由$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{P}$，可得

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}.$$

第4讲 线性方程组

4.1 (D) **解** 由

$$|A|=\begin{vmatrix}k&1&1\\1&k&0\\3&1&1\end{vmatrix}=k(k-3),$$

且该非齐次线性方程组有唯一解,则必有 $k\neq0$ 且 $k\neq3$,故选(D).

4.2 $[1,0,0]^{\mathrm{T}}$ **解** 由

$$D=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&3&1\\4&9&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&-1\\2^2&3^2&(-1)^2\end{vmatrix}=-(-1-2)(-1-3)(3-2)=-12\neq0,$$

知方程组有唯一解,考虑到未知量 x_1 的系数与常数项相同,故方程组的解为 $[1,0,0]^{\mathrm{T}}$.

【注】 本题作为填空题出现,主要是其系数行列式为范德蒙德行列式,而且容易直接观察到方程组的解,计算量不大,考生若注意观察,可很快得到结果.

4.3 **解** 系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\1&1&-1&0&0\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$,则方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-x_2-x_5,\\x_3=-x_5,\\x_4=0.\end{cases}$$

令 $\begin{bmatrix}x_2\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,得方程组的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=[-1,1,0,0,0]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=[-1,0,-1,0,1]^{\mathrm{T}}$.

4.4 **解** 对增广矩阵作初等行变换,有

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&-1\\0&1&-1&1&1\\1&2&0&-3&3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&-1\\0&1&-1&1&1\\0&4&-3&1&4\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-2&1\\0&1&-1&1&1\\0&0&1&-3&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&1\\0&1&0&-2&1\\0&0&1&-3&0\end{array}\right],$$

知 $r(A)=r(\overline{A})=3<4$,从而知方程组有无穷多解,并含一个自由未知量,不妨取为 x_4,令 $x_4=k$, k 为任意常数,代入原方程组的同解方程组

$$\begin{cases} x_1=1-x_4, \\ x_2=1+2x_4, \\ x_3=3x_4, \end{cases}$$

可得原方程组的全部解 $x_1=1-k, x_2=1+2k, x_3=3k, x_4=k$，其中 k 为任意常数.

4.5 (C) **解** 已知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3,4)$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量$\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 线性表出$\Leftrightarrow$非齐次线性方程组 $y_1\boldsymbol{\xi}_1+y_2\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\alpha}_i$ 有解. 逐个判别 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 较麻烦，合在一起作初等行变换来进行判别较方便.

$$[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2 \mid \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]=\left[\begin{array}{cc:cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & -6 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 10 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cc:cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 12 & -2 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -32 & 0 & 10 \end{array}\right].$$

显然因 $r([\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2])=r([\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\alpha}_3])=2$，$y_1\boldsymbol{\xi}_1+y_2\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\alpha}_3$ 有解，故 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量. 故应选(C). 而 $r([\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2])=2\neq r([\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\alpha}_i])=3, i=1,2,4$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 不是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量.

4.6 (1)**证明** 方程组(＊)的增广矩阵的行列式为

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}|=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix}\text{（范德蒙德行列式）}$$

$$=(a_4-a_3)(a_4-a_2)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1).$$

由 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不相等，知 $|\boldsymbol{B}|\neq0$，即 $r(\boldsymbol{B})=4$，而系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})\leqslant3$，故 $r(\boldsymbol{B})\neq r(\boldsymbol{A})$，即方程组(＊)无解.

(2)**解** 当 $a_1=a_3=k, a_2=a_4=-k(k\neq0)$ 时，方程组(＊)为

$$\begin{cases} x_1+kx_2+k^2x_3=k^3, \\ x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3, \\ x_1+kx_2+k^2x_3=k^3, \\ x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3, \end{cases} \text{即}\begin{cases} x_1+kx_2+k^2x_3=k^3, \\ x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3. \end{cases}$$

因为 $\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -k \end{vmatrix}=-2k\neq0$，故 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=2$，方程组(＊)有解，且其对应的齐次线性方程组的基础解系应含有 $3-2=1$ 个解向量. 因为

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\neq\boldsymbol{0},$$

于是方程组(＊)的通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}_1+C\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}+C\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$（$C$ 为任意常数）.

【注】 解方程(不论是具体型还是抽象型)首先需定出系数矩阵的秩为多少,知道了秩,才能知道导出组的基础解系中有几个线性无关的解.第二问中用2阶子式$\begin{vmatrix}1 & k\\ 1 & -k\end{vmatrix}=-2k\neq 0$(没有3阶子式)定出秩为2,在解具体型方程组时,由于系数矩阵已知,这样就有具体的子式的信息,这一点读者要注意.

4.7 (D) **解** $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有相同的基础解系,是同解方程组.显然 ξ_1,ξ_2,ξ_3 也满足$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,又因 $r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)\geqslant r(\boldsymbol{A})$,$r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)\geqslant r(\boldsymbol{B})$,故$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 没有比 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$(或 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$)更多的解.则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 和$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 均是同解方程组.应选(D).

对于(A),取 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $-\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解.但$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ox}=\boldsymbol{0}$,任何 $\boldsymbol{x}$ 均是解,显然和 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$(或 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$)不同解.

对于(B),$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})=\boldsymbol{0}$,$r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})$,则$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可能会有更多的线性无关解,故不成立.(C)理由同(B),故不成立.

4.8 **证明** $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\leqslant r([\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}])=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])\leqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$,

于是 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}])$,故方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 一定有解.

【注】 请读者分析上述每一步的理由.

4.9 (C) **解** 由于 $r(\boldsymbol{A})=3$,因此线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数为 $4-r(\boldsymbol{A})=1$.

由于 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{b}$,因此

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3}{2}\right)=\boldsymbol{0},$$

故 $2\left(\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3}{2}\right)=[2,3,4,5]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

根据 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的结构理论,选项(C)为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

【注】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解,则当 $\sum\limits_{i=1}^{s}k_i=0$ 时,$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,当 $\sum\limits_{i=1}^{s}k_i=1$ 时,$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

4.10 (D) **解** $r(\boldsymbol{A})=n$,$\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表出$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])=n\Leftrightarrow \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

(A)是充分条件,但非必要条件,(B)是必要条件,但非充分条件(可能无解),(C)是必要条件,但非充分条件($\boldsymbol{b}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出,可能不唯一).

4.11 1 **解** 由题设,齐次方程组$\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=0,\\ x_1+2x_2+x_3=0,\\ x_1-x_2+ax_3=0\end{cases}$与方程 $x_1-2x_2+3x_3=1$ 有公共解,对于非齐

次线性方程而言，公共解不可能为零解，因此，该齐次方程组也必有非零解，故方程组的系数矩阵的秩小于3，也即系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\1 & 2 & 1\\1 & -1 & a\end{vmatrix}=2(1-a)=0,$$

解得 $a=1$. 经验证 $a=1$ 时，存在公共解，故 $a=1$.

4.12 解 将两个线性方程组联立，得方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=1,\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda^2,\\x_1-x_2+2x_3=-4.\end{cases}$$

方法一 从方程组的系数行列式入手. 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \lambda\\1 & \lambda & 1\\1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1),$$

于是，当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq0$ 时，方程组有唯一解，即两个方程组有一个公共解.

当 $\lambda=1$ 时，方程组的增广矩阵为

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & 2 & -4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & 0 & 6\\0 & -2 & 1 & -5\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],$$

有 $r(A)=r(\overline{A})=2<3$，知方程组有无穷多解，并含一个自由未知量，不妨取为 x_2，令 $x_2=k$，其中 k 为任意常数，代入原方程组的同解方程组

$$\begin{cases}x_1=6-3x_2,\\x_3=-5+2x_2,\end{cases}$$

可得两个方程组的公共解 $x_1=6-3k, x_2=k, x_3=-5+2k$，其中 k 为任意常数.

当 $\lambda=0$ 时，方程组的增广矩阵为

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & -1 & 2 & -4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & -1 & 1\\0 & 0 & 0 & -3\end{array}\right],$$

有 $r(A)\neq r(\overline{A})$，知方程组无解，即两个方程组无公共解.

方法二 直接对方程组的增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\1 & \lambda & 1 & \lambda^2\\1 & -1 & 2 & -4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & 2 & -4\\0 & 2 & \lambda-2 & 5\\0 & \lambda+1 & -1 & \lambda^2+4\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & 2 & -4\\0 & 2 & \lambda-2 & 5\\0 & 0 & -\dfrac{\lambda(\lambda-1)}{2} & \dfrac{(\lambda-1)(2\lambda-3)}{2}\end{array}\right],$$

于是，当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq0$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=3$，方程组有唯一解，即两个方程组有一个公共解.

当 $\lambda=1$ 和 $\lambda=0$ 时两个方程组的公共解情况同方法一.

4.13 解 将方程组(Ⅱ)的通解

$$k_1[-1,1,1,0]^T+k_2[2,-1,0,1]^T+[-2,-3,0,0]^T=[-2-k_1+2k_2,-3+k_1-k_2,k_1,k_2]^T,$$

代入方程组(Ⅰ),得

$$\begin{cases}(-2-k_1+2k_2)+3(-3+k_1-k_2)-3k_2=1,\\-7(-3+k_1-k_2)+3k_1+k_2=-3,\end{cases}$$

化简得

$$k_1=2k_2+6.$$

将上述关系式代入(Ⅱ)的通解,得方程组(Ⅰ),(Ⅱ)的公共解为

$$[-2-(2k_2+6)+2k_2,-3+2k_2+6-k_2,2k_2+6,k_2]^T=[-8,k_2+3,2k_2+6,k_2]^T.$$

4.14 解 (1)方程组(*)的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&-2&2\\0&0&1&1&-1\end{bmatrix}$$

已是阶梯形.求得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=[-1,2,-1,1,0]^T$,$\boldsymbol{\xi}_2=[-1,-2,1,0,1]^T$,方程组(*)的通解为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=k_1\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\\0\\1\end{bmatrix},\text{其中 }k_1,k_2\text{ 为任意常数.}$$

(2)**方法一** 方程组(*)和(* *)是同解方程组,将 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$ 代入方程组(* *)的第1,2个方程,由

$$\begin{cases}-2\times(-1)+2+a\times(-1)-5+0=0,\\-1+2-(-1)+b+0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1,\\b=-2.\end{cases}$$

显然,$\boldsymbol{\xi}_1$ 也满足方程组(* *)的第3个方程.

将 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$ 代入方程组(* *)的第3个方程,由 $3\times(-1)+(-2)+1+c=0$,得 $c=4$.

显然,$\boldsymbol{\xi}_2$ 也满足方程组(* *)的第1,2个方程.

故知,当 $a=-1,b=-2,c=4$ 时,由解的性质知方程组(*)的解全部是方程组(* *)的解.

反之,当 $a=-1,b=-2,c=4$ 时,方程组(* *)的系数矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-2&1&-1&-5&1\\1&1&-1&-2&4\\3&1&1&2&4\end{bmatrix},\quad r(\boldsymbol{B})=3.$$

方程组（* *）的未知量个数 $n=5$，故方程组（* *）的基础解系由两个线性无关解组成，已验算方程组（*）的解全部是方程组（* *）的解. 故方程组（* *）的解也全部是方程组（*）的解，方程组（*）和（* *）是同解方程组.

方法二 方程组（*）和方程组（* *）是同解方程组，方程组（*）和方程组（* *）的系数行向量是等价向量组，可以相互线性表示，记方程组（*）的3个行向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，方程组（* *）的3个行向量为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$，将 $[\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T,\boldsymbol{\beta}_1^T,\boldsymbol{\beta}_2^T,\boldsymbol{\beta}_3^T]$ 作初等行变换，化成阶梯形，得

$$[\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T,\boldsymbol{\beta}_1^T,\boldsymbol{\beta}_2^T,\boldsymbol{\beta}_3^T]=\begin{bmatrix}1&0&0&-2&1&3\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&a&-1&1\\1&-2&1&-5&b&2\\1&2&-1&1&4&c\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-2&1&3\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&a&-1&1\\0&-2&1&-3&b-1&-1\\0&2&-1&3&3&c-3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&-2&1&3\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&a&-1&1\\0&0&1&-1&b+1&1\\0&0&-1&1&1&c-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-2&1&3\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&a&-1&1\\0&0&0&-a-1&b+2&0\\0&0&0&a+1&0&c-4\end{bmatrix}.$$

当 $a=-1,b=-2,c=4$ 时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

反之，当 $a=-1,b=-2,c=4$ 时，因

$$\begin{bmatrix}1&0&0&-2&1&3\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&-1&-1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0&1&1&1\\1&2&0&0&3&5\\0&1&1&0&0&2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$r([\boldsymbol{\beta}_1^T,\boldsymbol{\beta}_2^T,\boldsymbol{\beta}_3^T])=r([\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T,\boldsymbol{\beta}_1^T,\boldsymbol{\beta}_2^T,\boldsymbol{\beta}_3^T])=3$，可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

故当 $a=-1,b=-2,c=4$ 时，方程组（*）和方程组（* *）是同解方程组.

第5讲 特征值与特征向量

5.1 (A) **解** 判断一个向量是否为已知矩阵的特征向量，直接计算矩阵的特征值和特征向量会导致计算量大，一个有效的方法就是将该矩阵右乘向量，将结果对照定义式进行验证. 其中由

$$A\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},$$

知选项(A)符合题意，故选之.

5.2 (B) **解** $2A^*$ 的特征值是 $2\dfrac{|A|}{\lambda_i}(i=1,2,3)$，其中 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$，$\lambda_i(i=1,2,3)$ 是 A 的特征值，分别为 1,2,3，故 $2A^*$ 的特征值为 4,6,12.

5.3 (1) -1；(2) 2 **解** (1) 显然 $r(A)=1$，于是 $\lambda=\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}=1-2+0=-1$.

(2) $\beta\alpha^{\mathrm{T}}$ 也是秩为 1 的矩阵，故 $\lambda=\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}=\alpha^{\mathrm{T}}\beta=2$.

5.4 a；$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ **解** 设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$，则 $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}\\a_{21}+a_{22}+a_{23}\\a_{31}+a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\a\\a\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，

即 $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，故 $\lambda=a$，$\alpha=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

5.5 $\dfrac{1}{4}$ **解** 由题设，A 有一个特征值为零，又 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$，因此，有

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&-1\\-2&3&-1\\3&-2&x\end{vmatrix}=8x-2=0,$$

解得 $x=\dfrac{1}{4}$.

5.6 -4 **解** 由 $|\lambda E-A|=|-2E-A|=0$，且 $b\neq0$，可求得 $x=-4$.

5.7 -1 **解** 设 α 是矩阵 A^{-1} 属于特征值 λ_0 的特征向量，由定义有 $A^{-1}\alpha=\lambda_0\alpha$，于是 $\alpha=\lambda_0A\alpha$，即

$$\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}=\lambda_0\begin{bmatrix}-1&2&2\\2&a&-2\\2&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases}\lambda_0(-a+2+2)=a,\\ \lambda_0(2a+a-2)=1,\\ \lambda_0(2a-2-1)=1,\end{cases}$$

解得 $\lambda_0=-\dfrac{1}{5}, a=-1$.

5.8 6 **解** 由 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=0$,知 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=-1,-2,-3$,于是 $\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}$ 有特征值 $\lambda_1=3,2,1$,故 $|\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}|=6$.

5.9 (C) **解** 四个选项中的矩阵,特征值均为 1,1,2. 能相似于对角矩阵的矩阵,要求对应二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 有两个线性无关特征向量. 对(C)而言,因

$$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})=r\left(\begin{bmatrix}0&-2&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=1,$$

$\lambda_1=\lambda_2=1$ 有两个线性无关特征向量,故(C)可相似于对角矩阵. 而 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D})=2$, $\lambda_1=\lambda_2=1$ 都只有一个线性无关特征向量,故均不能相似于对角矩阵.

5.10 (C) **解** 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1,3,5,因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值,所以 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 2,2,5,由于

$$r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=r\left(\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\-3&0&-3\end{bmatrix}\right)=2,$$

因此,$\lambda=2$ 只对应一个线性无关的特征向量,因而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 不能相似对角化.

矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是实对称矩阵,故必可相似对角化.

矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的特征值也是 2,2,5,由于

$$r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D})=r\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-3&-1&-3\end{bmatrix}\right)=1,$$

因此,$\lambda=2$ 对应有两个线性无关的特征向量,因而矩阵 $\boldsymbol{D}$ 可以相似对角化. 故应选(C).

5.11 (D) **解** 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量,故 $-\boldsymbol{\alpha}_3$ 仍是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量,$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 仍是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量,故选(D).

【注】 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,故(A),(C)不对;(B)中的 $\boldsymbol{P}$ 对应的对角矩阵是 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$.

5.12 **解** (1)$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $2,y,-1$. 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,y,-1$. 故

$$\begin{cases}2+y+(-1)=2+0+x,\\ 2y\cdot(-1)=|\boldsymbol{A}|=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0,\\ y=1.\end{cases}$$

(2)分别求出 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$ 的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

令可逆矩阵 $P=[p_1,p_2,p_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=B$.

5.13 解 由题设，$A\alpha_i=i\alpha_i\ (i=1,2,3)$，知矩阵 A 有特征值 1,2,3，以及各自对应的特征向量 α_1，α_2，α_3，由于特征值相异，知 A 必与对角矩阵相似，若记

$$\Lambda=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},\quad P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix},$$

计算可得

$$P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{bmatrix},$$

于是有

$$A=P\Lambda P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{7}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&2\end{bmatrix}.$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

5.14 解 因为 $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=-1$ 时，解方程组 $(-E-A)x=0$，得特征向量 $\xi_1=[1,1,0]^T$；

当 $\lambda_2=-2$ 时，解方程组 $(-2E-A)x=0$，得特征向量 $\xi_2=[1,2,0]^T$；

当 $\lambda_3=0$ 时，解方程组 $Ax=0$，得特征向量 $\xi_3=[3,2,2]^T$.

令 $P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，所以

$$A^{99}=P\begin{bmatrix}(-1)^{99}&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^{99}&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

第6讲 二次型

6.1 $\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 6 \\ \frac{5}{2} & 4 & 7 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ 解 二次型矩阵是实对称矩阵，因此，题中给出的二次型矩阵形式不是规范形式，需要对其重新调整，调整的方法是，以矩阵主对角线为对称线，将对称线两侧对称点上的两元素用题中矩阵同位置上元素和的平均值置换，得到

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 6 \\ \frac{5}{2} & 4 & 7 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix},$$

即为所求二次型矩阵.

6.2 2 解 二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. 对 A 作初等变换得 $A\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，从而 $r(A)=2$，即二次型的秩为 2.

6.3 (B) 解 由标准形 $f=2y_1^2+5y_2^2+by_3^2$，可知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵的特征值为 2，5，b，又二次型矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & a \end{bmatrix}$，根据矩阵的行列式、迹与特征值的关系可得方程组：

$$\begin{cases} 1+2+a=2+5+b, \\ -2a-4=10b, \end{cases}$$

解得 $a=3,b=-1$，故选(B).

6.4 (B) 解 设 λ 是 A 的特征值，由 $A^3+2A^2-3A=O$，得 $\lambda^3+2\lambda^2-3\lambda=0$，即 $\lambda(\lambda+3)(\lambda-1)=0$，于是 $\lambda=0$ 或 -3 或 1.

根据正、负惯性指数均为 1，知特征值 λ 只能是 $-3,1,0$，从而二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 在正交变换下的标准形为 $-3y_1^2+y_2^2$，故选(B).

6.5 (D) 解 依题设，$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3<0$，又 $|A|=\lambda_1\lambda_2$，知 2 阶矩阵 A 的两个特征值的符号是一正一负. 容易看到，矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 同为对称矩阵，且 $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3<0$，即此矩阵的两个特征值

与 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值的符号一致，所以可以判定矩阵$\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$与 $\boldsymbol{A}$ 合同. 故选(D).

6.6 (D) **解** **方法一** 用配方法化规范形.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3=(x_1-2x_2+2x_3)^2,$$

f 的正惯性指数为 1，负惯性指数为 0，故选(D).

方法二 用正交变换化规范形. f 对应的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\\ 2 & -4 & 4\end{bmatrix},$$

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda-4 & 4\\ -2 & 4 & \lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-4 & \lambda\\ -2 & 4 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 0\\ 4 & \lambda-8 & 0\\ -2 & 4 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda[(\lambda-1)(\lambda-8)-8]=\lambda^2(\lambda-9).$$

$\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=9,\lambda_2=\lambda_3=0$. 故 f 的规范形为 $f=z_1^2$，选(D).

【注】 不必真的化成规范形，只要知道正惯性指数 p 及负惯性指数 q 即可.

6.7 $f=y_1^2+y_2^2$ **解** 由

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)=0,$$

知 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda=0,1,3$. 从而知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有 2 个正值和 1 个零，因此二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 $f=y_1^2+y_2^2$.

6.8 解 **方法一** 用配方法化二次型为标准形. 由

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2ax_1x_3+(ax_3)^2-x_2^2+4x_2x_3-4x_3^2+4x_3^2-(ax_3)^2\\&=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2,\end{aligned}$$

从而知，若二次型的负惯性指数为 1，则有 $4-a^2\geqslant 0$，即 $-2\leqslant a\leqslant 2$.

方法二 由二次型矩阵入手. 依题设，二次型矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & -1 & 2\\ a & 2 & 0\end{bmatrix},$$

于是，若 $\boldsymbol{A}$ 含零特征值，则 $|\boldsymbol{A}|=a^2-4=0$，得 $a=\pm 2$，无论 $a=2$ 还是 $a=-2$，均可得另外两个特征值为 ± 3，符合题意. 若 $\boldsymbol{A}$ 不含零特征值，由于矩阵的迹为 0，知其特征值不可能恒正或恒负，因此，要使负惯性指数为 1，特征值必为两正一负，从而有 $|\boldsymbol{A}|=a^2-4<0$，即 $|a|<2$.

综上讨论，若二次型的负惯性指数为 1，应有 $-2\leqslant a\leqslant 2$.

6.9 解 按顺序 $x_1\to x_2\to x_3$ 配方如下：

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2-2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2-3x_3^2-6x_2x_3\\&=(x_1-x_2-x_3)^2-x_2^2-8x_2x_3-16x_3^2+12x_3^2\\&=(x_1-x_2-x_3)^2-(x_2+4x_3)^2+12x_3^2\end{aligned}$$

$$=(x_1-x_2-x_3)^2-(x_2+4x_3)^2+(2\sqrt{3}x_3)^2,$$

于是令$\begin{cases} y_1=x_1-x_2-x_3, \\ y_2=x_2+4x_3, \\ y_3=2\sqrt{3}x_3, \end{cases}$ 反解得$\begin{cases} x_1=y_1+y_2-\frac{\sqrt{3}}{2}y_3, \\ x_2=y_2-\frac{2\sqrt{3}}{3}y_3, \\ x_3=\frac{\sqrt{3}}{6}y_3, \end{cases}$ 记

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}.$$

于是，在线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 下，二次型化为规范形 $f=y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

【注】 一般在化二次型为标准形或规范形时，在写出标准形或规范形的同时，还应具体给出线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$. 如果用配方法化标准形或规范形，最初设定的变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}$ 不是题目要求的变换形式，必须反解转换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 的形式.

6.10 解 二次型矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0,$$

解得 $\lambda=0,2$(二重).

当 $\lambda=0$ 时，解齐次方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=[1,-1,0]^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=2$ 时，解齐次方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由同解方程 $x_1-x_2=0$，得特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_3=[0,0,1]^{\mathrm{T}}.$$

由于 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 已两两正交，只需单位化，取

$$\boldsymbol{\eta}_1=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_3=[0,0,1]^{\mathrm{T}},$$

并令

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，二次型的标准形为 $f=2y_2^2+2y_3^2$.

6.11 解 二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & b \end{bmatrix}$，设 $\boldsymbol{\alpha}=[1,-2,2]^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向

量，则

$$\begin{bmatrix} a & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

于是
$$\begin{cases} a+4+4=\lambda, \\ -2-8-8=-2\lambda, \Rightarrow a=1, b=4, \lambda=9. \\ 2+8+2b=2\lambda \end{cases}$$

从而 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$. 令特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-4 & 4 \\ -2 & 4 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)=0,$$

可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,0,9.

对 $\lambda=0$，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=[2,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[-2,0,1]^{\mathrm{T}}$.

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 不正交，故需施密特正交化，即

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=[2,1,0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{5}[-2,4,5]^{\mathrm{T}},$$

把 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\alpha}$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}[2,1,0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}[-2,4,5]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{3}[1,-2,2]^{\mathrm{T}}.$$

那么经正交变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=9y_3^2$.

6.12 (A) **解** 从题型特点观察，本题是从正定矩阵的运算角度判断矩阵的正定性. 相关结论：首先，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定，则其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$，伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$，幂矩阵 $\boldsymbol{A}^m$ 也一定是正定矩阵，这一点可以从两个方面进行验证：一是对称性判断，由 $\boldsymbol{A}$ 对称可推出 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^m$ 对称；二是判断 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^m$ 的特征值与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值在符号上的一致性，对于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda(>0)$，可以确定 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^m$ 对应的特征值为 $\frac{1}{\lambda}$，$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$，$\lambda^m$，均与 λ 符号一致. 其次，若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵，可以证明它们的和式 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}(a,b>0)$ 也一定是正定的.

综上分析，选项(B)，(C)，(D)均正确，由排除法，故选(A). 实际上，由于 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 不一定可交换，$\boldsymbol{AB}$ 不一定是对称矩阵，因此 $\boldsymbol{AB}$ 不一定为正定矩阵. 这也说明，矩阵的对称性是矩阵正定的必要条件，不可忽略. 但许多考生不注意这一点，出错率较高.

6.13 (C) **解** 一般可以根据正定矩阵的性质，尤其是正定矩阵的必要条件判别矩阵的正定性，这些必要条件是：正定矩阵必须是对称矩阵；正定矩阵的主对角线元素必须为正；正定矩阵必须是可逆矩阵；

对应行列式必须为正.因此,由对称性可排除选项(A),由主对角线元素必须为正可排除选项(B),(D),故选(C).

6.14 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ **解** 依题设,题中的二次型矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -\frac{t}{2}\\ 0 & -\frac{t}{2} & 1\end{bmatrix}.$$

于是,由顺序主子式法,二次型 f 正定,则必有

$$|A_1|=2>0,\quad |A_2|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1>0,\quad |A_3|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -\frac{t}{2}\\ 0 & -\frac{t}{2} & 1\end{vmatrix}=1-\frac{t^2}{2}>0,$$

解得 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.

6.15 (B) **解** 因

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_2x_3\\&=(x_1-2x_2)^2+(x_2+x_3)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

取 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}=[2,1,-1]^{\mathrm{T}}$,有 $f(x_1,x_2,x_3)=0$,等号成立.故选(B).

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

张宇

博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部"国家精品课程建设骨干教师"，全国畅销书《张宇考研数学基础30讲》《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》《张宇概率论与数理统计9讲》《张宇考研数学题源探析经典1000题》《张宇考研数学真题大全解》《考研数学命题人终极预测8套卷》《张宇考研数学最后4套卷》《张宇经济类联考综合能力数学通关优题库》作者，高等教育出版社原《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》及新编《全国硕士研究生招生考试经济类专业学位联考综合能力考试大纲解析》编者之一，北京、上海、广州、西安等全国著名考研数学辅导班首席主讲。

张宇数学教育系列丛书

教材类

张宇考研数学基础30讲·高等数学分册 书课包

张宇考研数学基础30讲·线性代数分册 书课包

张宇考研数学基础30讲·概率论与数理统计分册 书课包

张宇高等数学18讲 书课包

张宇线性代数9讲 书课包

张宇概率论与数理统计9讲 书课包

题集类

张宇考研数学题源探析经典1000题（分数学一、数学二、数学三） 书课包

张宇考研数学真题大全解（上册）（分数学一、数学二、数学三）

张宇考研数学真题大全解（下册）（分数学一、数学二、数学三） 书课包

考研数学命题人终极预测8套卷（分过关版、高分版）（分数学一、数学二、数学三）

张宇考研数学最后4套卷（分过关版、高分版）（分数学一、数学二、数学三）

北京理工大学出版社网址：http://www.bitpress.com.cn

宇哥考研
新浪微博二维码

张宇考研数学
微信公众号

启航教育
微信公众号