

Grundlagen der Algebra

Stephan Epp
hjstephan86@gmail.com

12. Juli 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Definitionen

2

1 Definitionen

Zur Betrachtung der Algebra folgen Definitionen, die für den weiteren Verlauf dieser Arbeit nützlich sind.

Definiton 1.1. Ein Vektor $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ aus dem Raum \mathbb{R}^n hat die Größe n und ist ein Tupel von n Elementen, wobei jedes Element $v_i \in \mathbb{R}$.

Zu beachten ist, dass der Vektor \mathbf{v} fett geschrieben ist. Zum Beispiel ist $\mathbf{0}$ der Vektor, bei dem alle Elemente den Wert null haben.

Definiton 1.2. Eine Matrix A aus dem Raum $\mathbb{R}^{n \times m}$ hat die Größe $n \times m$ und besteht aus n Zeilen und m Spalten, wobei jedes Element $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Definiton 1.3. Zwei Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} projizieren den Vektor \mathbf{w} genau dann, wenn es Konstanten k_1 und k_2 gibt, so dass

$$k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v} = \mathbf{w} \neq \mathbf{0},$$

dabei haben \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} dieselbe Größe und $k_i \in \mathbb{R}$, $k_i \neq 0$.

Das heißt, die Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} bilden eine Projektion \mathbf{w} in Abhängigkeit der Konstanten k_1 , k_2 , wobei die Konstanten nicht den Wert null haben.

Definiton 1.4. Für die Projektion \mathbf{w} durch die Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} liegen \mathbf{u} und \mathbf{v} in der Umgebung von \mathbf{w} im Raum \mathbb{R}^n , wobei \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} jeweils Größe n haben.

Nicht alle Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} liegen in der Umgebung von \mathbf{w} . Es gibt Vektoren im Raum \mathbb{R}^n , durch die \mathbf{w} niemals projiziert werden kann.

Definiton 1.5. Eine Projektion \mathbf{w} durch die Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} und Konstanten k_1 , k_2 ist minimal, wenn für alle Konstanten k_i gilt, wird eine Konstante $k_i = 0$, dann ist

$$k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Das bedeutet, wenn eine minimale Projektion gefunden wurde, entferne die eine Konstante k , d.h., $k = 0$, und erhalte mit $k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v} = \mathbf{0}$ die größte Einheit, mit der, egal wie ihre Vektoren miteinander kombiniert werden, nichts mehr projiziert werden kann außer $\mathbf{0}$. Damit wurde eine größte und nicht mehr projizierbare Einheit gefunden, der Kern.

Der Kern in seiner Umgebung des Raumes ist nicht teilbar, er kann nicht weiter reduziert werden. Der triviale Kern besteht nur aus den Vektoren, bei denen jeweils nur ein Element den Wert eins hat, sonst haben alle anderen Elemente den Wert null.

Definiton 1.6. Die Einheitsmatrix E ist gegeben durch den trivialen Kern in entsprechender Ordnung,

$$E = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei E die Größe vier hat und die Vektoren $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4$ jeweils die Größe vier haben.

Man beachte, dass bei den Vektoren $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4$ jeweils nur ein Element den Wert eins hat, sonst haben alle anderen Elemente den Wert null. Außerdem gilt:

$$k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 + k_3 \mathbf{e}_3 + k_4 \mathbf{e}_4 = \mathbf{0},$$

egal, welchen Wert die Konstanten $k_i \in \mathbb{R}$ annehmen. In dieser Ordnung $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4$ bilden sie die Einheitsmatrix und auch einen Kern im Raum $\mathbb{R}^{4 \times 4}$.

Idee: Halte die Wertebereiche von Elementen einer Matrix in ihrer Größe klein, finde die Menge aller Kerne, mit Hilfe derer Ergebnisse von Matrixoperationen effizienter nachgeschaut werden können. Vergrößere den Wertebereich um ein Delta, das für das effizientere Nachschauen im vergrößerten Wertebereich genutzt wird.