第一章　yakovenk 的推導

第 1.1 節　慣性坐標系間的關係

O' 坐標系相對於 O 坐標系往 X 軸正向以速率 v 移動，在 $t=0$ 時也是 $t'=0$ 的時候原點重合。
假設時空轉換函數 (f,g) 對於任一組事件對 $(x_1,t_1),(x_2,t_2)$ 會滿足

$$x_1'-x_2'=f(x_1-x_2,t_1-t_2),t_1'-t_2'=g(x_1-x_2,t_1-t_2)$$

則

$$x'=Ax+Bt, \tag{1.1}$$

$$t'=Cx+Dt \tag{1.2}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

1.1.1　討論 $(x',t')=(0,t')$ 的事件

此時，$(x,t)=(vt,t)$ 故 $0=Ax+Bt=Avt+Bt=(Av+B)t$，得到

$$B=-Av \tag{1.4}$$

1.1.2　討論 $(x,t)=(0,t)$ 的事件

此時，$(x',t')=(-vt',t')$，得到 $x'=Ax+Bt=Bt$ 與 $x'=-vt'=-v(Cx+Dt)=-vDt$。因此 $B=-Dv$，所以 $D=A$。故 $t'=Cx+At$，將 C 改寫成 AF，則

$$t'=A(Fx+t) \tag{1.5}$$

轉換方程式整理成

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & -v \\ F & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

A, F 都是 v 的函數，A 改成 γ，變成轉換方程式整理成

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma(v) \begin{pmatrix} 1 & -v \\ F(v) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

O' 坐標系相對於 O 坐標系往 X 軸正向以速率 v_1 移動，O'' 坐標系相對於 O' 坐標系往 X' 軸正向以速率 v_2 移動，則

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} &= \gamma(v_2) \begin{pmatrix} 1 & -v_2 \\ F(v_2) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} \\ &= \gamma(v_2)\gamma(v_1) \begin{pmatrix} 1 & -v_2 \\ F(v_2) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ F(v_1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.8}$$

而

$$\begin{pmatrix} 1 & -v_2 \\ F(v_2) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ F(v_1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - v_2 F(v_1) & -(v_1 + v_2) \\ F(v_1) + F(v_2) & 1 - v_1 F(v_2) \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

所以 $1 - v_2 F(v_1) = 1 - v_1 F(v_2)$，故 $F(v_1)/v_1 = F(v_2)/v_2$，所以

$$F(v) = av \tag{1.10}$$

當 $v_2 = -v_1$ 時，方程式 (1.8) 變成

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} &= \gamma(v_1) \begin{pmatrix} 1 & v_1 \\ F(-v_1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} \\ &= \gamma(-v_1)\gamma(v_1) \begin{pmatrix} 1 & v_1 \\ F(-v_1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ F(v_1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.11}$$

所以

$$\gamma(-v_1)\gamma(v_1) \begin{pmatrix} 1 & v_1 \\ -av_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ av_1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$\gamma(-v_1)\gamma(v_1)(1 + av_1^2) = 1 \tag{1.12}$$

由於對稱性，$\gamma(-v_1) = \gamma(v_1)$，得到

$$\gamma(v_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + av_1^2}} \tag{1.13}$$

座標轉換公式變成

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+av^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ av & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

1. 當 $a=0$ 的時候，轉換公式為

   $$x' = x - vt, t' = t$$

   就是伽利列變換。

2. 當 $a<0$ 的時候，a 可以寫成 $-\frac{1}{c_0^2}$，轉換公式變成

   $$\begin{aligned} x' &= \tfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} \\ t' &= \tfrac{t-vx/c_0^2}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} \end{aligned} \tag{1.15}$$

   假如某物體以速度 c_0 在 $t=0$ 從原點出發，則它在 O 系統的座標為 (c_0t, t)。而在 O' 中的速度 $\frac{x'}{t'} = \frac{c_0t-vt}{t-vt/c_0} = c_0$，也就是說，它在 O' 系統的速度也是 c_0。由此看來，c_0 與光速有點奇妙的關係。

   現在加上光速的考慮，看看 c_0 到底是甚麼？

   假設事件 A 是在 O 系統原點於 $t=t_1$ 發射光束的事件，事件 B 是 O' 系統的原點接受到該光束的事件。事件 A 的 O 座標為 $(0, t_1)$，O' 座標為 (x_1', t_1')。事件 B 的 O 座標為 (x_2, t_2)，O' 座標為 $(0, t_2')$。因為相對速度為 v，所以 $x_2 = vt_2$，因為光速為 c，所以 $x_2 = c(t_2 - t_1)$，得到 $vt_2 = c(t_2 - t_1)$，故

   $$\frac{t_2}{t_1} = \frac{c}{c-v} \tag{1.16}$$

   因為相對速度為 v，所以 $x_1' = -vt_1'$，因為光速為 c，所以 $vt_1' = c(t_2' - t_1')$，故

   $$\frac{t_2'}{t_1'} = \frac{c+v}{c} \tag{1.17}$$

   又根據座標變換，用 γ 表示 $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}$，則 $t_1' = \gamma t_1,\ t_2' = \gamma(t_2 - v(vt_2)/c_0^2) = \gamma t_2(1 - v^2 t_2/c_0^2) = t_2/\gamma$。因此

   $$\frac{t_2'}{t_1'} = \frac{t_2}{t_1\gamma^2} = \frac{t_2}{t_1}(1 - \frac{v^2}{c_0^2}) \tag{1.18}$$

如此一來，

$$\frac{c+v}{c} = \frac{t_2'}{t_1'} = \frac{t_2}{t_1}(1 - \frac{v^2}{c_0^2}) = \frac{c}{c-v}(1 - \frac{v^2}{c_0^2}) \tag{1.19}$$

化簡變成

$$\frac{(c+v)(c-v)}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{c_0^2} \tag{1.20}$$

也就是 $1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{c_0^2}$，得到

$$c_0 = c \tag{1.21}$$

也就是說，前面的常數 c_0 就是光速 c。