MAE 5032 HPC Final Project – the transient heat equation in a one-dimensional (1D) domain

Jiayi Huang

Abstract

本文利用有限差分法计算热方程的数值解，在一个一维热方程的具体问题中，使用显示欧拉法和隐式欧拉法分别求解，两种求解均基于PETsC库。根据逐步加细的网格和逐步减小的时间步长，分析并计算了截断误差如何依赖于网格间距和时间步长，并给出理论预测。

Keywords: Finite difference method, Explicit Euler and Implicit Euler methods

1. Introduction

首先列出要求解的一维传热问题

$$
\begin{aligned}
\rho c\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f \qquad \text{on } \Omega\times(0,T)\\
u &= g \qquad \text{on } \Gamma_g\times(0,T)\\
\kappa\frac{\partial u}{\partial x}n_x &= h \qquad \text{on } \Gamma_h\times(0,T)\\
u|_{t=0} &= u_0 \qquad \text{in } \Omega.
\end{aligned}
$$

其中 $u = u(x,t)$ 是要求解的 t 时刻，x 位置处的温度。可以画出下面的示意网格。

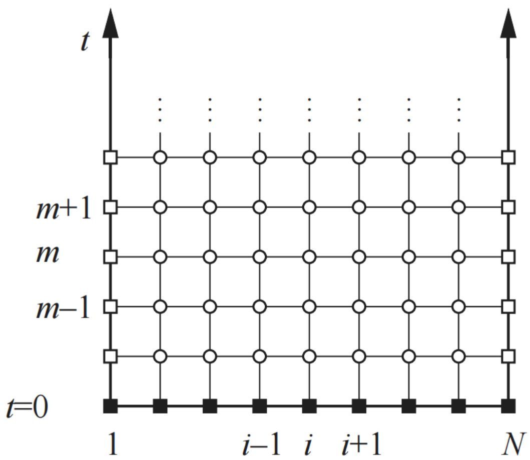

图 1: 解一维热方程的示意网格，实心方块代表已知位置，空心的则代表用有限差分近似的位置

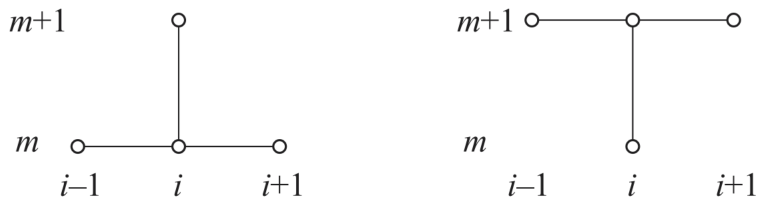

图 2: 关于有限差分的计算子，左边是Explicit Euler，右边是Implicit Euler

根据上面的差分算子示意图，可以推导出下面的两个 Explicit Euler 和 Implicit Euler 迭代公式。

$$u_i^{m+1} = \alpha u_{i+1}^m + (1-2\alpha)u_i^m + \alpha u_{i-1}^m + \beta \cdot f \tag{1.1}$$

$$u_i^{m-1} = -\alpha u_{i+1}^m + (1+2\alpha)u_i^m - \alpha u_{i-1}^m - \beta \cdot f \tag{1.2}$$

其中 $\alpha = \kappa\beta/\Delta x^2$, $\beta = \Delta t/\rho c$,
代入边界条件 $f = \sin(l\pi x), \quad u_0 = e^x, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \kappa = 1.0$ ，进而获得对应的三对角迭代矩阵，再套用之前作业中完成的解三对角矩阵程序进行求解。

2. Code development

2.1. Codes for explicit Euler and implicit Euler methods

2.2. The stability property

2.3. The restart facility using HDF5

2.4. Defensive manner

2.5. Compiling

2.5.1. Makefile or CMake

2.6. Profiling analysis

2.7. Visualization utility

3. Code testing

3.1. Method stability

3.2. Manufactured solution method

3.3. Parallelism

References

[1] Recktenwald, Gerald. “Finite-Difference Approximations to the Heat Equation.” (2004).
[2] 微分方程数值解法/戴嘉尊,邱建贤编著.-南京:东南大学出版社,2002.02.-233页

4. Implementation and Verification