Logistic Distribution

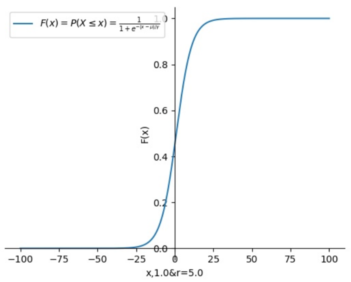
设 X 是连续随机变量，X 服从Logistic Distribution 是指 X 具有下列分布函数和密度函数：

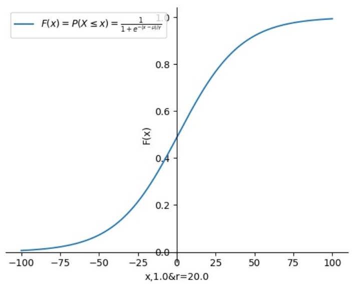
$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{1+e^{-(x-\mu)/\gamma}}$$

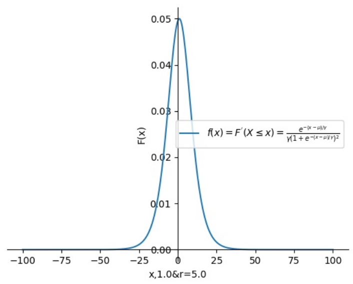
$$f(x) = F^{'}(X \leq x) = \frac{e^{-(x-\mu)/\gamma}}{\gamma(1+e^{-(x-\mu)/\gamma})^2}$$

其中，μ 为位置参数，γ 为形状参数即曲线在中心附近增长速度快慢，形状参数 γ 的值越小，曲线在中心附近增长得越快即越陡,图像关于 $(\mu, \frac{1}{2})$ 中心点对称，即满足：

$$F(-x+\mu) - \frac{1}{2} = -F(x-\mu) + \frac{1}{2}$$








```python
# coding: utf-8
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

u = 1
r = 5
def functionY(x):
   return 1/(1+np.exp(-(x-u)/r))
p = np.linspace(-100, 100, 50000)
entropy = functionY(p)

plt.figure()
plt.plot(p, entropy,label=r"$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{1+e^{-(x-\mu)/\gamma}}$")
plt.xlabel('x,%.1f&r=%.1f'%(u,r))
plt.ylabel('F(x)')
plt.legend()
# 移动轴线到图中央
ax = plt.gca()
ax.spines['right'].set_color("none")
ax.spines['top'].set_color("none")
ax.spines['bottom'].set_position(("data",0))
ax.spines['left'].set_position(("data",0))
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.yaxis.set_ticks_position('left')

plt.savefig('./sigmoidShow_u=%.1f&r=%.1f.jpg'%(u,r))
plt.show()
```

从中心点可以知道，中心点导数最大，增长越快。

Logistic Distribution 模型

逻辑回归虽然有回归字样，但其实是一个分类模型，由条件概率分布 $P(Y|X)$ 表示，形式为参数化的逻辑斯谛分布模型：

$$P(Y=1|x) = \frac{exp^{w^Tx+b}}{1+exp^{w^Tx+b}}$$

$$P(Y=0|x) = \frac{1}{1+exp^{w^Tx+b}}$$

这里，$x \in R^n$ 是输入，$Y \in 0,1$ 是输出，$w \in R^n$ 和 $b \in R$ 是参数， w 称为权值向量，b 称为偏置，w^Tx 为 w 和 x 的内积。

有时为了方便，$w=(w^1,w^2,\ldots,b)^T$, $x=(x^(1),x^(2),\ldots,x^(n),1)^T$ ， 这时 w^Tx+b 简写成 w^Tx

几率(odds)

一个事件的几率(odds) 是指该事件发生的概率与该事件不发生的概率的比值，如果事件发生的概率是 P，那么该事件的几率是 $\frac{p}{1-p}$

对数几率(log odds)

对数几率定义为: $logit(p)=log\frac{p}{1-p}$

对于逻辑回归而言:

$$logit(p)=log\frac{p}{1-p}=log\frac{P(Y=1|x)}{1-P(Y|x)}=w^Tx$$

模型参数估计

设： $z=w^Tx$, $\sigma(z)=\frac{1}{1+e^{-z}}$

$$z=w^Tx$$

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= \frac{e^{w^Tx}}{1+e^{w^Tx}} \\ &= \frac{e^z}{1+e^z} \\ &= \frac{1}{1+e^{-z}}, 分子分母同时除 e^z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(Y=1|x)=\sigma(z) \\ P(Y=0|x)=1-\sigma(z)\end{aligned}$$

由极似然函数(逻辑回归服从伯努力分布，也称为0－1分布),求出参数的导数：

$$L(z;w)=\prod_{i=1}^{N}[\sigma(z^i)^{y^i}]*[(1-\sigma(z^i))^{1-y^i}],\text{其中}N\text{为，样本的个数}$$

$$l(z;w)=\log(L(z;w))=\sum_{i=1}^{N}y^i\log(\sigma(z^i))+(1-y^i)\log(1-\sigma(z^i))$$

$$\begin{aligned}
[\sigma(z)]^{'} &= (1+e^{-z})^{-1} \\
&= -1*((1+e^{-z})^{-2})*e^{-z}*(-1),\text{对}\sigma(z)\text{求导} \\
&= \frac{e^{-z}}{(1+e^{-z})^2} \\
&= \frac{1}{(1+e^{-z})}*\frac{1+e^{-z}-1}{(1+e^{-z})} \\
&= \sigma(z)(1-\sigma(z))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(z;w)}{\partial z^i} &= \sum_{i=1}^{N}(\frac{y^i*[\sigma(z^i)]^{'}}{\sigma(z^i)}+\frac{(1-y^i)*(-1)*[\sigma(z^i)]^{'}}{1-\sigma(z^i)}) \\
&= \sum_{i=1}^{N}(\frac{y^i*[\sigma(z^i)]^{'}*(1-\sigma(z^i))+(1-y^i)*(-1)*[\sigma(z^i)]^{'}*\sigma(z^i)}{\sigma(z^i)*(1-\sigma(z^i))}),\text{通分} \\
&= \sum_{i=1}^{N}(\frac{y^i*[\sigma(z^i)]^{'}-\sigma(z^i)*[\sigma(z^i)]^{'}}{\sigma(z^i)*(1-\sigma(z^i))}),\text{代入}[\sigma(z^i)]^{'} \\
&= \sum_{i=1}^{N}(y^i-\sigma(z^i))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial w} &= \frac{\partial w^T x}{\partial w} \\
&= x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial w} &= \frac{\partial w^T x}{\partial w} \\
\frac{\partial l(z;w)}{\partial z^i}*\frac{\partial z^i}{\partial w} &= \sum_{i=1}^{N}(y^i-\sigma(z^i))*x^i \\
\frac{\partial l(z;w)}{\partial w} &= \sum_{i=1}^{N}(y^i-\sigma(z^i))*x^i
\end{aligned}$$

参数更新：

$$\begin{aligned}
w_j &== w_j-\alpha*(-\frac{\partial l(z;w)}{\partial w_j}),\text{其中}j\text{表示第}j\text{个特征，前面求出的是最大值，取负号，变成最小值，梯度下降} \\
&= w_j-\alpha*(-\sum_{i=1}^{N}(y^i-\sigma(z^i))*x_j^i) \\
&= w_j+\alpha*(\sum_{i=1}^{N}(y^i-\sigma(z^i))*x_j^i)
\end{aligned}$$

为什么逻辑回归比线性回归要好？

1. 逻辑回归与线性回归从表达式上的区别是，逻辑回归多了一层 sigmoid 函数，它们都是广义的线性回归。
2. 线性回归在整个实数域内敏感度一致，而逻辑回归曲线在z＝0时，十分敏感，而远离0处时，输入的改变对输出的影响小。
3. 经典线性模型的优化目标函数是最小二乘法即平方差损失函数，而逻辑回归则是似然函数，

LR和SVM的关系

从函数图像上理解都是线性分类器，都是在找一个超平面，不同之处理在于LR，会不断在优化，使得样本不断地远离超平面，而SVM在找到超平面后，不再优化。

1. LR 考虑全部样本，而且全部需要远离 w*x + b = 0,而 SVM 只是局部。

多分类 **softmax** 函数

$$h_w(x^i) = \begin{bmatrix} P(y^i = 1|x^i; w_1) \\ P(y^i = 2|x^i; w_2) \\ \dots \\ P(y^i = k|x^i; w_k) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} e^{w_j^T x^i}} = \begin{bmatrix} e^{w_1^T x^i} \\ e^{w_2^T x^i} \\ \dots \\ e^{w_k^T x^i} \end{bmatrix}$$

其中, $w_1, w_2, \dots, w_k \in R^{n+1}$ 是分类器参数，$\frac{1}{\sum_{j=1}^{k} e^{w_j^T x^i}}$ 是对类别分布进行归一化，使得全部类别的概率之和为1。

softmax 回归独自的特点，求解出来的参数是冗余的，假设对每个参数向量 w_j 减去向量 φ 并不影响假设函数的类别输出，如果参数 $(w_i, w_2, \dots, w_k)$ 是代价函数的解，那么参数$(w_1 - \varphi), w_2 - \varphi, \dots, w_k - \varphi$ 也是代价函数的解,解决办法是加正则项。比如：

$$\begin{aligned} P(y^i = j|x^i; w) &= \frac{e^{(w_j - \varphi)x^i}}{\sum_{l=1}^{k} e^{(w_l - \varphi)x^i}} \\ &= \frac{e^{w_j x^i} * e^{-\varphi x^i}}{\sum_{l=1}^{k} e^{w_l x^i} e^{-\varphi x^i}} \\ &= \frac{e^{w_j x^i}}{\sum_{l=1}^{k} e^{w_l x^i}} \end{aligned}$$

多分类的概率分布：

类别	**1**	**2**	**...**	**k**
真实类别	0	j=1	...	0
真实概率p(x)	0	1	...	0
训练概率q(x)	$\frac{e^{w_1 x^i}}{\sum_{l=1}^{k} e^{w_l x^i}}$	$\frac{e^{w_2 x^i}}{\sum_{l=1}^{k} e^{w_l x^i}}$	...	$\frac{e^{w_k x^i}}{\sum_{l=1}^{k} e^{w_l x^i}}$

概率交叉熵定义：

$$H(p, q) = -\sum_{x} p(x) \log q(x)$$

多分类的交叉熵损失函数为：

$$loss(w) = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}1\{y^i = j\}\log\frac{e^{w_j x^i}}{\sum_{l=1}^{k}e^{w_l x^i}}$$,其中$1\{y^i = j\}$相等为1，不相等为0

设：$z_j = w_j x^i, P_h = \frac{e^{z_h}}{\sum_{l=1}^{k}e^{z_l}}$

$$= -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}1\{y^i = j\}\log\frac{e^{z_j}}{\sum_{l=1}^{k}e^{z_l}}$$

$$\frac{\partial loss(z;w)}{\partial z_h} = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[\sum_{j=1}^{k}1\{y^i = j\}\log\frac{e^{z_j}}{\sum_{l=1}^{k}e^{z_l}}]'$$,其中h表示取哪个参数列，分两种情况，$h = j$和$h \neq j$分别求导

$$= -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1,j\neq h}^{k}1\{y^i = j\}(\frac{\sum_{l=1}^{k}e^{z_l}}{e^{z_j}} * (\frac{e^{z_j} * (-1) * e^{z_h}}{(\sum_{l=1}^{k}e^{z_l})^2}))) + 1\{y^i = j\}(\frac{e^{z_j}}{\sum_{l=1}^{k}e^{z_l}} + \frac{\sum_{l=1}^{k}e^{z_l}}{e^{z_j}} * (\frac{e^{z_j} * (-1) * e^{z_h}}{(\sum_{l=1}^{k}e^{z_l})^2}))$$,前部分是对$h \neq j$求愤，后半部分是$h = j$

$$= -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1,j\neq h}^{k}1\{y^i = j\}(-P_h)) + 1\{y^i = j\}(1 - P_h)$$,前部分是对$h \neq j$求愤，后半部分是$h = j$

$$= -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1,j\neq h}^{k}1\{y^i = j\}(-P_h)) - 1\{y^i = j\}P_h + 1\{y^i = j\}$$,把后面拆开，合并到求和里面

$$= -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(1\{y^i = j\} - \sum_{j=1}^{k}1\{y^i = j\}P_h)$$

对于每一个样本，示性函数从1到k只有一个为1，其他为0,此时，$y^i = h$,所以

$$\sum_{j=1}^{k}1\{y^i = j\}P_h = P_h$$

$$= -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(1\{y^i = h\} - P_h)$$

具体参数求导

$$\frac{\partial z_h}{\partial w_{ht}} = \frac{\partial(w^T x)}{\partial w_{ht}}$$

$= x_t$,其中t表示第t个特征

$$\frac{\partial loss(z;w)}{\partial w_{ht}} = \frac{\partial loss(z;w)}{\partial z_h} * \frac{\partial z_h}{\partial w_{ht}}$$

$$= -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(1\{y^i = h\} - P_h)x_t$$

对比逻辑回归与softMax:

$$\frac{\partial l(z;w)}{\partial w} = \sum_{i=1}^{N}(y^i - \sigma(z^i)) * x^i$$

抛开多个样本，参数求导是一样的，逻辑回归只有w一个参数列向量，而多分类是多个列向量，针对哪个列向量求导时，以哪个列向量的概率为主
y^i与$1\{y^i = h\}$都是示性函数，真为1，假为0

$$\frac{\partial loss(z;w)}{\partial w_{ht}} = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(1\{y^i = h\} - P_h)x_t$$

解决多组解的问题，加L2正则项，所以最终损失函数为：

$loss(w)=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}1\{y^i=j\}\log\frac{e^{w_jx^i}}{\sum_{l=1}^{k}e^{w_lx^i}}+\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{T}w_{it}^2$，其中$1\{y^i=j\}$相等为1，不相等为0，$t$表示第$t$个特征，$T$表示特征的个数，$k$特征分类的个数

逻辑回归与最大熵模型

由前面可以知道，多分类 softmax 是逻辑回归的扩展，所以softmax 的表达式同样可以用在逻辑回归上，根据多分类的可以知道的性质：

$$\frac{\partial z_h}{\partial w_{ht}}=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(1\{y^i=h\}-P_h)x_t$$

$$P_h=\frac{e^{z_h}}{\sum_{l=1}^{k}e^{z_l}}$$

$$\sum_{h=1}^{k}p_h=1$$

根据熵的定义

$$H(P)=-\sum_{h=1}^{k}p_h\log p_h$$

根据拉格朗日求极有约束条件解有：

$$L(P_h)=-\sum_{h=1}^{k}p_h\log p_h+\lambda_h((1\{y^i=h\}-P_h)x_t)+\beta(\sum_{h=1}^{k}p_h-1)$$

$$\frac{\partial L(P_h)}{\partial P_h}=-(\log p_h+1)+\lambda_h x_t+\beta$$ 令导数为0则有：

$$P_h=e^{\lambda_h x_t+\beta-1}$$

而 $\sum_{h=1}^{k}p_h=1$，则有：

$$\sum_{h=1}^{k}(e^{\lambda_h x_t+\beta-1})=1$$

$$e^{\beta}=\frac{1}{\sum_{h=1}^{k}(e^{\lambda_h x_t-1})}$$，代入p_h等式中有：

$$\begin{aligned}P_h&=e^{\lambda_h x_t}*e^{\beta}*e^{-1}\\&=e^{\lambda_h x_t}*(\frac{1}{\sum_{h=1}^{k}(e^{\lambda_h x_t-1})})*e^{-1}\\&=\frac{e^{\lambda_h x_t}}{\sum_{h=1}^{k}(e^{\lambda_h x_t})}\end{aligned}$$

结论：最大熵是一种思想，在没有约束的条件下，概率越均匀熵越大，认为模型模型。在满足逻辑回归约束的条件下，求出来的最大熵模型跟逻辑回归本质上是一样。

参考自：

正则化项：https://blog.csdn.net/zouxy09/article/details/24971995

最大熵推导出逻辑回归形式：https://blog.csdn.net/cyh_24/article/details/50359055

调参小结：https://www.cnblogs.com/pinard/p/6035872.html

比较详细的说明：https://www.jianshu.com/p/aa73938f32ee

LR与SVM对比：https://blog.csdn.net/zwqjoy/article/details/82312783

GBDT + LR : https://www.cnblogs.com/wkang/p/9657032.html

最大熵与LR关系：《The equivalence of logistic regression and maximum entropy models》