1. （2022 级上学期高数，微积分）求微分方程 $y''-2y'-3y=e^{-x}$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2-2\lambda-3=0$， （2 分）

特征根 $\lambda_1=-1, \lambda_2=3$. （4 分）

对应的齐次方程的通解 $Y(x)=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^{3x}$. （5 分）

设非齐次方程原方程的特解 $y^*=ax\mathrm{e}^{-x}$， （7 分）

则 $y^{*\prime}=a(1-x)\mathrm{e}^{-x}$， $y^{*\prime\prime}=a(x-2)\mathrm{e}^{-x}$ ， 代入原方程, 得

$$a(x-2)\mathrm{e}^{-x}-2a(1-x)\mathrm{e}^{-x}-3ax\mathrm{e}^{-x}=e^{-x}$$

化简，得 $-4a=1$，所以 $a=-\dfrac{1}{4}$ ， $y^*=-\dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^{-x}$ （9 分）

原方程的通解为 $y=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^{3x}-\dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^{-x}$. （10 分）

2. （2021 级下学期工数） 求微分方程 $y''-3y'+2y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，特征根 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$.

对应的齐次方程的通解 $Y(x)=c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{2x}$. （4 分）

设非齐次方程原方程的特解 $y^*=(ax^2+bx)\mathrm{e}^{2x}$，则 （7 分）

$y^{*\prime}=\left(2ax^2+(2a+2b)x+b\right)\mathrm{e}^{2x}$， $y^{*\prime\prime}=\left(4ax^2+(8a+4b)x+(2a+4b)\right)\mathrm{e}^{2x}$

代入原方程

$$\left(4ax^2+(8a+4b)x+(2a+4b)\right)-3\left(2ax^2+(2a+2b)x+b\right)+2(ax^2+bx)=x$$

$$2ax+(2a+b)=x$$

故 $\begin{cases}2a=1\\2a+b=0\end{cases}$， $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=-1\end{cases}$ ， $y^*=\left(\dfrac{1}{2}x^2-1\right)\mathrm{e}^{2x}$ （10 分）

原方程的通解为 $y=c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{2x}+\left(\dfrac{1}{2}x^2-1\right)\mathrm{e}^{2x}$.

(其中 c_1、 c_2 是任意常数) （12 分）

3. 若 $f(x)$ 连续，$f(x)=x\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$， 求 $f(x)$.

解 $f(x)=x\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$

两端对 x 求导得 $f'(x)=\sin x+x\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)+xf(x)$

$$=\sin x+x\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$f''(x)=\cos x+\cos x-x\sin x-f(x)$$

得 $\begin{cases} f''(x)+f(x)=2\cos x-x\sin x \\ f(0)=0,\ f'(0)=0 \end{cases}$ 从而 $f(x)=\dfrac{1}{4}(x^2\cos x+3x\sin x)$.

4. 以 $y_1=e^x$，$y_2=e^x\sin x$，$y_3=e^x\cos x$ 为特解的最低阶常系数线性齐次微分方程是______________ .

解 其特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda-1-i)(\lambda-1+i)=0$，即 $\lambda^3-3\lambda^2+4\lambda-2=0$，故所求最低阶常系数线性齐次微分方程是 $y'''-3y''+4y'-2y=0$.

5. 设 $y_1=x$，$y_2=x+e^{2x}$，$y_3=x+xe^{2x}$ 是二阶常系数线性非齐次微分方程的特解，求该微分方程及其通解.

解 $y_2-y_1=e^{2x}$，$y_3-y_1=xe^{2x}$ 为对应齐次微分方程的解，且线性无关. 故所求通解为 $y=(c_1+c_2x)e^{2x}+x$.

对应齐次微分方程的特征方程为 $(\lambda-2)^2=\lambda^2-4\lambda+4=0$，从而对应齐次微分方程为 $y''-4y'+4y=0$，设所求方程为 $y''-4y'+4y=Q(x)$，再将 $y_1=x$ 代入方程得 $Q(x)=4(x-1)$.

故所求方程为 $y''-4y'+4y=4(x-1)$.

6. （2017级下学期工数期中） 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$， $y_2 = xe^x + e^{-x}$，$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，则此微分方程为________________，此微分方程的通解为______________ .

解 $y_1 - y_2 = e^{2x} - e^{-x}$ 为对应齐次微分方程的解，又由 $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$，知 xe^x 也是非齐次微分方程的解. 从而 e^{2x} 和 e^{-x} 为对应齐次微分方程的解.

对应齐次微分方程的特征方程为 $(\lambda - 2)(\lambda + 1) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$，从而对应齐次微分方程为 $y'' - y' - 2y = 0$，设所求方程为 $y'' - y' - 2y = Q(x)$，再将 xe^x 代入方程得 $Q(x) = e^x - 2xe^x$ 故所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

此微分方程的通解为 $c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + xe^x$