第七章 多元函数微分学及其应用

§7.6 向量值函数的微分法与多元函数的Taylor公式

一、向量值函数的概念、极限、连续与微分

二、多元函数的Taylor公式

一、向量值函数的概念、极限、连续与微分

1. 向量值函数的概念

- 数量值函数 $y=f(x),\quad z=f(x,y),\quad u=f(x,y,z)$
- 向量值函数

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, f(x,y)=\nabla f(x,y)=f_x(x,y)\vec{i}+f_y(x,y)\vec{j}=\begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$$

一般地，设 $y_1=f_1(x,y),\ y_2=f_2(x,y),\ y_3=f_3(x,y)$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \\ f_3(x,y) \end{pmatrix}$$

$\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}},\quad \vec{f}=(f_1,f_2,f_3)^{\mathrm{T}}$

$\vec{x}=(x,y)^{\mathrm{T}}\quad \Rightarrow \vec{y}=\vec{f}(x,y)=\vec{f}(\vec{x})$

对应有定义域 $D^2\subset \mathbf{R}^2$，值域 $V^3\subset \mathbf{R}^3$.

一、向量值函数的概念、极限、连续与微分

1. 向量值函数的概念

- **线性向量值函数** $\vec{f}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha\vec{f}(\vec{x})+\beta\vec{f}(\vec{y})$

(线性向量值函数就是一个线性变换: $\vec{f}(\vec{x})=A\vec{x}$)

例如: $\vec{f}(x,y)=(x+2y,3x-y)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 的线性向量值函数.

其坐标函数: $f_1(x,y)=x+2y,\ f_2(x,y)=3x-y$

函数又可写成:

$$\vec{f}(x,y)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\ 3x-y\end{pmatrix}$$

一、向量值函数的概念、极限、连续与微分

2. 向量值函数的极限与连续

- 向量值函数的极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_1(x,y)=a_1,\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_2(x,y)=a_2$$

若记: $\vec{y}=\vec{f}(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))^{\mathrm{T}},\ \vec{a}=(a_1,a_2)^{\mathrm{T}}$

则: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \vec{f}(x,y)=\vec{a} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})=\vec{a}$

- 向量值函数的连续

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \vec{f}(x,y)=\vec{f}(x_0,y_0) \Leftrightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(\vec{x}_0)$$

一、向量值函数的概念、极限、连续与微分

3. 向量值函数的偏导与微分

- 向量值函数的偏导

$$\vec{y}=\vec{f}(x,y,z)=(f_1(x,y,z),f_2(x,y,z))^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix},\quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial y}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix},\quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial z}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- 向量值函数的微分

$$\mathrm{d}\vec{y}=\begin{pmatrix} \mathrm{d}y_1 \\ \mathrm{d}y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\mathrm{d}z \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial f_2}{\partial z}\mathrm{d}z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}=J\vec{f}(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}$$

$$=\begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{x})^{\mathrm{T}} \\ \nabla f_2(\vec{x})^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

- 向量值函数的导数 $\mathrm{D}(\vec{f}(\vec{x}))$ 或 $\vec{f}'(\vec{x})$、Jacobi矩阵 $J\vec{f}(\vec{x})$

一、向量值函数的概念、极限、连续与微分

3. 向量值函数的偏导与微分

- 梯度函数的Jacobi矩阵

二元函数$z = f(x, y)$的梯度:

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j} = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$$

$\nabla f(x,y)$的Jacobi矩阵：$\mathrm{D}(\nabla f) = J(\nabla f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{pmatrix}$

记作$\nabla^2 f(x,y)$, 称为二元函数$f(x,y)$的Hessian阵(海森阵).

一、向量值函数的概念、极限、连续与微分

例1: 设函数 $z=f(x,y)$ 二阶可微, 令 $\varphi(t)=f(x+t\Delta x,y+t\Delta y)$, 求 $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$.

解:

二、多元函数的Taylor公式

一元函数的Taylor中值定理

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数, 则在该邻域内有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ($\xi$ 介于 x 与 x_0 之间)

令 $x=x_0+h$, 则有:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+R_n(h)$$

其中 $R_n(h)=\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)$, $(0<\theta<1)$

二、多元函数的Taylor公式

二元函数的Taylor中值定理

设二元函数$z=f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$的某邻域$U(P_0)$内二阶可微，则存在$\theta\in(0,1)$，使得

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}+R_1(x,y)$$

其中$R_1(x,y)=\dfrac{1}{2!}(x-x_0,y-y_0)\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}_{(\xi,\eta)}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$

Lagrange余项　　$(\xi=x_0+\theta(x-x_0),\ \eta=y_0+\theta(y-y_0))$

$$f(\vec{x}_0+\Delta\vec{x})=f(\vec{x}_0)+\nabla f(\vec{x}_0)^{\mathrm{T}}\Delta\vec{x}+R_1(\vec{x})$$

其中$R_1(\vec{x})=\dfrac{1}{2!}\Delta\vec{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 f(\vec{x}_0+\theta\Delta\vec{x})\,\Delta\vec{x}$

二、多元函数的Taylor公式

- 若二阶偏导连续

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2!}(x-x_0,y-y_0)\begin{pmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{yx}&f_{yy}\end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}+o(\rho^2)$$

Peano余项

令 $x=x_0+h, y=y_0+k$, 则有:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)+o(\rho^2)$$

二、多元函数的Taylor公式

例2：写出$z=x^y$在点$(1,2)$处带Peano余项的二阶Taylor公式，并由此计算$1.02^{1.99}$的近似值.

解：