第四章习题课

2024年3月3日 11:16

第四章 习题课

例1： 求以 $y=c_1x^2+c_2e^x$ (c_1,c_2 为任意常数)为通解的线性微分方程.

解：由 $y=c_1x^2+c_2e^x$. $\Rightarrow y'=2c_1x+c_2e^x$

$y''=2c_1+c_2e^x$.

联立，消去 c_1, c_2

$\Rightarrow (x^2-2x)y''-(x^2-2)y'+2(x-1)y=0$

例2： 求方程 $xy\,dx+(y^4-x^2)\,dy=0$ 的通解. $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^4}$

解：$\frac{dx}{dy}=\frac{x^2-y^4}{xy}=\frac{x}{y}-\frac{1}{x}y^3$. ✓

即：$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{x}y^3=xy^{-1}$. $\left(\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=-y^3x^{-1}\right)$ ✓

$\left(\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}x^3=yx^{-1}\right)$ $\left(\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=-x^3y^{-1}\right)$

(Bernoulli)

由 $\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=-y^3x^{-1}$

同乘 x. 令 $x^2=z(y)$. $\Rightarrow 2x\frac{dx}{dy}=z'(y)$

$\Rightarrow \frac{dz}{dy}-\frac{2}{y}z=-2y^3$ $\left(y=e^{-\int p(x)dx}\left(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)\right)$

$\left(p(y)=-\frac{2}{y}.\quad q(y)=-2y^3\right)$

$\Rightarrow$ 通解 $z=y^2(c-y^2)$ 即：$x^2=y^2(c-y^2)$.

(法2). $\frac{dx}{dy}=\frac{x^2-y^4}{xy}=\frac{1}{y}x-\frac{1}{x}y^3=y\left(\frac{x}{y^2}-\frac{y^2}{x}\right)$

(法二). $\frac{dx}{dy} = \frac{\ \ }{xy} = \frac{\ \ }{y} \quad x \ \ = y(y^2 \ \ x)$

即: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\frac{x}{y^2} - \frac{y^2}{x}} \Rightarrow y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{x}{y^2} - \frac{y^2}{x}}$

令 $\frac{y^2}{x} = u(x)$. 即, $y^2 = x\,u(x) \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

$\Rightarrow u + x\frac{du}{dx} = \frac{2}{\frac{1}{u} - u}$ (可分离).

(法三). $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \cdot y^2$.

令 $\frac{x}{y} = u(y) \Rightarrow x = u(y) \cdot y$.

$\frac{dx}{dy} = y\frac{du}{dy} + u \Rightarrow y\frac{du}{dy} + u = u - \frac{1}{u}y^2$

例3: 求方程 $2y'y''=1$ 的通解.

解: (法一). (不显含 y).

令 $y' = z(x)$. $\Rightarrow y'' = z'(x)$.

转化为: $2z \cdot \frac{dz}{dx} = 1$. 即: $2z\,dz = dx$

积分. $\Rightarrow z^2 = x + C_1 \Rightarrow z = \pm\sqrt{x+C_1}$

即: $y' = \pm\sqrt{x+C_1} \Rightarrow y = \pm\frac{2}{3}(x+C_1)^{\frac{3}{2}} + C_2$

即: $9(y-C_2)^2 = 4(x+C_1)^3$.

(法二). (不显含 x)

令 $y' = z(y)$. $\Rightarrow y'' = z \cdot \frac{dz}{dy}$

令 $y'=z(y)$. $\Rightarrow y''=z\cdot\frac{dz}{dy}$

转化为: $2z^2\frac{dz}{dy}=1$ 即: $3z^2dz=\frac{3}{2}dy$

积分. $\Rightarrow z^3=\frac{3}{2}y+C_1$ $\Rightarrow z=(\frac{3}{2}y+C_1)^{\frac{1}{3}}$

即: $\frac{dy}{dx}=(\frac{3}{2}y+C_1)^{\frac{1}{3}}$ $\Rightarrow (\frac{3}{2}y+C_1)^{-\frac{1}{3}}dy=dx$

积分. $\Rightarrow (\frac{3}{2}y+C_1)^{\frac{2}{3}}=x+C_2$

即: $(3y+2C_1)^2=4(x+C_2)^3$

(法三). (不显含 x).

令 $y'=z(y)$ $\Rightarrow y''=z\frac{dz}{dy}$

转化为: $2z^2\frac{dz}{dy}=1.$ $\Rightarrow dy=2z^2dz$ ①

又由 $dy=z\,dx$ $\Rightarrow dx=2z\,dz$ ②.

积分. ①. $\Rightarrow y=\frac{2}{3}z^3+C_1$

② $\Rightarrow x=z^2+C_2$

消去 z. $\Rightarrow \frac{9}{4}(y-C_1)^2=(x-C_2)^3$

例4: 求解初值问题 $\begin{cases} yy''=2y'(y'-1) & ① \\ y(0)=1,\ y'(0)=2 & ② \end{cases}$.

解: (不显含 x).

令 $y'=z(y)$. $\Rightarrow y''=z\frac{dz}{dy}$.

$\Rightarrow y\cdot z\frac{dz}{dy}=2z(z-1)$.

即. $y\frac{dz}{dy}=2(z-1)$

即：$y\frac{dz}{dy}=2(z-1)$

分离 $\Rightarrow z=c_1y^2+1$

即：$\frac{dy}{dx}=c_1y^2+1$. 由②. $c_1=1$.

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y^2+1$

分离：$\frac{1}{y^2+1}dy=dx$

积分. $\arctan y=x+C_2$

即：$y=\tan(x+C_2)$. 由② $\Rightarrow C_2=\frac{\pi}{4}$.

$\Rightarrow y=\tan(x+\frac{\pi}{4})$

例5： 设 $y(x)$ 连续，且满足：$y(x)=4xe^x+\int_0^x t\,y(x-t)\,dt$，求 $y(x)$.

解：$\int_0^x t\,y(x-t)\,dt \xlongequal{u=x-t} \int_x^0 (x-u)y(u)(-du)$

$=x\int_0^x y(u)du-\int_0^x u\,y(u)du$

$y(0)=0$

对方程求导.

$\Rightarrow y'=4(x+1)e^x+\int_0^x y(u)du \longrightarrow y'(0)=4$

再求导. $\Rightarrow y''=4(x+2)e^x+y$

即：$y''-y=4(x+2)e^x$.

特征方程：$\lambda^2-1=0$.

$\Rightarrow$ 特征根：$\lambda_1=1$. $\lambda_2=-1$.

由 $f(x)=4(x+2)e^x$.

令特解 $y^*=xe^x(ax+b)$

代入方程. $\Rightarrow a=1$. $b=3$. $\Rightarrow y^*=xe^x(x+3)$

代入方程. $\Rightarrow$ $a=1$. $b=3$. $\Rightarrow y^* = xe^{x}(x+3)$

$\Rightarrow$ 通解为: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + xe^{x}(x+3)$

由 $y(0)=0$. $y'(0)=4$. $\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$. $c_2 = -\frac{1}{2}$.

即: $y = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) + xe^{x}(x+3)$

例6: 已知微分方程 $y''+(x+e^{y})y'^{3}=0$, 将其转化为x为因变量, y为自变量的微分方程, 并求通解.

解: $x'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{y'(x(y))}$

$$x''(y) = \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{dx}{dy}$$

$$= -\frac{y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'} = -\frac{y''}{y'^3}$$

即: $y'' = -x''(y)\cdot y'^3 = -x''(y)\cdot\frac{1}{x'^3(y)}$

代入原方程. $\Rightarrow$ $x''(y) - (x+e^{y}) = 0$

即: $x''(y) - x = e^{y}$

$\Rightarrow$ 通解: $x = c_1 e^{y} + c_2 e^{-y} + \frac{1}{2} y e^{y}$.

例7: 求方程 $y''' + y'' - 2y = e^x(5 - 16x\sin x)$ 的一个特解.

$= 5e^x - 16e^x x\sin x$

解: 由 $f(x) = 5e^x - 16e^x x\sin x$.

令 $f_1(x) = 5e^x$. $f_2(x) = 16e^x x\sin x$.

由特征方程: $\lambda^3 + \lambda^2 - 2 = 0$. $(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+2)$

$\Rightarrow$ 特征根: $\lambda_1 = 1$. $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$

由 $f_1(x) = 5e^x$. $\longrightarrow$ 特解 $y_1^* = xe^x \cdot A$

代入: $y''' + y'' - 2y = 5e^x$. $\Rightarrow A = 1$.

由 $f_2(x) = 16e^x x\sin x$. $(\alpha = 1.\ \beta = 1.\ A_0(x) = 0.\ B_1(x) = 16x)$

$\longrightarrow$ 特解: $y_2^* = e^x[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x]$

代入: $y''' + y'' - 2y = 16e^x x\sin x$

$\Rightarrow$ $a = -2$. $b = -1$. $c = -2$. $d = 4$.

$\Rightarrow$ 特解: $y^* = y_1^* - y_2^*$.

例8: 已知 $y_1^* = -e^{x^2}$, $y_2^* = e^{x^2}(e^x - 1)$ 是非齐次线性微分方程

$$y'' - 4xy' - (3 - 4x^2)y = e^{x^2}$$

的两个特解, 试求此方程的通解.