1. 对于级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$，当$p>1$时收敛，当$p\le 1$时发散.

解　当$p>1$时，$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^p}}{\frac{1}{n^{\frac{p+1}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{p-1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{p-1}{2}}}=0$

因为$\frac{p+1}{2}>1$，所以$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p+1}{2}}}$收敛. 由比较判别法极限形式，原级数收敛.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\lambda}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\lambda}}=0<1\quad(\lambda>0)$　由保号性，n充分大时，$\ln n<n^{\lambda}$

n充分大时，$\frac{\ln n}{n^p}<\frac{n^{\frac{p-1}{2}}}{n^p}=\frac{1}{n^{\frac{p+1}{2}}}$

当$p\le 1$时，$n\ge 3$时　有$\frac{1}{n^p}<\frac{\ln n}{n^p}$

因为$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散，由比较判别法，原级数发散.

2. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$都收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$与$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$均收敛

解　$|u_nv_n|\le\frac{u_n^2+v_n^2}{2}$

$$(u_n+v_n)^2\le(|u_n|+|v_n|)^2=u_n^2+v_n^2+2|u_nv_n|$$

3. 下列命题是否正确？若正确，请给予证明；若不正确，请举出反例.

（1）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$也发散；

（2）设$u_n > 0$且数列$\{nu_n\}$有界，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$必收敛；

（3）若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \max\{u_n, v_n\}$和$\sum_{n=1}^{\infty} \min\{u_n, v_n\}$都发散.

解 **(1)** 不正确　　如$u_n = \frac{1}{n}$

(2)　正确

$$|nu_n| \le M \Rightarrow |u_n| \le \frac{M}{n} \quad \Rightarrow u_n^2 \le \frac{M^2}{n^2}$$

(3) 不正确

$$u_n \le \max\{u_n, v_n\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \max\{u_n, v_n\} \text{发散}$$

$$u_n: 1, 0, 1, 0, 1, \cdots \quad , \qquad v_n: 0, 1, 0, 1, 0, \cdots$$

4. 设$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x$，证明对任意的常数$\lambda > 0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$收敛.

解　$$a_n + a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1 + \tan^2 x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}(\tan x) = \frac{1}{n+1}$$

所以　$a_n < \frac{1}{n}$，　$\frac{a_n}{n^{\lambda}} < \frac{1}{n^{\lambda+1}}$，

级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$收敛.

5. 设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$，证明

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在；

（2）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$收敛.

证明（1）$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\geq 1$，$a_n$有下界.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-a_n=\frac{1-a_n^2}{2a_n}\leq 0$$，单调递减.

所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

(2) $$\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\leq a_n-a_{n+1}$$

对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n+1}\right)$，$S_n=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{n+1}$ 收敛

即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n+1}\right)$收敛，所以由比较判别法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$收敛.