第七章 多元函数微分学及其应用

§7.5 方向导数与梯度

一、方向导数

二、多元函数的梯度

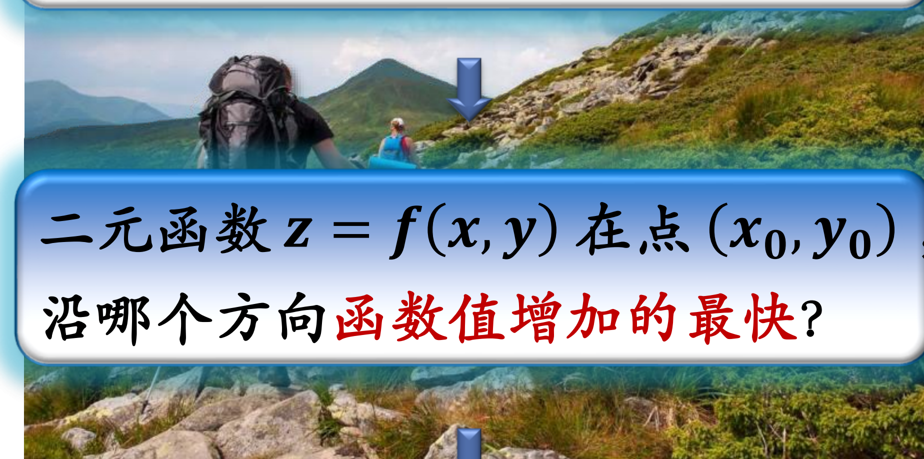
一、方向导数

引例

一、方向导数

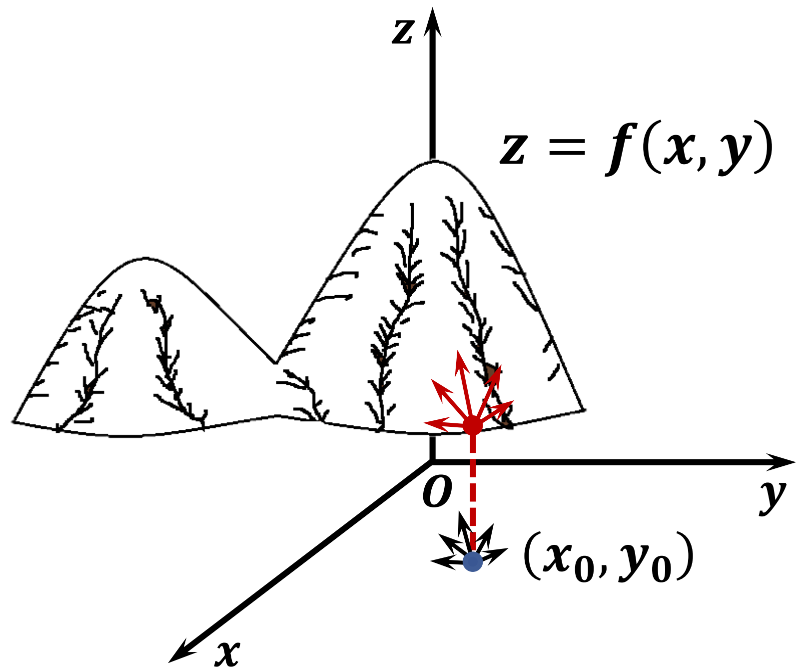
引例

从山脚下一点出发，沿哪个方向**上山最快**?



二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0)，沿哪个方向**函数值增加的最快**?

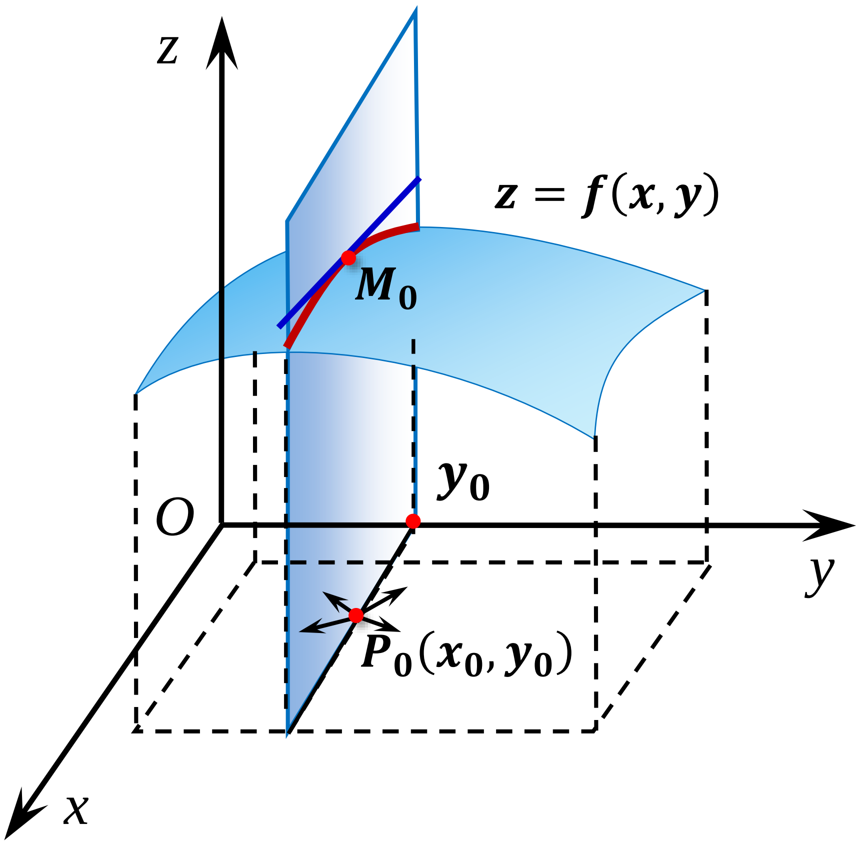
$z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0)，**沿各个方向的函数值变化率是多少**?

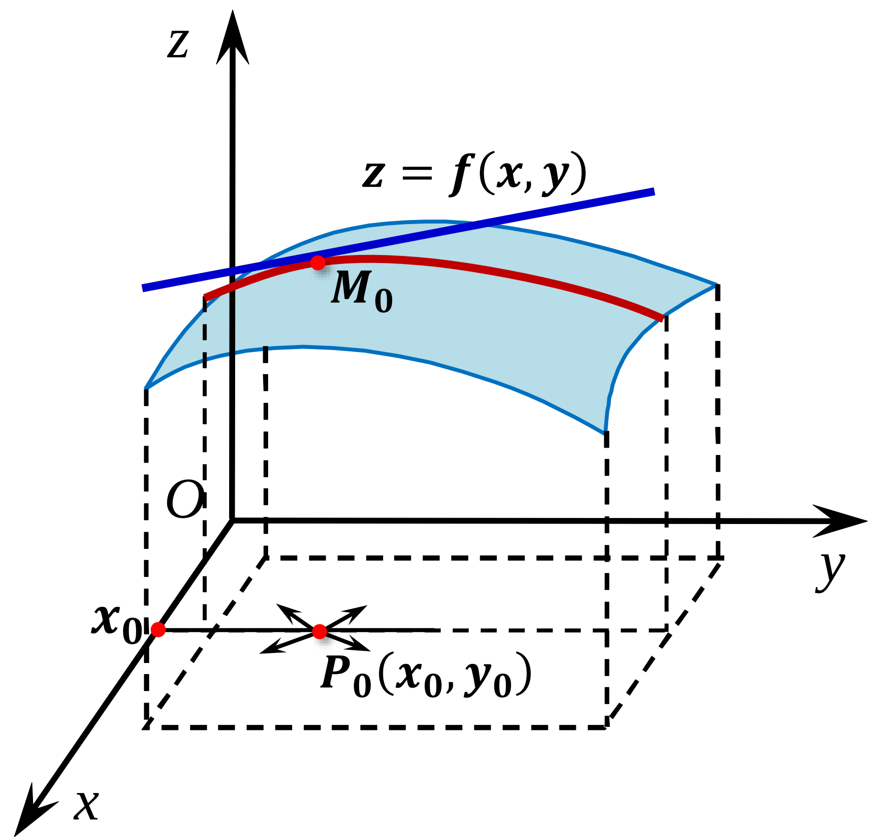


一、方向导数 知识回顾

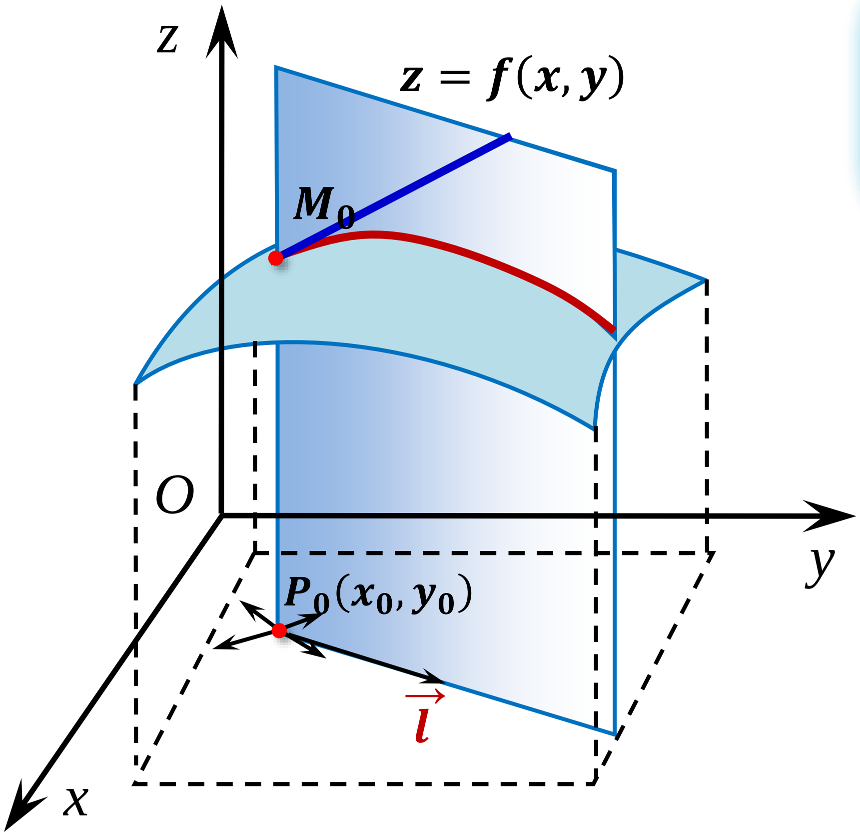
对x的偏导数——二元函数沿x轴方向函数值的变化率

对y的偏导数——二元函数沿y轴方向函数值的变化率





一、方向导数 新知探索



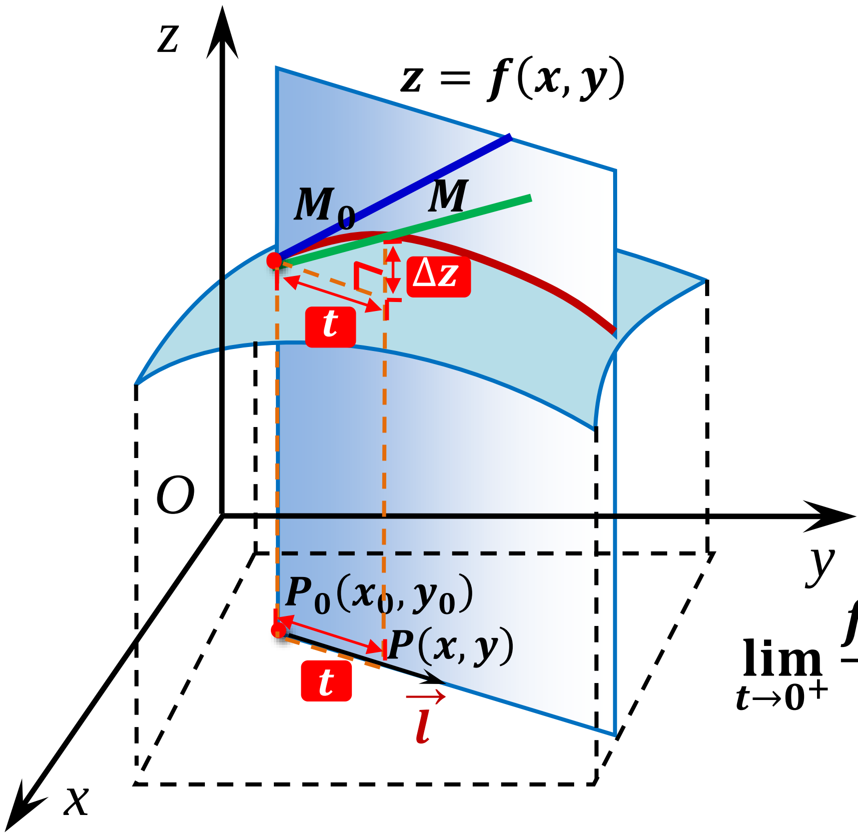
$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)，沿各个方向的函数值变化率是多少?

$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)，沿$\vec{l}$方向的函数值变化率是多少?

曲面$z=f(x,y)$上，由方向$\vec{l}$确定的曲线在点M_0处的切线斜率

一、方向导数

新知探索



曲面$z=f(x,y)$上，由方向$\vec{l}$确定的曲线在点M_0处的切线斜率

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\Delta z}{t} \quad t>0$$

$$\Updownarrow$$

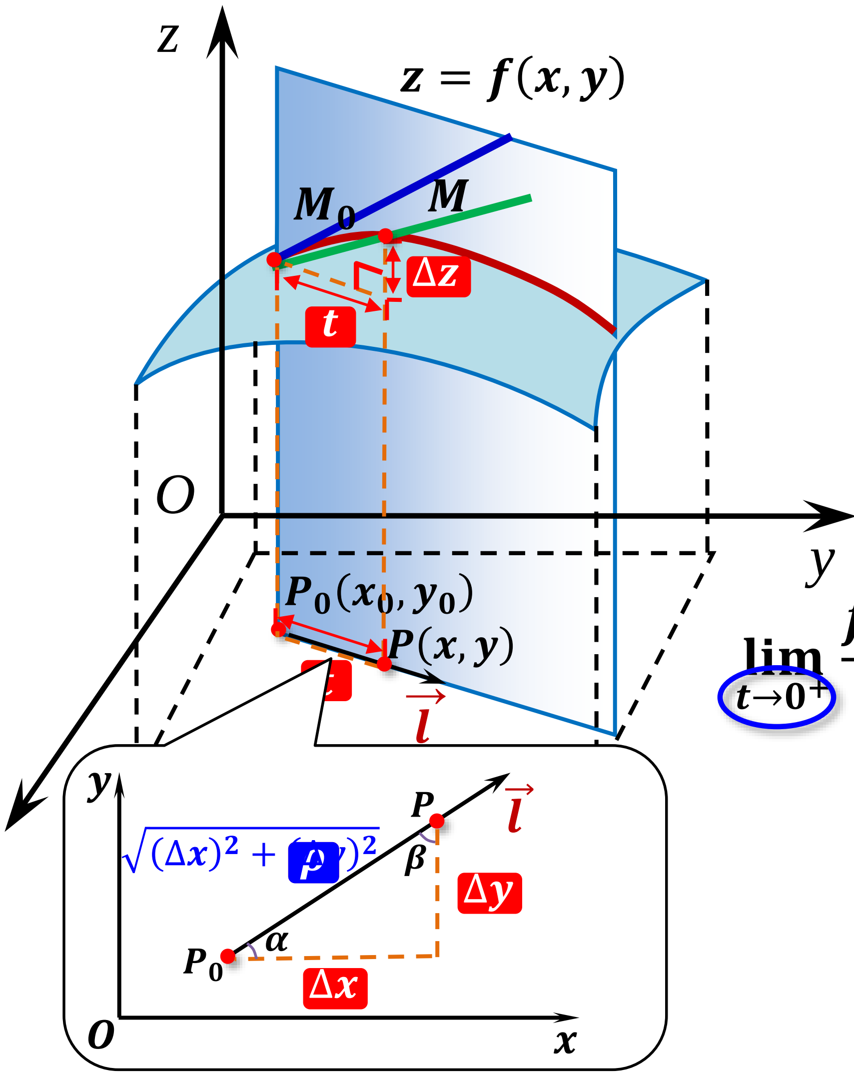
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

方向$\vec{l}$：$\vec{e_l}=(\cos\alpha, \cos\beta)$

$P(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)$

一、方向导数

新知探索



曲面$z = f(x, y)$上，由方向$\vec{l}$确定的曲线在点M_0处的切线斜率

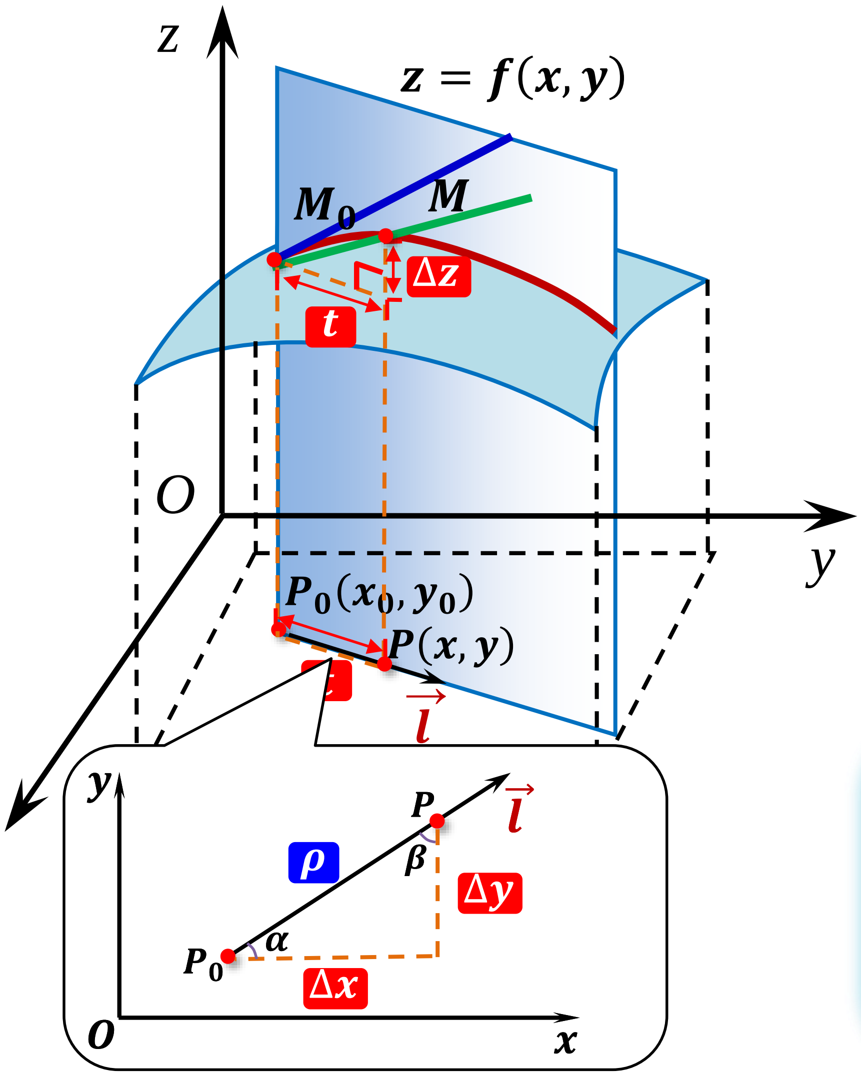
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\Delta z}{t} \quad t > 0$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0 + \boxed{t\cos\alpha}, y_0 + \boxed{t\cos\beta}) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

一、方向导数

新知探索



曲面$z=f(x,y)$上，由方向$\vec{l}$确定的曲线在点M_0处的切线斜率

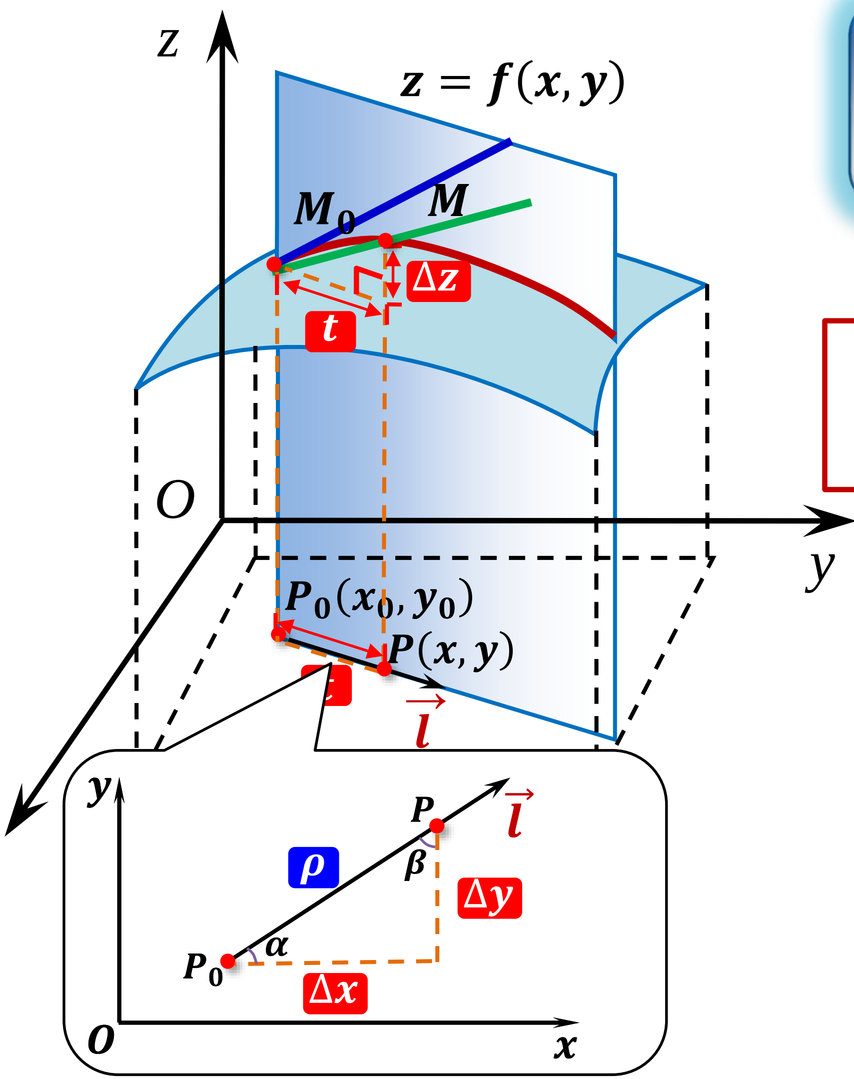
函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处沿$\vec{l}$方向的方向导数，记作$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$

一、方向导数

判断： 二元函数在某点沿任何方向的方向导数都存在，则其在该点的偏导数一定存在。（错）

例如： 函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $P(0,0)$ 处沿任何方向 $\vec{l}$ 的方向导数都存在，但两个偏导数都不存在。

一、方向导数



$z = f(x,y)$在点(x_0,y_0)，沿各个方向的函数值变化率是多少?

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\rho}$$

$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$可微

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho)}{\rho}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\left(f_x(x_0,y_0)\underbrace{\boxed{\frac{\Delta x}{\rho}}}_{\cos\alpha} + f_y(x_0,y_0)\underbrace{\boxed{\frac{\Delta y}{\rho}}}_{\cos\beta}\right)$$

一、方向导数

定理： 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微，则函数在该点沿任一方向 $\vec{l}$ 的方向导数都存在，且有

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta}$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 是 $\vec{l}$ 的方向余弦。

推广到三元函数 $f(x,y,z)$

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta + f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma}$$

一、方向导数

例1： 求函数 $z=xy^2+y\mathrm{e}^{2x}$ 在点 $P(0,1)$ 处沿着从点 P 到点 $Q(-1,2)$ 的方向的方向导数。

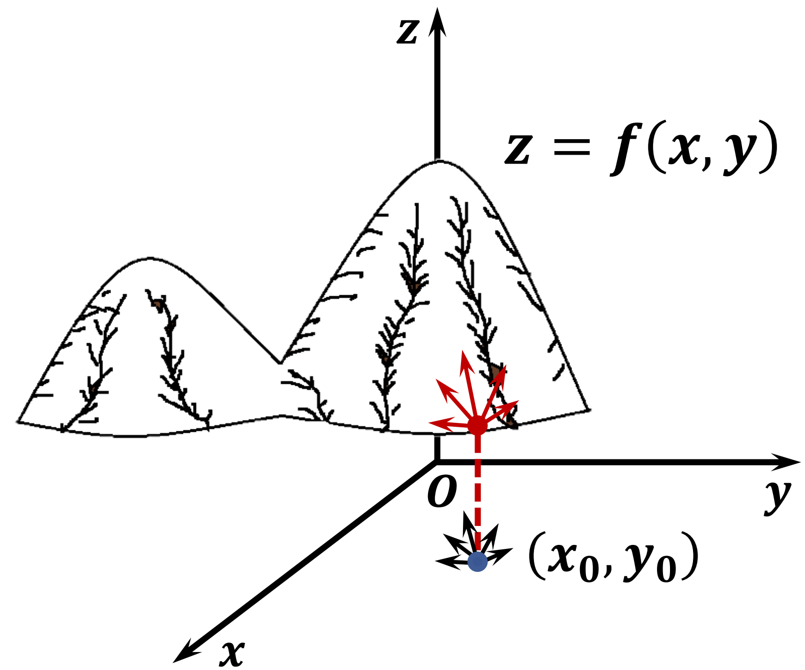
一、方向导数　　引例

从山脚下一点出发，沿哪个方向**上山最快**?

二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0)，沿哪个方向**函数值增加的最快**?

方向导数

$z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0)，**沿各个方向的函数值变化率是多少**?



二、多元函数的梯度

新知探索

二元函数 $z=f(x,y)$ 在一点 (x_0,y_0)，沿哪个方向函数值增加的最快？ $\Longleftrightarrow$ 方向导数最大

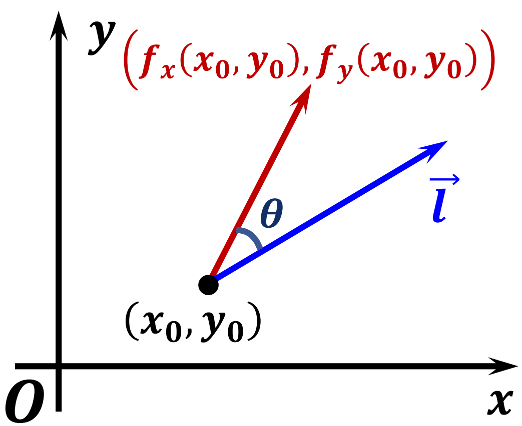
$\vec{l}$ 方向的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

$$= \underbrace{\big(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\big)}_{\text{确定向量}} \cdot \underbrace{(\cos\alpha, \cos\beta)}_{\vec{e}_l}$$

$$= \left|\big(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\big)\right| \cdot \underbrace{|(\cos\alpha, \cos\beta)|}_{\text{模为}1} \cdot \boxed{\cos\theta}$$

$$= \underbrace{\left|\big(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\big)\right|}_{\text{确定值}} \cdot \cos\theta$$



二、多元函数的梯度

定义： 设函数 $f(x,y)$在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $P_0(x_0,y_0)\in D$，都可确定一个向量

$$f_x(x_0,y_0)\,\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\,\boldsymbol{j}$$

称这个向量为函数 $f(x,y)$在 $P_0(x_0,y_0)$的梯度(gradient)，记为 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0)$或 $\nabla f(x_0,y_0)$。

例2： 求函数 $u=3x^2+2y^2-z^2$ 在点 $P(1,2,-1)$ 处，分别沿什么方向方向导数取得最大值和最小值？并求出其最大值和最小值。

二、多元函数的梯度

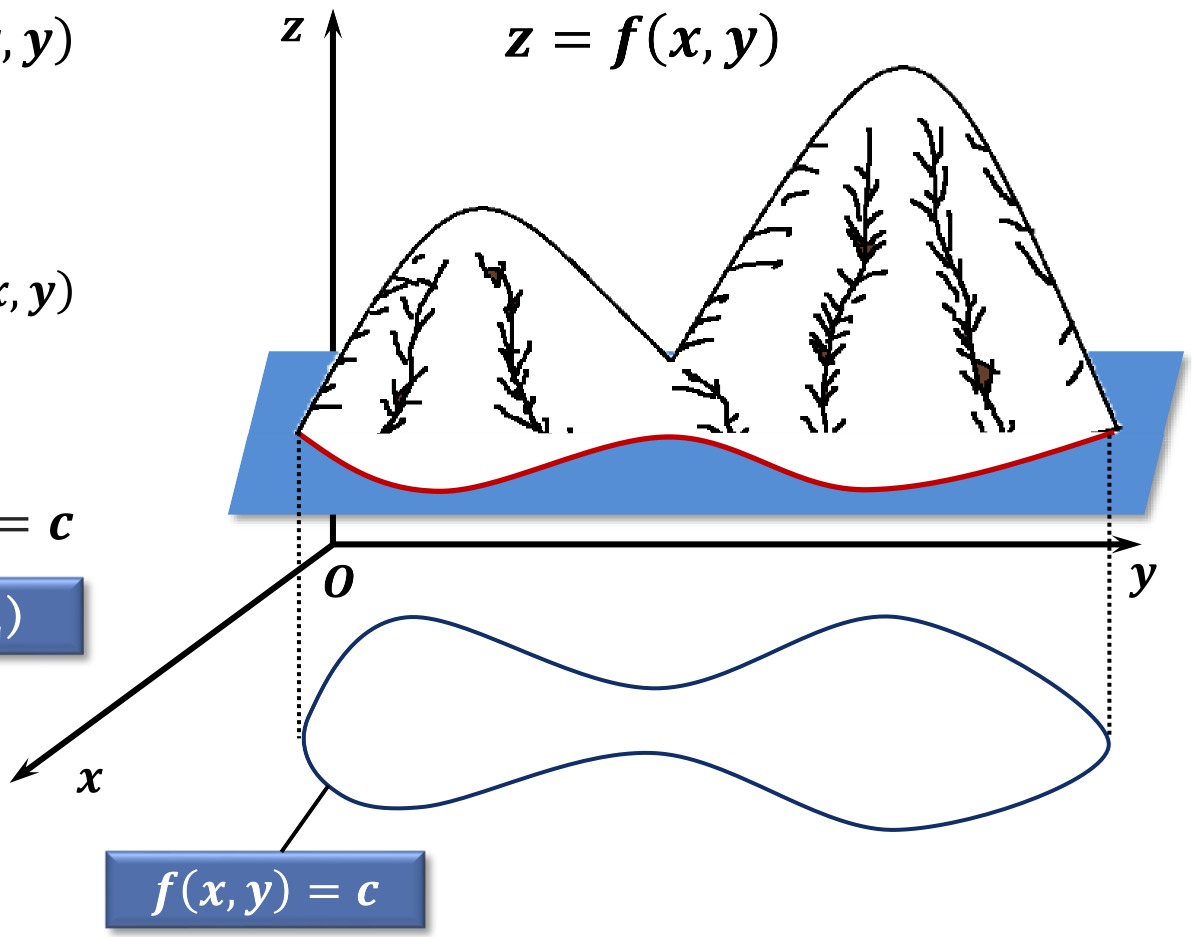
山体表面 —— $z = f(x, y)$

水平面 —— $z = c$

空间曲线 —— $\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c \end{cases}$

平面曲线 —— $f(x, y) = c$

（等值线）



二、多元函数的梯度

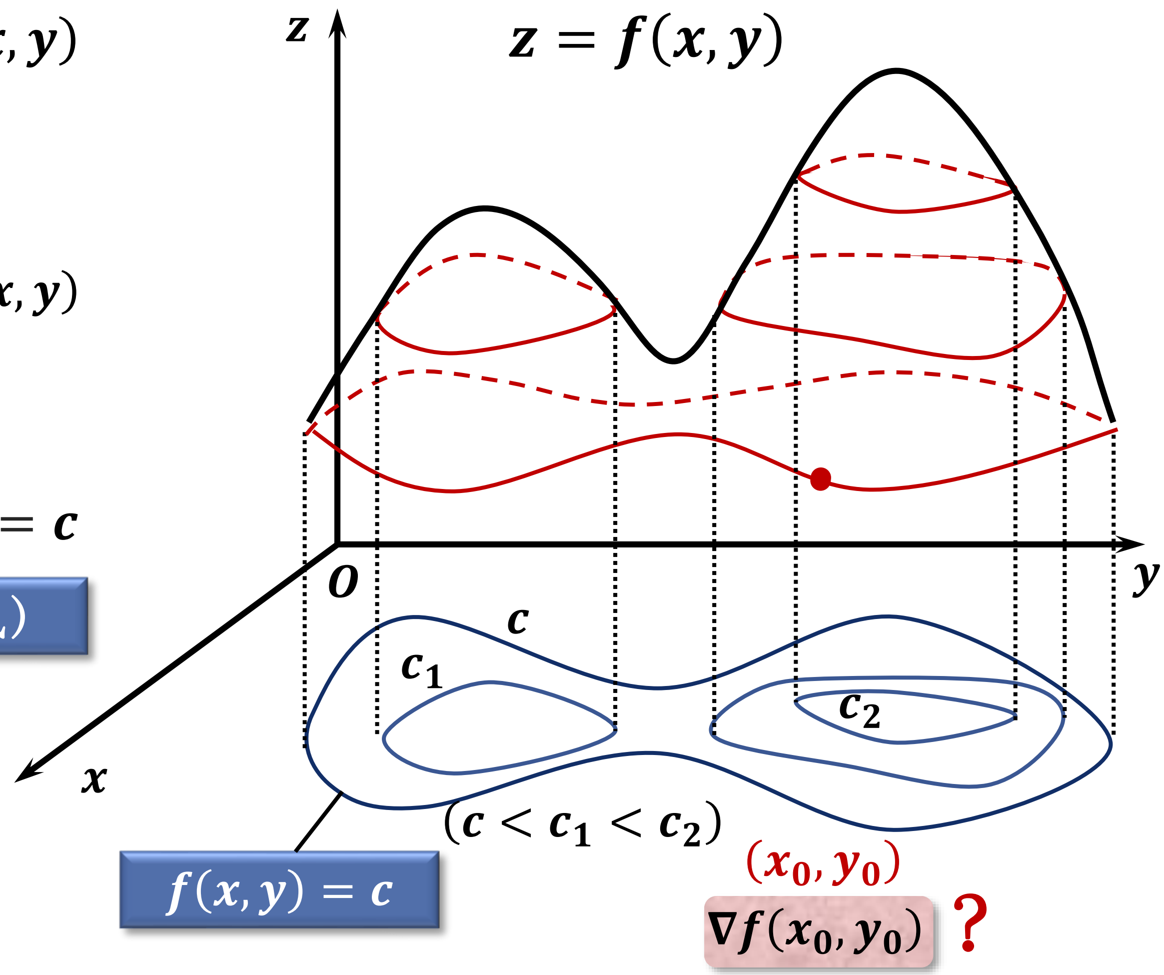
山体表面 —— $z = f(x, y)$

水平面 —— $z = c$

空间曲线 —— $\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c \end{cases}$

平面曲线 —— $f(x, y) = c$

（等值线）



二、多元函数的梯度

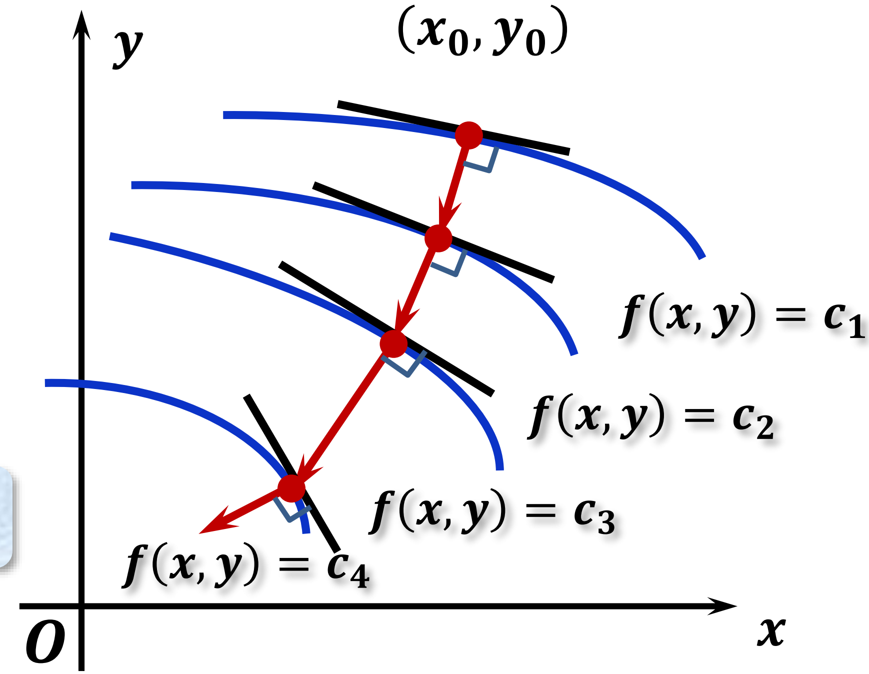
$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases} \Rightarrow f(x,y) = c$$

切向量 $\downarrow$ 切向量 $\downarrow$

$$\left(1, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \qquad \left(f_y(x_0,y_0), -f_x(x_0,y_0)\right)$$

法向量 $\downarrow$

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\right)$$



$(c_1 < c_2 < c_3 < c_4)$

$\nabla f(x_0,y_0)$就是法线方向

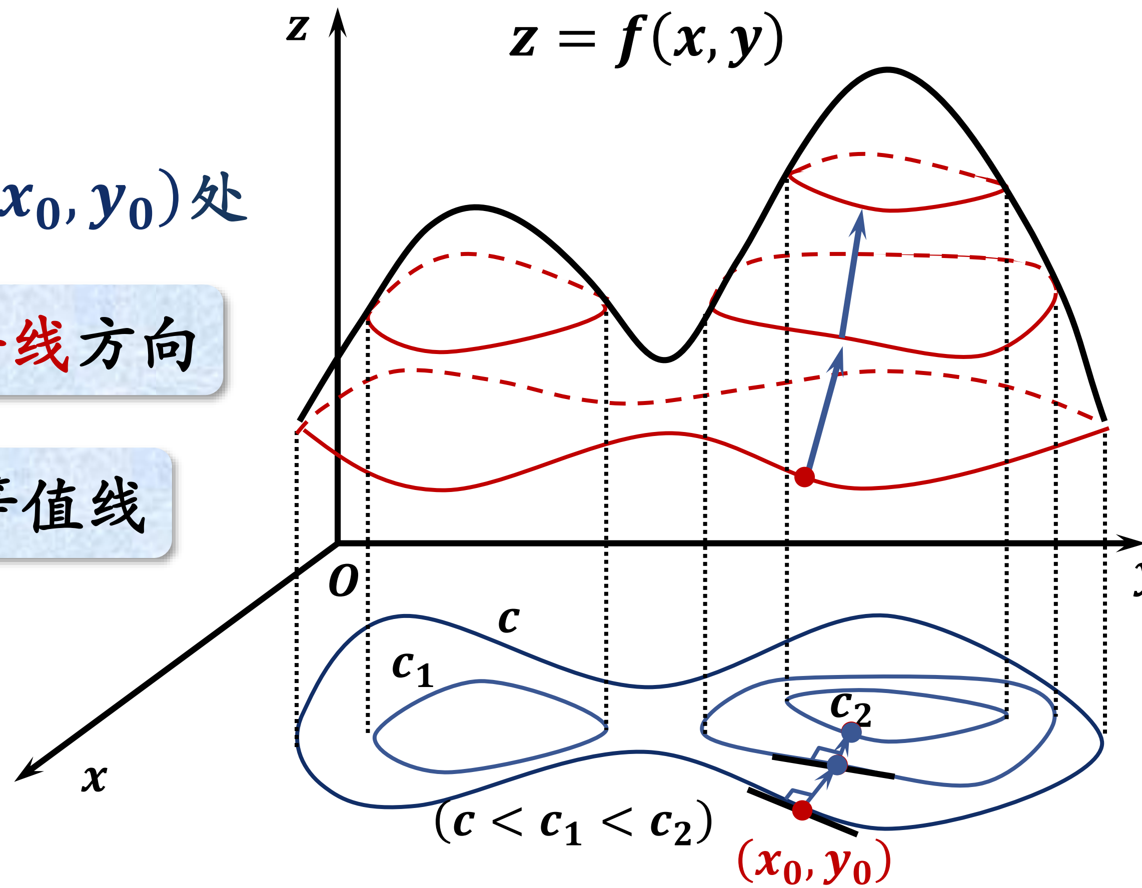
指向值较大的等值线

二、多元函数的梯度

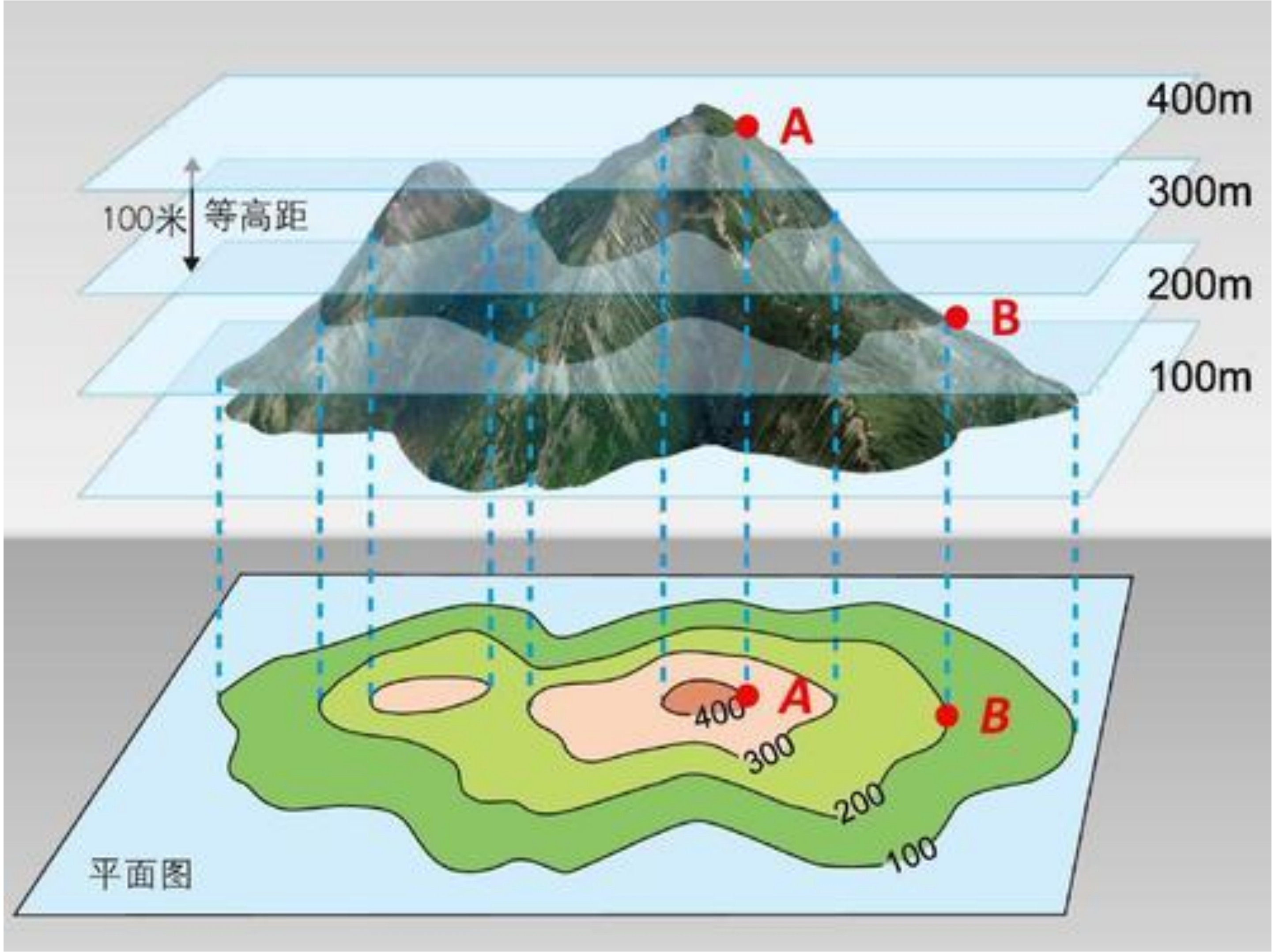
等值线图上，定点(x_0, y_0)处

$\nabla f(x_0, y_0)$就是**法线**方向

指向**值较大**的等值线



二、多元函数的梯度



小结

➢ 方向导数

计算公式: $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$

可微 $= f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$

注：方向导数存在 $\nRightarrow$ 偏导数存在

➢ 梯度

$$\mathrm{grad} f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\,\boldsymbol{i} + f_y(x_0,y_0)\,\boldsymbol{j}$$

沿梯度方向，方向导数最大，最大值为 $|\mathrm{grad} f(x_0,y_0)|$

沿梯度反方向，方向导数最小，最小值为 $-|\mathrm{grad} f(x_0,y_0)|$

沿等值线方向，方向导数为 0