1．（2017 级）（10 分）求微分方程初值问题$\begin{cases} xy'+y=4xe^{2x} \\ y(\frac{1}{2})=2 \end{cases}$的解.

解　$y'+\frac{1}{x}y=4e^{2x}$，（2 分）

$y=e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}(\int 4e^{2x}e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c)$（6 分）

$=\frac{1}{x}(\int 4xe^{2x}\mathrm{d}x+c)=\frac{1}{x}(\int 2x\mathrm{d}e^{2x}+c)=\frac{1}{x}(2xe^{2x}-\int 2e^{2x}\mathrm{d}x+c)=\frac{2xe^{2x}-e^{2x}+c}{x}$

（9 分）

$y(\frac{1}{2})=2$，$c=1$，$y=\frac{2xe^{2x}-e^{2x}+1}{x}$.（10 分）

2．（2020 级）（15 分）求伯努利方程$y'=\frac{y^2+x^3}{2xy}(x>0)$的通解.

解　$y'-\frac{1}{2x}y=\frac{x^2}{2}y^{-1}$，变形$yy'-\frac{1}{2x}y^2=\frac{x^2}{2}$.

令$z=y^2$，则$\frac{1}{2}z'-\frac{1}{2x}z=\frac{x^2}{2}$，即$z'-\frac{1}{x}z=x^2$.

$z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int x^2\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=x\left(\int x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+c\right)=\frac{x^3}{2}+cx$.

原方程的通解为$y^2=\frac{x^3}{2}+cx$

3. $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}z=e^x$， $p(x)=\frac{1}{x}$， $q(x)=e^x$

$$z=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c)$$

$$=e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}(\int e^x e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c_1)$$

$$=e^{-\ln|x|}(\int e^x e^{\ln|x|}\mathrm{d}x+c_1)$$

$$=\frac{1}{|x|}(\int e^x|x|\mathrm{d}x+c_1)$$

$$=\frac{1}{\pm x}(\pm\int e^x x\mathrm{d}x+c_1)$$

$$=\frac{1}{x}(\int e^x x\mathrm{d}x\pm c_1)$$

$$=\frac{1}{x}(\int e^x x\mathrm{d}x+c)$$

所以有的题解上来就没有绝对值

4. 若 $f(x)=e^x+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$， $f(x)$ 连续，求 $f(x)$.

解　$f'(x)=e^x+f(x)$， $\begin{cases} f'(x)-f(x)=e^x \\ f(0)=1 \end{cases}$，得 $f(x)=e^x(x+c)$

由 $f(0)=1$，得 $c=1$，从而 $f(x)=e^x(x+1)$

5. 若 $f(x)$ 可导，且 $\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}f(x)+1$，求 $f(x)$.

解　令 $xt=u$， $\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$　$(f(0)=2)$

$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}f(x)+1$， $\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\frac{x}{2}f(x)+x$　两端求导得

$f(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}xf'(x)+1$， $f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=-\frac{2}{x}$

从而 $f(x)=2+cx$.

6. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，$f(1)=3$，且

$$\int_1^{xy} f(t)\mathrm{d}t = x\int_1^{y} f(t)\mathrm{d}t + y\int_1^{x} f(t)\mathrm{d}t\text{，求 } f(x).$$

解　两端对 y 求导得

$$xf(xy) = xf(y) + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$$

取 $y=1$，则

$$xf(x) = xf(1) + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t\text{，}\quad \text{即}\quad xf(x) = 3x + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$$

两端对 x 求导得

$$f(x) + xf'(x) = 3 + f(x)\text{，从而 } xf'(x) = 3\text{，得 } f(x) = 3\ln x + c$$

由 $f(1)=3$，得 $c=3$，从而 $f(x)=3(\ln x+1)$.