4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2}<x\le 1 \end{cases}$，而 $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots)$，则 $S(-\frac{5}{2})=$____ ； $S(9)=$____ .

解 $S(-\frac{5}{2})=S(-2-\frac{1}{2})=S(-\frac{1}{2})=S(\frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{2}+2(1-\frac{1}{2})}{2}=\frac{3}{4}$，

$S(9)=S(4\times 2+1)=S(1)=0$

5. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，在 $(-1,1]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}3,-1<x\le 0\\ x^3,0<x\le 1\end{cases}$，函数 $f(x)$ 的 Fourier（傅里叶）级数是：$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x$， $x\in(-\infty,+\infty)$，其和函数是 $S(x)$，则 $S\left(\frac{1}{2}\right)=$_____ ，$S(11)=$_______.

解 $S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$， $S(11)=S(5\times 2+1)=S(1)=\frac{3+1}{2}=2$.

6. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi\le x<0\\ x^2, & 0\le x<\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的 Fourier（傅里叶）级数在 $x=\frac{\pi}{2}$ 和 $x=100\pi$ 处分别收敛于_____和_____.

解 $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$， $S(100\pi)=S(50\times 2\pi+0)=S(0)=\frac{2+0}{2}=1$

7. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，且 $f(x)=x\ (-\pi\le x<\pi)$，在其 **Fourier** 级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 之中，**Fourier** 系数（ B ）

(A) $a_2=0$，$b_2=1$.　　(B) $a_2=0$，$b_2=-1$.

(C) $a_2=1$，$b_2=0$.　　(D) $a_2=-1$，$b_2=0$.

解： $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad a_2=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos 2x\mathrm{d}x=0$

或由当 $f(x)$ 是奇函数时 $\Rightarrow a_2=0$

$b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \Rightarrow$

$$b_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x\right)=-1$$

8. 将函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1]\\ 1-x, & x\in(1,2]\end{cases}$ 展成 Fourier 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\dfrac{n\pi x}{2}$，其中 Fourier 系数 $b_n=\int_0^2 f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\,(n=1,2,\cdots)$，级数的和函数记为 $S(x)$，则（　　　）

(A) $S(1)=1,S(\frac{7}{2})=-\frac{1}{2}$.　　(B) $S(1)=\frac{1}{2},S(\frac{7}{2})=\frac{1}{2}$.

(C) $S(1)=\frac{1}{2},S(\frac{7}{2})=-\frac{1}{2}$.　　(D) $S(1)=1,S(\frac{7}{2})=\frac{1}{2}$.

解 (C)

$S(1)=\dfrac{1+(1-1)}{2}=\dfrac{1}{2}$，

$S(x)=S(\pm k\cdot 2l+\alpha)=S(\alpha) \quad 2l=4$

$$S(\frac{7}{2})=S(4-\frac{1}{2})=S(-\frac{1}{2})=-S(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$$

9.（**10** 分）设定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)=x$． **(1)** 将$f(x)$展成余弦级数;（**2**）求数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$之和；（**3**）求$f(x)$的正弦级数的和函数$S(x)$．

解 （**1**） $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\pi$，

$$n\ge 1\text{时，}\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & n\text{偶}\\ \dfrac{-4}{n^2\pi}, & n\text{奇}\end{cases},$$

经过偶延拓、周期延拓之后所得的函数在$[-\pi,\pi]$上连续、有有限个单调区间，因此由 **Dirichlet** 定理知余弦级数在$[0,\pi]$上处处收敛于$f(x)$，即

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x\quad (x\in[0,\pi])$$ **-----6** 分

（**2**）在上式两端令$x=0$，得$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$ **--------8** 分

3正弦级数—奇延拓

对经过奇延拓和周期延拓的函数验证 **Dirichlet** 定理的条件，知正弦级数的和函数

$$S(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<\pi\\ 0, & x=\pi\end{cases}$$ **-----10** 分

10. 设函数 $f(x)$ 是周期为 **2** 的周期函数，它在 $[-1,1)$ 上的表达式为

$f(x)=\begin{cases}1, & -1\le x<0\\ 0, & 0\le x<1\end{cases}$ 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数。

解：$l=1$，傅里叶系数

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}1\mathrm{d}x=1\text{，}\qquad\text{（2 分）}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=0\text{，}\quad n=1,2,\cdots\text{，}\qquad\text{（4 分）}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}=-\frac{1-(-1)^n}{n\pi}=\begin{cases}-\dfrac{2}{n\pi}, & n=1,3,\cdots\\ 0, & n=2,4,\cdots\end{cases}.\qquad\text{（6 分）}$$

因此，函数 $f(x)$ 傅里叶级数的展开式为

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\sin\pi x+\frac{1}{3}\sin 3\pi x+\frac{1}{5}\sin 5\pi x+\cdots\right)\text{，}$$

$$x\in(-\infty,+\infty),\ x\ne 0,\pm1,\cdots\qquad\text{（8 分）}$$

当 $x=0,\pm1,\cdots$ 时，$f(x)$ 的傅里叶级数收敛于 $\frac{1}{2}$。　　（10 分）

1. n维点集　　　(教材 6.4 节)

空间直角坐标系的建立，使空间中的点及向量与一个三元有序数组(x,y,z)形成一一对应，根据向量运算法则，可以赋予三元有序数组之间的加法、数乘等运算，如$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$，$\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$，我们把这种有序数组的全体称为三维空间，记作$\mathbf{R}^3$，并称这些数组为$\mathbf{R}^3$中的三维点.

一般地，按照上面作法，对n元有序数组之间同样赋予加法、数乘等运算. 由n元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体所组成的集合称为n维空间，记作$\mathbf{R}^n$，并称每一个n元数组为$\mathbf{R}^n$中一个n维点.

这样，全体实数构成的集合$\mathbf{R}$，或数轴上一切点的集合称为一维空间，并记作$\mathbf{R}^1$；全体有序数组(x,y)构成的集合，或xOy平面上一切点的集合称为二维空间，并记作$\mathbf{R}^2$.

下面介绍$\mathbf{R}^n$中的一些集合，相关概念以后会经常遇到. 为叙述方便，我们以$\mathbf{R}^2$为例.

设$P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，$\delta$是某一正数，与点$P_0(x_0,y_0)$距离小于$\delta$的点$P(x,y)$的全体，称为点$P_0$的$\delta$邻域，记作$U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\left\{P\,\middle|\,|PP_0|<\delta\right\}$$

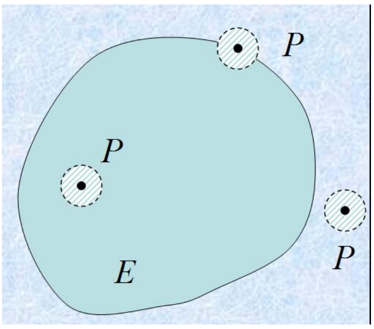
或

$$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

若点P_0不包含在该邻域，则称该邻域为点P_0的去心δ邻域，记作$\overset{0}{U}(P_0,\delta)$.显然，点$P_0$的$\delta$邻域在几何上就是以点$P_0(x_0,y_0)$中心，以$\delta>0$为半径的圆内部的点$P(x,y)$的全体.

如果不需要强调邻域的半径δ，则用$U(P_0)$表示点P_0的某个邻域，用$\overset{0}{U}(P_0)$表示点P_0的某个去心邻域.

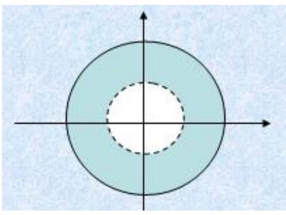
设集合$E \subset \mathbf{R}^2$，$P \in \mathbf{R}^2$，如果存在$\delta > 0$，使得$U(P,\delta) \subset E$，则称P是E的内点；若$U(P,\delta) \cap E = \varnothing$，则称$P$是$E$的外点. 如果点$P$的任何一个邻域内既有属于$E$的点，又有不属于$E$的点，则称$P$是$E$的边界点. 如图所示.



E的边界点的全体，称为E的边界，记作∂E.

E的内点必属于E；E的外点必不属于E；而E的边界点可能属于E，也可能不属于E

如果对于任意给定的$\delta > 0$，点P的去心邻域$\overset{0}{U}(P,\delta)$内总有E中的点，则称P是E的聚点.

例如，平面点集$E = \{(x,y) | 1 < x^2 + y^2 \le 2\}$，满足$1 < x^2 + y^2 < 2$的一切点$(x,y)$都是$E$的内点；满足$x^2 + y^2 = 1$的一切点$(x,y)$都是$E$的边界点，它们都不属于$E$；满足$x^2 + y^2 = 2$的一切点$(x,y)$也是$E$的边界点，它们都属于$E$；点集$E$以及它的边界$\partial E$上的一切点都是$E$的聚点.

可见，一个点集的聚点可以属于该点集，也可以不属于该点集.

如果E中的点都是E的内点，则称E为$\mathbf{R}^2$中的开集.

如果E中的所有聚点都属于E，则称E为$\mathbf{R}^2$中的闭集.

例如，集合$\left\{(x,y)\middle|0<x<1,0<y<1\right\}$是开集；集合$\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$是闭集；而集合$\left\{(x,y)\middle|0<x\le 1,0<y\le 1\right\}$是既非开集，也非闭集.

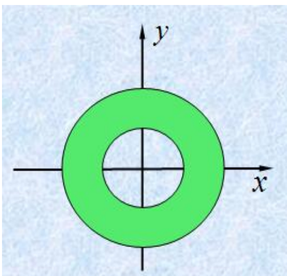
如果点集E内的任何两点，都可以用折线连接起来，且该折线上的点都属于E，则称E为连通集.

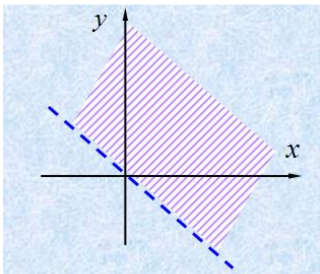
连通的开集称为区域或开区域.

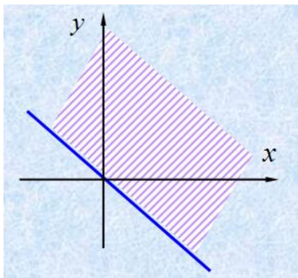
开区域连同它的边界一起所构成的点集称为闭区域.

对于平面点集E，如果存在某一正数r，使得$E\subset U(O,r)$，其中O是坐标原点，则称E为有界集，否则称为无界集.

例如，集合$\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 2\}$是有界闭区域；集合$\{(x,y)\,|\,x+y>0\}$是无界开区域，集合$\{(x,y)\,|\,x+y\ge 0\}$是无界闭区域







上面我们仅在$\mathbf{R}^2$中给出了平面点集的一些概念，这些概念可以自然地推广到n维空间$\mathbf{R}^n$中. 相应于平面上两点间的距离公式，对于$\mathbf{R}^n$中点$M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和点$N(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，规定M，N两点间的距离

$$|MN|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

在$\mathbf{R}^n$中，点$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与原点$O=(0,0,\cdots,0)$的距离

$$\rho(\boldsymbol{x},O)=\sqrt{\sum_{i}^{n}x_i^2}$$

称为变量(向量) $\boldsymbol{x}$ 的范数(也称为 $\boldsymbol{x}$ 的模)，记为 $\|\boldsymbol{x}\|$，即 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\sum_{i}^{n}x_i^2}$

对于 $\mathbf{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的距离为

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中规定两点间距离之后，就可使前面讨论的有关平面点集的一系列概念，方便地推广到 n ($n\geq 3$)维空间中来. 例如

设 $P_0\in\mathbf{R}^n$，δ 是某一正数，则 n 维空间内的点集

$$U(P_0,\delta)=\left\{P\,\middle|\,|PP_0|<\delta, P\in\mathbf{R}^n\right\}$$

就定义为 $\mathbf{R}^n$ 中点 P_0 的 δ 邻域. 以邻域为基础，可以定义点集的内点、外点、边界点和聚点，以及开集、闭集、区域等一系列概念.