6. 已知幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$，求：1、收敛域；2、和函数。

解：1、收敛半径$R=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1/(2n+1)}{1/(2(n+1)+1)}}=1$，

左端点$x=-1$代入，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$发散，

右端点$x=1$代入，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$发散，

收敛域$(-1,1)$。

2、令和函数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}=\begin{cases}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$，

设$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，$S_1'(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1})'=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^{2n+1}}{2n+1})'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2}$，

$S_1(x)=S_1(x)-S_1(0)=\int_0^x S_1'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-x$，

所以，$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-1, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

7. 设有幂级数$\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\frac{2\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}!}x^n$ 1、求其收敛域；2、求其和函数$S(x)$的表达式.

解：1、$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2n+1}{n!}}{\dfrac{2(n+1)+1}{(n+1)!}}=+\infty$，收敛域为$(-\infty,+\infty)$。

2、设

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(n+1)-1}{n!}x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=2S_1(x)-e^x,$$

其中：$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$，

$$\int_0^x S_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{n+1}{n!}x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=xe^x$$

两边对x求导，得$S_1(x)=(x+1)e^x$，

$S(x)=(2x+1)e^x$，$(-\infty<x<+\infty)$

8. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{2^n}$

解 方法一： 令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{2^n}x^{2n+4}$， $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

所以

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n+5}=x^5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n}=x^5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=x^5\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x^7}{2-x^2}$$

$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

则 $$S(x)=\left(\frac{x^7}{2-x^2}\right)'=\frac{14x^6-5x^8}{(2-x^2)^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{2^n}=S(1)=9$$

方法二：拆项 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

关于第一项级数，令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$， $|x|<1$

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}\Rightarrow S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=S(\frac{1}{2})=4$$

关于第二项级数，$5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=5\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=5$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{2^n}=4+5=9$

9. 求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$

解 方法一：令$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n$ ， $x\in(-\infty,+\infty)$

所以 $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(n+1)^2}{n!}x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$

$$=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=(x^2+x)e^x$$

n=0,不能除下来,n=0时为0直接去掉

$$S(x)=\left((x^2+x)e^x\right)'=(x^2+3x+1)e^x\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=S(1)=5e$$

方法二：拆项

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+2n+1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)+3n+1}{n!}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=5e$$

10. 将函数 $f(x)=\ln(x^2+3x+2)$ 展开为 $x-2$ 的幂级数.

解 方法一：$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$，$(-1<x\le 1)$

$$f(x)=\ln(x^2+3x+2)=\ln(x+1)+\ln(x+2)=\ln\big(3+(x-2)\big)+\ln\big(4+(x-2)\big)$$

$$=\ln 3\left(1+\frac{x-2}{3}\right)+\ln 4\left(1+\frac{x-2}{4}\right)=\ln 3+\ln 4+\ln\left(1+\frac{x-2}{3}\right)+\ln\left(1+\frac{x-2}{4}\right)$$

$$=\ln 12+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n4^n}，(-1<x\le 5)$$

$$=\ln 12+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)\frac{(x-2)^n}{n}，(-1<x\le 5)$$

方法二：

$$f'(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3+x-2}+\frac{1}{4+x-2}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-2}{3}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-2}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{3^n}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{4^n}，(-1<x<5)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)(x-2)^n，(-1<x<5)$$

$$\int_2^x f'(x)\mathrm{d}x=\int_2^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)(x-2)^n\mathrm{d}x$$

即
$$f(x)-f(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_2^x(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)(x-2)^n\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}$$

当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 无意义，$x=5$ 时，级数收敛，故收敛域是 $-1<x\le 5$

$$f(x)=\ln 12+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}，\ -1<x\le 5$$

11. 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数，并求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解：$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},-1<x<1$

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n})\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

左端点 $x=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n+1}$，由莱布尼兹判别法收敛.

收敛域 $[-1,1)$. 由于 $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$，所以：

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad [-1,1)$$

当 $x=-1$ 时， $0=f(-1)=\dfrac{\pi}{4}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$， $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4}$

12. 已知 $f_n(x)$ 满足

$$f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x \qquad（n 为正整数）$$

且 $f_n(1)=\dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 的和.

解 $f_n'(x)-f_n(x)=x^{n-1}e^x$ 是一阶线性微分方程

$$f_n(x)=e^{\int\mathrm{d}x}(\int x^{n-1}e^x e^{\int-\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c)=e^x(\frac{x^n}{n}+c)，\quad 由\ f_n(1)=\frac{e}{n}\Rightarrow c=0$$

所以 $f_n(x)=e^x\dfrac{x^n}{n}$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

由书中例 **5.4.15** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$， $x\in[-1,1)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -e^x \ln(1-x) \quad , \quad x \in [-1,1) .$$

13. 将函数 $f(x)=xe^x$ 展为 $x-1$ 的幂级数.

解 $$f(x)=xe^x=(x-1+1)e\cdot e^{x-1}=(x-1+1)e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$$

$$=e\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}\right)$$

$$=e\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-1)!}+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}\right)$$

$$=e\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)(x-1)^n\right] \quad , \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

14. 将函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{4-x}$ 在 $x_0=1$ 处展为幂级数，并求 $f^{(n)}(1)$.

解 $$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{3-(x-1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(\frac{x-1}{3})}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}, \qquad \left|\frac{x-1}{3}\right|<1\text{，即 } |x-1|<3$$

$$f(x)=\frac{x-1}{4-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n} \quad , \quad |x-1|<3$$

$$\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=\frac{1}{3^n}\Rightarrow f^{(n)}(1)=\frac{n!}{3^n}$$