1. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$收敛.

证明 $\left|\dfrac{u_n}{n}\right|\le\dfrac{1}{2}\left(u_n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$收敛.

2. 设正项数列$\{a_n\}$单调减少，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试问$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$是否收敛？并说明理由.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n}=\dfrac{1}{a+1}<1$，由根值判别法知，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛.

3. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$都收敛，且$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\ (n=1,2,\cdots)$，试证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

证明 因为$0\le b_n-a_n\le c_n-a_n$， 所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$收敛，

由$b_n=(b_n-a_n)+a_n$，可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

4. 下列数项级数中收敛的个数为________.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\dfrac{2}{n})$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$.

A．1 **B．2** **C．3** **D．4**

解 答案 D

(1) $\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛

(4) $\dfrac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}<\left(\dfrac{5}{2}\right)^n\dfrac{n^3}{3^n}=\left(\dfrac{5}{6}\right)^n n^3$， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n+1}(n+1)^3}{\left(\dfrac{5}{6}\right)^n (n)^3}=\dfrac{5}{6}$ 收敛

5. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+\alpha}{n}$收敛，则$\alpha$的取值范围是____；

$\alpha=0$

6. 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{a_{2n}}}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ （ ）

(A) 条件收敛； (B) 绝对收敛；

(C) 发散； (D) 敛散性不能确定。

解 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$收敛

$$\frac{\sqrt{a_{2n}}}{\sqrt[3]{n^2+1}}\le\frac{1}{2}\left(a_{2n}+\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{2}{3}}}\right),\quad \frac{1}{(n^2+1)^{\frac{2}{3}}}<\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\quad \text{绝对收敛}$$

7. 已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^{\alpha}}$收敛，则$\alpha$应满足______.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^{\alpha}}}{\dfrac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}}=1$，$\alpha-\dfrac{1}{2}>1\Rightarrow\alpha>\dfrac{3}{2}$

8. 设有两个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$， 则（ ）

（A）当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛 （B）当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散.

（C）当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛（D）当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$发散

解 证明（C）对.

当$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛时，$\Rightarrow |b_n| \to 0 \Rightarrow$由保号性，$n$充分大时，$|b_n|<1 \Rightarrow n$充分大时，$b_n^2<|b_n|$． 又由$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$由保号性，$n$充分大时，$a_n^2<1$

从而n充分大时， $a_n^2 b_n^2 < |b_n|$，由比较判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$收敛.

(A) $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ **(B)** $a_n = b_n = \frac{1}{n}$ **(D)** $a_n = b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

9． 以下四个数项级数中，发散的是__________.

A． $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{1.001}}$； B． $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln(1+\frac{1}{n})$；

C． $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n})$； D． $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^n$.

解 <u>**D**</u> $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$

10． 以下命题中正确的是__________.

A．若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛.

B．若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$收敛.

C．若$u_n>0$，且$u_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n})$ $(n\to\infty)$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

D．若$u_n>0$，且$\lim_{n\to\infty}u_n\sqrt{n}=1$，则交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$收敛.

解 证明 **B** 对.

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$收敛

A. $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ **C.** $u_1 = 1$，$u_n = \frac{1}{n\ln n}$，$n=2,3,\cdots$ **D.** $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}+(-1)^n\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$

11. 以下命题中正确的是（　　）

(A)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_{2n-1}+u_{2n}\right)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(B)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛;

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ ，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 ;

(D) 若 $u_n\le v_n,(n=1,2,\ldots)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 ，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

解　证明 C 对.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$, 由保号性，$n$ 充分大时，$|u_{n+1}|>|u_n|\Rightarrow u_n\not\to 0$

(A) $u_n:1,-1,1,-1,\cdots$ (B) $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (D) $u_n=-\frac{1}{n}$, $v_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

12. 设有命题

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}a_n$ 收敛.

(2) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1\ (n=1,2,\cdots)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 同敛散.

(4) 若 $a_n\le b_n\le c_n\ (n=1,2,\cdots)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

则上述命题中正确的个数为(　　　)

(A). 0　　(B). 1　　(C). 2　　(D). 3

解　答案 (B)

证明 (4)对. 因为 $0\le b_n-a_n\le c_n-a_n$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 收敛，

由$b_n=(b_n-a_n)+a_n$，可知$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

(1) $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **(2)** $a_n=\frac{1}{n}$ **(3)** $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$，$b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

13. 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则必收敛的级数是

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$ （B） $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ （C）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ （D）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$.

解 答案(D)

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$收敛

（A）$u_1=1$，$u_n=\frac{(-1)^n}{\ln n}$ $n=2,3,\cdots$ （B）$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ （C）$u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

14. 设$0\le a_n<\frac{1}{n}$，下列级数中肯定收敛的(　　)

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ （B） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ （C）$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ （D）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$.

解 答案(D)

因为$0\le a_n<\frac{1}{n}\Rightarrow 0\le a_n^2<\frac{1}{n^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$收敛.

（A）$a_n=\frac{1}{2n}$ （B）$a_n=0$ n为奇数，$a_n=\frac{1}{2n}$ n为偶数（C）$a_n=\frac{1}{2n}$

15. 以下命题中正确的是__________.

A. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛.

B. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，且$u_n>0$，$n=1,2,\cdots$,则$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$.

C. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，且$\lim_{n\to\infty}v_n=1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n v_n$收敛.

D．若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，且$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

解　证明 **D** 对.

令$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$前n项和为S_n，

因为$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛$\Rightarrow S_{2n}$收敛，令$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$，

又因为$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-u_{2n})=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}u_{2n}=S+0=S$

所以$\lim_{n\to\infty}S_n=S\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

其它不对举反例如下:

(A) $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$　**(B)**　$u_n=\frac{1}{n^2}$　**(C)** $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$，$v_n=1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

16. 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$的敛散性，是绝对收敛、条件收敛、还是发散？

解：因为$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\sim\frac{1}{n}\ (n\to\infty)$，所以原级数不绝对收敛.

设$y=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x}})$，则　$y'=-\frac{1}{2x^{3/2}}\left(\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x}})+\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)<0$，故$u_n$单调减少，又显然$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，故原级数条件收敛.

17. 讨论级数$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\left(3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$是绝对收敛、条件收敛、还是发散？

解　因为 $3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\ln 3\ (n\to\infty)$，$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}(3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)}{\frac{1}{n}}=\ln 3$

由比较判别法： $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)$ 发散.

令 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}(3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1)$， $f'(x)=-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}(3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1+\frac{\ln 3}{\sqrt{x}}3^{\frac{1}{\sqrt{x}}})<0 \quad (x\geq 2)$

故 $\frac{1}{\sqrt{n}}(3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1) \quad (n\geq 2)$ 单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)=0$

由莱布尼兹判别法原级收敛，故原级数条件收敛.

18. 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^2}$ 敛散性

解　由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{(\ln x)^2}}=0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{(\ln n)^2}}=0$$

由比较判别法极限形式，原级数发散.

19. 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 敛散性

解　由 $\ln[(\ln n)^{\ln n}]=\ln n\cdot\ln(\ln n)$ ，又由 n 充分大时， $\ln(\ln n)>2$

所以， n 充分大时， $\ln[(\ln n)^{\ln n}]=\ln n\cdot\ln(\ln n)>2\ln n=\ln n^2$

从而 n 充分大时， $(\ln n)^{\ln n}>n^2$ ， $\Rightarrow \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}<\frac{1}{n^2}$

由比较判别法，原级数收敛.

20. 在以下四个数项级数之中，发散的是（　　　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$.　　　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n-2^n}$.

(C) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$.

解: (D) $\frac{1}{2^{\ln n}}=\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln 2}}=\frac{1}{n^{\ln 2}}$，$\ln 2<\ln e=1$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$ 发散.

(A) $\left|\frac{\cos n}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ 收敛.

(B) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}-2^{n+1}}\cdot\frac{3^n-2^n}{n^2}=\frac{1}{3}<1$ $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n-2^n}$ 收敛.

(C) 见书 P_{20} 例 **5.2.12**

21. 以下四个级数之中，发散的是(　　)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$. **(B)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n+1}$.

(C) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1.1}\cdot\sqrt{\ln n}}$. **(D)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$

解: (D)

(A) $\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{2n^2}$

(B) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}+1}\cdot\frac{2^n+1}{n^2+1}=\frac{1}{2}<1$

(C) 见书 P_{20} 例 **5.2.12**

22. 以下四个正项级数中，发散的是（　　）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+\ln n}{n^4-\cos n}$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)$.

解 (A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 用比值法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}\text{，收敛}$$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+\ln n}{n^4-\cos n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^2+\ln n}{n^4-\cos n}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n^2\ln n}{n^4-\cos n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{\ln n}{n^2}}{1-\dfrac{\cos n}{n^4}}=1 \quad \text{由比较法极限形式}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+\ln n}{n^4-\cos n}$收敛　　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\right)$.

$$\frac{1}{2n}\le 1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}$$，由比较法

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$发散$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\right)$发散

23. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$ 的敛散性，是绝对收敛、条件收敛、还是发散？

解　$u_n=\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)=\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi+n\pi\right)$

$$=(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right)$$

当 n 充分大时，$0<\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\left(\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right)$单调减，

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right)=0$，由莱布尼兹判别法原级收敛.

由 $\left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)\right|=\sin\left(\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right)\sim\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\sim\dfrac{a^2\pi}{2n}\ (n\to\infty)$

$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)\right|$发散，故原级数条件收敛.