# 第一次作业

## 1.1

a

## 2.1

1. 不是命题；
2. 不是命题；
3. 是命题，真值为0；
4. 不是命题；
5. 不是命题；
6. 是命题，真值为0；
7. 是命题，真值为0；

## 2.2

$1.\neg p$
$2.(\neg p) \wedge (\neg q)$
$3.p \oplus q$
$4.p \rightarrow q$
$5.p \rightarrow q$
$6.(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$
$7.p \leftrightarrow (q \oplus r)$
$8.p \rightarrow q$
$9.p \rightarrow q$
$10.p \leftrightarrow q$
$11.\neg(p \vee q) \rightarrow r$

# 2.3

1. 永真式
2. 可满足式
3. 可满足式
4. 永真式
5. 永真式
6. 永假式
7. 永真式

# 2.4

$$
\begin{aligned}
&(1)\\
&\quad p \rightarrow (q \rightarrow r)\\
\Longleftrightarrow\ & \neg p \vee (\neg q \vee r)\\
\Longleftrightarrow\ & (\neg p \vee \neg q) \vee r\\
\Longleftrightarrow\ & (\neg q \vee \neg p) \vee r\\
\Longleftrightarrow\ & \neg q \vee (\neg p \vee r)\\
\Longleftrightarrow\ & \neg q \vee (p \rightarrow r)\\
\Longleftrightarrow\ & q \rightarrow (p \rightarrow r)\\
&(2)\\
&\quad (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)\\
\Longleftrightarrow\ & (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)\\
\Longleftrightarrow\ & \neg p \vee (q \wedge r)\\
\Longleftrightarrow\ & p \rightarrow q \wedge r\\
&(3)\\
&\quad (p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow q)\\
\Longleftrightarrow\ & (\neg p \vee q) \vee (\neg r \vee q)\\
\Longleftrightarrow\ & \neg p \vee \neg r \vee (q \vee q)\\
\Longleftrightarrow\ & \neg p \vee \neg r \vee q\\
\Longleftrightarrow\ & \neg(p \wedge r) \vee q\\
\Longleftrightarrow\ & p \wedge r \rightarrow q\\
&(4)\\
&\quad p \rightarrow (q \rightarrow p)\\
\Longleftrightarrow\ & \neg p \vee (\neg q \vee p)\\
\Longleftrightarrow\ & (\neg p \vee p) \vee \neg q\\
\Longleftrightarrow\ & 1 \vee \neg q\\
\Longleftrightarrow\ & 1\\
\text{同时又有}&\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)\\
\Longleftrightarrow\ & \neg\neg p \vee (\neg p \vee q)\\
\Longleftrightarrow\ & (p \vee \neg p) \vee q\\
\Longleftrightarrow\ & 1 \vee q\\
\Longleftrightarrow\ & 1\\
&\quad \text{二者均为永真式，且等值与1，故有二者等值}
\end{aligned}
$$

## 2.5

(1)

易知$(q \to r) \iff (\neg r \to \neg q)$

由替换实例进行替换

有$(Q \to R) \iff (\neg R \to \neg Q)$

(2)

$$
\begin{aligned}
& (p \wedge q) \to r \\
\iff & \neg(p \wedge q) \vee r \\
\iff & \neg p \vee \neg q \vee r \\
\iff & \neg p \vee (\neg q \vee r) \\
\iff & \neg p \vee (q \to r) \\
\iff & p \to (q \to r)
\end{aligned}
$$

由替换实例进行替换

有$(P \wedge Q) \to R \iff P \to (Q \to R)$

## 2.6

(1)

$\neg(Q \wedge R) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$

(2)

$(p \vee (Q \vee R)) \wedge ((P \vee Q) \vee R) \wedge 1$

## 2.7

由对偶定理

(1)

$A$是永真式，则取$R$为1，$R^*$为0

有$A \iff R$

故$A^* \iff R^*$

即$A^* \iff 0$

故$A$为永假式

(2)

(1)

$A$是永假式，则取$R$为0，$R^*$为1

有$A \iff R$

故$A^* \iff R^*$

即$A^* \iff 1$

故$A$为永真式

# 第二次作业

## 1.1

(1)

$$
\begin{aligned}
& (q \to p) \wedge (\neg p \to q) \leftrightarrow \neg p \\
\Longleftrightarrow\ & (\neg q \vee p) \wedge (\neg(\neg p) \vee q) \leftrightarrow \neg p \\
\Longleftrightarrow\ & (\neg q \vee p) \wedge (q \vee p) \leftrightarrow \neg p \\
\Longleftrightarrow\ & (\neg q \wedge q) \vee p \leftrightarrow \neg p \\
\Longleftrightarrow\ & p \leftrightarrow \neg p \\
\Longleftrightarrow\ & 0
\end{aligned}
$$

该公式通过真值演算等值于0，故该公式为永假式

(2)

$$
\begin{aligned}
& (p \to q) \wedge (q \to r) \wedge \neg(p \to r) \\
\Longleftrightarrow\ & (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg(\neg p \vee r) \\
\Longleftrightarrow\ & (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (p \wedge \neg r) \\
\Longleftrightarrow\ & ((\neg p \vee q) \wedge p) \wedge ((\neg q \vee r) \wedge \neg r) \\
\Longleftrightarrow\ & ((\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee (r \wedge \neg r)) \\
\Longleftrightarrow\ & (0 \vee (q \wedge p)) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee 0) \\
\Longleftrightarrow\ & (q \wedge p) \wedge (\neg q \wedge r) \\
\Longleftrightarrow\ & p \wedge (q \wedge \neg q) \wedge r \\
\Longleftrightarrow\ & p \wedge 0 \wedge r \\
\Longleftrightarrow\ & 0
\end{aligned}
$$

该公式通过真值演算等值于0，故该公式为永假式

# 1.2

$$
\begin{aligned}
& (1) \neg(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \vee q) \\
\Longleftrightarrow\ & (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \\
\Longleftrightarrow\ & p \wedge (q \vee \neg q) \\
\Longleftrightarrow\ & p
\end{aligned}
$$

故即证该等值式，由对偶定理有

$$\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \iff p$$

$$
\begin{aligned}
& (2) (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\
\Longleftrightarrow\ & p \vee (\neg q \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\
\Longleftrightarrow\ & (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \\
\Longleftrightarrow\ & \neg(\neg p \vee q)
\end{aligned}
$$

故即证该等值式，由对偶定理有

$$(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \iff \neg(\neg p \wedge q)$$

# 1.3

1.$\{0, \rightarrow\}$
首先我们有$\{\neg, \rightarrow\}$为极小完全集
又由于$\neg p \iff p \rightarrow 0$
故$\{\neg, \rightarrow\}$是完全集
同时只含0的集合，无法表示真值赋值$v(A) = 1$
($其中A为只含命题变元p而不含其他命题变元的公式，取v(p/0)), , 而v(\neg p) = 1$, 即此时无法表示$\neg$
而只含 $\rightarrow$ 的集合，无法表示真值赋值$v(A) = 0$
(其中$A$为只含命题变元$p$而不含其他命题变元的公式，取$v(p/1))$, 而$v(\neg p) = 0$, 即此时无法表示$\neg$
即任意去掉一个后均不能构成完全集，故该集合为极小完全集
2.$\{\oplus, \rightarrow\}$
首先我们有$\{\neg, \rightarrow\}$为极小完全集
又由于$\neg p \iff p \oplus (p \rightarrow p)$
故$\{\oplus, \rightarrow\}$是完全集
又同时只含 $\oplus$ 的集合，无法表示真值赋值$v(A) = 1$
(其中$A$为只含命题变元$p$而不含其他命题变元的公式，取$v(p/0))$, 而$v(\neg p) = 1$, 即此时无法表示$\neg$
而只含 $\rightarrow$ 的集合，无法表示真值赋值$v(A) = 0$
(其中$A$为只含命题变元$p$而不含其他命题变元的公式，取$v(p/1))$, 而$v(\neg p) = 0$, 即此时无法表示$\neg$
即任意去掉一个后均不能构成完全集，故该集合为极小完全集
3.$\{\oplus, \wedge, \leftrightarrow\}$
首先我们有$\{\neg, \wedge\}$为极小完全集, 而且$\{\oplus, \leftrightarrow\}$不是完全集(书上的例题应该可以用吧）
又由于$\neg p \iff p \oplus (p \leftrightarrow p)$
故$\{\oplus, \wedge, \leftrightarrow\}$是完全集
又同时只含$\oplus$，$\wedge$的集合，无法表示真值赋值$v(A) = 1$
(其中$A$为只含命题变元$p$而不含其他命题变元的公式，取$v(p/0))$, 而$v(\neg p) = 1$, 即此时无法表示$\neg$
只含$\{\wedge, \leftrightarrow\}$的集合，无法表示真值赋值$v(A) = 0$
(其中$A$为只含命题变元$p$而不含其他命题变元的公式，取$v(p/1))$, 而$v(\neg p) = 0$, 即此时无法表示$\neg$
即任意去掉一个后均不能构成完全集，故该集合为极小完全集
4.$\{\oplus, \vee, \leftrightarrow\}$
首先我们有$\{\neg, \vee\}$为极小完全集, 而且$\{\oplus, \leftrightarrow\}$不是完全集
又由于$\neg p \iff p \oplus (p \leftrightarrow p)$
故$\{\oplus, \vee, \leftrightarrow\}$是完全集
又同时只含$\oplus$，$\vee$的集合，无法表示真值赋值$v(A) = 1$
(其中$A$为只含命题变元$p$而不含其他命题变元的公式，取$v(p/0))$, 而$v(\neg p) =$, 即此时无法表示$\neg$
只含$\{\vee, \leftrightarrow\}$的集合，无法表示真值赋值$v(A) = 0$
(其中$A$为只含命题变元$p$而不含其他命题变元的公式，取$v(p/1))$, 而$v(\neg p) = 0$, 即此时无法表示$\neg$
即任意去掉一个后均不能构成完全集，故该集合为极小完全集

# 1.4

1.$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
该集合无法表示真值赋值$v(A) = 0$
(其中$A$为只含命题变元$p$而不含其他命题变元的公式，取$v(p/1))$, 而$v(\neg p) = 0$, 即此时无法表示$\neg$
故该集合不是完全集
2.$\{\wedge, \vee, \oplus\}$
该集合无法表示真值赋值$v(A) = 1$
(其中$A$为只含命题变元$p$而不含其他命题变元的公式，取$v(p/0))$, 而$v(\neg p) = 1$, 即此时无法表示$\neg$
故该集合不是完全集

# 1.5

1.

$\{\uparrow\}$是完全集

首先我们知道$\{\neg,\wedge\}$是完全集

且有$\neg p \iff p\uparrow p$

$p\wedge q \iff \neg(p\uparrow q) \iff (p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q)$

故即证该集合为完全集

2.

$\{\downarrow\}$是完全集

首先我们知道$\{\neg,\vee\}$是完全集

且有$\neg p \iff p\downarrow p$

$p\vee q \iff \neg(p\downarrow q) \iff (p\downarrow q)\downarrow(p\downarrow q)$

故即证该集合为完全集

3.

$\{\Delta\}$为完全集

首先若有$0\Delta 0=0$, 或者$1\Delta 1=1$

即$0\Delta 0=1$, 且$1\Delta 1=0$

那么$\Delta$无法表示$\neg$

又类似$\{\oplus,\leftrightarrow\}$, 若$1\Delta 0\neq 0\Delta 1$

则仅含$p,q$两个命题变元而不含其他命题变元的公式$A$的真值情况中1的个数一定是偶数个

故该集合无法表示$\wedge,\vee$

于是

若$1\Delta 0=0\Delta 1=0$, 则此时$\Delta$即为$\downarrow$

若$1\Delta 0=0\Delta 1=1$, 故此时$\Delta$即为$\uparrow$

综上即可得证

# 1.6

```
def solve_formula(exp: str):
    variables = {}
    var_list = []
    operations = {'or', 'and', 'not', '(', ')', 'True', "False"}

    exp = ' ( '.join(exp.split('('))
    exp = ' ) '.join(exp.split(')'))

    tokens = exp.split()
    for t in tokens:
        if t not in operations and t not in variables:
            variables[t] = None
            var_list.append(t)

    has_true = False
    has_false = False
    lim = 1 << len(var_list)

    for i in range(lim):
        for b in range(len(var_list)):
            if i & (1 << b) != 0:
                variables[var_list[b]] = 'True'
            else:
                variables[var_list[b]] = 'False'
        const_exp = " ".join(list(map(lambda x: variables[x] if x in variables else x,
tokens)))
        if eval(const_exp):
            has_true = True
        else:
            has_false = True

    if not has_false:
```

```
        return '永真式'
    elif not has_true:
        return '永假式'
    else:
        return '可满足式'

s = input("请输入一个合式公式，命题变元最多有p,q,r三个，仅包含与、或、非三种运算，用and,or,not来表示：")
result = solve_formula(s)
print(result))
```

# 第三次作业

## hugo

$$\begin{aligned}
&p \leftrightarrow q \\
\Longleftrightarrow\ &(p \to q) \wedge (q \to p) \\
\Longleftrightarrow\ &(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \\
\Longleftrightarrow\ &((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge p) \\
\Longleftrightarrow\ &(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p) \\
\Longleftrightarrow\ &(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
&(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \\
&\wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)
\end{aligned}$$

这是逻辑学中为了书写清晰简明而作的约定：

1. 各联结词的结合力按照如下次序递减：
   ¬，∧，∨，→，↔
2. 连续的→从后往前结合

这样的话，一些公式就可以少写括号，省得麻烦。

例如：

1. r∨（p∧q）就可以简写为 r∨p∧q
2. （r∨（p∧q））→t 就可以简写为
   r∨p∧q→t
3. r→（p→q）就可以简写为r→p→q

是不是简明多了？

## 1.1

析取范式：

$p, p \vee q, p \wedge \neg r, p \vee \neg p;$

合取范式：

$p, (p \vee q) \wedge r, p \wedge \neg r. p \vee \neg p;$

## 1.2

1.析取范式有：

$(1),(2),(3),(5)$

2.合取范式有：

$(1),(2)$

3.主析取范式有：

$(1),(5)$

4.主合取范式有：

$(1),(4)$

## 1.3

$(1)\neg p \wedge q \rightarrow r$

$\Longleftrightarrow \neg(\neg p \wedge q) \vee r$

$\Longleftrightarrow p \vee \neg q \vee r$

可知主合取范式为：$p \vee \neg q \vee r$

主析取范式为：$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

$\vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

且该合式公式为可满足式

$(2)(p \rightarrow q) \rightarrow r$

$\Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r$

$\Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee r$

$\Longleftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

$\Longleftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q) \vee r) \wedge ((p \vee \neg p) \wedge q \vee r)$

$\Longleftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

可知主合取范式为：$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

主析取范式为：$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

且该合式公式为可满足式

$(3)\neg p \vee \neg q \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$

$\Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

$\Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

可知主析取范式为：$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

主合取范式：$p \vee q$

且该合式公式为可满足式

$(4)p \vee (p \rightarrow q \vee (\neg q \rightarrow r))$

$\Longleftrightarrow p \vee (\neg p \vee q \vee (\neg(\neg q) \vee r))$

$\Longleftrightarrow p \vee (\neg p \vee q \vee q \vee r)$

$\Longleftrightarrow 1$

可知主合取范式为：$1$

主析取范式为：$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

$\vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

且该合式公式为永真式

$(5)(p \rightarrow q \wedge r) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q \wedge \neg r)$

$\Longleftrightarrow (\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg(\neg p) \vee (\neg q \wedge \neg r))$

$\Longleftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg r)$

$\Longleftrightarrow ((\neg p \vee q) \vee (r \wedge \neg r)) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg q) \vee r) \wedge ((p \vee \neg q) \vee (r \wedge \neg r)) \wedge (p \vee (q \wedge \neg q) \vee \neg r)$

$\Longleftrightarrow (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

$\wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$

$\Longleftrightarrow (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$

可知主合取范式为：$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$

主析取范式为：$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

且该合式公式为可满足式

$(6)p \wedge q \wedge (\neg p \vee \neg q)$

$\Longleftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q \wedge \neg q)$

$\Longleftrightarrow 0$

可知主析取范式为：$0$

主合取范式为：$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

且该合式公式为永假式

# 1.4

有，`p`既是关于`p`的主析取范式，又是关于`p`的主合取范式

# 1.5

$$Q \vee R, \neg Q \vDash R$$

# 1.6

```python
def terms(exp: str) -> int:
    variables = {}
    var_list = []
    operations = {'or', 'and', 'not', '(', ')'}

    exp = ' ( '.join(exp.split('('))
    exp = ' ) '.join(exp.split(')'))

    tokens = exp.split()
    for t in tokens:
        if t not in operations and t not in variables:
            variables[t] = None
            var_list.append(t)

    cnt_true = 0
    cnt_false = 0
    lim = 1 << len(var_list)

    for i in range(lim):
        for b in range(len(var_list)):
            if i & (1 << b) != 0:
                variables[var_list[b]] = 'True'
            else:
                variables[var_list[b]] = 'False'
        const_exp = exp
        for v in variables:
            const_exp = const_exp.replace(v, variables[v])
        if eval(const_exp):
            cnt_true += 1
        else:
            cnt_false += 1

    return cnt_false


def main():
    print(terms(input()))


if __name__ == '__main__':
    main()
```