数项级数与函数项级数

1. 无穷级数收敛的必要条件

$$若\sum_{n=1}^{\infty}a_n收敛，则\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

2. 正项级数收敛的充要条件

$$正向级数\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a_n\geq 0)收敛\Leftrightarrow 部分和序列\{S_n|S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\}有界$$

3. 正项级数的比较判别法

若$\exists N>0,n>N$时，满足$b_n\geq a_n\geq 0$，则

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}a_n发散\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n发散$$

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}b_n收敛\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n收敛$$

若$\exists N>0,n>N$时，满足$a_n,b_n\geq 0$，则比较判别法极限形式成立

$$(1)若\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}\geq q>0,则\sum_{n=1}^{\infty}a_n发散\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n发散$$

$$(2)若\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\leq q<\infty,则\sum_{n=1}^{\infty}b_n收敛\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n收敛$$

4. 比较判别法常用参考级数

$$(1)等比级数:\sum_{n=1}^{\infty}q^n\begin{cases}|q|<1时收敛\\|q|\geq 1时发散\end{cases}$$

$$(2)P级数:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}p>1时收敛\\p\leq 1时发散\end{cases}$$

$$(3)广义P级数:\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n},\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln^p n}等,收敛条件同上$$

5. 正项级数的$Cauchy$判别法（根值判别法）

$$记q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}, 则级数\sum_{n=1}^{\infty}a_n\begin{cases}收敛, q<1\\ 发散, q>1\\ 判别法失效, q=1\end{cases}$$

$$若取\overline{q}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}, 结论依然成立$$

6. 正项级数的$D'Alembert$判别法（比值判别法）

$$记q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}, 则级数\sum_{n=1}^{\infty}a_n\begin{cases}收敛, q<1\\ 发散, q>1\\ 判别法失效, q=1\end{cases}$$

$$若取\overline{q}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}, 结论依然成立$$

7. 正项级数的$Cauchy$积分判别法

设$x\geq 1, f(x)\geq 0$且单调递减，则

$$无穷级数\sum_{n=1}^{\infty}f(n)与广义积分\int_1^{+\infty}f(x)dx同敛散$$

8. 一般项级数的绝对收敛判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|收敛\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n收敛$$

9. 交错级数的$Leibniz$判别法

$$定义交错级数\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(u_n>0)$$

若u_n单调递减趋于零，则该交错级数称为$Leibniz$级数，且收敛

10. 一般项级数的$Dirichlet$判别法

如果以下两个条件同时成立：

(1)数列$\{a_n\}$的部分和$\{S_n|S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\}$有界

(2)数列$\{b_n\}$是单调数列，且$\lim_{n\to\infty}b_n=0$

那么级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛

11. 一般项级数的$Abel$判别法

$$
\begin{aligned}
&\text{如果以下两个条件同时成立：}\\
&(1)\text{级数}\sum_{n=1}^{n} a_n\text{收敛}\\
&(2)\text{数列}\{b_n\}\text{单调有界}\\
&\text{那么级数}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\text{收敛}
\end{aligned}
$$

12. 幂级数的$Abel$定理

$$
\begin{aligned}
&\text{对于幂级数}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\text{有以下两条结论成立：}\\
&(1)\text{若有某点}x_0 \neq 0\text{使得}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n\text{收敛}, \text{则当}|x| < |x_0|\text{时}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\text{绝对收敛}\\
&(2)\text{若有某点}x_1 \neq 0\text{使得}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n\text{发散}, \text{则当}|x| > |x_1|\text{时}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\text{发散}
\end{aligned}
$$

13. 幂级数的收敛半径

$$
\text{幂级数}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\text{的收敛半径为：}R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\text{或}R = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}
$$

收敛域需要在$x \in \{R, -R\}$处单独讨论

14. 幂级数的换序运算

幂级数求导与求和换序

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} f(x)(n+1)x^n\\
=&f(x)\left[\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right]'\\
=&\frac{f(x)}{(x-1)^2}
\end{aligned}
$$

幂级数积分与求和换序

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} f(x)\frac{x^{n+1}}{n+1}\\
=&f(x)\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right]dx\\
=&-f(x)\ln(1-x)
\end{aligned}
$$

15. 函数展开成$Taylor$级数

$$
f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n
$$

特别地，当$x_0=0$时，上式称为$Maclaurin$级数

16. 常用泰勒级数及其收敛域

$$
\begin{aligned}
&(1)\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},x\in(-\infty,+\infty)\\
&(2)\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},x\in(-\infty,+\infty)\\
&(3)e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)\\
&(4)\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,x\in(-1,1)\\
&(5)\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,x\in(-1,1)\\
&(6)\frac{1}{(1-x)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n,x\in(-1,1)\\
&(7)\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)!},x\in(-1,1]\\
&(8)\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},x\in(-1,1)\\
&(9)\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},x\in(-\infty,+\infty)\\
&(10)(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,x\in\begin{cases}(-1,1),\alpha\le-1\\(-1,1],-1<\alpha<1\\[-1,1],\alpha>1\end{cases}
\end{aligned}
$$

17. 周期函数的$Fourier$级数

周期为2π的函数可以展开为如下形式的$Fourier$级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,n=0,1,2\cdots$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,n=1,2,3\cdots$$

周期函数为$2l$的函数可以展开为如下形式的$Fourier$级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,n=0,1,2\cdots$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,n=1,2,3\cdots$$

18. $Fourier$级数的$Dirichlet$收敛定理

对于周期为2π的周期函数$f(x)$，展开为$Fourier$级数时，有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$$

19. 奇函数、偶函数、非周期函数进行$Fourier$展开

需要将非周期函数$f(x)$周期延拓为$F(x)$：可进行奇延拓或偶延拓，其中奇延拓需保证$F(0)=0$

奇函数的$Fourier$级数只含正弦部分，又称正弦级数，以周期为2π的函数为例，有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

偶函数的$Fourier$级数只含余弦部分，又称余弦级数，以周期为2π的函数为例，有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

20. $Fourier$级数相关的数项级数

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

$$(3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$