NO - FREE - LUNCH THEOREM:

PROOF: • ASSUME $|X| = 2m$

• ALL CLASSIFICATION FUNCTIONS $f_1, \ldots, f_T : X \to \{0,1\}$ $T = 2^{2m}$

• $D_i(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{|X|} & f_i(x) = y \\ 0 & \text{ELSE.} \end{cases}$

• HABEN FÜR $h: X \to \{0,1\}$ $L_D(h) = \mathbb{E}_{z \sim D_i}[\ell(h, z)]$

$\ell(h, z) = \begin{cases} 1 & \text{FALLS } h(x) \neq y \\ 0 & \text{SONST.} \end{cases}$

$\Rightarrow L_D(h) = \sum x_i P(X = x_i) = D_i(\ell(h,z) = 1)$

$= D_i(\{(x,y) \mid h(x) \neq y\})$

$= D_i(\{(x, f_i(x)) \mid h(x) \neq f_i(x)\})$

$= \sum_{\substack{x \in X \\ f_i(x) \neq h(x)}} D_i(x, f_i(x)) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} \mathbb{1}_{f_i(x) \neq h(x)}$

• INSBS. $L_{D_i}(f_i) = 0$

• SEI NUN $A: Z^m \to (X \to \{0,1\})$

WOLLEN ZEIGEN, DASS EIN i EX. S.D. $L_{D_i}(A(S))$ GROSS IST.

IDEE: DA A NUR DIE HÄLFTE DER PUNKTE SIEHT EX. EIN h

DASS A ENTGEGENSPIELT.

D

• BETRACHTE $\mathbb{E}_{S \sim D_i^m} L_{D_i}(A(S))$

WIR ZEIGEN: $\max_i \mathbb{E}_{S \sim D_i^m} L_{D_i}(A(S)) \geq \frac{1}{4}$

- ANGEN. DAS GILT. BENUTZE FOLGENDE VAR. DER MARKOV UNGLEICHUNG.

(MARKOV) θ ZV. MIT $\mathbb{E}(\theta) = \mu$ UND $a \in (0,1)$

DANN GILT $P(\theta > a) \geq \frac{\mu - a}{1 - a}$

$P(\theta > 1-a) \geq \frac{\mu - (1-a)}{a}$

- ALSO: $D_i^m \left(L_{D_i}(A(S)) \geq \frac{1}{8} \right) \geq \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{7}$

- BLEIBT ZU ZEIGEN: $\max_i \mathbb{E}_{S \sim D_i^m} L_{D_i}(A(S)) \geq \frac{1}{4}$

- BETRACHTE DAZU ALLE MÖGLICHEN TRAININGSDATEN:

$$S_i^j = \left((x_1^j, f_i(x_1^j)), \_\_\_, (x_m^j, f_i(x_m^j)) \right)$$

WOBEI $j = 1, \_\_\_, k = 2m^m$

$i = 1, \_\_\_, T = 2^{2m}$

- SEI i FEST. $\Rightarrow$ S_i^j WERDEN ALLE MIT GLEICHER WKT GESAMPLET.

ALSO $\mathbb{E}_{S \sim D_i^m} \left[L_{D_i}(A(S)) \right] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} L_{D_i}(A(S_i^j))$

- $\max_{i \in [T]} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} L_{D_i}(A(S_i^j)) \geq \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} L_{D_i}(A(S_i^j))$

$\geq \min_{j \in [k]} \frac{1}{T} \sum^{T} L_{D_i}(A(S_i^j))$

- SCHÄTZEN JETZT $\frac{1}{T} \sum^{T} L_{D_i}(A(S_i^j))$ AB. SEI $j \in [k]$ FEST.

HABEN ALSO $S_i^j = \left((x_1^j, f_i(x_1^j)), \_\_\_, (x_m^j, f_i(x_m^j)) \right)$

SEIEN $v_1, \_\_\_, v_p \in X$ S.D. $v_r \neq x_s^j \ \forall\ j = 1, \_\_\_, m$

DA $|X| = 2m$ GILT ALSO $p \geq m$

- FÜR $h: \mathcal{X} \to \{0,1\}$ GILT

$$L_{D_i}(h) = \frac{1}{2m} \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{1}_{h(x) \neq f_i(x)}$$
$$\geq \frac{1}{2p} \sum_{r=1}^{p} \mathbb{1}_{h(v_r) \neq f_i(v_r)}$$

$h = A(S_i^j)$

- ALSO $$\frac{1}{T} \sum^{T} L_{D_i}(A(S_i^j)) \geq \frac{1}{T} \sum^{T} \frac{1}{2p} \sum_{r=1}^{p} \mathbb{1}_{h(v_r) \neq f_i(v_r)}$$

$$\geq \frac{1}{2} \min_{r \in [p]} \frac{1}{T} \sum^{T} \mathbb{1}_{h(v_r) \neq f_i(v_r)}$$

- KÖNNEN $(\mathcal{X} \to \{0,1\})$ IN $\frac{T}{2}$ PAARE AUFTEILEN,

WOBEI $(f_i, f_{i'}) \iff f_i(v_r) \neq f_{i'}(v_r)$ UND SONST GLEICH

ALSO $$\mathbb{1}_{A(S_i^j)(v_r) \neq f_i(v_r)} + \mathbb{1}_{A(S_{i'}^j)(v_r) \neq f_{i'}(v_r)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \sum^{T} \mathbb{1}_{h(v_r) \neq f_i(v_r)} = \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

- $$\max_i \mathbb{E}_{S \sim D_i^m} L_{D_i}(A(S)) \geq \min_{j \in [k]} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} L_{D_i}(A(S_i^j))$$

$$\geq \frac{1}{2} \min_{r \in [p]} \frac{1}{T} \sum^{T} \mathbb{1}_{h(v_r) \neq f_i(v_r)}$$

$$\geq \frac{1}{4}$$