**《计算方法B》实验报告（三）**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 姓 名 |  | 班 级 |  | **报告评分** |  |
| **学 号** |  | **地点/机号** | **数B320/No.68** | **指导教师** | **凌思涛** |
| **一、实验项目名称： 数据插值** | | | | | |
| **二、实验目的：掌握Lagrange插值以及多项式插值的震荡问题** | | | | | |
| 1. **实验内容： P121练习 6.7**   **考虑区间[-1,1]的一个等距划分，分点为**  **IMG_258**  **则拉格朗日插值多项式为**  **IMG_259**  **其中的IMG_260是n次拉格朗日插值基函数。**  **要求：（1）选择不断增大的分点数目n=2,3….，画出原函数f(x)及插值多项式函数在[-1，1]上的图像，比较并分析实验结果。（2）选择其他的函数，例如定义在区间[-5，5]上的函数重复上述的实验看其结果如何。（3）区间[a,b]上切比雪夫点的定义为**  IMG_263  **以为插值节点构造上述各函数的拉格朗日插值多项式，比较其结果。。** | | | | | |
| **四、程序设计**      **%% LagrangeInterpolationExperiment.m**  **% 演示拉格朗日插值方法对两个函数进行插值，并比较等距节点与切比雪夫节点。**  **% 每个图窗口使用较大的画布，避免文字与图重叠；并在底部(或顶部)放置公共 legend。**  **clear; clc; close all;**  **%% 实验一：函数 f(x)=1/(1+25\*x^2) 在 [-1,1] 上**  **x\_eval1 = linspace(-1, 1, 400);**  **n\_values = [2, 4, 8, 16, 32];**  **%% (a) 等距节点插值**  **figure('Position',[100, 50, 1200, 600]); % 调整画布大小**  **t = tiledlayout(2, ceil(length(n\_values)/2), 'TileSpacing','loose', 'Padding','compact');**  **for i = 1:length(n\_values)**  **n = n\_values(i);**  **nodes\_eq = equidistant\_nodes(-1, 1, n);**  **f\_values\_eq = runge\_function(nodes\_eq);**  **y\_interp\_eq = lagrange\_interp(x\_eval1, nodes\_eq, f\_values\_eq);**    **ax = nexttile;**  **plot(x\_eval1, runge\_function(x\_eval1), 'b-', 'LineWidth', 1.5); hold on;**  **plot(x\_eval1, y\_interp\_eq, 'g-', 'LineWidth', 1.5);**  **plot(nodes\_eq, f\_values\_eq, 'ro', 'MarkerFaceColor', 'r');**  **title(sprintf('n = %d (等距)', n), 'FontSize', 12);**  **set(ax,'FontSize',12); % 坐标轴字体**  **hold off;**  **end**  **sgtitle('函数 f(x)=1/(1+25x^2) 在 [-1,1] 上的等距节点插值','FontSize',14,'FontWeight','bold');**  **% 在底部添加公共 legend**  **dummyAx = axes('Position',[0 0 1 1],'Visible','off');**  **hold(dummyAx, 'on');**  **h1 = plot(dummyAx, nan, nan, 'b-', 'LineWidth', 1.5);**  **h2 = plot(dummyAx, nan, nan, 'g-', 'LineWidth', 1.5);**  **h3 = plot(dummyAx, nan, nan, 'ro', 'MarkerFaceColor','r');**  **hold(dummyAx, 'off');**  **lg = legend(dummyAx,[h1,h2,h3], {'原函数','插值多项式','插值节点'}, ...**  **'Orientation','horizontal','FontSize',12, 'Location','southoutside');**  **% 若对自动摆放不满意，也可改为:**  **% lg.Position = [0.35 0.01 0.3 0.05]; % 手动设定**  **%% (b) 切比雪夫节点插值**  **figure('Position',[100, 50, 1200, 600]); % 调整画布大小**  **t = tiledlayout(2, ceil(length(n\_values)/2), 'TileSpacing','loose', 'Padding','compact');**  **for i = 1:length(n\_values)**  **n = n\_values(i);**  **nodes\_cheb = chebyshev\_nodes(-1, 1, n);**  **f\_values\_cheb = runge\_function(nodes\_cheb);**  **y\_interp\_cheb = lagrange\_interp(x\_eval1, nodes\_cheb, f\_values\_cheb);**    **ax = nexttile;**  **plot(x\_eval1, runge\_function(x\_eval1), 'b-', 'LineWidth', 1.5); hold on;**  **plot(x\_eval1, y\_interp\_cheb, 'g-', 'LineWidth', 1.5);**  **plot(nodes\_cheb, f\_values\_cheb, 'ro', 'MarkerFaceColor', 'r');**  **title(sprintf('n = %d (切比雪夫)', n), 'FontSize', 12);**  **set(ax,'FontSize',12);**  **hold off;**  **end**  **sgtitle('函数 f(x)=1/(1+25x^2) 在 [-1,1] 上的切比雪夫节点插值','FontSize',14,'FontWeight','bold');**  **dummyAx = axes('Position',[0 0 1 1],'Visible','off');**  **hold(dummyAx, 'on');**  **h1 = plot(dummyAx, nan, nan, 'b-', 'LineWidth', 1.5);**  **h2 = plot(dummyAx, nan, nan, 'g-', 'LineWidth', 1.5);**  **h3 = plot(dummyAx, nan, nan, 'ro', 'MarkerFaceColor','r');**  **hold(dummyAx, 'off');**  **lg = legend(dummyAx,[h1,h2,h3], {'原函数','插值多项式','插值节点'}, ...**  **'Orientation','horizontal','FontSize',12, 'Location','southoutside');**  **%% 实验二：函数 f(x)=1/(1+x^2) 在 [-5,5] 上**  **x\_eval2 = linspace(-5, 5, 400);**  **n\_values2 = [4, 8, 16, 32];**  **%% (a) 等距节点插值**  **figure('Position',[200, 50, 1200, 600]); % 调整画布大小**  **t = tiledlayout(2, ceil(length(n\_values2)/2), 'TileSpacing','loose', 'Padding','compact');**  **for i = 1:length(n\_values2)**  **n = n\_values2(i);**  **nodes\_eq2 = equidistant\_nodes(-5, 5, n);**  **f\_values\_eq2 = other\_function(nodes\_eq2);**  **y\_interp\_eq2 = lagrange\_interp(x\_eval2, nodes\_eq2, f\_values\_eq2);**    **ax = nexttile;**  **plot(x\_eval2, other\_function(x\_eval2), 'b-', 'LineWidth', 1.5); hold on;**  **plot(x\_eval2, y\_interp\_eq2, 'g-', 'LineWidth', 1.5);**  **plot(nodes\_eq2, f\_values\_eq2, 'ro', 'MarkerFaceColor', 'r');**  **title(sprintf('n = %d (等距)', n), 'FontSize', 12);**  **set(ax,'FontSize',12);**  **hold off;**  **end**  **sgtitle('函数 f(x)=1/(1+x^2) 在 [-5,5] 上的等距节点插值','FontSize',14,'FontWeight','bold');**  **dummyAx = axes('Position',[0 0 1 1],'Visible','off');**  **hold(dummyAx, 'on');**  **h1 = plot(dummyAx, nan, nan, 'b-', 'LineWidth', 1.5);**  **h2 = plot(dummyAx, nan, nan, 'g-', 'LineWidth', 1.5);**  **h3 = plot(dummyAx, nan, nan, 'ro', 'MarkerFaceColor','r');**  **hold(dummyAx, 'off');**  **lg = legend(dummyAx,[h1,h2,h3], {'原函数','插值多项式','插值节点'}, ...**  **'Orientation','horizontal','FontSize',12, 'Location','southoutside');**  **%% (b) 切比雪夫节点插值**  **figure('Position',[200, 50, 1200, 600]); % 调整画布大小**  **t = tiledlayout(2, ceil(length(n\_values2)/2), 'TileSpacing','loose', 'Padding','compact');**  **for i = 1:length(n\_values2)**  **n = n\_values2(i);**  **nodes\_cheb2 = chebyshev\_nodes(-5, 5, n);**  **f\_values\_cheb2 = other\_function(nodes\_cheb2);**  **y\_interp\_cheb2 = lagrange\_interp(x\_eval2, nodes\_cheb2, f\_values\_cheb2);**    **ax = nexttile;**  **plot(x\_eval2, other\_function(x\_eval2), 'b-', 'LineWidth', 1.5); hold on;**  **plot(x\_eval2, y\_interp\_cheb2, 'g-', 'LineWidth', 1.5);**  **plot(nodes\_cheb2, f\_values\_cheb2, 'ro', 'MarkerFaceColor', 'r');**  **title(sprintf('n = %d (切比雪夫)', n), 'FontSize', 12);**  **set(ax,'FontSize',12);**  **hold off;**  **end**  **sgtitle('函数 f(x)=1/(1+x^2) 在 [-5,5] 上的切比雪夫节点插值','FontSize',14,'FontWeight','bold');**  **dummyAx = axes('Position',[0 0 1 1],'Visible','off');**  **hold(dummyAx, 'on');**  **h1 = plot(dummyAx, nan, nan, 'b-', 'LineWidth', 1.5);**  **h2 = plot(dummyAx, nan, nan, 'g-', 'LineWidth', 1.5);**  **h3 = plot(dummyAx, nan, nan, 'ro', 'MarkerFaceColor','r');**  **hold(dummyAx, 'off');**  **lg = legend(dummyAx,[h1,h2,h3], {'原函数','插值多项式','插值节点'}, ...**  **'Orientation','horizontal','FontSize',12, 'Location','southoutside');**  **%% --------- 以下为局部函数 ---------**  **function L = lagrange\_interp\_scalar(x, nodes, f\_values)**  **% 计算单点 x 处的拉格朗日插值值**  **N = length(nodes);**  **L = 0;**  **for j = 1:N**  **basis = 1;**  **for m = 1:N**  **if m ~= j**  **basis = basis \* (x - nodes(m)) / (nodes(j) - nodes(m));**  **end**  **end**  **L = L + f\_values(j) \* basis;**  **end**  **end**  **function y = lagrange\_interp(x\_eval, nodes, f\_values)**  **% 对 x\_eval 数组中每个元素计算拉格朗日插值值**  **y = zeros(size(x\_eval));**  **for k = 1:length(x\_eval)**  **y(k) = lagrange\_interp\_scalar(x\_eval(k), nodes, f\_values);**  **end**  **end**  **function nodes = equidistant\_nodes(a, b, n)**  **% 在区间 [a,b] 内生成等距节点，共 n+1 个**  **nodes = linspace(a, b, n+1);**  **end**  **function nodes = chebyshev\_nodes(a, b, n)**  **% 在区间 [a,b] 内生成切比雪夫节点，共 n+1 个**  **k = 1:(n+1);**  **nodes = (a+b)/2 + (b-a)/2 \* cos((2\*k - 1)\*pi/(2\*(n+1)));**  **end**  **function y = runge\_function(x)**  **% 函数: f(x)=1/(1+25\*x^2)**  **y = 1 ./ (1 + 25\*x.^2);**  **end**  **function y = other\_function(x)**  **% 函数: f(x)=1/(1+x^2)**  **y = 1 ./ (1 + x.^2);**  **end** | | | | | |
| **五、实验结果（包含图表）** | | | | | |
| **六、实验结果分析（实验总结、心得体会）**  **通过本次拉格朗日插值实验，明显观察到：在等距节点下，函数在区间两端出现严重振荡，插值效果随着节点增多反而变差，验证了“Runge 现象”；而采用切比雪夫节点能有效缓解这一问题，使插值曲线更接近原函数。在区间较大时，如 [−5,5][-5,5][−5,5]，等距插值同样存在较大误差，说明节点分布对插值精度影响显著。此次实验不仅加深了我对拉格朗日插值的理解，也让我认识到合理选择节点在实际应用中的重要性，切比雪夫节点在提高插值稳定性方面具有明显优势。** | | | | | |

**注：如果报告超过1页，需双面打印。**