דף שער

מבני נתונים 1
234218

תרגיל יבש

1

מספר

הוגש ע"י:

חגי קריטי	301781613
שם	מספר זהות
תם נלסון	204805824
שם	מספר זהות

ציון:

לפני בונוס הדפסה:

כולל בונוס הדפסה:

נא להחזיר לתא מס': 13

<u>שאלה 1</u>

סעיף א

1. הוכחה: $\left|(n+1)^k - n^k\right| = \left|\Sigma_{i=0}^{k}\binom{k}{i}n^i - n^k\right| = \left|\Sigma_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}n^i\right|$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\Sigma_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}n^i\right|}{n^k} = 0$$

$$=> (n+1)^k \sim n^k$$

2. הפרכה: $f(x)=x$ נראה כי $|n^2-n| \neq o(n)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|n^2-n|}{n} = \infty \neq 0$$

3. הוכחה: נראה כי $|f+h-g-l| = o(g+l)$

מאי-שיוויון המשולש: $0 \le \frac{|f+h-g-l|}{|g+h|} \le \frac{|f-g|+|h-l|}{|g+l|}$

מתקיים לפי הנתון: $\lim_{n\to\infty}\frac{|h-l|}{|l|} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{|f-g|}{|g|} = 0$

בנוסף: $\frac{|f-g|+|h-l|}{|g+l|} = \frac{|f-g|}{|g+l|} + \frac{|h-l|}{|g+l|} \le \frac{|f-g|}{|g|} + \frac{|h-l|}{|l|}$

ולכן, ממשפט הסנדוויץ: $\lim_{n\to\infty}\frac{|f+h-g-l|}{|g+l|} = 0$

סעיף ב

1. הפרכה: $f(n)=g(n)=\log n$ נראה כי אין k,n_0 כך ש: $\forall\, n>n_0 : \ \log n \le k\cdot\log\log n$

נעלה באקספוננט: $n \le e^k \log n$

אך אין n_0,k כך שהאי שיוויון הנל יתקיים כיוון ש: $\log n = o(n)$

2. הפרכה: נבחר $f(n)=n^5\,, g(n)=n^3,\ h(n)=n^2$ מתקיים כי: $n^5 = O((n^3)^3) \quad ; \quad n^3 =$ $O((n^2)^2)$ אך: $(n^2)^2 = o(n^5)$

3. הוכחה: מהנתון מתקיים כי $\exists n_0 | \forall n > n_0 : f(n) \ge n$ כיוון ש f מונוטונית עולה: $f\big(f(n)\big) \ge f(n)$

ולכן קיים c קבוע כך ש: $f\big(f(n)\big) > cf(n)$ כלומר: $f(n) = O(f(f(n)))$

סעיף ג

1. הפרכה: נבחר $f(n)=\log n$; $g(n)=1$; מתקיים כי עבור $k=1$ $\log n = O(1\cdot\log(n))$

אך: $2^{\log n} \neq O\big(2\cdot(\log n)^k\big)$, נניח בשלילה שקיים c המקיים את זה : $n \le c\cdot(\log n)^k$ אך אין קבוע כנ"ל משום ש: $\log n = o\left(n^{\frac{1}{k}}\right)$

2. הפרכה: נבחר פונקציות $g(n)=\frac{1}{n}$; $f(n)=1$.

נשים לב כי $2^{f(n)} = O(2^{g(n)}\log n)$. אבל, $\lim\frac{\left(\frac{1}{n}(\log n)^k\right)}{1} = 0$ כלומר, $\frac{1}{n}(\log n)^k = o(1)$ ולכן לא ייתכן כי $f(n) = O(g(n)(\log n)^k)$.

<u>שאלה 2</u>

סדר הפונקציות:

$$f_{12} \preccurlyeq f_{13} \preccurlyeq f_1 \preccurlyeq f_{10} \preccurlyeq f_6 \preccurlyeq f_4 \preccurlyeq f_{14} \preccurlyeq f_8 \preccurlyeq f_9 \preccurlyeq f_{15} \preccurlyeq f_3 \preccurlyeq f_2 \preccurlyeq f_5 \preccurlyeq f_7 \preccurlyeq f_{11}$$

הוכחות:

1. $f_{12} = (\log(n) - \lfloor \log n \rfloor)^n \preccurlyeq f_{13} = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$

נראה כי $f_{12} = o(1)$ ובהמשך נראה כי $f_{13} = \theta(1)$:

$$0 < \frac{(\log(n) - \lfloor \log n \rfloor)^n}{1} < a^n \to 0$$

כאשר $a < 1$ (a הוא ההפרש הכי גדול בין $\log n$ ל$\lfloor \log n \rfloor$)

$$f_{13} = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = \theta(f_1 = 1)$$

$$1 \le \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \le \Sigma_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$$

2. $f_1 = 1 \preccurlyeq f_{10} = \log(n^{17} - n^{16})$

$$\log(n^{17} - n^{16}) = \log\big(n^{16}(n-1)\big) = 16 \cdot \log n + \log(n-1) = \theta(\log n)$$

וידוע כי $1 = O(\log n)$

3. $f_{10} = \log(n^{17} - n^{16}) = \theta(f_6 = n^{\frac{\log\log n}{\log n}})$

נסמן: $\log n = m$ ונציב בf_6

$$n^{\frac{\log\log n}{\log n}} = (2^m)^{\frac{\log m}{m}} = 2^{\log m} = m = \log n$$

ומהוכחה קודמת: $f_{10} = \theta(\log n) = \theta(f_6)$

4. $f_6 = n^{\frac{\log\log n}{\log n}} \preccurlyeq f_4 = \log(n^n \cdot n!)$

$$\log(n^n \cdot n!) = \log(n^n) + \log(n!) = n \cdot \log n + \log(n!) = \theta(n \cdot \log n)$$

מהוכחות קודמות: $f_6 = \theta(\log n)$ וכידוע: $\log n = O(n \log n)$

5. $f_4 = \log(n^n \cdot n!) \preccurlyeq f_{14} = (n+1)^3 - n^3$

$$(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 = \theta(n^2)$$

וכידוע, מסעיפים קודמים: $f_4 = \theta(nlog\ n) = O(n^2) = O(f_{14})$

6. $f_{14} = (n+1)^3 - n^3 \preccurlyeq f_8 = \Sigma_{i=1}^{n} \Sigma_{j=1}^{n-i+1} j - 1$

$$\Sigma_{j=1}^{n-i+1} j - 1 = \Sigma_{j=0}^{n-i} j = \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}$$

$$\Sigma_{i=1}^{n} \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} = \Sigma_{k=0}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} = \Sigma_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \Sigma_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2} - \Sigma_{k=1}^{n} \frac{k}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6 \cdot 2} - \frac{n(n+1)}{2 \cdot 2} = \theta(n^3)$$

וכידוע: $f_{14} = \theta(n^2) = O(n^3) = O(f_8)$

7. $f_8 = \Sigma_{i=1}^{n}\Sigma_{j=1}^{n-i+1} j - 1 \preccurlyeq f_9 = (\log\log n)^{\log n}$

נציב: $m = \log n$ בf_9 : $(\log\log n)^{\log n} = (\log m)^m$

נראה כי $f_8 = o(f_9)$ כלומר כי $\lim_{n\to\infty}\frac{f_8}{f_9} = 0$, נראה את הדבר על n^3 כיוון ש$f_8 = \theta(n^3)$

נשתמש בהצבה: $m = \log n$:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2^{3m}}{(\log m)^m} = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{8}{\log m}\right)^m = 0$$

8. $f_9 = (\log\log n)^{\log n} \preccurlyeq f_{15} = \Sigma_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i} + \Sigma_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}$

$$\Sigma_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i} = \Sigma_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i} = 2^{n-1} - 1$$
$$\Sigma_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i} = \ 2^{n-1} - 1$$

ולכן מתקיים: $f_{15} = \theta(2^n)$ נראה כי $f_9 = o(f_{15}) = o(2^n)$

נשתמש בהצבה $m = \log n$: $\lim_{m\to\infty}\frac{(\log m)^m}{2^{2^m}} = \lim_{m\to\infty}\frac{\left(2^{\log\log m}\right)^m}{2^{2^m}} = \lim_{m\to\infty} 2^{m\cdot\log\log m - 2^m} = 0$

9. $f_{15} = \Sigma_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i} + \Sigma_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i} \preccurlyeq f_3 = \Sigma_{i=1}^{n} 2^i$

f_3 הוא הערך העשרוני של מספר עם n ביטים, כאשר כולם דולקים פרט לlsb, לכן:

$$\Sigma_{i=1}^{n} 2^i = 2^n - 2$$

כלומר: $f_3 = \theta(2^n) = \theta(f_{15})$

10. $f_3 = \Sigma_{i=1}^{n} 2^i \preccurlyeq f_2 = \Sigma_{i=0}^{n}\binom{n}{i} i$

מתקיים כי: $f_2 = \Sigma_{i=0}^{n}\binom{n}{i} i = n2^n$. נראה כי $f_3 = o(f_2)$: (כאשר $f_3 = \theta(2^n)$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

11. $f_2 = \Sigma_{i=0}^{n}\binom{n}{i} i \preccurlyeq f_5 = \frac{27^n + n^2 + 1}{9^n + 2^n + 2}$

$$\theta(3^n) = \frac{27^n}{3\cdot 9^n} \le \frac{27^n + n^2 + 1}{9^n + 2^n + 2} \le \frac{3\cdot 27^n}{9^n} = \theta(3^n)$$

ולכן $f_5 = \theta(3^n)$ וכיוון ש $f_2 = \theta(2^n)$: מתקיים $f_2 = O(f_5)$

12. $f_5 = \frac{27^n + n^2 + 1}{9^n + 2^n + 2} \preccurlyeq f_7 = \Pi_{i=2}^{n}\log i$

$$\Pi_{i=2}^{n}\log i \ge (\log 5)^{n-4} = \theta((\log 5)^n)$$

נראה כי $3^n = o((\log 5)^n)$: כיוון שמתקיים כי: $3 < \log 5$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{(\log 5)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{\log 5}\right)^n = 0$$

מתקיים כי $f_5 = \theta(3^n)$ ולכן $f_5 = O(f_7)$

13. $f_7 = \Pi_{i=2}^{n}\log i \preccurlyeq f_{11} = 9^{10^n}$

$$f_7 = \Pi_{i=2}^{n} \log i < (\log n)^n < n^n$$

נראה כי $n^n = o(9^{10^n})$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{9^{10^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^{n \log_9 n}}{9^{10^n}} = \lim_{n\to\infty} 9^{n\cdot \log_9 n - 10^n} = 0$$

<u>שאלה 3</u>

סעיף א

בסיס האינדוקציה: נבדוק עבור $n = 1$: $T(1) = 1 \le c \cdot 1$ לכל $c \ge 1$.

נרצה להוכיח כי קיימים n_0, c כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $T(n) < c \cdot n$. נתחיל מצעד האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור $k = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ ונוכיח עבור n תוך שימוש בנוסחאת נסיגה:

$$T(n) = T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) + 1 = T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) + 1 = T\left(\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}{2}\right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil\frac{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}{2}\right\rceil\right) + T\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) + 2 =$$

$$= \cdots \le \log n + 1 + \Sigma_{k=1}^{\log n} T\left(\left\lceil\frac{n}{2^k}\right\rceil\right)$$

מההנחה של האינקציה, תוך שימוש בסימון: $n = 2^j$:

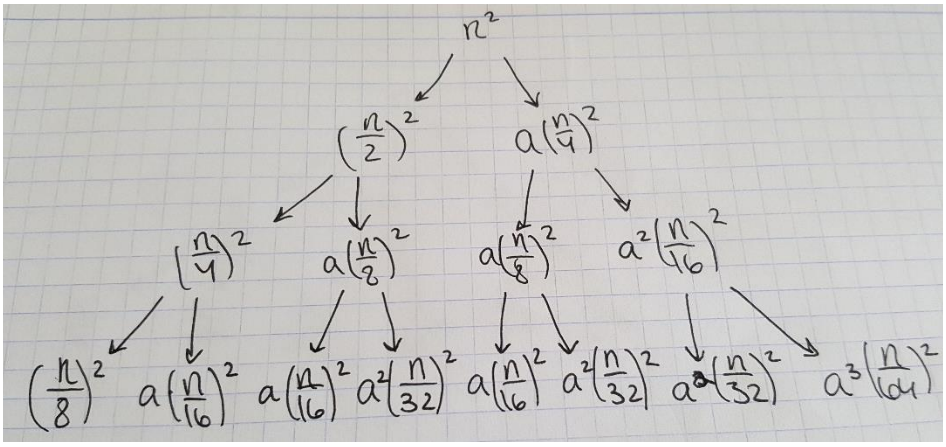
$$\le j + 1 + \Sigma_{k=1}^{j} c \cdot \left\lceil\frac{n}{2^k}\right\rceil = j + 1 + \Sigma_{k=1}^{j} c \cdot \left\lceil 2^{j-k}\right\rceil = j + 1 + \Sigma_{k=1}^{j} c \cdot 2^{j-k} = j + 1 + \Sigma_{l=0}^{i-1} c \cdot 2^{l-1}$$

$$= j + 1 + c \cdot \frac{2^{i-1} - 1}{2 - 1} = j + 1 + c \cdot 2^{i-1} - c = \log n + 1 + \frac{c}{2} n - c \le cn$$

נכון משום ש-$\log n + 1 \le c \cdot \frac{n}{2}$ החל ממקום מסויים.

נשים לב כי עבור $n_0 = 1, c = 2$ גם הבסיס וגם ההנחה של הצעד מתקיימים.

סעיף ב



כפי שניתן לראות בציור: נקבל מבנה של משולש פסקל, ולכן סכום השורה ה-j בעץ הינו: $\Sigma_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{a^i}{2^{j+1}} n^2$ ולכן אם נסכום על כל השורות בעץ (ישנן $\log n$ שורות סה"כ), נקבל את הביטוי: $\Sigma_{j=0}^{\log n} \Sigma_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{a^i}{2^{j+1}} n^2$

$$\Sigma_{j=0}^{\log n}\Sigma_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\frac{a^i}{2^{j+1}}n^2 = \mathrm{n}^2\Sigma_{j=0}^{\log n}\frac{1}{2^j}\Sigma_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\left(\frac{a}{2}\right)^i$$

מנוסחאת הבינום:

$$\mathrm{n}^2\Sigma_{j=0}^{\log n}\frac{1}{2^j}\Sigma_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\left(\frac{a}{2}\right)^i = n^2\Sigma_{j=0}^{\log n}\frac{1}{2^j}\left(\frac{a}{2}+1\right)^j = n^2\Sigma_{j=0}^{\log n}\frac{(a+2)^j}{2^{2j}} = n^2\Sigma_{j=0}^{\log n}\left(\frac{a+2}{4}\right)^j$$

מסכום סדרה הנדסית (נשים לב כי עבור $a = 2$ הפיתוח אינו מוגדר היטב ולכן נבדוק מקרה זה בנפרד)

$$n^2\Sigma_{j=0}^{\log n}\left(\frac{a+2}{4}\right)^j = n^2\frac{\left(\frac{a+2}{4}\right)^{\log n}-1}{\frac{a+2}{4}-1} = \frac{(a+2)^{\log n}-n^2}{\frac{a-2}{4}} = \frac{n^{\log_2(a+2)}-n^2}{\frac{a-2}{4}}$$

נשים לב כי, עבור $\log_2(a+2) > 2$ נקבל כי $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{\log_2(a+2)}-n^2}{\frac{a-2}{4}}}{n^2} = \infty$ ולכן הוא $\omega(n^2)$.

$$\log_2(a+2) > 2 => a > 2$$

עבור $a = 2$ נקבל: $n^2\Sigma_{j=0}^{\log n}\left(\frac{a+2}{4}\right)^j = n^2\Sigma_{j=0}^{\log n}1 = n^2\log n = \omega(n^2)$

לכן ה a המינימלי הוא 2 וערכה האסימפטוטי של $T(n)$ הוא $n^2\log n$.

סעיף ג

1. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 + n(\log n)^2 = 16T\left(\frac{n}{4}\right) + 4\left(\frac{n}{2}\right)^3 + 4\frac{n}{2}\left(\log\frac{n}{2}\right)^2 + n^3 + n(\log n)^2 \le$

$$\le \cdots \le \Sigma_{i=1}^{\log n}4^i\left(\left(\frac{n}{2^i}\right)^3 + \left(\frac{n}{2^i}\right)\left(\log\frac{n}{2^i}\right)^2\right) = \Sigma_{i=1}^{\log n}\frac{n^3}{2^i} + \Sigma_{i=0}^{\log n}2^i(\log n - i)^2$$
$$\le 2n^3 + \Sigma_{i=0}^{\log n}2^i n^2 \le 3n^3 = O(n^3)$$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 + n(\log n)^2 \ge n^3 = \Omega(n^3)$$

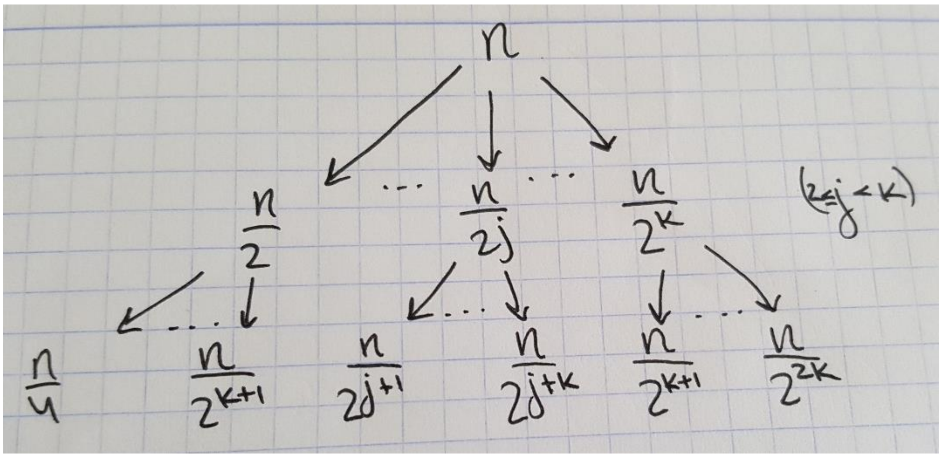
סה"כ: $T(n) = \Theta(n^3)$

2. נפתור באמצעות שיטת המאסטר: $a = 2, b = 2$

נשים לב כי עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$ מתקיים כי: $\frac{2}{\log n} \le 1 \le n^{1-\varepsilon}$ החל ממקום מסויים ולכן $\frac{2}{\log n} = O(n^{\log_2 2-\varepsilon})$.

ולכן לפי המאסטר: $T(n) = \Theta(n)$

3.



נשים לב כי סכום כל שורה הוא לכל היותר n: עבור צומת בעץ שערכו $\frac{n}{2^j}$ סכום ערכי בניו יהיו:
$\Sigma_{i=1}^{k} \frac{n}{2^{j+i}} \le \frac{n}{2^j}$, ולכן סכום כל שורה קטן מסכום השורה הקודמת.

כיוון שעומק העץ הוא $\log n$ ניתן להגיד כי $T(n) \le n \cdot \log n$

גובה העלה הראשון הוא $\log_{2^k} n$, ובכל שורה האיבר הקטן ביותר הוא $\frac{n}{2^{jk}}$ (שורה מספר j) ולכן:

$$T(n) \ge \Sigma_{\mathrm{j}=0}^{\log_{2^{\mathrm{k}}} n} \frac{\mathrm{n}}{2^{\mathrm{jk}}} \ge \mathrm{n} \cdot \log_{2^{\mathrm{k}}} n$$

לכן בסה"כ מתקיים: $T(n) = \Theta(nlogn)$

4. $T(n) = 16n^4 T\left(\sqrt{n}\right) + 2n^8 (\log n)^4$

נשתמש בהצבה $m = \log n$ ונקבל:

$$T(2^m) = 16 \cdot 2^{4m} T\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + 2 \cdot 2^{8m} \cdot m^4$$

נסמן $S(m) = T(2^m)$ ונקבל:

$$S(m) = 16 \cdot 2^{4m} \cdot S\left(\frac{m}{2}\right) + 2 \cdot 2^{8m} \cdot m^4$$

נחלק ב 2^{8m}:

$$\frac{S(m)}{2^{8m}} = 16 \cdot \frac{S\left(\frac{m}{2}\right)}{2^{4m}} + 2m^4$$

נסמן $U(m) = \frac{S(m)}{2^{8m}}$ ונקבל:

$$U(m) = 16U\left(\frac{m}{2}\right) + 2m^4$$

משיטת המאסטר, עם $a = 16; b = 2$ נשים לב $2m^4 = \Theta\left(m^{\log_2 16}\right) = \Theta(m^4)$ ולכן:

$$U(m) = \Theta(m^4 \log m)$$

$$S(m) = \Theta(2^{8m} m^4 \log m)$$

$$T(n) = \Theta(n^8 (\log n)^4 \log\log n)$$

<u>שאלה 4</u>

$\underline{Init(n)}$: יבוצע ע"י איתחול מערך ב$O(1)$ כפי שנלמד בהרצאה. כאשר נאתחל בצורה זו כמה מערכים: מערך של $n\times n$ עבור שמירת כל ערכי $a_{i,j}$, מערך של n עבור שמירת מספר האפסים בכל שורה במערך הגדול ($zero\_array$). בנוסף נאתחל שני משתנים נוספים, אחד שסופר את מספר השורות שיש בהן 0 אחדים (נסמן אותו one_count) ואחד שסופר את מספר השורות שיש בהם 0 אפסים (נסמן אותו ב $zero\_count$).

$\underline{Not(i,j)}$: מחליפים את האיבר ה(i,j) במערך הדו מימדי בערך ההפוך לו, ומעדכנים במערך של מספר האפסים בשורה המתאימה ($zero\_array(j)$). אם השורה הגיעה ל0 אפסים ($zero\_array(j) = 0$), אז מעלים את המשתנה $zero\_count$ ב1, אם השורה הייתה ב0 אפסים ($zero\_array(j) = 0$) ועכשיו יש בה אפס 1 ($zero\_array(j) = 1$) מורידים את המשתנה $zero\_count$ ב1. באופן דומה מעדכנים את one_count.

$\underline{DNF()}$: מחזיר 1 אם $zero\_count > 0$ אחרת מחזיר 0. רק שורה שבה יש 0 אפסים תקיים $\cap_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$, ולכן רק אם יש לפחות שורה אחת כזו יתקיים $\cup_{i=1}^{n}\cap_{j=0}^{n} a_{i,j} = 1$.

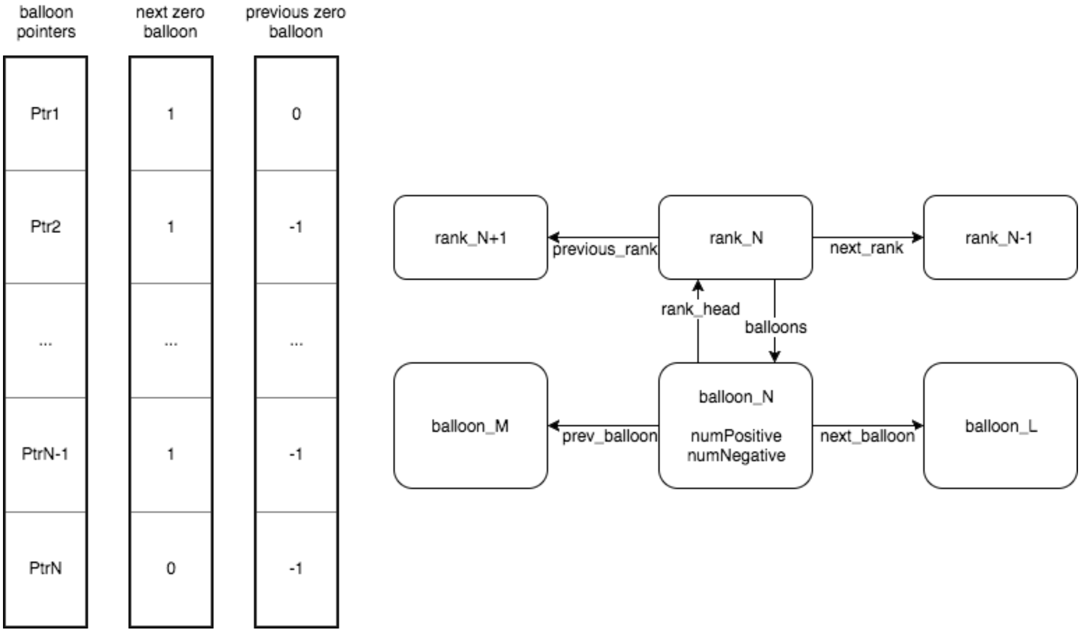
$\underline{CNF()}$: מחזיר 0 אם $one\_count > 0$ אחרת מחזיר 1. רק שורה שבה יש 0 אחדים תקיים $\cup_{j=0}^{n} a_{i,j} = 0$ ולכן רק אם יש לפחות שורה אחת כזו יתקיים $\cap_{i=0}^{n}\cup_{j=0}^{n} a_{i,j} = 0$.

שאלה 5

לכל בלון יש רשומה עם מספר הבלון, מספר הביקורות החיוביות והשליליות שהתקבלו עבורו עד כה, ומצביע *rank_head*. רשומות אלה מסודרות ברשימה של רשימות מקושרות באופן הבא: לכל *rank* שכרגע יש במערכת יש רשימה של הבלונים שיש להם את ה*rank* הנ"ל. רשימות אלה מסודרות לפי סדר יורד ברשימה המקושרת החיצונית, כאשר הרשומה הראשונה בכל תת רשימה מתפקדת כ-*header* לרשימה עם ה-*rank* ועליה מצביעים כל מצביעי *rank_head* של הרשומות תחתיה. בנוסף לרשומה זו ישנם מצביעי *next* ו-*previous*. כל הרשימות המקושרות הינן דו כיווניות.

על מנת לאפשר גישה לאמצע הרשימה ב-*O*(1) קיים מערך באורך *n* כאשר המקום ה-*i* מכיל מצביע לרשומה של הבלון ה-*i*.

המערכים *next zero balloon* ו-*previous zero ballon* משמשים לאיתחול הרשימות המקושרות על מנת שנוכל לבצע איתחול של המבנה ב*O(1)*.



$\underline{Init()}$: יאתחל את המבנים הבאים (כל מערך מאותחל ב$O(1)$ כפי שנלמד בהרצאה):

- מערך next zero balloon (ייקרא next בהמשך) באורך n מאותחל ל-1. התא האחרון יאותחל ל-0.
- מערך previous zero balloon (ייקרא previous בהמשך) באורך n מאותחל ל-1-. התא הראשון יאותחל ל-0.
- מערך pointers באורך n מאותחל ל-NULL.
- רשימה מקושרת דו כיוונית בעלת איבר אחד (rank_0)
- מצביעי HEAD ו-TAIL לרשימה המקושרת, מצביעים ל-rank_0.
- מצביע rank_0_head לrank_0 .

$\underline{Positve(i)}$: מסתכלים במערך pointers במקום ה-i. אם המצביע הוא NULL, הבלון עוד לא קיבל ביקורות ולכן דירוגו 0. במקרה זה יוצרים רשומה חדשה עם הערכים הבאים: ,rank_head = rank_0_head numPositive = 0, numNegative = 0, balloonNumber = i. פוינטר לרשומה שומרים ב pointers[i]. מעדכנים את מערכי next ו-previous באופן הבא: שולפים את next[i] (נסמנו c_next) ואת previous[i] (נסמנו c_previous) והעדכון נעשה ע"י next[i+c_previous] += c_next; previous[i+c_next] += c_previous. אם c_next =0 או c_previous=0 אז העדכון הוא next[i+c_previous]=0 או previous[i+c_next]=0 בהתאמה.

כעת שולפים את הרשומה לפי המצביע ב pointers[i]. מקדמים את numPositive, ומזיזים את הרשומה לרשומת rank אחרת באופן הבא: שולפים את rank_head->previous. אם ה-rank שלו שווה ל-rank החדש של הרשומה, מכניסים את הרשומה לרשימה זו במקום הראשון, ולאחר מכן מעדכנים את rank_head בהתאם. אם ה-rank גדול יותר מה-rank החדש של הרשומה (או שאין רשומת rank קודמת), יוצרים רשימת rank חדשה (רשומת rank header חדשה) ומכניסים אותה בין שתי הרשימות. לאחר מכן מכניסים את רשומת הבלון הנוכחית לראש הרשימה הזו ומעדכנים את rank_head בהתאם. אם הרשימה שממנה יצא הבלון התרוקנה, מוציאים אותה מהרשימה החיצונית והורסים אותה – אלא אם כן זוהי הרשימה של rank 0.

$\underline{Negative(i)}$: ממומש באופן דומה ל-Positive, כאשר במקום לעדכן את numPositive מעדכנים את numNegative וכיוון ההתקדמות ברשימת ה-ranks הוא לכיוון השני (previous במקום next).

$\underline{NumReviews(i)}$: שולפים מצביע לרשומת הבלון מ-pointers[i]. אם המצביע הא NULL הבלון לא קיבל עוד ביקורות, ולכן מחזירים 0. אחרת מחזירים את numPositive + numNegative מרשומת הבלון.

$\underline{NumPositive(i)}$: שולפים מצביע לרשומת הבלון מ-pointers[i]. אם המצביע הוא NULL הבלון לא קיבל עוד ביקורות, ולכן מחזירים 0. אחרת מחזירים את numPositive.

$\underline{NumNegative(i)}$: שולפים מצביע לרשומת הבלון מ-pointers[i]. אם המצביע הוא NULL הבלון לא קיבל עוד ביקורות, ולכן מחזירים 0. אחרת מחזירים את numNegative.

$\underline{Rank(i)}$: שולפים מצביע לרשומת הבלון מ-pointers[i]. אם המצביע הוא NULL הבלון לא קיבל עוד ביקורות, ולכן מחזירים 0. אחרת מחזירים את numPositive - numNegative.

$\underline{Popular(m)}$: מתחילים מ-HEAD של הרשימה החיצונית ועוברים על כל תתי הרשימות לפי הסדר, כאשר כשמסיימים תת רשימה אחת עוברים לרשימה הבאה לפי מצביע rank_head->next. עוצרים כאשר הודפסו m רשומות של בלונים. אם תת הרשימה הוא עבור דרגה 0, אחרי שעוברים על הרשומות שלה עוברים על הבלונים שלא קיבלו עוד ביקורות באופן הבא: מסתכלים על האיבר הראשון, אם הוא לא מאותחל (pointers[1]=0) אז מדפיסים אותו, וממשיכים למקום ה1+next[1] וכך ממשיכים על כל המערך עד שnext[j]=0. ולאחר מכן, חוזרים למקום שהיינו ברשימה החיצונית – לראש הרשימה שהיא דרגה 0, וממשיכים להתקדם כרגיל. 2 אופציות אחרות למעבר על האיברים הלא מאותחלים הם: הגענו לסוף הרשימה של הרמות לפני שהדפסנו m בלונים או שהגענו לrank השלילי הראשון כאשר לא היה לפניו רשימה של rank=0. במקרים אלה עוברים כמו שתואר למעלה וממשיכים הלאה.