אותות ומערכות ־ חורף תשע"ח 044130
תרגיל מחשב 1

תאריך הגשה: 20.11.2017
אחראית על התרגיל: מיכל אדלשטיין
דואר אלקטרוני: $smichale@campus.technion.ac.il$

הערות כלליות:

* הגשה בזוגות בלבד! הגשה ביחידים באישור האחראי על התרגיל בלבד.
* אין להגיש תשובות בכתב יד. עליכם להגיש קובץ PDF בודד המכיל את כל התשובות/גרפים/הסברים (אך ללא הקוד) לפי הסעיפים שבדוח.
* היעזרו בתבנית $Qx.m$ כאשר x הוא מספר השאלה.
* לכל שאלה יכתב ב־$SCRIPT$ נפרד ושמו יהיה כמספר השאלה הנמצאת באתר הקורס.
* תעדו את הקוד כיאות, כולל שמות משתנים בעלי משמעות. יש לכתוב הסבר קצר גם ליד שורות בעלות משמעות או בסיומות בלוק.
* הקפידו לרשום הסברים וחישובים בצורה ברורה ותמציתית.
* הקפידו על כותרות לגרפים וכותרות לצירים בכל גרף (כולל יחידות).
* העתקות תגרורנה פסילה.
* אופן ההגשה: את כל קבצי הקוד והפונקציה של $MATLAB$ שתכתבו בתרגיל, כמו גם את קובץ התשובות לשאלות המילוליות יש לקבץ לקובץ עם סיומת zip. שם הקובץ יהיה מורכב ממספר ת.ז. של שני הסטודנטים ויתחיל בשם WET.
לדוגמה, עבור סטודנטים עם ת.ז. 123456789 ו־ 987654321 הקובץ יקרא "$WET\_123456789\_987654321.zip$"
* את קובץ ה zip. יש להעלות לאתר הקורס ב־$Moodle$ במקום המתאים בבלוק של התרגילים הרטובים.
* כל זוג נדרש להגיש את המטלה פעם אחת, ע"י אחד מבני הזוג. אין להגיש את המטלה פעמיים.

תרגיל 1

ל-$MATLAB$ יש שימושים בתחומים רבים כמו עיבוד וניתוח מידע, רשתות עצביות מלאכותיות, ראייה ממוחשבת, בקרה ,תקשורת. דבר ההופך אותן לשימושיות מאוד באקדמיה ובתעשייה. יש מידע רב באינטרנט וכן פורומים מכובדים שבהם אפשר למצוא מידע.
בתוך סביבת העבודה, הכי נגיש למשימה זו הוא ה - $Function\ Browser$. ע"י סימון המילה בשורת הקוד בעזרת העכבר ולחיצה על $F1$, ניתן לקבל את תיעוד מסודר. עוד אפשרויות הן שימוש בפקודה doc ושם המפתח מיד אח"כ. למשל -

```
doc function name
doc sum
```

מידע נוסף -

`https://www.mathworks.com`

טיפ לסדר וניקיון:
$clear$ - פקודה שמוחקת את כל המשתנים הקיימים ב - $workspace$.
$close\ all$ – פקודה שסוגרת את כל ה-$figures$ הפתוחים.
clc - מסלקת את רשומת הפקודות מה- $command\ line$.

נרצה גם לשים דגש על כתיבה יעילה. ב-$MATLAB$ אומר הדבר להשתמש בעיקר בפונקציות מוכנות או בכפל מטריצי. ביצוע פעולות באמצעות לולאות עשוי להגדיל את זמן הריצה של התכנית שלנו בצורה משמעותית. נשתכנע בכך ע"י כתיבת תכנית קצרה הכופלת שתי מטריצות ריבועיות בשני אופנים. באמצעות כפל מטריצות ובאמצעות לולאות ונשווה זמנים.

1. פתחו את ה-$SCRIPT$ הנקרא $q1.m$ הנמצא בתיקיית ה-zip המצורפת. רישמו במקום המיועד שורת קוד המגרילה מטריצה ריבועית עם ערכים אקראיים ובגודל N על N. עשו זאת על-ידי שימוש בפונקציה $rand$ אשר מקבל כפרמטר את N.
2. כתבו באותו ה-$SCRIPT$ שורת קוד אחת אשר כופלת שתי מטריצות בגודל באמצעות כפל רגיל בין מטריצות.
3. כתבו באותו ה-$SCRIPT$ תכנית המבצעת כפל מטריצי באמצעות לולאות for וללא כפל מטריצות בכלל (כלומר מותר לכפול רק מספרים).

   שימו לב כי דרושות 3 לולאות לשם כך.
4. הוסיפו את הפקודה tic לפני שורת הקוד ו-toc אחרי השורה. הריצו עבור $N = 10, 100, 200$. השוו את זמני הריצה. מה המסקנה?

   הערה: שימו לב כי סיום פקודה ללא התו ; תדפיס את פלט הפונקציה ל - $command\ line$.

תרגיל 2 - ציור גרפים ב-$MATLAB$

פתחו את ה-$SCRIPT$ בשם $q2.m$.

1. צרו וקטור זמנים בקטע $[-10, 10]$ באורך 500
2. צרו את שתי פונקציות $sin(\omega_1 t)$ ו - $sin(\omega_2 t)$ באמצעות הוקטור t. קבעו את התדרים של הסינוסים להיות 19 ו-20.
3. צרו פונקציה שלישית השווה לסכום שני הסינוסים. שימו לב כי הקובץ הנתון כבר מכיל קטע קוד המצייר את האותות. מהי האמפליטודה של כל אות?
   שימו לב לנוסחה הטריגונומטרית הבאה -

$$sin(\alpha) + sin(\beta) = 2sin(\frac{\alpha+\beta}{2})cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \quad (1)$$

אנחנו יכולים להעיזר בה כדי לבטא את סכום הסינוסים בצורה הבאה -

$$sin(\omega_1 t) + sin(\omega_2 t) = 2sin(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t)cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t) \quad (2)$$

הגורם בו מופיע הסכום נקרא הגל הנושא והגודרם בו מופיע הממוצע נקרא המעטפת. בתופעה זו משתמשים בתקשורת רדיו, השיטה ידועה בתור $Amplitude\ Modulation$. לעיון נוסף ־

https://en.wikipedia.org/wiki/Amplitude_modulation

תרגיל 3 ־ חזרה על אלגברה לינארית

פתחו את ה־$SCRIPT$ בשם $q3.m$. ענו על הסעיפים המתאימים במקומות המיועדים. הוסיפו את התשובות העיוניות לקובץ המסכם.

1 צרו וקטור עם 3 הקואורדינטות $[u,v,w]^T = [2,-1,1]^T$ ציירו אותו בעזרת הפונקציה $quiver3$. בחרו את גבולות הצירים באמצעות הפונקציות $xlim, ylim, zlim$ להיות כולם בין מינוס 2 ל־ 2.

2 מהו היטלו של הוקטור הנ"ל על ציר x? רשמו מטריצה P בגודל 3 על 3 המבצעת הטלה על ציר x.

* ציר x הוא הוקטור הראשון בסיס הסטנדרטי, דהיינו $e_1 = [1,0,0]^T$

* מטריצת ההטלה על ציר x מקיימת ־

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \tag{3}$$

3 כעת נרצה לממש סיבוב קשיח ב־3 ממדים. אפשר לעיין בקישורים ־

https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix
http://mathworld.wolfram.com/RotationMatrix.html

כאשר ציר z הוא ציר הסיבוב, מטריצת הסיבוב נתונה ע"י ־

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) & 0 \\ -sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

שימו לב כי המטריצה כבר נתונה בקובץ־$q3.m$.

4 הפעילו את מטריצות הסיבוב סביב ציר z על הקטור היחידה בכיוון x (הוא הוקטור $[1,0,0]^T$) ובזווית של 45 מעלות. קראו לוקטור הזה בשם b_1. נרמלו את b_1 כך שגודלו יחידה וציירו אותו באותו ה־$figure$.

$$norm(u) = \sqrt(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = 1 \tag{5}$$

5 הפעילו את מטריצות הסיבוב סביב ציר z על הקטור היחידה בכיוון x (הוא הוקטור $[1,0,0]^T$) ובזווית של -45 (מינוס 45 מעלות) קראו לוקטור הזה בשם b_2. נרמלו את b_2 גם כן וציירו אותו באותו ה־$figure$.
הערות:
ודאו כי הוקטורים הם עמודה יחידה ולא שורה.

6 חשבו את ערכה של המכפלה הפנימית (מכפלה סקאלרית רגילה) בין הוקטורים b_1 והוקטור b_2. האם הם ניצבים?

7 מצאו את המקדמים עבור הייצוג של הוקטור הקרוב ביותר ל־ $[u,v,w]^T$ הנמצא בתת־מרחב הנפרש ע"י b_1, b_2. ציירו את ההיטל באותו ה־$figure$
הדרכה: מכיוון שהגענו למסקנה שהוקטורים b_1, b_2 ניצבים וגדלם יחידה, ניתן לבטא את הוקטור הקרוב ביותר (במובן

המרחק הרגיל שאנחנו מכירים הנקרא גם מרחק $L2$ ע"י החישוב הבא ־

$$\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(1) & b_2(1) \\ b_1(2) & b_2(2) \\ b_1(3) & b_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$Projection = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 \tag{7}$$

תוצאה זו מוכרת לנו. באלגברה לינארית למדנו שפונקציות המוגדרות על קטע חצי־פתוח ממגדירות מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית. כאשר אנו מקרבים פונקציה מחזורית על קטע כזה באמצעות טור־פורייה אנחנו למעשה מטילים על ההרמוניות שהן בסיס אורתונורמלי לתת־מרחב של הפונקציות האלו.

תרגיל 4 ־ הטלות על פונקציות

שאלה זו תעסוק במכפלה פנימית כפי שהיא מוגדרת עבור פונקציות מחזוריות.

1. היעזרו בפונקציה $linspace$ וצרו וקטור בשם t_1 המהווה קטע זמנים עם נקודת ההתחלה ב־$-\pi$, ונקודת סיום π , ובעל 100 נקודות. צרו וקטור בשם t_2 בעזרת פעולת " : " עם צעד שיבוטא בעזרת משתנה dt וגודלו יהיה $2\pi/100$. האם הוקטורים שווים? אם לא הסבירו מה ההבדל?

2. צרו וקטור t באמצעות : , כלומר באותו האופן בו יצרתם את t_2 ובאותו הקטע כמו בסעיף הקודם אך הפעם עם 10000 נקודות במקום 100. צרו פונקצית סינוס f_1 עם התדר 1. ועוד סינוס f_2 עם התדר 10.1. כלומר $sin(10.1t) = f_2(t)$ ו ־ $sin(1t) = f_1(t)$. ציירו את שניהם על גרף אחד ובצבעים שונים. תנו כותרות. הסבירו בקצרה מה רואים?

   עבור פונקציות מחזוריות עם מחזור T_0, המכפלה הפנימית מעל הקטע $[a, a+T_0)$ מוגדרת כך ־

$$< f_1(t), f_2(t) >_{T_0} = \frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} f_1(t) f_2(t)^* dt \tag{8}$$

   אנחנו מעוניינים לקרב את האינטגרל הזה באופן נומרי ע"י סכום. לשם כך נשתמש בקירוב ־

$$< f_1(t), f_2(t) >_{T_0} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} f_1(a+n\Delta t) f_2(a+n\Delta t)^* \tag{9}$$

כאשר החלפנו $N = T_0/\Delta t$. במקרה וזה לא שלם, יש לעגל את זה לערך השלם הקרוב באמצעות $round$ וזו תוסיף לשגיאה הנומרית.

3. חשבו את ערכה של המכפלה הפנימית עבור קטע הזמנים עם חלוקה ל־100 ועם חלוקה ל־10000 מהי המסקנה?
   ב־$MATLAB$ חישוב מחכפלה פנימית הוא פשוט כפל וקטורי ב־$MATLAB$. אפשר לחשבו ע"י הנוסחא ־
   $< f_1(t), f_2(t) >_{T_0} = f_1 f_2' \Delta t / T_0$
   שימו לב כי אופרטור גרש "′" גם מבצע שחלוף וגם צמוד קומפלקסי שזה בדיוק מה שדרוש לנו לחישוב המכפלה הפנימית.

תרגיל 5 ־ טורי פורייה

כפי שלמדנו באלגברה לינארית טרנספורמציות אוניטריות מוגדרות גם במרחבים עם ממד אינסופי כמו מרחב הפונקציות הרציפות. דוגמה מהקורס לטרנספורמציה כזו היא טור־פורייה בו הפונקציות ההרמוניות מהוות בסיס אורתונורמלי. בשאלה הזאת נתאר הקירוב לתת־מרחב של הפונקציות המחזוריות ב ־ R^∞

הנחייה: הקפידו על כותרות לגרפים ושמות צירים בעלי משמעות.

1. מכיוון שיש קשר לניארי פשוט וחד־חד ערכי בין אקספוננטות מרוכבות ל־cos, sin אפשר לעבור בין היצוגים.
   הוכיחו את הזהות הבאה ומצאו במפורש את המקדמים A, B, C, D

$Aexp(jx) + Bexp(-jx) = Ccos(x) + Dsin(x)$

העזרו בזהות אוילר ־

$$exp(jx) = cos(x) + jsin(x) \tag{10}$$

כתבו מערכת משוואות לינאריות בגודל 2 על 2 מהצורה מהם a, b, c, d? מהו הקשר ההפוך? (יש נוסחה פשוטה להיפוך מטריצה 2 על 2) ־

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \tag{11}$$

2 נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור T_0. רשמו את הנוסחה האנליטית לחישוב מקדמי טור פורייה עבור הקטע $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$

שימו לב כי זו ערכה של המכפלה הפנימית מהשאלה הקודמת ־

$$X^s[l] =< x(t), exp(j\frac{2\pi}{T_0}lt) >_{T_0} \quad l = -\infty, .. -2, -1, 0, 1, 2, ...\infty \tag{12}$$

מעתה נתון $T_0 = 2\pi$. נרצה להיעזר ב־$MATLAB$ כדי לחשב את המקדמים לטור פורייה באופן נומרי. לשם כך השתמשו במכפלה הפנימית כפי שהוגדרה בסעיף 5.2 והיעזרו בסעיף 4.3 בו הראנו חישוב למכפלה הפנימית.

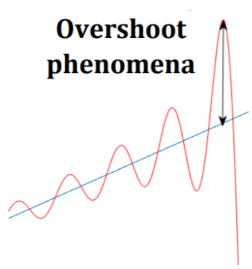
3 צרו וקטור t באורך $10,000$ ואת האות $x(t) = t$.

4 חשבו $M = 2$ את $2M + 1$ ממקדמי הטור באופן סמטרי, כלומר את ־ $X^s[l]$ עבור $l = -2, -1, 0, 1, 2$ באמצעות הקירוב לסכום והשוו אותם לחישוב אנליטי. האם הערכים הם מדומים טהורים ממשי טהור או מרוכב?

5 שנו את M. מהי ההשפעה על דיוק התוצאה? (שימו לב כי אין להגדיל את M יתר על המידה מאחר והתוצאות הנומריות תצאנה שגויות, דבר שיתבאר בהמשך הקורס.

6 ציירו את הפונקציה בקטע הנתון ואת הפונקציה המקורבת ע"י טור פורייה (על אותה מערכת צירים בצבעים שונים והוסיפו מקרא $legend$)

7 חשבו את המרחק בין האות המקורי לקירוב שלו לטור פורייה עבור $M = 10, 50, 200$. תארו מהי התלות ב־M?
עבור. אותות x_1, x_2 שהם מוגדרים כ**וקטורי שורה** $Distance = \frac{\Delta t}{T_0}(x_1 - x_2)(x_1 - x_2)^T$



8 Figure 1:

8 חשבו את גודל ה־$Overshoot$ באחוזים עבור $M = 5, 20, 100, 200$. ה ־ $Overshoot$ מוגדר כמו באיור. האם יש התכנסות נקודתית? האם התופעה הזאת מוכרת לכם?
הערה: אפשר לחשב ע"י מציאת המקסימום של הטור פורייה באמצעות הפונקציה max. וחישוב ערכו המוחלט של ההפרש מהפונקציה המקורית.

https://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_phenomenon

9 אמתו את משפט פרסבל הקובע כי הגודל של האות איננה תלויה בייצוג. חשבו את האנרגיה של האות המקורב במישור הזמן ובתחום התדר, עבור $M = 1000$.

$$Energy = ||x(t)||^2 =< x(t), x(t) >_{2\pi}= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt \tag{13}$$

$$Energy = ||X^s||^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |X_s[l]|^2 \tag{14}$$