

アルゴリズムとデータ構造④

～ 分割統治法 ～

鹿島久嗣

分割統治法：

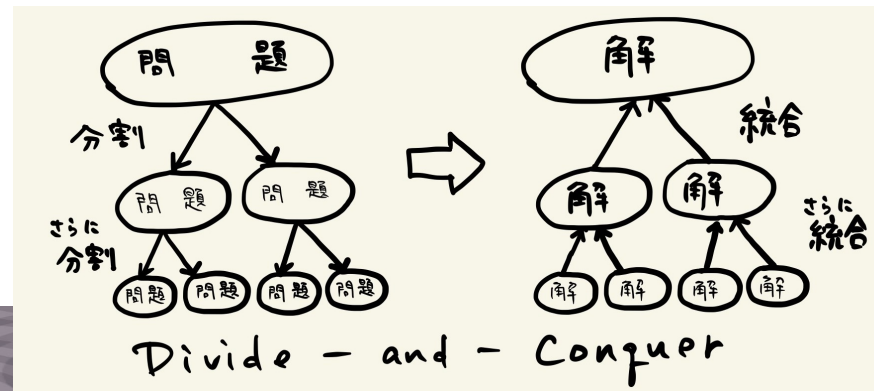
アルゴリズム設計指針の1つで、問題を小問題に分割して解く

- 特定の問題に対するアドホックな個別の解法ではなく、多くの問題に適用可能なアルゴリズムの一般的な設計指針

— 分割統治法、動的計画法、...

■ 分割統治法：

- 元の問題を、同じ構造をもった小さな問題に分割
- 小さな問題の解を統合して元の問題の解を得る



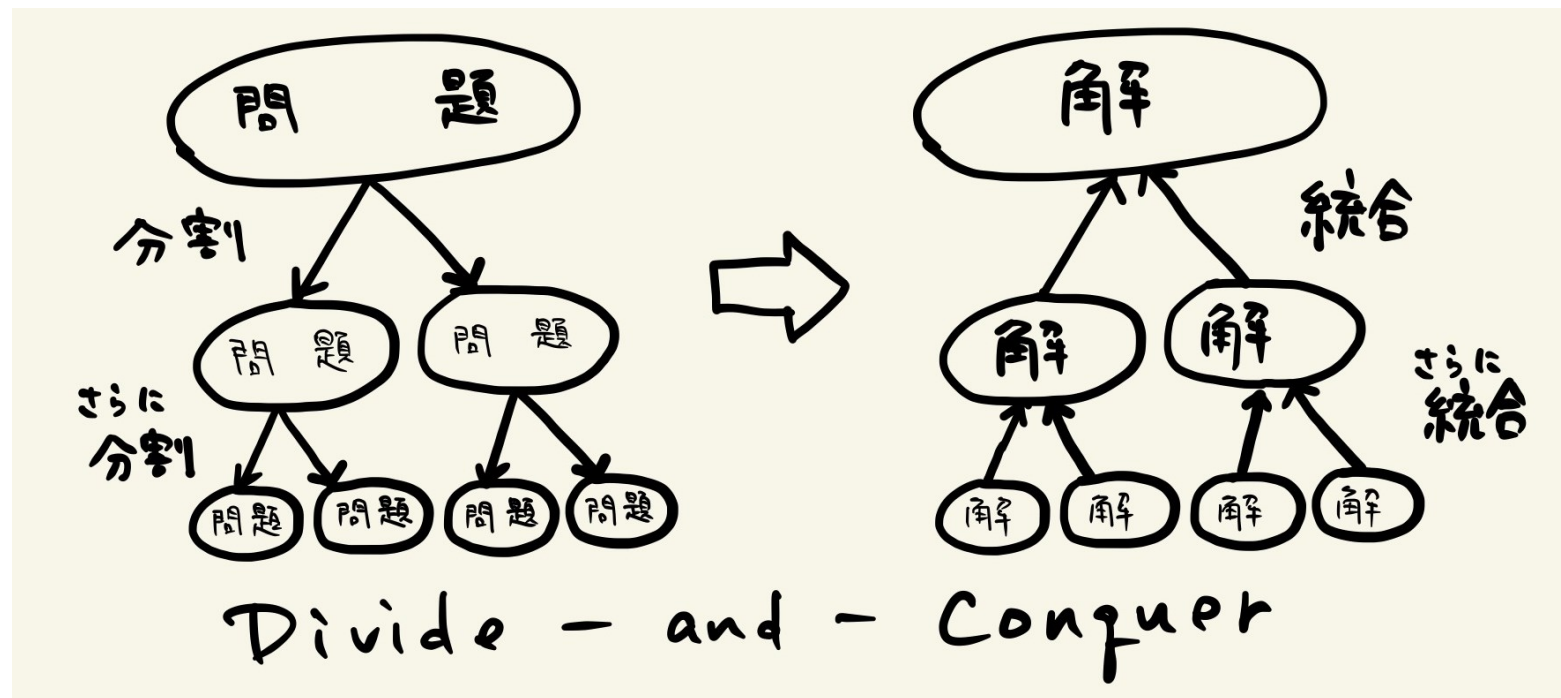
分割統治法：

アルゴリズム設計指針の1つで、問題を小問題に分割して解く

■ 分割統治法（Divide-and-conquer）：

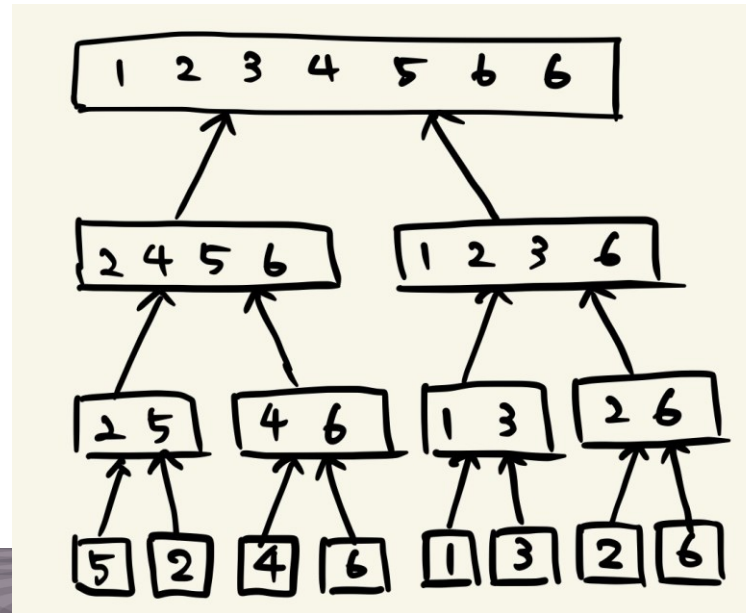
— 分割：元の問題を、同じ構造をもった小さな問題に分割

— 統合：小さな問題の解を統合して元の問題の解を得る



分割統治法の例： マージソート

- 入力された配列を前後に分割し、それぞれに対してマージソートを適用する
 - 再帰的に行うことで、サイズ1の配列まで到達する
 - 逆向きに統合して解を構成する
- 例：配列 $(5, 2, 4, 6, 1, 3, 2, 6) \rightarrow (5, 2, 4, 6)$ と $(1, 3, 2, 6)$



マージソート：

マージソートの計算量は $O(n \log n)$

- $n = 2^k$ として $O(n \log n)$

- 実用的には次に紹介するクイックソートが速い

- 計算量評価の再帰式：

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & (n = 1) \\ 2T(n/2) + O(n) & (n \geq 2) \end{cases} = O(n \log n)$$

再帰 統合

マージソート：

マージソートの計算量は $O(n \log n)$

■ 計算量評価の再帰式：

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & (n = 1) \\ 2T(n/2) + O(n) & (n \geq 2) \end{cases}$$

■ $T(n) = 2T(n/2) + cn = 2 \left(T\left(\frac{n}{2^2}\right) + c \frac{n}{2} \right) + cn$

$$= 2 \left(2 \left(\dots \left(2 \left(\underbrace{T\left(\frac{n}{2^k}\right)}_c + c \frac{n}{2^{k-1}} \right) + c \frac{n}{2^{k-2}} \right) \dots \right) + c \frac{n}{2} \right) + cn$$

$$= c2^k + \underbrace{cn + \dots + cn}_k = O(n \log n)$$

分類定理（簡易版）：

計算量の再帰式から計算量を導く定理

- $T(n)$ の漸化式から $T(n)$ のオーダーを導く
- 定理：大きさ n の問題を大きさ $\frac{n}{b}$ の問題 a 個に分割した

$$\text{—つまり、 } T(n) = \begin{cases} c & (n = 1) \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn & (n \geq 2) \end{cases}$$

$$\text{—このとき： } T(n) = \begin{cases} O(n) & (a < b) \\ O(n \log n) & (a = b) \\ O(n^{\log_b a}) & (a > b) \end{cases}$$

クイックソート：

分割統治法にもとづく高速なアルゴリズム

- 最もよく用いられる、分割統治に基づくソートアルゴリズム

- 平均計算量 $O(n \log n)$ だが、最悪では $O(n^2)$ かかる

- ただし、実用的には速い

- その場でのソートが可能

p : 配列中でソートする部分の先頭
 r : 配列中でソートする部分の末尾

- アルゴリズム QuickSort(A, p, r)

1. $(A, q) \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$: 分割点 q をみつけて分割

2. QuickSort(A, p, q)

3. QuickSort($A, q + 1, r$)

} 分割したそれぞれについて
クイックソートを適用

クイックソートの分割関数 $\text{Partition}(A, p, r)$:
基準となる要素（枢軸）との大小比較で2グループに分割

- クイックソートではある数との大小で要素を2群に分割する
 - 比較対象の要素 $A[p]$: 枢軸(pivot)とよぶ
- $A[p:r]$ を $A[p]$ 未満の要素と、 $A[p]$ 以上の要素に分割
 - $A[p]$ 未満の要素が新たに $A[p:q]$ となる
 - $A[p]$ より大きい要素が新たに $A[q + 1:r]$ となる
 - 2つのインデックス i, j を使って配列 $A[p:r]$ を操作 :
 1. $j = r$ から左に走査して枢軸未満の要素を発見する
 2. $i = p$ から右に走査する
 3. 枢軸以上の要素を発見したら両者を入れ替える
 4. 両者が出会うまで繰り返す ($O(r - p)$)

ぶつかったところが q

クイックソートの計算量：
「平均で」 $O(n \log n)$ を実現できる

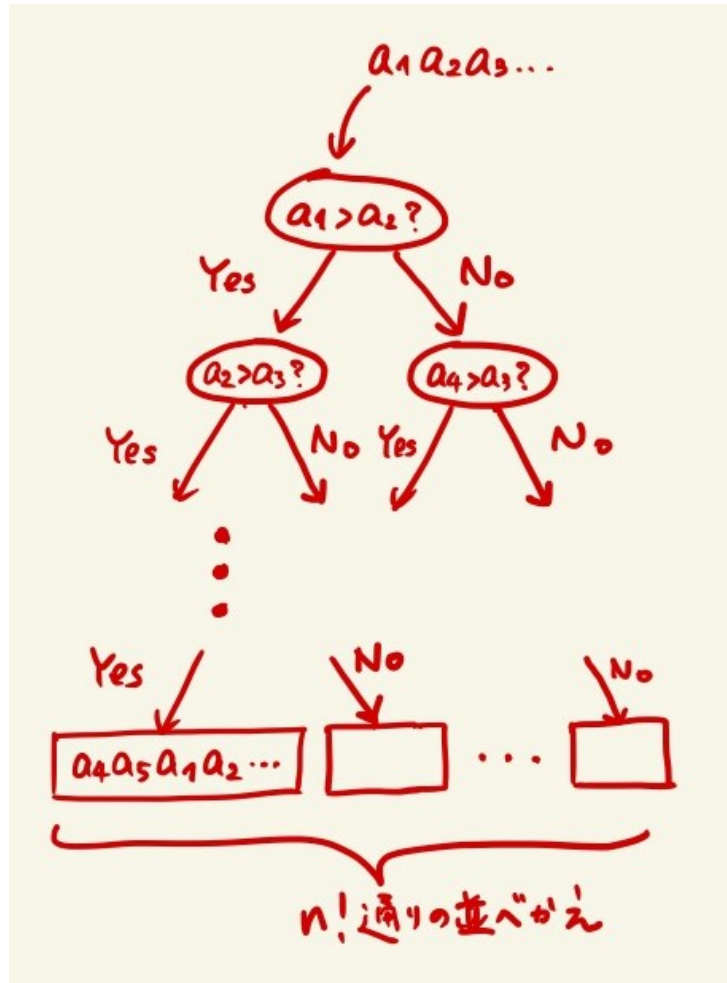
- 最悪の場合：
 n 個の要素が $n - 1$ 個と1個に分割されたとすると $O(n^2)$
 - 1回の分割でサイズが定数個しか減らない場合
- 最良の場合：
 n 個の要素が $\frac{n}{2}$ 個2セットに分割されたとすると $O(n \log n)$
 - 分割定理で $a = b$ の場合
 - 定数分の1のサイズに分割される場合
- 最悪の場合を避けるために：ランダムに枢軸を選択
 - 問題例に依存しない平均計算量を達成できる

ソートの計算量の下界：

$O(n \log n)$ より小さい計算量は達成できない

- ソートのアルゴリズムは最悪計算量 $O(n \log n)$ が必要
- n 個の要素はすべて異なるとすると、ソート後に得られる列の可能性は $n!$ 通り
- ソートは2つの数の比較を繰り返すことで動く
- ソートの流れを2分木で書くことにする：
 - 各頂点で2つの数を比較して分岐
 - 葉は、ある特定の並べ替えに対応
 - 全ての並べ替えが可能であるために葉が $n!$ 個は必要
 - これを実現するためには少なくとも木の高さが $O(n \log n)$

ソートの計算量の下界：
 $O(n \log n)$ より小さい計算量は達成できない



この高さがどう頑張っても
 $O(n \log n)$ になることを示す

一番下では、とある並び替えが得られる

ソートの計算量の下界：

$O(n \log n)$ より小さい計算量は達成できない

- 全ての可能な並び替えが得られるためには、最下段の要素が少なくとも $n!$ は必要
- 図の高さがちょうど h （完全2分木）とすると、最下段の要素（葉）の数は 2^h
 - 逆に 2^h 個の葉をもつ木で最も低いのが完全2分木
- よって、 $2^h \geq n!$ でないといけない
- 対数をとると
$$h \geq \log n! \geq \log(n/e)^n = n \log n - n \log e = O(n \log n)$$
 - なお、Stirlingの公式 $n! \geq \sqrt{2\pi n}(n/e)^n \geq (n/e)^n$

木の高さが比較回数
(= 計算量) に対応

順序統計量：

小さい方から k 番目の要素は線形時間で発見可能

- 順序統計量：小さい方から k 番目の要素

- 自明なやり方：ソートを使えば $O(n \log n)$

- 工夫すれば $O(n)$ で可能：

 - 平均的に $O(n)$ で見つける方法

 - 最悪ケースで $O(n)$ で見つける方法

の二つのやり方を紹介する

平均 $O(n)$ の順序統計量アルゴリズム： クイックソートと同じ考え方で可能

- $(A, q) \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$ を実行した結果：
 1. $k \leq q$ であれば、求める要素は $A[p:q]$ にある
 2. $k > q$ であれば、求める要素は $A[q+1:r]$ にある—再帰的にPartitionを呼ぶことで範囲を限定していく
- 平均的には問題サイズは半々になっていく：

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) = O(n)$$

注：クイックソートでは $2T\left(\frac{n}{2}\right)$ だった

分割のコスト