KYOTO UNIVERSITY

アルゴリズムとデータ構造⑪
～ 問題の難しさ ～

鹿島久嗣

DEPARTMENT OF INTELLIGENCE SCIENCE AND TECHNOLOGY

問題の難しさのクラス：

- クラスP
- クラスNP
- P≠NP予想
- NP完全
- NP困難

問題の難しさ：
もっとも計算量の小さいアルゴリズムで測る

- 我々は、アルゴリズムの効率の良し悪しを計算量で測る
- では、問題の難しさはどう測るか？
- 問題Qに対するアルゴリズムの集合$A(Q)$を考える
- 問題Qの難しさを、最も計算量が小さい $a \in A(Q)$ の計算量で測ることにする
- 例：ソート問題の計算量の下界は $O(n \log n)$
  - （理論的には）これより高速なアルゴリズムを探す必要はない

クラスP：
多項式時間アルゴリズムが存在する問題のクラス

- 決定問題を考える
  - 決定問題：YesかNoで答えられる問題
- 理論的には、
問題が難しいか？ ＝ 問題が多項式時間で解けるか？
に興味がある
- クラスP：
多項式時間アルゴリズムが存在するような問題のクラス

クラスNP：
非決定的な計算機で多項式時間で解けるクラス

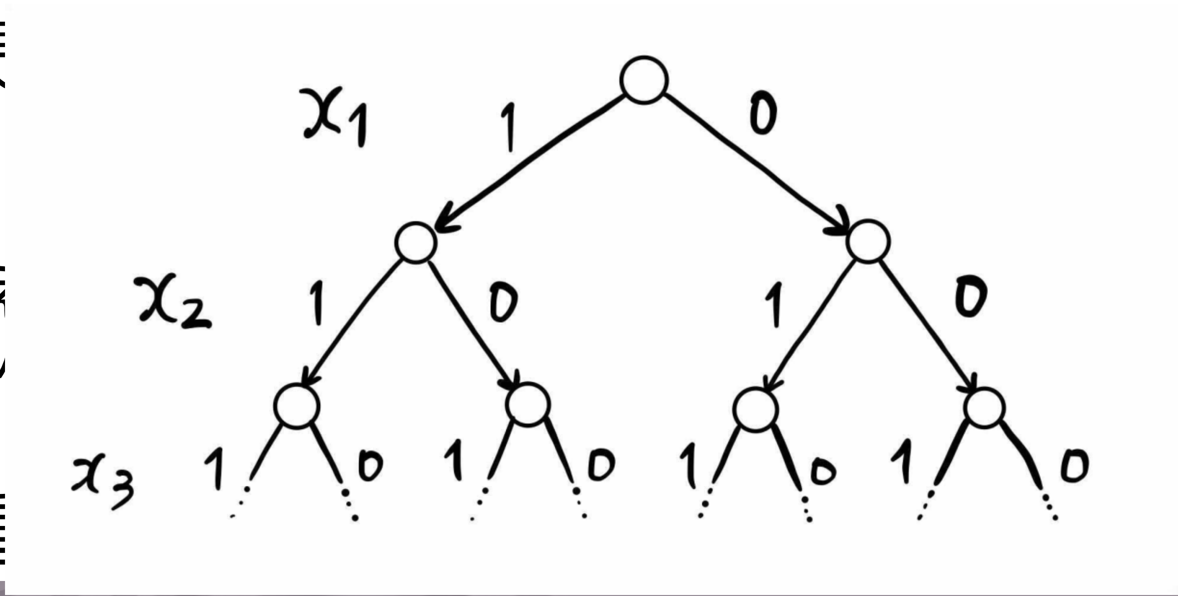
- 非決定的な計算機を考える：
  - 好きなだけ並列化できる理想的な計算機
    - プロセスをk分岐して、並列実行できる命令がある
  - $O(n)$時間でnビットのベクトルをすべて調べることができる
- NP：問題の答えが「Yes」のときには、非決定的な計算機を使って、多項式時間でこれを調べることのできる問題
  - 言い換えると：答えの候補が与えられたときに、答えの正しさを（決定的な計算機で）多項式時間で検証できる問題
- 実用上重要な問題はほぼこのクラスに入る

クラスNP：非決定的な計算機で多項式時間で解けるクラス

- 非決定的な計算機を考える：
  - 好きなだけ並列化できる理想的な計算機
    - プロセスをk分岐して、並列実行できる命令がある
  - $O(n)$時間でnビットのベクトルをすべて調べることができる

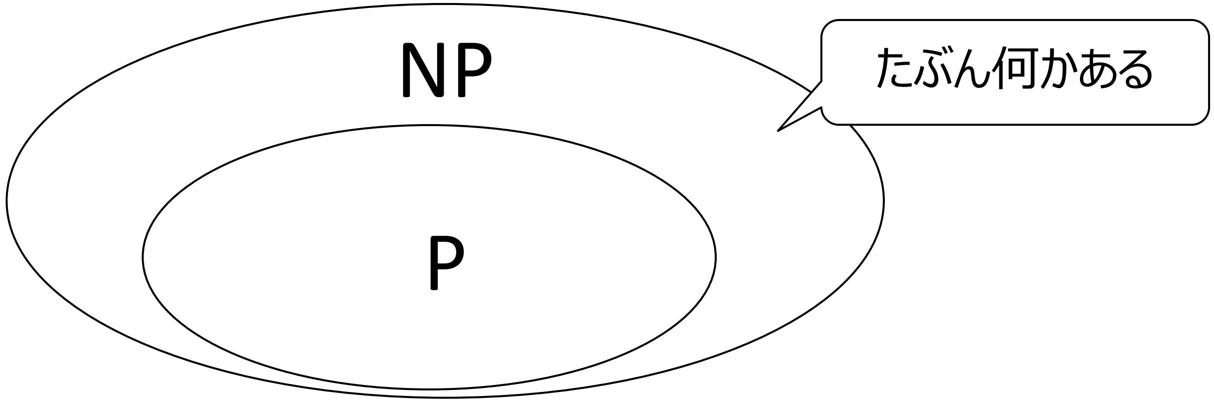
順列、$C(n,m)$など

- NP：問題 [...] 定的な計算機を使って、[...] きる問題
  - 言い換え [...] 答えの正しさを（決定的 [...] る問題
- 実用上重 [...]



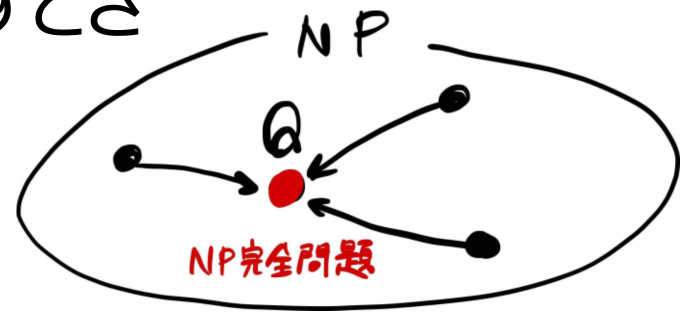
P≠NP予想：
おそらく、NPはPよりも難しい

- 「クラスNPに属するが、Pには属さない問題」は、これまでに見つかっていない（！）
  - P⊆NP であるが、P≠NPかどうかは、まだ分かっていない
    （※ 解けたら100万ドル）
  - おそらく、P≠NPであるとみんな思っている



NP完全：
NPの中でもっとも難しい問題

- NP完全： 判定問題Qは以下を満たすとき
  NP完全に属するという



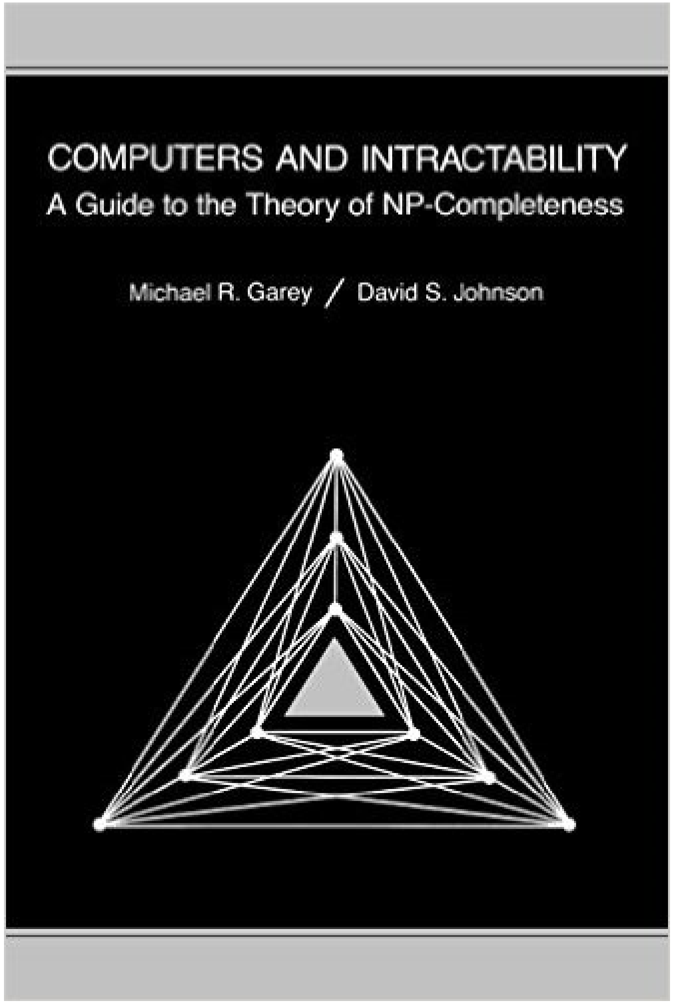
  – QはNPに属する
  – NPの任意の問題が多項式時間でQに変換できる

- もし、NP完全問題Q が クラスP に属するならば、
  NPに属する全ての問題はPに属することになる
  – なぜならば、NP完全問題Qが多項式時間で解ければ、
    ほかのNP問題も多項式時間で解けることになるから

NP完全問題の例：多くの重要な問題がNP完全

- ハミルトン閉路問題
- クリーク問題
- 頂点被覆問題
- 集合被覆問題

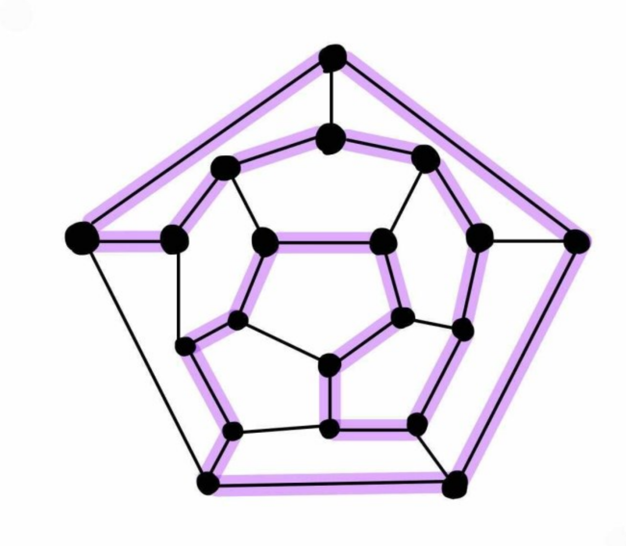
- 新たな問題に出会ったときには、それがNP完全などでないかをチェックすべし



NP完全問題の例：ハミルトン閉路問題

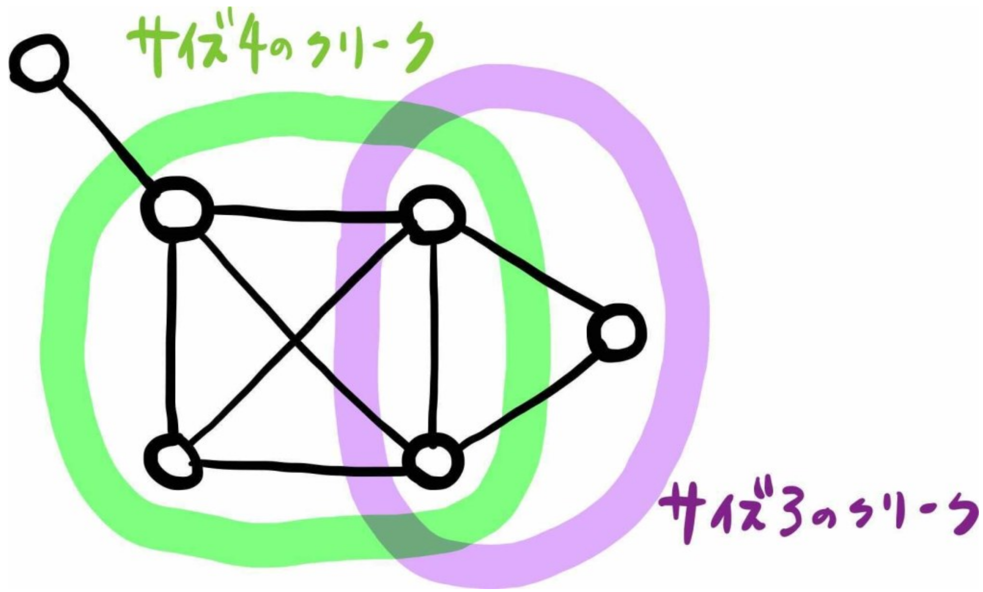
- ハミルトン閉路：
  グラフ$G = (V, E)$において、すべての頂点 をちょうど1回ずつ訪れて出発点に戻る道（閉路）

- ハミルトン閉路問題：
  Gがハミルトン閉路をもつかどうかの決定問題



NP完全問題の例：
クリーク問題

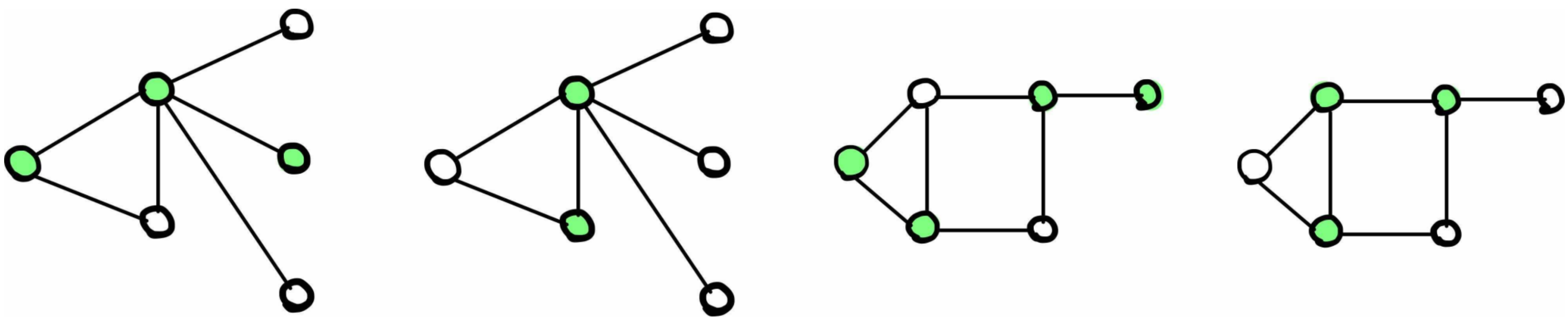
- クリーク：Gの部分グラフG'であって、G'の全ての頂点対が互いに辺でつながれているもの
- クリーク問題：Gが頂点数kのクリークをもつかどうかの決定問題



NP完全問題の例：頂点被覆問題

- グラフ$G = (V, E)$において全ての$e \in E$の少なくとも一方が$V' \subseteq V$に含まれているとき、V'を頂点被覆という
- 頂点被覆問題（vertex cover）：
  Gが頂点数kの頂点被覆をもつかどうかの決定問題

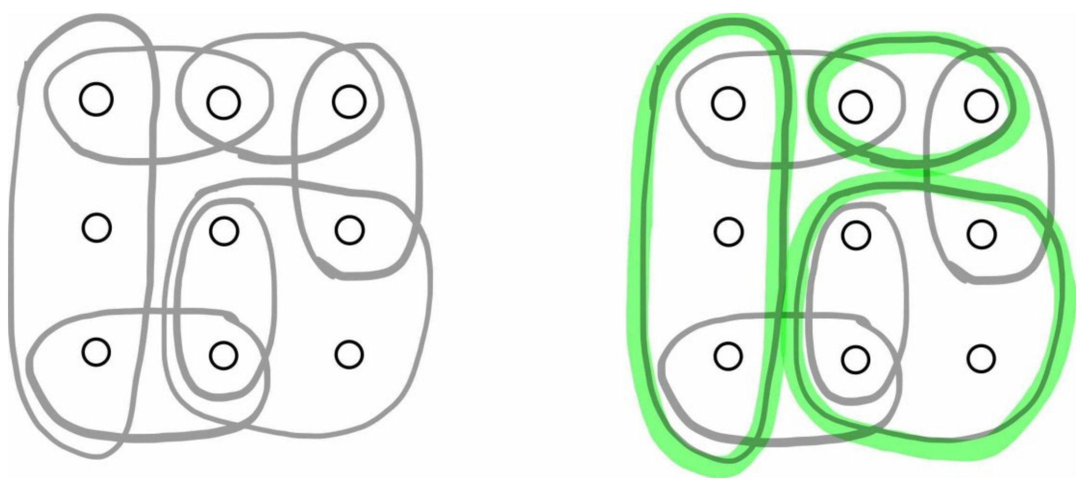
頂点「で」被覆



NP完全問題の例：集合被覆問題

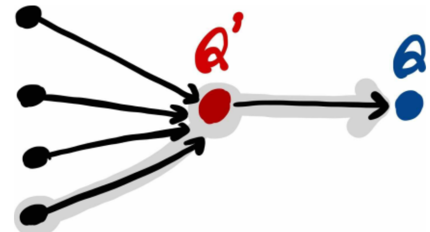
- n個の集合$S_1, S_2, \dots, S_n$があるとき、そのうちk個を用いて$\bigcup_{j=1}^{n} S_j = \bigcup_{j=1}^{k} S_j$とできるとき、大きさ$k$の集合被覆という
- 集合被覆問題（set cover）：$S_1, \dots, S_n$が大きさkの集合被覆をもつかどうかの決定問題

集合「で」被覆



NP完全であることの証明法：多項式時間帰着によって示す

- ある問題QがNP完全であることを示すためには、あるNP完全問題Q'からQに多項式時間で帰着できることを示せばよい



  - Q'の任意の問題例をQの問題例に、多項式時間で対応付けることができることを示す
  - Qの問題例の解がYesなら、Q'の問題例の解もYes、逆に、QがNoならQ'でもNo

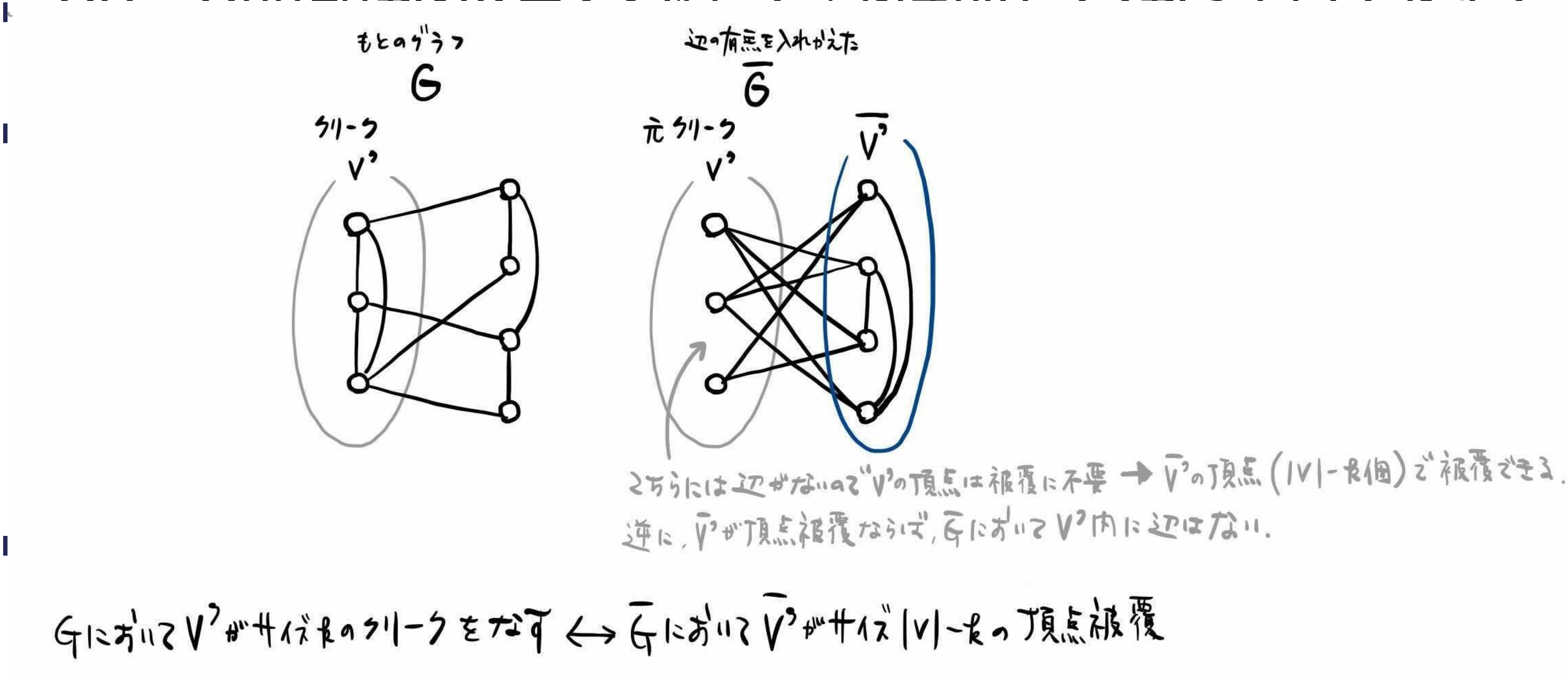
- ちなみに、最初のNP完全問題は定義に従い示す必要がある

NP完全性の証明の例：
クリーク問題→頂点被覆問題→集合被覆問題の順に帰着

- クリーク問題がNP完全であることは既に分かっているとする
- 頂点被覆問題はNP完全
  - クリーク問題から頂点被覆問題に多項式時間帰着
    - もとのグラフGで、辺のあるところとないところを逆転したグラフG'上での、（サイズ$|V|-k$の）頂点被覆問題
- 集合被覆問題はNP完全
  - 頂点被覆問題から集合被覆問題に多項式時間帰着

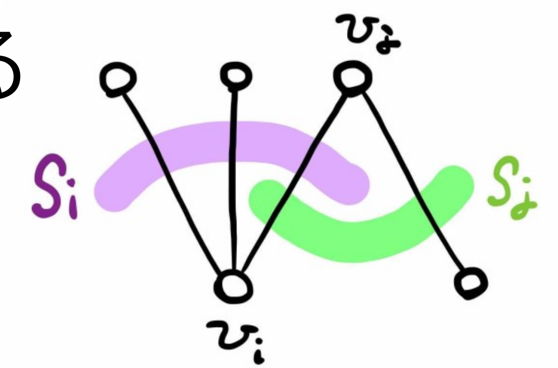
NP完全性の証明の例：
クリーク問題→頂点被覆問題→集合被覆問題の順に帰着

- クリーク問題がNP完全であることは既に分かっているとする



集合被覆問題のNP完全性：頂点被覆問題からの帰着法

- 集合被覆問題のNP完全性を、頂点被覆問題からの帰着によって証明する



- Vの頂点$v_1, \ldots, v_n$のそれぞれに対して、v_iに接続するすべての辺の集合をS_iとする（頂点被覆においてv_iが被覆できる辺の集合）
- $S_1, \ldots, S_n$に対する集合被覆問題 ⇔ もとの頂点被覆問題
  – 頂点v_iを選ぶと、辺集合S_iがカバーされる
- 問題の変換は$O(|V|^2)$でできる

NP困難：
NPのどの問題と比較しても、それ以上に難しい問題

- NP困難問題Q：
  - NPの任意の問題が多項式時間でQに変換できる（必ずしもQがNPに入っている必要はない）
  - 判定問題とは限らない問題Qが、NP完全問題Q'を部分問題として含むもの
- 巡回セールスマン問題：ハミルトン閉路のなかでコストが最小のものを求める問題
  - これが解ければついでにハミルトン閉路も解ける
- 同様に、最大クリーク、最小頂点被覆、最小集合被覆、…