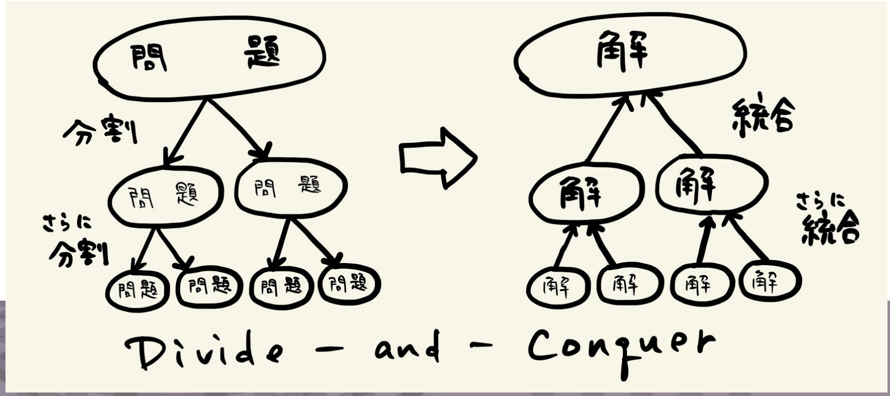
アルゴリズムとデータ構造④
～ 分割統治法 ～

鹿島久嗣

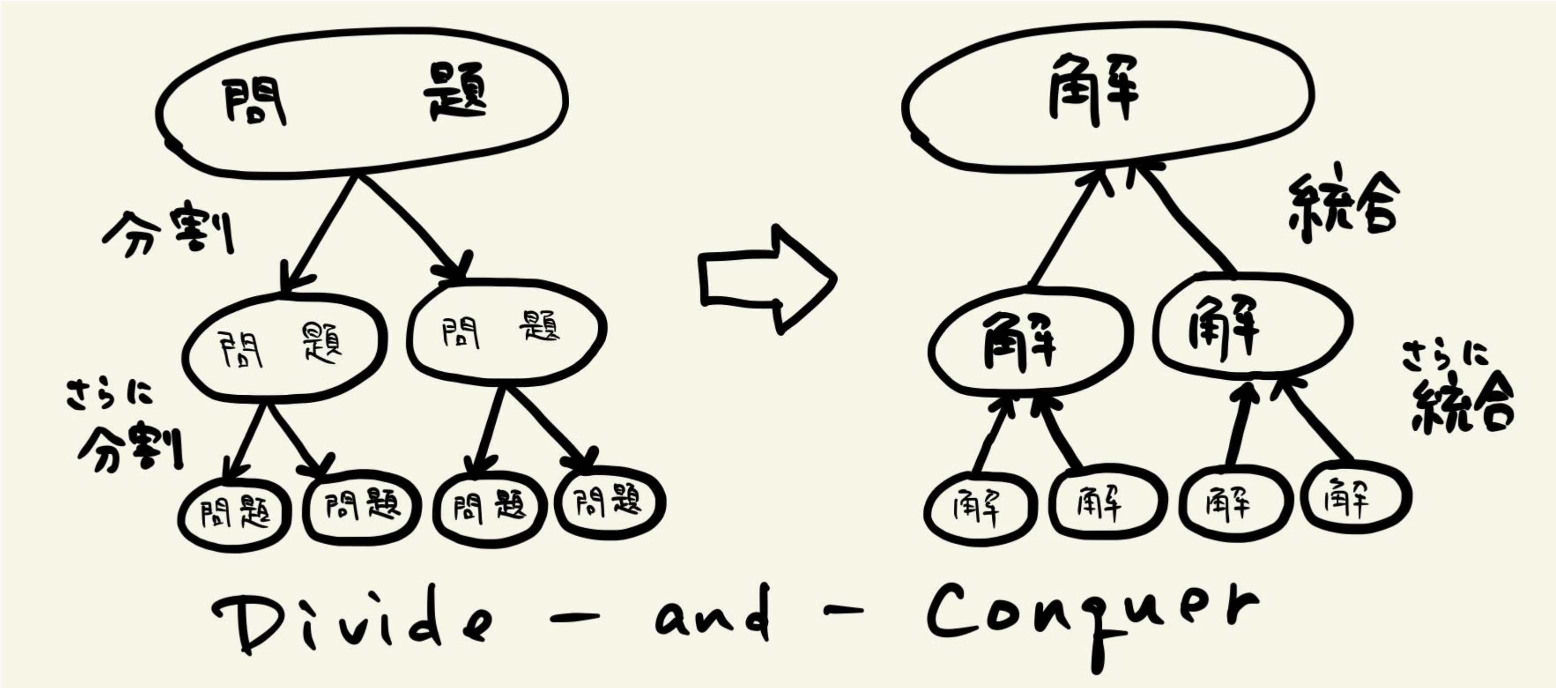
分割統治法：
アルゴリズム設計指針の1つで、問題を小問題に分割して解く

- 特定の問題に対するアドホックな個別の解法ではなく、多くの問題に適用可能なアルゴリズムの一般的な設計指針
  - 分割統治法、動的計画法、…
- 分割統治法：
  - 元の問題を、同じ構造をもった小さな問題に分割
  - 小さな問題の解を統合して元の問題の解を得る



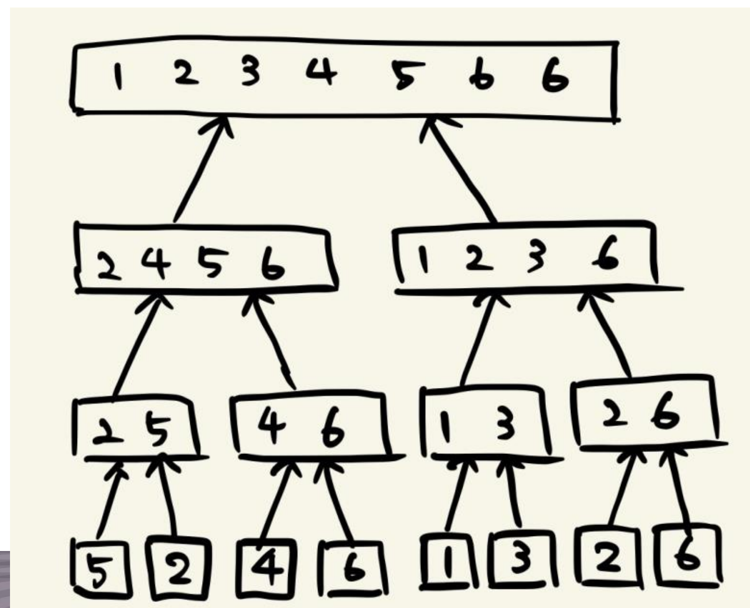
分割統治法：
アルゴリズム設計指針の1つで、問題を小問題に分割して解く

- 分割統治法（Divide-and-conquer）：
  - 分割：元の問題を、同じ構造をもった小さな問題に分割
  - 統合：小さな問題の解を統合して元の問題の解を得る



分割統治法の例：
マージソート

- 入力された配列を前後に分割し、それぞれに対してマージソートを適用する
  - 再帰的に行うことで、サイズ1の配列まで到達する
  - 逆向きに統合して解を構成する
    - 例：配列 (5,2,4,6,1,3,2,6)→ (5,2,4,6)と(1,3,2,6)



マージソート：
マージソートの計算量は$\mathrm{O}(n\log n)$

- $n = 2^k$として$\mathrm{O}(n\log n)$
  - 実用的には次に紹介するクイックソートが速い
- 計算量評価の再帰式：

$$T(n) = \begin{cases} \mathrm{O}(1) & (n = 1) \\ \underbrace{2T(n/2)}_{\text{再帰}} + \underbrace{\mathrm{O}(n)}_{\text{統合}} & (n \geq 2) \end{cases} = \mathrm{O}(n\log n)$$

マージソート：
マージソートの計算量は$O(n\log n)$

- 計算量評価の再帰式：

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & (n=1) \\ 2T(n/2)+O(n) & (n\geq 2)\end{cases}$$

- $T(n)=2T(n/2)+cn=2\left(T\left(\frac{n}{2^2}\right)+c\frac{n}{2}\right)+cn$

$$=2\left(2\left(\cdots\left(2\left(\underbrace{T\left(\frac{n}{2^k}\right)}_{c}+c\frac{n}{2^{k-1}}\right)+c\frac{n}{2^{k-2}}\right)\cdots\right)+c\frac{n}{2}\right)+cn$$

$$=c2^k+\underbrace{cn+\cdots+cn}_{k}=O(n\log n)$$

分類定理（簡易版）：
計算量の再帰式から計算量を導く定理

- $T(n)$の漸化式から$T(n)$のオーダーを導く
- 定理：大きさnの問題を大きさ $\frac{n}{b}$ の問題 a 個に分割した
  - つまり、$T(n) = \begin{cases} c & (n = 1) \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn & (n \geq 2) \end{cases}$
  - このとき：$T(n) = \begin{cases} O(n) & (a < b) \\ O(n \log n) & (a = b) \\ O\left(n^{\log_b a}\right) & (a > b) \end{cases}$

クイックソート：
分割統治法にもとづく高速なアルゴリズム

- 最もよく用いられる、分割統治に基づくソートアルゴリズム
- 平均計算量$O(n \log n)$ だが、最悪では$O(n^2)$かかる
  - ただし、実用的には速い
  - その場での ソートが可能

p：配列中でソートする部分の先頭
r：配列中でソートする部分の末尾

- アルゴリズム QuickSort(A, p, r)

1. $q \leftarrow$ Partition(A, p, r) ：分割点qをみつけて分割
2. QuickSort(A, p, q)
3. QuickSort$(A, q+1, r)$

（2.・3.）分割したそれぞれについてクイックソートを適用

クイックソートの分割関数 Partition(A, p, r)：基準となる要素（枢軸）との大小比較で2グループに分割

- クイックソートではある数との大小で要素を2群に分割する
  - 比較対象の要素$A[p]$：枢軸(pivot)とよぶ
- $A[p:r]$を$A[p]$以下の要素と、$A[p]$より大きい要素に分割
  - $A[p]$以下の要素が新たに$A[p:q]$となる
  - $A[p]$より大きい要素が新たに$A[q+1:r]$となる
  - 2つのインデックス i, j を使って配列$A[p:r]$を操作：
    1. $j = r$から左に走査して枢軸以下の要素を発見する
    2. $i = p$から右に走査する
    3. 枢軸より大きい要素を発見したら両者を入れ替える
    4. 両者が出会うまで繰り返す（$O(r-p)$）

ぶつかったところがq

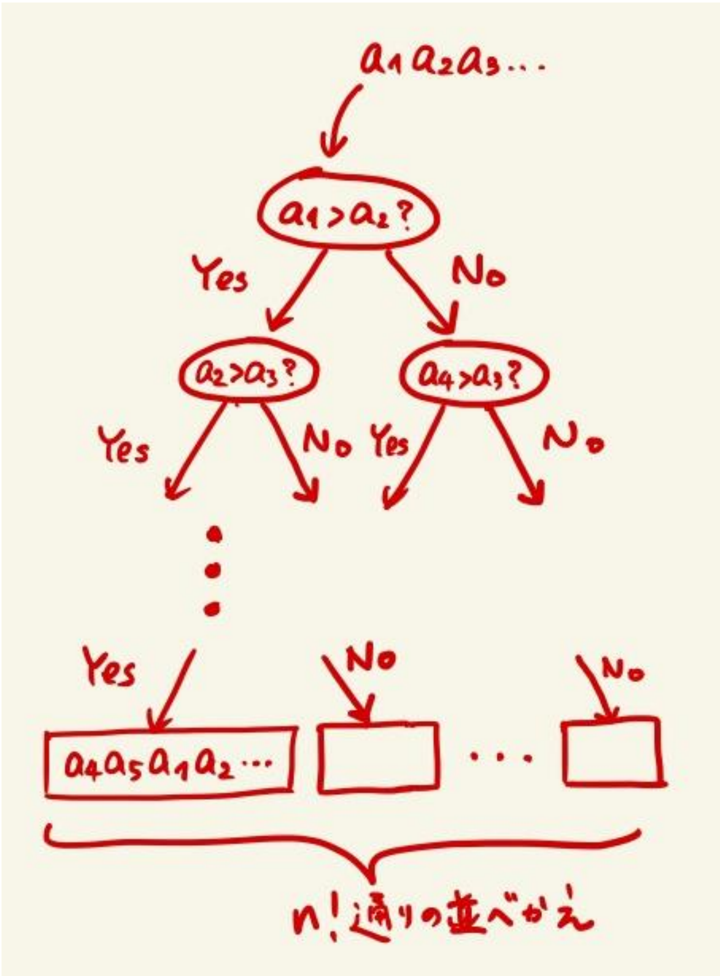
クイックソートの計算量：「平均で」$O(n \log n)$ を実現できる

- 最悪の場合：
n個の要素が$n-1$個と1個に分割されたとすると$O(n^2)$
  - 1回の分割でサイズが定数個しか減らない場合
- 最良の場合：
n個の要素が$\frac{n}{2}$個2セットに分割されたとすると$O(n \log n)$
  - 分割定理で$a = b$ の場合
  - 定数分の1のサイズに分割される場合
- 最悪の場合を避けるために：ランダムに枢軸を選択
  - 問題例に依存しない平均計算量を達成できる

ソートの計算量の下界：$O(n \log n)$より小さい計算量は達成できない

- ソートのアルゴリズムは最悪計算量$O(n \log n)$が必要
- n個の要素はすべて異なるとすると、ソート後に得られる列の可能性は$n!$通り
- ソートは2つの数の比較を繰り返すことで動く
- ソートの流れを2分木で書くことにする：
  - 各頂点で2つの数を比較して分岐
  - 葉は、ある特定の並べ替えに対応
  - 全ての並べ替えが可能であるために葉が$n!$個は必要
  - これを実現するためには少なくとも木の高さが$O(n \log n)$

ソートの計算量の下界：$O(n \log n)$より小さい計算量は達成できない



この高さがどう頑張っても$O(n \log n)$になることを示す

一番下では、とある並び替えが得られる

ソートの計算量の下界：$O(n \log n)$より小さい計算量は達成できない

- 全ての可能な並び替えが得られるためには、最下段の要素が少なくとも $n!$ は必要
- 図の高さがちょうど h（完全2分木）とすると、最下段の要素（葉）の数は 2^h
  – 逆に2^h個の葉をもつ木で最も低いのが完全2分木

木の高さが比較回数（＝計算量）に対応

- よって、$2^h \geqq n!$でないといけない
- 対数をとると $h \geqq \log n! \geqq \log(n/e)^n = n \log n - n \log e = O(n \log n)$
  – なお、Stirlingの公式 $n! \geqq \sqrt{2\pi n}(n/e)^n \geqq (n/e)^n$

順序統計量：
小さい方からk番目の要素は線形時間で発見可能

- 順序統計量：小さい方からk番目の要素
- 自明なやり方：ソートを使えば$O(n \log n)$
- 工夫すれば$O(n)$で可能：
  - **平均的に$\boldsymbol{O(n)}$で見つける方法**
  - 最悪ケースで$O(n)$で見つける方法

  の二つのやり方を紹介する

平均$O(n)$の順序統計量アルゴリズム：クイックソートと同じ考え方で可能

- $q \leftarrow \mathrm{Partition}(A, p, r)$を実行した結果：
  1. $k \leq q$ であれば、求める要素は$A[p{:}\,q]$にある
  2. $k > q$であれば、求める要素は$A[q+1{:}\,r]$にある
  - 再帰的にPartitionを呼ぶことで範囲を限定していく
- 平均的には問題サイズは半々になっていく：

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) = O(n)$$

注：クイックソートでは**2**$T\left(\frac{n}{2}\right)$だった

分割のコスト