

アルゴリズムとデータ構造⑪

～ 問題の難しさ ～

鹿島久嗣

問題の難しさのクラス：

- クラスP
- クラスNP
- $P \neq NP$ 予想
- NP完全
- NP困難

問題の難しさ：

もっとも計算量の小さいアルゴリズムで測る

- 我々は、アルゴリズムの効率の良し悪しを計算量で測る
- では、問題の難しさはどう測るか？
- 問題 Q に対するアルゴリズムの集合 $A(Q)$ を考える
- 問題 Q の難しさを、最も計算量が小さい $a \in A(Q)$ の計算量で測ることにする
- 例：ソート問題の計算量の下界は $O(n \log n)$
 - （理論的には）これより高速なアルゴリズムを探す必要はない

クラスP :

多項式時間アルゴリズムが存在する問題のクラス

- 決定問題を考える

- 決定問題 : YesかNoで答えられる問題

- 理論的には、
問題が難しいか？ = 問題が多項式時間で解けるか？
に興味がある

- クラスP :
多項式時間アルゴリズムが存在するような問題のクラス

クラスNP :

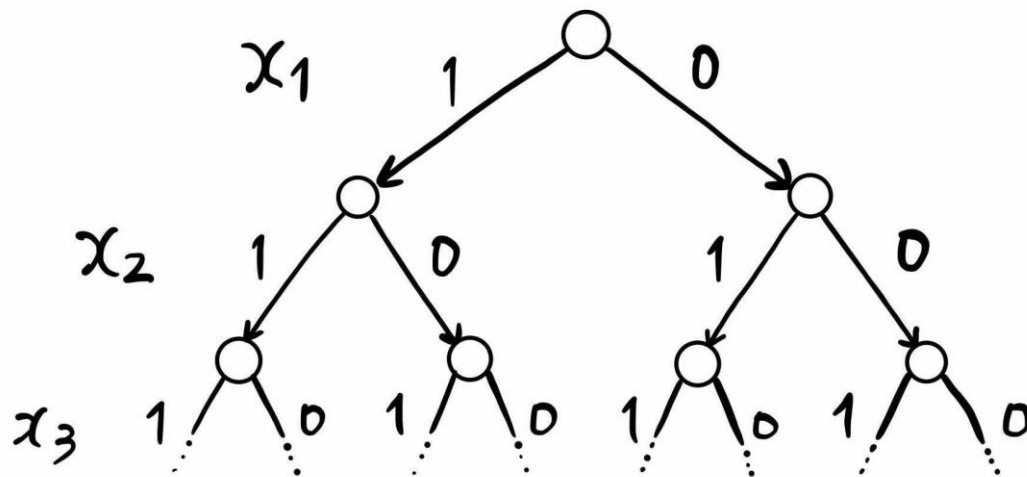
非決定的な計算機で多項式時間で解けるクラス

- 非決定的な計算機を考える：
 - 好きなだけ並列化できる理想的な計算機
 - プロセスを k 分岐して、並列実行できる命令がある
 - $O(n)$ 時間で n ビットのベクトルをすべて調べることができる
- NP : 問題の答えが「Yes」のときには、非決定的な計算機を使って、多項式時間でこれを調べることでできる問題
 - 言い換えると : 答えの候補が与えられたときに、答えの正しさを(決定的な計算機で) 多項式時間で検証できる問題
- 実用上重要な問題はほぼこのクラスに入る

非決定的な計算機で多項式時間で解けるクラス

- 順列、 $C(n, m)$ など

- ## ■ 実用上重

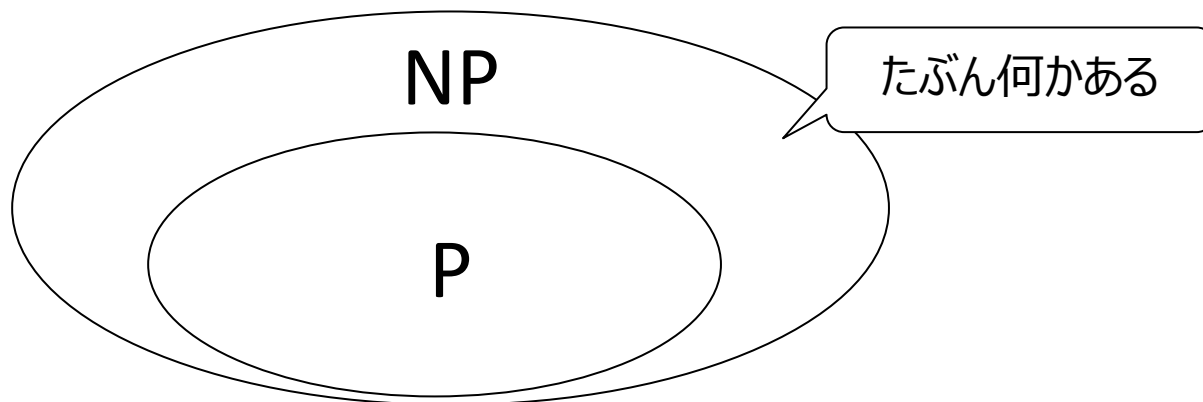


答えの正しさを 問う問題

P≠NP予想：

おそらく、NPはPよりも難しい

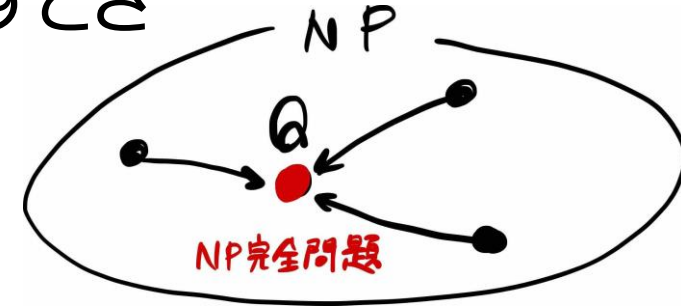
- 「クラスNPに属するが、Pには属さない問題」は、
これまでに見つかっていない（！）
 - $P \subseteq NP$ であるが、 $P \neq NP$ かどうかは、まだ分かっていない
(※ 解けたら100万ドル)
 - おそらく、 $P \neq NP$ であるとみんな思っている



NP完全：

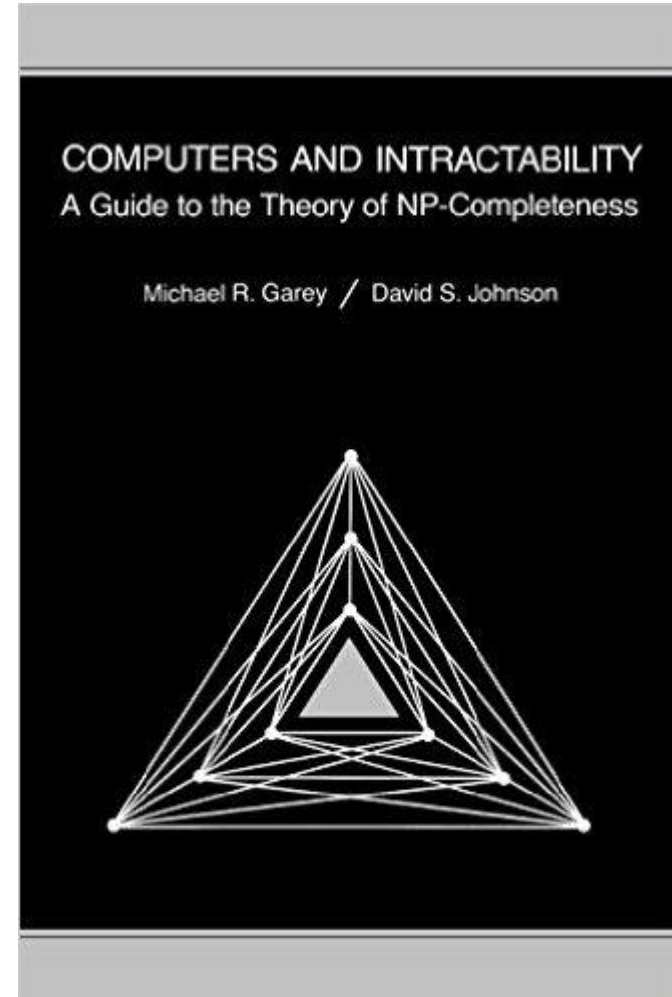
NPの中でもっとも難しい問題

- NP完全： 判定問題Qは以下を満たすときNP完全に属するという
 - QはNPに属する
 - NPの任意の問題が多項式時間でQに変換できる
- もし、NP完全問題QがクラスPに属するならば、NPに属する全ての問題はPに属することになる
 - なぜならば、NP完全問題Qが多項式時間で解ければ、ほかのNP問題も多項式時間で解けることになるから



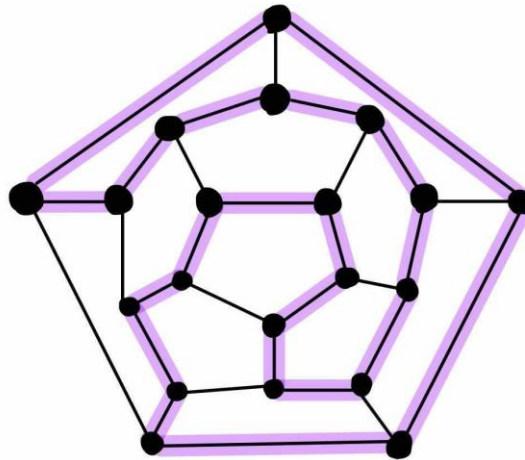
NP完全問題の例： 多くの重要な問題がNP完全

- ハミルトン閉路問題
- クリーク問題
- 頂点被覆問題
- 集合被覆問題
- 新たな問題に出会ったときには、それがNP完全などでないかをチェックすべし



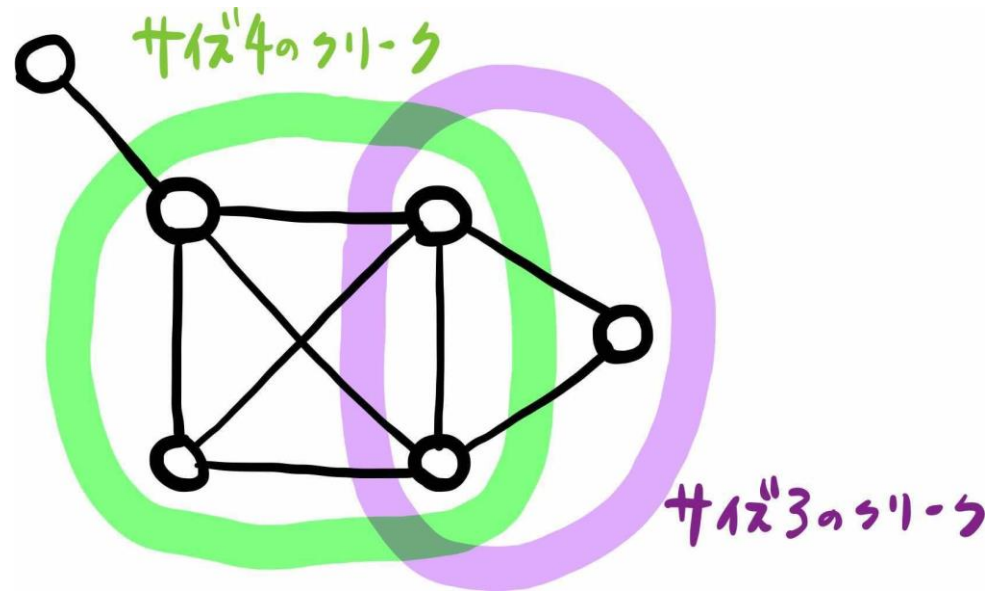
NP完全問題の例： ハミルトン閉路問題

- ハミルトン閉路：
グラフ $G = (V, E)$ において、すべての頂点をちょうど1回ずつ訪れて出発点に戻る道（閉路）
- ハミルトン閉路問題：
 G がハミルトン閉路をもつかどうかの決定問題



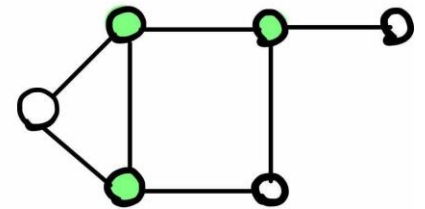
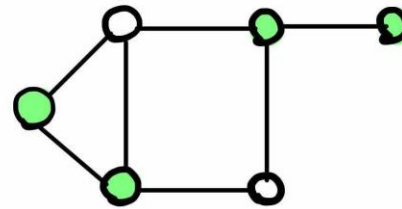
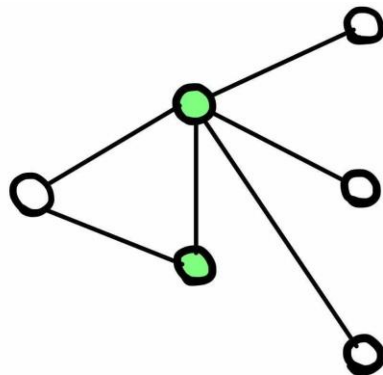
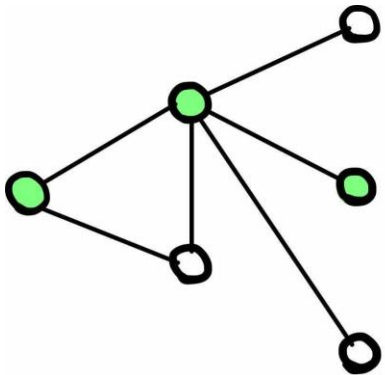
NP完全問題の例： クリーク問題

- クリーク： G の部分グラフ G' であって、 G' の全ての頂点对が互いに辺でつながれているもの
- クリーク問題： G が頂点数 k のクリークをもつかどうかの決定問題



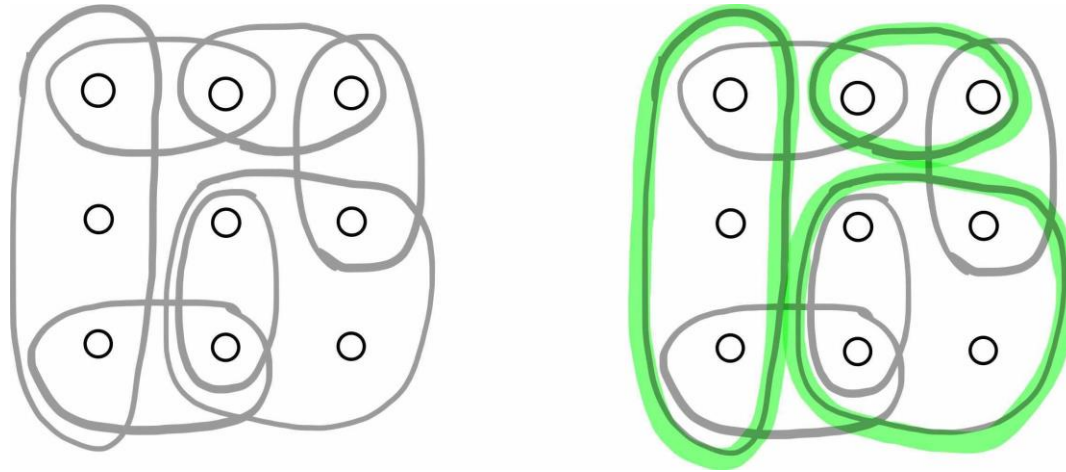
NP完全問題の例： 頂点被覆問題

- グラフ $G = (V, E)$ において全ての $e \in E$ の少なくとも一方が $V' \subseteq V$ に含まれているとき、 V' を頂点被覆という
- 頂点被覆問題 (vertex cover) : 頂点「で」被覆
 G が頂点数 k の頂点被覆をもつかどうかの決定問題



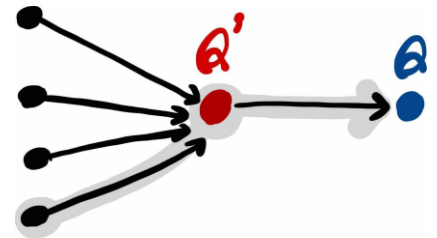
NP完全問題の例： 集合被覆問題

- n 個の集合 S_1, S_2, \dots, S_n があるとき、そのうち k 個を用いて $\bigcup_{j=1}^n S_j = \bigcup_{j=1}^k S_j$ とできるとき、大きさ k の集合被覆という
- 集合被覆問題 (set cover) : 集合「で」被覆
 S_1, \dots, S_n が大きさ k の集合被覆をもつかどうかの決定問題



NP完全であることの証明法： 多項式時間帰着によって示す

- ある問題QがNP完全であることを示すためには、あるNP完全問題Q'からQに多項式時間で帰着できることを示せばよい
 - Qの任意の問題例をQ'の問題例に、多項式時間で対応付けることができることを示す
 - Q'の問題例の解から、もとのQの問題例の解が、多項式時間で求まることを示す
- ちなみに、最初のNP完全問題は定義に従い示す必要がある



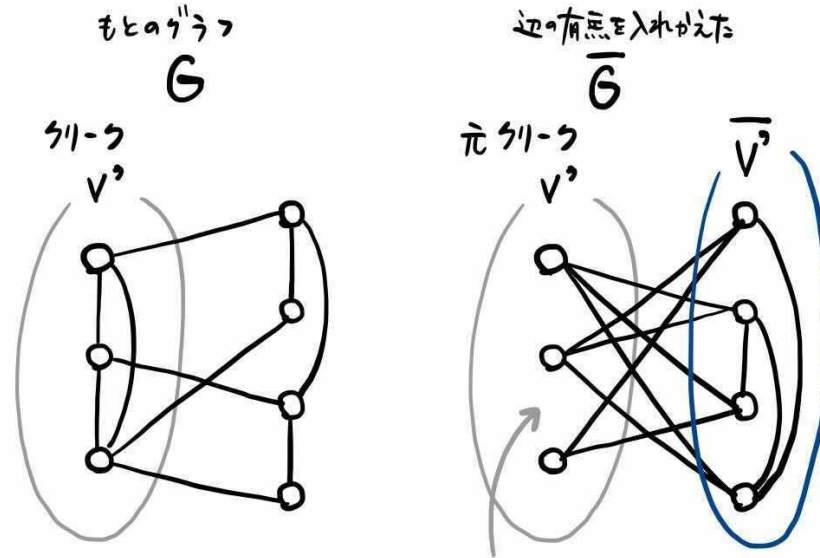
NP完全性の証明の例：

クリーク問題→頂点被覆問題→集合被覆問題の順に帰着

- クリーク問題がNP完全であることは既に分かっているとする
- 頂点被覆問題はNP完全
 - クリーク問題から頂点被覆問題に多項式時間帰着
 - もとのグラフ G で、辺のあるところとないところを逆転したグラフ G' 上での、（サイズ $|V| - k$ の）頂点被覆問題
- 集合被覆問題はNP完全
 - 頂点被覆問題から集合被覆問題に多項式時間帰着

NP完全性の証明の例： クリーク問題→頂点被覆問題→集合被覆問題の順に帰着

クリーク問題がNP完全であることは既に分かっている。

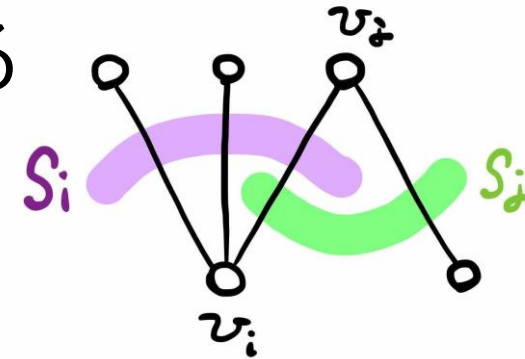


こちらには辺がないので V' の頂点は被覆に不要 $\rightarrow \bar{V}'$ の頂点 ($|V| - k$ 個) で被覆できる。
逆に、 \bar{V}' が頂点被覆ならば、 G において V' 内に辺はない。

G において V' がサイズ k のクリークをなす $\leftrightarrow \bar{G}$ において \bar{V}' がサイズ $|V| - k$ の頂点被覆

集合被覆問題のNP完全性： 頂点被覆問題からの帰着法

- 集合被覆問題のNP完全性を、
頂点被覆問題からの帰着によって証明する
- V の頂点 v_1, \dots, v_n のそれぞれに対して、
 v_i に接続するすべての辺の集合を S_i とする
(頂点被覆において v_i が被覆できる辺の集合)
- S_1, \dots, S_n に対する集合被覆問題 \Leftrightarrow もとの頂点被覆問題
– 頂点 v_i を選ぶと、辺集合 S_i がカバーされる
- 問題の変換は $O(|V|^2)$ でできる



NP困難：

NPのどの問題と比較しても、それ以上に難しい問題

■ NP困難問題Q：

- NPの任意の問題が多項式時間でQに変換できる
(必ずしもQがNPに入っている必要はない)
- 判定問題とは限らない問題Qが、
NP完全問題Q'を部分問題として含むもの

■ 巡回セールスマン問題：

ハミルトン閉路のなかでコストが最小のものを求める問題

- これが解ければついでにハミルトン閉路も解ける

■ 同様に、最大クリーク、最小頂点被覆、最小集合被覆、...