KYOTO UNIVERSITY

アルゴリズムとデータ構造④
～ 分割統治法 ～

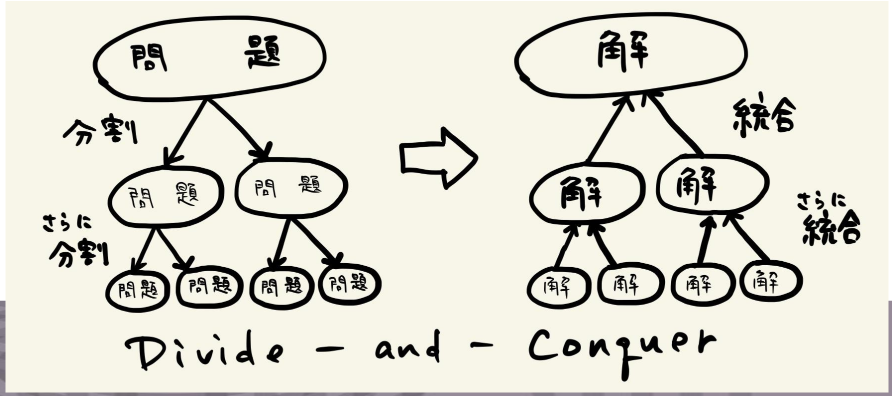
鹿島久嗣

DEPARTMENT OF INTELLIGENCE SCIENCE
AND TECHNOLOGY

分割統治法

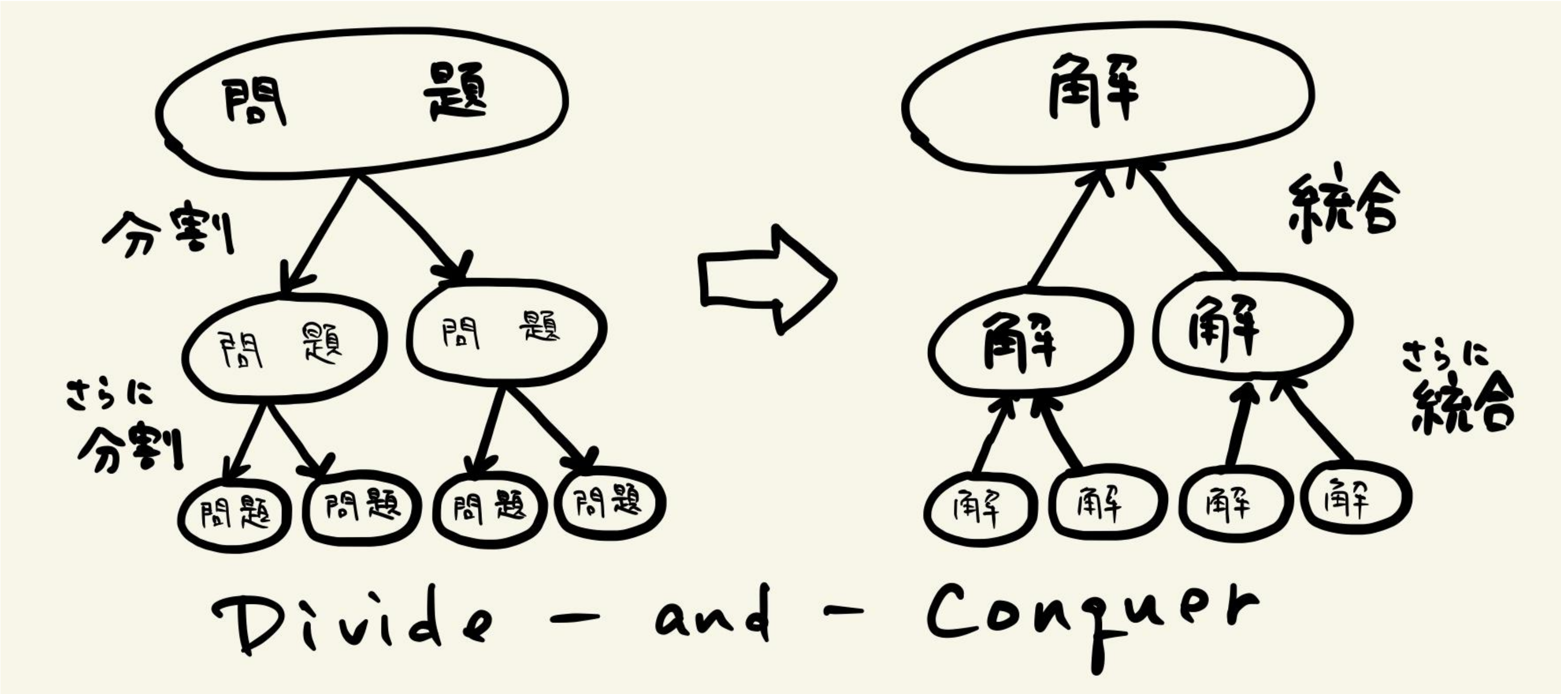
分割統治法：
アルゴリズム設計指針の1つで、問題を小問題に分割して解く

- 特定の問題に対するアドホックな個別の解法ではなく、多くの問題に適用可能なアルゴリズムの一般的な設計指針
  – 分割統治法、動的計画法、…
- 分割統治法：
  – 元の問題を、同じ構造をもった小さな問題に分割
  – 小さな問題の解を統合して元の問題の解を得る



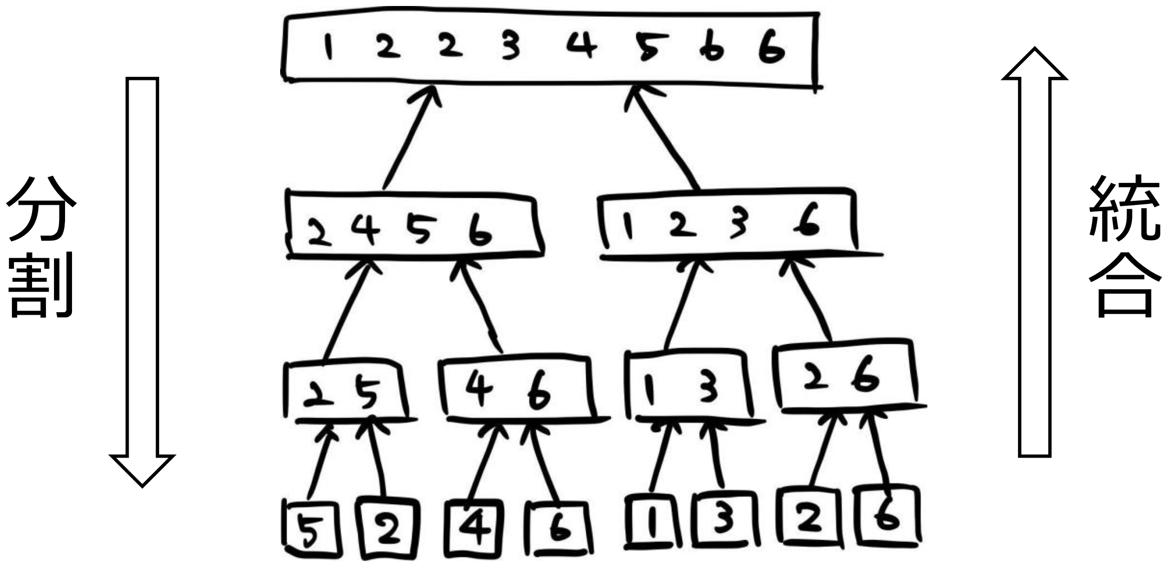
分割統治法：
ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑ設計指針の1つで、問題を小問題に分割して解く

- 分割統治法（Divide-and-conquer）：
  - 分割：元の問題を、同じ構造をもった小さな問題に分割
  - 統合：小さな問題の解を統合して元の問題の解を得る



分割統治法の例：
マージソート

- 入力された配列を前後に分割し、それぞれに対してマージソートを適用する
  - 再帰的に分割を行うことで、サイズ1の配列まで到達する
  - 逆向きに統合して解を構成する
    - 例：配列 (5,2,4,6,1,3,2,6)→ (5,2,4,6)と(1,3,2,6)



マージソート：
マージソートの計算量は$O(n\log n)$

- $n = 2^k$として$O(n\log n)$
  - ただし実用的には次に紹介するクイックソートの方が高速
- 計算量評価の再帰式：

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & (n = 1) \\ \underbrace{2T(n/2)}_{\text{再帰}} + \underbrace{O(n)}_{\text{統合}} & (n \geq 2) \end{cases} = O(n\log n)$$

  - 統合のコストは、統合する2つの配列の長さの合計
    $\Rightarrow$ 段ごとの総コストは$O(n)$

マージソートの計算量は$O(n\log n)$

- 計算量評価の再帰式：

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & (n = 1) \\ 2T(n/2) + O(n) & (n \geq 2) \end{cases}$$

- $T(n) = 2T(n/2) + cn = 2\left(T\left(\frac{n}{2^2}\right) + c\frac{n}{2}\right) + cn$

$$= 2\left(2\left(\cdots\left(2\left(\underbrace{T\left(\frac{n}{2^k}\right)}_{c} + c\frac{n}{2^{k-1}}\right) + c\frac{n}{2^{k-2}}\right)\cdots\right) + c\frac{n}{2}\right) + cn$$

$$= c2^k + \underbrace{cn + \cdots + cn}_{k} = O(n \log n)$$

分類定理（簡易版）：
計算量の再帰式から計算量を導く定理

- $T(n)$の漸化式から$T(n)$のオーダーを導く
- 定理：大きさnの問題を大きさ $\frac{n}{b}$ の問題 a 個に分割した
  - つまり、$T(n) = \begin{cases} c & (n = 1) \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn & (n \geq 2) \end{cases}$
  - このとき：$T(n) = \begin{cases} O(n) & (a < b) \\ O(n \log n) & (a = b) \\ O\left(n^{\log_b a}\right) & (a > b) \end{cases}$

クイックソート

クイックソート：
分割統治法にもとづく高速なアルゴリズム

- 最もよく用いられる、分割統治に基づくソートアルゴリズム
- 平均計算量$O(n\log n)$ だが、最悪では$O(n^2)$かかる
  - ただし、実用的には速い
  - その場のソートが可能

p：配列中でソートする部分の先頭
r：配列中でソートする部分の末尾

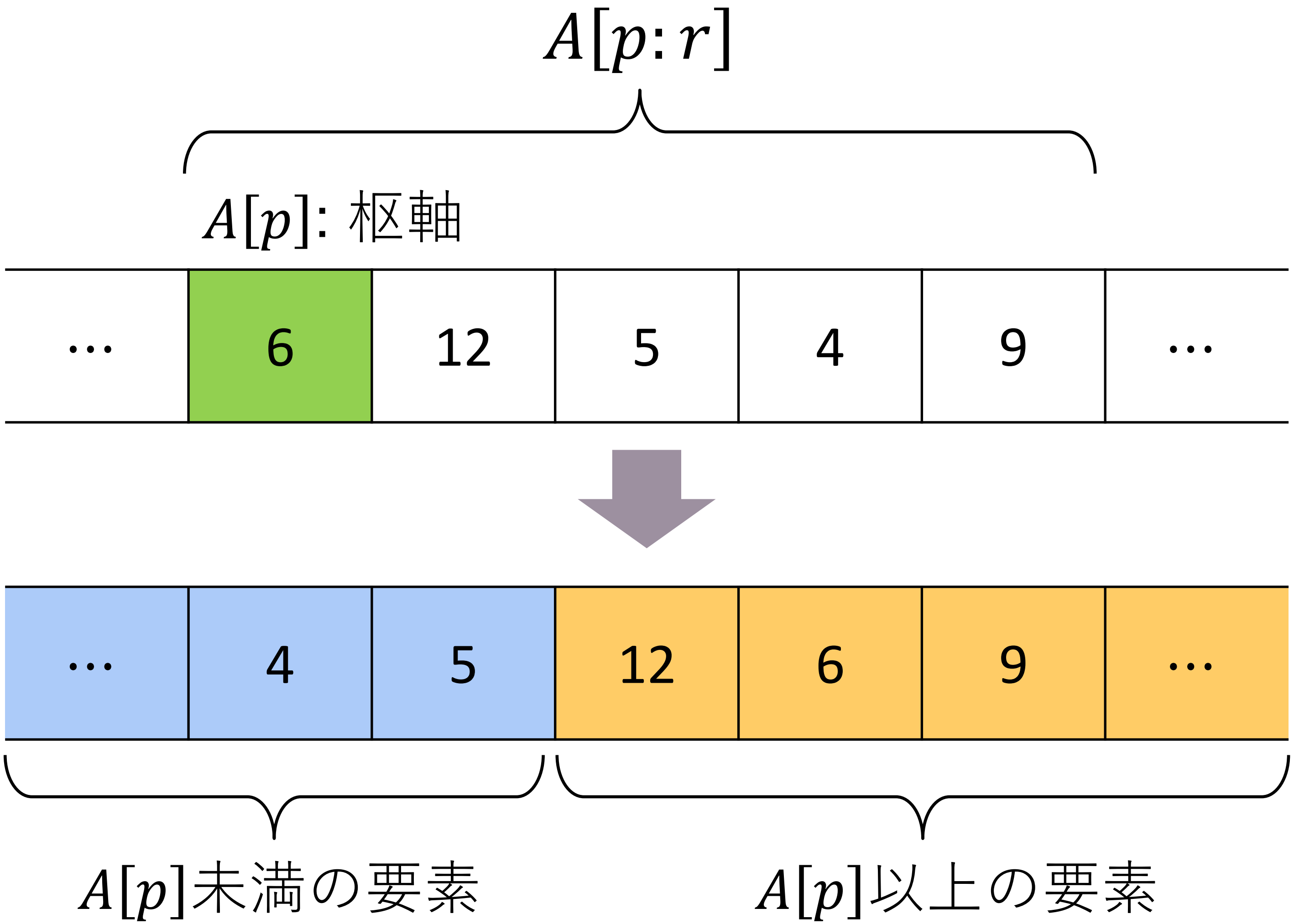
- アルゴリズム $\mathrm{QuickSort}(A,p,r)$

1. $(A,q) \leftarrow \mathrm{Partition}(A,p,r)$ ：分割点qをみつけて分割
2. $\mathrm{QuickSort}(A,p,q)$
3. $\mathrm{QuickSort}(A,q+1,r)$

（2・3）分割したそれぞれについてクイックソートを適用

分割関数 Partition(A, p, r)：基準となる要素（枢軸）との大小比較で2グループに分割

- $A[p: r]$を$A[p]$未満の要素と、$A[p]$以上の要素に分割



分割関数 Partition(A, p, r)：基準となる要素（枢軸）との大小比較で2グループに分割

- クイックソートでは、ある数との大小で要素を2群に分割する
  - 比較対象の要素$A[p]$を枢軸(pivot)とよぶ
- $A[p:r]$を$A[p]$以下の要素と、$A[p]$以上の要素に分割
  - $A[p]$以下の要素が新たに$A[p:q]$となる
  - $A[p]$より大きい要素が新たに$A[q+1:r]$となる
  - 2つのインデックス i, j を使って配列$A[p:r]$を操作：
    1. $j = r$から左に走査して、枢軸以下の要素を発見する
    2. $i = p$から右に走査して、枢軸以上の要素を発見する

    → 両者を入れ替える

    ※ なお、$i = j$となった時点で停止する

$O(r-p)$

クイックソートの計算量：「平均で」$O(n \log n)$ を実現できる

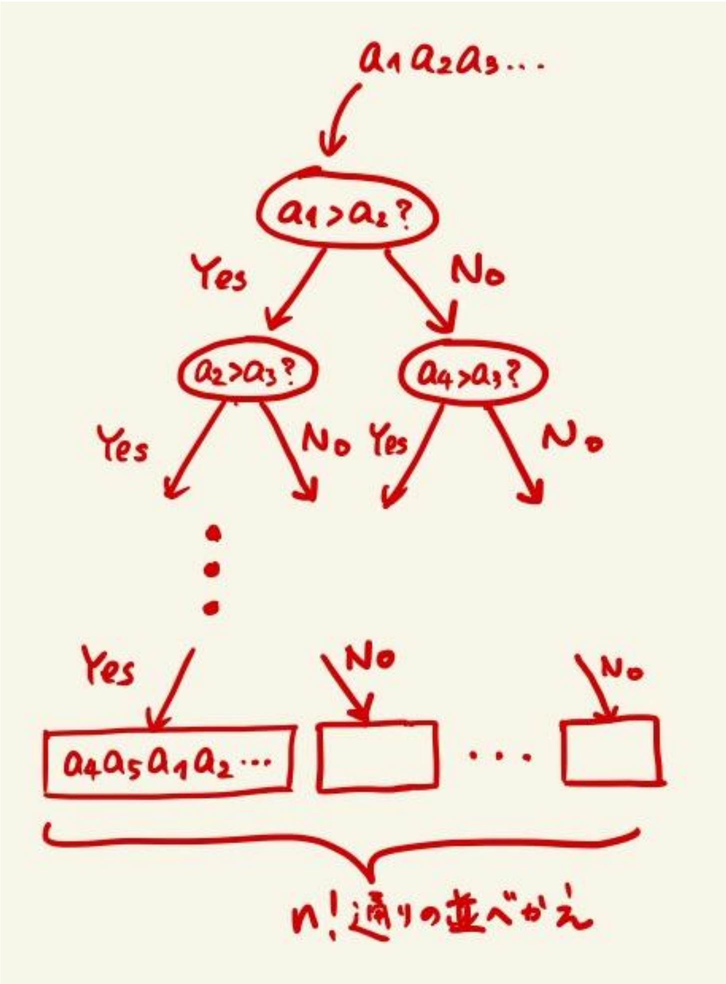
- 最悪の場合：
  n個の要素が$n-1$個と1個に分割されたとすると$O(n^2)$
  - 1回の分割でサイズが定数個しか減らない場合
- 最良の場合：
  n個の要素が $\frac{n}{2}$ 個 2セットに分割されたとすると$O(n \log n)$
  - 分割定理で$a = b$ の場合
  - 定数分の1のサイズに分割される場合
- 最悪の場合を避けるために：ランダムに枢軸を選択
  - 問題例に依存しない平均計算量を達成できる

ソートの計算量の下界

ソートの計算量の下界：$O(n \log n)$より小さい計算量は達成できない

- ソートのアルゴリズムは最悪計算量$O(n \log n)$が必要
- n個の要素はすべて異なるとすると、ソート後に得られる列の可能性は$n!$通り
- ソートは2つの数の比較を繰り返すことで動く
- ソートの流れを2分木で書くことにする：
  - 各頂点で2つの数を比較して分岐
  - 葉は、ある特定の並べ替えに対応
  - 全ての並べ替えが可能であるために葉が$n!$個は必要
  - これを実現するためには少なくとも木の高さが$O(n \log n)$

ソートの計算量の下界：
$O(n\log n)$より小さい計算量は達成できない



一番下では、とある並び替えが得られる

この高さがどう頑張っても$O(n\log n)$になることを示す

ソートの計算量の下界：$O(n \log n)$より小さい計算量は達成できない

- 全ての可能な並び替えが得られるためには、最下段の要素が少なくとも $n!$ は必要
- 図の高さがちょうど h（完全2分木）とすると、最下段の要素（葉）の数は 2^h
  - 逆に2^h個の葉をもつ木で最も低いのが完全2分木

木の高さが比較回数（＝計算量）に対応

- よって、$2^h \geqq n!$でないといけない
- 対数をとると $h \geqq \log n! \geqq \log(n/e)^n = n \log n - n \log e = O(n \log n)$
  - なお、Stirlingの公式 $n! \geqq \sqrt{2\pi n}(n/e)^n \geqq (n/e)^n$

順序統計量

順序統計量：小さい方からk番目の要素は線形時間で発見可能

- 順序統計量：小さい方からk番目の要素
- 自明なやり方：ソートを使えば$O(n \log n)$
- 工夫すれば$O(n)$で可能：
  - 平均的に$O(n)$で見つける方法
  - 最悪ケースで$O(n)$で見つける方法

  の二つのやり方を紹介する

平均$O(n)$の順序統計量アルゴリズム：クイックソートと同じ考え方で可能

- $(A, q) \leftarrow \mathrm{Partition}(A, p, r)$を実行した結果：
  1. $k \leq q$ であれば、求める要素は$A[p{:}\,q]$にある
  2. $k > q$であれば、求める要素は$A[q+1{:}\,r]$にある
  - 再帰的にPartitionを呼ぶことで範囲を限定していく
- 平均的には問題サイズは半々になっていく：

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) = O(n)$$

注：クイックソートでは**2**$T\left(\frac{n}{2}\right)$だった

分割のコスト

平均O(n)の順序統計量アルゴリズム：
クイックソートと同様に最悪ケースで$O(n^2)$かかってしまう

- $(A, q) \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$の結果：

配列$A[p,r]$を枢軸以下／以上の要素に分け、qの前後に分割

1. $k \le q$ であれば、求める要素は$A[p{:}\, q]$にある
2. $k > q$であれば、求める要素は$A[q+1{:}\, r]$にある

– 再帰的にPartitionを呼ぶことで範囲を限定していく

- 平均的には問題サイズは半々になっていくので$O(n)$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) = O(n)$$

注：クイックソートでは**2**$T\left(\frac{n}{2}\right)$だった

- 最悪ケースでは問題サイズは定数しか減らないので$O(n^2)$
- 問題サイズが確実に比率で減っていくようにしたい

最悪$O(n)$の順序統計量アルゴリズム：
うまく「だいたい真ん中」をとってくる

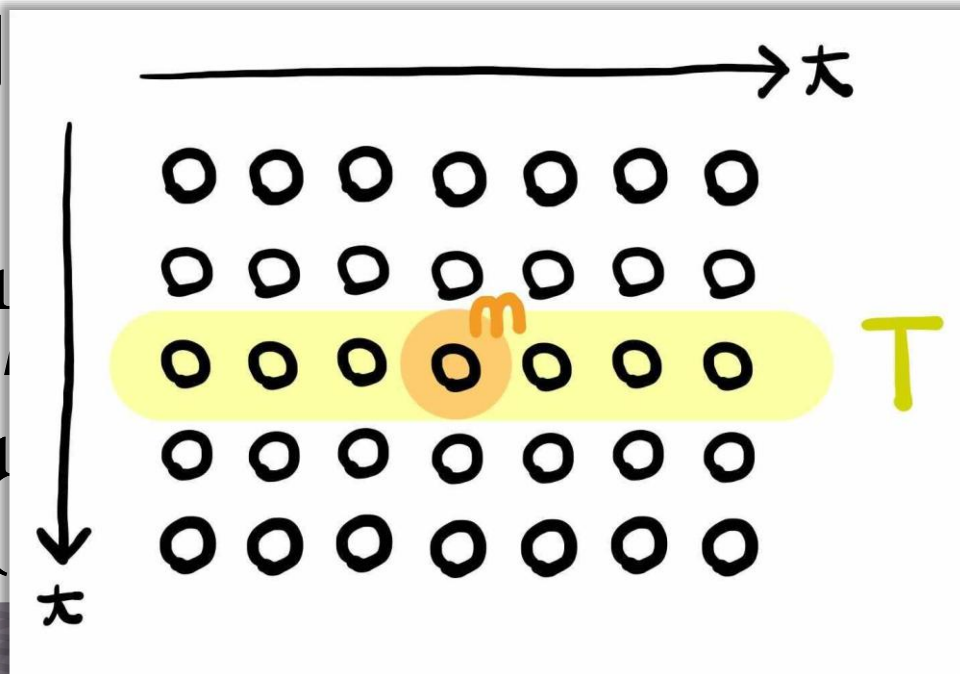
- $\mathrm{Order}(A, k)$：Aの中からk番目に小さい要素を見つける

1. Aを5個ずつのグループに分け、各グループをソートして中央値（3番目の値）を見つけ、これらを集めてTとする（定数個の要素のソートは定数時間でできることに注意）
2. Tの中央値mをみつける $\mathrm{Order}(T, \lfloor n/10 \rfloor)$
3. Aをmより小さいもの（S_1）、同じもの（S_2）、大きいもの（S_3）に分割する
4. (i) $k \le |S_1|$ならば$\mathrm{Order}(S_1, k)$を実行
   (ii) $|S_1| < k \le |S_1| + |S_2|$ ならば mは目的の要素
   (iii) $k > |S_1| + |S_2|$ならば
   $\mathrm{Order}\big(S_3, k - (|S_1| + |S_2|)\big)$を実行する。

最悪$O(n)$の順序統計量アルゴリズム：うまく「だいたい真ん中」をとってくる

- $\mathrm{Order}(A, k)$：Aの中からk番目に小さい要素を見つける

1. A を5個ずつのグループに分け、各グループをソートして中央値（3番目の値）を見つけ、これらを集めてTとする（定数個の要素のソートは定数時間でできることに注意）
2. Tの中央値mをみつける $\mathrm{Order}(T, \lfloor n/10 \rfloor)$
3. Aをmより小 … （S_2）、大きいもの（S_3）
4. (i) $k \leq |S_1$ …
   (ii) $|S_1| <$ … 目的の要素
   (iii) $k > |S_1$ …
   $\mathrm{Order}($ … する。



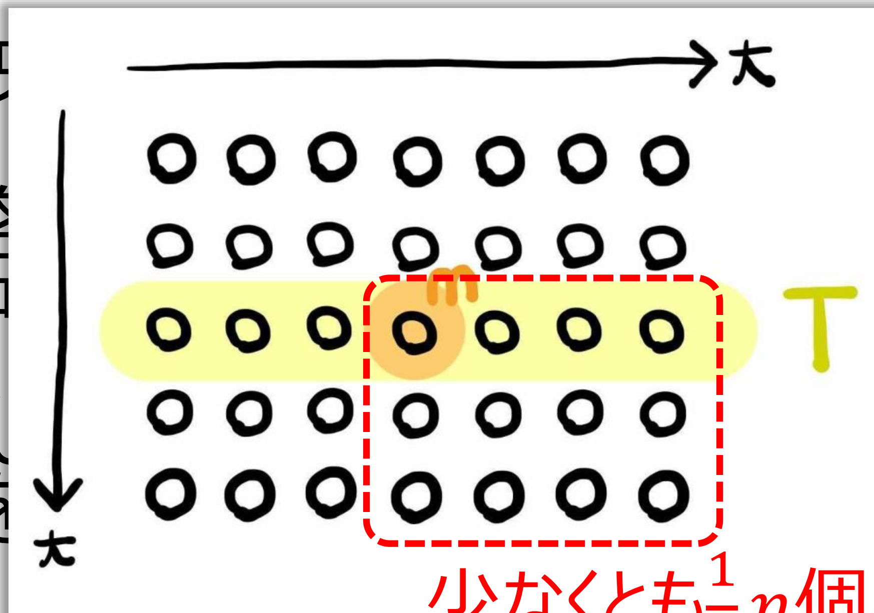
最悪O(n)の順序統計量アルゴリズム：計算量の漸化式

ステップ2

- $T(n) = O(n) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{3}{4}n \right\rceil\right) = O(n)$
  - ステップ4の分岐で (i)$\mathrm{Order}(S_1, k)$ が選ばれたとする
  - 中央値m以上の要素が少なくとも$\frac{1}{4}n$個ある
  - したがって中央値より小さい要素数は最大$\frac{3}{4}n$個
- 直観的には「各グループの中央値を集めた中の中央値は概ね全体の中央値になっている」
  - 全体を分割した小グループのそれぞれの中央値をあつめてその中央値をとると、おおむね全体の中央値が取れるはず

最悪$O(n)$の順序統計量アルゴリズム：計算量の漸化式

- $T(n) = O(n) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{3}{4}n \right\rceil\right) = O(n)$
  - –ステップ4の分岐で (i)Order(S_1, k) が選ばれたとする
  - –中央値m以上の要素が少なくとも$\frac{1}{4}n$個ある
  - –したがって中央 … 大$\frac{3}{4}n$個
- 直観的には「各 … た中の中央値は
  概ね全体の中 …
  - –全体を分割し … 中央値をあつめて
    その中央値を … 央値が取れるはず



最悪O(n)の順序統計量アルゴリズム：計算量の導出

- 定理：$s_1 + s_2 + \cdots + s_d < 1$として
$$T(n) = \begin{cases} c & (n \le n_0) \\ T(s_1 n) + T(s_2 n) + \cdots + T(s_d n) + c'n & (n > n_0) \end{cases}$$
とするとき、$T(n) \le \frac{cn}{1-(s_1+s_2+\cdots+s_d)} = O(n)$

- 今回のケースでは$s_1 = \frac{1}{5}, s_2 = \frac{3}{4}$であり、☝の定理を使うと
$T(n) = O(n)$