KYOTO UNIVERSITY

アルゴリズムとデータ構造⑤
～ 順序統計量・動的計画法 ～

鹿島久嗣

DEPARTMENT OF INTELLIGENCE SCIENCE AND TECHNOLOGY

順序統計量

順序統計量：
小さい方からk番目の要素は線形時間で発見可能

- 順序統計量：小さい方からk番目の要素
- 自明なやり方：ソートを使えば$O(n \log n)$
- 工夫すれば$O(n)$で可能：
  - 平均的に$O(n)$で見つける方法
  - 最悪ケースで$O(n)$で見つける方法

  の二つのやり方を紹介する

平均$O(n)$の順序統計量アルゴリズム：クイックソートと同じ考え方で可能だが、最悪ケースで$O(n^2)$

- $(A, q) \leftarrow \mathrm{Partition}(A, p, r)$の結果：配列$A[p, r]$を枢軸以下／以上の要素に分け、$q$の前後に分割
  1. $k \leq q$ であれば、求める要素は$A[p: q]$にある
  2. $k > q$であれば、求める要素は$A[q + 1: r]$にある

  –再帰的にPartitionを呼ぶことで範囲を限定していく
- 平均的には問題サイズは半々になっていくので$O(n)$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) = O(n)$$

注：クイックソートでは$2T\left(\frac{n}{2}\right)$だった

- 最悪ケースでは問題サイズは定数しか減らないので$O(n^2)$
- 問題サイズが確実に比率で減っていくようにしたい

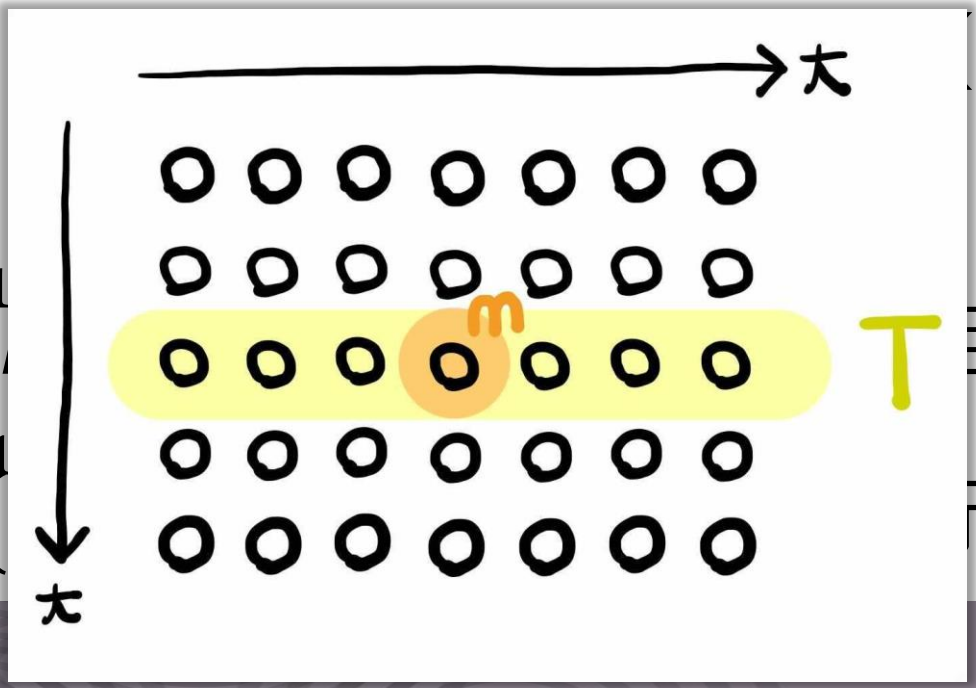
最悪$O(n)$の順序統計量アルゴリズム：うまく「だいたい真ん中」をとってくる

- $\mathrm{Order}(A, k)$：Aの中からk番目に小さい要素を見つける
  1. A を5個ずつのグループに分け、各グループをソートして中央値（3番目の値）を見つけ、これらを集めてTとする（定数個の要素のソートは定数時間でできることに注意）
  2. Tの中央値mをみつける $\mathrm{Order}(T, \lfloor n/10 \rfloor)$
  3. Aをmより小さいもの（S_1）、同じもの（S_2）、大きいもの（S_3）に分割する
  4. (i) $k \leq |S_1|$ならば$\mathrm{Order}(S_1, k)$を実行
     (ii) $|S_1| < k \leq |S_1| + |S_2|$ ならば mは目的の要素
     (iii) $k > |S_1| + |S_2|$ならば
     $\mathrm{Order}\big(S_3, k - (|S_1| + |S_2|)\big)$を実行する。

最悪$O(n)$の順序統計量アルゴリズム：うまく「だいたい真ん中」をとってくる

- $\mathrm{Order}(A, k)$：Aの中からk番目に小さい要素を見つける

1. Aを5個ずつのグループに分け、各グループをソートして中央値（3番目の値）を見つけ、これらを集めてTとする（定数個の要素のソートは定数時間でできることに注意）
2. Tの中央値mをみつける $\mathrm{Order}(T, \lfloor n/10 \rfloor)$
3. Aをmより小 S_2）、大きいもの（S_3）
4. (i) $k \leq |S_1$
   (ii) $|S_1| <$ 目的の要素
   (iii) $k > |S_1$
   Order(する。



最悪$O(n)$の順序統計量アルゴリズム：計算量の漸化式

- $T(n) = O(n) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{3}{4}n \right\rceil\right) = O(n)$

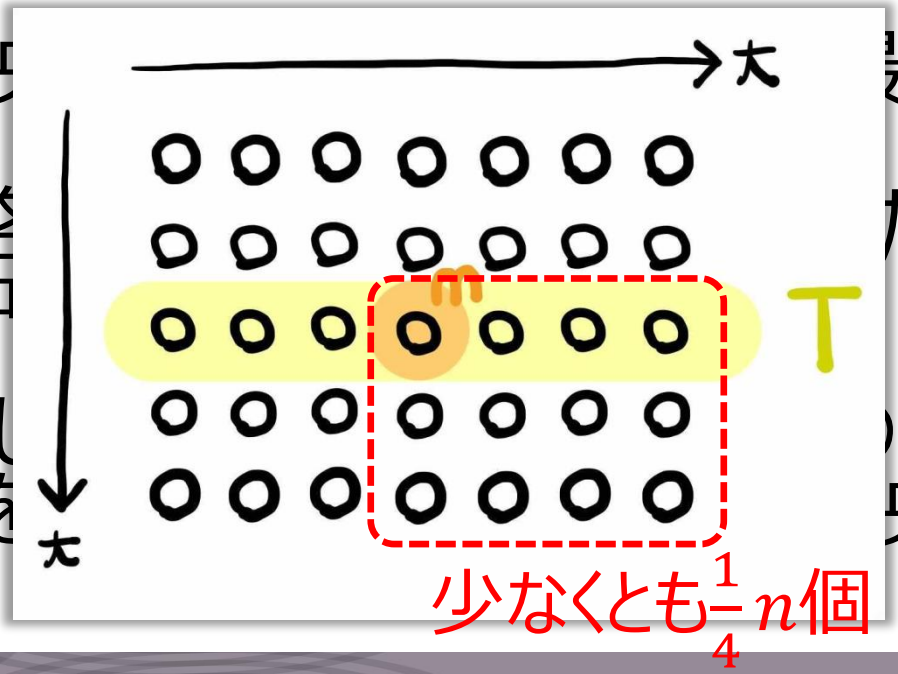
ステップ2

  - ステップ4の分岐で (i)$\mathrm{Order}(S_1, k)$ が選ばれたとする
  - 中央値m以上の要素が少なくとも$\frac{1}{4}n$個ある
  - したがって中央値より小さい要素数は最大$\frac{3}{4}n$個

- 直観的には「各グループの中央値を集めた中の中央値は概ね全体の中央値になっている」
  - 全体を分割した小グループのそれぞれの中央値をあつめてその中央値をとると、おおむね全体の中央値が取れるはず

最悪$O(n)$の順序統計量アルゴリズム：計算量の漸化式

- $T(n) = O(n) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{3}{4}n \right\rceil\right) = O(n)$
  - ステップ4の分岐で (i)$\mathrm{Order}(S_1, k)$ が選ばれたとする
  - 中央値m以上の要素が少なくとも$\frac{1}{4}n$個ある
  - したがって中央値m以上の要素は最大$\frac{3}{4}n$個
- 直観的には「各グループから取った中の中央値は概ね全体の中央値」
  - 全体を分割したグループの中央値をあつめてその中央値を取ると全体の中央値が取れるはず



最悪$O(n)$の順序統計量アルゴリズム：計算量の導出

- 定理：$s_1 + s_2 + \cdots + s_d < 1$として

$$T(n) = \begin{cases} c & (n \leq n_0) \\ T(s_1 n) + T(s_2 n) + \cdots + T(s_d n) + c'n & (n > n_0) \end{cases}$$

とするとき、$T(n) \leq \frac{cn}{1-(s_1+s_2+\cdots+s_d)} = O(n)$

- 今回のケースでは$s_1 = \frac{1}{5}, s_2 = \frac{3}{4}$であり、☝の定理を使うと

$T(n) = O(n)$

動的計画法

動的計画法：問題を再帰的に分割しボトムアップに解く

- 動的計画法と分割統治法はともに問題を再帰的に分割
  - 分割統治法：トップダウン
  - 動的計画法：ボトムアップ
- 動的計画法の流れ
  1. 問題の構造を再帰的に捉える
  2. 解を再帰的に構成する
  3. ボトムアップで解を計算する

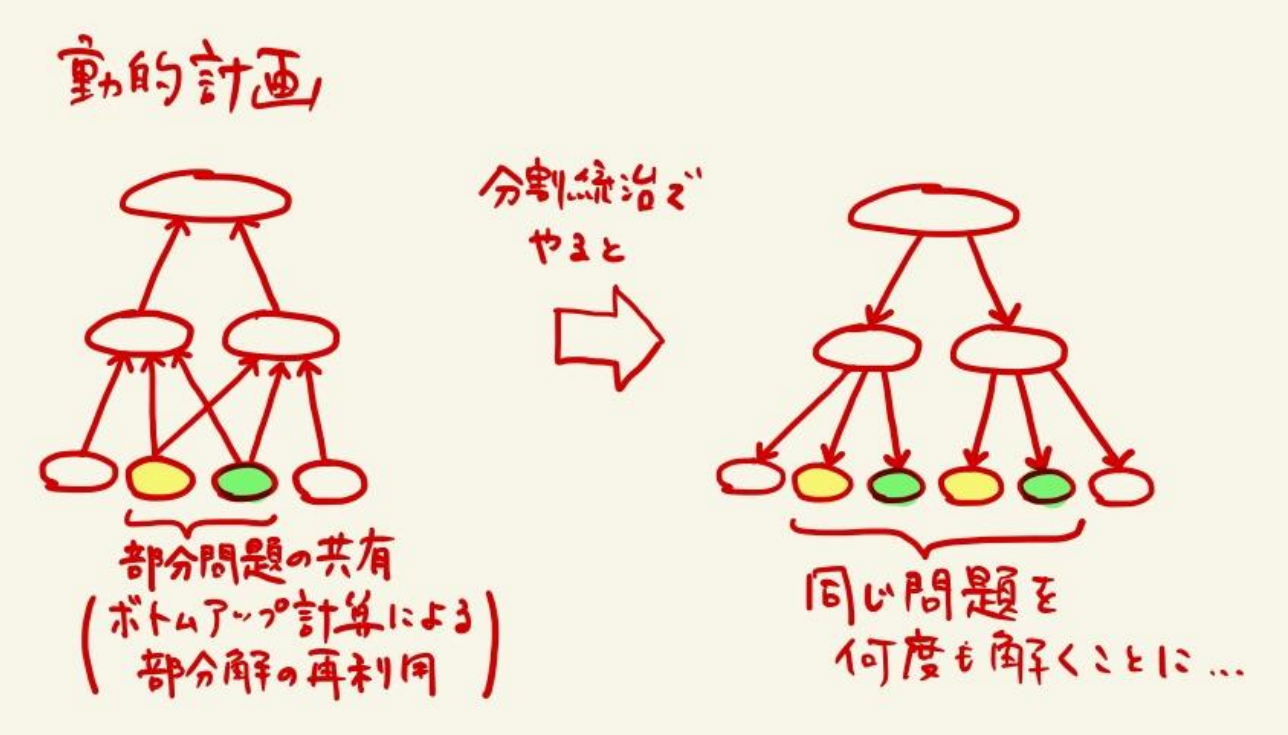
（1, 2 は）分割統治法と同じ

動的計画法のポイント：解の使いまわしによる効率化

- 分割された問題が重複している場合に差が生じる
  - トップダウンでは同じ問題を何度も解くことになる
  - ボトムアップでは解の使いまわしが可能
  - 両者に指数的な差が生じうる
- 逆にいえば、部分問題が重複していることが動的計画法のカギ

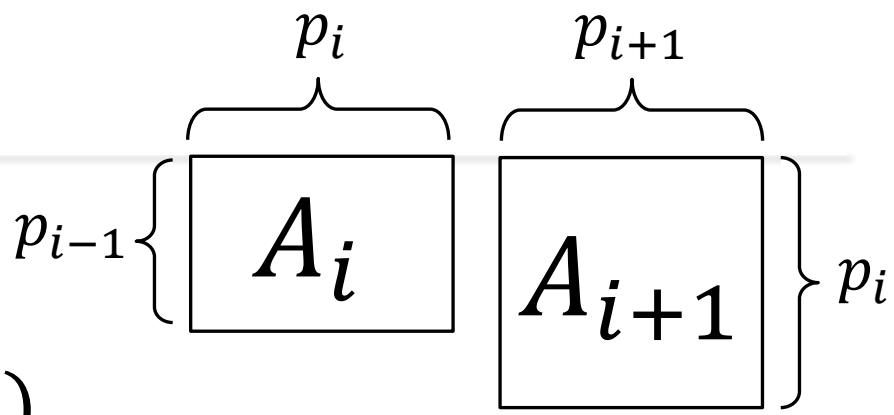
動的計画法のポイント：解の使いまわしによる効率化

- 分割された問題が重複している場合に差が生じる



- 部分問題が重複していることが動的計画法のカギ

動的計画法の例：複数の行列積の計算



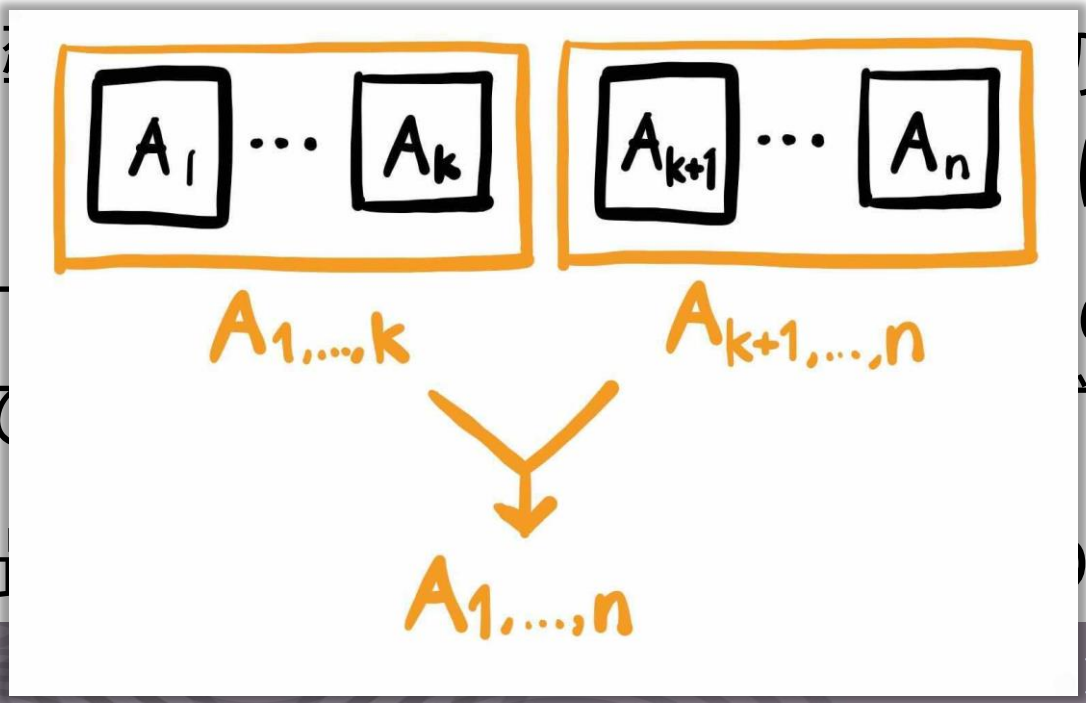
- 入力： 行列 $A_1, A_2, \ldots, A_n$
- 出力： 積 $A_1 A_2 \cdots A_n (= A_{1,\ldots,n})$
- 仮定：隣り合った行列の掛け算はできる
  - $A_i A_{i+1}$の計算は$O(p_{i-1}\, p_i\, p_{i+1})$かかる
- $A_1 : 10 \times 100, A_2 : 100 \times 5, A_3 : 5 \times 50$ とすると：
  - $\big((A_1 A_2) A_3\big) = 7500$
  - $\big(A_1 (A_2 A_3)\big) = 75000$

解の構成における観察：全体の最適解は部分最適解の組合せで作られている

- $A_1 A_2 \cdots A_n \left(= A_{1,\ldots,n}\right)$ の計算において、k番目の分割が最後にくるとする
  - つまり $A_{1,\ldots,k}$と$A_{k+1,\ldots,n}$を別々に計算して最後に統合する
    - ちなみに、最後の統合コストは$\mathrm{O}(p_0\ p_k\ p_n)$
- これが最適解であるなら、$A_{1,\ldots,k}$ と $A_{k+1,\ldots,n}$の計算コストもそれぞれ最小のはず（部分問題の最適解のはず）
  - 理由：そうでなければ、それぞれをコスト最小のものに置き換えるだけで、全体のコストがもっと下がるはず
- つまり、全体最適な解は、部分最適な解でつくられている

解の構成における観察：
全体の最適解は部分最適解の組合せで作られている

- $A_1 A_2 \cdots A_n \left(= A_{1,\ldots,n}\right)$ の計算において、k番目の分割が最後にくるとする
  - つまり $A_{1,\ldots,k}$ と $A_{k+1,\ldots,n}$ を別々に計算して最後に統合する
    - ちなみに、最後の統合コストは $O(p_0\ p_k\ p_n)$
- これが最適解 の計算コストもそれぞれ最小 はず)
  - 理由：そう のものに置き換えるだけで
- つまり、全体 くられている



最小コストについて成り立つ再帰式：部分行列積の最適解を組合わせて大きな最適解をつくる

- $A_{i,\ldots,j}$を計算する最小のコストを$m[i,j]$とする
- $m[i,j]$は再帰的に表現できる：

$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & (i = j) \\ \min\limits_{i \le k < j} m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}\, p_k\, p_j & (i \neq j) \end{cases}$$

どこで分割するのが最良か？

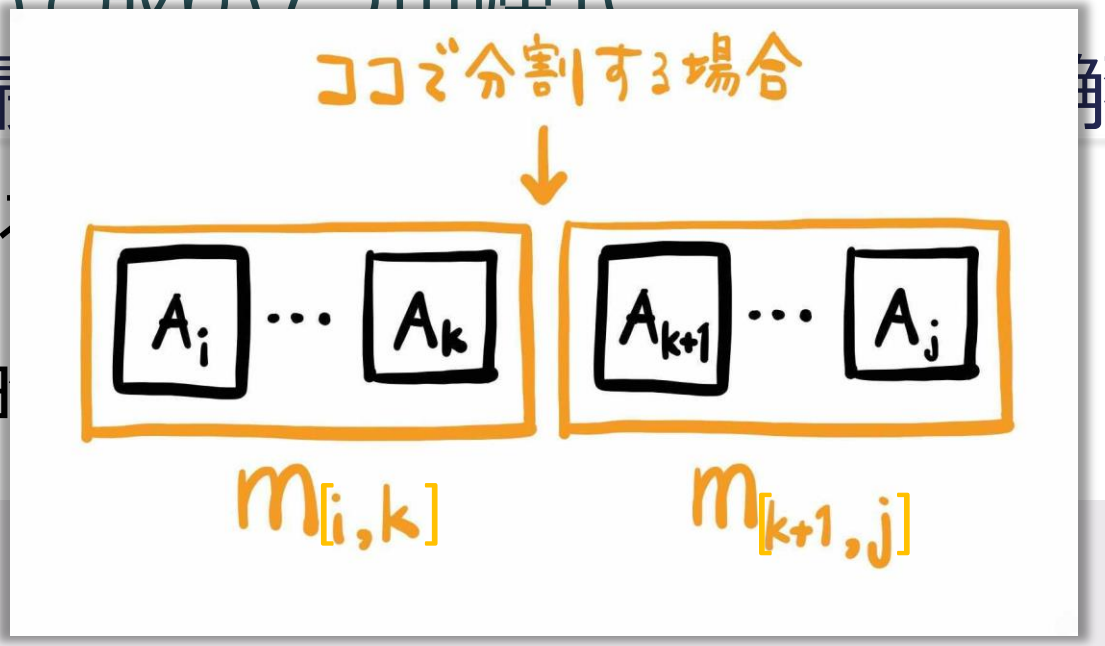
前半の最小計算コスト

後半の最小計算コスト

統合（掛け算）のコスト

最小コストについて成り立つ再帰式：部分行列積の最[illegible]解をつくる

- $A_{i,\ldots,j}$を計算す[illegible]
- $m[i,j]$は再帰的[illegible]



$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & (i = j) \\ \min\limits_{i \le k < j} m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}\, p_k\, p_j & (i \neq j) \end{cases}$$

どこで分割するのが最良か？

前半の最小計算コスト

後半の最小計算コスト

統合（掛け算）のコスト

動的計画法の計算量：ボトムアップ計算により多項式時間で解が求まる

- 再帰式の適用により最小の$m[1,n]$を求める
- 「ボトムアップ」で計算：
  1. $i = j$ の場合について計算（全部ゼロ； $m[i,i] = 0$）
  2. $i = j - 1$ の場合について計算（ $m[i,i+1]$ ）
  3. $i = j - 2$ の場合について計算（ $m[i,i+2]$ ）
  4. …
  - 上記がnステップ、それぞれで$O(n)$個の再帰式評価、それぞれの評価に$O(n)$ 必要なので、全部で$O(n^3)$の計算量
- バックトラック：各再帰式での最良のkを記憶しておくことで実際の掛け算の順番を得る

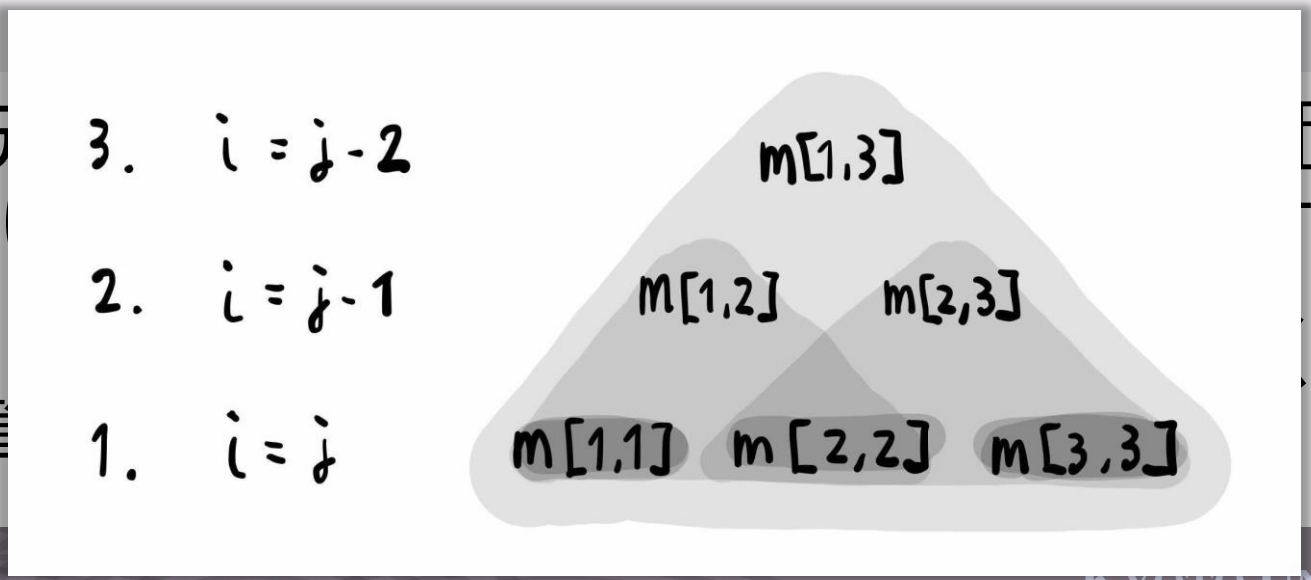
動的計画法の計算量：ボトムアップ計算により多項式時間で解が求まる

- 再帰式の適用により最小の$m[1,n]$を求める

- 「ボトムアップ」で計算：
  1. $i = j$ の場合について計算（全部ゼロ； $m[i,i] = 0$）
  2. $i = j - 1$ の場合について計算（ $m[i,i+1]$ ）
  3. $i = j - 2$ の場合について計算（ $m[i,i+2]$ ）
  4. …

  – 上記がnステ… 面、それぞれの評価… 算量

- バックトラック… ことで実際の掛け算…



動的計画法でやらないと…：指数的な計算量になる

- 解きたい再帰式：

$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & (i = j) \\ \min\limits_{i \le k < j} m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}\, p_k\, p_j & (i \neq j) \end{cases}$$

- トップダウン計算（分割統治）だと指数的な計算量になる

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (T(k) + T(n-k) + c) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} T(k) + cn = \mathrm{O}(2^n)$$

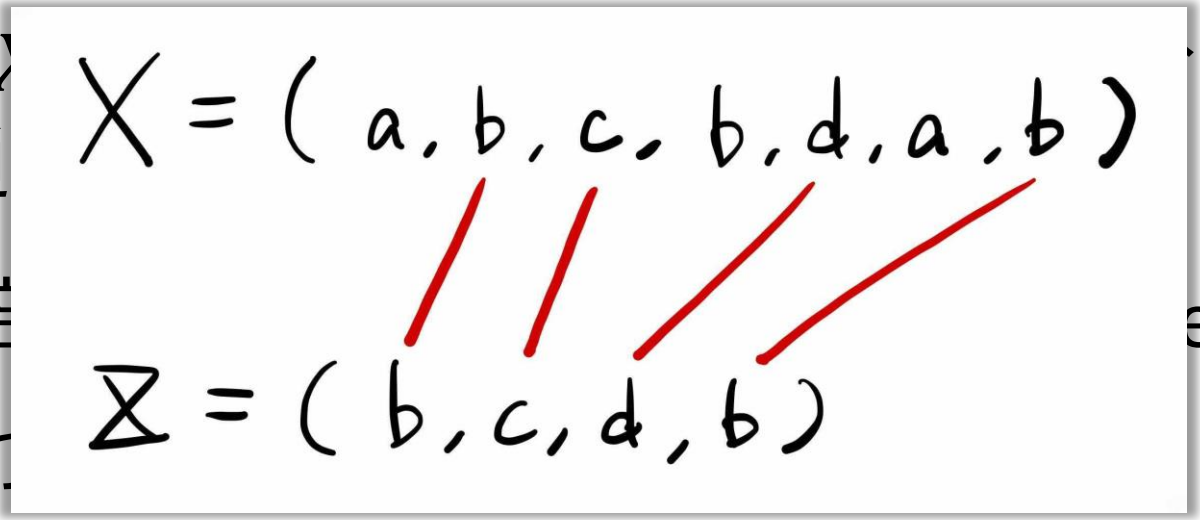
最長共通部分系列問題：２つの系列に共通に含まれる最長の部分系列をみつける

- 系列$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$の部分系列(subsequence)とは$X$からいくつかの要素を取り除いたもの
- 2つの系列XとYに対して、系列Zが両方の部分系列のときこれを共通部分系列とよぶ
- 最長共通部分系列(LCS; Longest Common Sequence)：
  - 入力：2つの系列
    $$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
  - 出力： XとYのLCS $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_k)$ をひとつ

最長共通部分系列問題：
２つの系列に共通に含まれる最長の部分系列をみつける

- 系列$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$の部分系列(subsequence)とは$X$からいくつかの要素を取り除いたもの

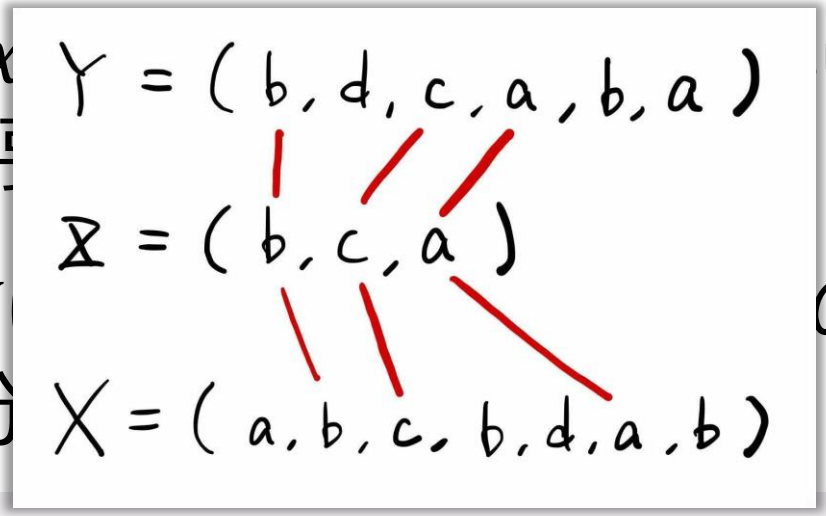
- 2つの系列X 系列のとき これを共通



- 最長共通部 equence)：
  - –入力：2
    $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
  - –出力： XとYのLCS $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_k)$ をひとつ

最長共通部分系列問題：
２つの系列に共通に含まれる最長の部分系列をみつける

- 系列$X = (x_1, x$ ubsequence)とは
  Xからいくつかの
- 2つの系列XとY の部分系列のとき
  これを共通部分



- 最長共通部分系列(LCS; Longest Common Sequence)：
  - 入力：2つの系列
    $$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
  - 出力： XとYのLCS $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_k)$ をひとつ

最長共通部分系列の性質：LCSも再帰的な構造をもつ

- $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_k)$ を XとYの任意のLCSとすると

① $x_m = y_n$ のとき、$x_m = y_n = z_k$ で、
また、$Z_{k-1} = (z_1, z_2, \ldots, z_{k-1})$は$X_{m-1}$と$Y_{n-1}$のLCS

– つまり、最後の文字が一致していれば、
$x_m = y_n = z_k$ としてLCSを1つ伸ばせる

② $x_m \neq y_n$ かつ $z_k \neq x_m$ならば、ZはX_{m-1}とYのLCS

③ $x_m \neq y_n$ かつ $z_k \neq y_n$ならば、ZはXとY_{n-1}のLCS

–つまり、一致していなければ、単にスキップ

最長共通部分系列の性質：LCSも再帰的な構造をもつ

- $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_k)$ を XとYの任意のLCSとすると

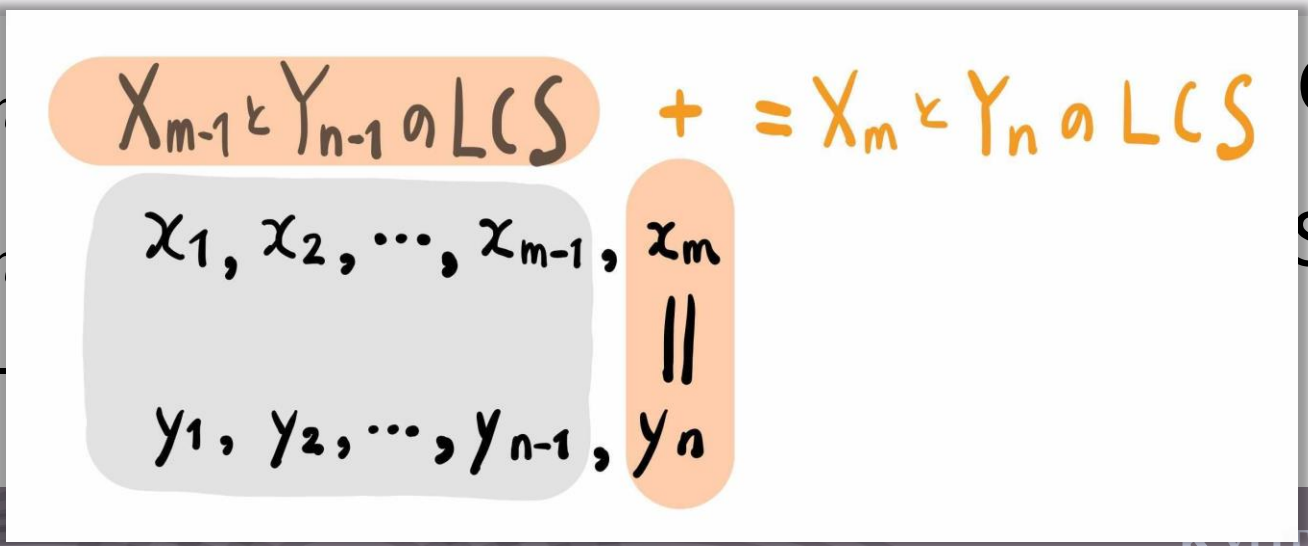
① $x_m = y_n$ のとき、$x_m = y_n = z_k$ で、
また、$Z_{k-1} = (z_1, z_2, \ldots, z_{k-1})$は$X_{m-1}$と$Y_{n-1}$のLCS

– つまり、最後の文字が一致していれば、
$x_m = y_n = z_k$ としてLCSを1つ伸ばせる

② $x_m \neq y_n$ かつ $z_k \neq x_m$ のとき、ZはX_{m-1}とYのLCS

③ $x_m \neq y_n$ かつ $z_k \neq y_n$ のとき、ZはXとY_{n-1}のLCS

–つまり、一



LCSの長さについて成り立つ再帰式：動的計画法により$O(mn)$で計算できる

- X_iとY_jとのLCSの長さを$c[i,j]$とする
- $$c[i,j] = \max \begin{cases} 0 & (i = 0 \text{ または } j = 0) \\ c[i-1,j-1]+1 & (x_i = y_j \text{のとき}) \leftarrow ① \\ \max\{c[i,j-1], c[i-1,j]\} & \leftarrow ②③ \end{cases}$$
- $c[m,n]$が$O(mn)$で求まる

解の構成：
実際の解はバックトラックで求まる

- LCSはバックトラックで構成できる
  - 注：LCSは複数ありうる
    （最適な経路は複数ありうる）
- 例：
  - $X = (a, b, c, b, d, a, b)$
  - $Y = (b, d, c, a, b, a)$
  - $Z = (b, c, b, a)$