KYOTO UNIVERSITY

アルゴリズムとデータ構造③
～ リスト・ソート・ヒープソート ～

鹿島久嗣
（計算機科学コース）

DEPARTMENT OF INTELLIGENCE SCIENCE
AND TECHNOLOGY

リスト

集合を管理するデータ構造：
データを保持するための基本データ構造

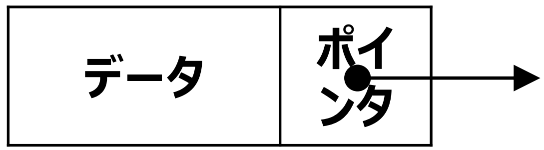
- 集合を管理するデータ構造
  - データをコンピュータのメモリにどのように保持するか
- サポートすべき機能：
  - 集合の追加
  - 集合の削除
  - 集合の検索
- たとえば、配列ならば…：
  - メモリを必要分確保しておき、順次保管する
  - 所望の位置にアクセス可能だが、削除が面倒

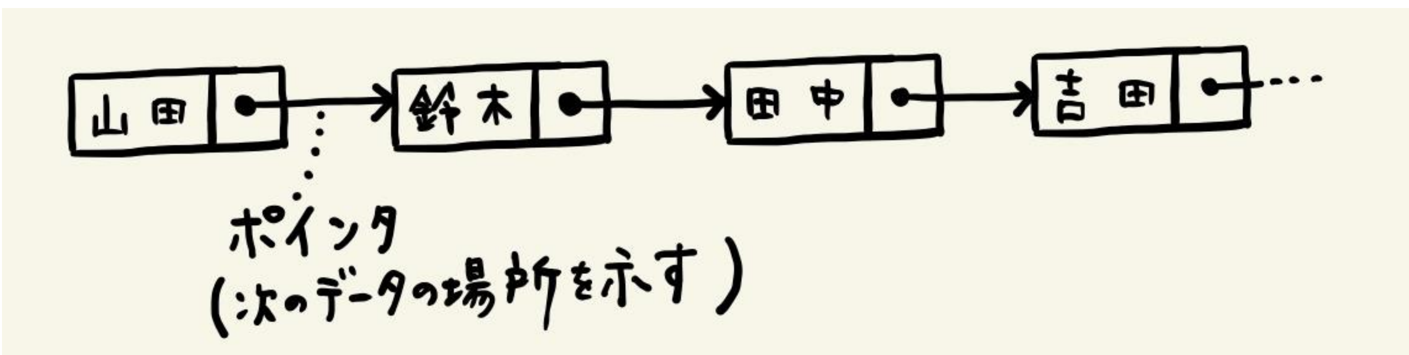
配列による集合の管理

番地	データ
1	山田
2	鈴木
3	田中
4	吉田
⋮	⋮

リスト：
集合を管理する基本データ構造

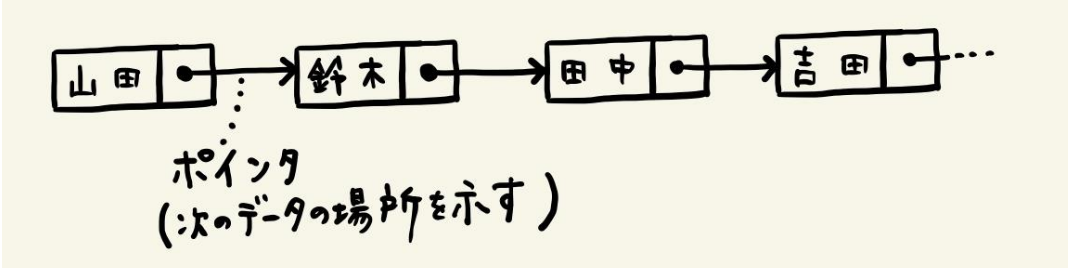
- リスト：データをポインタで一列につなげたもの
  - ポインタ：次のデータの場所（番地）を示す



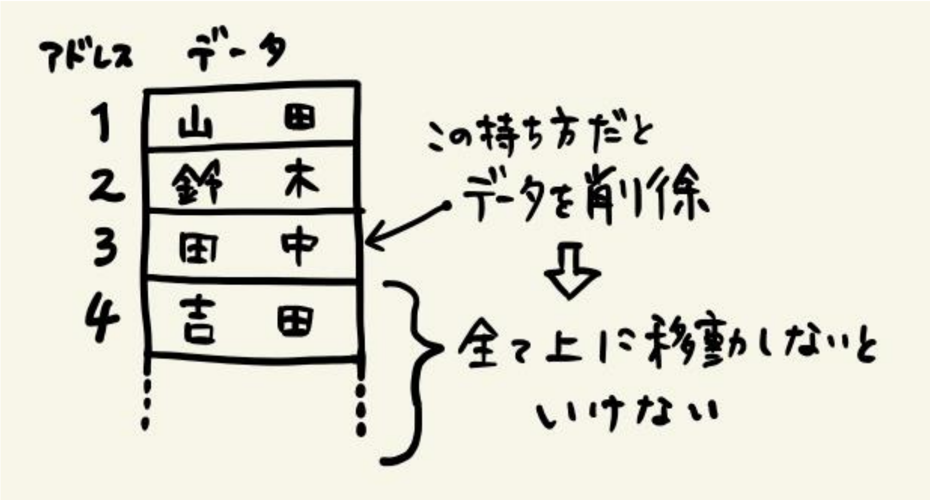


リストの利点：データを動的に追加・削除可能

- リストは、必要に応じてメモリを確保できる
  - 後ろに繋げていけばよい



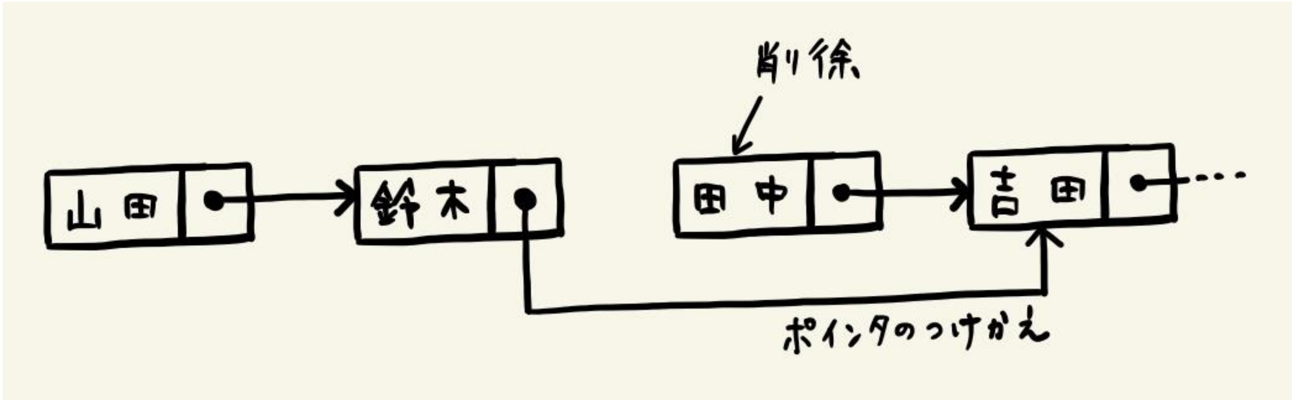
- 追加・削除が容易
  - 配列でもつと削除が大変になる



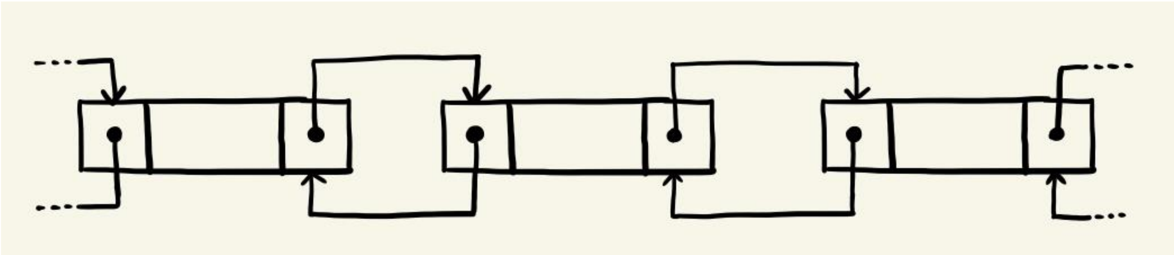
- 検索では得しない（効率的な検索には別の仕組が必要）

リストの利点：データを動的に追加・削除可能

- 削除：ポインタの付け替えで対応

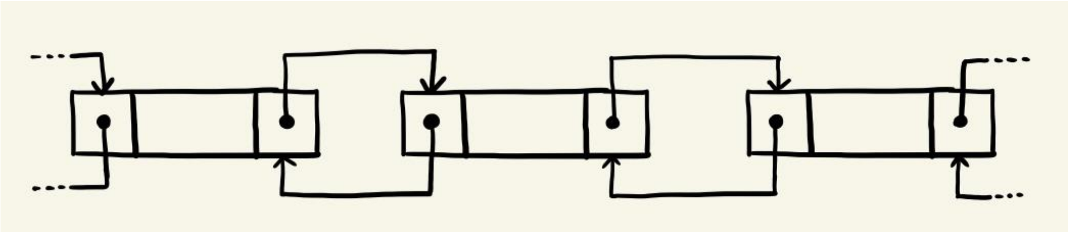


  - ポインタのつけかえには、誰が自分にポインタを指しているかを知る必要がある（単純には$O(n)$）
  - 二重線形リスト： $O(1)$ で発見可能

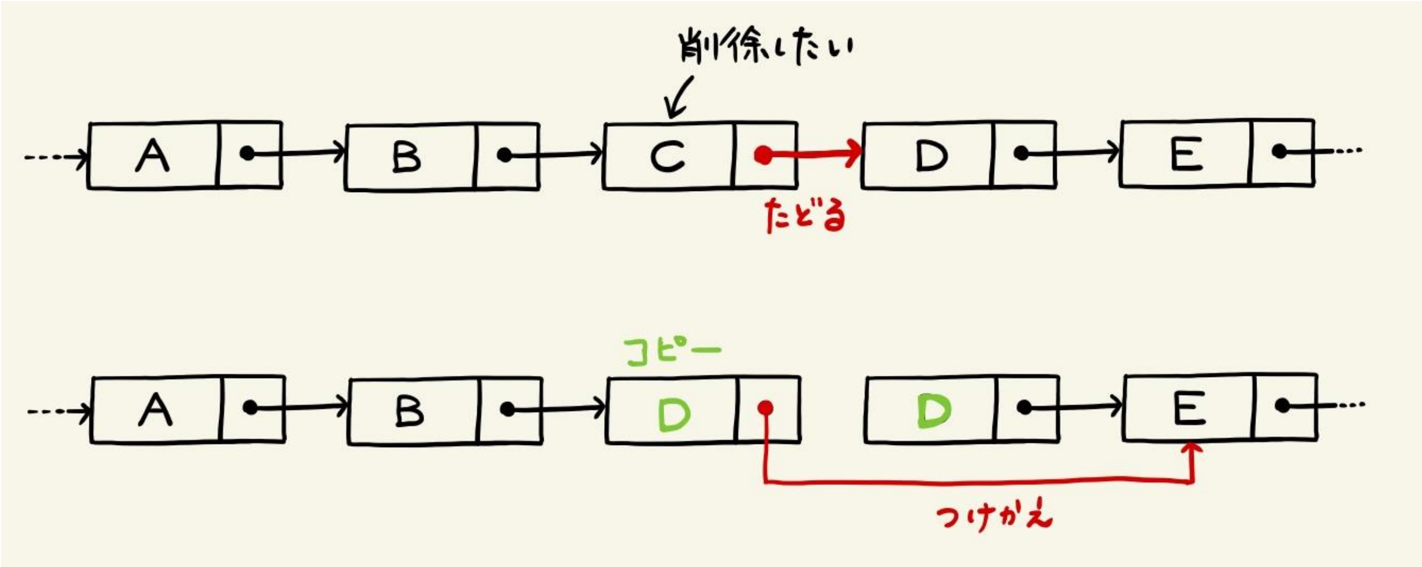


リストの利点：
データを動的に追加・削除可能

- 二重線形リストは O(1) で削除できるがポインタが2倍

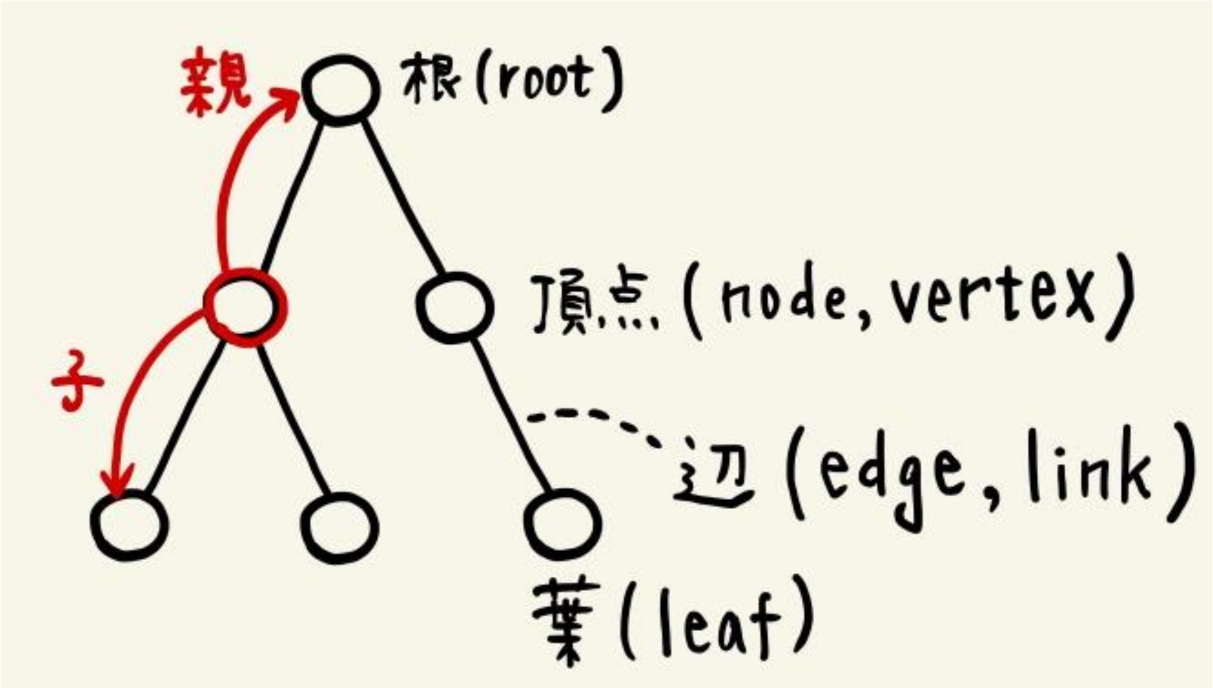


- 実は二重にしなくても可能：たどる→コピー→付け替え



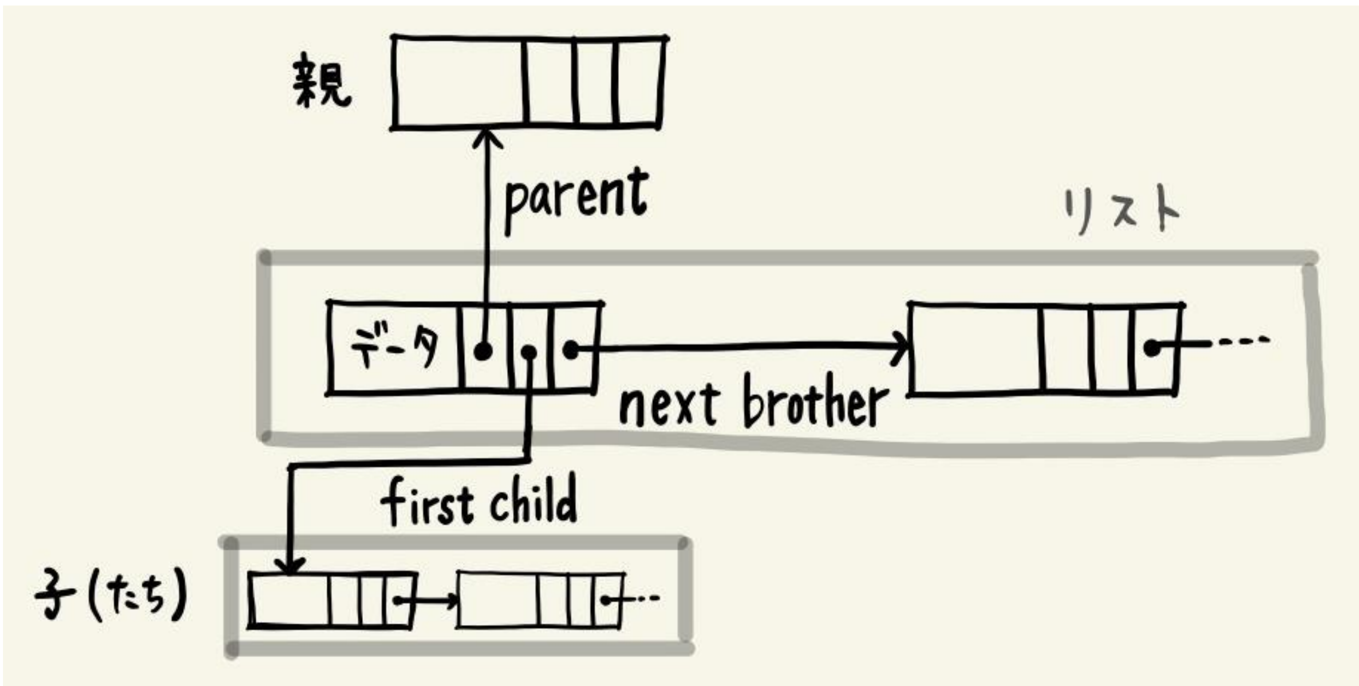
根付き木：
枝分かれするリストの一般化

- 頂点集合と、それらを結ぶ辺から構成される
  - 辺に接続する頂点の片方が親でもう一方を子とする
  - 各頂点は0～複数個の子をもつ
  - 根以外の頂点は、必ずただひとつの親頂点をもつ
  - 葉：子をもたない頂点
  - 部分木：
ある頂点以下の部分



根付き木の実現：各頂点が3個のポインタをもつ

- 各頂点は親へのポインタ、次のきょうだいへのポインタ、最初の子へのポインタをもつ
  - 全ての子へのポインタをもつかわりに最初の子だけを指す
    – 各頂点は最大3個のポインタを保持



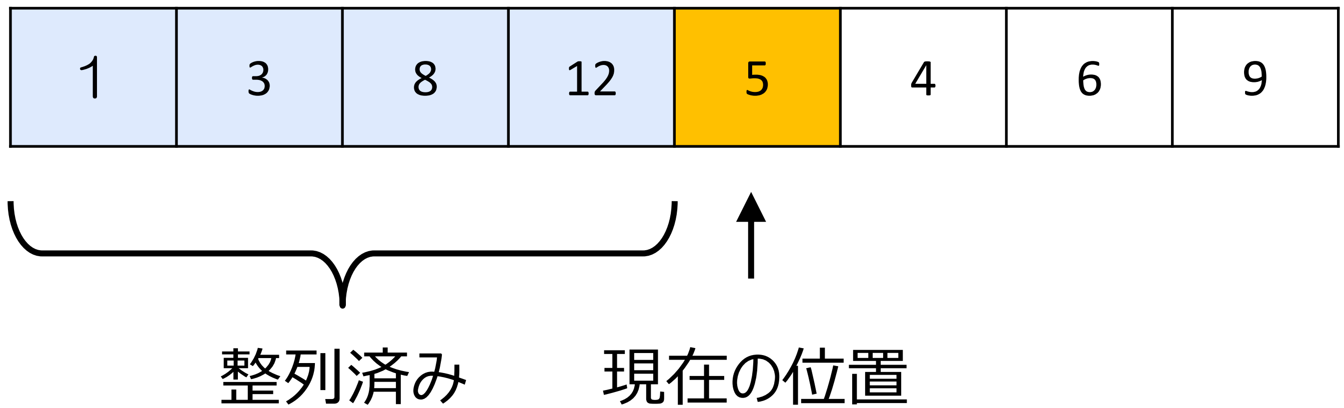
整列（ソート）のアルゴリズム

整列問題（ソート）：
要素を小さい順に並び替える問題

- 整列問題
  - 入力：n個の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が入った配列
  - 出力：$a_{1'} \leqq a_{2'} \leqq \ldots \leqq a_{n'}$ を満たす、入力列の置換
- 例：入力 $(4, 5, 2, 1) \to$ 出力 $(1, 2, 4, 5)$

単純なソートアルゴリズム：
ソート済み領域を左から順に拡大していく

- ある時点において、現在の位置よりも左の部分は整列済みとする



- 現在の位置から左に見ていき、順序が保たれるところまで移動する

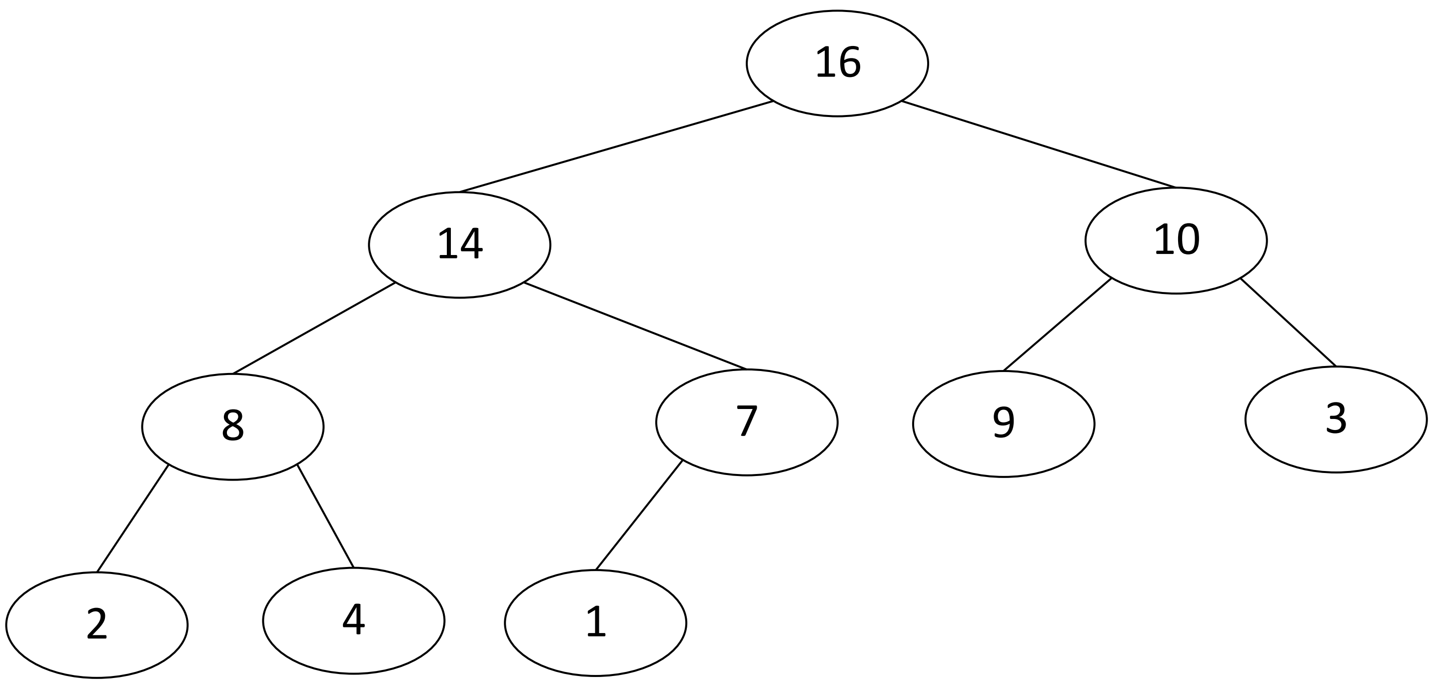
単純なソートアルゴリズムの計算量：計算効率はそれほど良くないが省スペースで実行可能

- 「現在の位置から左に見ていき、順序が保たれるところまで移動する」アルゴリズム
- 現在の位置がjであるとすると、「・・・」の操作には$O(j)$回の比較・交換が必要
- これを $j = 1,2,\ldots,n$ まで行うと $\Sigma_{j=1,\ldots,n} O(j) = O(n^2)$ になる
- このアルゴリズムはあまり効率はよくない
  - 効率の良いアルゴリズムは$O(n \log n)$ （後述）
- ただし、「その場でのソート」が可能なので省スペース
  - 入力配列以外に定数個の領域しか使用しない

ヒープソート

ヒープソート：
データ構造「ヒープ」を使った$O(n \log n)$のソート法

- 「ヒープ」とよばれるデータ構造の一種を用いたソート法
- $O(n \log n)$ で動く「その場での」ソート法
  - $O(n \log n)$は最悪計算量としてはベスト



ヒープ：
ヒープ条件をみたす完全2分木

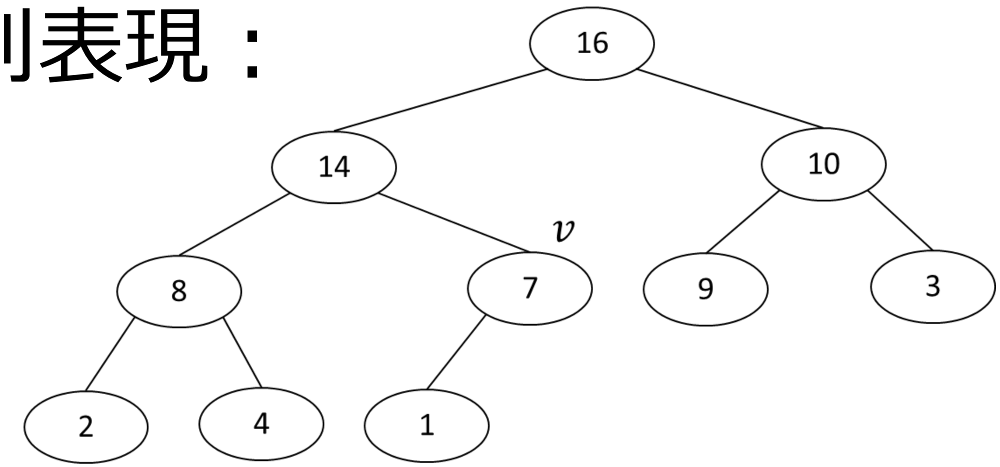
- （ほぼ）完全2分木
  - 2分木：全頂点の子数が最大2個の根付き木
  - 完全2分木：葉以外の頂点の子がちょうど2個で、すべての葉の高さが等しい2分木
- 各頂点はデータをひとつずつもち、必ず「ヒープ条件」を満たしていなければならない
  - ヒープ条件：ある頂点のデータの値は、その親のもつデータの値以下である

$$A[\mathrm{parent}(i)] \geq A[i]$$

- n頂点をもつヒープの高さは $\Theta(\log n)$

ヒープの表現：
ヒープは配列で一意に表現できる

- ヒープと等価な配列表現：



$\Rightarrow$ A

16	14	10	8	7	9	3	2	4	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- 配列表現の性質：
  - 頂点iの左の子は$2i$番目、右の子は$2i + 1$番目
  - 頂点iの親は$\lfloor i/2 \rfloor$ 番目に入っている

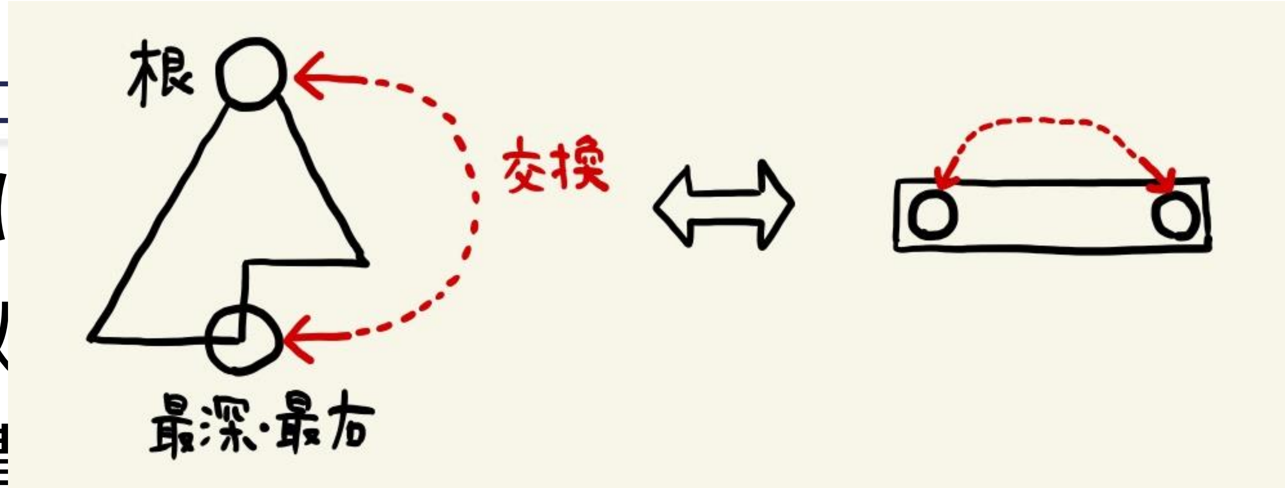
ヒープソート：
「根の値の取出し」と「木の更新」を繰り返してソートを実行

- ヒープの根には最大の値が入っている
- 大まかには以下の方法で小さい順に並べることができる：

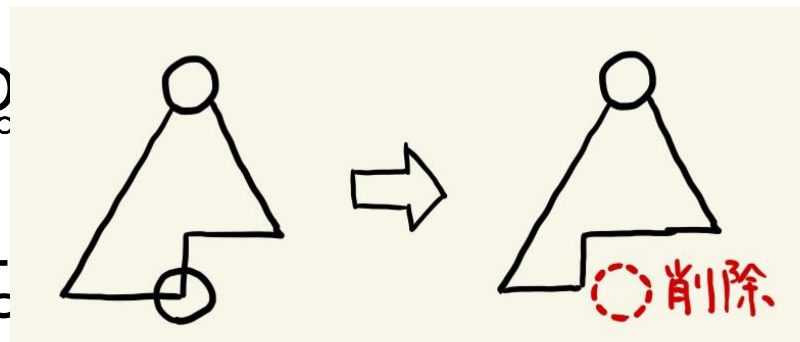
1. ヒープを構成する（ $O(n)$ ：後述）
2. 根と、最も深く、最も右にある頂点（＝配列表現の場合は一番最後の要素）と交換する
3. 木（＝配列）のサイズをひとつ小さくする
4. 根が入れ替わったことでヒープ条件が満たされなくなっているので、ヒープを更新（ $O(\log n)$ ）する
5. 以上を頂点がなくなるまで繰り返す（→ステップ2）

ヒープソート：
「根の値の取 … 実行

- ヒープの根に …
- 大まかには以 … る：



1. ヒープを構 …
2. **根と、最も深く、最も右にある頂点（＝配列表現の場合は一番最後の要素）と交換する**
3. **木（＝配列）のサイズをひとつ小さくする**
4. 根が入れ替わっ … されなくなっているので、ヒープ … る
5. 以上を頂点がな … ステップ2）



ヒープソート：「根の値の取出し」と「木の更新」を繰り返してソートを実行

- ヒープの根には最大の値が入っている
- 大まかには以下の方法で小さい順に並べることができる：

1. ヒープを構成する（ $O(n)$ ：後述 ）
2. 根と、最も深く、最も右にある頂点（＝配列表現の場合は一番最後の要素）と交換する
3. 木（＝配列）のサイズをひとつ小さくする
4. **根が入れ替わったことでヒープ条件が満たされなくなっているので、ヒープを更新（ $O(\log n)$ ）する**
5. 以上を頂点がなくなるまで繰り返す（→ステップ2）

根のヒープ条件の回復：根から下に辿り$O(\log n)$でヒープ条件を回復

- HEAPIFY(A, i)関数を考える：
  - 配列A（を木としてみたときの）頂点i以下の頂点をヒープ条件を満たすように更新する関数
  - ただし、頂点iの２つの子を根とする部分木はすでにヒープ条件を満たしているとする
    - 今回も、変更されたのは根だけなので、この条件が成立
- HEAPIFY(A, i)関数は、自身を再帰的に呼び出しながら、木の上から下へ向かって降りていく
  - $O(\log n)$で葉に到達し実行可能

根のヒープ条件の回復（詳細）
根から下に辿り$O(\log n)$でヒープ条件を回復

$\mathrm{HEAPIFY}(A, i)$

1. i からスタート
2. i とその左右の子を比較
   - if i が最大 then 終了
   - else
     - 大きい方をi と入れ替える
     - $i \leftarrow$入れ替えられた先の位置
     - $\mathrm{HEAPIFY}(A, i)$：自分自身を呼ぶ

i と２つの子の間のヒープ条件が満たされる

新しいi とその子の間のヒープ条件の成立はまだ不明

- 計算量はiの高さをhとして$O(h) \le O(\log n)$

ヒープの構成：
木の下方から上方に向かって構成する

- 手続き：木の下から上に向かって（ヒープになっていない）木（＝配列）をヒープにする
- BUILD_HEAP(A)

子のある頂点を添え字の大きいほうから順に

1. for $i \leftarrow \lfloor \mathrm{length}(A)/2 \rfloor$ down to 1
2. do HEAPIFY(A, i)
3. end for

i番目の頂点を根とする部分木がヒープ条件を満たすように更新する

- HEAPIFYが$O(\log n)$ステップ、これを$O(n)$回呼び出すので全体としては$O(n \log n)$
  - 実は注意深く評価すると$O(n)$（※ あとで示す）

ヒープへの挿入：$O(\log n)$で実行可能

- ヒープに新たなデータxを挿入する

HEAP_INSERT(A, x)

1. 配列A の最後にxを付け加える
2. xとparent(x)を比較する
   - if $x \le \mathrm{parent}(x)$ then 終了
   - else xとparent(x) を入れ替える
3. $x \leftarrow \mathrm{parent}(x)$
4. goto 2

ヒープ条件の確保

繰り返し回数は $O(\log n)$

- これを繰り返すことでヒープ構成も可能$O(n \log n)$

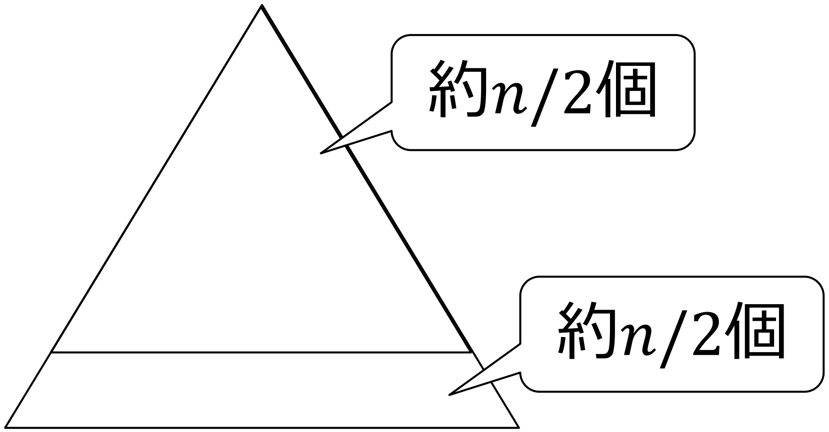
ヒープ構成の計算量：
挿入の繰り返しでも構成可能だが遅くなる

- HEAPIFYとHEAP_INSERTのどちらもヒープを構成可能：
  - HEAPIFYは上から下に向かってヒープ条件を回復
  - HEAP_INSERTは下から上に向かってヒープ条件を回復
- 計算量は異なる：
  - HEAPIFYを使った構成は$O(n)$（後述）
  - HEAP_INSERTは$O(n \log n)$
  - 計算量の差はどこからくるか？：
    - 2分木では、木の下方の頂点数が多い
    - ほとんどの頂点にとって 根からの距離 > 葉への距離

根より葉に近い
頂点が多い

ヒープ構成の計算量：
HEAPIFYなら線形時間でヒープを構成可能

- 高さhの位置に約 $n/2^h$個の頂点がある
  - 一番下の段にほぼ半分が
  - 次の段には、残りのうちほぼ半分が
  - ・・・
- $\sum_{h=1}^{\log n} h \cdot \frac{n}{2^h}$ を評価すると$O(n)$



ヒープの応用：
プライオリティ・キュー

- 優先度順にオブジェクトを取り出す仕組み
- 計算機のジョブ割り当て：
  - ジョブが終了 or 割り込み → 最大優先度のものを取り出す
  - 新しいジョブはINSERT
- シミュレーション：
  - 優先度＝時間として、時刻順にイベントを取り出す