KYOTO UNIVERSITY

# アルゴリズムとデータ構造⑩
## ～ 最大流問題 ～

鹿島久嗣

DEPARTMENT OF INTELLIGENCE SCIENCE
AND TECHNOLOGY

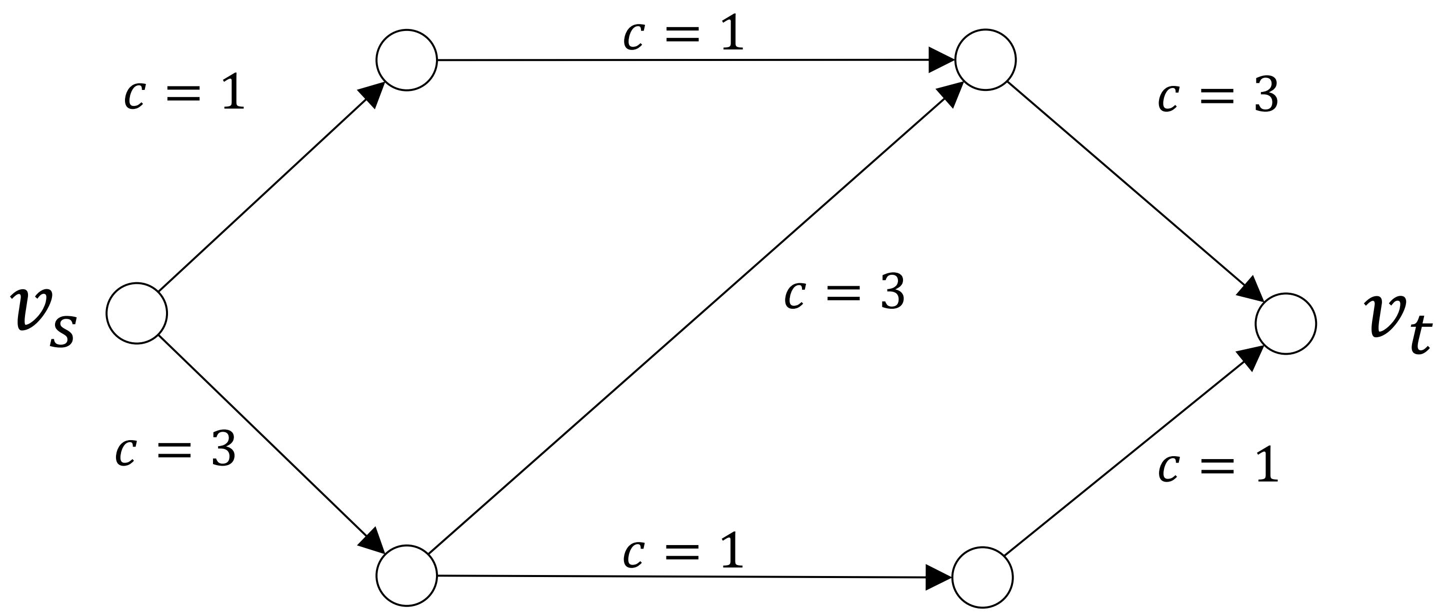
# 最大流問題

# ネットワーク：<br>辺に容量をもった、入口と出口をもつ有向グラフ

- グラフ$G = (V, E)$：頂点を辺（＝枝）でつないだもの
  - $V$ ：頂点集合（有限集合）
  - $E$：辺の集合（ $V$ 上の2項関係； $E \subseteq \underbrace{V \times V}$ ）直積集合
    - 辺$e = (v, w)$に向きがある場合が有向グラフ
- ネットワーク：
  - 特別な頂点$v_s$ （入口）と$v_t$（出口）をもつ有向グラフ
  - 各辺$e = (v, w)$が容量$c(e) \geq 0$をもつ

※ 以下、簡単のため始点からは出る方向の辺のみ、
終点には入る方向の辺のみがあるとする（これは本質的でない）

# ネットワーク：例



# ネットワークのフロー：
# ネットワークの入り口から出口までモノを流す

- ネットワーク上で入口から出口までモノを流すことを考える

- フロー $f: E \to \Re_+$
  - $f(e) \geq 0$ は辺$e \in E$ の上を通す物量のようなもの
    - ただし、$f(e) \leq c(e)$：辺の容量より多くは通せない
- （出入り口以外の）各頂点$v$において以下の関係が成立

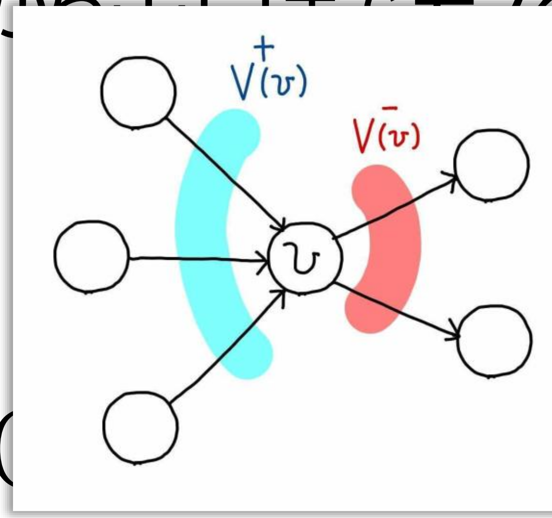
$$\sum_{e \in V^+(v)} f(e) = \sum_{e \in V^-(v)} f(e)$$

出入りのバランスが取れている

  - $V^+(v)$は$v$に入る辺；$V^-(v)$は$v$から出る辺

# ネットワークのフロー：
# ネットワークの入り口から出口までモノを流す

- ネットワーク上で入口から出口までモノを流すことを考える
- フロー $f: E \to \Re_+$
  - $f(e) \ge 0$ は辺$e \in$ … 量のようなもの
    - ただし、$f(e) \le c($ … り多くは通せない




- （出入り口以外の）各頂点$v$において以下の関係が成立

$$\sum_{e \in V^+(v)} f(e) = \sum_{e \in V^-(v)} f(e)$$

出入りのバランスが取れている

  - $V^+(v)$は$v$に入る辺；$V^-(v)$は$v$から出る辺

# ネットワークの最大流問題：容量制約を満たしながら、できるだけモノを流す

- 最大流問題：
  - 入口から出る量（＝出口に入る量）を最大化する

$$\max_f \sum_{e \in V^-(v_s)} f(e) \quad \left( = \max_f \sum_{e \in V^+(v_t)} f(e) \right)$$

$$\text{s.t.} \quad 0 \leq f(e) \leq c(e) \ \forall e \in E$$

  - 問題の解として決定すべきはフロー$f$（各辺に通す量）

# 最大流問題のアルゴリズム：フォード・ファルカーソン

- フォード・ファルカーソンの基本的な考え方：
  現在の解（フロー）に新たなフローを逐次的に足していく
  - 現在のフロー$f$があるとする
  - ある条件（後述）を満たす$v_s$から$v_t$へのパス$p$をみつける
    - このパス$p$に沿って追加のフロー$\Delta f$を流す

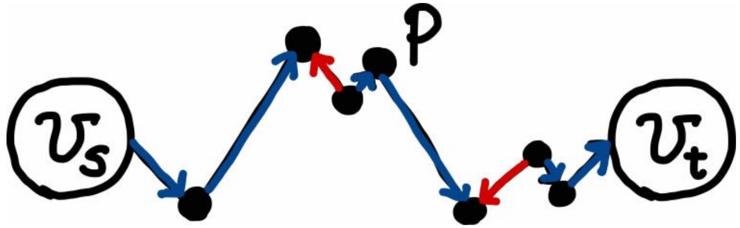
$$f(e) \leftarrow f(e) + \Delta f(e) \text{ for } \forall e \in p$$

  - 条件（後述）を満たすパスがなくなるまで、以上を繰り返す

# フォード・ファルカーソンにおける解の更新：フローを追加できる「余裕」のあるパスを見つける

- $v_s$から$v_t$への（辺の向きを無視した）パス$p$を考える
- パスに含まれる各辺$e = (v, w) \in p$に対して２つの場合：

1. 正順：パスの向きと、辺の向きが一致している場合
2. 逆順：一致していない場合




- 各辺$e$について「余裕」$g(e)$を考える
  – 正順の場合：$g(e) = c(e) - f(e)$：新たに流せる余裕
  – 逆順の場合：$g(e) = f(e)$：逆向きに流せる（減らせる）余裕がある

# フォード・ファルカーソンにおける解の更新：フローを追加できる「余裕」のあるパスを見つける

- 「パスの余裕」をパス上の辺の余裕の最小値で定義する：

$$g(p) = \min_{e \in p} g(e)$$

- $g(p)$が正であれば、このパスに沿ってさらに$g(p)$の物流を新たに流せるはず
  - 正順の辺については物流を増やす：
  $$f(e) \leftarrow f(e) + g(p)$$
  - 逆順の辺については物流を減らす（逆向きに流す）：
  $$f(e) \leftarrow f(e) - g(p)$$

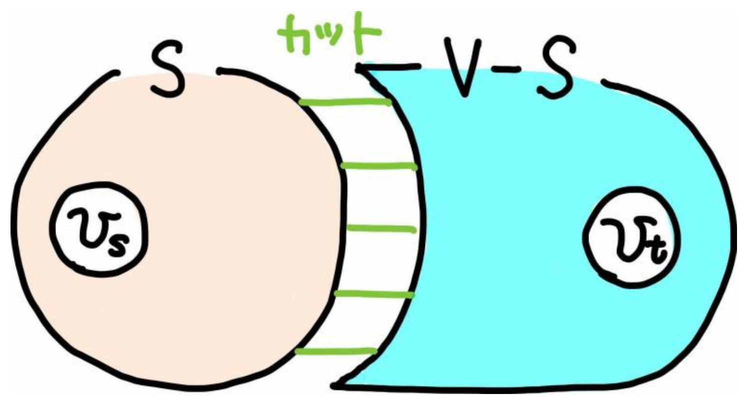
# 余裕のあるパスの発見：たとえば、幅優先探索

- $g(p)$が正であるようなパス$p$を見つけるには？
  - フォード・ファルカーソンでは$p$の見つけ方は決められていない
- たとえば、幅優先探索で正の余裕をもつパスの中で最も短いパスを用いる（＝エドモンズ・カープ法）
  - 幅優先探索で$g(e)$が正である（余裕のある）辺をつなげていく
  - 以前見た、グラフの頂点列挙と同じ方式

# カット：
# 最大フローと最小カットは等しい

- カット：$v_s$ を含む頂点集合$S \subseteq V$から出て、$V - S$に含まれる頂点のいずれかに入る辺の集合

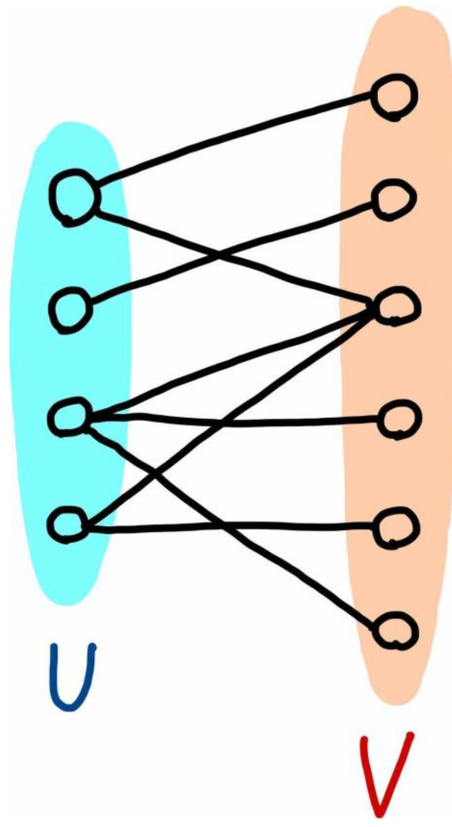
- 最大フロー最小カット定理：
カットに含まれる辺の容量の和の最小値 ＝ 最大流量
  - 気持ち：どんなカットをとっても、必ずフローの流量が、$S$から$V - S$に流れているはずなので、実際に流せるのはその中で最小の量のはず



# マッチング

# 2部グラフ：
# ２つの集合の関係を表すグラフ

- 2部グラフ
  - 頂点集合が2つの集合$U$と$V$に分かれている
  - 枝は2つの集合間にしか存在しない

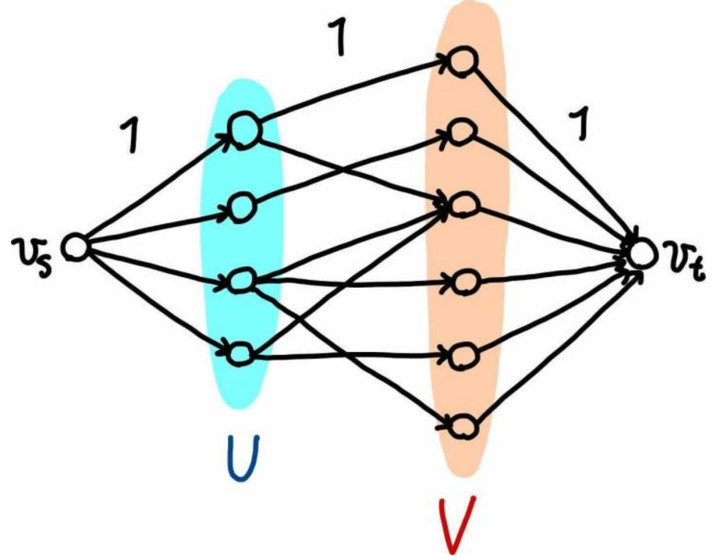


# 2部グラフのマッチング：<br>2グループ間で成立するペアの数を最大化する

- マッチング問題：
  - 2部グラフにおいて、以下の条件を満たす辺の集合を選ぶ
    - すべての頂点は、たかだか１つの辺にしか含まれない
  - もっとも大きい辺の集合を見つける
- 例：マッチングアプリ的な何か
  - ２つのグループ間で、各人が（互いに）パートナーを組んでいいと思う人の間に辺があるとする
  - 成立するペアの数を最大化したい

# マッチング問題のアルゴリズム：最大流に帰着できる

- 最大流問題に帰着可能
  - $v_s$から$U$の各頂点に容量1の辺
  - $U$と$V$の間の辺に容量1
  - $V$から$v_t$の各頂点に容量1の辺



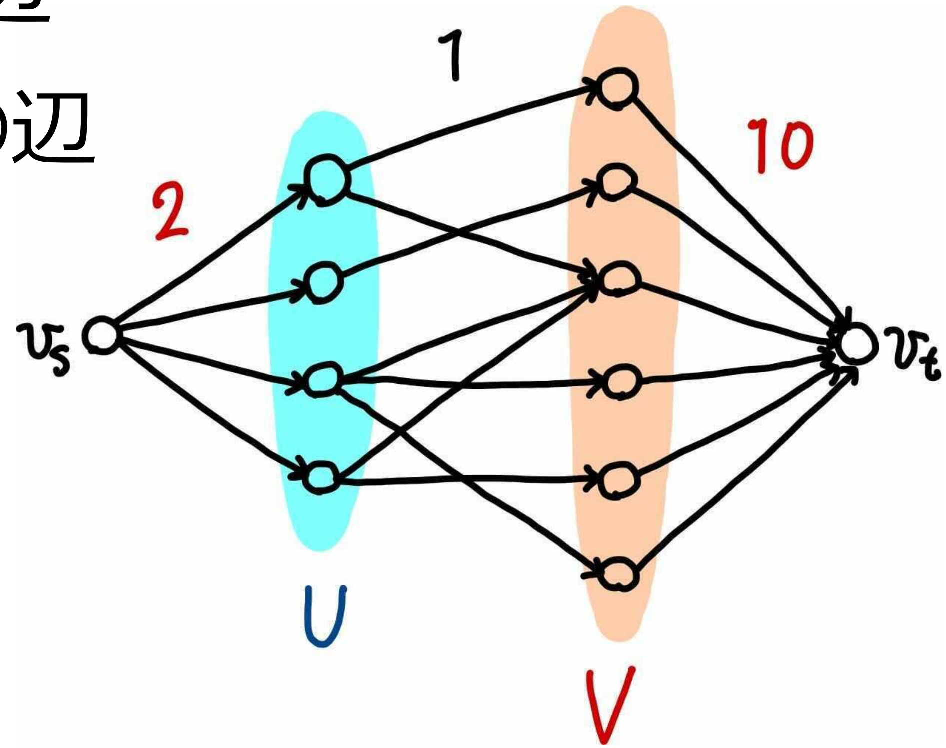

- フォード･ファルカーソンを適用すればマッチングが得られる
  - フォード･ファルカーソンでは、すべての辺の容量が整数であれば、その解も整数
    - この場合、$U$と$V$の間の辺を流れる量は0か1

# 割り当て問題：
# マッチング問題の一般化

- マッチングを多対多の対応に一般化
- 学生とゼミのマッチング：
  - 学生は2つのゼミに所属
  - 各ゼミは最大10名まで受入れ可能

# 割り当て問題のアルゴリズム：やはり最大流に帰着できる

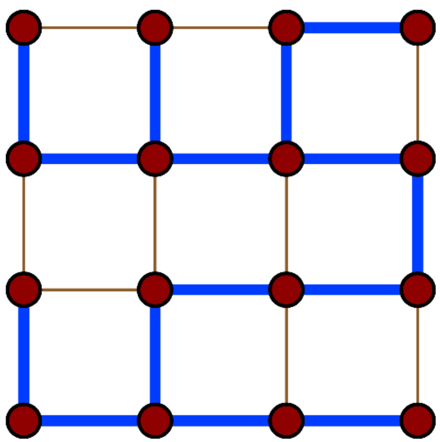
- 一般化された割り当て問題も最大流に帰着できる：
- 2部グラフの構成法：
  - $v_s$から$U$の各頂点に容量2の辺
  - $V$から$v_t$の各頂点に容量10の辺



# 全域木

# 全域木：
# グラフを木で近似

- グラフ$G$の全域木とは、$G$の全頂点を含む部分グラフであって、かつ、木となっているもの
- 辺にコストがある場合は、コストの和が最小となるものを最小全域木という
  - グラフを木で近似したものとして利用できる



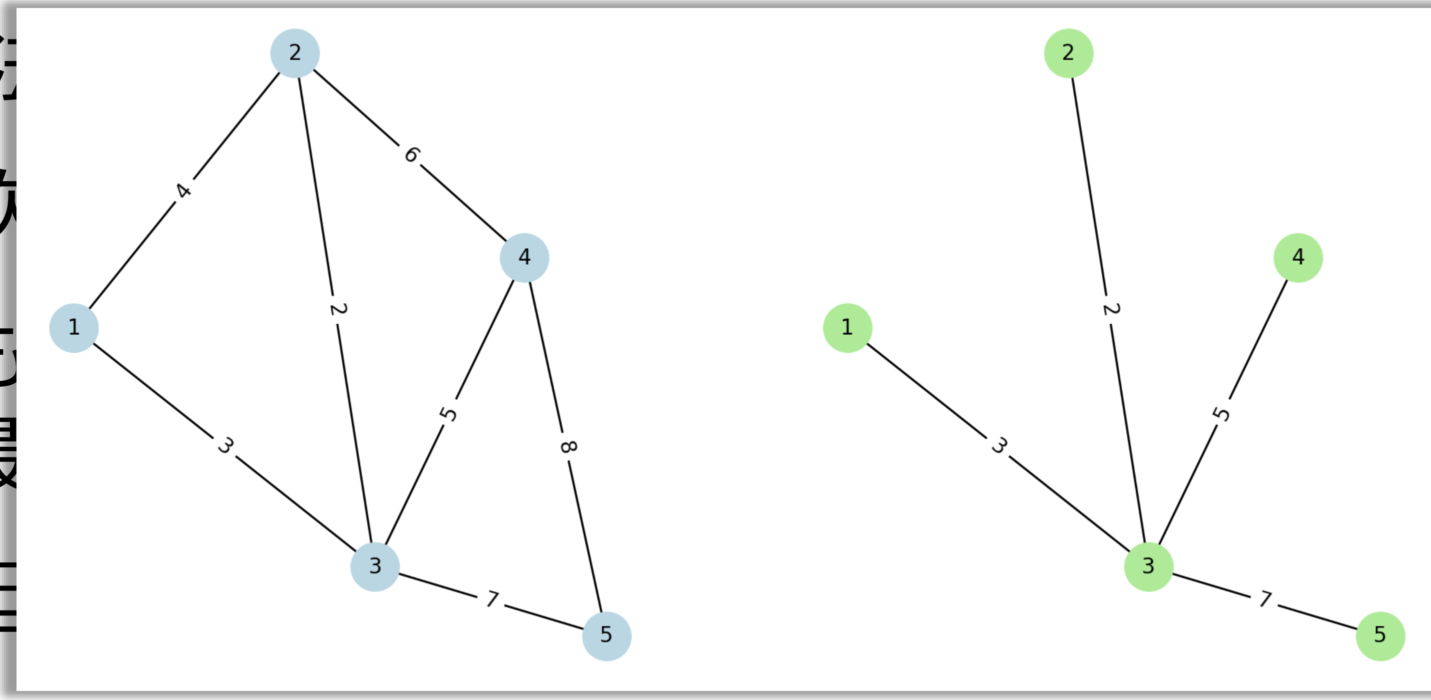
https://en.wikipedia.org/wiki/Spanning_tree

# 最小全域木の構成：貪欲法

- 貪欲法：
  - 逐次的に解を構成する（辺をひとつづつ追加する）
  - 最も評価の高いものを選ぶ
    （最もコストの小さい辺を選ぶ）
  - 一旦選んだものは変えない
- 最小全域木における貪欲法：
  - 最もコストの小さい辺を選んでいく
  - ただし、閉路ができないという条件（木でなくなるため）

# 最小全域木の構成：貪欲法

- 貪欲
  - 逐次 …る）
  - 最も
    （最
  - 一旦



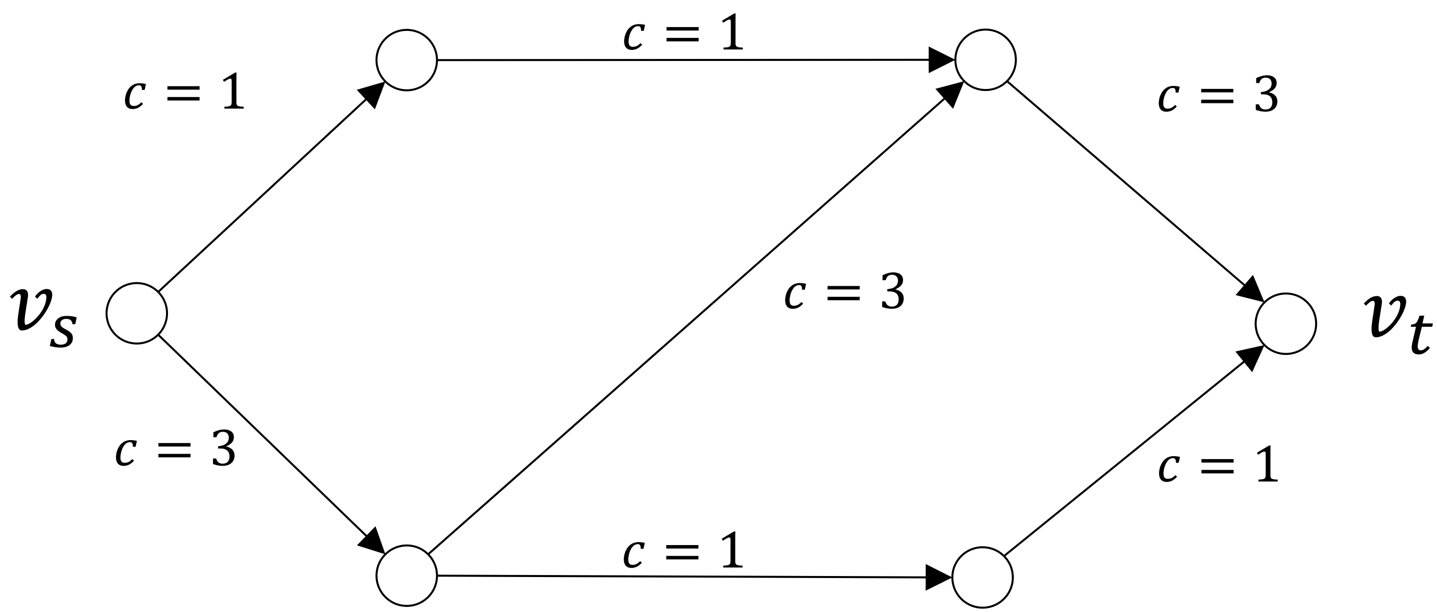

- 最小全域木における貪欲法：
  - 最もコストの小さい辺を選んでいく
  - ただし、閉路ができないという条件（木でなくなるため）

# クラスカル法：貪欲法による最小全域木の構成

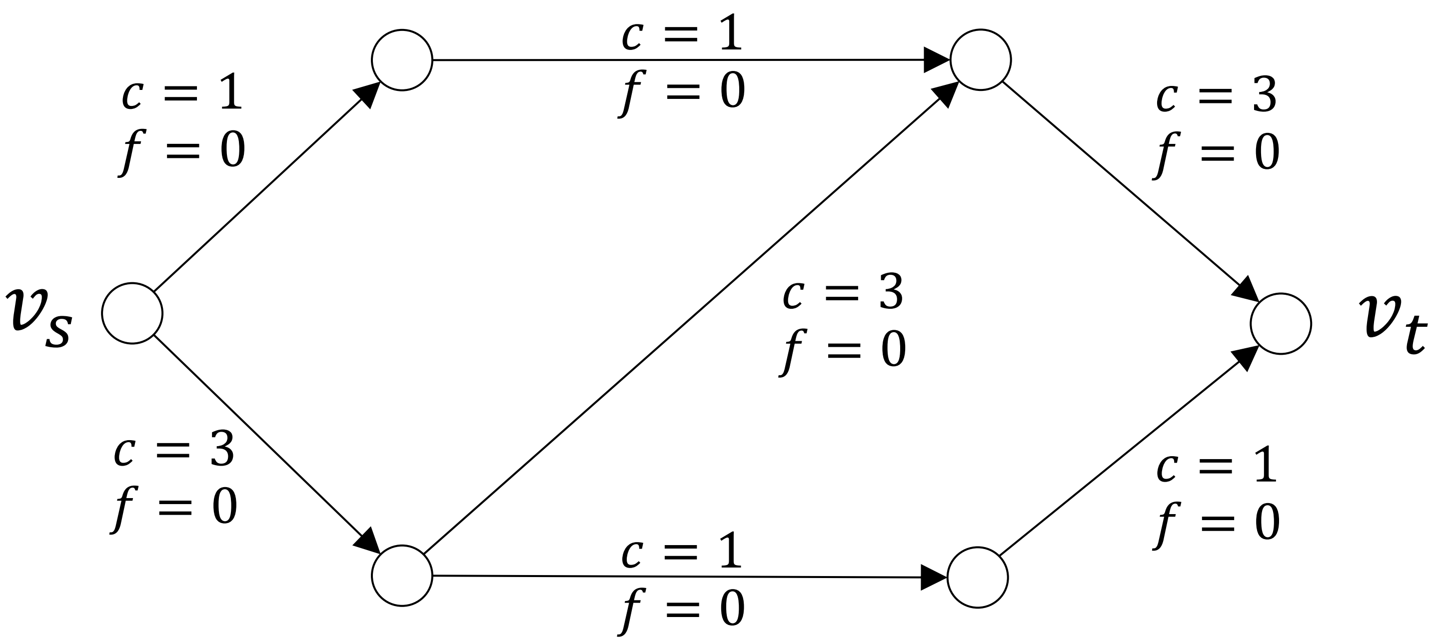
- 初期設定：全頂点を別々の（頂点1つの）木とする
- 各ステップで、2つの木を連結する（＝閉路をつくらない）辺の中でコスト最小のものを選び、2つの木を統合する
  - 辺が2つの木を連結するかどうかは、辺の両端の頂点がひとつの木に含まれるかどうかをチェックする
- 素集合データ構造：互いに素な部分集合を管理する
  - Find操作：ある要素がどの部分集合に属するかを返す
  - Union操作：2つの部分集合を1つにまとめる

# 付録：最大流問題の例

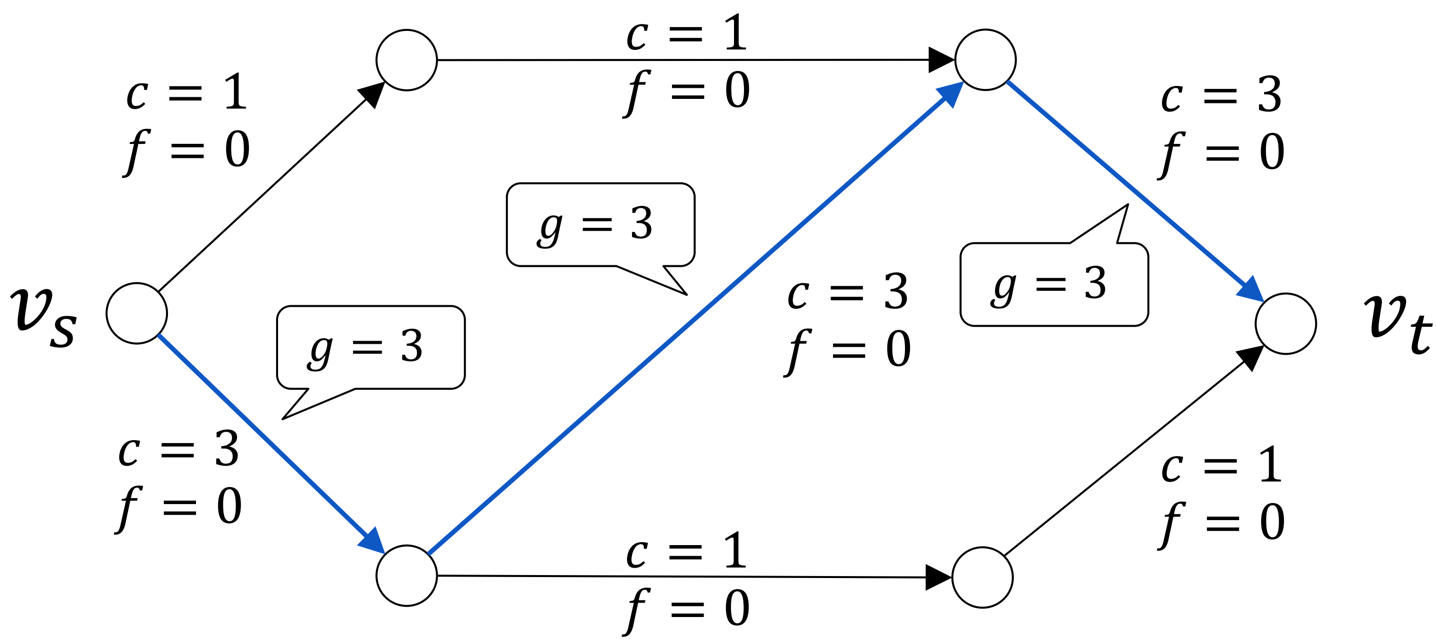
# 最大流問題：例



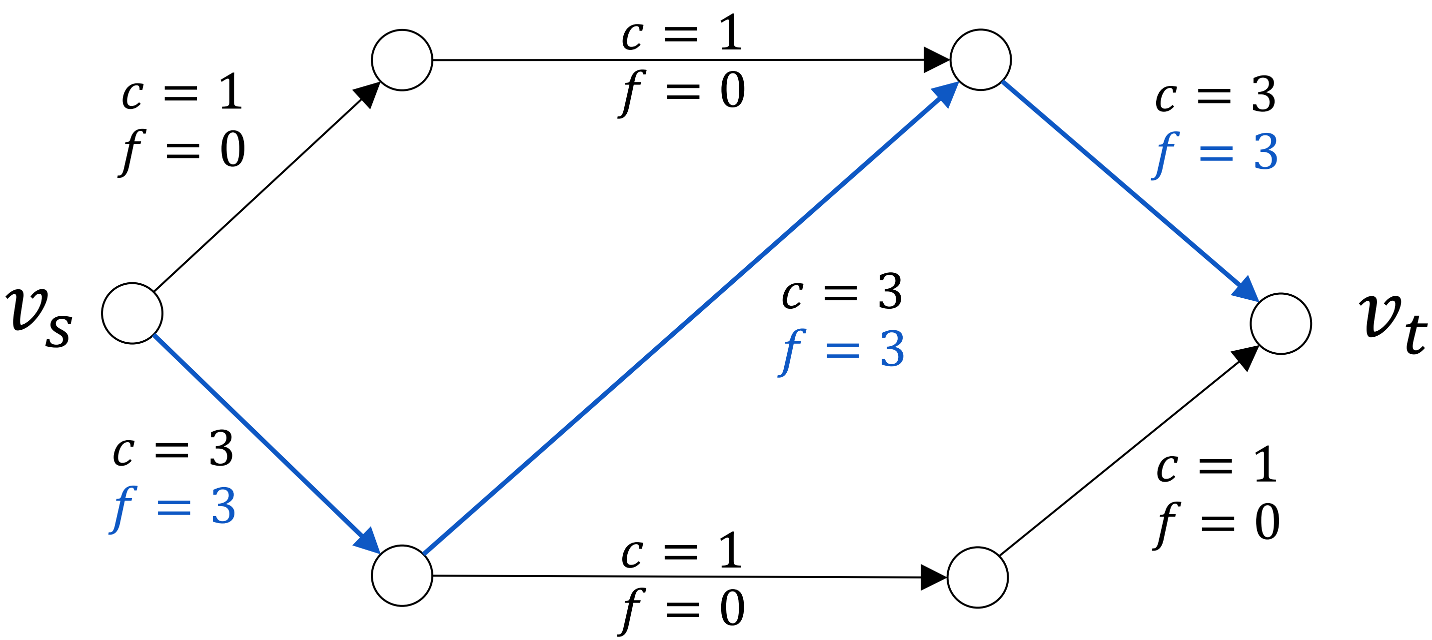
# 最大流問題：
# 例



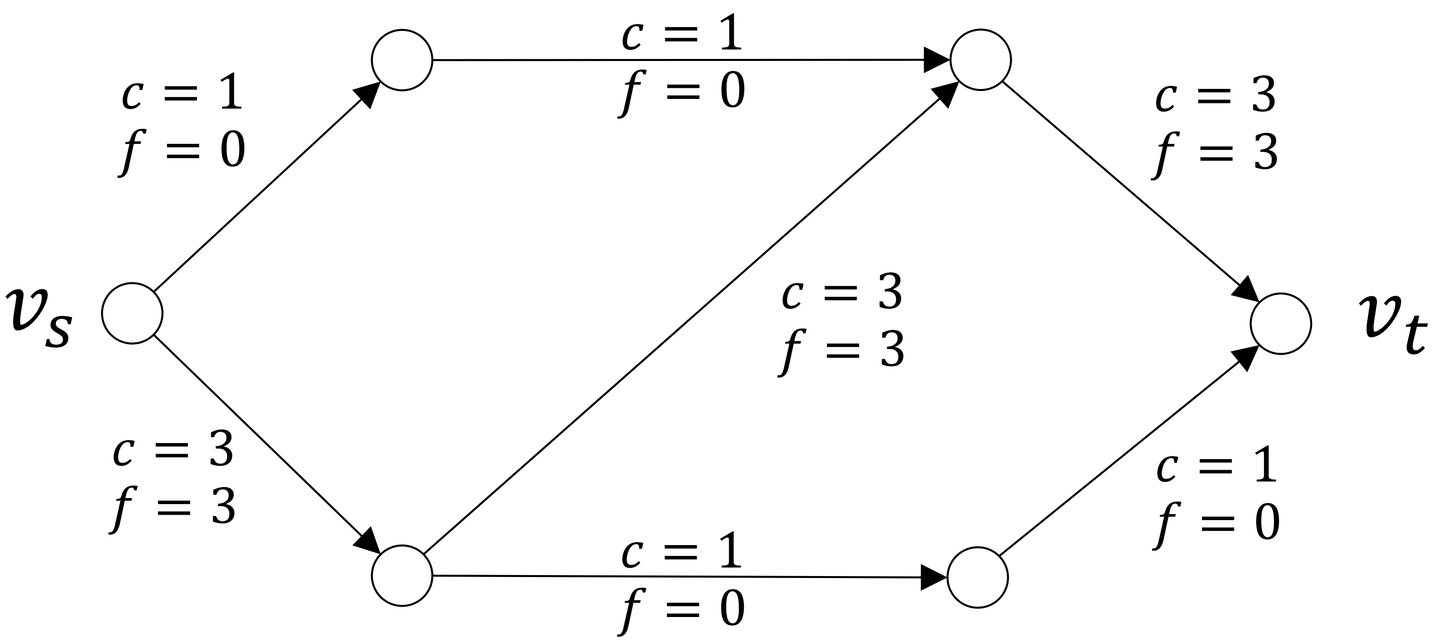
# 最大流問題：例



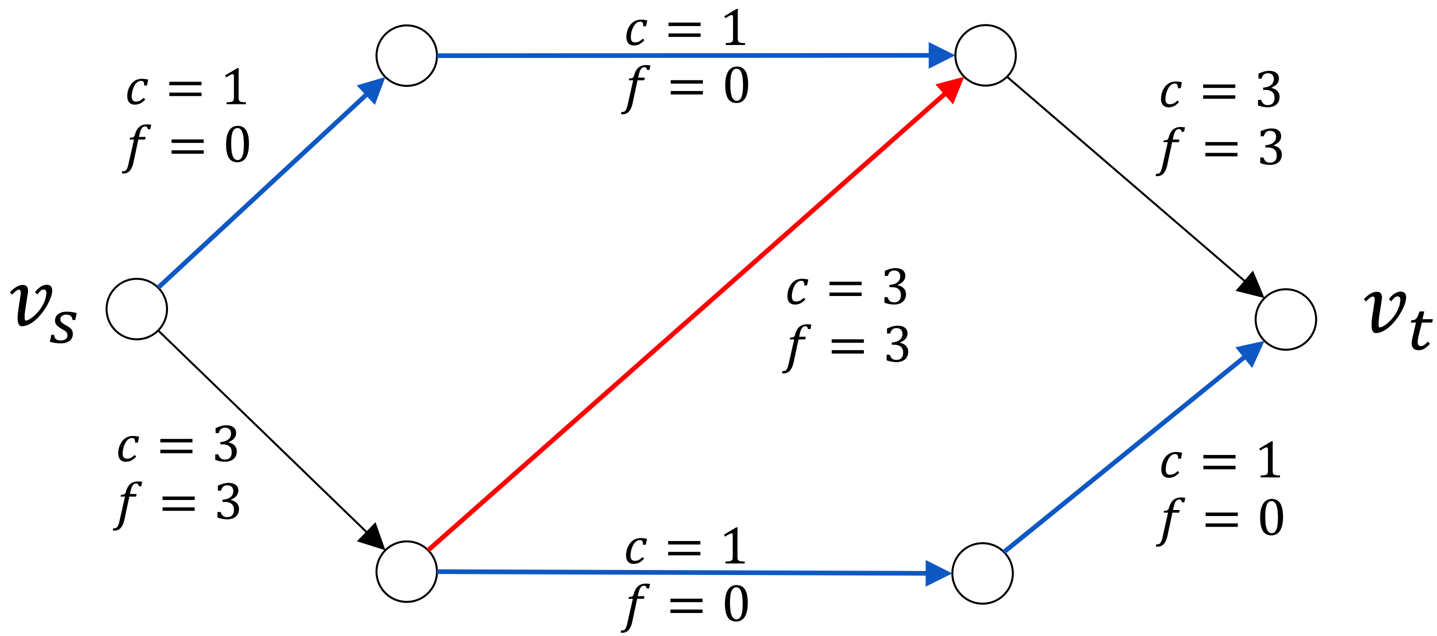
# 最大流問題：例



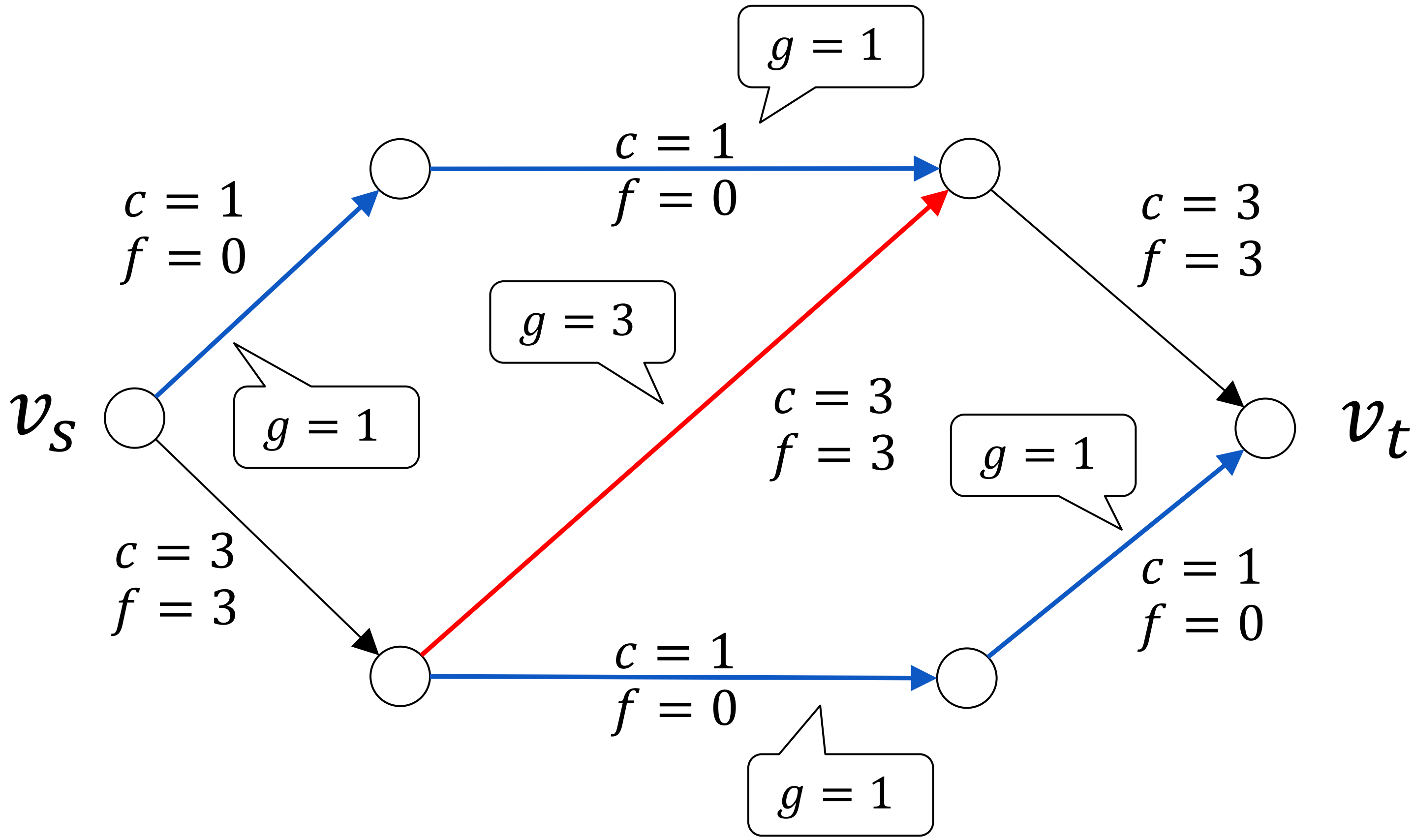
# 最大流問題：例



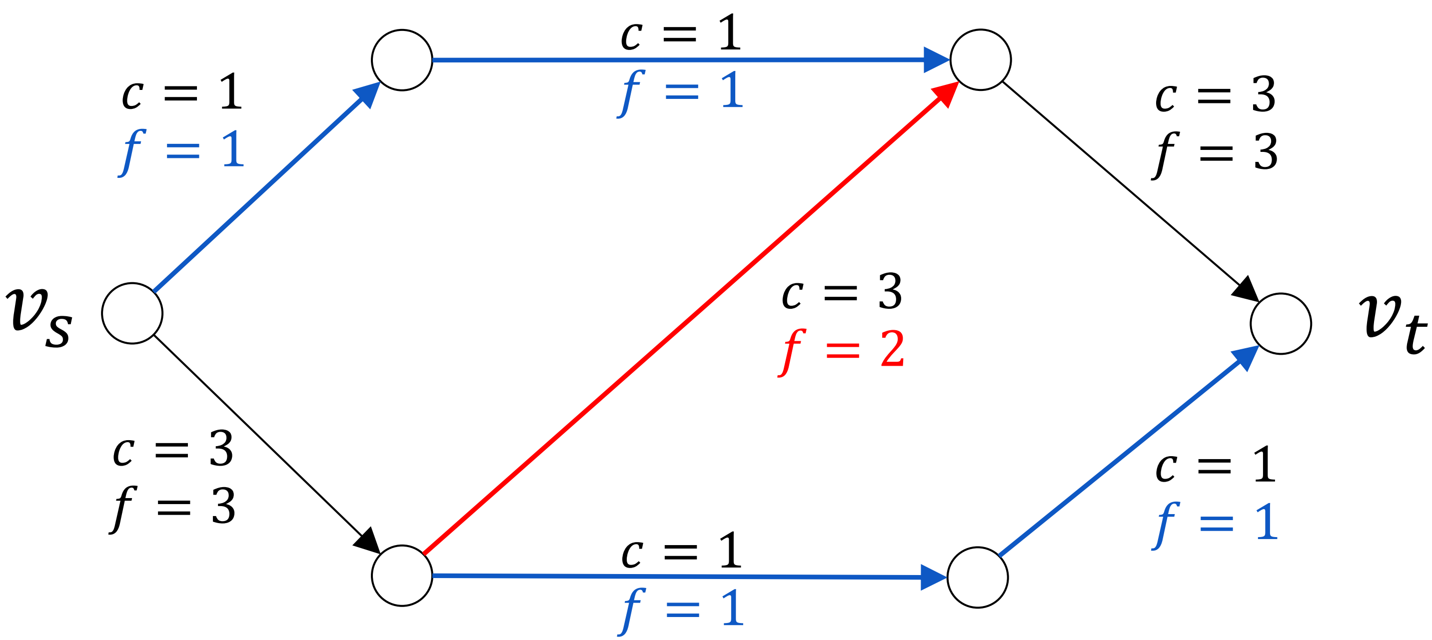
# 最大流問題：例



# 最大流問題：例



# 最大流問題：
# 例



# 最大流問題：例