確率・統計
第6回 母平均のt検定

兵庫県立大学　社会情報科学部
川嶋宏彰
kawashima@sis.u-hyogo.ac.jp

本日の講義内容

- テキスト
  - 「統計学入門」10章 (10.4～), 12章 (12.1～12.3)
- 復習:レポート2-4（第3回の一部～第4回）兼テスト対策
- t分布
  - 母分散未知の場合に不偏分散を用いると，標本平均の従う分布は正規分布からすこしずれてくる．これが t分布
- 母平均の検定（t検定）
  - 分散未知の正規母集団
- 母分散の比の検定

レポート2-4に関する質問

4. 母平均は17歳全国平均と有意差があるか，有意水準5%で検定せよ（p値，棄却域も示すこと．母分散は17歳全国データの分散を用いる）

質問①: 帰無仮説「17歳の女子の平均身長と社会情報科学部の女子の平均身長には有意差がある」、対立仮説「有意差がない」という解釈でよいでしょうか？

質問②: 統計量Zを求める際に母平均が必要で，母平均は標本平均の平均のことだと思うのですが，私達は今一つの標本のみをもっているので，どう母平均を計算すればよいでしょうか？

質問③: 棄却域やp 値はどう求めるのですか？

（復習）母平均の検定

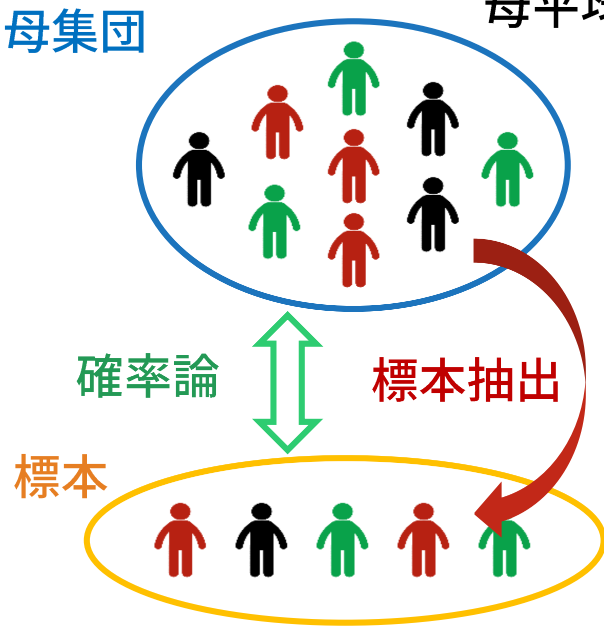
- 観測された標本から、母集団の平均 μ が特定の値 μ_0 と等しいか否かを検定

未知

母平均 μ ⟷ μ_0

理論的や予想値など (given)

等しいかどうか判定



標本の個々の変量
$E[X_i] = \mu$

標本サイズ $n = 5$

標本（確率変数） X_1, X_2, X_3, X_4, X_5

標本の観測値 163 187 175 178 164

標本平均（確率変数） $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_5}{5}$

$X_1, X_2, \ldots, X_5$ の観測値を代入 $\bar{X} = 173.4$

レポート2-4に関する質問

質問①: 帰無仮説「17歳の女子の平均身長と社会情報科学部の女子の平均身長には有意差がある」，対立仮説 「有意差がない」という解釈でよいでしょうか？

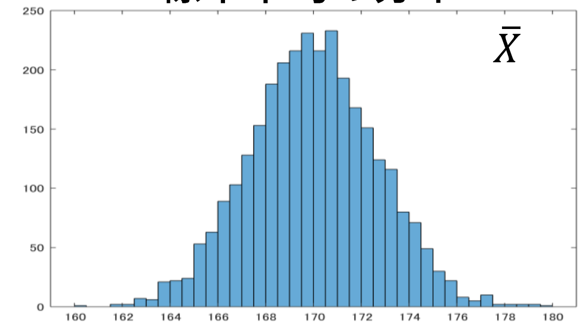
- 仮説としては逆で，以下のようにします．
  - 帰無仮説：17歳の女子の平均身長と社会情報科学部の女子の平均身長には差がない
  - 対立仮説：17歳の女子の平均身長と社会情報科学部の女子の平均身長には差がある
  - この仮説の時点では有意差があるとはいわず「差がある」「差がない」といいます．

- 帰無仮説の方には，具体的な分布を考えられるような仮説を持ってきます．
- 差があるといっても，1cm差がある，2cm差がある，など分布としては無限に可能性があるのですが，一方で，「差がない ($\mu = \mu_0$)」を仮定した分布は一つに定まります．

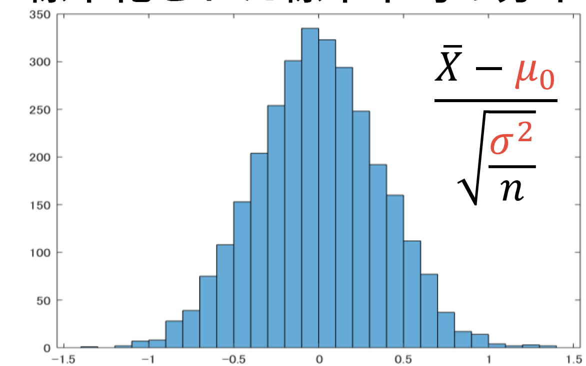
（復習）帰無仮説の下での標本平均の分布

- 帰無仮説（$\mu = \mu_0$）の下では
  - <u>母集団が正規分布$N(\mu_0, \sigma^2)$に従う</u>
    - 標本平均は正規分布に従う$\bar{X} \sim N\left(\mu_0,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$
    - 標本平均を標準化すると $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,\ 1)$

標本平均の分布



標準化された標本平均の分布



帰無仮説の下で
具体的な分布を考える

レポート2-4に関する質問

② 統計量Zを求める際に母平均が必要で，母平均は標本平均の平均のことだと思うのですが，私達は今一つの標本のみをもっているので，どう母平均を計算すればよいでしょうか？

- 母平均の仮説検定では，母平均は最後まで分かりません．
- たしかに，仮に標本抽出を何度もできる場合は，いくつもの標本平均の平均をとって，母平均に近い値（完全に一致させることは難しいですが・・）を推定することもできますが，通常は標本はひとつだけです．
- 母平均の仮説検定，もしくは母平均の推定では，このひとつの標本平均だけを使います．
- 母平均の仮説検定では，母平均は分からないけども，母平均μがある値（これをスライドではμ_0と置いている）とは異なるか否かを判定します．（4-24や4-25）

（復習） 1群の標本に対する平均の検定 (母分散既知)

- 仮説を設定
  - 帰無仮説：母平均 μ はある値 μ_0 と等しい $(\mu = \mu_0)$
  - 対立仮説：母平均 μ はある値 μ_0 と異なる $(\mu \neq \mu_0)$ → 両側検定
- 帰無仮説（$\mu = \mu_0$）の下で Z 統計量を計算
  - 標本サイズ n の標本の母平均 μ がある値 μ_0 と等しければ
    標準化した標本平均は以下の標準正規分布に従う

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

母分散は既知と仮定
していることに注意

- p 値を計算
  - 実際に標本から計算された Z の値 (実現値) を Z^* とする
  - 両側確率 $P(Z \geq |Z^*|) + P(Z \leq -|Z^*|) = 2P(Z \geq |Z^*|)$ を求める

（実現値は負にもなりうるため Z^* の絶対値をとっておく）

レポート2-4に関する質問

③ 棄却域(有意水準5%)やp 値はどう求めるのですか？

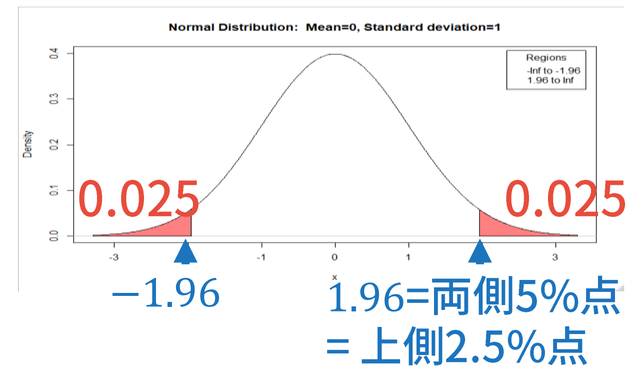
- （参考）スライド3-28～31，4-24, 25, 44, 46
- 棄却域は有意水準αで決まる

$$\alpha = P(Z \leq -?) + P(Z \geq ?) = 2P(Z \geq ?)$$

$\alpha = 0.05$のとき $0.05 = 2P(Z \geq 1.96)$

つまり上側 $100\ \alpha/2\ \ (= 2.5)$ パーセント点

の 1.96 を用いて　$Z < -1.96, 1.96 < Z$

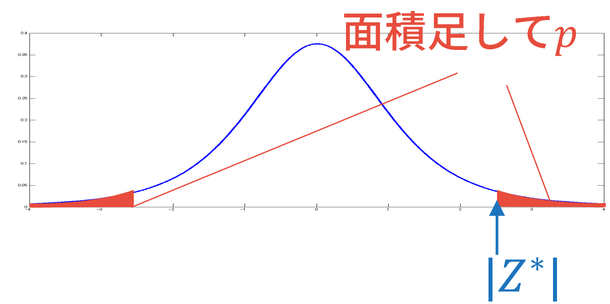


- 両側検定の p値は両側確率．両側確率は $|Z^*|$ の上側確率の2倍

$$p = 2P\ (Z \geq |Z^*|)$$

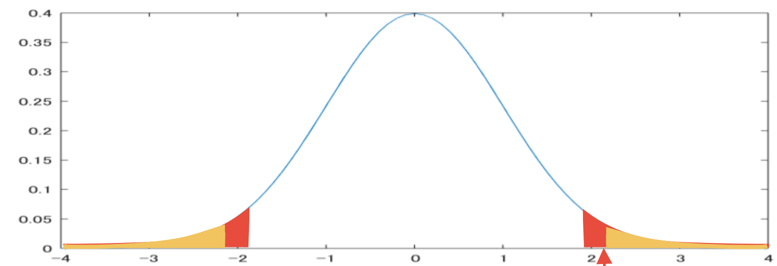
上側確率はどう求めるか？（3-31, 4-44）

- 分布 > 連続分布 > 正規分布 > 正規分布の確率
- 標準正規分布表（4-46）→ 試験でよく用いる



中間テストに向けて (スライド4-25の復習)

- 標本平均 $\bar{X}$ の観測値が（実際の標本から）求まった後のステップ
  - 以下のどちらかで帰無仮説を棄却
    - A)　$p < 0.05$ (= 有意水準α)
    - B)　観測値Z^*が棄却域に入る



$$\left\{\begin{array}{l}\text{標本平均の観測値 } \bar{X} = 176 \\ \text{標本サイズ } n = 5 \\ \text{全国平均 } \mu_0 = 170 \\ \text{母分散 } \sigma^2 = 36\end{array}\right.$$

統計量Zの観測値 $Z^* = \dfrac{176-170}{\sqrt{36/5}} = 2.24$

[Rcmdr] ○○分布の確率… Z^*の上側確率 (両側は2倍)

A-1

p値: $p = 0.0253$

B-2

A-2

棄却域: $Z < -1.96, 1.96 < Z$

B-1

有意水準 $\alpha = 0.05$

[Rcmdr] ○○分布の分位点… 両側なら上側確率に $\alpha/2$ を指定

統計量の値 (グラフの横軸) に着目

確率値 (グラフの面積)に着目

中間テストに向けて (スライド4-9〜11, 26の復習)

- 帰無仮説 H_0
  - 「母平均 μ はある値 μ_0 と差がない（等しい, $\mu = \mu_0$）」
- 対立仮説 H_1
  - 「母平均 μ はある値 μ_0 と差がある（異なる, $\mu \neq \mu_0$）」

帰無仮説H_0が棄却される → 母平均 μ はある値 μ_0 と有意に差がある
（例） 17歳の女子の平均身長と社会情報科学部の女子の平均身長には
有意差が認められる（$p = 0.025 < 0.05$）

帰無仮説H_0が棄却されなかったら→ 有意差があるともないとも言えない
（例） 17歳の女子の平均身長と社会情報科学部の女子の平均身長には
有意差が認められない（差があるとはいえない） （$p = 0.32 > 0.05$）
「有意差がない, 差がない」という結論は間違い！

（重要！）仮説検定のポイント

1. 何を帰無仮説（対立仮説）とするか？

- 1群の標本に対する検定
  - 帰無仮説の例：母集団の母平均 μ は「ある値 μ_0」と差がない
- 2群の標本に対する検定（本日）
  - 帰無仮説の例：母集団1の母平均μ_1と母集団2の母平均μ_2は差がない

2. 帰無仮説の下で，どの統計量がどんな分布に従うか？

- 仮定を整理すること
  - 母集団は正規分布か? 母分散は既知か? 標本サイズ n は大きいか?
- 問題により，用いる統計量・分布が異なる → 色々な○○検定がある
  - <u>標準正規分布に従う統計量Z</u>，<u>t 分布に従う統計量t</u>

母集団の分布と分散に何を仮定するか？

	母分散 σ^2 既知	母分散 σ^2 未知
母集団は正規分布	第4回 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}\sim N(0,\ 1)$　標準正規分布 $\leftrightarrow \bar{X}\sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ (正規分布の再生性より)	第6回（今回） $\nu = n-1$：自由度 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}}\sim t(\nu)$　(自由度νの) t分布 n が大きいと，$t(\nu)\xrightarrow{\nu\to\infty} N(0, 1)$
母集団は一般の分布	第5回 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}\sim N(0,\ 1)$ (中心極限定理より)	第5回 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}}\sim N(0,\ 1)$ nが大きいと，$s^2 \approx \sigma^2$ (中心極限定理，大数の法則より)

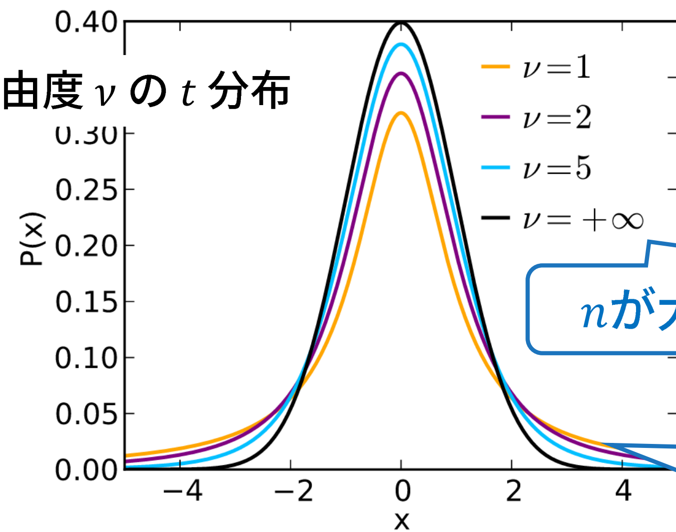
n が小さくてもOK!

n が大きい場合
(nが小さい場合を含めノンパラメトリック検定を用いることが多い)

母分散未知での母平均の推定・検定

- 観測$X_1, \ldots, X_n$が得られたとき $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ $\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)\right)$
  - 不偏分散s^2 は σ^2 のまわりでばらつく
  - つまりs^2 を σ^2 の代用として使うと、$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim N(0,1)$ とはいえない
  - 実際には標準正規分布からずれる…自由度 $n-1$ のt 分布に従う！

自由度 ν の t 分布



$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim t(n-1)$$

自由度 $\nu = n-1$
（ν：ニュー）

nが大きいならほぼ正規分布

正規分布よりも裾野が広い

ステューデントの t 分布

- 統計学上極めて重要な発見 (小標本の問題)
  - ギネスビール社ダブリン醸造所 (アイルランド) の社員であったゴセットによる貢献
    - 同社では当時社員の論文発表を禁止していたため、Student というペンネームで論文を発表 (1908)
  - フィッシャーが研究の重要性を見出し、統計量に t という記号をあてたため、この統計量の従う分布はステューデントの t 分布と呼ばれる
    - 当時は大標本を測定することに重きが置かれていたが醸造技術者らの現場では小さな標本サイズを利用せざるを得ない場合も多かった
  - それ以前は正規分布を用いていたため、リスクを過小に見積もっていたことになる
    - 現実には外れ値 (outlier) は結構起こりうる

https://en.wikipedia.org/wiki/William_Sealy_Gosset

本日の講義内容

- テキスト
  - 「統計学入門」10章 (10.4～)
- 復習:レポート2-4（第3回の一部～第4回）
- t分布
  - 母分散未知の場合に不偏分散を用いると，標本平均の従う分布は正規分布からすこしずれてくる．これが t分布
- 母平均の検定（t検定）
  - 分散未知の正規母集団
- 母分散の比の検定

目次：平均の差の検定

- 1群の標本に対する検定
  - 母集団の平均が特定の値と差があるか → t 検定

（例）ある町の平均身長は全国平均と差があるか？

- 2群の標本に対する検定
  - 標本群に対応がある場合
    - 母集団の平均に差があるか → t 検定
  - 標本群に対応がない場合
    - 母集団の平均に差があるか
→ t 検定 (分散が同じ場合) or ウェルチのt検定 (分散が異なる場合)
    - 母集団の分散が異なるか → F 検定

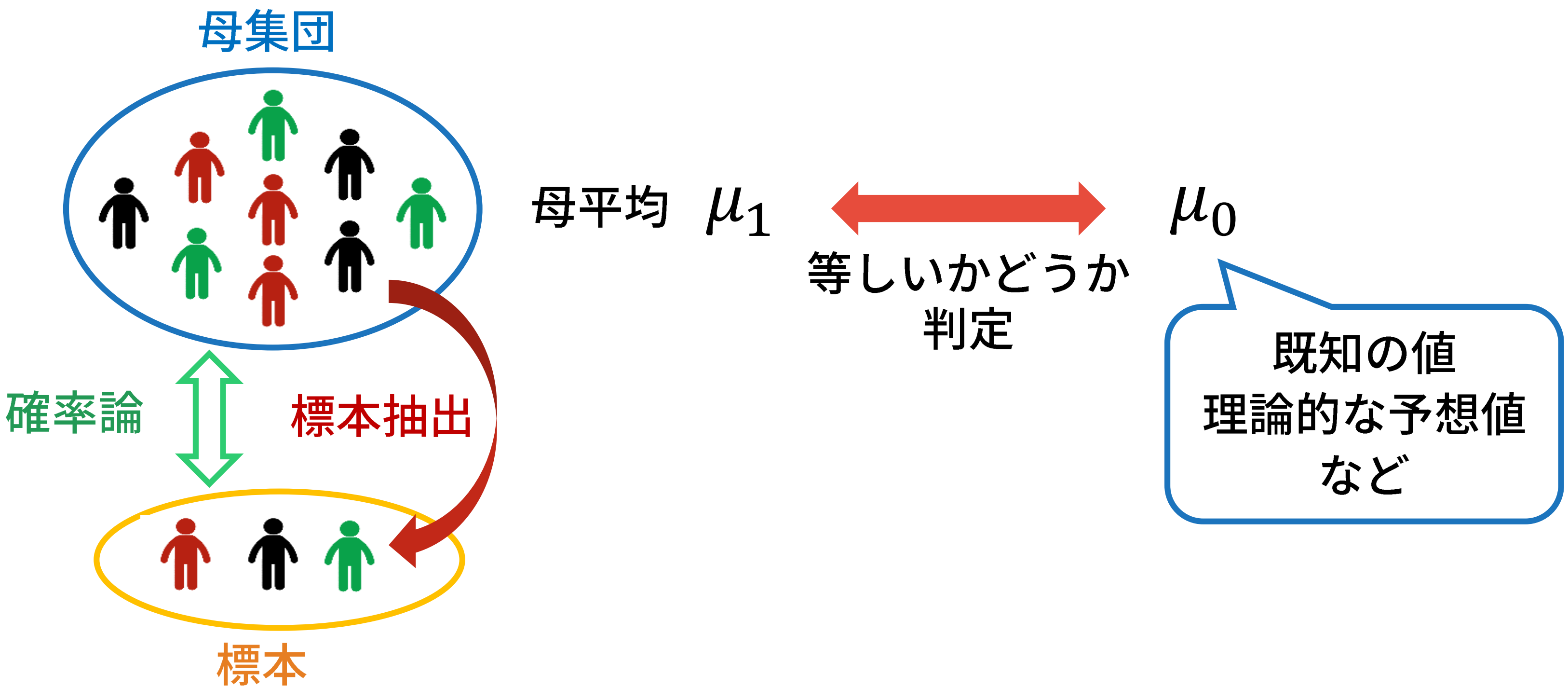
同じ集団の変化を見るときなど：
（例）生活指導の介入前後の血糖値の変化

2標本群を連続変数で比較するとき：
（例）投薬の有無と血圧の関係

今回は母集団が正規分布（正規母集団）であることを仮定

1群の標本に対する検定

- 観測可能なもの (標本 or 標本平均) から母集団の平均 μ が特定の値 μ_0 と等しいかどうか



1群の標本に対する t 検定の例

- 母集団の平均μがある値μ_0と差があるか検定したい
  - 例：牛乳をたくさん飲むと身長が伸びるか？
    - 被験者5人の1年間の身長の伸びは以下の通り
      - $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} = \{1cm, 2cm, 3cm, 3cm, 4cm\}$
      - 標本平均：$\bar{X} = 2.6cm$　不偏分散：$s^2 = 1.3cm^2$
      - 母平均：μ (未知 / 検定の対象)
    - 全国の中学生の平均身長の伸びは既知：$\mu_0 = 2cm$
  - 仮説検定
    - 帰無仮説：牛乳を大量に飲んでも背は伸びない $(\mu = \mu_0)$
    - 対立仮説：牛乳を大量に飲んだら背が伸びる $(\mu > \mu_0)$

1群の標本に対する平均の検定（母分散未知）

- 仮説を設定
  - 帰無仮説：母平均 μ はある値 μ_0 と等しい $(\mu = \mu_0)$
  - 対立仮説：母平均 μ はある値 μ_0 より大きい $(\mu > \mu_0)$ (片側検定)

(今回片側でやってみるが両側検定でもよい)

- t 統計量を計算
  - 標本サイズ n の標本の母平均 μ がある値 μ_0 と等しければ標準化した標本平均は自由度 $n-1$ の t 分布に従う

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim t\,(n-1)$$

実際に標本から計算 (観測) した t の値 (実現値) を t^* とする

- p 値を計算
  - 帰無仮説の下で，標本から得られた (tの実現値) t^*の上側確率を求める

$$P(t \geq t^*; n-1\,)$$

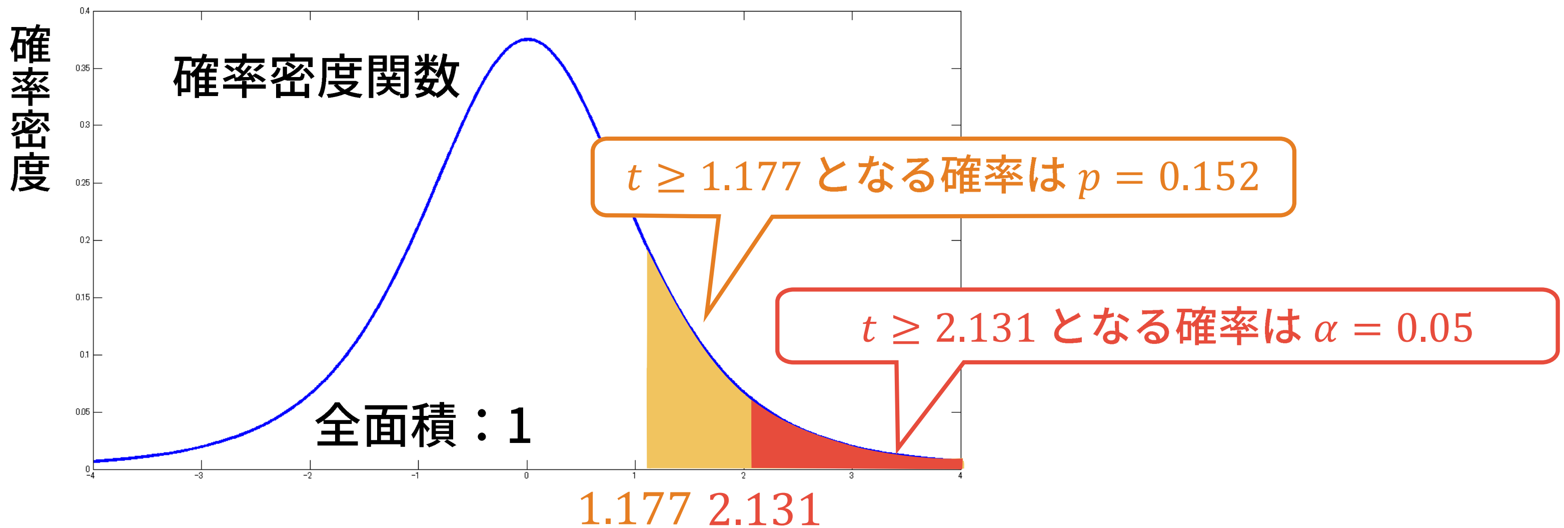
両側検定なら $2P\,(t \geq |t^*|)$

t 検定の実行例

- 自由度4の t 分布を用いて有意水準5%で検定

標本平均 $\bar{X} = 2.6$, 不偏分散 $s^2 = 1.3$の標本における

検定統計量 $t = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ の実現値は $t^* = \frac{2.6-2}{\sqrt{\frac{1.3}{5}}} = 1.177$



「t検定の結果、有意差は認められなかった $(p = 0.152 > 0.05)$」

[Rcmdr]異なる自由度のt分布を比べてみる

1. 自由度 (degree of freedom) が1や10のt分布を描いてみる
   1. 分布 > 連続分布 > t分布 > t分布を描く → 自由度(df) 1でプロット
   2. Rスクリプトの以下の部分を変更し，df=??の部分を変えては実行する

-10, 10 に変更

```
local({
 .x <- seq(-636.619, 636.619, length.out=1000)
 plotDistr(.x, dt(.x, df=1), cdf=FALSE, xlab="x", ylab="Density",
 main=paste("t Distribution:  Degrees of freedom=1"))
})
```

赤字部を削除

（修正後）

行のどこかにカーソルを置き「実行」を押す

```
local({
 .x <- seq(-10, 10, length.out=1000)
 plotDistr(.x, dt(.x, df=1), cdf=FALSE, xlab="x", ylab="Density")
})
```

ここを10にして再度実行してみる

[Rcmdr] t分布のパーセント点と上側確率

自由度4のt分布を考える.

1. 有意水準5%で両側検定や片側検定を行う際の棄却域をそれぞれ求めよ
   - 上側5パーセント点や両側5パーセント点（上側2.5パーセント点）が分かればよい
   - 分布 > 連続分布 > t分布 > t分布の分位点
2. $t^* = 1.177$ の上側確率（片側検定のp 値）を求めよ
   - 分布 > 連続分布 > t分布 > t分布の確率

練習問題

あるクラスの平均体重が60kgと異なるか否か，有意水準5%で検定したい．
（今回はクラス全体が母集団で，その平均が母平均）

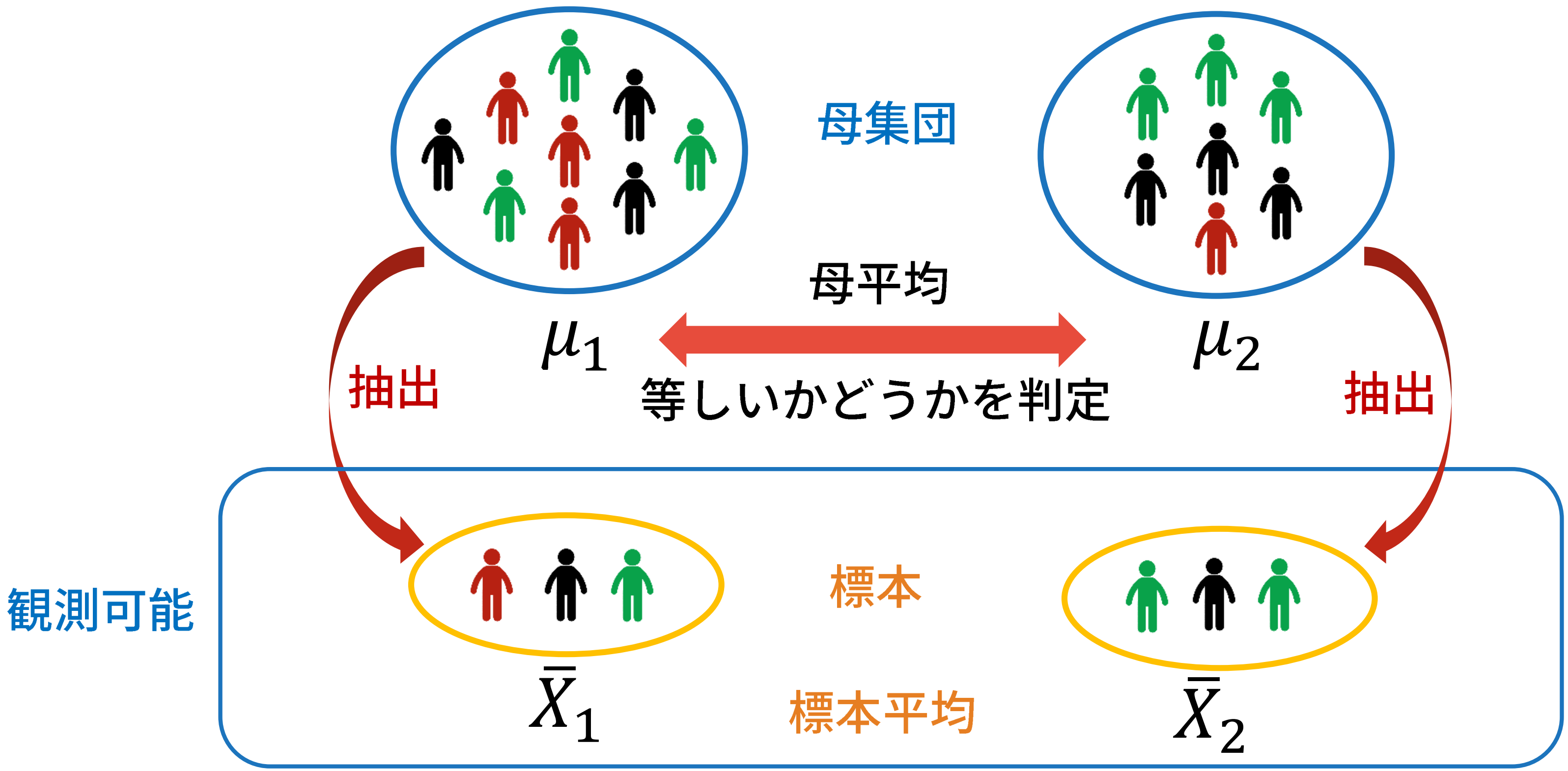
5人を無作為抽出して聞き出したところ以下の通りであった．

60　70　80　60　80　(kg)

1. 標本平均$\bar{X}$と不偏分散s^2の値を求めよ．
2. 自由度νのt分布でt検定を行いたい．νはいくらか？
3. 両側検定と片側検定はどちらを用いるのが妥当か？
4. 帰無仮説と対立仮説を述べよ．
5. この標本における統計量tの値，およびp値を求めよ．
6. 帰無仮説が棄却できるか否かを述べよ．(棄却域，p値を両方試すこと)
7. 検定の結論を述べよ．

2群の標本に対する検定

- 二つの母集団からそれぞれ抽出された標本から母数が等しいかどうかを検定



対応のある2群の標本

- 母集団の平均 μ_1, μ_2 に差があるかどうかを検定したい
  - 例：牛乳をたくさん飲むと身長が伸びるか？
    - 5名の被験者の身長 (母平均 μ_1 は未知)

$$\{X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}\} = \{161cm, 158cm, 165cm, 150cm, 170cm\}$$

↕ 各標本に対応がある（同じ被験者のデータ）

    - 牛乳を1年後飲み続けたあとの身長 (母平均 μ_2 は未知)

$$\{X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}, X_{25}\} = \{162cm, 160cm, 168cm, 153cm, 174cm\}$$

    - それぞれの差を $X_i = X_{2i} - X_{1i}$ とすると

$$\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} = \{1cm, 2cm, 3cm, 3cm, 4cm\}$$

    - $\sum_i X_i = \sum_i X_{2i} - \sum_i X_{1i}$ より両辺5で割って $\bar{X} = \bar{X}_2 - \bar{X}_1$

標本群に対応があれば1群の標本に対する t 検定が適用可能

対応のある2群の標本に対する平均の差の検定

- 仮説を設定
  - 帰無仮説：母平均は等しい $(\mu_1 = \mu_2)$
  - 対立仮説：片方の母平均の方が大きい $(\mu_1 < \mu_2)$
- t 統計量を計算
  - 標本サイズ n である2群の標本の母平均 μ_1, μ_2 が等しければ
    対応する標本間の差の平均は自由度 $n-1$ の t 分布に従う

$$t = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim t(n-1)$$

$\bar{X}_2 - \bar{X}_1 = \bar{X}$ とおけばスライド20で
$\mu_0 = 0$ とした場合に一致

s^2 は対応する各値の差の標本分散

- p 値を計算
  - 帰無仮説の下で，標本から得られた t^* の上側確率を求める

$$P(t \geq t^*; n-1)$$

対応のない2群の標本に対する検定

- 母集団の平均に差があるかどうかを検定したい
  - 例：AクラスとBクラスの成績に差があるか？

Aクラス	Bクラス
69	49
52	40
68	52
46	37
72	55
40	38
45	45
62	
53	

	Aクラス	Bクラス
標本サイズ n	$n_1 = 9$	$n_2 = 7$
標本平均 $\bar{X}$	$\bar{X}_1 = 56.33$	$\bar{X}_2 = 45.14$
標準偏差 s	$s_1 = 11.76$	$s_2 = 7.105$
不偏分散 s^2	$s_1^2 = 138.3$	$s_2^2 = 50.48$
母平均	？	？
母分散	？	？

差があるか？

対応のない2群の標本に対する検定

- 母集団の平均の検定方法は：
  - 分散が同じ場合→ t 検定
  - 分散が異なる場合→ ウェルチの t 検定
- そもそも母集団の分散は異なるか → F 検定

対応のない2群の標本に対する平均の差の検定

- 仮説を設定
  - 帰無仮説：母平均は等しい $(\mu_1 = \mu_2)$
  - 対立仮説：母平均は異なる $(\mu_1 \neq \mu_2)$　(片側検定なら $\mu_1 > \mu_2$ や $\mu_1 < \mu_2$)

等分散性が仮定できる場合

- t 統計量を計算
  - 標本サイズ n_1, n_2 の2群の標本の母平均 μ_1, μ_2 が等しければ 標本平均の差は自由度 $n_1 + n_2 - 2$ の t 分布に従う

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

2標本を合併 (pooling)

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

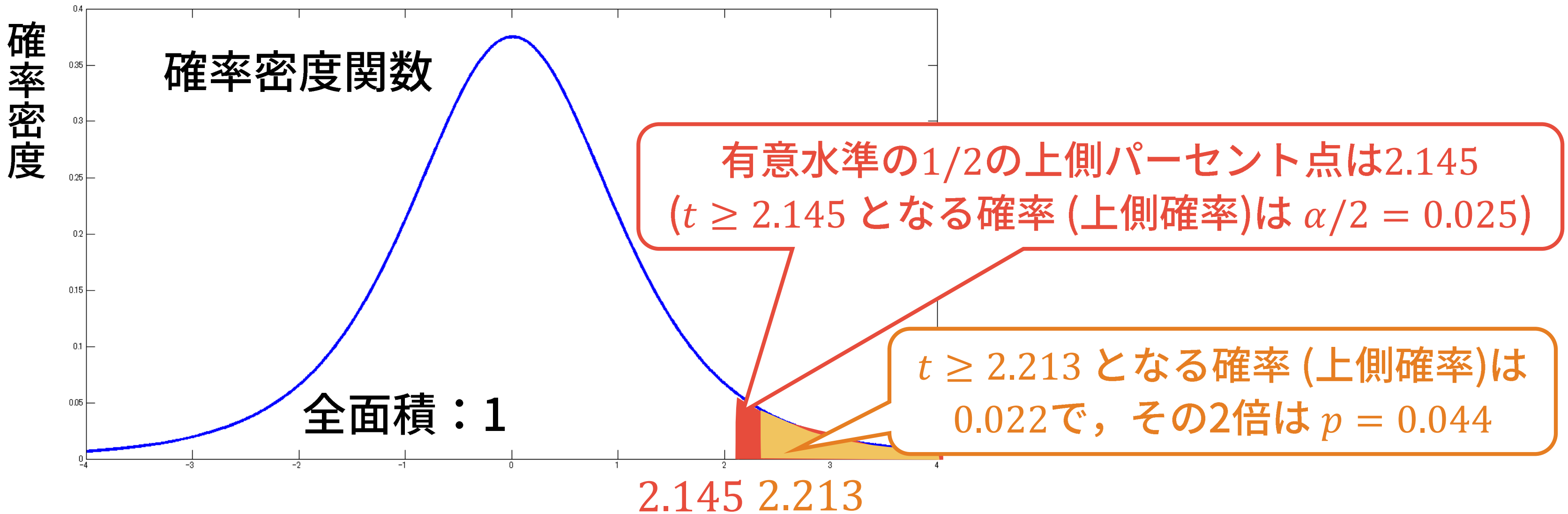
- p 値を計算
  - 帰無仮説の下で，標本から得られた $|t^*|$ の上側確率を求め，両側検定なので2倍する

$$p = 2\,P(t \geq |t^*|; n_1 + n_2 - 2\,)$$

t 検定の実行例

- 自由度14の t 分布を用いて有意水準5%で両側検定

$$s^2 = \frac{(9-1)*138.3+(7-1)*50.48}{9+7-2} = 100.7 \quad t^* = \frac{56.3-45.1}{\sqrt{100.7*\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{7}\right)}} = 2.213$$



「t 検定の結果、有意差が認められた ($p = 0.044 < 0.05$)」

対応のない2群の標本に対する平均の差の検定

等分散性が仮定できない場合

- 仮説を設定
  - 帰無仮説：母平均は等しい ($\mu_1 = \mu_2$)
  - 対立仮説：母平均は異なる ($\mu_1 \neq \mu_2$)　(片側検定なら $\mu_1 > \mu_2$ や $\mu_1 < \mu_2$)
- t 統計量を計算
  - 標本サイズ n_1, n_2 の2群の標本の母平均 μ_1, μ_2 が等しければ標本平均の差は自由度 ν の t 分布に従う

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t(\nu)$$

こっちの式は覚えなくていい

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{s_1^4}{n_1^2(n_1 - 1)} + \frac{s_2^4}{n_2^2(n_2 - 1)}}$$

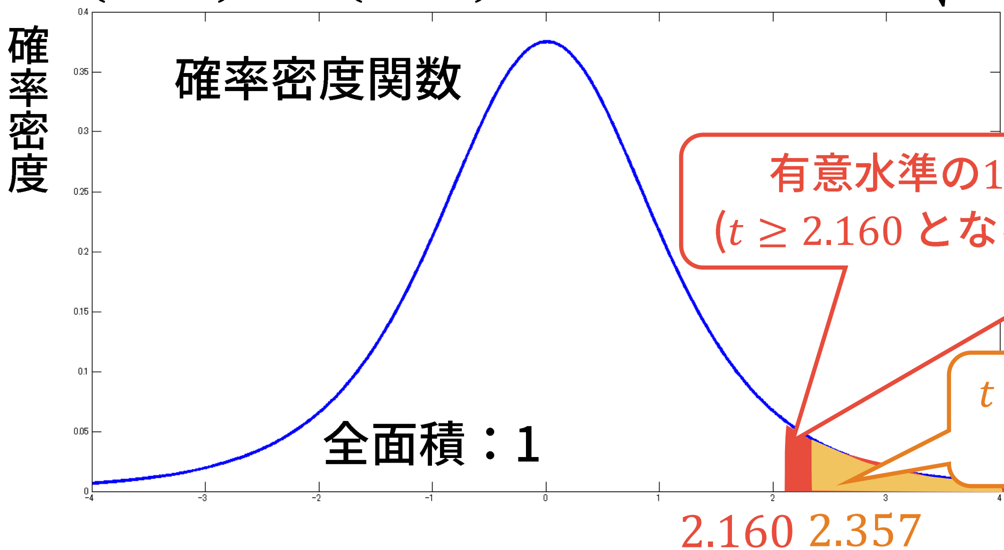
- p 値を計算
  - 帰無仮説の下で，標本から得られた $|t^*|$ の上側確率を求め，両側検定なので2倍する　$p = 2\,P(t \geq |t^*|; \nu\,)$

ウェルチの t 検定の実行例

- 自由度13.35の t 分布を用いて有意水準5%で両側検定

$$\nu = \frac{\left(\frac{138.3}{9} + \frac{50.48}{7}\right)^2}{\frac{138.3^2}{9^2\,(9-1)} + \frac{50.48^2}{7^2(7-1)}} = 13.35$$

$$t^* = \frac{56.3 - 45.1}{\sqrt{\frac{138.3}{9} + \frac{50.48}{7}}} = 2.357$$



以下は自由度13に丸めた場合の結果
(直接13.35で計算することも可)

有意水準の1/2の上側パーセント点は2.160
($t \geq 2.160$ となる確率 (上側確率)は $\alpha/2 = 0.025$)

$t \geq 2.357$ となる確率 (上側確率)は
0.017で，その2倍は $p = 0.035$

「t 検定の結果、有意差が認められた ($p = 0.017 < 0.05$)」

対応のない2群の標本に対する検定

- 母集団の平均の検定方法は：
  - 分散が同じ場合→ t 検定
  - 分散が異なる場合→ ウェルチの t 検定
- そもそも母集団の分散は異なるか → F 検定

これ以降のスライドは予習しておくこと

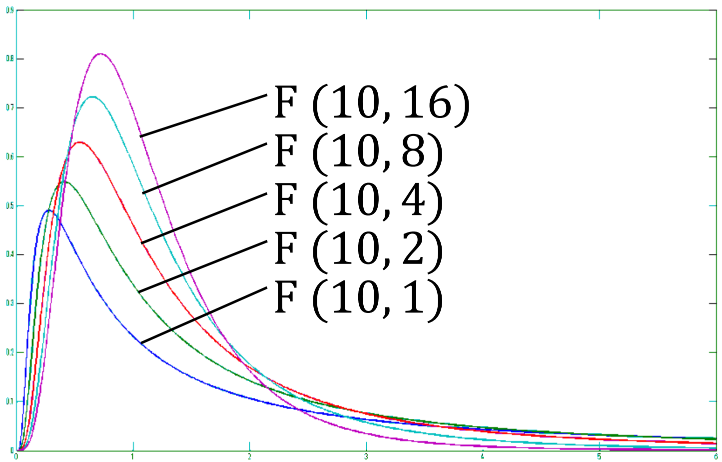
不偏分散の比の分布

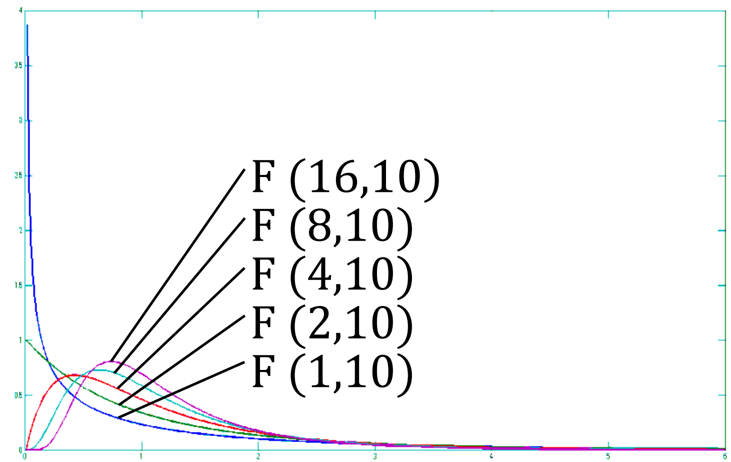
- 同じ母分散を持つ2つの正規分布にそれぞれ従う2群の標本を考える．それぞれの不偏分散の比の分布は？
  - 自由度 $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ の F 分布に従う

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \bar{X}_1)^2}{\frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \bar{X}_2)^2}$$

分子＞分母とするのが通例

自由度が増えるほど
分布は急峻になる





2群の標本に対する分散の差の検定

- 仮説を設定
  - 帰無仮説：母分散は等しい $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$
  - 対立仮説：片方の母分散の方が大きい $(\sigma_1^2 > \sigma_2^2)$ (片側検定の場合)
- F 統計量を計算
  - 標本サイズ n_1, n_2 の2群の標本の母分散 σ_1^2, σ_2^2 が等しければ各不偏分散 s_1^2 と s_2^2 の比は自由度 $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ の F 分布に従う

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F\,(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

- p 値を計算
  - 帰無仮説の下で，標本から得られた F^* の上側確率を求める

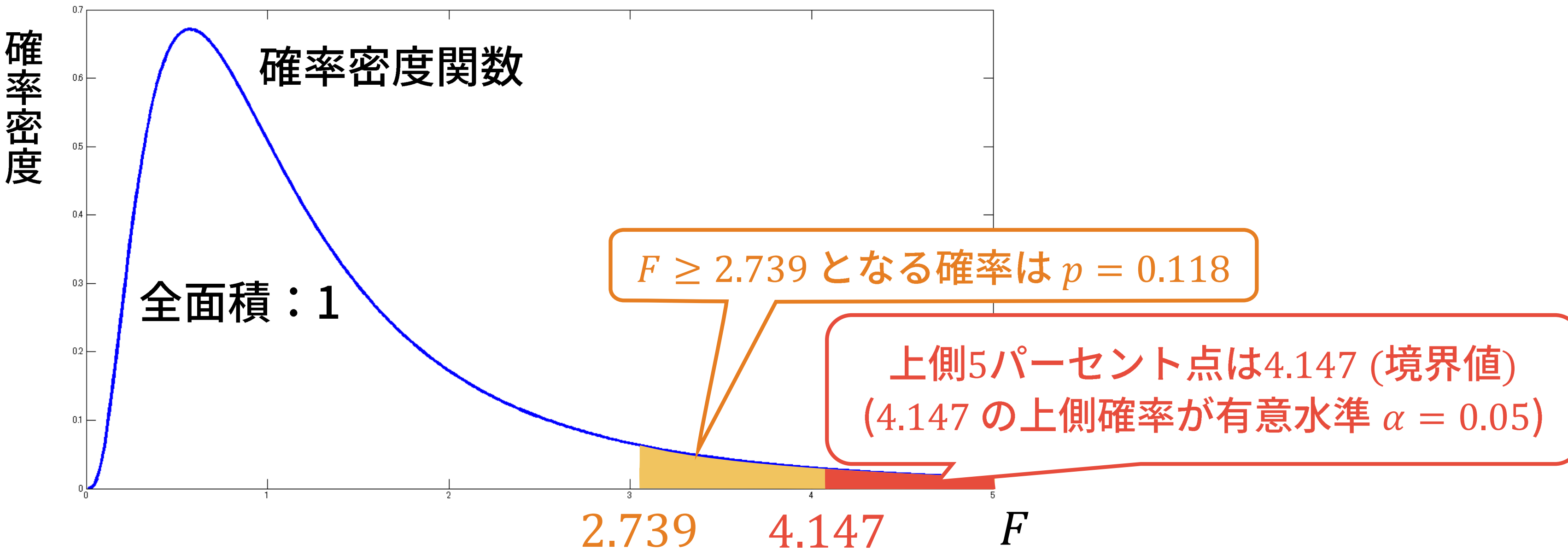
$$P(F \geq F^*; n_1 - 1, n_2 - 1)$$

F 検定の実行例

- 自由度 (8,6) の F 分布を用いて有意水準5%で検定

不偏分散 $s_1^2 = 138.25, s_2^2 = 50.48$ を持つ2標本における

検定統計量 $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ の実現値は $F^* = \frac{138.25}{50.48} = 2.739$



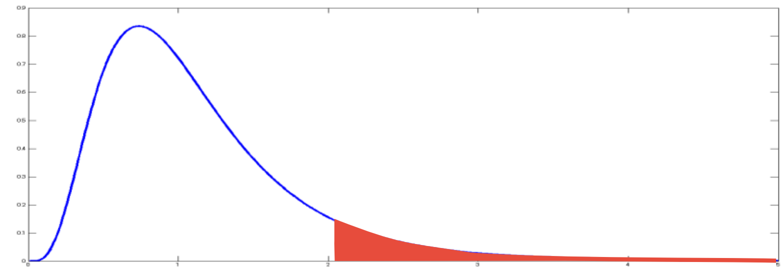
「F検定の結果、有意差は認められなかった $(p = 0.118 > 0.05)$」

F 検定：両側検定と片側検定

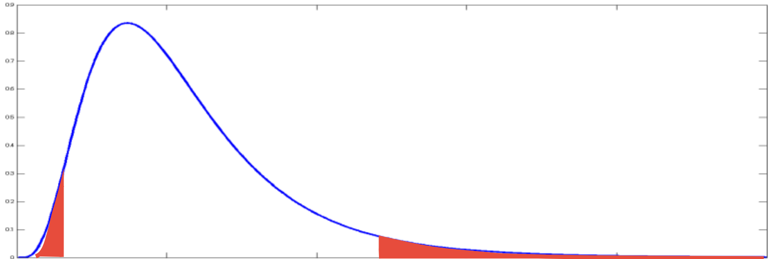
- 仮説によって棄却域の設定が異なる
  - 帰無仮説：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$（共通）

両側検定の場合は
左右の確率を足したものが有意水準 α
↓
片側検定表を用いて両側検定を行う場合は
有意水準の半分 $\frac{\alpha}{2}$ の上側パーセント点

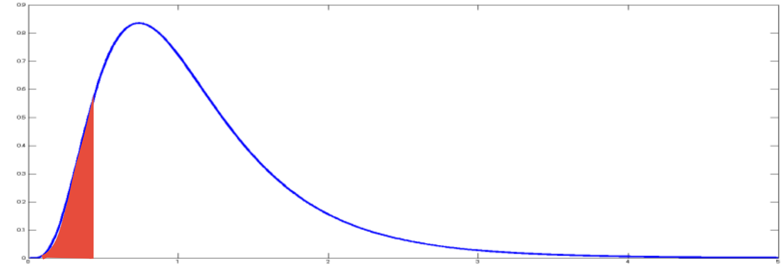
対立仮説：$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ → 片側検定



対立仮説：$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ → 両側検定



対立仮説：$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ → 片側検定



練習問題

標本サイズ 9, 7 の2群の標本について，母分散 が等しいかどうかの片側検定を行いたい．

1. 各不偏分散 s_1^2 と s_2^2 の比は自由度 (x, y) の F 分布に従う．x, y に当てはまる数は？
2. [Rcmdr] 1のF分布をプロットしてみること．
3. [Rcmdr or 分布表] 1のF分布を用いて有意水準5%で検定する際の棄却域を求めよ．
4. それぞれの標本の不偏分散が $s_1^2 = 230.53$ と $s_2^2 = 50.48$ であるとき， 1の分布におけるF統計量の値，および p 値を求めよ．
5. 帰無仮説が棄却できるか否か，および検定の結論を述べよ．

連絡

- 中間テスト
  - 持ち込みは不可
  - 用語は・・・ある程度出ます
  - 重要ポイントをウェブに順次整理
  - 30-40分程度
  - 終了後はテストの解説と講義

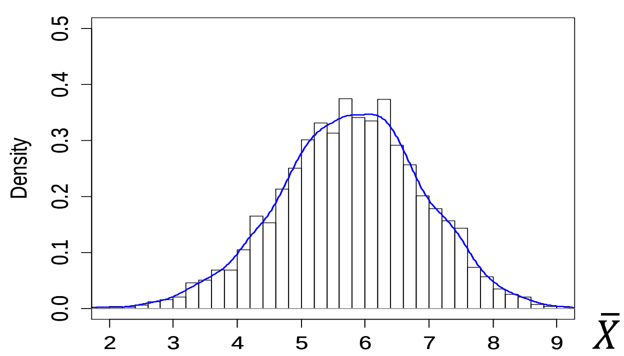
（復習）平均と分散の加法性

- 二つの確率変数 X, Y について以下が成立
  - 平均に関して $E[X+Y]=E[X]+E[Y], \quad E[X-Y]=E[X]-E[Y]$
  - 分散に関して $V[X \pm Y]=V[X]+V[Y]$ （X, Y が無相関のとき成立）
    - なお、$V[X]=E[(X-E[X])^2]$ (期待値からの二乗誤差の期待値)
- 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ について以下が成立
  - 平均に関して $E[X_1+X_2+\cdots+X_n]=E[X_1]+E[X_2]+\cdots+E[X_n]$
  - 分散に関して $V[X_1+X_2+\cdots+X_n]=V[X_1]+V[X_2]+\cdots+V[X_n]$
  - 分散の加法性は、確率変数が互いに無相関（共分散0）のときに成立

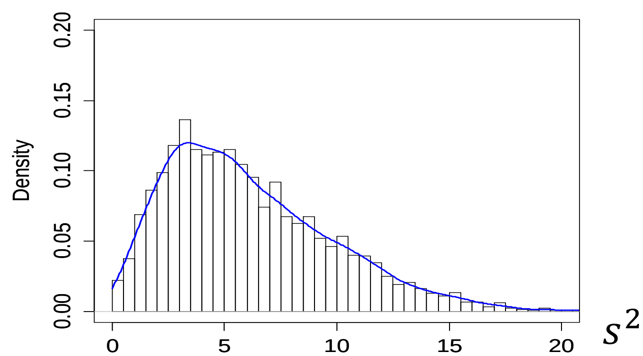
標本平均と不偏分散の分布

- 母分散が未知の場合はどうか？
  - 母分散 σ^2 の代わりに不偏分散 s^2 を使ってよいか？
    - 標本サイズが小さい時には「ゆらぎ」が大きい
  - 標本平均と不偏分散のヒストグラムを調べてみると・・・
    - 標本平均：$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は正規分布の形に
    - 不偏分散：$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ は χ^2分布の形に

標本平均の分布

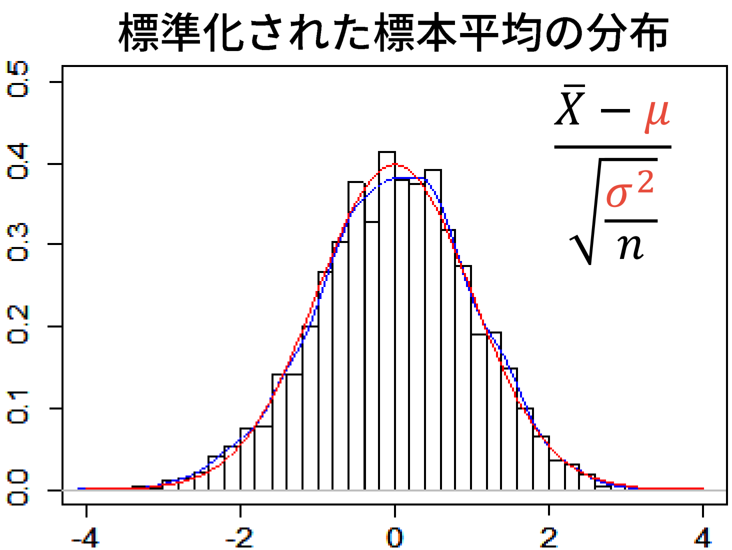


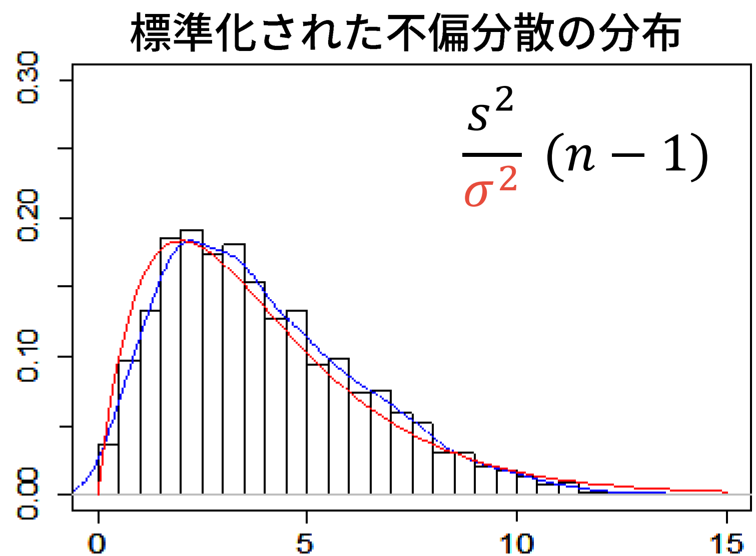
不偏分散の分布



標準化した標本平均と不偏分散の分布

- 母平均 μ と母分散 σ^2 で標準化した標本平均 $\bar{X}$ の分布は？
  - 標準正規分布に従う
- 母分散 σ^2 で標準化した不偏分散 s^2 の分布は？
  - 自由度 $n-1$ の χ^2分布に従う





標本平均と不偏分散

	標本平均	不偏分散
	$\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$	$s^2 = \dfrac{(X_1 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2}{n-1}$
平均	$E[\bar{X}] = \mu$ (不偏性)	$E[s^2] = \sigma^2$ (不偏性)
分散	$V[\bar{X}] = \dfrac{\sigma^2}{n} \to 0 \quad (n \to 0)$ (一致性)	$V[s^2] =$ (省略) $\to 0 \ (n \to 0)$ (一致性)
分布の形	(母集団が正規分布のとき) 正規分布 (母集団が一般の分布のとき) n が十分に大きいと正規分布	(母集団が正規分布のとき) $(n-1)s^2/\sigma^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布

無作為抽出を仮定

不偏分散で標準化した標本平均の分布

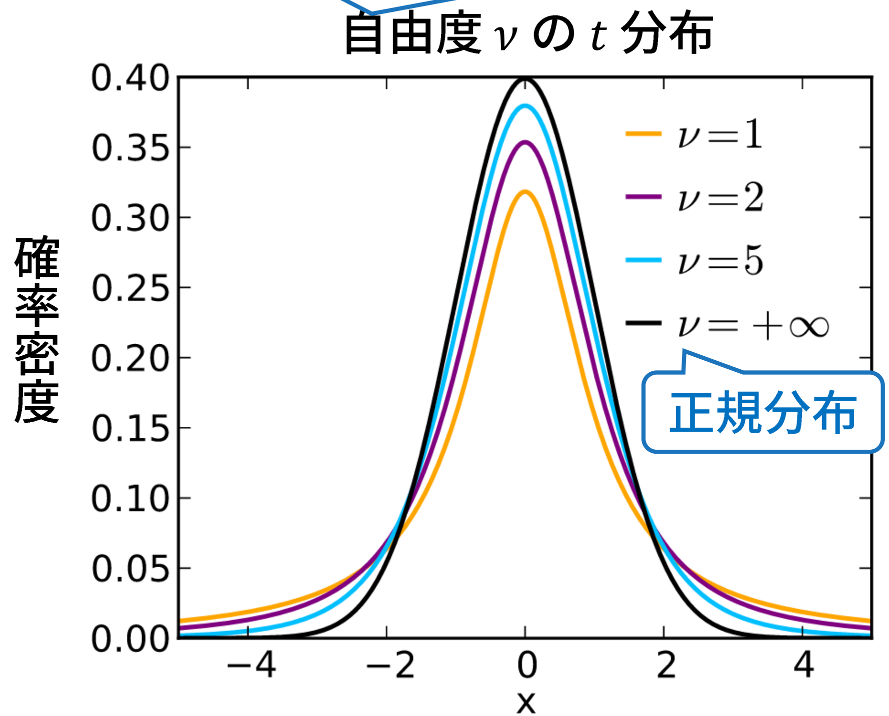
- 母平均 μ と不偏分散 s^2 で標準化した標本平均 $\bar{X}$ の分布は？
  - 自由度 $n-1$ の t 分布に従う

$$t = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{s^2}{\sigma^2}(n-1)}{n-1}}}$$

σ^2 を s^2 で代用

$$\frac{\text{標準正規分布}}{\sqrt{\frac{\text{自由度 } n-1 \text{ のカイ二乗分布}}{n-1}}}$$

(重要！)正規分布よりも裾野が広い



ステューデントの t 分布

- ゴセットによって小標本の問題を扱うために発見
  - 確率密度関数

関数は覚えなくてよい

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

ガンマ関数

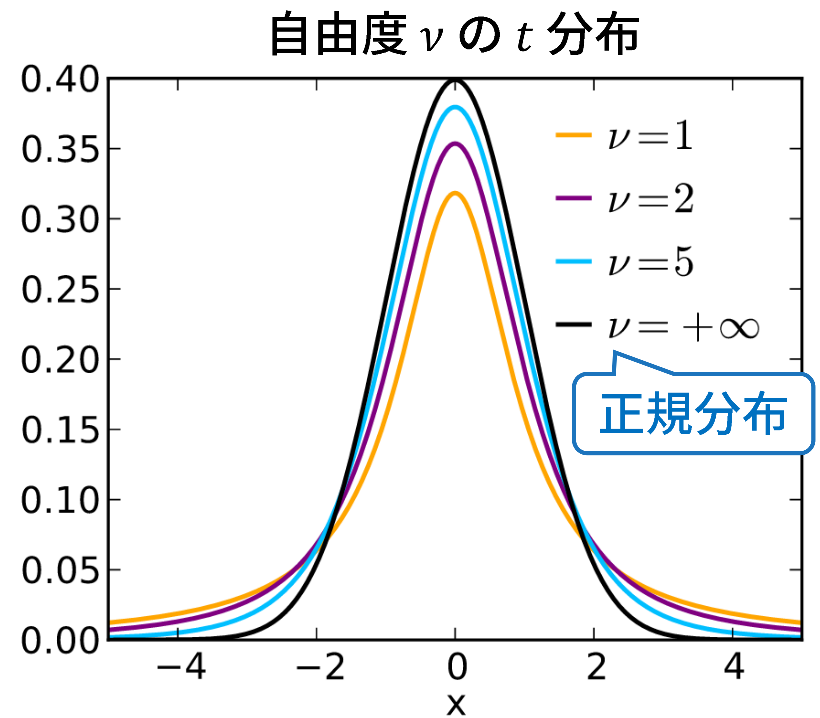
標本サイズ n が増加するほど
不偏分散は母分散に近づく

$$t = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \to \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

標本サイズ小では
t 分布に従う

標本サイズ大では
正規分布に従う

(重要！)正規分布よりも裾野が広い



対応のない2群の標本に対する平均の差の検定

等分散性が仮定できる場合

- 仮説を設定
  - 帰無仮説：母平均は等しい $(\mu_1 = \mu_2)$
  - 対立仮説：片方の母平均の方が大きい $(\mu_1 > \mu_2)$
- t 統計量を計算
  - 標本サイズ n_1, n_2 の2群の標本の母平均 μ_1, μ_2 が等しければ 標本平均の差は自由度 $n_1 + n_2 - 2$ の t 分布に従う

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

2標本を合併 (pooling)

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

- p 値を計算
  - 帰無仮説の下で，標本から得られた t^* の上側確率を求める

$$P(t \geq t^*; n_1 + n_2 - 2)$$

対応のない2群の標本に対する平均の差の検定

等分散性が仮定できない場合

- 仮説を設定
  - 帰無仮説：母平均は等しい ($\mu_1 = \mu_2$)
  - 対立仮説：片方の母平均の方が大きい ($\mu_1 > \mu_2$)
- t 統計量を計算
  - 標本サイズ n_1, n_2 の2群の標本の母平均 μ_1, μ_2 が等しければ 標本平均の差は自由度 ν の t 分布に従う

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t(\nu)$$

こっちの式は覚えなくていい

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{s_1^4}{n_1^2(n_1 - 1)} + \frac{s_2^4}{n_2^2(n_2 - 1)}}$$

- p 値を計算
  - 帰無仮説の下で，標本から得られた t^* の上側確率を求める

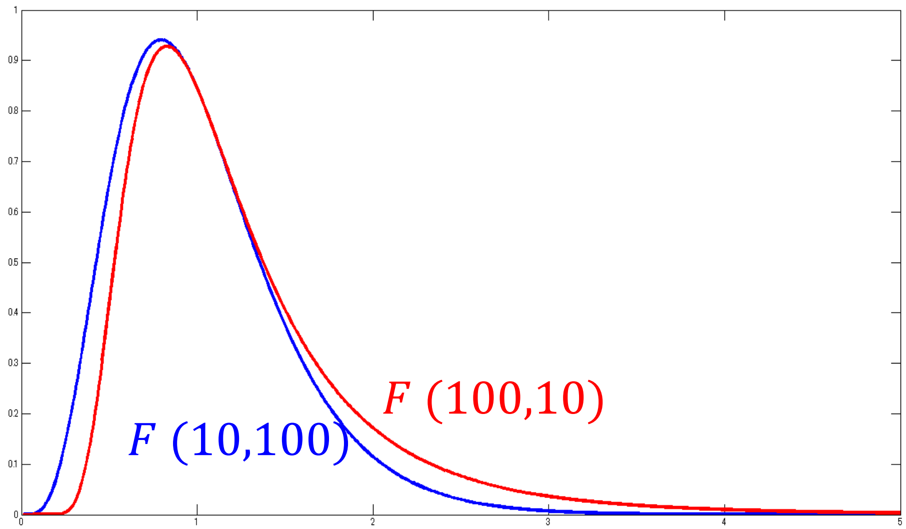
$$P(t \geq t^*; \nu)$$

F 分布

- $F\ (d_1, d_2)$ 分布の確率密度関数 (Fisherの頭文字)

$$f(x) = \frac{1}{B\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)} \left(\frac{d_1 x}{d_1 x + d_2}\right)^{\frac{d_1}{2}} \left(1 - \frac{d_1 x}{d_1 x + d_2}\right)^{\frac{d_2}{2}} x^{-1}$$

ベータ関数



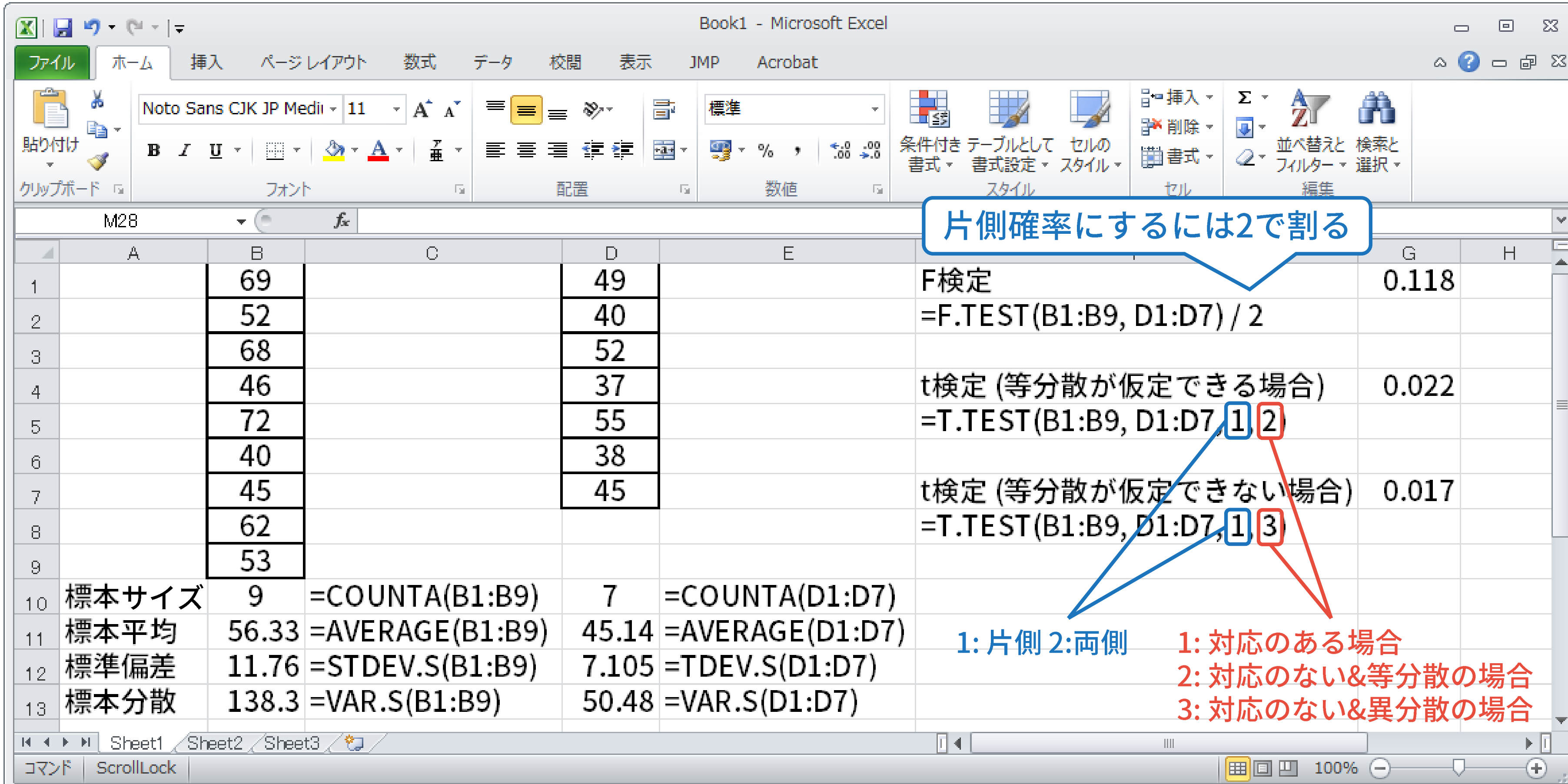
$$P(F \geq F^*; d_1, d_2) = P\left(F \leq \frac{1}{F^*}; d_2, d_1\right)$$

$F(n_1 - 1, n_2 - 1)$を用いた右側検定

||

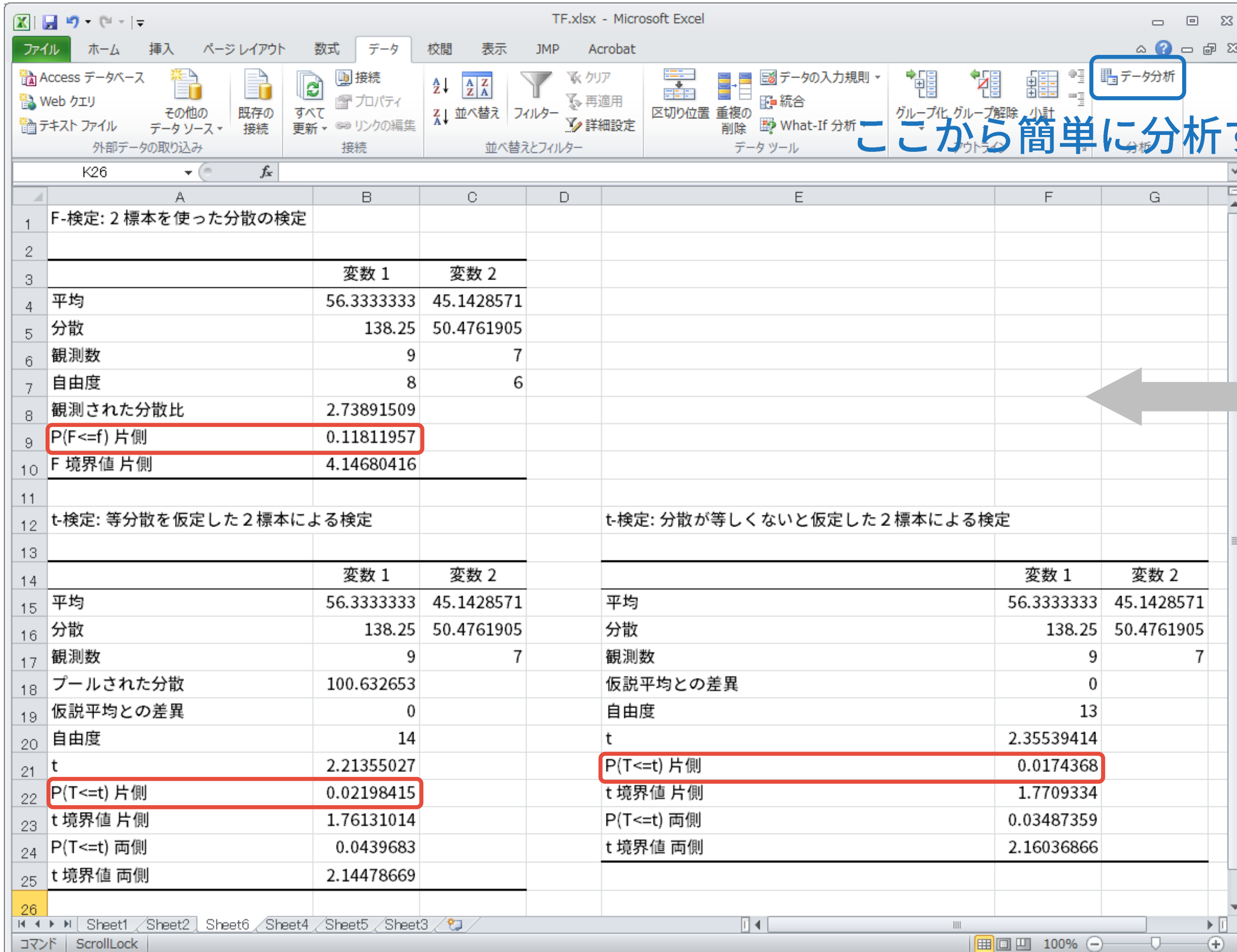
$F(n_2 - 1, n_1 - 1)$を用いた左側検定

t 検定・F 検定の実行例（Excel）



t 検定・F 検定の実行例（Excel）

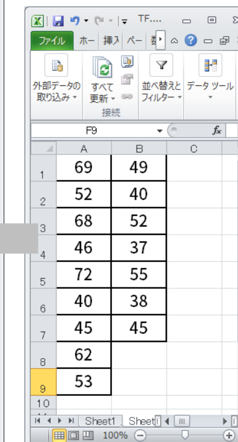
ここから簡単に分析することも可能



F-検定: 2 標本を使った分散の検定		
	変数 1	変数 2
平均	56.3333333	45.1428571
分散	138.25	50.4761905
観測数	9	7
自由度	8	6
観測された分散比	2.73891509	
P(F<=f) 片側	0.11811957	
F 境界値 片側	4.14680416	

t-検定: 等分散を仮定した２標本による検定		
	変数 1	変数 2
平均	56.3333333	45.1428571
分散	138.25	50.4761905
観測数	9	7
プールされた分散	100.632653	
仮説平均との差異	0	
自由度	14	
t	2.21355027	
P(T<=t) 片側	0.02198415	
t 境界値 片側	1.76131014	
P(T<=t) 両側	0.0439683	
t 境界値 両側	2.14478669	

t-検定: 分散が等しくないと仮定した２標本による検定		
	変数 1	変数 2
平均	56.3333333	45.1428571
分散	138.25	50.4761905
観測数	9	7
仮説平均との差異	0	
自由度	13	
t	2.35539414	
P(T<=t) 片側	0.0174368	
t 境界値 片側	1.7709334	
P(T<=t) 両側	0.03487359	
t 境界値 両側	2.16036866	



A	B
69	49
52	40
68	52
46	37
72	55
40	38
45	45
62	
53	

「データ分析」ボタンが無い場合

Microsoft

Office 製品 リソース テンプレート サポート

アプリ インストール アカウント トレーニング 管理者

Excel で分析ツールを読み込む

適用対象: *Excel for Office 365, Excel for Office 365 for Mac, Excel 2016, Excel 2013, その他...*

複雑な統計学的分析や工学的分析を行わなければならない場合も、分析ツールを使用すれば、すばやく簡単に結果を得ることができます。分析に必要なデータとパラメータを指定すると、各ツールが統計用または工学用の適切なマクロ関数を使ってデータを分析し、計算結果を出力テーブルに表示します。出力テーブルだけでなく、グラフを出力するツールもあります。

データ分析ツールは、一度に 1 つのワークシートでのみ使用できます。グループ化したワークシートでデータ分析を実行すると、分析結果は先頭のワークシートに表示され、残りのワークシートには空のテーブルが表示されます。残りのワークシートでもデータ分析を実行するには、グループを解除し、各ワークシートで分析ツールを実行します。

Windows MacOS

1. [**ファイル**] タブをクリックし、[**オプション**] をクリックして、[**アドイン**] カテゴリをクリックします。

   Excel 2007 を使用している場合は、[**Microsoft Office ボタン**] をクリックしてから、[**Excel のオプション**] をクリックします。

2. [**管理**] ボックスの一覧の [**Excel アドイン**] をクリックし、[**設定**] をクリックします。

   Excel for Mac を使用している場合は、[ファイル] メニューから [**ツール**]、[**Excel アドイン**] を順にクリックします。

3. [**アドイン**] ボックスで、[**分析ツール**] チェック ボックスをオンにし、[**OK**] をクリックします。

   - [**有効なアドイン**] ボックスの一覧に [**分析ツール**] が表示されない場合は、[**参照**] をクリックしてアドイン ファイルを見つけます。
   - 分析ツールが現在コンピューターにインストールされていないというメッセージが表示されたら、[**はい**] をクリックして分析ツールをインストールします。

https://support.office.com/ja-jp/article/excel-%E3%81%A7%E5%88%86%E6%9E%90%E3%83%84%E3%83%BC%E3%83%AB%E3%82%92%E8%AA%AD%E3%81%BF%E8%BE%BC%E3%82%80-6a63e598-cd6d-42e3-9317-6b40ba1a66b4

こっちの方が
分かり易い

http://blog.jmiri.net/?p=840

対応のない2群の標本に対する平均の差の検定

- 標本群の性質によって使い分けが必要
  1. 母集団の分布が正規分布と仮定できるか
     - 仮定できる → パラメトリック検定
     - 仮定できない → ノンパラメトリック検定
  2. 群間に対応があるか

パラメトリック検定		ノンパラメトリック検定	
対応なし	対応あり	対応なし	対応あり
t検定 (等分散) Welchのt検定 (異分散)	t検定	Mann–Whitneyの U検定	Wilcoxonの 符号順位検定

$\underbrace{\text{Mann–Whitneyの}U\text{検定}\quad\text{Wilcoxonの符号順位検定}}_{\text{この講義では触れないが重要}}$

＜参考までに＞ノンパラメトリックの時は？

- データをランク（順位）におきかえる方法
  - 外れ値の影響などを小さく出来る

検査値							平均
病気なし	0.1	0.2				5	1.766667
病気あり			1.2	1.5	2		1.566667

順位							平均
病気なし	1	2				6	3
病気あり			3	4	5		4

  - サンプルが30以上なら中心極限定理により、パラメトリックな検定でいいとされる
  - 検出力は弱くなり保守的とされるが、全て「ノンパラ」で行った方がいいという学派もある

JMP演習のヒント

[ヘルプ] → [チュートリアル] が参考になります

- 対応のある場合
  1. 二つの列のそれぞれに対応のある連続値が入ったデータを用意
  2. [分析] → [対応のあるペア] を選ぶ
  3. [Y, 対応のある応答] に数値の入った二つの列を設定して [OK] をクリック

たこ焼き検定ではこちらも名義尺度

- 対応のない場合
  1. 一列に条件 (名義尺度) 、もう一列には結果の数値 (連続尺度) が入ったデータを用意
  2. [分析] → [二変量の関係]
  3. [Y, 目的変数]に条件，[X, 説明変数]に連続値の入った列を設定して [OK]
  4. 下向き三角をクリックして以下のどれかを選択
     - [平均/ANOVA/プーリングしたt検定] (母分散等しいと仮定した t 検定)
     - [個々の分散を用いたt検定] (母分散が等しくない場合の t 検定)
     - [等分散性の検定]
     - (母集団が正規分布でないときは [ノンパラメトリック] → [Wilcoxson検定] など)

統計量の差に関する検定

- 2群の標本に対する検定
  - 対応のある2標本群の差の検定 (t 検定)
  - 対応のない2標本群の差の検定
    - 母集団の平均に差があるか (t 検定)
    - 母集団の分散に差があるか (F 検定)
- 3群以上の標本に対する検定
  - 分散分析：複数の母集団の平均に差があるかを検定 → 後日