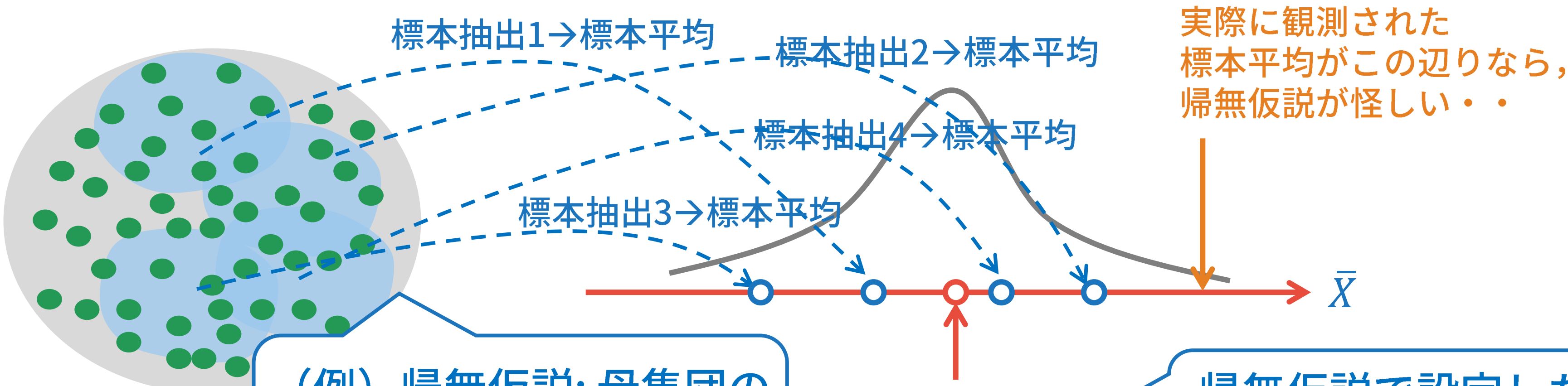
確率・統計
第6回 母平均のt検定

兵庫県立大学　社会情報科学部
川嶋宏彰
kawashima@sis.u-hyogo.ac.jp

(復習) 標本平均の分布と検定

- 標本平均の振る舞いを知りたい
  - 標本抽出は母集団の一部に対してのみ行う
  - 標本抽出のたびに標本平均は変わる
  - 標本抽出を仮に繰り返したならば「標本平均」はどのように分布する？
    - 「標本平均」の平均・分散・分布を考察

仮説検定であれば「ある帰無仮説の下での」標本平均の振る舞いを知りたい



（例）帰無仮説: 母集団の母平均μは μ_0 である

帰無仮説で設定した具体的な値

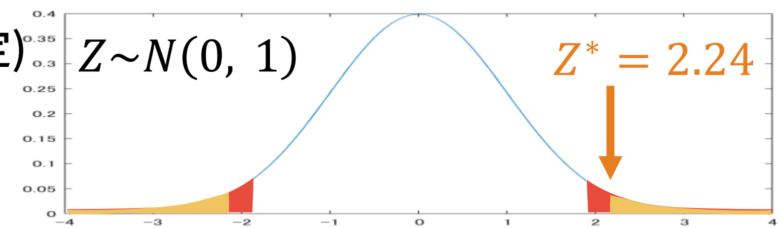
標本平均の分布: 母集団の分布と分散の仮定による

仮定	母分散 σ^2 既知	
母集団は正規分布	第4回 $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\sim N(0,\ 1)$ 標準正規分布 $\leftrightarrow \bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ n が小さくてもOK (正規分布の再生性より)	標準化した標本平均(Z)で考える（母平均や母分散が違っていても同じ分布$N(0,1)$で p 値や棄却域を検討できるため） 検定に使うときの統計量（Z など）を「検定統計量」と呼ぶ
母集団は一般の分布	第5回 $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\sim N(0,\ 1)$ n が大きい場合の近似 (中心極限定理より)	

標本平均の観測値が求まった後 (スライド4-28~30)

標本平均の観測値 $\bar{X} = 176$
標本サイズ $n = 5$
全国平均 $\mu_0 = 170$
母分散 $\sigma^2 = 36$ (全国の分散に一致すると仮定)

→ 標本平均の観測値を標準化した統計量Zの実際の観測値 $Z^* = \frac{176-170}{\sqrt{36/5}} = 2.24$



以下のどちらかならば帰無仮説を棄却
（結局は同じことを調べている）

A) $p < 0.05$ ($=$ 有意水準α)
B) 観測値Z^*が棄却域に入る

[Rcmdr] ○○分布の確率… Z^*の上側確率 (両側は2倍)

$Z^* = 2.24$ —A-1→ p値: $p = 0.0253$

比較 B-2　　　　A-2 比較

棄却域: $Z < -1.96, 1.96 < Z$ ←B-1— 有意水準 $\alpha = 0.05$

[Rcmdr] ○○分布の分位点… 両側なら上側確率に $\alpha/2$ を指定

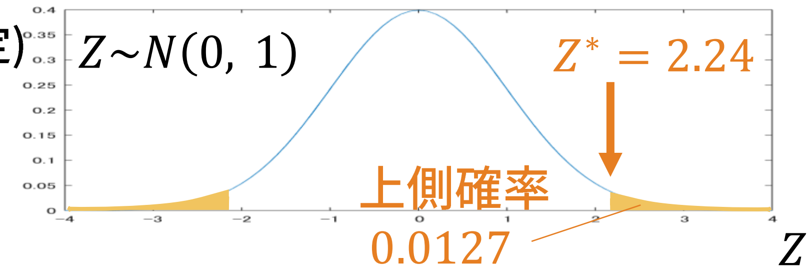
B) 統計量の値 (グラフの横軸) に着目 | A) 確率値 (グラフの面積)に着目

標本平均の観測値が求まった後 (p値利用)

$$\begin{cases} \text{標本平均の観測値 } \bar{X} = 176 \\ \text{標本サイズ } n = 5 \\ \text{全国平均 } \mu_0 = 170 \\ \text{母分散 } \sigma^2 = 36 \text{ (全国の分散に一致すると仮定)} \end{cases}$$

→ 標本平均の観測値を標準化した統計量Zの

実際の観測値 $Z^* = \frac{176-170}{\sqrt{36/5}} = 2.24$



以下のどちらかならば帰無仮説を棄却

A)　$p < 0.05$ (= 有意水準α)

B)　観測値Z^*が棄却域に入る

[Rcmdr] ○○分布の確率… Z^*の上側確率 (両側は2倍)

$Z^* = 2.24$ → A-1 → p値: $p = 2 \times 0.0127$

A-2 比較

有意水準 $\alpha = 0.05$

p値: 帰無仮説の下で，検定統計量(Z)が，
実際に観測された値，もしくはそれより
極端な値を取る確率（オレンジの面積）

(両側検定は両側確率)　$p = 2P(Z \geq |Z^*|)$

B) 統計量の値 (グラフの横軸) に着目

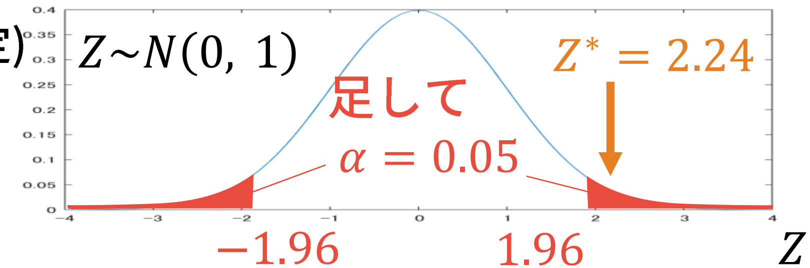
A) 確率値 (グラフの面積)に着目

標本平均の観測値が求まった後 (棄却域利用)

$$\begin{cases} \text{標本平均の観測値 } \bar{X} = 176 \\ \text{標本サイズ } n = 5 \\ \text{全国平均 } \mu_0 = 170 \\ \text{母分散 } \sigma^2 = 36 \text{ (全国の分散に一致すると仮定)} \end{cases}$$

→ 標本平均の観測値を標準化した統計量Zの

実際の観測値 $Z^* = \frac{176-170}{\sqrt{36/5}} = 2.24$



以下のどちらかならば帰無仮説を棄却

A) $p < 0.05$ (= 有意水準α)

B) 観測値Z^*が棄却域に入る

$Z^* = 2.24$

比較 B-2

棄却域: $Z < -1.96, 1.96 < Z$

B-1

有意水準 $\alpha = 0.05$

[Rcmdr] ○○分布の分位点… 両側なら上側確率に $\alpha/2$ を指定

B) 統計量の値 (グラフの横軸) に着目

A) 確率値 (グラフの面積)に着目

本日の講義内容

- テキスト
  - 「統計学入門」10章 (10.4〜), 12章 (12.1〜12.3)
- 区間推定
- t分布
  - 母分散未知の場合には… 母分散の代わりに不偏分散を用いる？

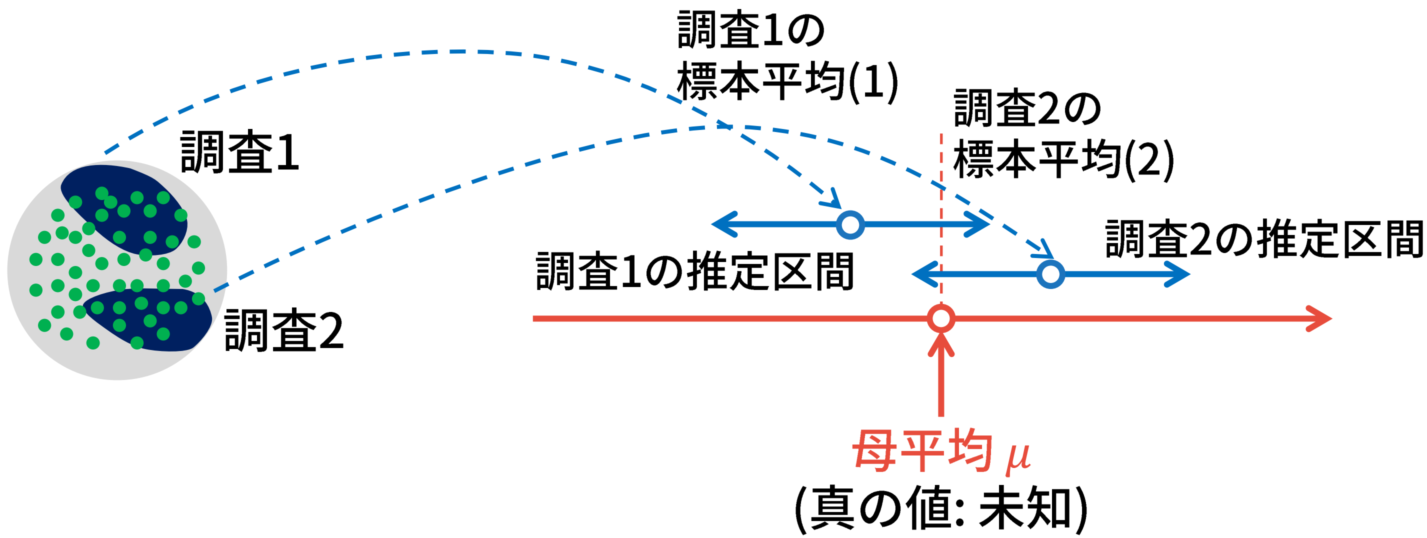
  → 標本平均の従う分布は？
- 母平均の検定（t検定）
  - 分散未知の正規母集団

(再掲) 標本平均の分布: 母集団の分布と分散の仮定による

仮定	母分散 σ^2 既知	
母集団は正規分布	第4回 $$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\sim N(0,\ 1)$$ 標準正規分布 $$\leftrightarrow \bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$ n が小さくてもOK (正規分布の再生性より)	標本平均の分布があれば 母平均の区間推定もできる
母集団は一般の分布	第5回 $$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\sim N(0,\ 1)$$ n が大きい場合の近似 (中心極限定理より)	

母平均の区間推定

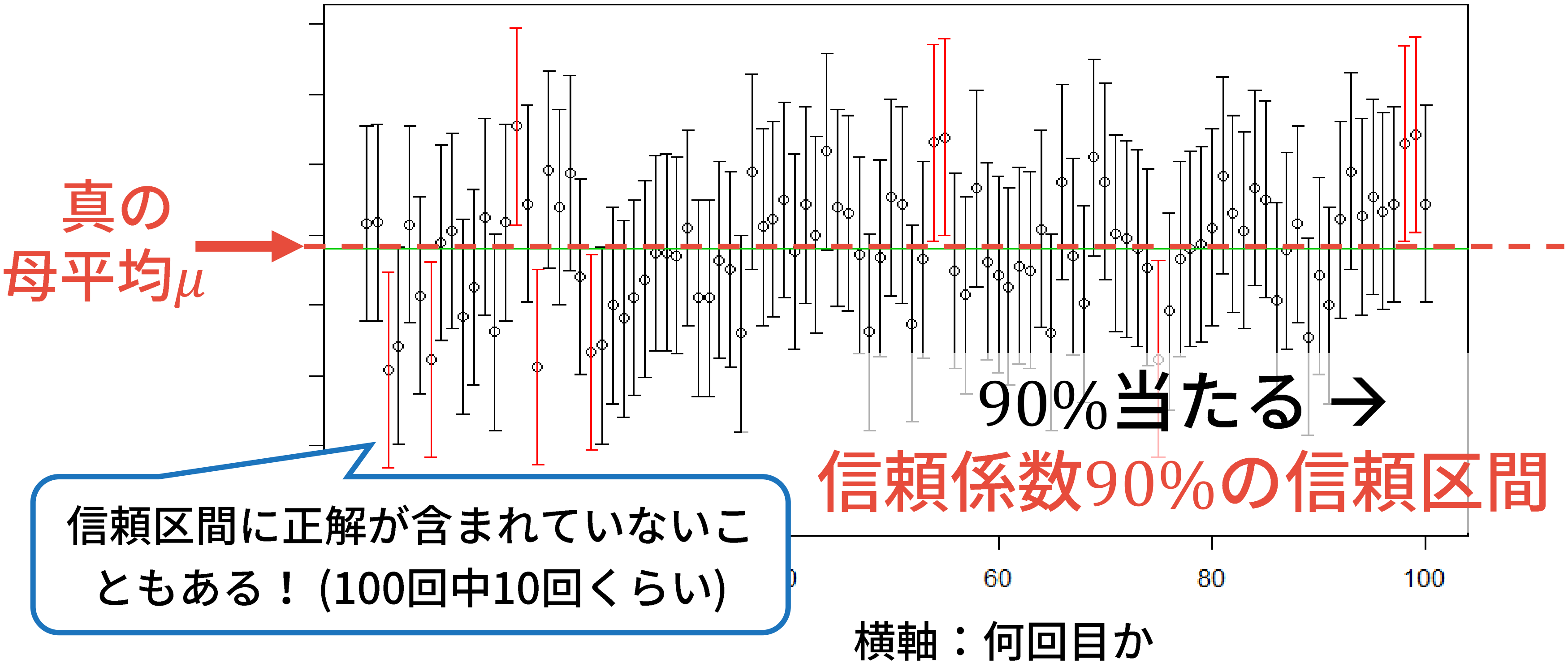
- 「1回の調査で」未知の母平均を「○○～○○」と推定したい
  - ある調査（無作為抽出）で標本とその標本平均 $\bar{X}$ が求まったとする
  - 標本平均は，母集団の本来の平均 (母平均 μ) からずれる



区間内に真値が入るように推定したい

区間推定の考え方: 信頼係数とは

- 100回標本を抽出し、1回ずつ信頼区間を求めてみた
  - 100通りの信頼区間が推定できる（下の図）



信頼区間と信頼係数

- どのくらいの範囲で推定するか？
  - 推定区間は狭いほどよい (あまり広い推定では価値がない)
- どのくらいの精度が必要か？「信頼係数」
  - 真の値が推定区間内に含まれる可能性を高く（ハズレにくく）したい

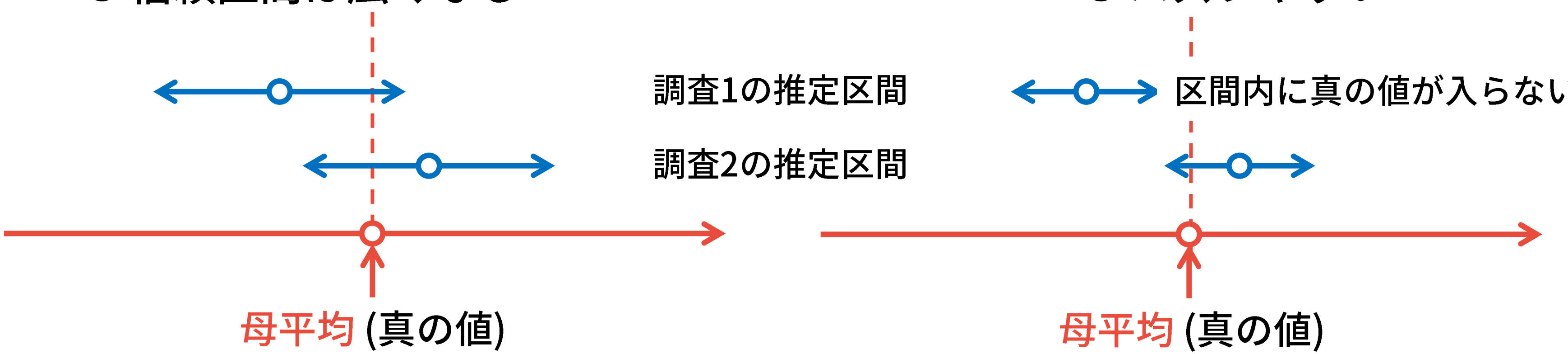
信頼係数高い

☺ ハズレにくい
☹ 信頼区間は広くなる

トレードオフ

信頼係数低い

☺ 信頼区間が狭い
☹ ハズレやすい

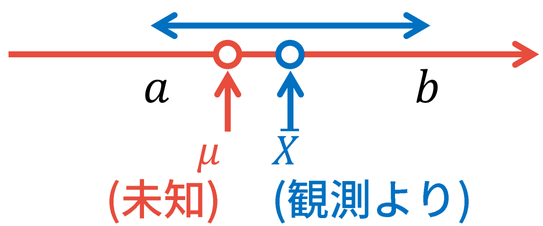


母平均の区間推定

- 区間推定の手順
  1. 先に必要な信頼係数を決める (例: 90%) (95, 99%もよく用いられる)
  2. 1で定めた信頼係数を達成可能な(できるだけ狭い)区間を計算する
- 区間の計算
  - 標本平均 $\bar{X}$ (ある1回の調査(標本)から具体的な値が観測される)
  - 母平均 μ (推定したい真の値 … 未知)
  - 真値 μ が含まれると90%の確率で言えるような区間$[a, b]$が知りたい

$$P(a \leq \mu \leq b) = 0.90$$

a, bを，$\bar{X}$を用いて表したい

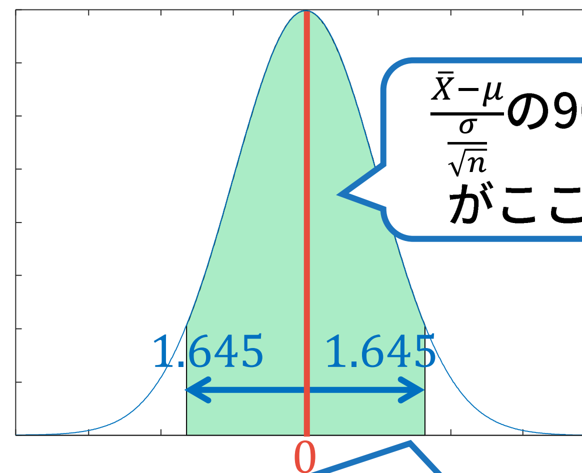


信頼係数90%の信頼区間

- 標本平均 $\bar{X}$ は正規分布に従う： $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ $\leftrightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

$$P\left(-1.645 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 1.645\right) = 0.90$$

標準正規分布表 or コンピュータより



$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$の90%がここ！

1.645は標準正規分布 $N(0,1)$の上側5%点

$$P\left(\mu - 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X} \le \mu + 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.90$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X} - 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.90$$

母平均μの信頼係数90%の信頼区間は $\left[\bar{X} - 1.645\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.645\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

信頼係数95%の信頼区間

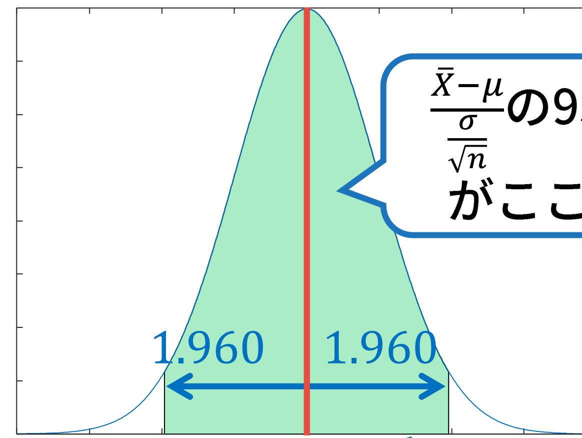
- 標本平均 $\bar{X}$ は正規分布に従う： $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1) \quad \leftrightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

$$P\left(-1.960 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 1.960\right) = 0.95$$

標準正規分布表 or コンピュータより

$$P\left(\mu - 1.960\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X} \le \mu + 1.960\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X} - 1.960\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + 1.960\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$



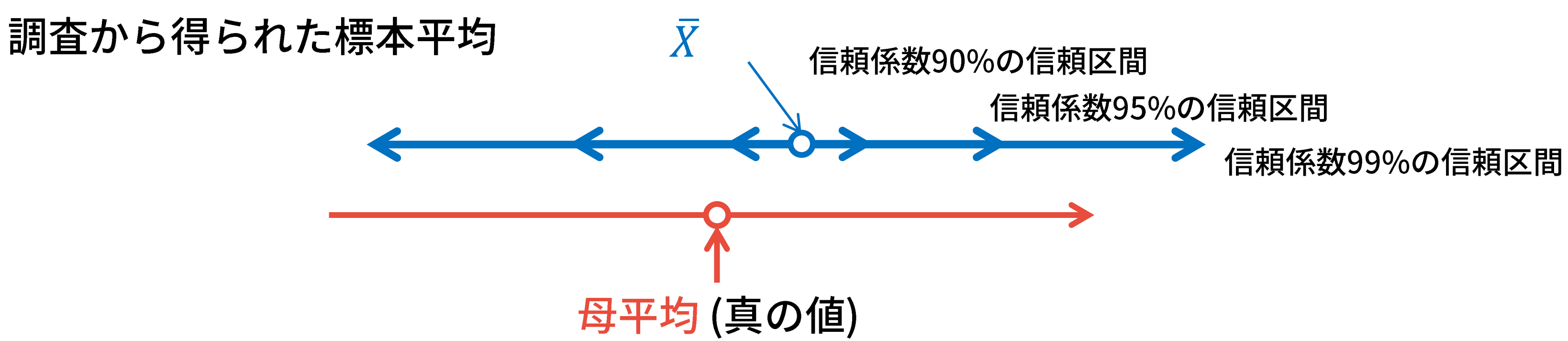
母平均μの信頼係数95%の信頼区間は $\left[\bar{X} - 1.960\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.960\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

信頼係数と信頼区間

- 信頼係数を高く設定すると信頼区間は広くなる
  - 信頼係数90% (危険率10%) の信頼区間：$\left[\bar{X} - 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
  - 信頼係数95% (危険率5%) の信頼区間：$\left[\bar{X} - 1.960\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.960\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
  - 信頼係数99% (危険率1%) の信頼区間：$\left[\bar{X} - 2.576\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2.576\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

高い信頼係数を求められると区間を広げて安全サイドに振る

(あいまいになる)



本日の講義内容

- テキスト
  - 「統計学入門」10章 (10.4〜), 12章 (12.1〜12.3)
- 区間推定
- t分布
  - 母分散未知の場合には… 母分散の代わりに不偏分散を用いる？

  → 標本平均の従う分布は？
- 母平均の検定（t検定）
  - 分散未知の正規母集団

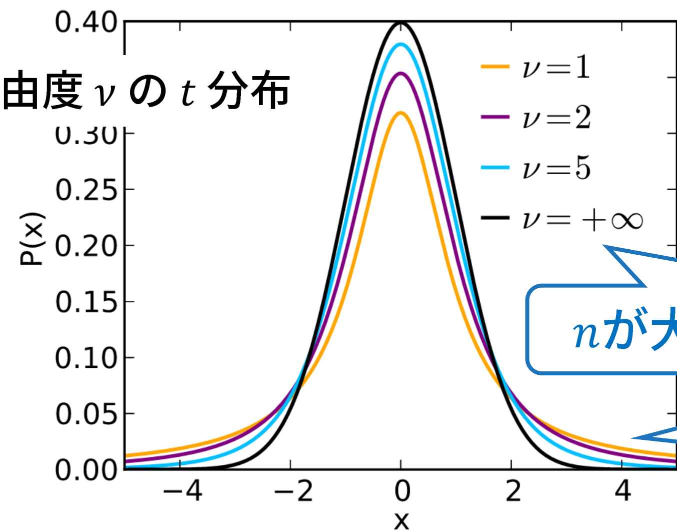
標本平均の分布: 母集団の分布と分散の仮定による

仮定	母分散 σ^2 既知	母分散 σ^2 未知
母集団は正規分布	第4回 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,\ 1)$ 標準正規分布 $\leftrightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ (正規分布の再生性より)	第6回（今回） $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}} \sim t(n-1)$ 自由度$n-1$の t分布 n が小さくても大きくてもOK n が大ならば $t(n-1) \xrightarrow{\nu \to \infty} N(0, 1)$
母集団は一般の分布	第5回 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,\ 1)$ (中心極限定理より)	第5回 $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}} \approx \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,\ 1)$ n が大きい場合の近似 nが大ならば $s^2 \approx \sigma^2$ (不偏分散の一致性 + 中心極限定理より)

母分散未知での母平均の推定・検定

- 観測$X_1, \dots, X_n$が得られたとき $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Leftrightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$
  - n が小さいと不偏分散s^2 は σ^2 からずれる
  - つまりs^2 を σ^2 の代用として使うと、 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim N(0,1)$ とはいえない
  - 実際には標準正規分布ではなく自由度 $n-1$ のt 分布に従う！

自由度 ν の t 分布



t統計量と呼ばれる

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim t(n-1)$$

自由度 $\nu = n-1$
（ν：ニュー）

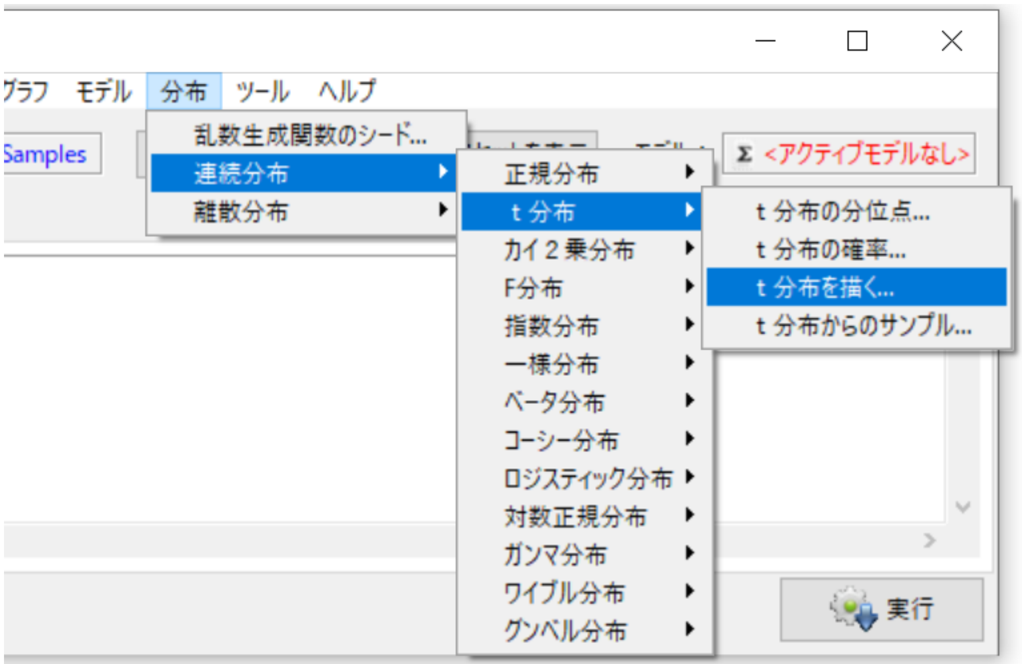
大文字はN

nが大きいならほぼ正規分布

正規分布よりも裾野が広い

[Rcmdr] t分布を表示してみよう

- 分布 > 連続分布 > t分布 > t分布を描く



自由度$\nu = (n-1)$をいろいろ変えて試してみよう

[Rcmdr]プロット範囲を変える方法（参考）

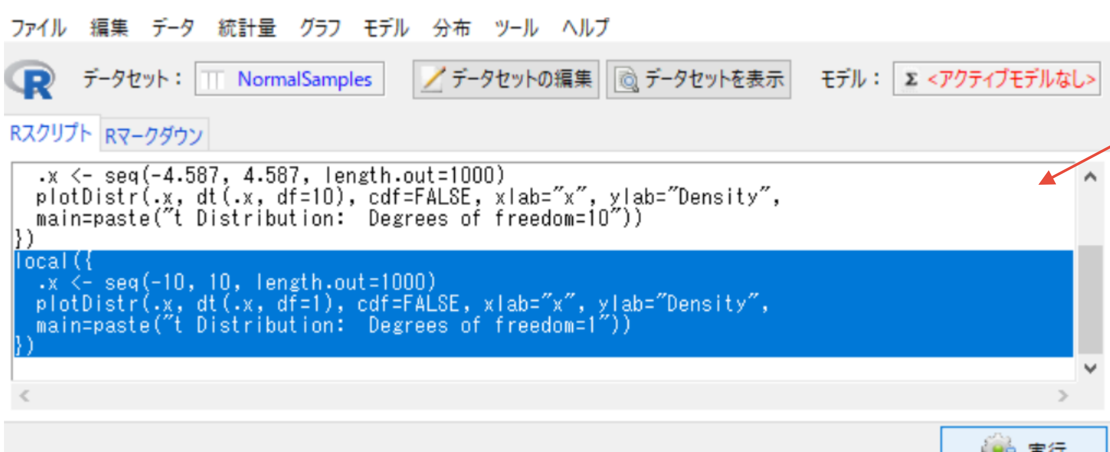
自由度 (degree of freedom) を1とすると横軸が広くなりすぎる

1. 分布 > 連続分布 > t分布 > t分布を描く → 自由度(df) 1でプロット
2. Rスクリプトの以下の部分を変更し，赤字の部分を変えて実行する

-10, 10 に変更

```
local({
 .x <- seq(-636.619, 636.619, length.out=1000)
 plotDistr(.x, dt(.x, df=1), cdf=FALSE, xlab="x", ylab="Density",
 main=paste("t Distribution:  Degrees of freedom=1"))
})
```

ちなみに青字(df=1)の
数字を変えると
自由度が変わる



local から始まる5行を
選択し「実行」を押す

ステューデントの t 分布

- 統計学上極めて重要な発見 (小標本の問題)
  - ギネスビール社ダブリン醸造所 (アイルランド) の社員であったゴセットによる貢献
    - 同社では当時社員の論文発表を禁止していたため，Student というペンネームで論文を発表 (1908)
  - フィッシャーが研究の重要性を見出し，統計量に t という記号をあてたため，この統計量の従う分布はステューデントの t 分布と呼ばれる
    - 当時は大標本を測定することに重きが置かれていたが醸造技術者らの現場では小さな標本サイズ(小標本)を利用せざるを得ない場合も多かった
  - それ以前は正規分布を用いていたため，有意差が出やすくなっていたことになる

https://en.wikipedia.org/wiki/William_Sealy_Gosset

目次：平均の差の検定

- 1群の標本に対する検定
  - 母集団の平均が特定の値と差があるか → t 検定

（例）ある町の平均身長は全国平均と差があるか？

- 2群の標本に対する検定
  - 標本群に<u>対応がある</u>場合
    - 母集団の平均に差があるか → t 検定
  - 標本群に<u>対応がない</u>場合
    - 母集団の平均に差があるか
→ t 検定 (分散が同じ場合) or ウェルチのt検定 (分散が異なる場合)
    - 母集団の分散が異なるか → F 検定（次回）

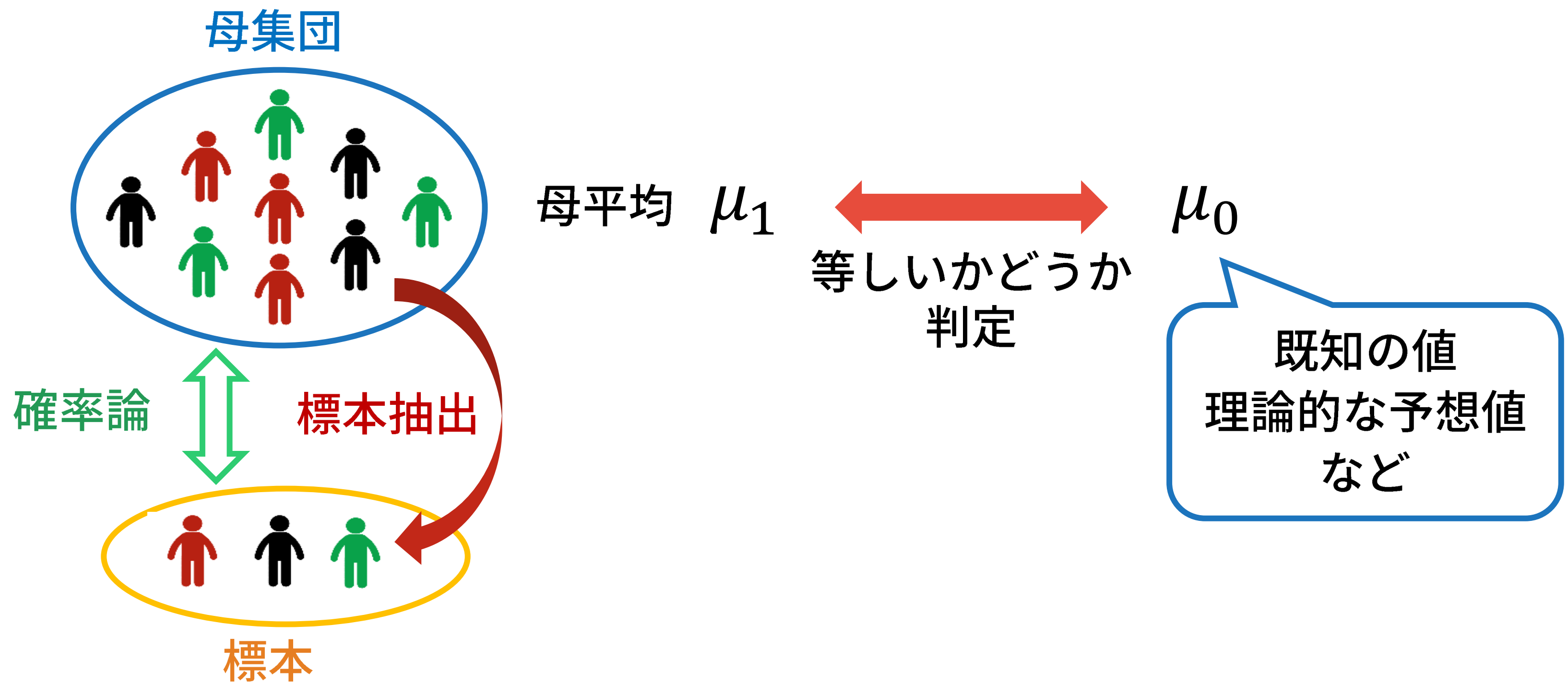
同じ集団の変化を見るときなど：
（例）生活指導の介入前後の血糖値の変化

2標本群を連続変数で比較するとき：
（例）投薬の有無と血圧の関係

今回は母集団が正規分布（正規母集団）であることを仮定

1群の標本に対する検定

- 観測可能なもの (標本 or 標本平均) から母集団の平均 μ が特定の値 μ_0 と等しいかどうか



1群の標本に対する t 検定の例

- 母集団の平均μがある値μ_0と差があるか検定したい
  - 例：牛乳をたくさん飲むと身長が伸びるか？
    - 被験者5人の1年間の身長の伸びは以下の通り
      - $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} = \{1cm, 2cm, 3cm, 3cm, 4cm\}$
      - 標本平均：$\bar{X} = 2.6cm$　不偏分散：$s^2 = 1.3cm^2$
      - 母平均：μ (未知 / 検定の対象)
    - 全国の中学生の平均身長の伸びは既知：$\mu_0 = 2cm$
  - 仮説検定
    - 帰無仮説：牛乳を大量に飲んでも背は伸びない $(\mu = \mu_0)$
    - 対立仮説：牛乳を大量に飲んだら背が伸びる $(\mu > \mu_0)$

1群の標本に対する平均の検定（母分散未知）

- 仮説を設定
  - 帰無仮説：母平均 μ はある値 μ_0 と等しい $(\mu = \mu_0)$
  - 対立仮説：母平均 μ はある値 μ_0 より大きい $(\mu > \mu_0)$ (片側検定)

(今回片側でやってみるが両側検定でもよい)

- t 統計量を計算
  - 標本サイズ n の標本の母平均 μ がある値 μ_0 と等しいとき（帰無仮説）以下のように標準化した標本平均tは，自由度 $n-1$ の t 分布に従う

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim t\,(n-1)$$

実際に標本から計算 (観測) した t の値 (実現値) を t^* とする

- p 値を計算
  - 帰無仮説の下で，標本から得られた (tの実現値) t^*の上側確率を求める

$$p = P(t \geq t^*; n-1\ )$$

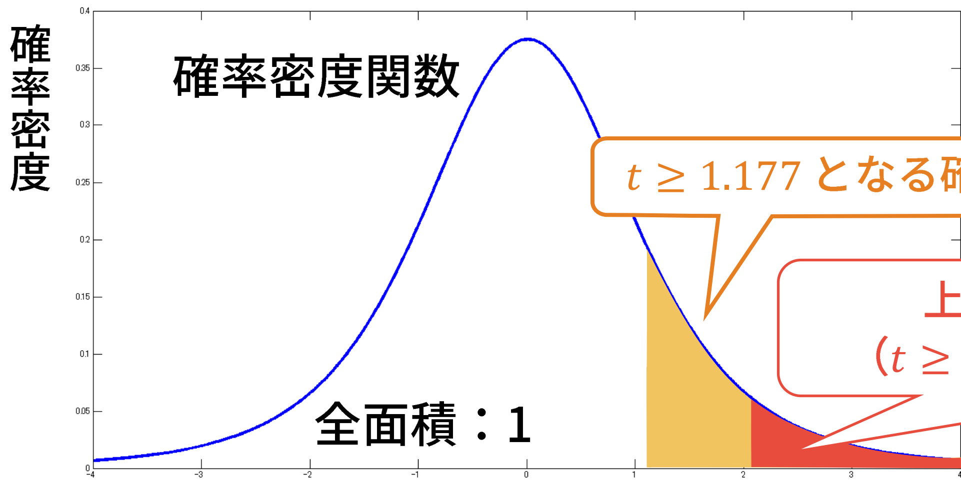
両側検定なら $2P\ (t \geq |t^*|)$

t 検定の実行例

- 自由度4の t 分布を用いて有意水準5%で検定

標本平均 $\bar{X} = 2.6$, 不偏分散 $s^2 = 1.3$の標本における

検定統計量 $t = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ の実現値は $t^* = \dfrac{2.6-2}{\sqrt{\frac{1.3}{5}}} = 1.177$



p値利用

$t \geq 1.177$ となる確率は $p = 0.152$

上側5%パーセント点は2.131

（$t \geq 2.131$ となる確率は $\alpha = 0.05$）

棄却域利用

1.177 2.131

p値利用「t検定の結果、有意差は認められなかった $(p = 0.152 > 0.05)$」

[Rcmdr] t分布のパーセント点と上側確率

自由度4のt分布を考える．

p値を利用する場合は１，棄却域を使う場合は2を行う．

1. $t^* = 1.177$ の上側確率（片側検定のp 値）を求めよう
   - 分布 > 連続分布 > t分布 > t分布の確率
2. 有意水準5%で両側検定や片側検定を行う際の棄却域をそれぞれ求めよう
   - 上側5パーセント点や両側5パーセント点（上側2.5パーセント点）が分かればよい
   - 分布 > 連続分布 > t分布 > t分布の分位点

（宿題）練習問題

あるクラスの平均体重が60kgと異なるか否か，有意水準5%で検定したい．（今回はクラス全体が母集団で，その平均が母平均）

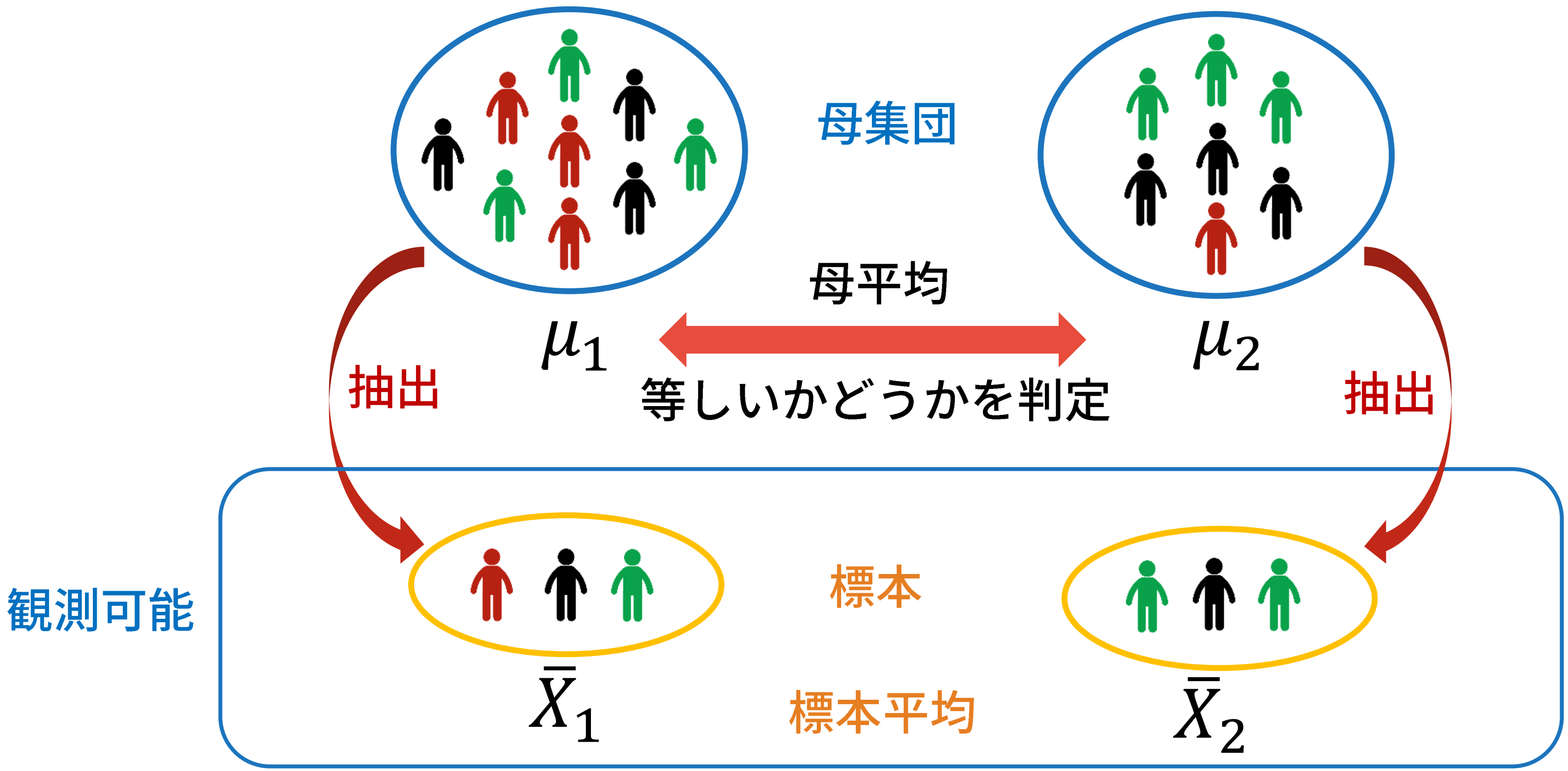
5人を無作為抽出して聞き出したところ以下の通りであった．

60　70　80　60　80　(kg)

1. 標本平均$\bar{X}$と不偏分散s^2の値を求めよ．
2. 自由度νのt分布でt検定を行いたい．νはいくらか？
3. 両側検定と片側検定はどちらを用いるのが妥当か？
4. 帰無仮説と対立仮説を述べよ．
5. この標本における統計量tの値，およびp値を求めよ．
6. 帰無仮説が棄却できるか否かを述べよ．(p値利用，棄却域利用の両方法を試すこと)
7. 検定の結論を述べよ．

2群の標本に対する検定

- 二つの母集団からそれぞれ抽出された標本から母数が等しいかどうかを検定



対応のある2群の標本

- 母集団の平均 μ_1, μ_2 に差があるかどうかを検定したい
  - 例：ジョギングで体重が変化するか？　単位は kg

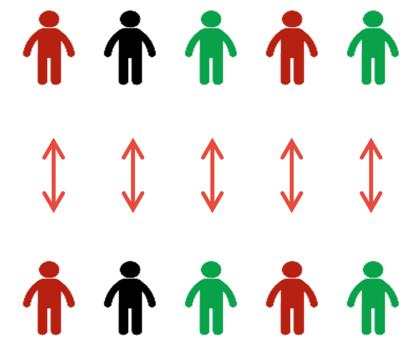
    (群1: before) 5名の被験者の体重 (母平均 μ_1 は未知)

    $\{X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}\} = \{81, 78, 65, 95, 90\}$

    ↕ 各データに対応がある（同じ被験者）

    (群2: after) ジョギング1年後 (母平均 μ_2 は未知)

    $\{X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}, X_{25}\} = \{80, 79, 68, 95, 85\}$



  - それぞれの差を $X_i = X_{2i} - X_{1i}$ とすると

    $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} = \{-1, +1, +3, 0, -5\}$

  - $\sum_i X_i = \sum_i X_{2i} - \sum_i X_{1i}$ より両辺5で割って $\bar{X} = \bar{X}_2 - \bar{X}_1$

2群に対応があれば1群の標本に対する t 検定が適用可能

対応のある2群の標本に対する平均の差の検定

- 仮説を設定
  - 帰無仮説：母平均は等しい $(\mu_1 = \mu_2)$
  - 対立仮説：母平均は異なる $(\mu_1 \neq \mu_2)$（両側検定の場合）
- t 統計量を計算
  - 対応のある 2群の各母平均 μ_1, μ_2 が等しいとき（帰無仮説）
    標準化した標本平均の差（以下）は自由度 $n-1$ の t 分布に従う

$$t = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim t(n-1)$$

$\bar{X}_2 - \bar{X}_1 = \bar{X}$ とおけばスライド24で
$\mu_0 = 0$ とした場合に一致

s^2は対応する各値の差の標本分散

- p 値を計算
  - 帰無仮説の下で，標本から得られた t^* の両側確率を求める

$$p = 2\,P(t \geq |t^*|; n-1)$$

対応のない2群の標本に対する検定

- 母集団の平均に差があるかどうかを検定したい
  - 例：AクラスとBクラスの成績に差があるか？

Aクラス	Bクラス
69	49
52	40
68	52
46	37
72	55
40	38
45	45
62	
53	

2群は別メンバ（対応なし）

	Aクラス	Bクラス
標本サイズ n	$n_1 = 9$	$n_2 = 7$
標本平均 $\bar{X}$	$\bar{X}_1 = 56.33$	$\bar{X}_2 = 45.14$
標準偏差 s	$s_1 = 11.76$	$s_2 = 7.105$
不偏分散 s^2	$s_1^2 = 138.3$	$s_2^2 = 50.48$
母平均	？	？
母分散	？	？

差があるか？

対応のない2群の標本に対する検定

- 母集団の平均の検定方法は：
  1. 母分散が同じ場合→ t 検定
  2. 母分散が異なる場合→ ウェルチの t 検定

- そもそも母集団の分散は異なるか → F 検定（次回）
  - これで母分散が異なると言い切れない場合には慣例的に1を使う
  - 最近はいきなり2の「ウェルチのt 検定」を使うことが多い

対応のない2群の標本に対する平均の差の検定

等分散性が仮定できる場合

- 仮説を設定
  - 帰無仮説：母平均は等しい $(\mu_1 = \mu_2)$
  - 対立仮説：母平均は異なる $(\mu_1 \neq \mu_2)$　(片側検定なら $\mu_1 > \mu_2$ や $\mu_1 < \mu_2$)
- t 統計量を計算

最後の補足スライドも参考に

  - 標本サイズ n_1, n_2 の2標本における各母平均 μ_1, μ_2 が等しいとき（帰無仮説）以下の統計量tは自由度 $n_1 + n_2 - 2$ の t 分布に従う

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

2標本を合併 (pooling)

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

- p 値を計算
  - 帰無仮説の下で，標本から得られた t^* の両側確率を求める

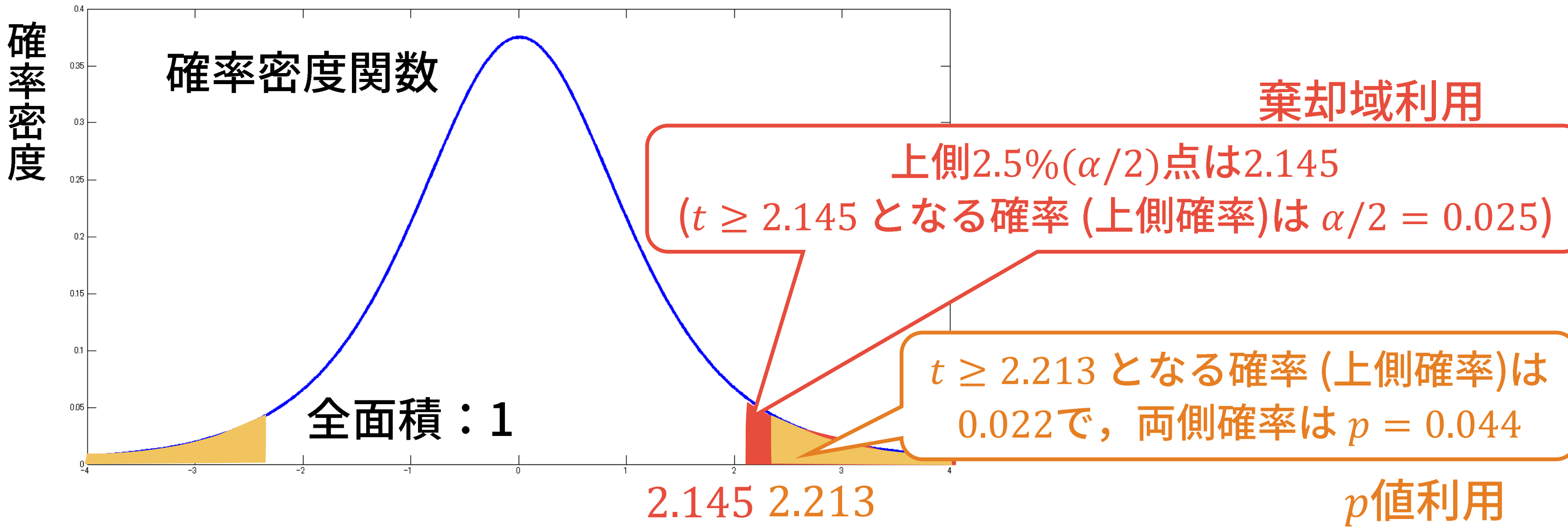
$$p = 2\,P(t \geq |t^*|; n_1 + n_2 - 2\,)$$

($|t^*|$ の上側確率の2倍)

t 検定の実行例

- 自由度14$(= 9 + 7 - 2)$の t 分布を用いて有意水準5%で両側検定

$$s^2 = \frac{(9-1)*138.3 + (7-1)*50.48}{9+7-2} = 100.7 \qquad t^* = \frac{56.3 - 45.1}{\sqrt{100.7 * \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{7}\right)}} = 2.213$$



p値利用「t 検定の結果，有意差が認められた ($p = 0.044 < 0.05$)」

対応のない2群の標本に対する平均の差の検定

等分散性が仮定できない場合
ウェルチ (Welch)の t 検定

- 仮説を設定
  - 帰無仮説：母平均は等しい ($\mu_1 = \mu_2$)
  - 対立仮説：母平均は異なる ($\mu_1 \neq \mu_2$)　(片側検定なら $\mu_1 > \mu_2$ や $\mu_1 < \mu_2$)
- t 統計量を計算
  - 標本サイズ n_1, n_2 の2標本における各母平均 μ_1, μ_2 が等しいとき（帰無仮説）以下の統計量 t は自由度 ν の t 分布に従う

こっちの式は覚えなくていい

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} \sim t(\nu)$$

自由度 ν の計算:

$$\nu = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{s_1^4}{n_1^2(n_1 - 1)} + \dfrac{s_2^4}{n_2^2(n_2 - 1)}}$$

- p 値を計算
  - 帰無仮説の下で，標本から得られた t^* の両側確率を求める

$$p = 2\,P(t \geq |t^*|; \nu\,)$$

(|t^*| の上側確率の2倍)

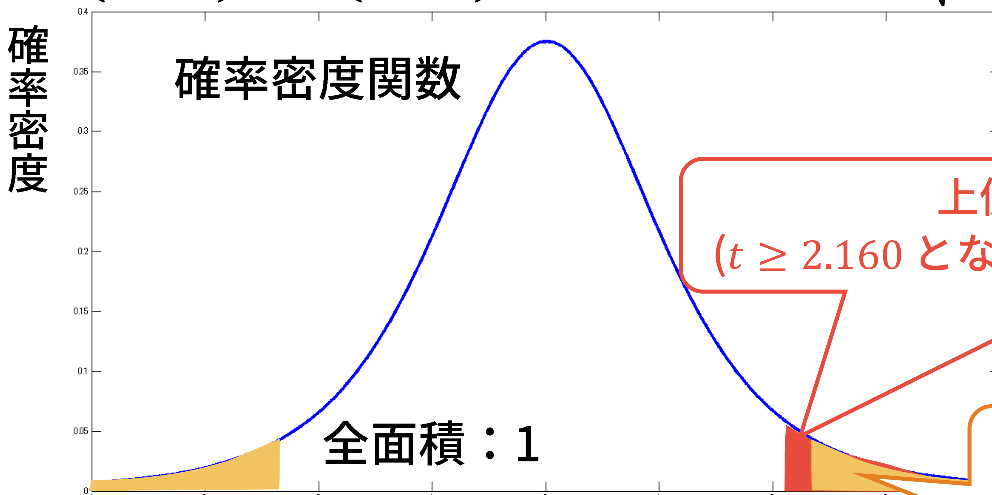
ウェルチの t 検定の実行例

- 自由度13.35の t 分布を用いて有意水準5%で両側検定

$$\nu = \frac{\left(\frac{138.3}{9} + \frac{50.48}{7}\right)^2}{\frac{138.3^2}{9^2\,(9-1)} + \frac{50.48^2}{7^2(7-1)}} = 13.35$$

$$t^* = \frac{56.3 - 45.1}{\sqrt{\frac{138.3}{9} + \frac{50.48}{7}}} = 2.357$$

以下は自由度13に丸めた場合の結果
(直接13.35で計算することも可)



上側2.5%($\alpha/2$)点は2.160
($t \geq 2.160$ となる確率 (上側確率)は $\alpha/2 = 0.025$)

棄却域利用

2.160 2.357

$t \geq 2.357$ となる確率 (上側確率)は
0.017で，両側確率は $p = 0.035$

p値利用

p値利用「t 検定の結果，有意差が認められた ($p = 0.035 < 0.05$)」

連絡

- 中間テスト
  - 持ち込みは不可，30-40分程度の予定
  - 終了後はテストの解説と講義
- 対策
  - 昨年の中間テストを公開します
    - 形式や分量は変更されるかもしれませんが，難易度は同程度です
    - 用語は・・・ある程度出ます
  - 重要ポイントをウェブに順次整理しています
  - スライド中の宿題やレポートも練習になります

対応のない2群の標本に対する検定

- 母集団の平均の検定方法は：
  - 母分散が同じ場合→ t 検定
  - 母分散が異なる場合→ ウェルチの t 検定

3群以上の標本に対する分散分析でも使う

- そもそも母集団の分散は異なるか → F 検定
  - これで母分散が異なると言い切れない場合には慣例的に1を使う

これ以降のスライドは次回の予習用（分からなくてもよいので）次回までに見ておくこと

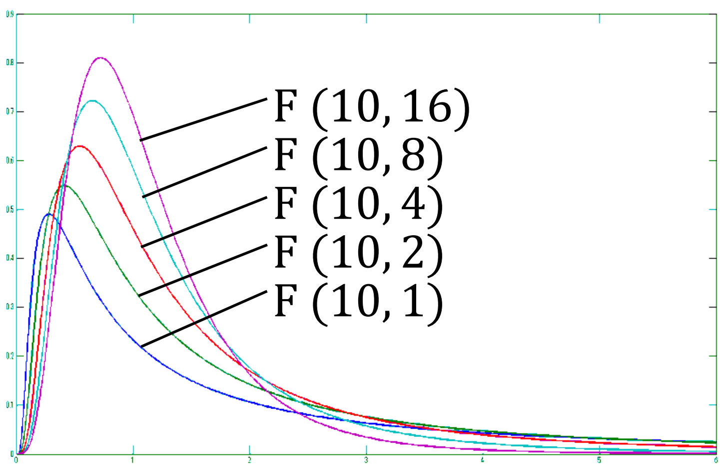
不偏分散の比の分布

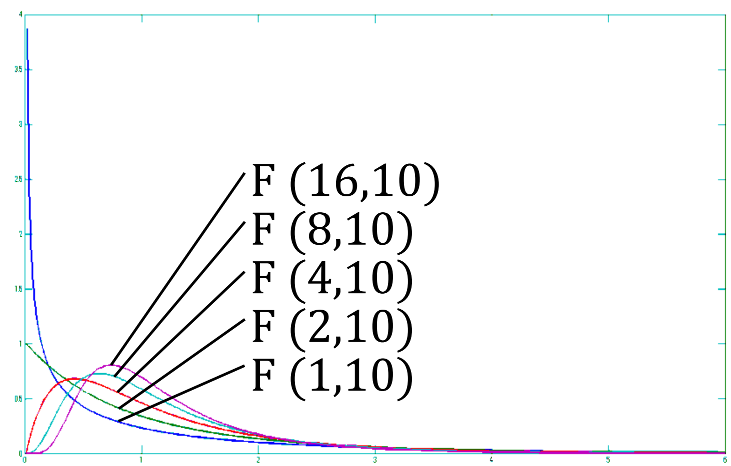
- 同じ母分散を持つ2つの正規分布にそれぞれ従う2群の標本を考える．それぞれの不偏分散の比の分布は？
  - 自由度 (n_1-1, n_2-1) の F 分布に従う

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2}{\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2}$$

分子＞分母とするのが通例

自由度が増えるほど
分布は急峻になる





2群の標本に対する分散の差の検定

- 仮説を設定
  - 帰無仮説：母分散は等しい $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$
  - 対立仮説：片方の母分散の方が大きい $(\sigma_1^2 > \sigma_2^2)$ (片側検定の場合)
- F 統計量を計算
  - 標本サイズ n_1, n_2 の2群の標本の母分散 σ_1^2, σ_2^2 が等しければ各不偏分散 s_1^2 と s_2^2 の比は自由度 $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ の F 分布に従う

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F\left(n_1 - 1, n_2 - 1\right)$$

- p 値を計算
  - 帰無仮説の下で，標本から得られた F^* の上側確率を求める

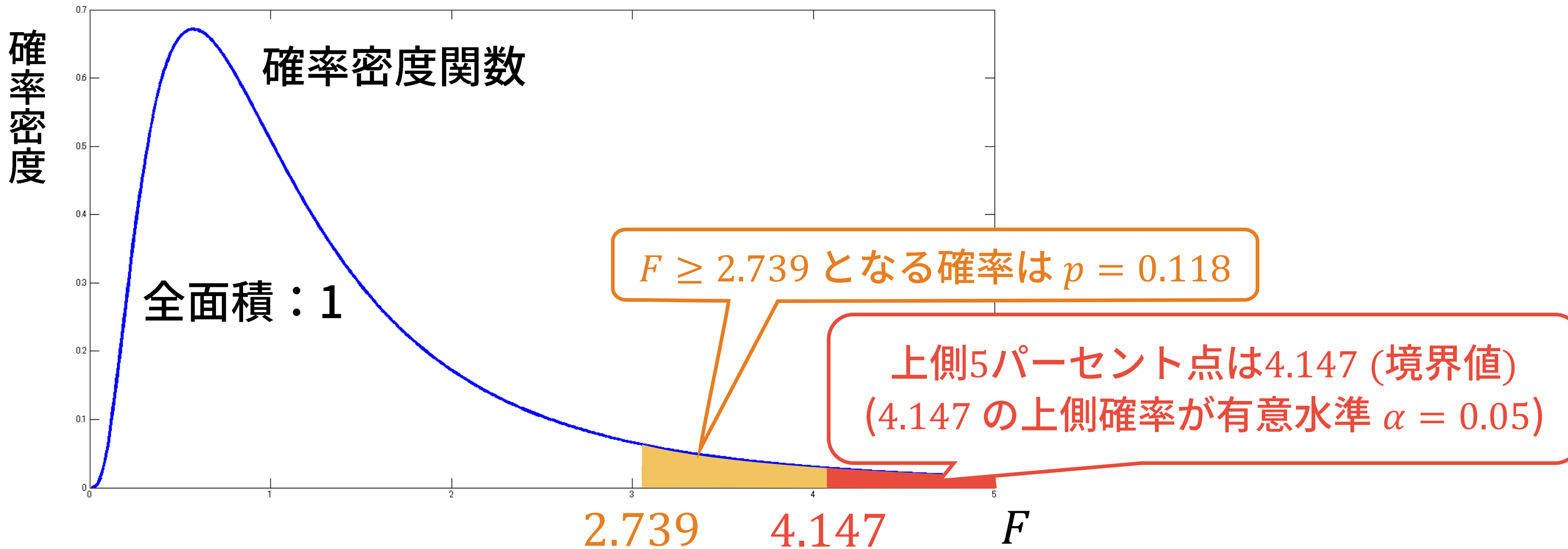
$$P(F \geq F^*; n_1 - 1, n_2 - 1)$$

F 検定の実行例

- 自由度 (8,6) の F 分布を用いて有意水準5%で検定

不偏分散 $s_1^2 = 138.25, s_2^2 = 50.48$ を持つ2標本における

検定統計量 $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ の実現値は $F^* = \frac{138.25}{50.48} = 2.739$



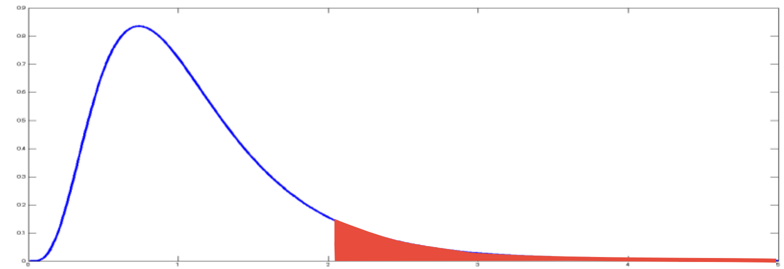
「F検定の結果、有意差は認められなかった $(p = 0.118 > 0.05)$」

F 検定：両側検定と片側検定

- 仮説によって棄却域の設定が異なる
  - 帰無仮説：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (共通)

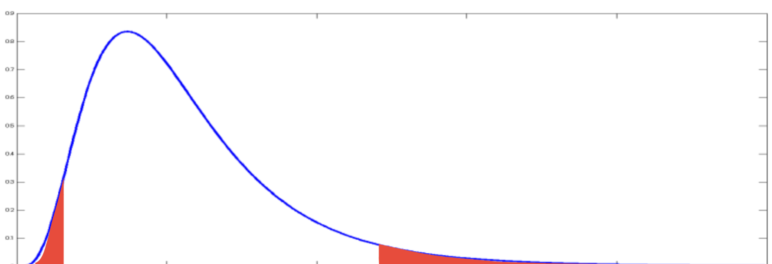
両側検定の場合は
左右の確率を足したものが有意水準 α
↓
片側検定表を用いて両側検定を行う場合は
有意水準の半分 $\frac{\alpha}{2}$ の上側パーセント点

対立仮説：$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ → 片側検定



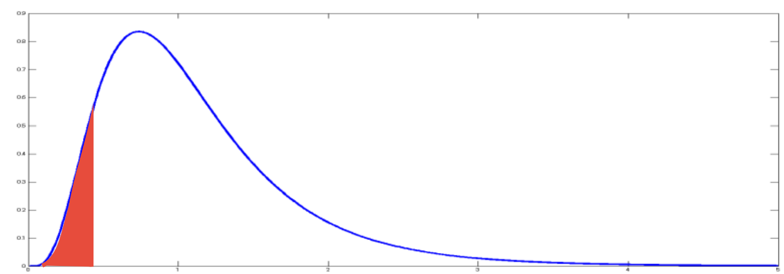
$F_{0.05}$：上側5パーセント点

対立仮説：$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ → 両側検定



$\frac{1}{F_{0.025}}$　$F_{0.025}$：上側2.5パーセント点

対立仮説：$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ → 片側検定



$\frac{1}{F_{0.05}}$

練習問題

標本サイズ 9, 7 の2群の標本について，母分散 が等しいかどうかの片側検定を行いたい．

1. 各不偏分散 s_1^2 と s_2^2 の比は自由度 (x, y) の F 分布に従う．
   x, y に当てはまる数は？
2. [Rcmdr] 1のF分布をプロットしてみること．
3. [Rcmdr or 分布表] 1のF分布を用いて有意水準5%で検定する際の棄却域を求めよ．
4. それぞれの標本の不偏分散が $s_1^2 = 230.53$ と $s_2^2 = 50.48$ であるとき， 1の分布におけるF統計量の値，および p 値を求めよ．
5. 帰無仮説が棄却できるか否か，および検定の結論を述べよ．

（補足）2群の標本平均の差が従う分布

いったん母分散既知で考えてみる．

- 標本平均$\bar{X}_1, \bar{X}_2$の平均　$E[\bar{X}_1] = \mu_1$，$E[\bar{X}_2] = \mu_2$
- 標本平均$\bar{X}_1, \bar{X}_2$の分散　$V[\bar{X}_1] = \frac{\sigma^2}{n_1}$，$V[\bar{X}_2] = \frac{\sigma^2}{n_2}$
- 標本平均の差$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$の平均と分散

$$E[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] = E[\bar{X}_1] - E[\bar{X}_2] = \mu_1 - \mu_2$$

$$V[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] = V[\bar{X}_1] + V[\bar{X}_2] = \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

- 帰無仮説「母平均に差が無い ($\mu_1 = \mu_2$)」の下では $E[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] = 0$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(0, \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right) \leftrightarrow \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0, 1)$$

母分散 σ^2の代わりに不偏分散 s^2としたときは $\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$

- （証明略）なお，t分布の自由度に注意（2を引く）

（復習）平均と分散の加法性

- 二つの確率変数 X, Y について以下が成立
  - 平均に関して $E[X+Y]=E[X]+E[Y],\quad E[X-Y]=E[X]-E[Y]$
  - 分散に関して $V[X \pm Y]=V[X]+V[Y]$　(X, Y が無相関のとき成立)
    - なお、$V[X]=E[(X-E[X])^2]$ (期待値からの二乗誤差の期待値)

（補足）母分散が等しいと仮定した不偏分散の合併

- 各群の不偏分散

不偏分散の分子

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_{1,i} - \bar{X}_1\right)^2 \quad \therefore \sum_{i=1}^{n_1}\left(X_{1,i} - \bar{X}_1\right)^2 = (n_1 - 1)s_1^2$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(X_{2,i} - \bar{X}_2\right)^2 \quad \therefore \sum_{i=1}^{n_2}\left(X_{2,i} - \bar{X}_2\right)^2 = (n_2 - 1)s_2^2$$

- 合併（プーリング）した不偏分散

不偏分散の分子の和

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_{1,i} - \bar{X}_1\right)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}\left(X_{2,i} - \bar{X}_2\right)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 2)} = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

不偏分散の分母の和

つまり

(分子) = (群1の偏差平方和) + (群2の偏差平方和)

(分母) = (群1の自由度) + (群2の自由度)

このあたりの単語は次回