

確率・統計

第8回 分散分析の補足

兵庫県立大学 社会情報科学部

川嶋宏彰

kawashima@sis.u-hyogo.ac.jp

今日のポイント

2

- 第一種の過誤と第二種の過誤
- 分散分析の事後検定

第一種過誤と第二種過誤

- 検定には二種類の誤りがある

- 友人Aが約束の時間にこなかったとする
- その理由はどちらか？

1. いつものようにゆっくりシャワーを浴びていた (真実)

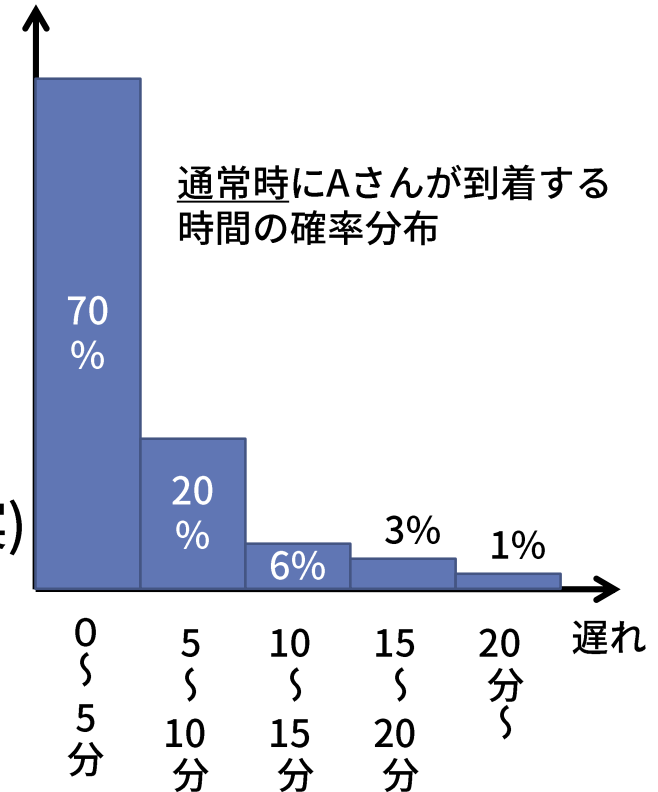
- 緊急時だと思って友人Aの家に駆けつけた (判断)

- 第一種の過誤 (type I error)

2. 水道管が破裂して対処していた(真実)

- 何事もないと思って友人Aを待ち続けた (判断)

- 第二種の過誤 (type II error)



第一種過誤と第二種過誤

- 検定には二種類の誤りがある

- 何人かでくじを引いてみたとする
- くじは公正か？

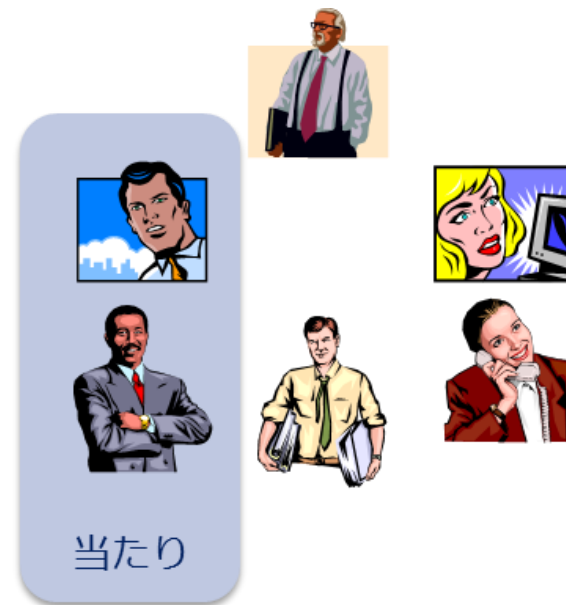
1. 本当に公正だった (真実)

- たまたま男ばかり当たったのに花子さんに「やっぱりイカサマだ！」と決めつけられる (判断)

- 第一種の過誤 (type I error)

2. 本当はイカサマがあった (真実)

- 標本サイズ (サンプルサイズ) が小さくて、太郎君に「そんなことはないって！」と言い逃れされる (判断)
- 第二種の過誤 (type II error)



第一種過誤と第二種過誤

5

- 第一種過誤 (type-I error) : この誤りが起きる確率 α

- 帰無仮説 H_0 が 正しい にもかかわらず 棄却 してしまう誤り

$$\alpha = P(\text{reject } H_0 \mid \underline{H_0 = \text{True}})$$

真実

あわて者
の誤り

- α は危険率とも呼ばれる

- 有意水準 α の検定は第一種過誤が確率 α で起きる危険を冒しながら帰無仮説を棄却 (対立仮説を採択) している

- 第二種過誤 (type-II error) : この誤りが起きる確率 β

- 帰無仮説 H_0 が 正しくない にもかかわらず 棄却しない 誤り

$$\beta = P(\text{do not reject } H_0 \mid \underline{H_0 = \text{False}})$$

真実

ぼんやり者
の誤り

- $1 - \beta$ を検出力と呼ぶ

- 正しくない帰無仮説を棄却できる確率

$$1 - \beta = P(\text{reject } H_0 \mid \underline{H_0 = \text{False}})$$

真実

第一種過誤と第二種過誤

6

- 表でまとめると以下のようなになる（対角：正しい判断）

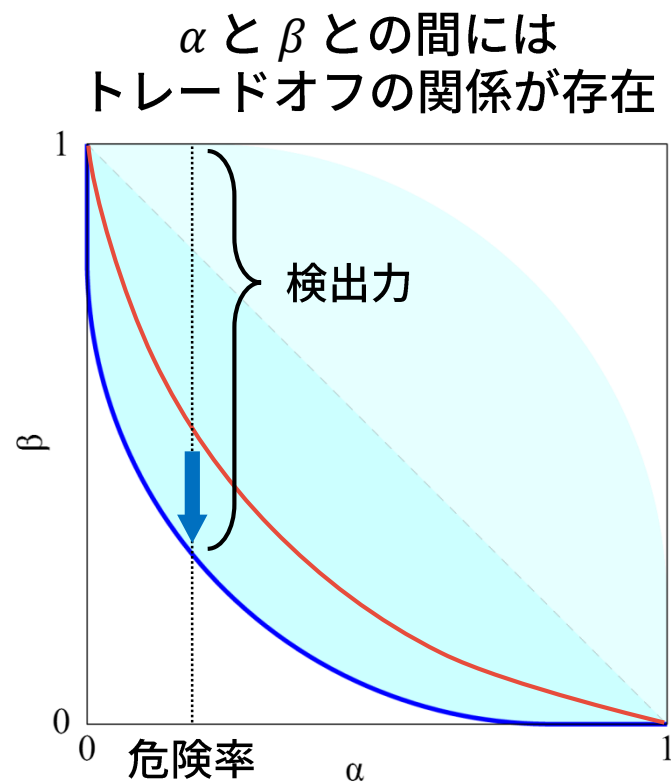
		真実	
		帰無仮説が正しい (本当に差がない)	帰無仮説が誤り (本当は差がある)
判断	帰無仮説を棄却 しない (保留)		第二種の過誤 $\beta =$ $P(\text{not reject } H_0 \mid H_0 = \text{False})$
	帰無仮説を棄却 する (差がある)	第一種の過誤 $\alpha =$ $P(\text{reject } H_0 \mid H_0 = \text{True})$	検出力 $1 - \beta =$ $P(\text{reject } H_0 \mid H_0 = \text{False})$

第一種過誤と第二種過誤

7

- 第一種過誤 (type-I error) : 確率 α
 - 帰無仮説が正しいにもかかわらず棄却してしまう誤り
 - α は危険率とも呼ばれる
- 第二種過誤 (type-II error) : 確率 β
 - 帰無仮説が正しくないにもかかわらず棄却しない誤り
 - $1 - \beta$ を検出力 (正しくない帰無仮説を棄却できる確率) とよぶ

あらかじめ定めた十分小さい有意水準 α
に対して β をなるべく小さくしたい



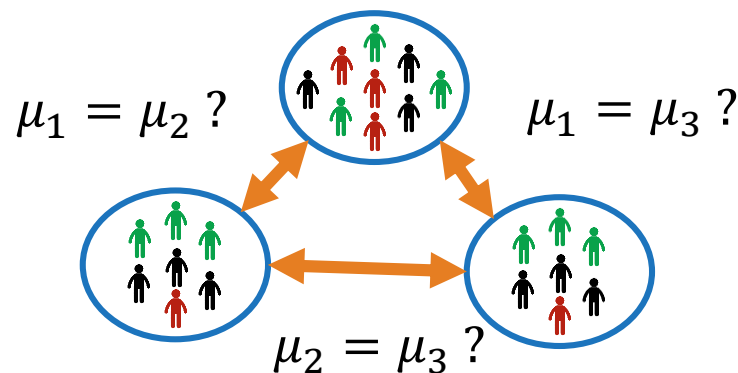
今日のポイント

8

- 第一種の過誤と第二種の過誤
- 分散分析の事後検定

分散分析と2群の検定

- 群1と群2，群2と群3，群1と群3で t 検定を3回すると？
 - 実質的な有意水準が高くなってしまう
- 分散分析は，指定した有意水準で「母平均」がすべて等しいか否かを検定できる
 - 帰無仮説：すべての母平均は等しい
 - 対立仮説：いずれかの母平均は異なる
- 一方，分散分析は…
 - 「どこに差があるか」は分からない



事後検定(post-hoc test)

10

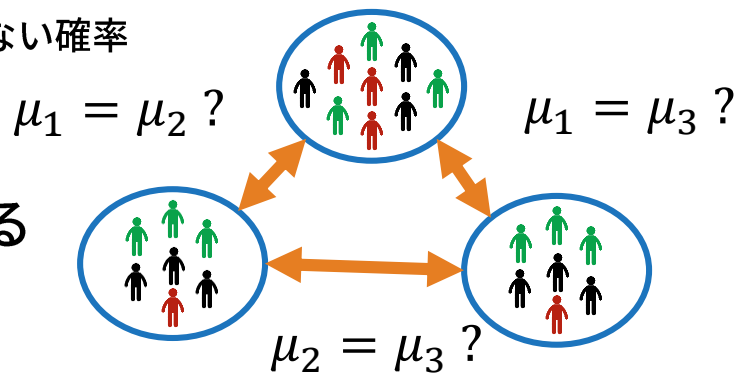
- 分散分析によって帰無仮説「すべての母平均は等しい」が棄却され「いずれかの群の母平均が異なる」と分かったら？
 - 「どの群が異質なのか知りたい！」（事後検定）
 - 「でも、0.05のt検定を繰り返すのは危険そうだ・・・」

多重検定（多重比較）の問題

- 有意水準5%のt検定を3回繰り返すと実質的に有意水準14%

第一種過誤が起きる確率: $1 - \underbrace{0.95 \times 0.95 \times 0.95}_{\text{各2群比較で誤って棄却しない確率}} = 0.1426$

- つまり、差が無いのに誤って差があるといってしまう確率が上がる



多重比較法（多重検定）

11

- 多重検定の問題を考慮した方法

- 複数の2群間の差の検定を同時に行っても、一つ以上の2群間の差が有意となる確率をあらかじめ定めた有意水準以内にする検定方法

- Bonferroni法（この講義ではこれだけ扱います）

- 全体として有意水準が満たされるよう有意水準を下げてすべての群間でそれぞれ個別に検定

改良手法もある：Holm法・Shaffer法

- Tukey法

- 母平均について群間ですべての対比較を同時に検定

- Dunnett法

- 1つの対照群と2つ以上の処理群があって、母平均について対照群と処理群の対比較のみを同時に検定
 - 各処理群の母平均が対照群の母平均と比べ「異なるかどうか」だけでなく「小さいといえるか」または「大きいといえるか」を判定

Bonferroni修正法

12

- 3群に対する多重検定 → 各群間に対してそれぞれ検定を行う
 - 有意水準 $\frac{\alpha}{3}$ として個別に検定 ($\alpha = 0.05 \rightarrow p < 0.0167$ ならば有意差あり)
 - $1 - (1 - 0.0167)^3 = 0.049$ とほぼ5%に

スイカの重さの測定結果 (kg)

群1	群2	群3
9.5	10.1	11.3
9.7	10.5	10.7
10.1	9.6	10.2
9.8	9.3	
9.3		

有意差あり

Q26			Q27			Q28		
t検定: 等分散を仮定した2標本による検定			t検定: 等分散を仮定した2標本による検定			t検定: 等分散を仮定した2標本による検定		
変数1	変数2		変数1	変数3		変数2	変数3	
平均	9.68	9.875	平均	9.68	10.7333	平均	9.875	10.7333
分散	0.092	0.2825	分散	0.092	0.30333	分散	0.2825	0.30333
観測数	5	4	観測数	5	3	観測数	4	3
プールされた標準偏差	0.17364		プールされた標準偏差	0.16244		プールされた標準偏差	0.29083	
仮説平均差	0		仮説平均差	0		仮説平均差	0	
自由度	7		自由度	6		自由度	5	
t	-0.6976		t	-3.5786		t	-2.0839	
P(T<=t) 片側	0.25397		P(T<=t) 片側	0.00583		P(T<=t) 片側	0.0458	
t境界値 片側	1.89458		t境界値 片側	1.94318		t境界値 片側	2.01505	
P(T<=t) 両側	0.50793		P(T<=t) 両側	0.01166		P(T<=t) 両側	0.09161	
t境界値 両側	2.36462		t境界値 両側	2.44691		t境界値 両側	2.57058	

一次近似:
 α は0に近い → 高次の項
 α^2, α^3 は0に近似できる

$$\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)^3$$
$$= 1 - 3\frac{\alpha}{3} + 3\left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^3$$
$$\approx 1 - \alpha$$
$$\therefore 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)^3 \approx \alpha$$

3群以上の標本に対する検定の流れ

13

1. 「等分散性」を調べる（Bartlett検定など．本講義では扱わない）
2. 分散分析 (ANOVA) で「全群の母平均が等しいかどうか」を調べる
3. 帰無仮説「すべての母平均は等しい」が棄却され「いずれか群の母平均が異なる」と分かったら、
補正を加味した事後検定 (post-hoc test) で「どの群間に差があるのか」を調べる（多重検定）

分散分析を行わず、はじめから（適切な）多重検定を行う場合もある

1. 4群 (A, B, C, D) で5%有意水準のANOVAを行ったところ、有意差が見られた。
 - 事後検定にて、全ペア間でt検定を行う場合にボンフェローニ法を利用したい。有意水準は何%に設定すればよいか？
2. 5群の場合で同様にボンフェローニ法を利用する場合、有意水準は何%にすればよいか？

(発展) 繰り返しのない二元配置分散分析

15

- 母集団の平均に差があるか調べたい → 分散分析
 - 複数の要因を考えるときは？

肥料と設定温度によるトマトの重さの違い

	温度A	温度B	温度C	温度D
肥料1	8	5	7	10
肥料2	3	1	3	7
肥料3	6	3	2	5

肥料の違いだけでなく
設定温度の影響も知りたい

→ 二元配置分散分析

左の例は「繰り返しのない」
二元配置分散分析

→ 実際には各セルに複数の観測値
「繰り返しのある」二元配置分散分析

交互作用 (二つの因子が絡み合って
起こす効果) を考えることができる
(例：温度Dにしつつ肥料1を使うと
効果が大きいなど)