Ayrık Matematik

Tanıtlama

H. Turgut Uyar   Ayşegül Gençata Yayımlı   Emre Harmancı

2001-2013

Lisans

Konular

Kaba Kuvvet Yöntemi

- olası bütün durumları teker teker incelemek

Teorem

$\{2, 4, 6, \ldots, 26\}$ *kümesinden seçilecek her sayı, en fazla 3 tamkarenin toplamı şeklinde yazılabilir.*

Tanıt.

$2 = 1{+}1$	$10 = 9{+}1$	$20 = 16{+}4$
$4 = 4$	$12 = 4{+}4{+}4$	$22 = 9{+}9{+}4$
$6 = 4{+}1{+}1$	$14 = 9{+}4{+}1$	$24 = 16{+}4{+}4$
$8 = 4{+}4$	$16 = 16$	$26 = 25{+}1$
	$18 = 9{+}9$	

□

Temel Kurallar

Evrensel Özelleştirme (Universal Specification - US)

$\forall x\ p(x) \Rightarrow p(a)$

Evrensel Genelleştirme (Universal Generalization - UG)

rasgele seçilen bir a için $p(a) \Rightarrow \forall x\ p(x)$

Evrensel Özelleştirme Örneği

Örnek

Bütün insanlar ölümlüdür. Sokrates bir insandır.
O halde Sokrates ölümlüdür.

- $\mathcal{U}$: bütün insanlar
- $p(x)$: x ölümlüdür
- $\forall x\ p(x)$: Bütün insanlar ölümlüdür.
- a: Sokrates, $a \in \mathcal{U}$: Sokrates bir insandır.
- o halde, $p(a)$: Sokrates ölümlüdür.

Evrensel Özelleştirme Örneği

Örnek

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ [j(x) \vee s(x) \rightarrow \neg p(x)] \\ p(m)\end{array}}{\therefore \neg s(m)}$$

1.	$\forall x\ [j(x) \vee s(x) \rightarrow \neg p(x)]$	A
2.	$p(m)$	A
3.	$j(m) \vee s(m) \rightarrow \neg p(m)$	$US : 1$
4.	$\neg(j(m) \vee s(m))$	$MT : 3, 2$
5.	$\neg j(m) \wedge \neg s(m)$	$DM : 4$
6.	$\neg s(m)$	$AndE : 5$

Evrensel Genelleştirme Örneği

Örnek

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ [p(x) \rightarrow q(x)] \\ \forall x\ [q(x) \rightarrow r(x)]\end{array}}{\therefore \forall x\ [p(x) \rightarrow r(x)]}$$

1.	$\forall x\ [p(x) \rightarrow q(x)]$	A
2.	$p(c) \rightarrow q(c)$	$US : 1$
3.	$\forall x\ [q(x) \rightarrow r(x)]$	A
4.	$q(c) \rightarrow r(c)$	$US : 3$
5.	$p(c) \rightarrow r(c)$	$HS : 2, 4$
6.	$\forall x\ [p(x) \rightarrow r(x)]$	$UG : 5$

Boş Tanıt

boş tanıt

$P \Rightarrow Q$ tanıtı için P'nin yanlış olduğunu göstermek

Boş Tanıt Örneği

Teorem

$\forall S\ [\emptyset \subseteq S]$

Tanıt.

$\emptyset \subseteq S \Leftrightarrow \forall x\ [x \in \emptyset \rightarrow x \in S]$

$\forall x\ [x \notin \emptyset]$ $\square$

Değersiz Tanıt

değersiz tanıt

$P \Rightarrow Q$ tanıtı için Q'nun doğru olduğunu göstermek

Değersiz Tanıt Örneği

Teorem

$\forall x \in \mathbb{R}\ [x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0]$

Tanıt.

$\forall x \in \mathbb{R}\ [x^2 \geq 0]$ $\square$

Doğrudan Tanıt

doğrudan tanıt
$P \Rightarrow Q$ tanıtı için $P \vdash Q$ olduğunu göstermek

Doğrudan Tanıt Örneği

Teorem
$\forall a \in \mathbb{Z}\ [3|(a-2) \Rightarrow 3|(a^2-1)]$

Tanıt.

$$
\begin{aligned}
3|(a-2) &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}\ [a-2=3k] \\
&\Rightarrow a+1 = a-2+3 = 3k+3 = 3(k+1) \\
&\Rightarrow a^2-1 = (a+1)(a-1) = 3(k+1)(a-1)
\end{aligned}
$$

□

Dolaylı Tanıt

dolaylı tanıt
$P \Rightarrow Q$ tanıtı için $\neg Q \vdash \neg P$ olduğunu göstermek

Dolaylı Tanıt Örneği

Teorem
$\forall x, y \in \mathbb{N}\ [x \cdot y > 25 \Rightarrow (x > 5) \vee (y > 5)]$

Tanıt.

- $\neg Q \Leftrightarrow (0 \le x \le 5) \wedge (0 \le y \le 5)$
- $x \cdot y \le 5 \cdot 5 = 25$

□

Dolaylı Tanıt Örneği

Teorem
$\forall a, b \in \mathbb{N}$
$\exists k \in \mathbb{N}\ [ab = 2k] \Rightarrow (\exists i \in \mathbb{N}\ [a = 2i]) \vee (\exists j \in \mathbb{N}\ [b = 2j])$

Tanıt.

- $\neg Q \Leftrightarrow (\neg \exists i \in \mathbb{N}\ [a = 2i]) \wedge (\neg \exists j \in \mathbb{N}\ [b = 2j])$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow (\exists x \in \mathbb{N}\ [a = 2x+1]) \wedge (\exists y \in \mathbb{N}\ [b = 2y+1]) \\
&\Rightarrow ab = (2x+1)(2y+1) \\
&\Rightarrow ab = 4xy + 2x + 2y + 1 \\
&\Rightarrow ab = 2(2xy + x + y) + 1 \\
&\Rightarrow \neg(\exists k \in \mathbb{N}\ [ab = 2k])
\end{aligned}
$$

□

Çelişkiyle Tanıt

çelişkiyle tanıt
P tanıtı için $\neg P \vdash Q \wedge \neg Q$ olduğunu göstermek

Çelişkiyle Tanıt Örneği

Teorem

En büyük asal sayı yoktur.

Tanıt.

- $\neg P$: En büyük asal sayı vardır.
- Q: En büyük asal sayı S.
- asal sayılar: $2, 3, 5, 7, 11, \ldots, S$
- $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots S + 1$ sayısı,
  $[2, S]$ aralığındaki hiçbir asal sayıya kalansız bölünmez
  1. ya kendisi asaldır: $\neg Q$
  2. ya da S'den büyük bir asal sayıya bölünür: $\neg Q$

$\square$

Çelişkiyle Tanıt Örneği

Teorem

$\neg\exists a, b \in \mathbb{Z}^+ \ [\sqrt{2} = \frac{a}{b}]$

Tanıt.

- $\neg P$: $\exists a, b \in \mathbb{Z}^+ \ [\sqrt{2} = \frac{a}{b}]$
- Q: $obeb(a, b) = 1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ 2 = \frac{a^2}{b^2} \\
&\Rightarrow\ a^2 = 2b^2 \\
&\Rightarrow\ \exists i \in \mathbb{Z}^+ \ [a^2 = 2i] \\
&\Rightarrow\ \exists j \in \mathbb{Z}^+ \ [a = 2j]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ 4j^2 = 2b^2 \\
&\Rightarrow\ b^2 = 2j^2 \\
&\Rightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z}^+ \ [b^2 = 2k] \\
&\Rightarrow\ \exists l \in \mathbb{Z}^+ \ [b = 2l] \\
&\Rightarrow\ obeb(a, b) \geq 2 : \neg Q
\end{aligned}$$

$\square$

Eşdeğerlilik Tanıtları

- $P \Leftrightarrow Q$ tanıtı için hem $P \Rightarrow Q$, hem de $Q \Rightarrow P$ tanıtlanmalı
- $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow P_n$ tanıtı için bir yöntem:
  $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow P_n \Rightarrow P_1$

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

Teorem

$a, b, n, q_1, r_1, q_2, r_2 \in \mathbb{Z}^+$

$a = q_1 \cdot n + r_1$

$b = q_2 \cdot n + r_2$

$r_1 = r_2 \Leftrightarrow n|(a - b)$

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

$r_1 = r_2 \Rightarrow n|(a - b)$.

$$\begin{aligned}
a - b &= (q_1 \cdot n + r_1) \\
&\quad -(q_2 \cdot n + r_2) \\
&= (q_1 - q_2) \cdot n \\
&\quad +(r_1 - r_2) \\
r_1 = r_2 &\Rightarrow r_1 - r_2 = 0 \\
&\Rightarrow a - b = (q_1 - q_2) \cdot n
\end{aligned}$$

$\square$

$n|(a - b) \Rightarrow r_1 = r_2$.

$$\begin{aligned}
a - b &= (q_1 \cdot n + r_1) \\
&\quad -(q_2 \cdot n + r_2) \\
&= (q_1 - q_2) \cdot n \\
&\quad +(r_1 - r_2) \\
n|(a - b) &\Rightarrow r_1 - r_2 = 0 \\
&\Rightarrow r_1 = r_2
\end{aligned}$$

$\square$

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

Teorem

$$\begin{aligned}
& A \subseteq B \\
\Leftrightarrow\ & A \cup B = B \\
\Leftrightarrow\ & A \cap B = A \\
\Leftrightarrow\ & \overline{B} \subseteq \overline{A}
\end{aligned}$$

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B.$

$A \cup B = B \Leftrightarrow A \cup B \subseteq B \wedge B \subseteq A \cup B$

$B \subseteq A \cup B$

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup B &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \\
A \subseteq B &\Rightarrow x \in B \\
&\Rightarrow A \cup B \subseteq B
\end{aligned}
$$

$\square$

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

$A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A.$

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \cap B \subseteq A \wedge A \subseteq A \cap B$

$A \cap B \subseteq A$

$$
\begin{aligned}
y \in A &\Rightarrow y \in A \cup B \\
A \cup B = B &\Rightarrow y \in B \\
&\Rightarrow y \in A \cap B \\
&\Rightarrow A \subseteq A \cap B
\end{aligned}
$$

$\square$

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

$A \cap B = A \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}.$

$$
\begin{aligned}
z \in \overline{B} &\Rightarrow z \notin B \\
&\Rightarrow z \notin A \cap B \\
A \cap B = A &\Rightarrow z \notin A \\
&\Rightarrow z \in \overline{A} \\
&\Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}
\end{aligned}
$$

$\square$

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

$\overline{B} \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \subseteq B.$

$$
\begin{aligned}
\neg(A \subseteq B) &\Rightarrow \exists w\ [w \in A \wedge w \notin B] \\
&\Rightarrow \exists w\ [w \notin \overline{A} \wedge w \in \overline{B}] \\
&\Rightarrow \neg(\overline{B} \subseteq \overline{A})
\end{aligned}
$$

$\square$

Tümevarım Induction

İlk olarak, önerme n = 0 (veya n = 1) için doğru olduğunu gösterirsiniz (temel adım).
Daha sonra, n = k için doğru olduğunu varsayıp, bu varsayımdan yola çıkarak n = k + 1 için de doğru olduğunu gösterirsiniz (tümevarım adımı).

Tanım

$S(n)$: $n \in \mathbb{Z}^+$ üzerinde tanımlanan bir yüklem

$S(n_0) \wedge (\forall k \geq n_0\ [S(k) \Rightarrow S(k+1)]) \Rightarrow \forall n \geq n_0\ S(n)$

- $S(n_0)$: *taban adımı*
- $\forall k \geq n_0\ [S(k) \Rightarrow S(k+1)]$: *tümevarım adımı*

k'yı doğru varsayıp k+1'i bu doğruya göre gösterebiliyor muyuz?

Tümevarımın Adımları:

Matematiksel tümevarım iki ana adımdan oluşur:

1. **Temel Adım (Base Case):**
   Burada, ispatlamak istediğimiz önerme belirli bir başlangıç değeri için (genellikle 0 veya 1) doğru olduğunu gösteririz. Bu, tümevarımın başlangıç noktasını oluşturur.
2. **Tümevarım Adımı (Inductive Step):**
   Bu adımda, eğer önerme herhangi bir **n = k** için doğruysa, bunun **n = k + 1** için de doğru olduğunu ispatlarız. Yani, bir "adım" ileriye geçmenin geçerli olduğunu gösteririz.

Genel Tümevarım Süreci:

- İlk olarak, önerme n = 0 (veya n = 1) için doğru olduğunu gösterirsiniz (temel adım).
- Daha sonra, n = k için doğru olduğunu varsayıp, bu varsayımdan yola çıkarak n = k + 1 için de doğru olduğunu gösterirsiniz (tümevarım adımı).

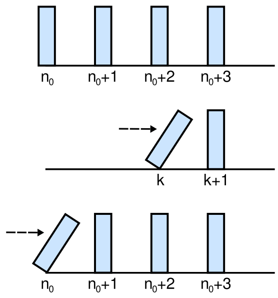
Eğer bu iki adım başarıyla gösterilirse, ispatlanmak istenen ifade tüm doğal sayılar için geçerli olur.

Matematiksel Gösterim:

Bir önerme **P(n)** olmak üzere, matematiksel tümevarım şu şekilde yapılır:

1. **Temel Adım:** P(1) doğru mu? (Veya, başlangıç durumu için P(0) doğru mu?)
2. **Tümevarım Varsayımı:** Herhangi bir **k** için P(k) doğru olduğunu varsayalım.
3. **Tümevarım Adımı:** P(k) doğru olduğunda, P(k + 1)'in de doğru olduğunu gösterin.

Tümevarım



Tümevarım Örneği

Teorem
$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \ [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2]$

Tanıt.

- $n = 1$: $1 = 1^2$
- $n = k$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2$ kabul edelim
- $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} & 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) \\ = & \ k^2 + 2k + 1 \\ = & \ (k+1)^2 \end{aligned}$$

□

Tümevarım Örneği

Teorem
$\forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 4 \ [2^n < n!]$

Tanıt.

- $n = 4$: $2^4 = 16 < 24 = 4!$
- $n = k$: $2^k < k!$ kabul edelim
- $n = k + 1$:
  $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2 \cdot k! < (k+1) \cdot k! = (k+1)!$

□

2^k.2< k! (k+1),   k+1> 2

Tümevarım Örneği

Teorem
$\forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 14 \ \exists i, j \in \mathbb{N} \ [n = 3i + 8j]$

Tanıt.

- $n = 14$: $14 = 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1$
- $n = k$: $k = 3i + 8j$ kabul edelim
- $n = k + 1$:
  - $k = 3i + 8j, j > 0 \Rightarrow k + 1 = k - 8 + 3 \cdot 3$
    $\Rightarrow k + 1 = 3(i+3) + 8(j-1)$
  - $k = 3i + 8j, j = 0, i \geq 5 \Rightarrow k + 1 = k - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 8$
    $\Rightarrow k + 1 = 3(i-5) + 8(j+2)$

□

Güçlü Tümevarım

Eğer bir durumu ispatlarken sadece bir önceki adımın değil, tüm önceki adımların bilgisine ihtiyaç duyuluyorsa, güçlü tümevarım tercih edilir.

Güçlü Tümevarımın Adımları:

1. **Temel adım:** Önermenin $P(1)$ ya da başlangıç değeri için doğru olduğunu gösteririz.
2. **İndüksiyon varsayımı:** Önermenin $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ için doğru olduğunu varsayarız.
3. **İndüksiyon adımı:** $P(1), P(2), \ldots, P(k)$'nın doğru olduğu varsayımına dayanarak, $P(k+1)$'in doğru olduğunu ispatlarız.

Tanım
$S(n_0) \wedge (\forall k \geq n_0 \ [(\forall i \leq k \ S(i)) \Rightarrow S(k+1)]) \Rightarrow \forall n \geq n_0 \ S(n)$

Güçlü Tümevarım Örneği

Teorem
$\forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2$
n asal sayıların çarpımı şeklinde yazılabilir.

Tanıt.

- $n = 2$: $2 = 2$
- $\forall i \leq k$ için doğru kabul edelim
- $n = k + 1$:
  1. asalsa: $n = n$
  2. asal değilse: $n = u \cdot v$
     $u < k \wedge v < k \Rightarrow u$ ve v sayılarının her biri asal sayıların çarpımı şeklinde yazılabilir

□

Güçlü Tümevarım Örneği

Teorem
$\forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 14 \ \exists i, j \in \mathbb{N} \ [n = 3i + 8j]$

Tanıt.

- $n = 14$: $14 = 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1$
  $n = 15$: $15 = 3 \cdot 5 + 8 \cdot 0$
  $n = 16$: $16 = 3 \cdot 0 + 8 \cdot 2$
- $n \leq k$: $k = 3i + 8j$ kabul edelim
- $n = k + 1$: $k + 1 = (k-2) + 3$

□

Hatalı Tümevarım Örneği

Teorem
$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; [1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2+n+2}{2}]$

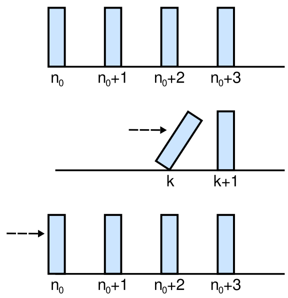
taban adımı geçersiz

- $n = k$: $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k^2+k+2}{2}$ kabul edelim
- $n = k + 1$:

$$
\begin{aligned}
& 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) \\
= \; & \frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 = \frac{k^2+k+2}{2} + \frac{2k+2}{2} \\
= \; & \frac{k^2+3k+4}{2} = \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}
\end{aligned}
$$

- $n = 1$: $1 \neq \frac{1^2+1+2}{2} = 2$

Hatalı Tümevarım Örnekleri



Hatalı Tümevarım Örnekleri

Teorem
Bütün atlar aynı renktir.

$A(n)$: n atlı kümelerdeki bütün atlar aynı renktir.

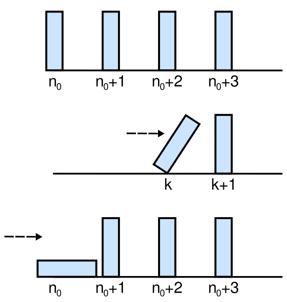
$\forall n \in \mathbb{N}^+ \; A(n)$

Hatalı Tümevarım Örnekleri

tümevarım adımı geçersiz

- $n = 1$: $A(1)$
  1 atlı kümelerdeki bütün atlar aynı renktir.
- $n = k$: $A(k)$ doğru kabul edelim
  k atlı kümelerdeki bütün atlar aynı renktir.
- $A(k+1) = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \cup \{a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}\}$
  - $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ kümesindeki bütün atlar aynı renktir (a_2).
  - $\{a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}\}$ kümesindeki bütün atlar aynı renktir (a_2).

Hatalı Tümevarım Örnekleri



Kaynaklar

Okunacak: Grimaldi

- Chapter 2: Fundamentals of Logic
  - 2.5. Quantifiers, Definitions, and the Proofs of Theorems
- Chapter 4: Properties of Integers: Mathematical Induction
  - 4.1. The Well-Ordering Principle: Mathematical Induction

Yardımcı Kitap: O'Donnell, Hall, Page

- Chapter 4: Induction