



$$C = \left\{ -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

olur.

20

BÖLÜM 0

Önbilgiler

PROBLEMLER

- 1.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
- (a) $x^2 - 9 = 0$ (b) $4x^2 - 1 = 0$
 (c) $x^2 + 4x = 0$ (d) $2x - x^2 = 0$
 (e) $x^2 - 3x + 2 = 0$ (f) $t^2 + 5t + 6 = 0$
 (g) $4m^2 - 5m + 6 = 0$
- 2.** Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.
- (a) $\sqrt{2x - 3} + x = 3$
 (b) $\sqrt{3x + 1} + x = \sqrt{4x}$
 (c) $x^4 - 16 = 0$
 (d) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$
 (e) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$
- 3.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
- (a) $\frac{3}{x} + \frac{1}{2} = \frac{x}{x+4}$
 (b) $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-1} = \frac{3}{x^2-1}$
 (c) $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$
- 4.** Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz.
- (a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 38 \\ xy = 96 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x^2 + xy = 10 \\ y^2 + xy = 15 \end{cases}$
- 5.** $x^2 + (m-1)x + m = 0$ denkleminin köklerinden biri 2 olduğuna göre, diğerini kaçtır?
- 6.** Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.
- (a) $x(x-3) > 0$ (b) $x^2 + 13x + 40 < 0$
 (c) $x^2 - 4x + 4 > 0$ (d) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 9x} \leq 0$
- 7.** $2 < x^2 - 4x - 3 < 18$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- 8.** $|x^2 - 3x - 4| < 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- 9.** Her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 - 2(4m-1)x + 15m^2 - 2m - 7 > 0$ olması için m ne olmalıdır?
- 10.** $(m+1)x^2 - 4x - 2(2m+1) = 0$ denkleminin farklı ve gerçek (reel) iki kökünün olması için m ne olmalıdır?
- 11.** Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin (parabolllerin) grafiğini çiziniz.
- (a) $y = x^2 - 5x - 6$ (b) $y = -2x^2 + 4x$
 (c) $y = 4x^2 - 4x + 1$ (d) $y = 2x - x^2$
- 12.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
- (a) $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$
 (b) $x^3 - 3x + 2 = 0$
 (c) $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$
- 13.** $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin rasyonel kökünün olmadığını gösteriniz.
- 14.** Aşağıdaki denklemleri, denklemin başında belirtilen bilinmeyene göre çözünüz.
- (a) $t ; \quad \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t - S_0 = 0$
 (b) $R ; \quad w = \frac{mgR^2}{(x+R)^2}, \quad (R > 0, x > 0)$
 (c) $r ; \quad S = \pi r^2 + 2\pi r\ell$



PROBLEMLER

- 8.** Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz.
- $|2x| > 3$
 - $|x + 3| \leq 2$
 - $|1 - 3x| \geq 4$
 - $|x + 4| < 5$
 - $|2x| \geq 2x$
 - $|3x| < 3x$
- 9.** Toplamları rasyonel olan iki irrasyonel sayı bulunuz.
- 10.** Çarpımları rasyonel olan iki irrasyonel sayı bulunuz.
- 11.** Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.
- $\sqrt{4.16.36}$
 - $\sqrt{-0,00001}$
 - $(8a^6)^{4/3}$
 - $(32)^{-4/5} (16)^{5/4}$
 - $\sqrt{\sqrt{12} - \sqrt{3}}$
- 12.** “ $a < b$ ve $b < c \Rightarrow a < c$ dir.” önermesinin doğruluğunu gösteriniz.
- 13.** “ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ve $b = 0$ dir.” önermesinin doğruluğunu gösteriniz.
- 14.** $|a - 10| < 2$ ve $|b - 6| < 1$ eşitsizliğini sağlayan a ve b sayıları veriliyor. Aşağıdaki sayıların sınırlarını için ne söylenebilir?
- $a + b$
 - $a - b$
 - $a^2 - b^2$
 - $a^2 + ab + 1$
 - $a^3 - b^3$
 - $a^2 + ab + b^2$
- 15.** Aşağıdaki komşulukları, mutlak değer yardımıyla yazınız.
- 1 in 2 -komşuluğu
 - -2 nin $\frac{1}{10}$ -komşuluğu
- 16.** $x^3 = 2$ olacak şekilde bir x rasyonel sayısının var olmadığını gösteriniz.
- 17.** a ve b , $a < b$ olmak üzere, iki reel sayı olsun.
 $a < \frac{a+b}{2} < b$ olacağını gösteriniz.
- 18.** Bir öğrencinin matematik dersinden aldığı notlar 56, 87, 75 ve 80 dir. Bu öğrencinin aldığı notları bulunduran en küçük aralığı çözüm kümesi olarak kabul eden mutlak değerli eşitsizliği yazınız.
- 19.** x tam sayı olduğunda x sayısına, x tam sayı olmadığında x in sağında bulunan tam sayıların en küçüğüne **x in tavamı** denir, $[x]$ ile gösterilir. Aşağıdaki eşitliklerin çözüm kümesini bulunuz.
- $\left[\frac{x}{3} \right] = 5$
 - $\left[\frac{2x}{5} \right] = -3$

0.4

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

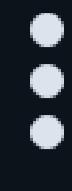
a, b, c sabit reel sayılar ve x bilinmeyen olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tipindeki denklemlere **ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler** adı verilir.

Bu denklemin kökleri,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

**PROBLEMLER**

1. A, B, C herhangi üç küme olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

- (a) $A \setminus A = \emptyset$
- (b) $A \setminus \emptyset = A$
- (c) $A \cap B = B \cap A$
- (d) $A \cup B = B \cup A$
- (e) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- (f) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- (g) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (h) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- (i) $A' - B' = B \setminus A$
- (j) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- (k) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
- (l) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

2. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

- (a) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
- (b) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$
- (c) $A \subset B \Leftrightarrow A' \supset B'$
- (ç) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subset A'$
- (d) $A \subset C$ ve $B \subset C \Leftrightarrow A \cup B \subset C$
- (e) $C \subset A$ ve $C \subset B \Leftrightarrow C \subset A \cap B$
- (f) $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$
- (g) $(A \setminus B)' = (B \setminus A)' \Leftrightarrow A = B$

3. a ve b pozitif iki sayı olsun.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

olduğunu gösteriniz.

4. 2 ile tam bölünebilen tam sayılaraya çift sayı, çift olmayan tam sayılaraya da tek sayı denir. Buna göre her çift sayı, m bir tam sayı olmak üzere, $2m$ şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde her tek sayı da $2m + 1$ formunda yazılabilir. Her çift sayının karesinin çift, her tek sayının karesinin tek sayı olduğunu gösteriniz.

5. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

- (a) $|1-x| = 2$
- (b) $|x+1| = |x+3|$
- (c) $|2x| = |x-2|$
- (d) $|x-1| + |x| = 1$
- (e) $|3x-1| = 3x-1$
- (f) $|2x-4| = 4-2x$

6. Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz.

- (a) $|x-1| \leq 3$
- (b) $|x+1| > 2$
- (c) $|x-1| > |x|$
- (d) $|x| + |x-1| \geq 1$
- (e) $|5x-4| < 2x+1$
- (f) $|3x+12| > 0$

7. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

- (a) $\|x\| = 3$
- (b) $\|-2x\| = -2$
- (c) $\|-x+2\| = 1$
- (d) $\|x+1\| = x$
- (e) $\|x-1\| = x$
- (f) $\|x+3\| = 2\|x\| - 3$

PROBLEMLER

8. Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz.

- (a) $\|2x\| > 3$
- (b) $\|x+3\| \leq 2$
- (c) $\|1-3x\| \geq 4$
- (d) $\|x+4\| < 5$
- (e) $\|2x\| \geq 2x$

14. $|a-10| < 2$ ve $|b-6| < 1$ eşitsizliğini sağlayan a ve b sayıları veriliyor. Aşağıdaki sayıların sınırları için ne söylenebilir?

- | | |
|-----------------|----------------------|
| (a) $a+b$ | (b) $a-b$ |
| (c) $a^2 - b^2$ | (d) $a^2 + ab + 1$ |
| (e) $a^3 - b^3$ | (f) $a^2 + ab + b^2$ |



PROBLEMLER

8. Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz.

- (a) $\|2x\| > 3$
- (b) $\|x + 3\| \leq 2$
- (c) $\|1 - 3x\| \geq 4$
- (d) $\|x + 4\| < 5$
- (e) $\|2x\| \geq 2x$
- (f) $\|3x\| < 3x$

9. Toplamları rasyonel olan iki irrasyonel sayı bulunuz.

10. Çarpımları rasyonel olan iki irrasyonel sayı bulunuz.

11. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.

- (a) $\sqrt{4.16.36}$
- (b) $\sqrt{-0,00001}$
- (c) $(8a^6)^{4/3}$
- (d) $(32)^{-4/5}(16)^{5/4}$
- (e) $\sqrt{\sqrt{12} - \sqrt{3}}$

12. “ $a < b$ ve $b < c \Rightarrow a < c$ dir.” önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

13. “ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ve $b = 0$ dir.” önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

14. $|a - 10| < 2$ ve $|b - 6| < 1$ eşitsizliğini sağlayan a ve b sayıları veriliyor. Aşağıdaki sayıların sınırları için ne söylenebilir.

- | | |
|-----------------|----------------------|
| (a) $a + b$ | (b) $a - b$ |
| (c) $a^2 - b^2$ | (d) $a^2 + ab + 1$ |
| (e) $a^3 - b^3$ | (f) $a^2 + ab + b^2$ |

15. Aşağıdaki komşulukları, mutlak değer yardımıyla yazınız.

- (a) 1 in 2 –komşuluğu
- (b) $-2 \min \frac{1}{10}$ – komşuluğu

16. $x^3 = 2$ olacak şekilde bir x rasyonel sayısının varolmadığını gösteriniz.

17. a ve b , $a < b$ olmak üzere, iki reel sayı olsun.

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

olacağını gösteriniz.

18. Bir öğrencinin matematik dersinden aldığı notlar 56, 87, 75 ve 80 dir. Bu öğrencinin aldığı notları bulunduran en küçük aralığı çözüm kümesi olarak kabul eden mutlak değerli eşitsizliği yazınız.

19. x tam sayı olduğunda x sayısına, x tam sayı olmadığında x in sağında bulunan tam sayıların en küçüğüne **x in tavası** denir, $\lceil x \rceil$ ile gösterilir. Aşağıdaki eşitliklerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $\left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil = 5$

b) $\left\lceil \frac{2x}{5} \right\rceil = -3$

ÖRNEK : $x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm : Verilen denklemin bir rasyonel kökü varsa, bu kök 4’ü bölen $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ sayılarından biridir. $x_1 = 1$ denklemde yerine konursa

$$1^3 - 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

bulunur, yani denklem sağlanır. Şu halde $x^3 - 3x^2 - 2x + 4$ ifadesinin çarpanlanan biri $x - 1$ dir. $x^3 - 3x^2 + 2x + 4$ ifadesi $x - 1$ ile bölündürse, bölüm $x^2 - 2x - 4$ olur. Şimdi $x^2 - 2x - 4 = 0$ denklemini çözelim.

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 (-4) = 20$ olacağında

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5} \\ x_2 &= \frac{2 - \sqrt{20}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{2} = 1 - \sqrt{5} \end{aligned}$$

bulunur. O halde verilen denklemin çözüm kümesi

$$\{1, 1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\}$$

olur.

ÖRNEK : $4x^4 + 4x^3 - 9x^2 - x + 2 = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : 2’nin bölenleri $\pm 1, \pm 2$ sayılarıdır. Bu sayıları denklemde yerine yazarak deneyelim.

$x = 1$ için

$$4 + 4 - 9 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

bulunur. $x_1 = 1$ bir köktür.

$x = -1$ için

$$4 - 4 - 9 + 1 + 2 = 0 \Rightarrow -6 = 0$$

bulunur ki bu, $x = -1$ in kök olmadığını gösterir. Benzer şekilde $x_2 = -2$ nin kök, fakat 2’nin kök olmadığını görür. Şimdi diğer iki kökü bulalım.

$4x^4 + 4x^3 - 9x^2 - x + 2$ ifadesi $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$ ile bölündürse bölüm $4x^2 - 1$ olur. $4x^2 - 1 = 0$ çözüldüğünde $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{2}$ kökleri bulunur. Çözüm kümesi

$$C = \left\{ -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

olur.



PROBLEMLER

1. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
- (a) $x^2 - 9 = 0$ (b) $4x^2 - 1 = 0$
(c) $x^2 + 4x = 0$ (d) $2x - x^2 = 0$
(e) $x^2 - 3x + 2 = 0$ (f) $t^2 + 5t + 6 = 0$
(g) $4m^2 - 5m + 6 = 0$
2. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.
- (a) $\sqrt{2x - 3} + x = 3$
(b) $\sqrt{3x + 1} + x = \sqrt{4x}$
(c) $x^4 - 16 = 0$
(ç) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$
(d) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$
3. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
- (a) $\frac{3}{x} + \frac{1}{2} = \frac{x}{x+4}$
(b) $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-1} = \frac{3}{x^2-1}$
(c) $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$
4. Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz.
- (a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 38 \\ xy = 96 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x^2 + xy = 10 \\ y^2 + xy = 15 \end{cases}$
5. $x^2 + (m-1)x + m = 0$ denkleminin köklerinden biri 2 olduğuna göre, diğeri kaçtır?
6. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.
- (a) $x(x-3) > 0$ (b) $x^2 + 13x + 40 < 0$
(c) $x^2 - 4x + 4 > 0$ (d) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 9x} \leq 0$
7. $2 < x^2 - 4x - 3 < 18$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
8. $|x^2 - 3x - 4| < 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
9. Her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 - 2(4m-1)x + 15m^2 - 2m - 7 > 0$ olması için m ne olmalıdır?
10. $(m+1)x^2 - 4x - 2(2m+1) = 0$ denkleminin farklı ve gerçek (reel) iki kökünün olması için m ne olmalıdır?
11. Aşağıda denklemleri verilen egrilerin (parabolerin) grafiğini çiziniz.
- (a) $y = x^2 - 5x - 6$ (b) $y = -2x^2 + 4x$
(c) $y = 4x^2 - 4x + 1$ (ç) $y = 2x - x^2$
12. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
- (a) $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$
(b) $x^3 - 3x + 2 = 0$
(c) $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$
13. $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin rasyonel kökünün olmadığını gösteriniz.
14. Aşağıdaki denklemleri, denklemın başında belirtilen bilinmeye göre çözünüz.
- (a) $t ; \quad \frac{1}{2}gt^2 - v_0t - S_0 = 0$
(b) $R ; \quad w = \frac{mgR^2}{(x+R)^2}, \quad (R > 0, x > 0)$
(c) $r ; \quad S = \pi r^2 + 2\pi r\ell$

1 Ekim Matematik 1. Ders Notları

Küme

Tarif: iyi tanımlanmış (yorumu açık olmayacak şekilde) belirli nesneler topluluğu

Tanımlanamayan matematiksel bilgilerden biridir.

Ortalık Özellik ile Gösterme

$$A = \{x : x \text{ler } 1. \text{ Sınıf Bilg. Müh. Öğr.}\}$$

$$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \emptyset, \mathbb{C} \rightarrow \{z = a+bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

$$\left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Bileşke, Ara Kesit, Bileşke İşlemi
Kümeler üzerinde işlemler

Boş Küme \emptyset

Universal Küme E, U

Aynı elemanlara sahip kümelere esit kümeler denir.

$A \times B = \{(x,y) : x \in A, y \in B\}$ iki kümeyi esittigi

$$ACB, BCA \Rightarrow A=B$$

Tariften, tanıma
* $A \cup B = \{x : x \in A \text{ veya } x \in B\}$
* $A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\}$

* Her $a \in A, a \in B \Rightarrow A \subset B$
 $A \subset B$ nin alt kümesi

* $A^t = A'$, A kümeyinin tümleyeni

* $E/A, A/B$

Bağıntı; $A, B, A \times B$

$A \times B$ 'nin herhangi bir alt kümesine A 'dan B 'ye bağıntı denir.

Örnek: $A = \{a, b, c\} \quad B = \{1, 2\}$

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$$

$$\alpha_1 = \{(a,1)\} \quad A \not\propto B \quad \alpha_1: A \rightarrow B$$

$$\alpha_2 = \{(a,1), (a,2), (c,1)\}$$

:

2^n : alt küme sayısı

Sartları sağlanırsa
 f bağıntısına fonksiyon denir.

* Fonksiyon Kuralı

$$f: A \rightarrow B$$

$x \rightarrow y = f(x)$ ile gösterilen $y = f(x)$

Fonk. kuralı x e bağımsız y ye
bağımlı dağışken denir.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nin alt kümesi

$$\text{Ör} \quad A = \{a, b, c\} \quad B = \{1, 2\}$$

$$\alpha_1 = \{(a,1)\} \quad \text{fonk. deðil}$$

$$\alpha_2 = \{(a,1), (a,2), (c,1)\} \quad \text{fonk. deðil}$$

$$\alpha_3 = \{(a,1), (b,1), (c,2)\} \quad \checkmark$$

$$\alpha_4 = \{(a,2), (b,2), (c,1)\} \quad \checkmark$$

Ör Sabit bir noktaya eşit uzaklıklardaki noktalarn
oluşturdugu kümeye "birim çember" denir.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad a \text{ ve } b \text{ yi koordinat başlangıcı alırsak}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{birim çember})$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} \\ y = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$y = \sqrt{1-x^2}$ çemberin üst parçası

$y = -\sqrt{1-x^2}$ çemberin alt parçası

$$\text{Ör} \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{TK} = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = x^2, \quad \text{TK} = \mathbb{R}, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\{R^+ \cup \emptyset\} \cup R^- = R$$

Ör $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ $Tk=?$

$$Tk = R - \{3\}, R/\{3\}$$

Ör $f(x) = \sqrt{x+2}$

$$Tk \Rightarrow x+2 \geq 0 \quad Tk = [-2, +\infty)$$

$$x \geq -2$$

Üslü İfadeler

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ tane}} \quad n \text{ pozitif}$$

$$a^0 = 1 \quad \text{tanımlanır}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{tanımlanır}$$

$$a^k \cdot a^l = a^{k+l}$$

$$\frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$$

$$\frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

Kökli İfadeler

$$x^n = a$$

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Eğer n pozitif ise kök
için pozitif (a)

n : çift $a > 0$

n : tek $a > 0 \quad a < 0$

• $\sqrt{-1}$ de tanımlı değildir

Karmaşık sayılar $z = a+ib$,
 $i^2 = -1$ kabul \mathbb{C} 'de tanımlıdır.

• $n = p/q$ rasyonel
 p ve q aralarında
asal, $q \neq 0$.

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

7. Ekim Matematik 2. Ders

Özdeşlikler

$$x^2 - 4 = 0$$

iki kök var
sonlu sayıda

denklem

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

özdeşlik

Sonsuz x değeri
var

$$(x+y)^7 = \binom{7}{0}x^7 + \binom{7}{1}x^6y + \dots + \binom{7}{7}y^7$$

Kombinasyon

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Permutasyon

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$0! = 1 \quad \text{tanımlanır}$$

Eşitsizlik, Aralık Kavramı

(dersde işlendi)

ödev: $n!!$ bigiminde
bir kavram var mıdır?
Nedir?

Mutlak Değer

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

* tek boyutta
uzaklık kavramı.

$$|x| \leq k \quad -k \leq x \leq k$$

$$|x| \geq k \quad -k \geq x \geq k$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{üçgen eşitsizliği}$$

$$|(x-y)| \leq |x-y| \quad \text{üçgen eşitsizliği}$$

$$|x| = k \quad x = k, x = -k$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$$

10 Ekim 3. Ders

ÖR $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

a) x 'in \mathbb{R} ? $(-\infty, -1] \cup (2, \infty)$

b) y 'nin \mathbb{R} ? $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

a) $\frac{x+1}{x-2} \geq 0$ $x = -1$

b) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ $y^2 = \frac{x+1}{x-2}$

$$y^2(x-2) = x+1$$

$$y^2x - 2y^2 = x+1$$

$$y^2x - x = 1 + y^2$$

$$x(y^2 - 1) = 1 + y^2$$

$$x = \frac{1 + y^2}{y^2 - 1}$$

$$y = 1, -1$$

POLİNOM FONKSİYON

\mathbb{R} 'si real sayılardır

ÖR $f(x) = 3x^2 + 7x - 2$ $\mathbb{R} = \mathbb{R}$

Polinom Fonk. Grafikleri (PARabol)

$f(x) = y = ax^2 + bx + c$ fonk.

$f = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$

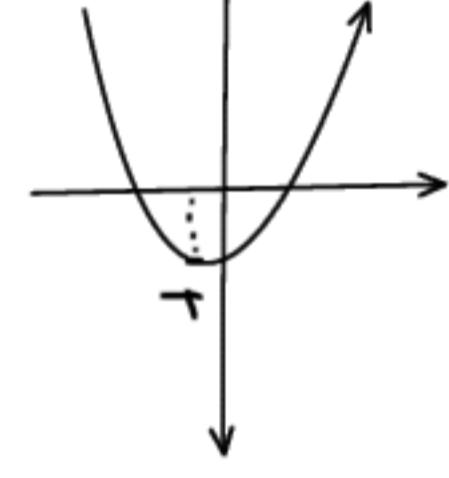
$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$

$$= \left[a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \right]$$

$x = \frac{-b}{2a}$, $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$

$T = (r, k)$

$r = \frac{-b}{2a}$, $k = f(r) = \frac{4ac - b^2}{4a}$



RASYONEL FONKSİYON

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $P(x)$ ve $Q(x)$ polinom fonksiyon

$Q(x) \neq 0$ old. noktalar Tanım kumesini oluşturur.

ÖR \mathbb{R} 'sini bulunuz.

i) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2-x-6}$ $\mathbb{R} = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

ii) $g(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x^2-9}}$

iii) $h(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$

iv) $r(x) = \sqrt[3]{\frac{2-x}{x^2-9}}$

v) $t(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $\mathbb{R} = \mathbb{R}$

FONKSİYONLARDA İŞLEMZER

* Fonksiyonlarda işlemler aslında $f+g$ olarak düşünüldüğünde bir anlam ifade etmez, ancak bir nokta üzerinden fonksiyonlarda işlem yapabiliriz. $(f+g)(x)$

\therefore Fonksiyonlarda çıkarma işlemi sade farklı dayanır

BİLEŞKE FONKSİYON



$f(x)$ x 'leri taşırken

$g(f(x)) \rightarrow f(x)$ lerini taşır

! gof varken fog tanımlı olmaya bilir
 $gof \neq fog$ old.
dikkat ediniz.

- $f(x) = k$ sbt
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = k \cdot g(x)$
- $k = -1$ alırsak
- $(-1 \cdot g)(x) = -1 \cdot g(x) = -g(x)$
- $(f + (-g))(x) = (f - g)(x)$

$$\tau \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = 2x - 3$$

$f \circ g, g \circ f$ vardır (ikisi de tanımlı polinom fonksiyon)

$$f(g(x)) = (2x - 3)^2 + 1, \quad g(f(x)) = 2(x^2 + 1) - 3 = 2x^2 - 1$$

Birim (Özdeslik) Fonksiyon

$\forall x \in A, f(x) = x$ f özdeslik (birim) fonk denir.

$$I(x) = x$$

* Bir noktadan neden sonsuz doğru geçer?

* İki nokta neden \perp doğru belirtir?

$y = mx + n$ (x_0, y_0) biliniyor
 m ve n bilinmiyor
 m ve n 'e değerler verilir

$y_0 = mx_0 + n$
 $y_1 = mx_1 + n$
 Denklem çözülür
 \perp denklemi elde edilir

$n = 1 - 3m, m=0$ ise $n=1$ $y=1$
 $m=1$ $n=-2$ $y=x-2$
 \vdots \vdots $y=\dots$

1 noktası sonsuz doğru
geçer

14 Ekim NOTLAR

PARGALI FONKSİYON

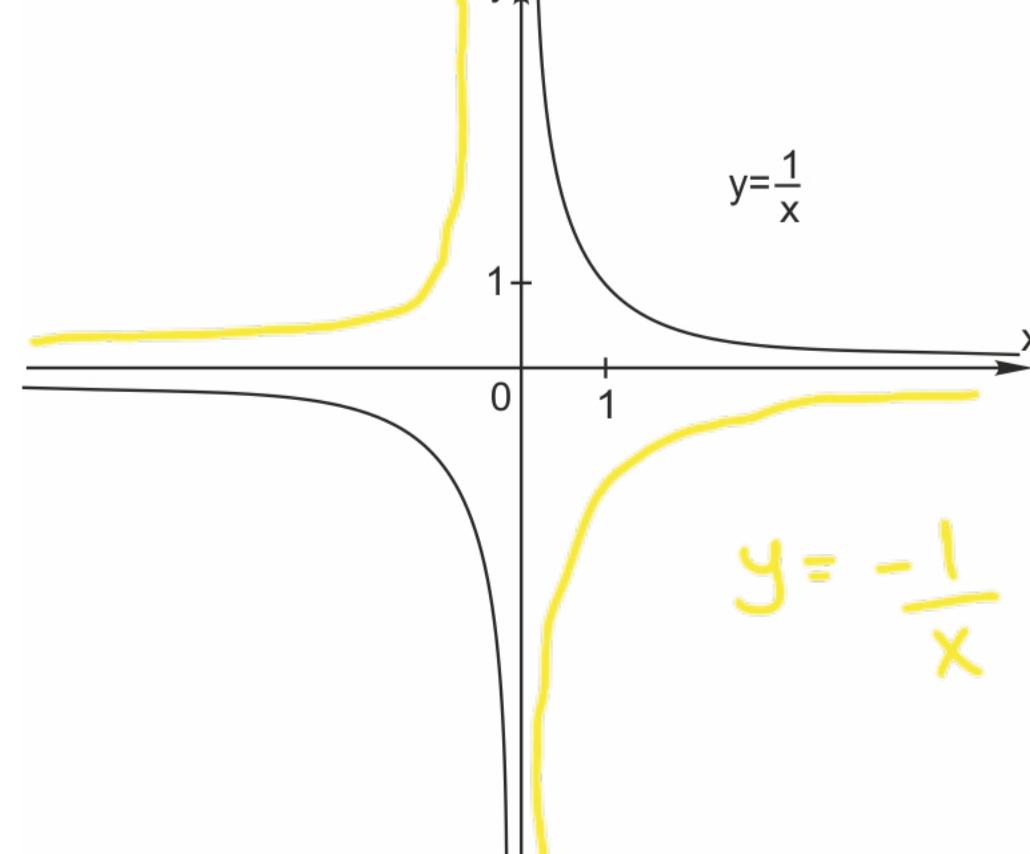
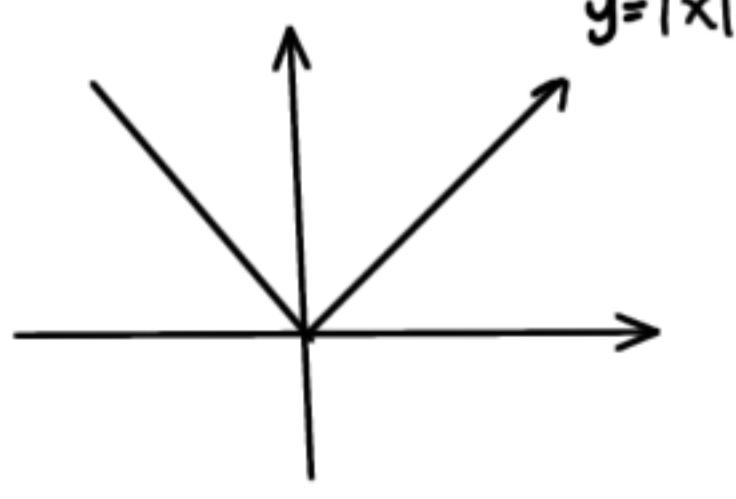
A_1, A_2, \dots, A_n ikiser ikiser ayrık kümeler olsun $f_i: A_i \rightarrow \mathbb{R}$,
 $y_i = f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) birer fonksiyon o.ü.

$$f: A_1 \cup \dots \cup A_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 \\ \vdots \\ f_n(x), & x \in A_n \end{cases}$$

ÖRN:

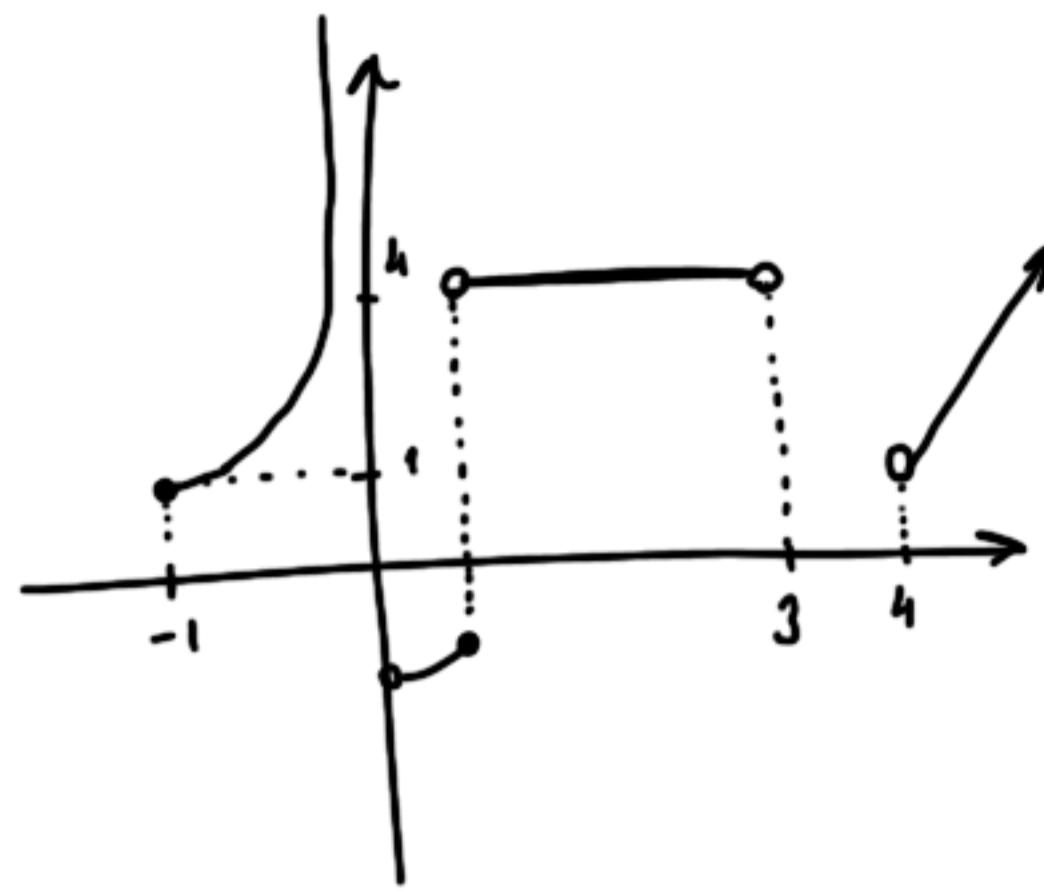
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

NOT: $y = \frac{1}{x}$ hiperbol $\tau \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{0\}$



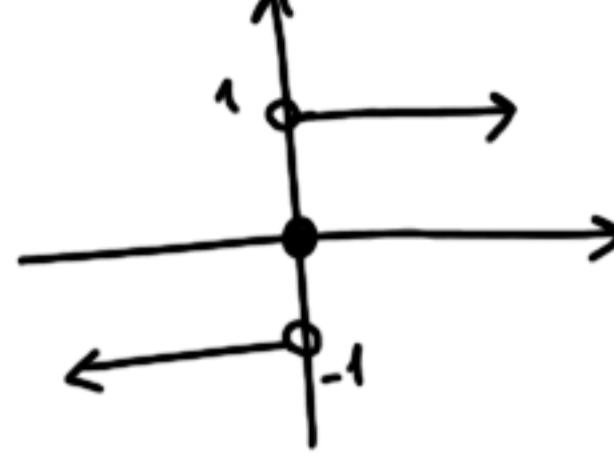
ÖR: $f(x)$ grafğini çiziniz.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & -1 \leq x < 0 \\ x^2 - 2, & 0 \leq x < 1 \\ 4, & 1 \leq x < 3 \\ x - 2, & x \geq 3 \end{cases}$$

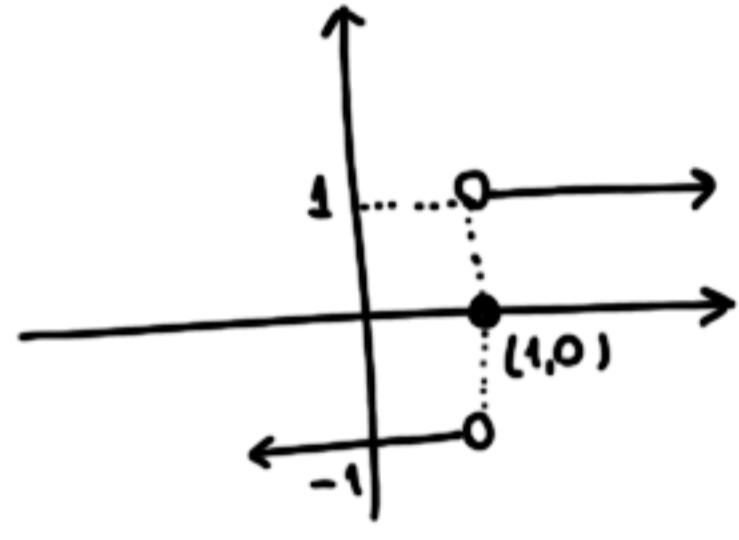


İSARET FONKSİYONU

$$\operatorname{sgn} f(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > 0 \\ 0, & f(x) = 0 \\ -1, & f(x) < 0 \end{cases}$$



ÖR: $\operatorname{sgn}(x-1)$ fonk. grafğini çiz.



$$\operatorname{sgn}(x-1) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$$

NOT:

- $y=0$ x ekseni denklemi
- $x=0$ y ekseni denklemi

TAM DEĞER FONKSİYONU

Tam değer: n , bir tam sayı $n \leq x < n+1$ eşitsizliğini sağlayan n sayısına x 'in tam değeri denir.

$\llbracket x \rrbracket = n$ ile gösterilir 1 br x 'in değişim aralığının uzunluğu

$$\llbracket 2,1 \rrbracket = 2$$

$$\llbracket 2,9 \rrbracket = 2$$

$$\llbracket -2,1 \rrbracket = -3$$

$$\llbracket -3,999 \rrbracket = -4$$

$\llbracket ax \rrbracket = \frac{1}{a}$ br x 'in değişim aralığının uzunluğu

$\llbracket \frac{1}{a}x \rrbracket = a$ br x 'in " " " "

ÖR: $\llbracket x \rrbracket$, $[-2,2]$ aralığında parçalı fonk. olarak yazınız.

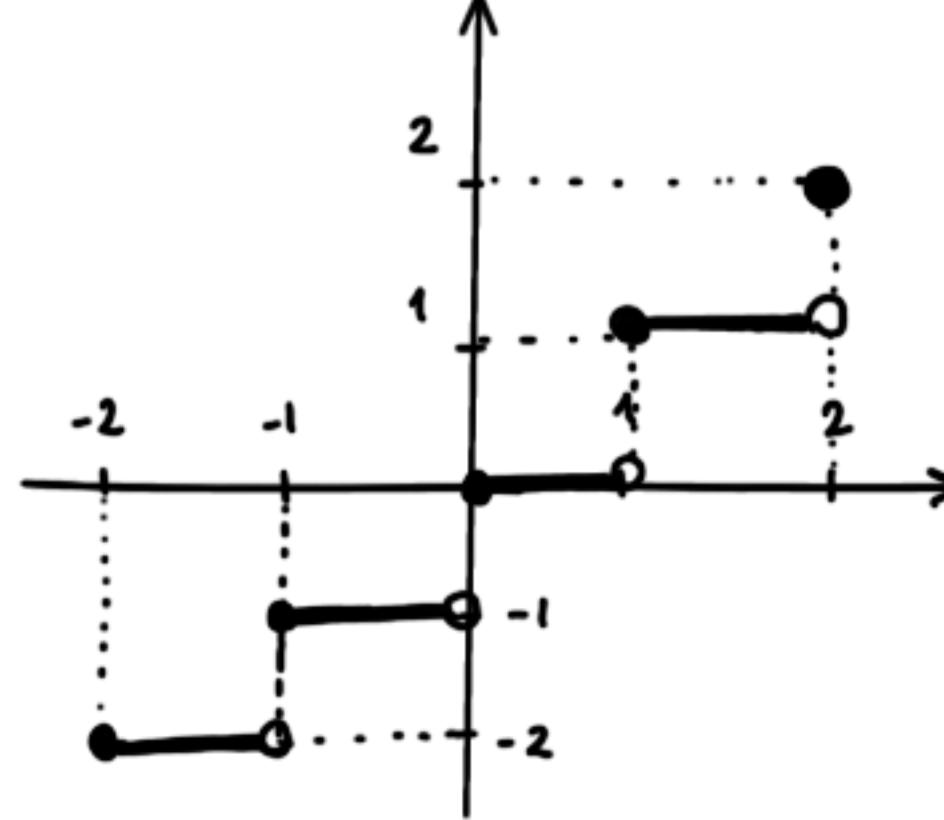
$$-2 \leq x < -1 \quad \llbracket x \rrbracket = -2$$

$$-1 \leq x < 0 \quad \llbracket x \rrbracket = -1$$

$$0 \leq x < 1 \quad \llbracket x \rrbracket = 0$$

$$1 \leq x < 2 \quad \llbracket x \rrbracket = 1$$

$$x=2 \quad \llbracket x \rrbracket = 2$$



ÖR: $\llbracket 2x \rrbracket$, $[-2, 2]$

x^1 in deq. aralıksızlığı $\frac{1}{2}$ br sayılır

$$-2 \leq x < -\frac{3}{2} \rightarrow -4 \leq 2x \leq -3 \quad \llbracket 2x \rrbracket = -4$$

$$-\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \rightarrow -3 \leq 2x \leq -1 \quad \llbracket 2x \rrbracket = -3$$

BİREBİR FONKSİYON

$$y = f(x)$$

* $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ise
f birebir fonk. değildir.

Yada

* $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ise
f birebir fonk. denir

ÖR: $f(x) = x \rightarrow$ birebir

$f(x) = x^2 \rightarrow$ birebir değil

$y = a^x \quad a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$
($a \neq 1$) ise birebir

ÖRTEŞİ FONKSİYON

$$f: A \rightarrow B$$

$\forall b \in B$ için $f(a) = b$ olacak
bicimde $a \in A$ varsa f,
örter fonk. denir.

$f(A) = B$ ise örter fonk.

FONKSİYONUN TERSİ

$$f: A \rightarrow B, \quad g: B \rightarrow A$$

$$A \rightarrow B \rightarrow A \quad \text{gof: } IA$$

gof

Eğer bir fonk 1-1 ve
örter ise TERSİ vardır.

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$$

$$B \rightarrow A \rightarrow B \quad \text{fog: } IB$$

fog

Logaritma fonk. üstel fonk.'nın tersidir

$$f: R \rightarrow R^+ \quad f(x) = a^x = y$$

$$x = a^b \rightarrow b = \log_a x$$

$$\log_a: R^+ \rightarrow R$$
$$x \rightarrow \log_a x$$

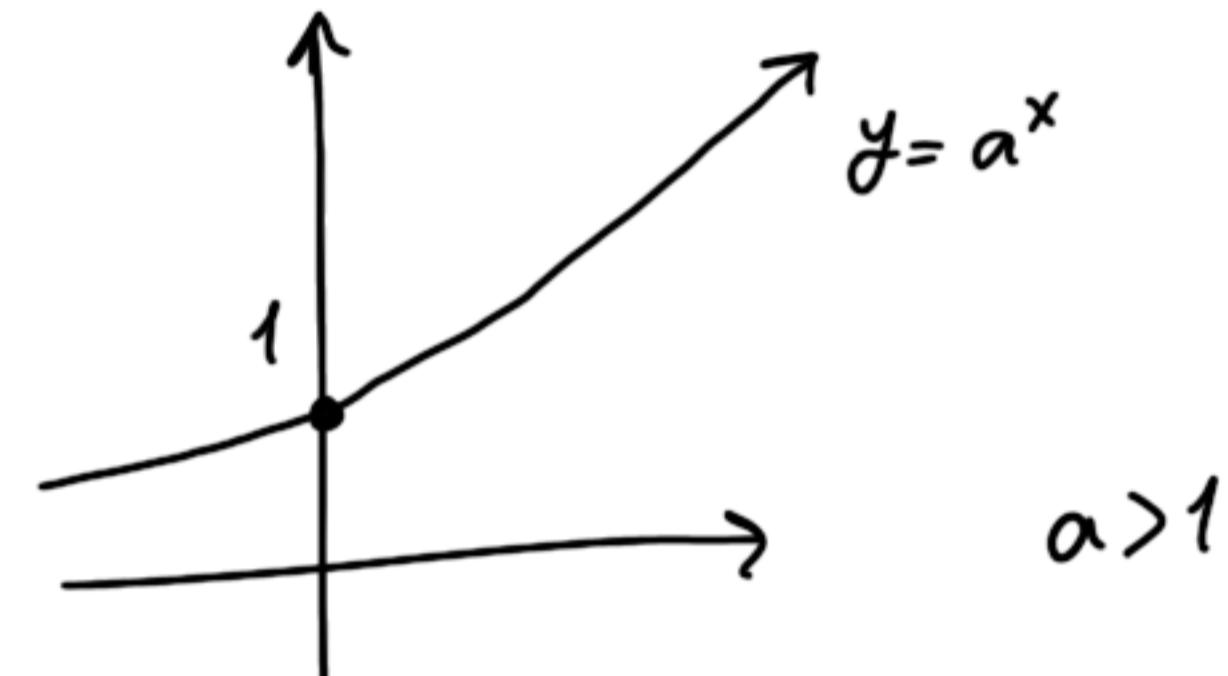
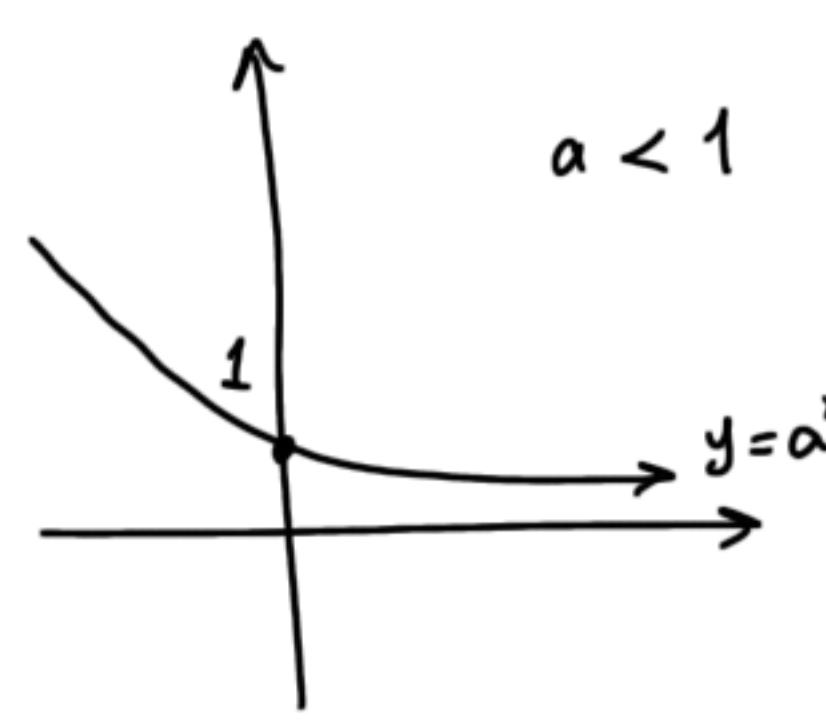
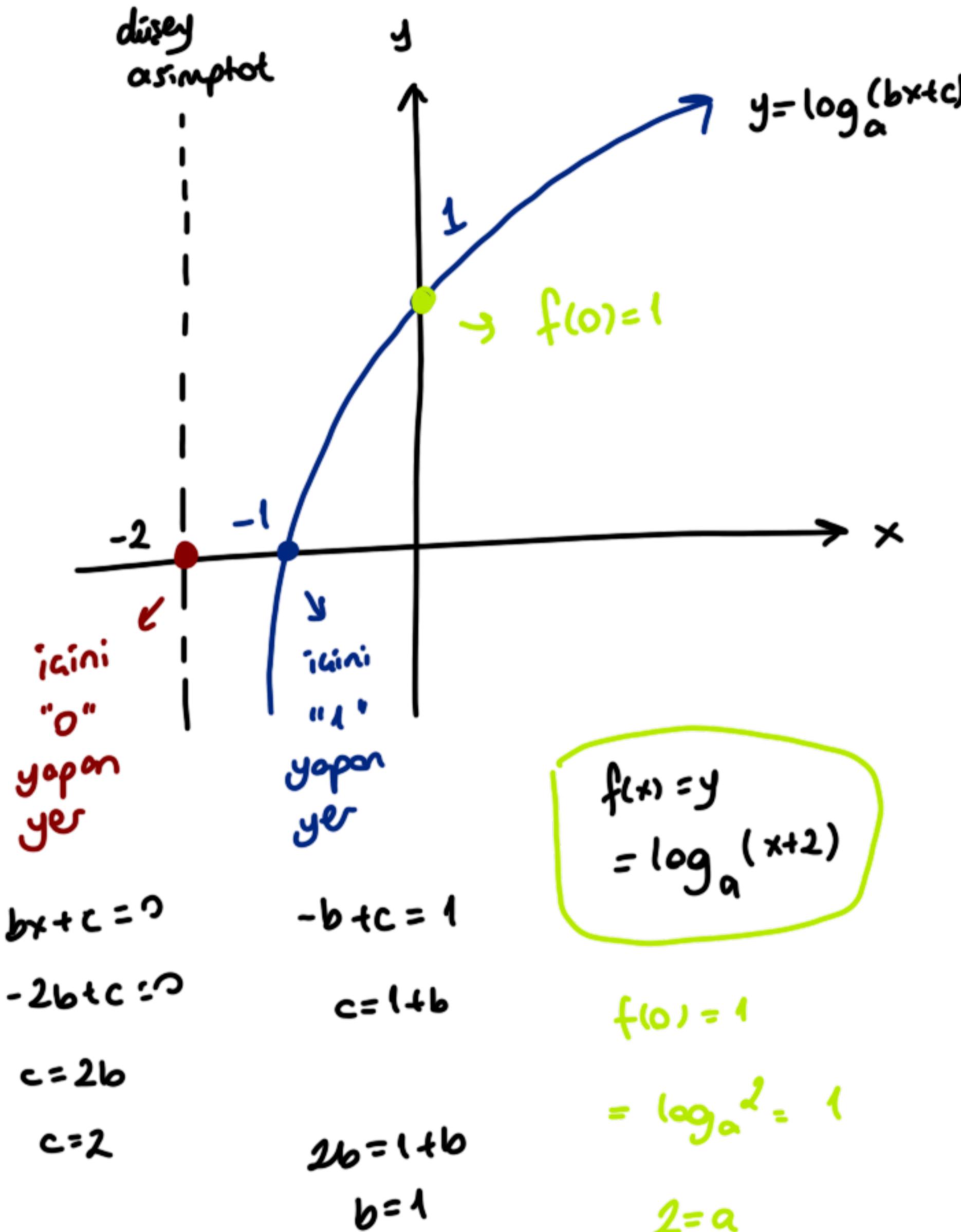
ÜSTEL VE LOGARİTMİA FONKSİYON

$a \neq 1$ pozitif $f: R \rightarrow R$
 $f(x) = y = a^x$, $f: R \rightarrow R^+$

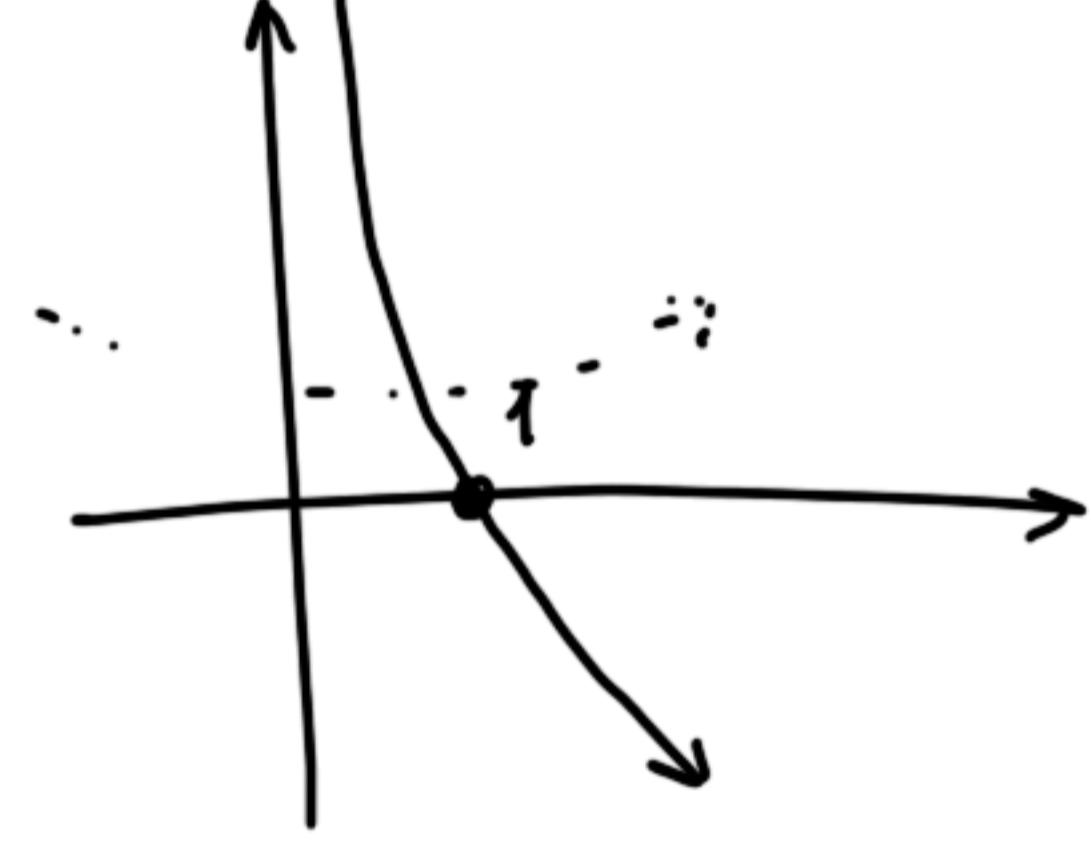
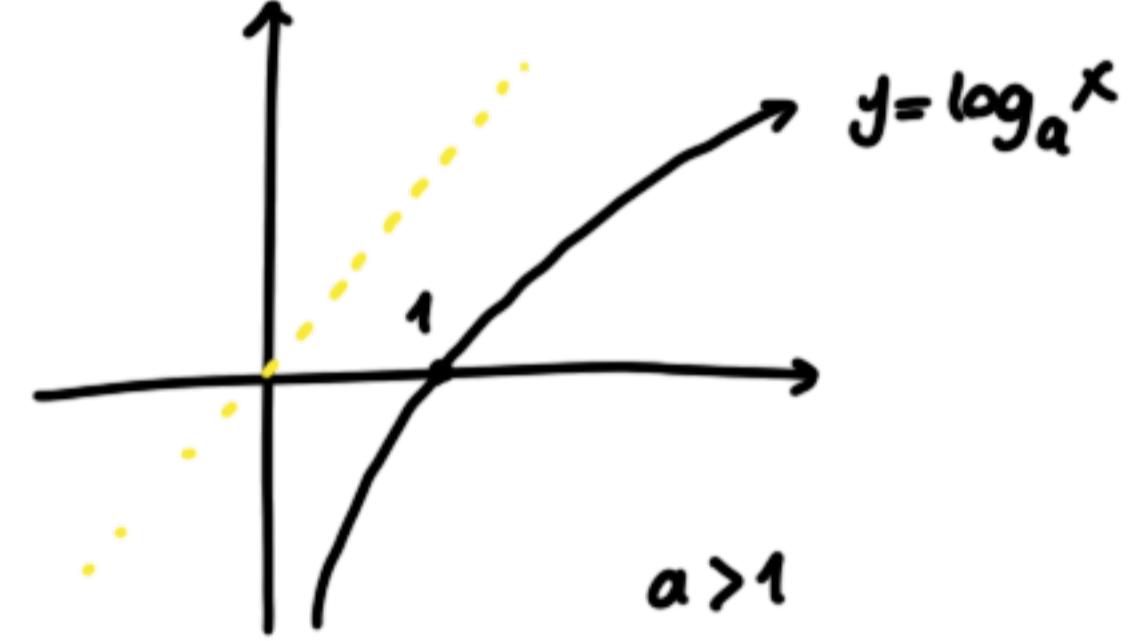
$$f(x) = 2^x$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

* $f(x) = (-2)^x$ üstel fonk. değil!!!



Logaritma Grafiği



$$\log_a^x = y$$

$$0 < a < 1$$

- * NOT: Logaritma fonk.
- * $x \in R^+$ da tanımlıdır. x - yönde artmaz.
- * $0 < x < 1$ aralığında logaritma sonucu negatiftir.
- * x değeri $+ \infty$ - yönde sınırsız arttığında y değeri de sınırsız artar.
- * $\log_a 1 = 0$ $(x, y) = (1, 0)$ log fonk. hizasına $(1, 0)$ noktası geçer.

$$e = 2,718\ldots$$

DOĞAL LOGARİTMA

Logaritma Özellikleri

Örnek: TK nedir? Fonk işaretleri?

İşaretlerini inceleyiniz.

$$1) f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$$

$$5) \ln \frac{1}{1+x^2}$$

$$a) f(x) = e^x$$

$$2) f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$6) f(x) = 2^{\ln x}$$

$$b) f(x) = \ln x$$

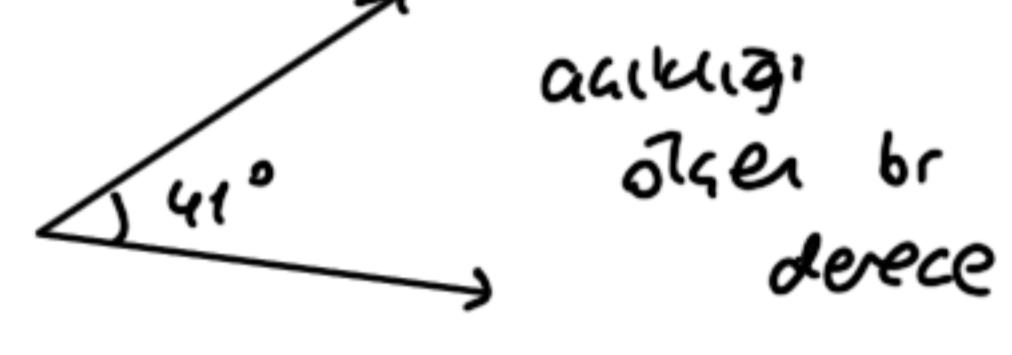
$$3) f(x) = \ln x + e^x$$

$$c) f(x) = \log x$$

$$4) f(x) = \frac{1}{\log x - 1}$$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Açı: Aynı başlangıç noktaları iki işinin birleşimi.

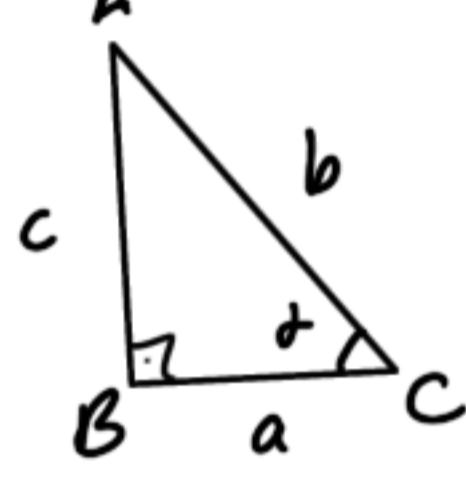


$$2\pi = 360^\circ$$

$$\frac{G}{400} = \frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi}$$

$$\frac{G}{200} = \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

* Radyan reel sayılarla olduğu için hesaplama yapılırken radyan kullanılır



$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \cos x, \quad \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\phi}{2}\right) = \sin \theta \cdot \cos \phi$$

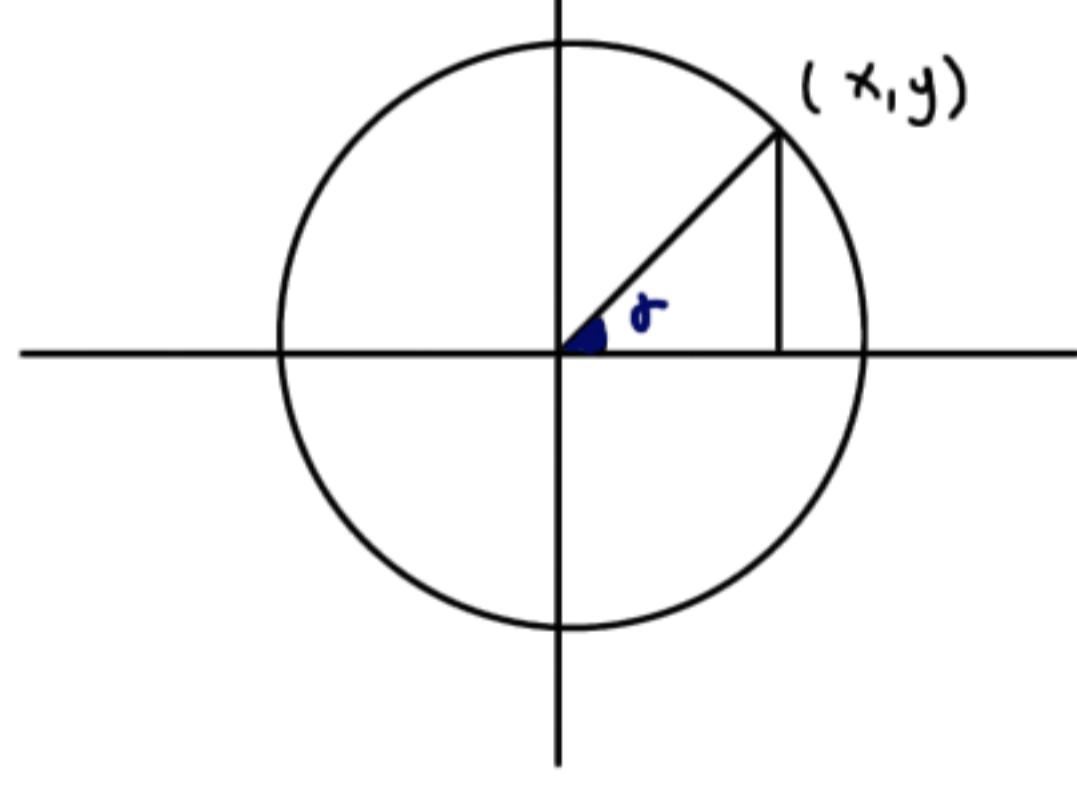
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad 1 - 2 \sin^2 \alpha, \quad 2 \cos^2 \alpha - 1,$$



α tüm reel sayıları alır, açı kaç derece olursa olsun radyan buna müsade eder.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TANIM ARALIKLARI

$$\cos x =$$

$$\sin x$$

$$\tan x$$

$$\cot x$$

$$R \rightarrow [-1, 1]$$

$$R \rightarrow [-1, 1]$$

$$R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow R$$

$$R - \left\{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow R$$

Soru: $f(x) = \frac{\tan x}{\frac{1}{2} - \sin x}$ 0,ü. $f(x)$ fonk. $[0, 2\pi]$ aralığında tanimsız olduğu değerleri bulunuz.

$$\frac{1}{2} - \sin x \neq 0$$

$$\frac{1}{2} \neq \sin x \quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$\tan x$ 'in $[0, 2\pi]$ aralığında tanimsız olduğu x değerleri

$\tan x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$\frac{\sin x}{\cos x} \neq 0 \quad x = 90^\circ, 270^\circ$

Soru: $\sin^2 x - 5\sin x + 6$ fonksiyonun $GL = ?$

$$f(x) = \sin^2 x - 5\sin x + \frac{25}{4} + \frac{1}{4} = \left(\sin x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$[2, 12] \quad 12 \leq \left(\sin x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq 2 \quad \leftarrow \frac{49}{4} \leq \left(\sin x - \frac{5}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} \quad \leftarrow$$

Soru:

$$f(x) = \frac{2}{3\sin x + 4} \quad GL = ?$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$1 \leq 3\sin x + 4 \leq 7$$

$$\frac{1}{7} \leq \frac{1}{3\sin x + 4} \leq 1$$

$$\frac{2}{7} \leq \frac{2}{3\sin x + 4} \leq 2 \quad \left[\frac{2}{7}, 2\right]$$

Soru:

$$f(x) = |2\sin x| + 12\cos x \quad GL = ?$$

$$f^2(x) = (2|\sin x| + 12\cos x)^2$$

$$= 4\sin^2 x + 8|\sin x||\cos x| + 4\cos^2 x$$

$$= 4(\sin^2 x + \cos^2 x) + 4|2\sin x \cos x|$$

$$= 4 + 4|\sin 2x|$$

Soru:

$$f(x) = 2\cos^4 x + 2\sin^2 x$$

$$\cos^4 x = \cos^2 x (1 - \sin^2 x)$$

$$\cos^2 x = \cos^2 x \sin^2 x$$

$$(1 - \cos^2 x)$$

$$\cos^2 x = \cos^2 x + \cos^4 x$$

$$f(x) = 2\cos^2 x (1 - \sin^2 x) + 2\sin^2 x$$

$$= 2\cos^2 x - 2\cos^2 x \sin^2 x + 2\sin^2 x$$

$$= 2 - 2\cos^2 x \sin^2 x$$

$$= 2 - \frac{1}{2} (2\sin x \cdot \cos x)^2$$

$$= 2 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)$$

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1$$

$$0 \leq |\sin 2x| \leq 1$$

$$0 \leq 4|\sin 2x| \leq 4$$

$$4 \leq 4|\sin 2x| + 4 \leq 8$$

$$4 \leq f^2(x) \leq 8$$

$$2 \leq f(x) \leq 2\sqrt{2}$$

$$GL [2, 2\sqrt{2}]$$

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1$$

$$0 \leq \sin^2 2x \leq 1$$

$$2 - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} \sin^2 2x \leq 0 + 2$$

$$\frac{3}{2} \leq f(x) \leq 2 \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

Trigonometrik Fonksiyonların Periyotları

$$\cos x = \quad x = (2k+1) \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$TK : \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \right\}$$

$\sin x$

$$\begin{aligned} \sin(x+2\pi) &= \sin x \cdot \cos 2\pi + \sin 2\pi \cdot \cos x \\ &= \sin x \end{aligned}$$

2π periyotlu periyodik fonk

$\tan x$

$$y = \tan x, \quad \tan(x+\pi) = \tan x \quad \pi \text{ periyotlu}$$

2π periyotlu

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$\cot x$

$$y = \cot x, \quad TK : \mathbb{R} - \{k\pi\}$$

$$y = \sec \text{ gift fonk} \quad y = \csc = \frac{1}{\sin}$$

$$= \frac{1}{\cos x}$$

Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

• **örten fonk:** TK deti her bir elemen DK her elemeni kapatacak.

• **Birebir :**

$x_1 \neq x_2$ old. $f(x_1) \neq f(x_2)$, f , 1-1 dir.

$$f(x_2) = f(x_1) \rightarrow x_1 = x_2 \text{ ise}$$

• $y = \sin x, f : \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$ fonk. birebir midir?

$$\sin(\pi) = 0 = \sin 0 \quad 0 \neq \pi \quad \sin 0 = \sin \pi$$

• **Ters fonk**, 1-1, örten ise var.

$$f^{-1}f = I, \quad (f \circ f)^{-1}(x) = x, \quad f \circ f^{-1}(x) = I, x$$

• \sin fonk. birebir ve örten olmadığı için TK'si olmaztur ve tersi bulunur.

$$y = \sin x, \quad f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow [-1,1]$$

$$f^{-1} : [-1,1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = f(x) = \arcsin x = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin y$$

* $y = x$ doğrusuna göre simetiktir.

$$y = \cos x, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \quad x \rightarrow f(x) = \cos x$$

* $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \quad x \rightarrow f^{-1}(x) = \arccos x = \cos^{-1}(x)$

$$x = \cos y \Rightarrow y = \arccos x$$

$y = \tan x, \quad f^{-1}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

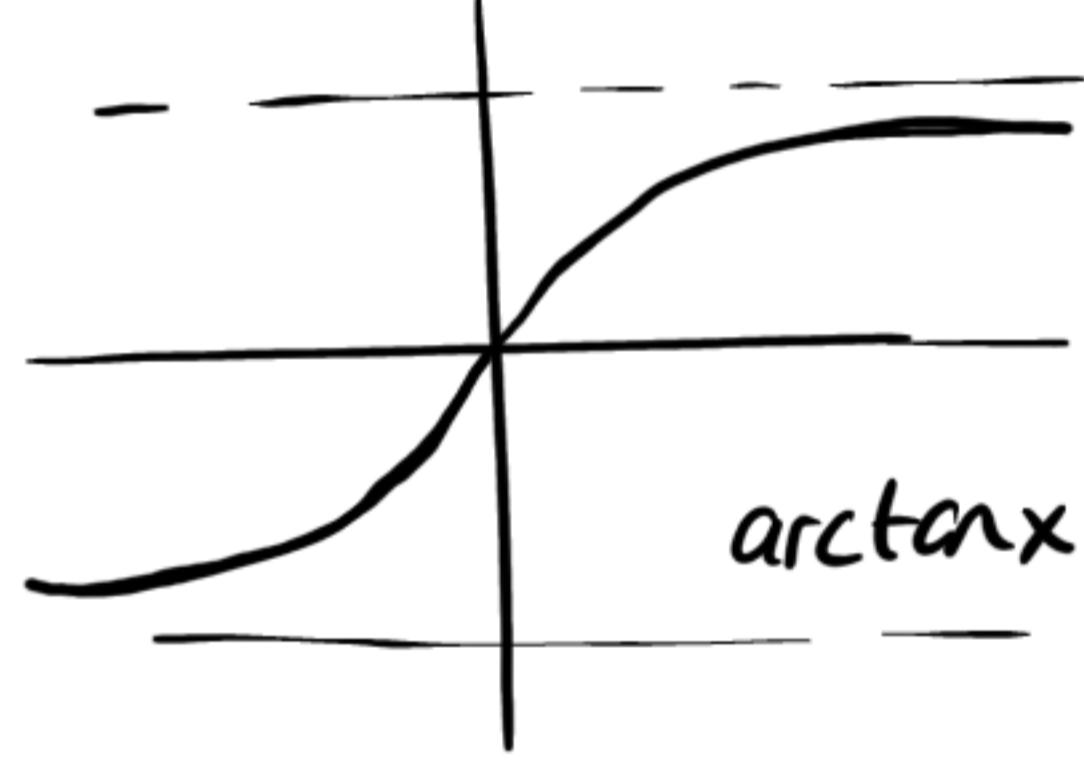
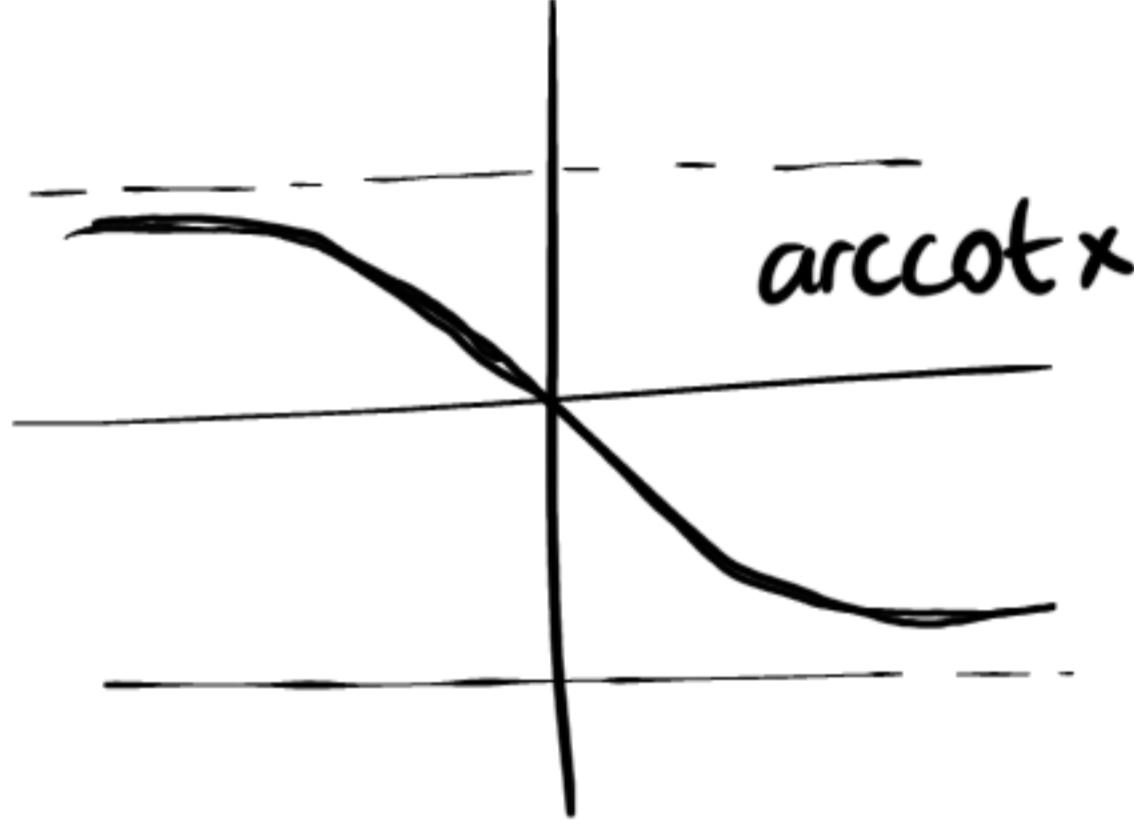
$$f: \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{-1}(x) = \arctan x, \quad y = \arctan x$$

$$x = \tan y$$

$y = \cot x \Rightarrow y = \operatorname{arccot} x$



Örn: $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ old. gösteriniz.

$$\begin{aligned} \tan a &= \frac{1}{2} \\ \tan b &= \frac{1}{3} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1 \\ \tan(a+b) &= 1 \end{aligned} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Sonuç}}$$

Örn:

$$\arcsin(x+3) = \frac{\pi}{3}$$

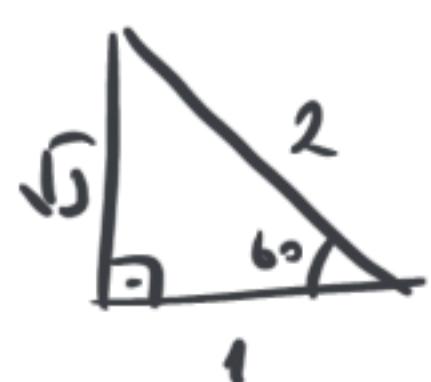
$$\text{Örn: } \arctan(x^2 - 1) = \rho$$

$$x+3 = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$x^2 - 1 = \tan \rho$$

$$x+3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 - 1 = 0$$



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} - 3$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 \\ x &= 1, -1 \end{aligned}$$

Hiperbolik Fonksiyonlar

$$y = a^x \longrightarrow y = \log_a x$$
$$y = e^x \longrightarrow y = \ln x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{hiperbolik cosinus fonk.}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\begin{aligned} chx + shx &= e^x \\ chx - shx &= e^{-x} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} chx^2 - shx^2 = 1 \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{array} \right\}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{ember}$$

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{hiperbol}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

⋮ ⋮ ⋮

$$\ch(a+b) = \ch a \cdot \ch b + \sh a \cdot \sh b$$

Tanım Aralıkları

$$y = e^x, x \in \mathbb{R}$$

* $y = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty), f(x) = chx$

* $y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

NOT: $f(x+\tau) = f(x), sh(x+\tau) \stackrel{?}{=} shx$ periyodu yoktur.

$$\begin{aligned} sh(x+y) &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} \\ &= shx \cdot chy + shy \cdot chx \end{aligned}$$

Ters Fonksiyonların Bulma

$$y = e^x \Rightarrow \ln y \quad , \quad y = \ln x$$

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow x = ? \quad x = f^{-1}(y)$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$2ye^x = e^{2x} - 1$$

$$t_1 = y + \sqrt{1+y^2}$$

$$t_2 = y - \sqrt{1+y^2}$$

$$2y = e^x - e^{-x}$$

$$e^x = t$$

$$e^x = y + \sqrt{1+y^2}$$

$$2y = e^x - \frac{1}{e^x}$$

$$0 = t^2 - 2yt - 1$$

$$e^x = y - \sqrt{1+y^2}$$

$$2y = \frac{e^{2x}-1}{e^x}$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \ln(y + \sqrt{1+y^2}), \quad x = \ln(y - \sqrt{1+y^2})$$

negatif

$$f^{-1}(x) = \ln(x - \sqrt{1+x^2})$$

log iki negatif olmaz !!!

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad f^{-1}(x) = ?$$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$2yt = t^2 + 1$$

$$t_1 = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$0 = t^2 - 2yt + 1$$

$$t_2 = y - \sqrt{y^2 - 1}$$

$$y = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2}$$

$$\Delta = (-2y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 4y^2 - 4$$

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

$$2ye^x = e^{2x} + 1$$

$$\frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$e^x = t$$

$$\frac{2y \pm 2\sqrt{y^2 - 1}}{2}$$

$$y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

$$y = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \Rightarrow \operatorname{arccoth} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{x-1} \right|$$

Limit

Limit: x değişkeni gesitli değerler ararak bir a sayısına yaklaşıyor ve sonucta a sayısı ile arasındaki fark çok küçük kalıyorsa a' ya değişkenin limiti denir.

$|x-a| < \epsilon$ (ϵ Epsilon) ile gösterilir

$\epsilon > 0$
çok küçük bir sayı

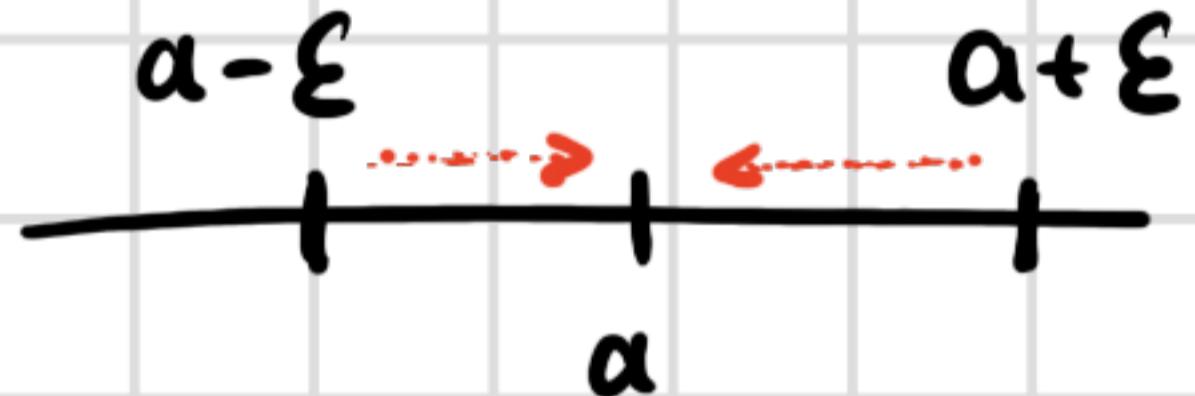
$|x-a| < \epsilon, x \rightarrow a, \lim x = a$

ile gösterilir

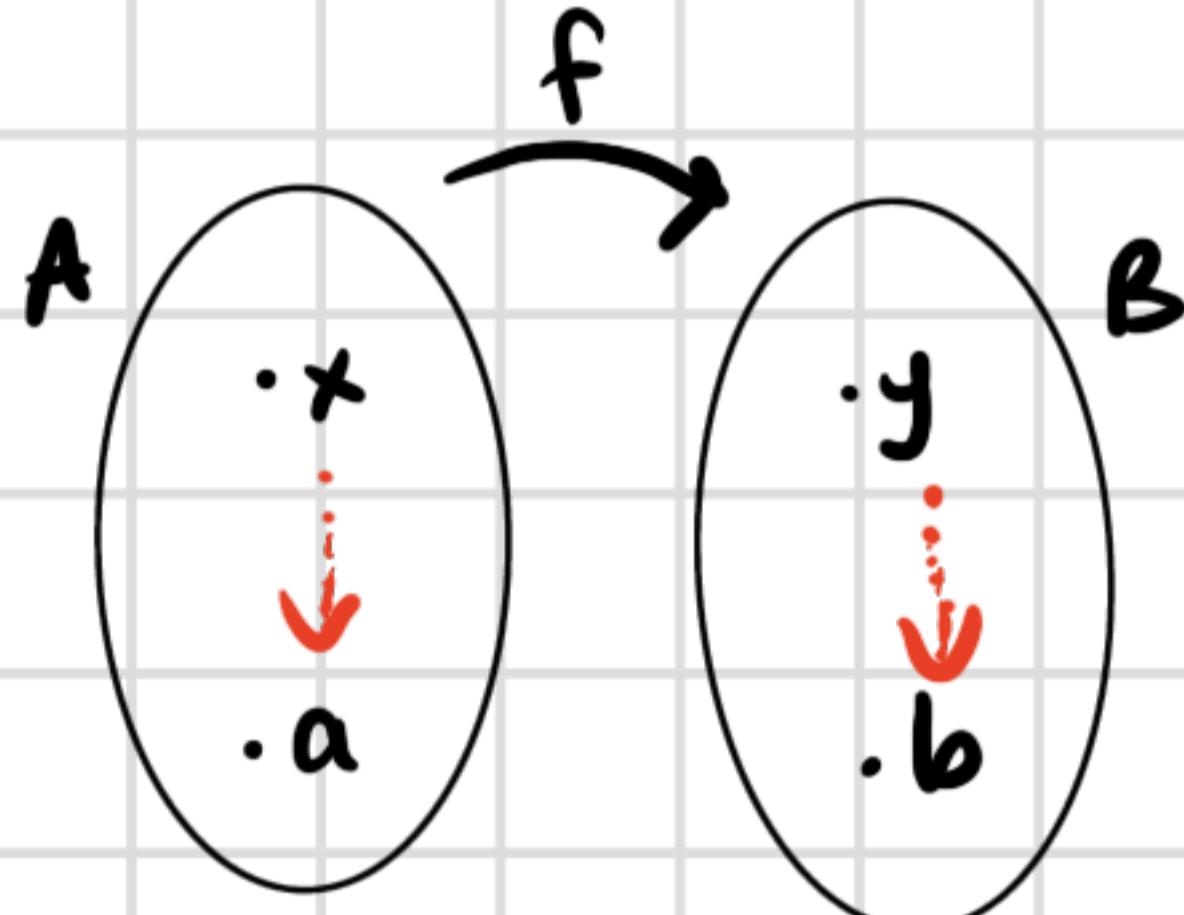
$|x-a| < \epsilon$

$-\epsilon < x-a < \epsilon$

$a-\epsilon < x < a+\epsilon$ yazılır



fonsiyonun Limiti



$$y = f(x), x = a$$

noktasının komşuluğunda tanımlı bir fonksiyon olsun ($x=a$ noktası tanımlı olabilir veya olamayabilir.)

$(x-a) < \delta$ olduğunda $|f(x) - b| < \epsilon$ olacak biçimde bir $\delta = \delta(\epsilon)$ (ϵ 'a bağlı δ sayısı) versə, $x \rightarrow a$ iken $f(x) \rightarrow b$ limitine yaklaşıyor denir.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

ile göst.

a ve b sonlu sayı olmak zorunda

İSPAT

$\lim_{x \rightarrow 1} (2x+3) = 5$ olduğunu gösteriniz.

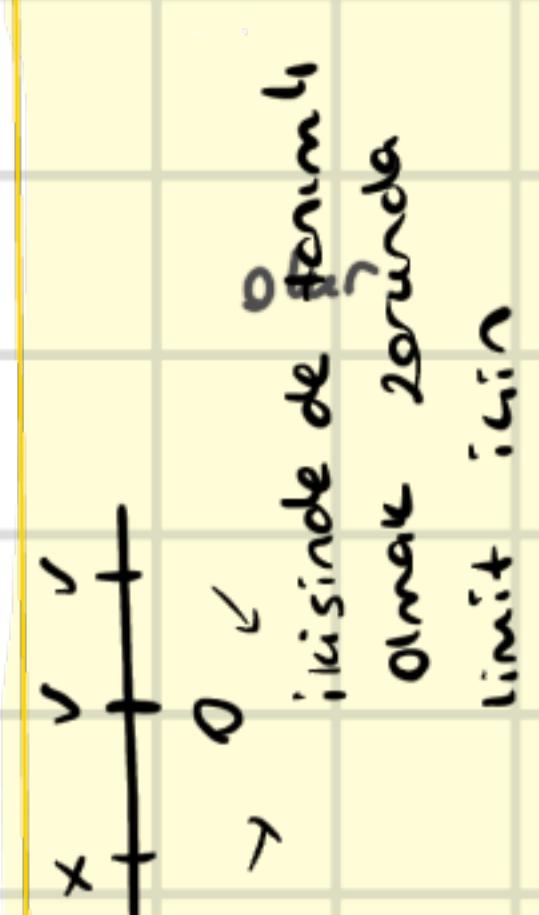
$|x-1| < \delta$ iken $|2x+3-5| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısını bulmamızı.

$$|x-1| < \delta, \quad |2x+3-5| = |2x-2|$$

$$2|x-1| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ alınırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x+3) = 5$$



$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$
limit hesaplanınız

Sonsuz Küçük - Sonsuz Bütün

$x \rightarrow 0$ limitine yaklaşma sonsuz küçük

$$|x| < \varepsilon \Leftrightarrow x \rightarrow 0$$

Sonsuza yaklaşma: $N > 0$ yeteri kadar büyük bir sayı, x değişkeni $|x| > N$ ise x 'in sonsuza yaklaştığını söyleziz.

$$x \rightarrow \infty$$

$$x > N, \quad x \rightarrow +\infty$$

$$x < N, \quad x \rightarrow -\infty$$

* $x_1=1, x_2=2 \dots, x_n=n$ değerlerini alan bir x değişkeni $+\infty$ 'a yaklaşır.

* $x_1=-1, x_2=-2, \dots, x_n=-n$ $-\infty$ yaklaşır

Limit Özellikleri (Limit Tersi ise)

i) $f(x)=c, \lim_{x \rightarrow a} f(x)=c$

ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=b_1, \lim_{x \rightarrow a} g(x)=b_2$

$$\begin{aligned} & \lim [f(x) \pm g(x)] \\ &= \lim f(x) \pm \lim g(x) \end{aligned}$$

$$x \rightarrow a$$

$$x \rightarrow a$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = b_1 \cdot b_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1}{b_2} \quad b_2 \neq 0$$

$$iv) f(x) = a^{g(x)} \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} a^{\lim_{x \rightarrow b} g(x)}$$

$$f(x) = \log_a g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} [\log_a g(x)]$$

$$\log_a \left[\lim_{x \rightarrow b} g(x) \right], \quad \lim_{x \rightarrow b} g(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$$

$\frac{0}{0}$ görülmenden istenir
yapılmaz

irrasyonel fonk için de
geçerlidir

$$P(x) = (x-a)^k \cdot P_k(x), \quad P_k(a) \neq 0$$

ÖRN:

$$Q(x) = (x-a)^r \cdot Q_r(x), \quad Q_r(a) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+1}{x+1} \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^k \cdot P_k(x)}{(x-a)^r \cdot Q_r(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = -2$$

$$\frac{P_k(a)}{Q_r(a)}, \quad r=k$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x+1} \quad \frac{0}{0}$$

$$\infty, \quad r > k$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)} = 1$$

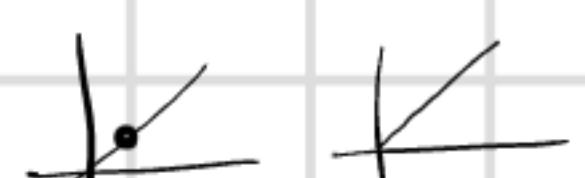
$$0, \quad r < k$$

Soru: $y = f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ fonk. ile $f(x) = x+1$ fonk. arasındaki

fonk. nedir? TK. lei farklıdır

1. $TK = R - \{1\}$

2. $TK = R$



Soru: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x + 8}{x - 4}$ payda sıfır yaklaşıyor
sonsuzya yaklaşır

Soru: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \frac{0}{0}$

1.yol
 $x = t^6$ diyetim $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \lim_{t^6 \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{t^6 - 1} = \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{1}{2}$

$$t^6 = \frac{1}{2}$$

Soru: $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} = \frac{0}{0}$

$x = t^6$ $\frac{t^3 - 8}{t^2 - 4} = \frac{(t-2)(t^2+t+4)}{(t-2)(t+2)} = \frac{t^2+t+4}{4} =$

$\sqrt[3]{x} = t^2$

$\sqrt[6]{x} = t$ *18

$b \in \sqrt[6]{t^6}$

Soru:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 2t + 1}{(t^3 - 1)^2}$$

$x = t^3$ $\frac{t^2 - 2t + 1}{(t^3 - 1)^2} = \frac{(t-1)(t-1)}{(t^3 - 1)(t^3 - 1)} = \frac{(t-1)(t-1)}{(t-1)(t-1)(t^2 + t + 1)^2} = \frac{1}{(t^2 + t + 1)^2} = \frac{1}{9}$

Soru: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+h} - \sqrt{2x}}{h}$

Not: eslenik

Kareköklü ifadelerde

olur. $(a+b)$ nin esleniği

$a-b$ degildir

$(a+b)(a-b) > 0$ olabilir.
 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$= \frac{(\sqrt{2x+h} + \sqrt{2x})}{(\sqrt{2x+h} + \sqrt{2x})} \cdot \frac{\sqrt{2x+h} - \sqrt{2x}}{\sqrt{2x+h} - \sqrt{2x}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x+h - 2x}{h(\sqrt{2x+h} + \sqrt{2x})} = \frac{1}{2\sqrt{2x}}$$

Soru: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) - \sqrt[3]{x^3+1}}{x} = \frac{0}{0}$

$$\frac{(x+1) - \sqrt[3]{(x+1)(x^2-x+1)}}{x} \quad \cancel{\sqrt[3]{(x+1)^3 - x^3 - 1}} \quad \text{hata}$$

$(\cancel{(x+1)} + \sqrt[3]{x^3+1})$ terim eşitir değil

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{a}{(x+1)} - \overset{b}{\sqrt[3]{x^3+1}}}{x}$$

$$(a-b)^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$(a-b)^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

LIMIT BELİRSİZLİK SORULAR

$\frac{0}{0}$ Belirsizliği Lopital ile Çözüm

*

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - b}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} = \frac{a}{8} \quad \text{old. gōne}$$

$\underbrace{}_{\frac{0}{0}}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+3)(x-2)}{(x^2+4)(x-2)} = \frac{a}{8}$$
$$\frac{7}{8} = \frac{a}{8} \quad a=7$$

*

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^2 - 18}{x-3} = b \quad a+b=? \quad 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 18}{x-3} = b$$
$$\frac{2(x^2-9)}{x-3} = b$$
$$\frac{2(x+3)(x-3)}{x-3} = b$$

*

Eşlenik ile Çözme

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3) - 4}{(\sqrt{x+3} + 2)(x-1)} = \frac{(x-1)}{(\sqrt{x+3} + 2)(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{4}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 12} \frac{(5 - \sqrt{2x+1}) (5 + \sqrt{2x+1})}{(x^2 - 7x - 60) (5 + \sqrt{2x+1})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 12} \frac{5 - \sqrt{2x+1}}{x^2 - 7x - 60} \quad \text{L'Hopital rule} \quad -\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{2x-7}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{5}}}{17} = -\frac{1}{85} \quad -\frac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}} \curvearrowleft$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) - (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \curvearrowleft$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{x-1} - 1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+7}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+7}}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{\frac{x}{2} + 5} - 3}{x-8} = \frac{\frac{1}{4\sqrt{\frac{x}{2} + 5}}}{1} = \frac{1}{12}$$

Trigonometric Limits

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{\sin x \cdot \cos x}$$

Lopital

$$\frac{0 - (-\sin 2x) \cdot 2}{\cos x \cdot \cos x + \sin x (-\sin x)}$$

Normal

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$0 = \frac{2 \sin 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \sin 2x}{1 - 2 \sin^2 x}$$

$$\frac{2 \sin 2x}{\cos 2x} = 2 \tan 2x = 2 \tan 0 = 0$$

*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \frac{(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos x)}$$

$$1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Lopital 76

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{-(-\sin x)}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x) - \sin(5x)}{x^3}$$

Lopital 76

$$\frac{5 \sec^2 5x - 5 \cos 5x}{3x^2} = \frac{5 (\sec^2 5x - \cos 5x)}{3x^2}$$

$$\frac{5(\sec^2 5x) - 5 \cos(5x)}{3x^2}$$

$$\frac{5.5 (\tan \cdot \sec x)^2 (5x) + 25 \sin(5x)}{6x}$$

1 kere data
tümü aynı fonksiyon

trig. if. sadelestirenlək
sonu data
kolay sörənilir.

*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(11x)}{\sin(5x)} \stackrel{0}{=} \text{bursmığı}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(11x)}{\cos(11x)}}{\sin(5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(11x)}{\cos(11x) \sin(5x)} \stackrel{x}{\times}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos(11x)} \cdot \frac{\sin(11x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin(5x)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos(11x)} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(11x)}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin(5x)} \right)$$

$$1 \cdot 11 \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x + \tan x} = ? \quad \frac{0}{0}$$

Lopital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos 2x}{1 + \sec^2 x} = \frac{2 \cdot \cos(0)}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Cözüm 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x + \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{x + \tan x}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{2}{1+1} = 1$$

Fonksiyonların Büyüme Hizları

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

$f(x)$, $g(x)$ 'terin hizla
büyüyorsa limit sonsuzdur.

$f(x)$, $g(x)$ 'terin daha
yavaş büyüyorsa limit
sıfırdır.

Eşit hızlarda büyüyorsa
limit sıfırdan farklı
bir reel sayıdır.

$\frac{\infty}{\infty}$ Lelirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{x}{3})}{4x - 5} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$$

$$(1 + \frac{x}{3})'$$

$$\frac{1 + \frac{x}{3}}{4} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{3}}}{\frac{3+x}{3}} = \frac{\frac{1}{3+x}}{4} = \frac{1}{12+4x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 10x}{\arcsin 5x} = \frac{0}{0}$$

$$\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{\frac{10}{\sqrt{1-(10x)^2}}}{\frac{5}{\sqrt{1-(5x)^2}}} =$$

$$\frac{10^2}{\sqrt{1-100x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-25x^2}}{5} = \frac{2\sqrt{1-25x^2}}{\sqrt{1-100x^2}} = 2$$

$$\star \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{5x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{\frac{x'}{x}}{\frac{1}{2}(5x)^{\frac{1}{2}} - 5} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{5}{2\sqrt{5x}}}$$

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{5}{2\sqrt{5x}}} = \frac{0}{\frac{5}{\infty}} = 0 \neq$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - 8}{\sin x} = 18$$

$$\frac{f'(0)}{f(0)}$$

limitin
tüm
olabılması için

$\frac{0}{0}$ tür

olaklı $f(x)=4$
 $f(0)=4$

polinom fonk tüm reel
sayılarda süreklili ve
türevlenebilirdir.

$$\frac{2f'(x)}{\cos x} = 18$$

$$f'(0) = 9$$

* $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x) = \infty - \infty \quad \text{belirsizlik}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x} \right) = \frac{0}{0}$$

L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \cos x}{-\sin x} = 0 \cdot \infty = 0$$

* $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) \quad \infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x+2} \right) = \frac{1}{4}$$

* $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

* $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3x + \tan \left(\frac{1}{4x} \right) \right) \quad 0 \cdot \infty \quad \text{belirsizlik}$

$$t = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{t}$$

$$x \rightarrow \infty \quad t \rightarrow 0 \quad \text{olar}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3x \tan\left(\frac{1}{4x}\right) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{3}{t} \tan\left(\frac{1}{4}t\right) \right)$$

$$= 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan\left(\frac{1}{4}t\right)}{t}$$

$$= 3 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{3}{4}$$

*

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cot(9x) \sin(5x)) = ? \quad \infty \cdot 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(9x) \cdot \sin(5x) \cdot x}{\sin(9x) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 9x} \cdot \frac{\sin 5x}{x} \cdot \cos 9x$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{9} \cdot 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 9x$$

Üstel Belirsizlikler

Limiti alınan ifade bir fonk. olarak tanımlanır.
 fonk. her iki tarafın önce doğal logoritması,
 sonra limiti alınır.

Elde edilen limit ifadesindeki üstel belirsizlik
 $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürülür.

L'Hopital kurallı ile ifadenin limit değeri bulunur.

ilk adında doğal logoritma alındığı için fonk
 limit değeri e^L olur

∞^0 Belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

$$y = x^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \quad \frac{\infty}{\infty} \text{ Belirsizliği}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$x \rightarrow \infty \quad \ln y = 0$$

$$\log_e y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{2^{x^2}} = ?$$

payda x^2

olarak biraz büyük

0

0^0 Belirsizliği

Süreklik ~ Türev NOT

Eğer bir fonk. bir nok. sürekliğının göstermiyorsa o nok. türev tanımlı değil.

★ her sürekli fonk. türevli olmayıabilir.

★ Bir fonk türevi varsa, bu fonk. mutlaka o noktada sürekli dir.

Türev Olabilmesi İçin

- 1 - Tanımlı
- 2 - Limiti var
- 3 - Süreçlidir
- 4 - Soldan türev = Sağdan türev

Sürekli Olabilmesi için

f , $x=a$ noks. sürekli dir..

i. $f(a)$ tanımlıdır.

ii. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ vardır.

iii. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ eşitliği sağlansın.



Sağdan ve soldan limitlerin incelenmesi gereken durumlar

- Parçalı fonk.
- Mutlak değer fonk
- Fonk. köşe - kırılma nok.
- $\frac{\text{sayı}}{0}$ durum \rightarrow sıfır haric bir sayı

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x}{x-5} = \frac{10}{0} \quad \text{limit yoktur.}$$

Limitsiz Belirsiz Durumlar

- Limit Değeri "0"

$$\frac{0}{\infty}, \frac{c}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$c^\infty (0 < c < 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

$$\infty^{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-x} = 0$$

$$c^{-\infty} (c > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-x} = 0$$

- Limit Değeri " ∞ "

$$c+\infty, \infty+\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 2x) = +\infty$$

$$c \cdot \infty, \infty \cdot \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3x = \infty$$

$$\infty^c, \infty^\infty (c > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^x = \infty$$

$$c^\infty (c > 1)$$

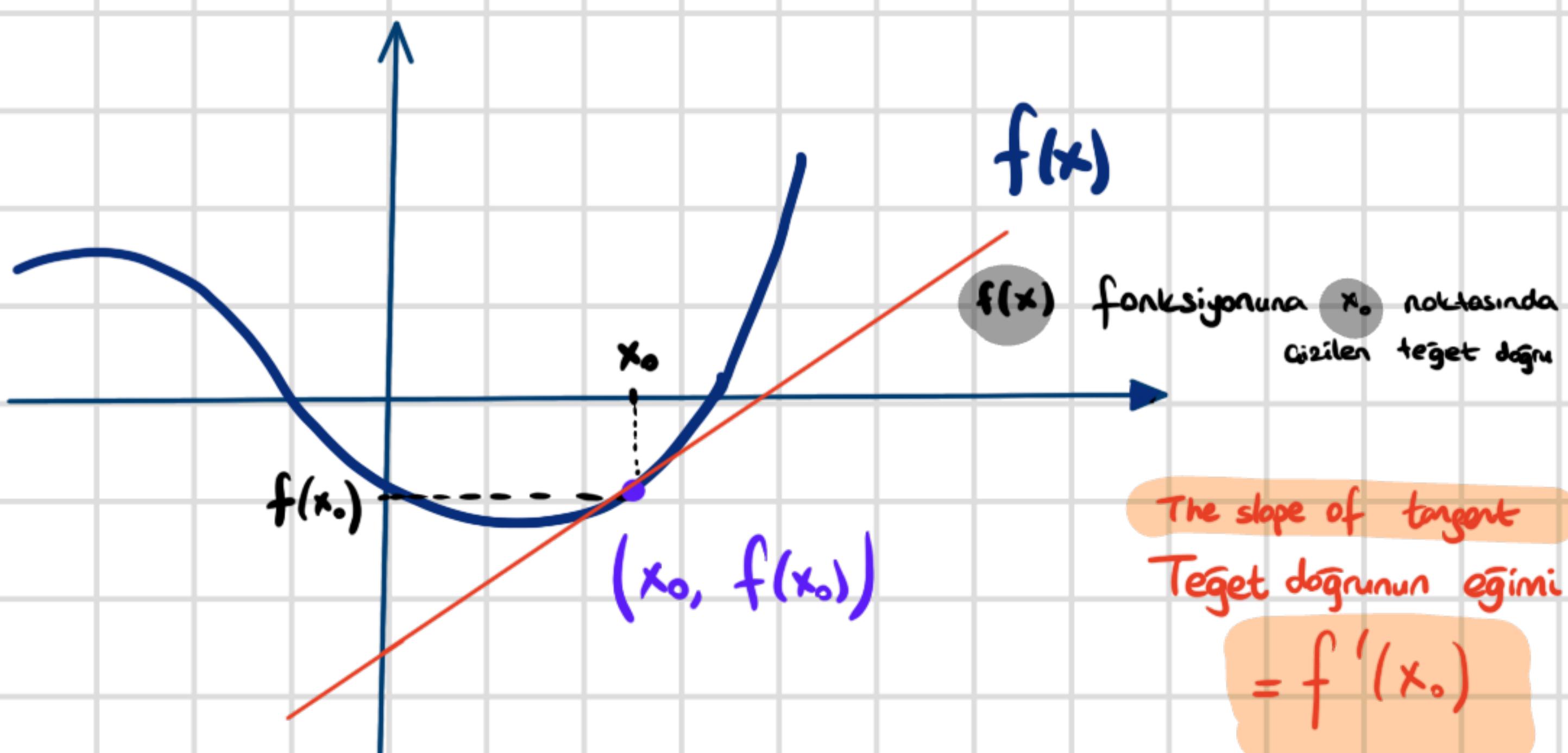
$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty$$

$$c^{-\infty} (0 < c < 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = \infty$$

TÜREV ~ TEĞETİN EĞİMİ VE DENKLEMİ

(TANGENT LINE)



$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Soruclar:

- * $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ fonk $x=1$ apsisli nok. çizilen teğetin eğimi = ?

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$f'(1) = 3 + 2 + 1 = 6 \quad \text{the slope of tangent}$$

$$\frac{y-2}{x-1} = 6$$

$$y-2 = 6(x-1)$$

$$y = 6x - 6 + 2$$

$$= 6x - 4$$

- * $x^2 + 2xy + y^3 = 4$ egrisi $(1,1)$ nok. çizilen teğetin denklemi

Kapak

Fonk, Tanevi (Implicit function) $2x + 2y + 2xy' + 3y^2y' = 0$

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{-4}{5}$$

$$y'(2x + 3y^2) = -2x - 2y$$

$$y' = \frac{-2x - 2y}{2x + 3y^2}$$

$$-4x + 4 = 5y - 5$$

$$5y = -4x + 9$$

$$y = \frac{-4x + 9}{5}$$

teğetin
eğimi

$$\frac{-4}{5} = \frac{-2 - 2}{2 + 3}$$

- * $y = \sin \sqrt{x}$ egrisi deðet $x = x^2$ nok. teget d. deð.

$y = \sqrt{\cos x}$ egrisine $x=0$ nok teget dognurdere.

$y = \sin^2 x$ egrisie $x = \frac{\pi}{2}$ nok teget
oler

$y = 1 + \tan x$ egrisine $x=0$ nok.
teget oler

Türev Yardımıyla Grafik Çizimleri

Soru 1: $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ fonksiyonunun grafğini çiziniz.

1. Tanım kumesi $x \neq 1 \quad \mathbb{R} - \{1\}$

2. Eks. Kestiği noktalar $x=0, y=0 \quad (0,0)$ $y=0, x=0 \quad (0,0)$

3. Asimptotlar $x \rightarrow \infty \quad y \rightarrow \infty \quad x=a \quad \text{Düsey Asimptot}$

$x=1$ DA. Rasyonel fonk. yatay asimptot paydayı "0" yapan degerdir.

n tane düsey asimptot varsa $n+1$ tane fonk. parçası var.

$x \rightarrow \infty \quad y \rightarrow b \quad y=b \quad \text{Yatay Asimptot}$

Bir eğrinin yatay asimptoti en fazla iki tane eder.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x-1} = 2 \Rightarrow y=2$ y.A
pay ve paydaya dereceleri eşit
ise derecesi belirleyen teriminin
katsayıları orası limit değeridir

$x \rightarrow \infty \quad y \rightarrow \infty \quad \text{Eğri Asimptot}$

$\deg P(x) > \deg Q(x)$

Rasyonel fonk. vadedir. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

4. Düsey asimptot $\Rightarrow x=1$ Sonuç dairema + veya - ∞ çıkar.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

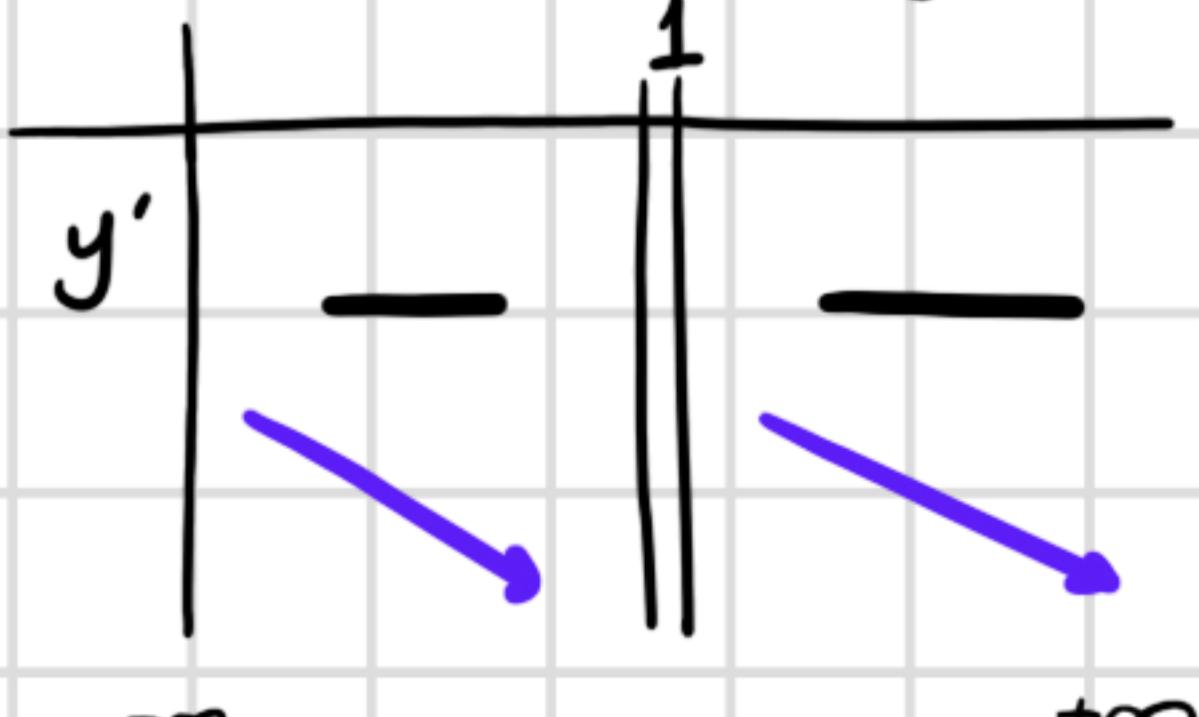
5. Birinci Türev

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - 1 \cdot 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = 0$$

türevi sıfır yapan x yok.

max ve min nokta yok.

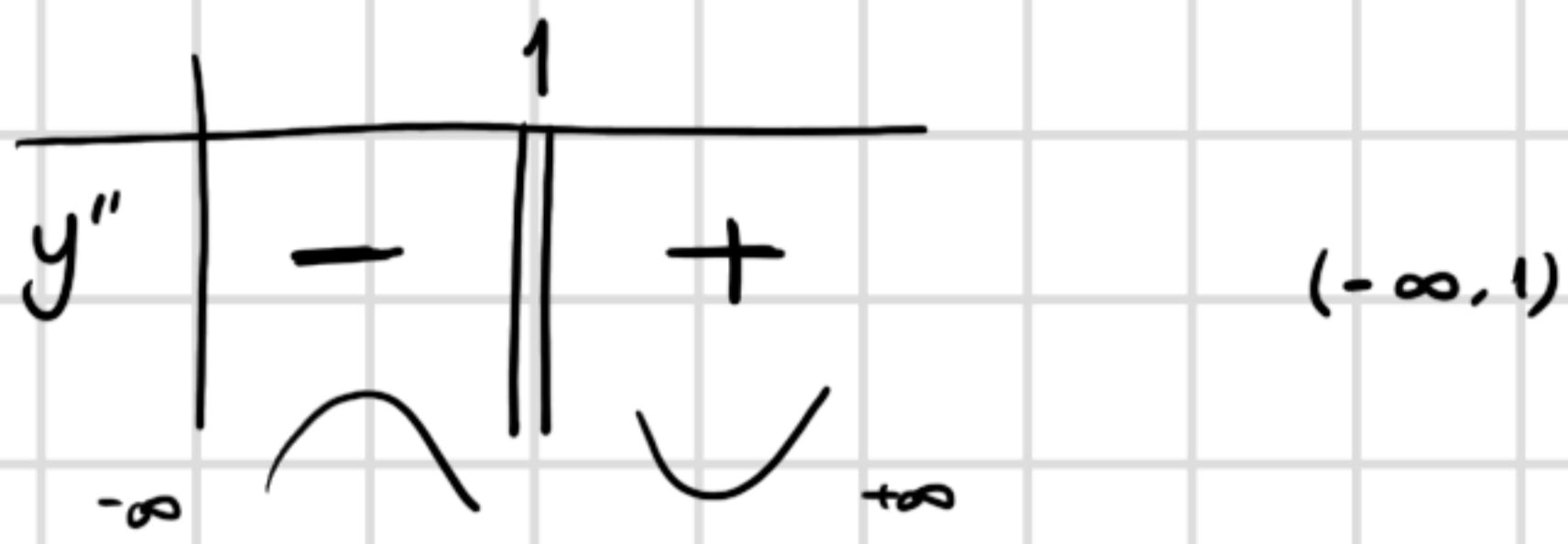
$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ aralı



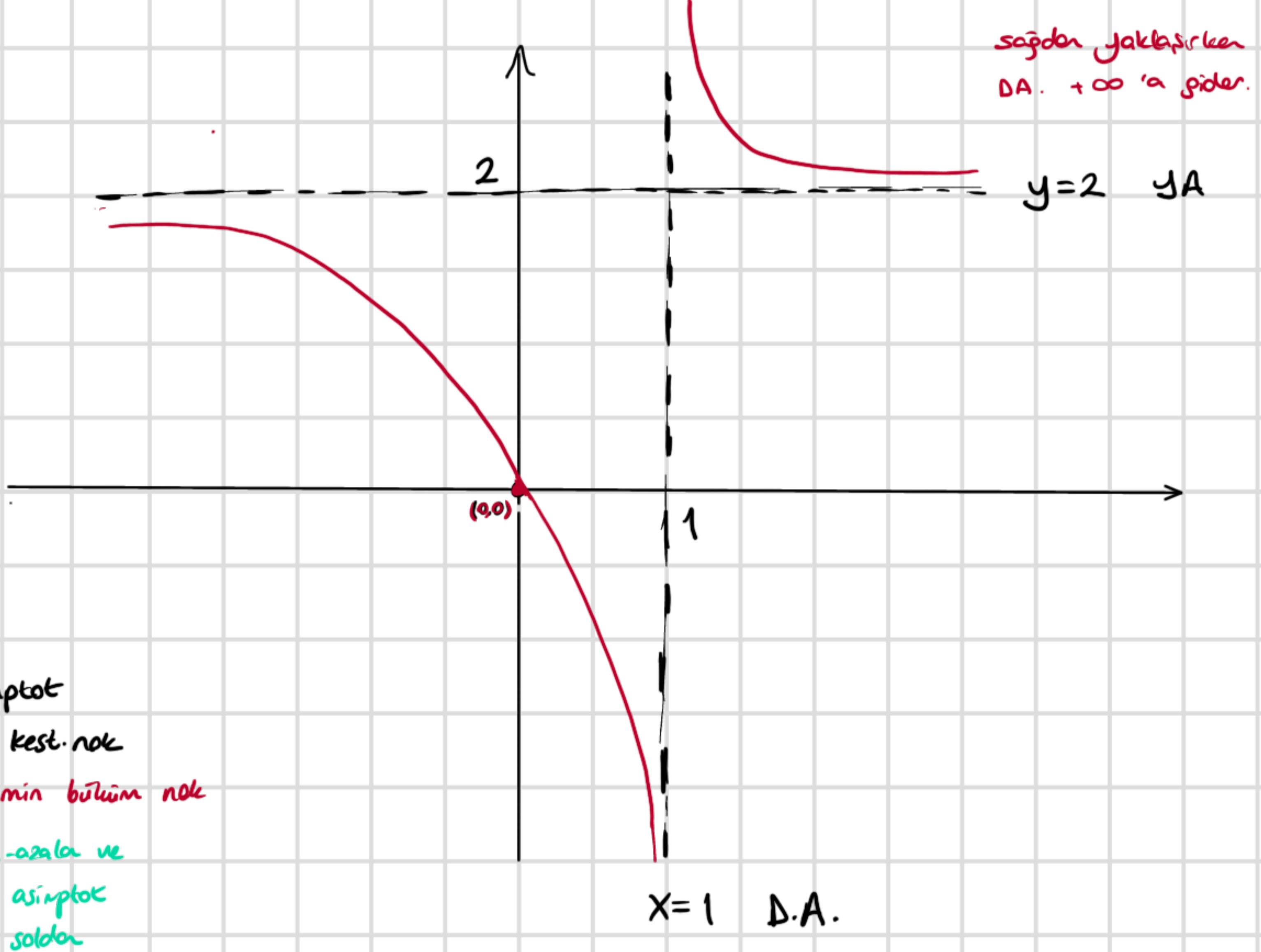
6. ikinci Türev

$$f''(x) = \frac{0(x-1)^2 - 2(x-1) \cdot 1(-2)}{(x-1)^4} = \frac{4(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3} = 0$$

2. türevi sıfır
yapan x yok
büküm noktası yok.



7. Grafik Çizimi



1. asimptot

2. eks. kesit. nok

3. max, min büküm noktası

4. artan-azalan ve
düşey asimptot
soğdan soldan

5. konveks, konkavlık
doğru mu?

Soru 2: $f(x) = x^3 - 27x + 1$ fonksiyonunun grafğini çiziniz.

1. $TK = R$

2. $x=0, y=1$ (0,1)

$y=0, x^3 - 27x + 1 = 0$ (özemiyoruz)

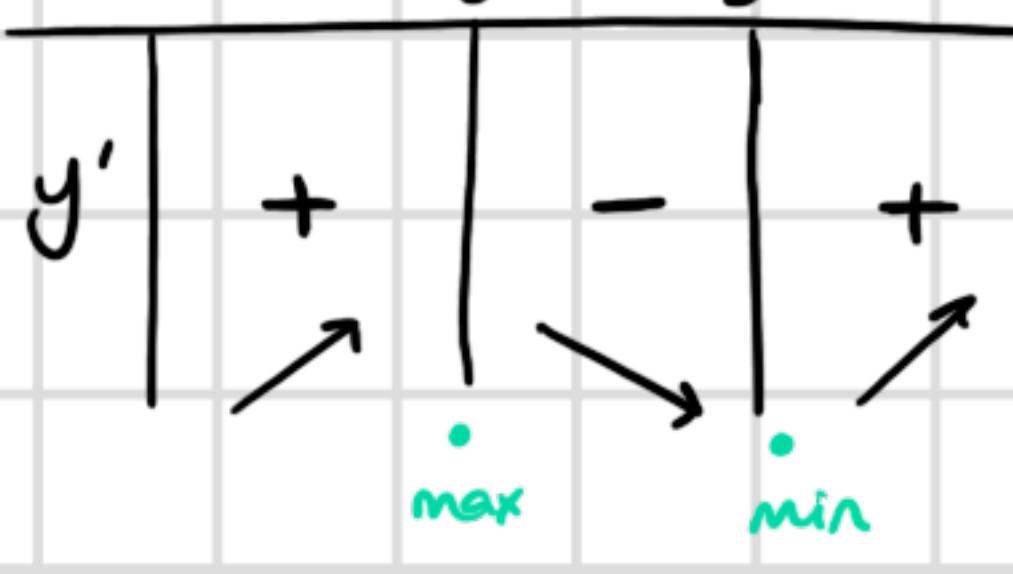
3. asimptotler yok (fonk kesirli değil)

4. düşey asimptot yok (soğdan-soldan limite bakılmayacak)

5. 1. Türev $3x^2 - 27 = 0$ $x=3, x=-3$

* $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ artan

$(-3, 3)$ azalan



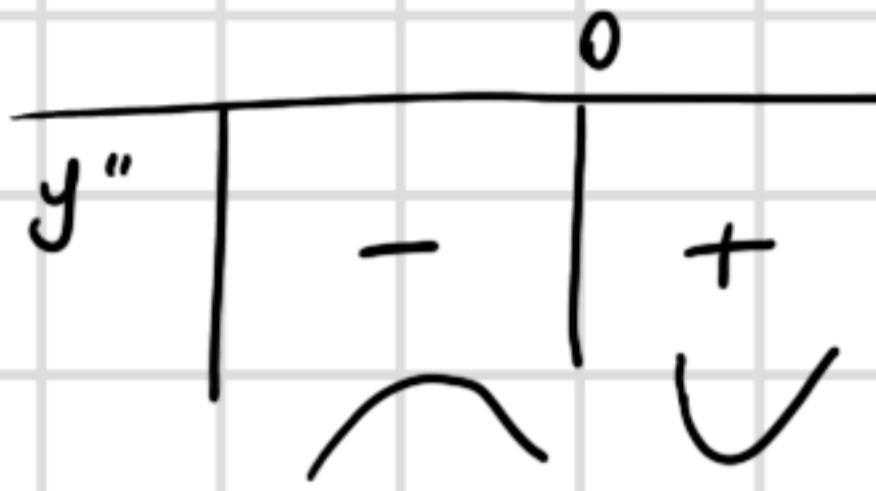
* max, min değerleri en baştaki fonk. kayıtlar

$$\max (-3, 55)$$

$$\min (3, -53)$$

b. 2. türev $bx = 0 \quad x=0$

$$(-\infty, 0) \wedge (0, \infty) \cup$$



* büküm noktası $(0, 1)$

en baştaki fonk.
yine kay

7. Grafik

1. eks kesen ✓

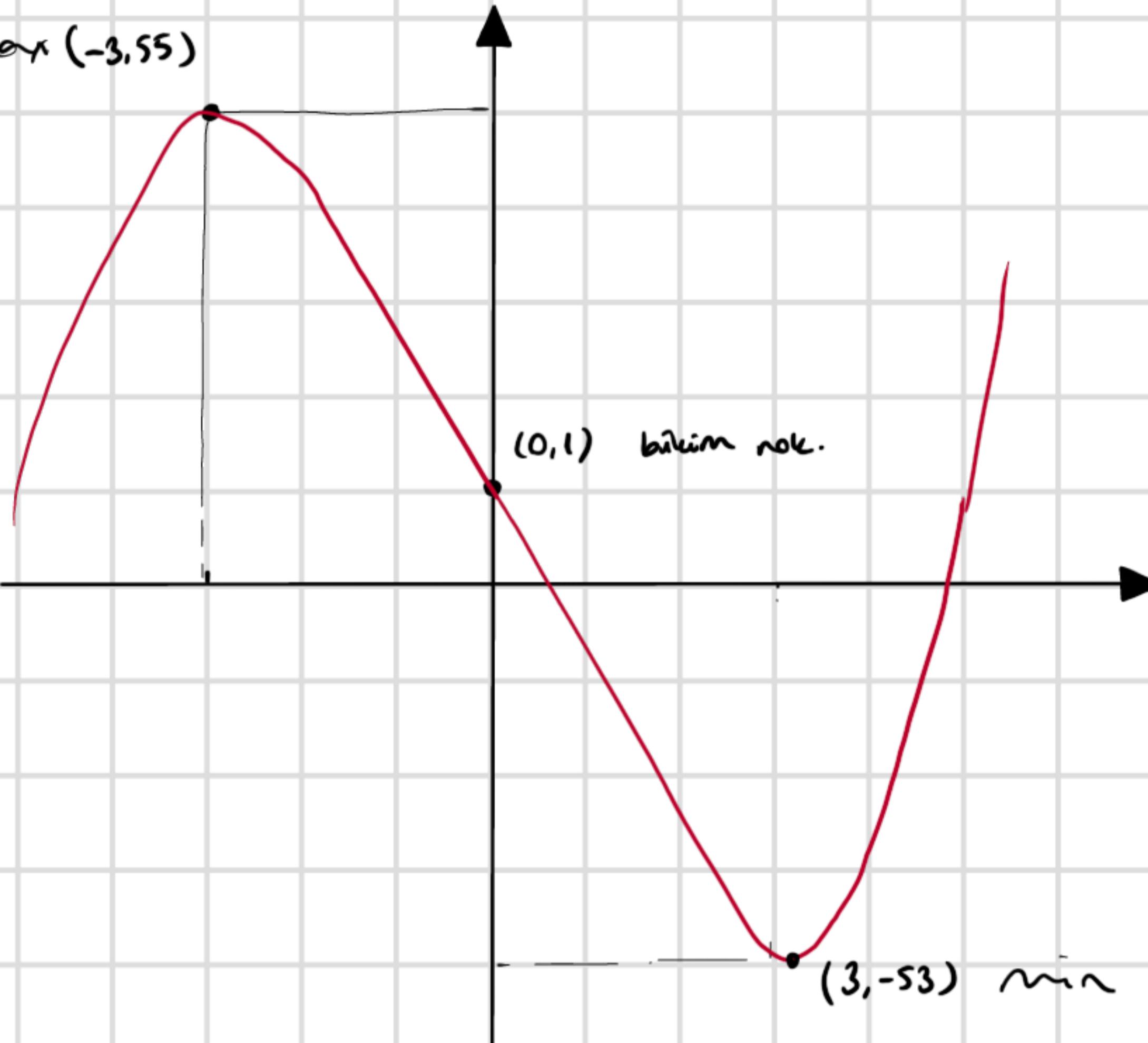
2. asimptot ✓

3. max, min, büküm ✓

4. ortal-oralan
d.A sağ sol

5. konveks
(konkav)

$$\max (-3, 55)$$



Soru 3

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2} \text{ fonk. grafiğini çiziniz.}$$

1. çift $\sqrt{\square}$ → Kök içi ≥ 0

$$4-x^2 \geq 0 \quad (x-2)(x+2) \geq 0$$

$$TK = [-2, 2]$$

tek $\sqrt{\square}$ → TK = Tüm reel sayılar

$$\begin{array}{c} -2 \\ \hline - \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \hline + \end{array} \begin{array}{c} - \end{array}$$

2. $x=0 \quad , \quad y=0 \quad (0,0)$

$$y=0 \quad x=0 \quad x=2 \quad x=-2 \quad (0,0) \quad (-2,0) \quad (2,0)$$

3. Yatay ve düşey asimptot yoktur.

4. Düşey asimptot yok (bu adında yok)

5. Birinci Türev

$$y' = 1 \cdot \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{1}{2} (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x$$

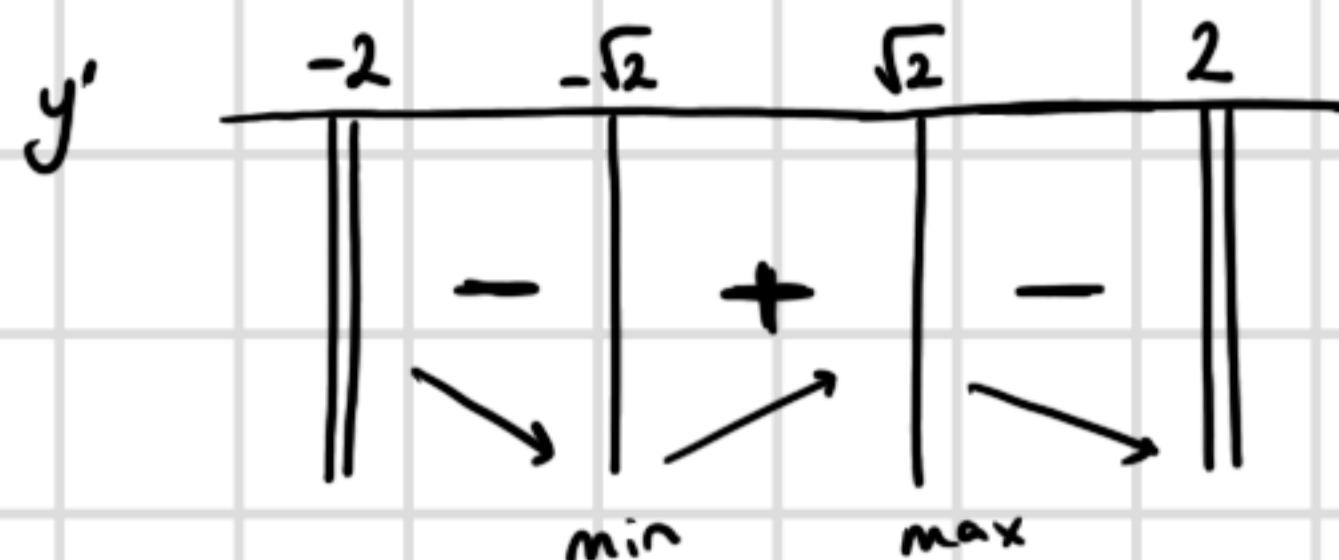
$$= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0$$

paydayı
süfr yaparlar

$$x^2 = 2 \quad x = \pm \sqrt{2}$$

zürevi sıfır
yaparlar



$(-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$ aralıkları

min : $(-\sqrt{2}, -2)$

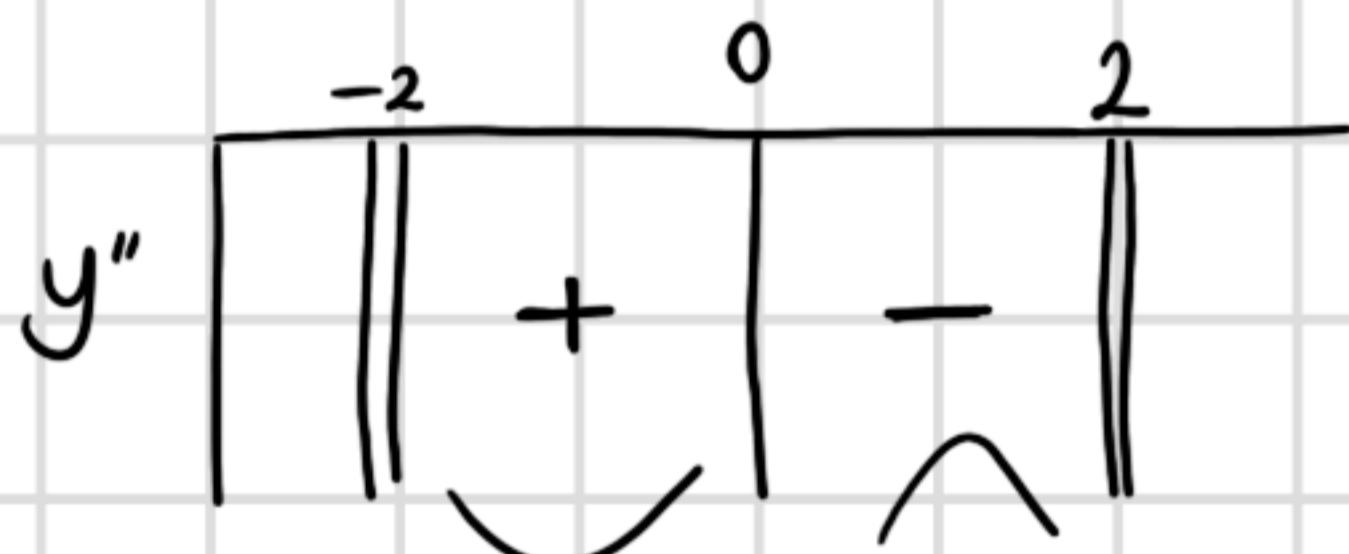
$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ aralığı

max : $(\sqrt{2}, 2)$

6. ikinci Türev

$$f''(x) = \frac{-4x \sqrt{4-x^2} - \frac{1}{2} (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x \cdot (4-x^2)}{4-x^2}$$

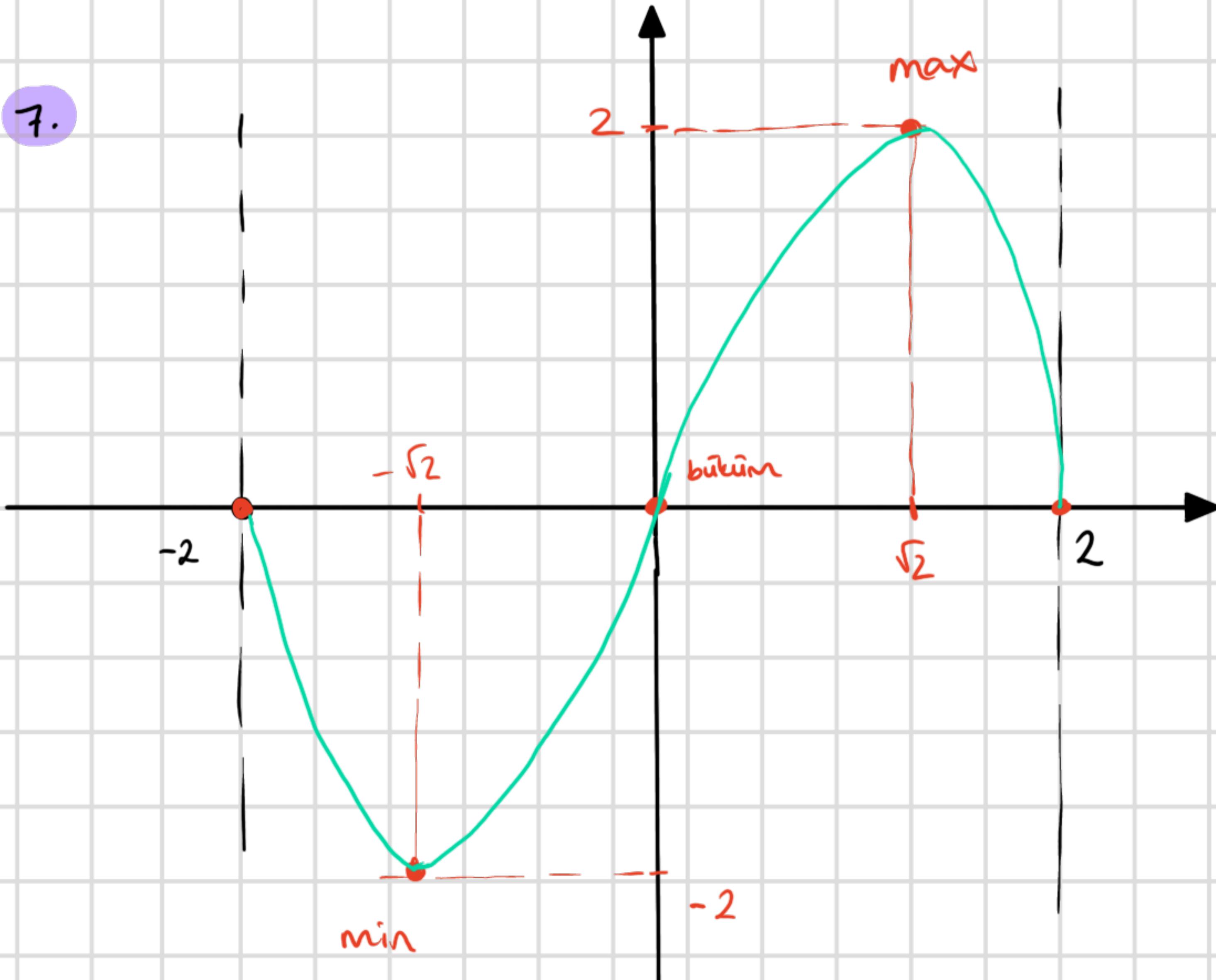
$$= \frac{3x^3 - 12x}{(4-x^2) \cdot \sqrt{4-x^2}} \Rightarrow \frac{-3x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \quad \begin{matrix} \text{paydayı } 0 \text{ yaparlar} \\ x=0 \quad 2. \text{ türev} \end{matrix}$$



$(-2, 0)$ konveks
 $(0, 2)$ konkav

* büküm = $(0, 0)$

7.



Soru 4:

1. $y = \frac{x+1}{x-3}$ TK = 2-333

2. $y = \frac{1}{x-3}$, $x=0$ $y=0$ $0 = x+1$ $x=-1$ $(-1, 0)$ $(0, -\frac{1}{3})$ keser noktaları

3. Düzey Asimptot

$$x \neq 3$$

paydayı sıfır yapar

$$\boxed{x=3 \text{ DA}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{x-3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{x-3} = -\infty$$

y Asimptot

$$x \rightarrow \infty \quad y \rightarrow a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-3} = 1 \quad \star$$

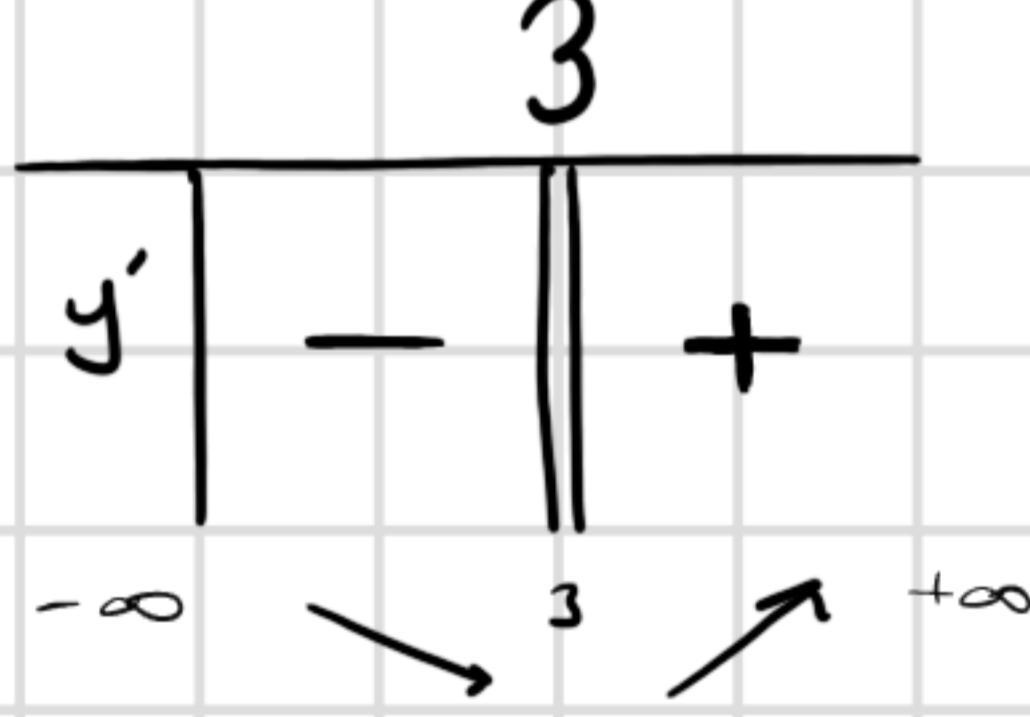
$$\boxed{y=1}$$

5) Birinci Türev

$$\frac{x+1}{x-3} = \frac{(x+1)'(x-3) - (x+1)(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{1(x-3) - (x+1)2}{(x-3)^2}$$

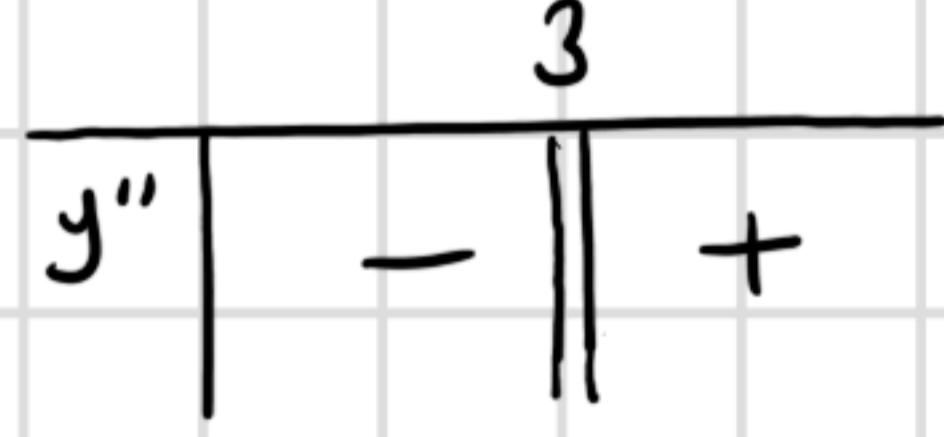
$$\frac{x-3-x-1}{x^2-6x+9} = \frac{-4}{x^2-6x+9}$$

max, min
nokta yok



6) ikinci Türev

$$\frac{-4}{x^2-6x+9} = \frac{0}{2x-6}$$



7)

- eksen kesen
- asimptot
- max-min-bükme
- arda arda
- Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Asimptot sgs

Soru 5

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

1. Tüke R - §13

2. Kesir not

3. DA. VA. EAsimptot

$$x \rightarrow 1 \quad y \rightarrow \infty$$

4. Limitler

5. Birinci Türev

6. ikinci Türev

7. Grafik

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$$

$$\boxed{x=1} \\ DA$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$$

YAsimptot
yok

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x} = -\infty \end{array} \right\} \text{YAsimptot yok}$$

Eğitsimptot

$$\frac{x^2+1}{x} \underset{-1}{\not\sim} x$$

$y=x$
eğile
asimptot

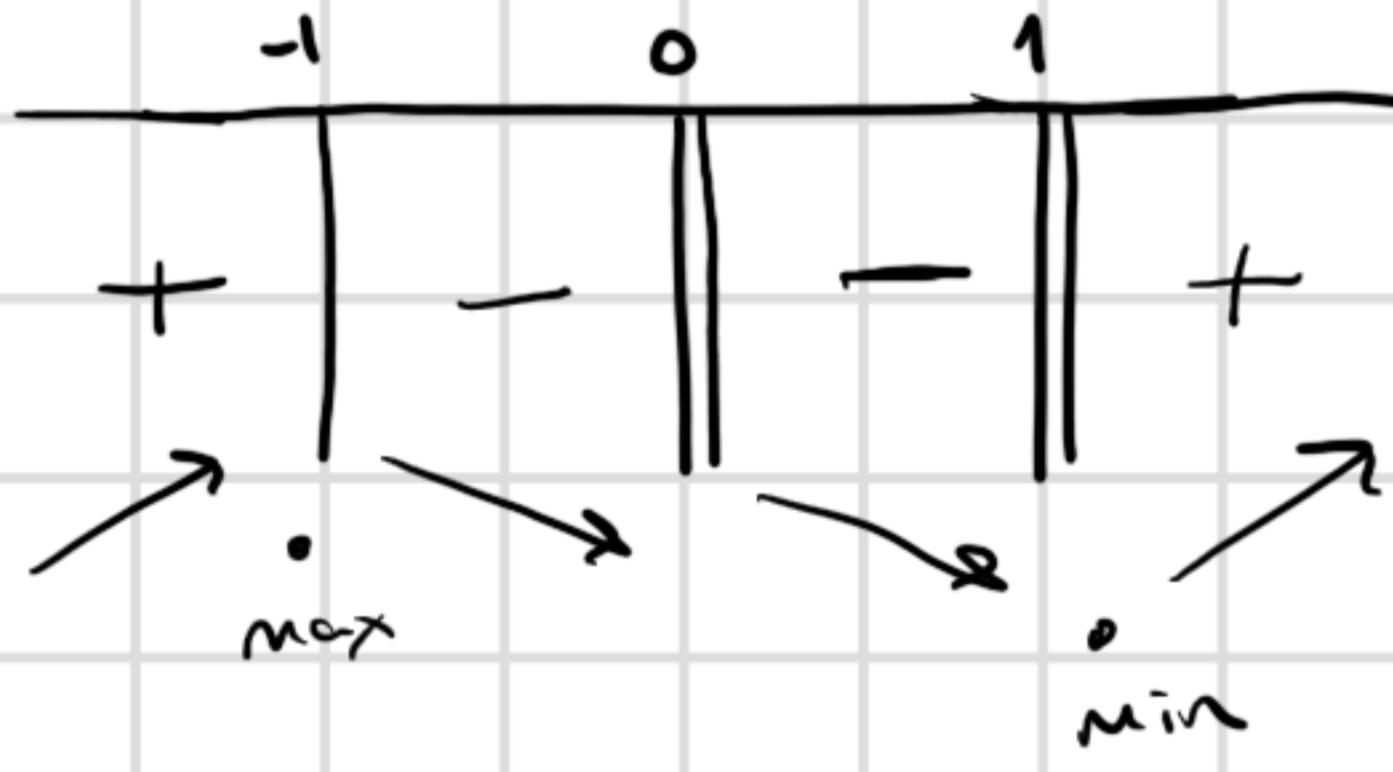
$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{(2x)(x) - (x^2+1)}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \quad x^2 - 1 = 0 \quad x = \pm 1$$

0 paydayı 0 yoxsa

x = 1 1. Türev
x = -1 0 yoxsa

(-1, -2)
(1, 2)



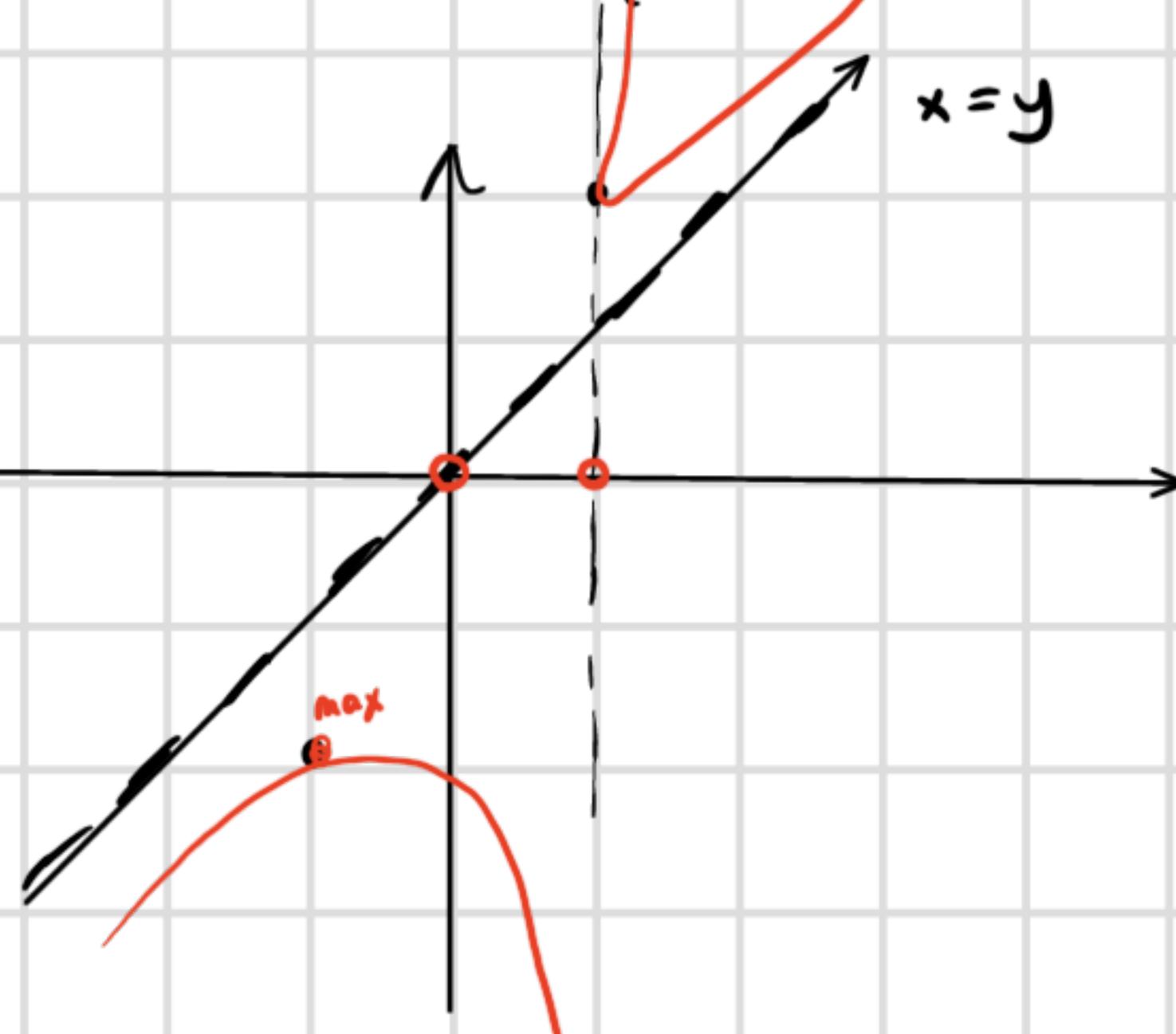
(-infinity, -1)

İkinci Türev

$$\frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(2x)(x^2) - (x^2-1)(2x)}{x^4} = \frac{2x^3 - (2x^3 - 2x)}{x^4}$$

$$\frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} = 0$$

2. türev 0 yoxsa diger büküm nöktə
yoxsa

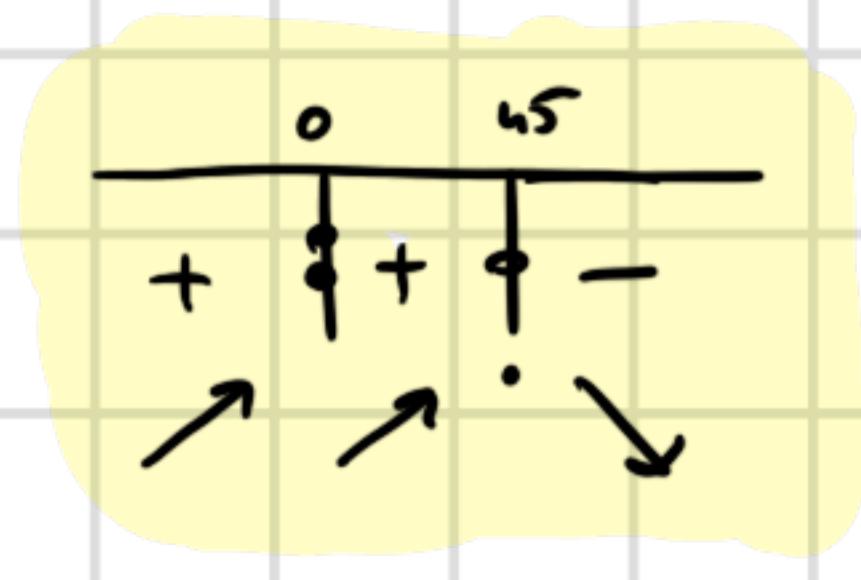


Optimizasyon Problemleri

1) $A+B = 60$ AB^3 max

$$A = 60-B$$

$$B=45$$



$(60-B) \cdot B^3$ max degeri nedir?

$$(60-B)' B^3 + (60-B) 3B^2$$

$$-1(B^3) + (60-B) 3B^2$$

$$-B^3 + 180B^2 - 3B^3$$

$$-4B^3 + 180B^2 = 0$$

$$4B^2(45-B) = 0$$

$$B=0 \quad B=45$$

$$B=0$$

2) $s > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^+$ $x+y=s$

ise x^2+y^2 nin minimumu

$$y=s-x \quad x^2+(s-x)^2=0$$

$$2x + 2(s-x)(-1) = 0$$

$$2x - 2(s-x) = 0$$

$$2x - 2s + 2x = 0$$

$$4x = 2s$$

$$2x = s$$

$$x=y \text{ olmali}$$

$$x+y=s$$

3) $r > 0$ $x, y \in \mathbb{R}^+$ $x^2+y^2=r$ $x+y$ max

$$\boxed{y=1} \quad \boxed{x=1}$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{r-x^2}$$

$$(x + \sqrt{r-x^2})' = 0 \quad \text{max}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{r-x^2}} \cdot x$$

$$1 = r - x^2$$

$$y^2 = 1$$

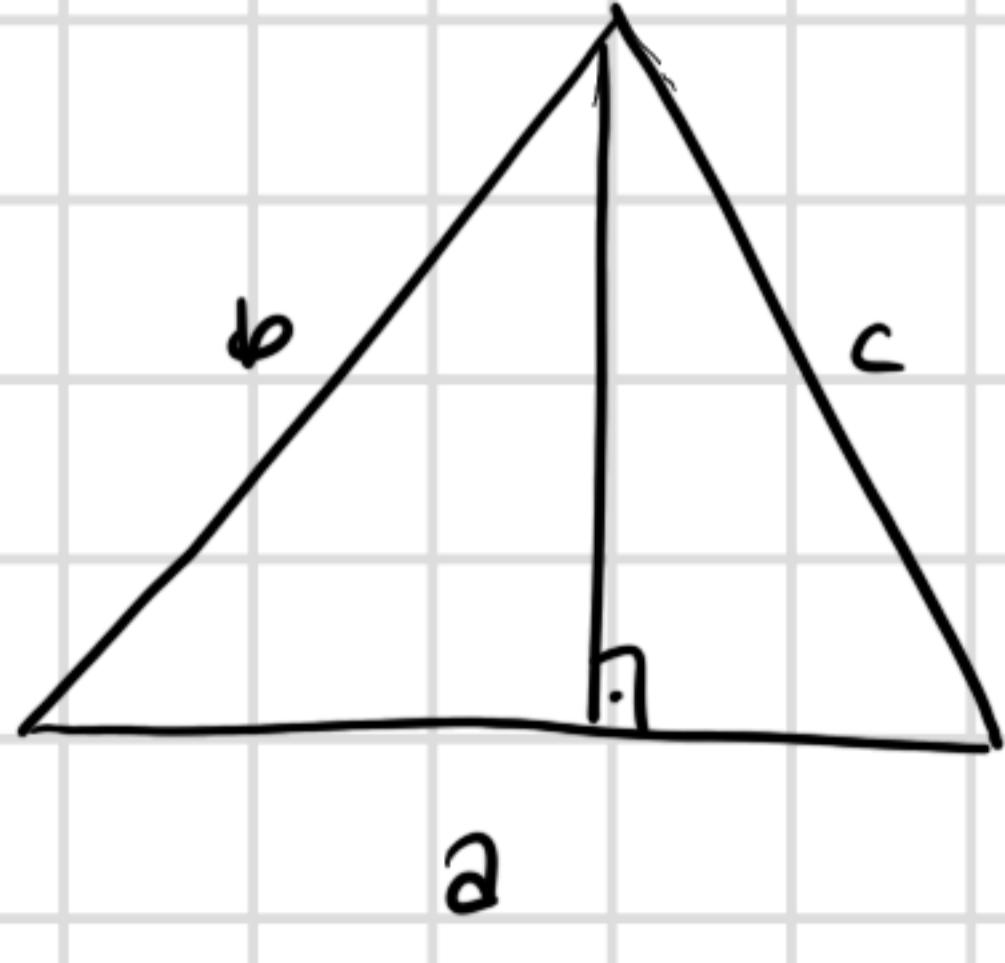
$$1 - \frac{1}{\sqrt{r-x^2}} = 0$$

$$\sqrt{r-x^2} = 1$$

$$r-x^2 = 1$$

$$r = 1+x^2$$

6)



$$\text{Genel} = a+b+c$$

$$A = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

$$u = \frac{\text{Genel}}{2}$$

Üçgen eskiyor olmaya

olun bir ikizkenar üçgen

ancak iki kenarı esit

olacaktır.

7) $x^2 + (2-a)x - a - 3 = 0$ denk. " $x_1^2 + x_2^2$ " nin
min olmasi icin $a = ?$

$$\frac{-(2-a)}{1} = x_1 + x_2$$

$$-2+a = x_1 + x_2$$

$$-a-3 = x_1 \cdot x_2$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \hline - \cancel{a} + \\ \searrow \quad \nearrow \end{array}$$

$$(-2+a)^2 - 2(-a-3) = (-2+a)^2 + 2(a+3)$$

$$= 4 - 4a + a^2 + 2a + 6$$

$$= a^2 - 2a + 10$$

$$0 = 2a - 2$$

$$0 = 2(a-1) \quad a=1$$

8) $x^2 - (m-1)x + m+2 \quad (x_1^2 + x_2^2) \quad \text{min}$

$$x_1 + x_2 = m-1$$

$$(m-1)^2 - 2(m+2) = f(x)$$

$$x_1 \cdot x_2 = m+2$$

$$m^2 - 2m + 1 - 2m - 4 = f(x)$$

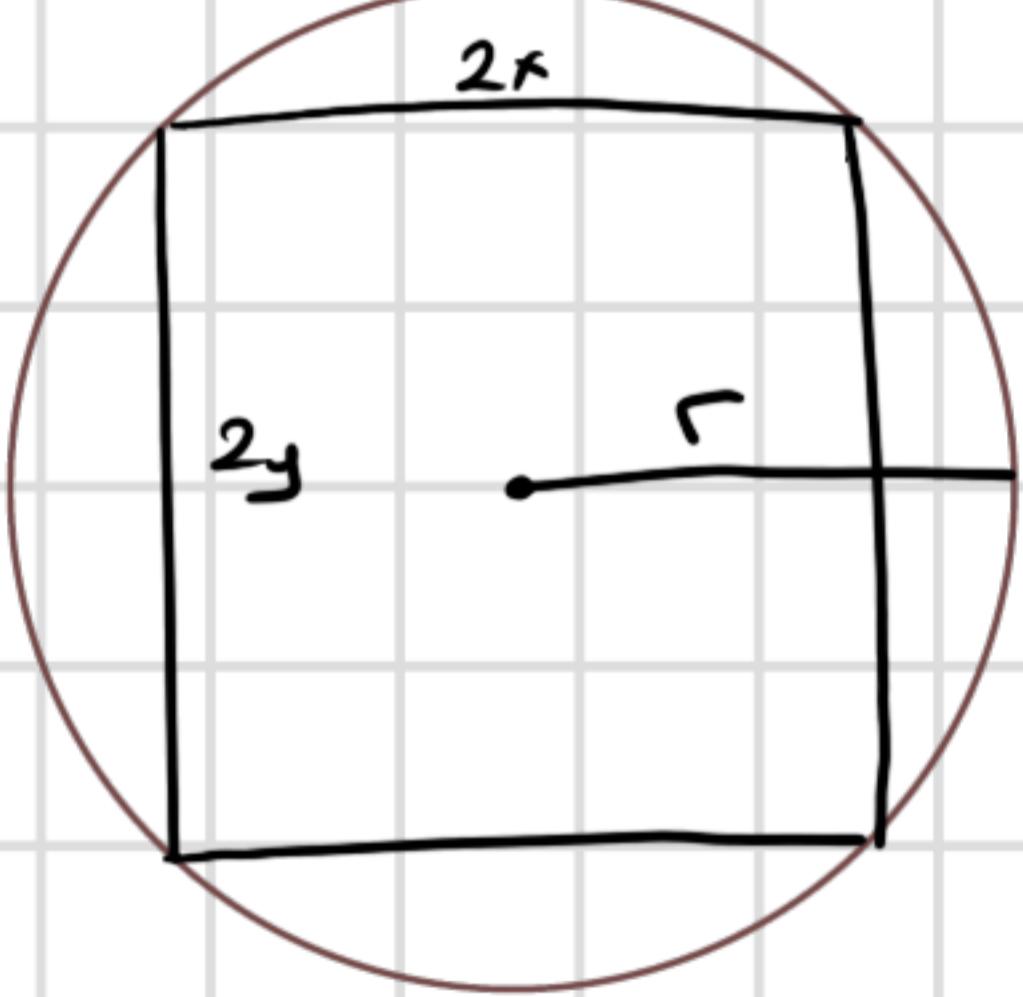
$$m^2 - 4m - 3 = f(x)$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ \hline - \cancel{4} + \\ \searrow \quad \nearrow \end{array}$$

$$2m - 4 = f'(x)$$

$$2(m-2) = 0 \quad m=2$$

9)



$$\text{Gember denklemi} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Dikdörtgen alanı

$$A = 4xy$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$A = 4x \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{tanev} = 0$$

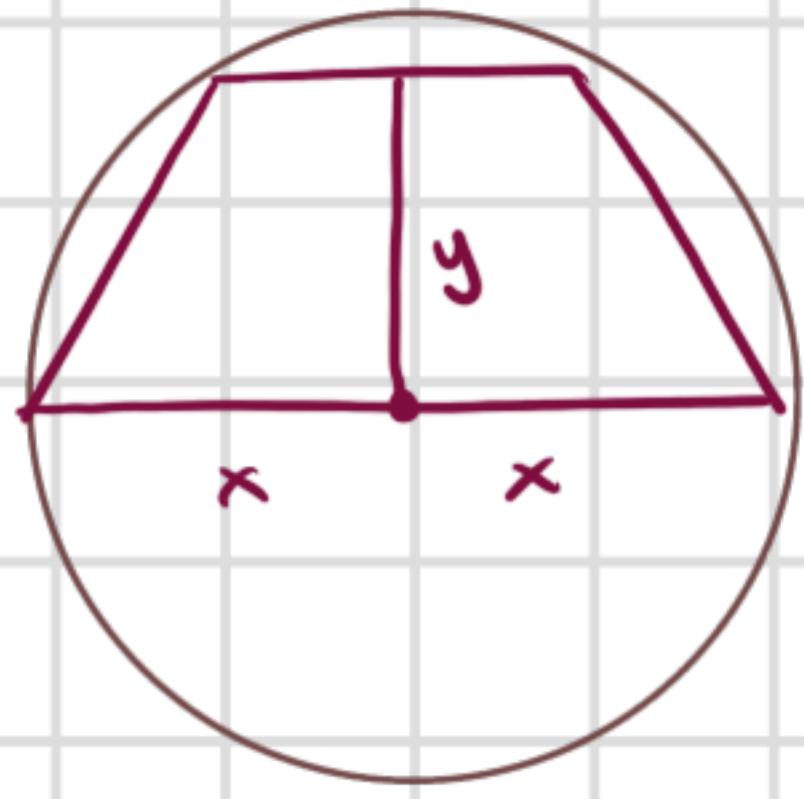
$$4(\sqrt{r^2 - x^2}) + 4x \left(\frac{1(x)(-2x)}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \right)$$

$$4 \underbrace{\sqrt{r^2 - x^2}}_0 - 4x \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) = 0$$

Yan cap uzunluğunu verilirse çember denklemi

10) "r" yançaplı çember içine çizilen $x^2 + y^2 = r^2$

max alaklı yarımuk alanı =



$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{çember denk}$$

$$A = (a+b) \cdot \frac{h}{2}$$

$$a=b=2x \quad \text{çember}$$

yüksekliğin denklemi

$$A = (2x+2x) \cdot \frac{h}{2}$$

$$A = 4x \cdot \frac{h}{2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$A = 2x \sqrt{r^2 - x^2}$$

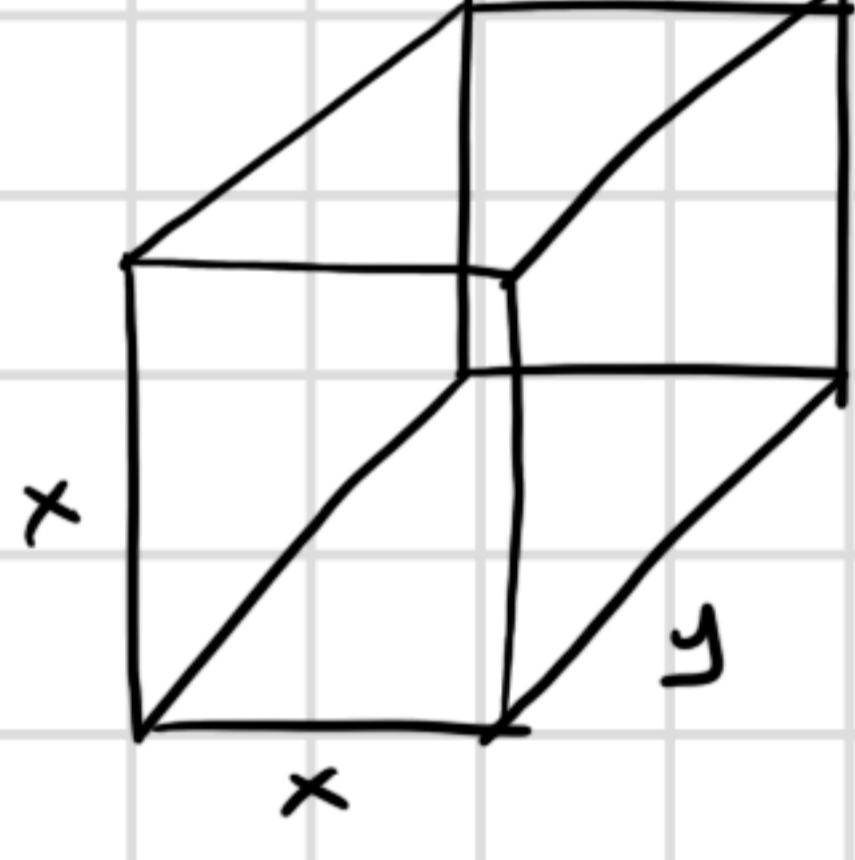
$$r^2 - 2x^2 = 0$$

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

iki kenar
yunusları $\frac{r}{\sqrt{2}}$

olar birer
 $\sqrt{2}$ kere yarık
olacak

11) hacmi 108 cm^3 olan



$$x^2 y = 108$$

$$y = \frac{108}{x^2}$$



$$4xy + x^2 = f(x)$$

$$4x \left(\frac{108}{x^2} \right) + x^2 = f(x)$$

$$x = 6 \quad y = \frac{108}{36} = 3$$

$$\frac{4 \cdot 108}{x} + x^2 = f(x)$$

$$4 \cdot 108 \cdot x^{-1} + x^2 = f(x)$$

$$f'(x) = - (4 \cdot 108) x^{-2} + 2x = 0$$

$$= \frac{-432}{x^2} + 2x = 0$$

$$\frac{-432 + 2x^3}{x^2} = 0$$

$$216 = x^3$$

$$6 = x$$

$$12) \quad A+B = 10 \quad A^3 B^2 \text{ max}$$

$$B = 10 - A$$

$$A^3 (10-A)^2 = f(x)$$

$$(A^3)'(10-A)^2 + A^3((10-A)^2)' = f'(x)$$

$$3A^2(10-A)^2 + A^3(2(10-A)(-1)) = f'(x)$$

$$A^2 (3(100-20A+A^2) + A(-20+2A))$$

$$A^2 (300 - 60A + 3A^2 - 20A + 2A^2)$$

$$A^2 (300 - 80A + 5A^2)$$

$$5A^2 (60 - 16A + A^2)$$

$$\begin{matrix} -b \\ -10 \\ A \\ A \end{matrix}$$

$$5A^2 (A-6)(A-10) = 0$$

$$A=0 \quad A=6 \quad A=10$$

$$A=0$$

$$13) (4,2) \text{ nok } y^2 = 8x \text{ egrisi en kucuk uzaklig}$$

$$(x-4)^2 + (\sqrt{8x} - 2)^2 = D^2$$

$$14) \quad x^2 - y^2 = 1 \quad \text{egrisi uzunlugu nok.}$$

(4,0) nok en yakin olur

$$D = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \text{icindekinin} \\ \text{turuini} \\ \text{almak} \\ \text{gereklidir} \end{matrix}$$

uzaklik

$$D^2 = (x-4)^2 + y^2$$

J

$$x^2 - 1$$

$$D^2 = (x-4)^2 + (x^2 - 1)$$

$$D^2 = (x-4)^2 + x^2 - 1$$

$$D^2 = x^2 - 8x + 16 + x^2 - 1$$

$$D^2 = 2x^2 - 8x + 15$$

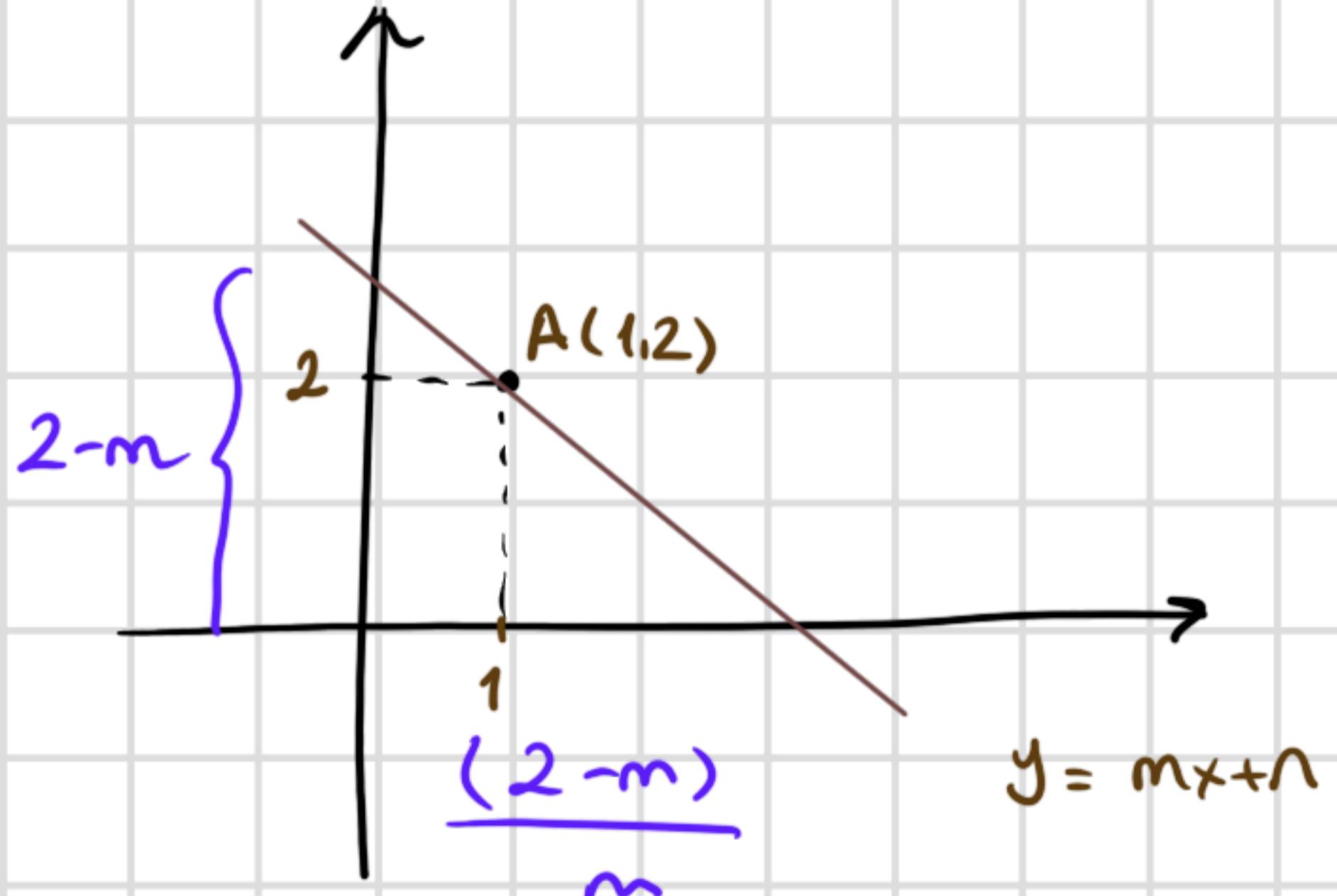
$$(2, -\sqrt{3}), (2, \sqrt{3}) \text{ noktalar}$$

$$4x - 8 = 0$$

$$4(x-2) = 0 \quad x=2$$

Optimizasyon Problemleri ~Bu. DERS~

$A(1,2)$ nok. geçen neg. eğimli d. doğrusu ile koordinat eks. arasında kalan bölgenin alanı = (min) ?



$$-2 \quad -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4-4m+m^2}{8}$$

$$\rightarrow y = mx + (2-m)$$

$$y = m \cdot 1 + n = 2$$

$$(2-m) \frac{(2-m)}{m} \cdot \frac{1}{2} = \text{Alan}$$

$$m+n=2$$

$$n=2-m$$

$$\left(\frac{4-4m+m^2}{2m} \right)' = 0$$

$$\frac{(4-4m+m^2)'(2m) - (4-4m+m^2)(2m)'}{(2m)^2} = \frac{(-4+2m)2m - (4-4m+m^2)2}{4m^2}$$

$$\frac{(-4+2m)-4+4m-m^2}{m}$$



$$\frac{-m^2+6m-8}{m} = 0$$

$$\frac{m^2-6m+8}{(m-4)(m-2)} f'(x)$$

$$\begin{aligned} n &= -2 \\ m &= 4 \\ m &= 2 \end{aligned}$$

Belirsiz integraller

• Üstel Fonk integrali

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$$

NOT: x çarpı olmaz bulumayacak!
 e^x 'nin tüsü 1. der. olacak!

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Standart integraller

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C$$

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$$

$$\int \tan(ax) dx = \frac{1}{a} \ln |\sec(ax)| + C$$

$$\int \cot(ax) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax)| + C$$

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax) + C$$

$$\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax) + C$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{1}{2a} \sin^2(ax) + C$$

$$\int \sin(ax) \cos(bx) dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + C \quad a \neq b$$

ters trigonometrik

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{-1}{1+x^2} dx = \text{arccot}(x) + C$$

x 'in kare sayısı

1. integral kuralları

- Sabitin integrali $\int 3dx = 3x + C$

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

- Yardımcı Kurallar $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$

- $\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

- $\int \frac{\text{sayı}}{1.\text{der.fonk}} dx = \text{sonuc } \ln \text{ girer}$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + C$$

• Trigonometrik integral kuralları

→ Eğer trigonometrik fonk içindeli ifade 1. der ise standart formüller

→ Dörtlü ise değişken değiştir.

• Parantezlinin integrali

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1) \cdot a} + C$$

hiperbolik fonk

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2(x)} dx = \tanh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2(x)} dx = -\coth(x) + C$$

Örnek:

$$\int \sin(3x^2) \cdot x \cdot dx = ?$$

Kısmi Integrasyon

LAPTİ

u.v - $\int v du$

$$3x^2 = u \quad dx \cdot 6x = du$$

$$\int \sin u \cdot \frac{du}{6} = \frac{1}{6} \int \sin u du = -\frac{1}{6} \cos(3x^2)$$

2. integral Alma Jöntemleri

• Değişken Değiştirme

* $\int \tan x dx = ?$ $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$, $\cos x = u$
 $-\sin x \cdot dx = du$

$$= -\ln |\cos x| + C$$

$$= \ln |\sec x| + C$$

$$= \ln |c_1 \cdot \sec x| + C$$

$$\int -\frac{du}{u} = -\ln |u| + C$$

* $\int \cot x \cdot dx = ?$ $\ln |\sin x| + C$ deðisker deð.

soru1 $\int \sqrt[3]{2x+2} dx = ?$ $2x+2 = u$
 $2 \cdot dx = du$

$$\int u^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{3}} \cdot du$$

deð. deð

$$= \frac{1}{2} \frac{\frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{2} \frac{u^{\frac{4}{3}}}{4}$$

$$= \frac{3}{8} \sqrt[3]{u^4}$$

u-sub

$$\text{Soru 2: } \int x \sqrt{5x-1} \cdot dx$$

$$5x-1 = t^2$$

$$5x = t^2 - 1$$

$$5dx = 2t dt$$

$$\int \frac{t^2-1}{5} \cdot t \frac{2t \cdot dt}{5}$$

LAP TÜ

$$\begin{matrix} \downarrow \\ x \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ e^x, 2^x, \text{ gibi üsteller olurdu} \end{matrix}$$

$$\frac{2}{25} \int (t^2-1) \cdot t^2 = \frac{2}{25} \int t^4 - t^2$$

$$= \frac{2}{25} \int t^4 - \int t^2$$

$$= \frac{2}{25} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right)$$

u-sub

$$\text{Soru 3: } \int \frac{dx}{7-3x} = ?$$

$$7-3x = u$$

$$-3dx = du$$

$$\int \frac{\frac{du}{3}}{u} = -\frac{1}{3} \int \frac{du}{u}$$

$$-\frac{\ln|u|}{3} + C$$

u-sub

$$\text{Soru 4: } \int \frac{dx}{(2x-7)^2} \quad 2x-7 = u \quad \int \frac{du}{u^2}$$

$$2dx = du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} \int du \cdot u^{-2}$$

u-sub

$$\text{Soru 5: } \int x^3 (x^4 + 8)^{999} dx = ?$$

$$u = x^4 + 8$$

$$\int \frac{du}{4} u^{999} = \frac{1}{4} \int u^{999} du$$

$$du = \underbrace{4x^3 \cdot dx}_{\frac{du}{4}}$$

$$\frac{u^{1000}}{4000}$$

u-sub

$$\text{Soru 6: } \int \frac{\sin x}{2+\cos x} dx$$

$$2+\cos x = u$$

$$-\sin x \cdot dx = du$$

$$\int \frac{-du}{4}$$

$$= -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|2+\cos x| + C$$

u-sub

$$\text{Soru 7: } \int \frac{x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$1-4x^2 = u^2$$

$$-8x dx = 2u du$$

$$x dx = \frac{u du}{-4}$$

$$\int \frac{u du}{-4 \sqrt{u^2}}$$

$$-\frac{1}{4} \cdot u = -\frac{1}{4} \sqrt{1-u^2}$$

$$= \int \frac{u \cdot du}{-4} \cdot \frac{1}{u}$$

Ters-Trig

Soru 8: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \arcsin(x) + C$

$$= \frac{1}{2} \arcsin(2x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \frac{1}{a} \arcsin(ax) + C$$

u-sub

Soru 9: $\int \sin(2x+4) dx$

$$2x+4=u$$

$$2 \cdot dx = du$$

$$\int \sin(u) \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{\cos(u)}{2}$$

u-sub

Soru 10: $\int x \sin(x^2+3) dx$

$$2x dx = du$$

$$x^2+3=u$$

$$\int \frac{du}{2} \sin(u) = \frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{\cos u}{2}$$

u-sub

Soru 11: $\int \frac{x dx}{(3x^2+4)^3} = \int \frac{du}{u^3}$ $6x dx = du$ $\frac{1}{6} \int \frac{du}{u^3}$

$$\frac{1}{6} \int u^{-3} du = \frac{1}{6} \frac{u^{-2}}{-2} = \frac{1}{12u^2} = \frac{1}{12(3x^2+4)^2}$$

Kısmi integrasyon

$u \cdot v - \int v \cdot du$

integral örnek sorular ve çözümleri 1

Bu ders
76. video

int kawalleri

$$\bullet \int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}'}{t^2} dt = ? \quad \int \frac{t\sqrt{t}}{t^2} + \frac{\sqrt{t}'}{t^2} dt = \int \frac{t \cdot t^{\frac{1}{2}}}{t^2} dt$$

$$\int t^{-\frac{1}{2}} + \int t^{-\frac{3}{2}} = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{t} + \frac{-2}{\sqrt{t}}$$

u-sub

$$\bullet \int \frac{gr^2}{\sqrt{1-r^3}} dr = ?$$

$$1-r^3 = u^2$$

$$1-3r^2 \cdot dr = 2u du$$

$$-3r^2 dr = 2u du - 1$$

$$gr^2 dr = -6udu + 3$$

$$\int -6udu + 3$$

$$-6u + 3u + C$$

$$-3u + C$$

$$-3(\sqrt{1-r^3}) + C$$

u-sub

$$\bullet \int \frac{\sin(2t+1)}{\cos^2(2t+1)} dt = \frac{dt}{dt} = \frac{du}{du}$$

$$2t+1 = u$$

$$\int \frac{\sin u}{\cos^2 u} du$$

$$- \int k^{-2} dk$$

$$- \frac{1}{k}$$

$$= -\sec u$$

$$= -\sec(2t+1)$$

u-sub

$$\bullet \int \frac{18\tan^2 x \sec^2 x}{(2+\tan^3 x)} dx$$

$$2+\tan^3 x = u$$

$$(2+\tan^3 x)' \cdot dx = du$$

$$\int \frac{6du}{u}$$

$$(2+\tan^3 x)' = (\tan^3 x)' = 3\tan^2 x \cdot (\tan x)' = 3\tan^2 x \cdot \sec^2 x dx$$

$$= 6 \ln|u| + C$$

$$= 6 \ln|2+\tan^3 x| + C$$

u-sub

$$\bullet \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}} \cdot dx \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = u \\ x = u^2 \\ dx = 2du \end{cases}$$

$$= 2 \int \frac{\cos u}{u \sin^2 u} du$$

$$= 2 \int \frac{\cot u \cdot \csc u}{u} du$$

$$?$$

$$\bullet \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{x} = u \quad x^{-1} = u \quad -x^{-2} dx = du$$

$$\frac{-dx}{x^2} = du$$

$$\int \sin u \cos u - du = - \int \sin u \cos u$$

daha şöyledir

$$-\frac{1}{2} \int 2 \sin u \cos u = -\frac{1}{2} \int \sin 2u = -\int \cos 2u \left\{ = \frac{1}{4} \cos \left(\frac{2}{x}\right) + C \right\}$$

u-sub

$$\bullet \int (x^4 - 2x^2 + 8x - 2) (x^3 - x + 2) dx = ?$$

$x^4 - 2x^2 + 8x - 2$ \underbrace{u}

$$x^4 - 2x^2 + 8x - 2 = u$$

$$(4x^3 - 4x + 8) dx = du$$

$$4(x^3 - x + 2) dx = du$$

$$= \frac{1}{4(x^4 - 2x^2 + 8x - 2)}$$

$$\int u \cdot \frac{du}{u} = \frac{1}{4} \int u \cdot du = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^2}{2}$$

u-sub

$$\bullet \int x^{\frac{1}{3}} \sin \left(x^{\frac{4}{3}} - 8 \right) dx = ?$$

$x^{\frac{4}{3}} - 8$ \underbrace{u}

$$x^{\frac{4}{3}} - 8 = u$$

$$\frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} \cdot dx = du \quad \frac{3}{4} \int du \sin u = -\frac{3}{4} \cos u = -\frac{3}{4} \cos(x^{\frac{4}{3}} - 8) + C$$

integral Önek Sorular ve Görümleri -2

Trigonometrik integraler

$$\bullet \int \frac{1 - \cos(6t)}{2} dt = ? = \int \frac{1}{2} dt - \int \frac{\cos 6t}{2} dt$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{\sin 6t}{12} + C$$

NOT: integral alırken trigonometrik ifaderin içinin türini bölüm olarak paydaya yazılır.

$$\int \cos t dt = \sin t + C$$

$$\boxed{\int \cos st dt = \frac{\sin st}{s} + C}$$

$$\bullet \int x \sec^2 x^2 \cdot \tan x^2 dx = ?$$

NOT: $(\tan x)' = \sec^2 x$

$$\tan x^2 = u$$

$$\sec^2 x^2 \cdot 2x \cdot dx = du$$

$$\frac{1}{2} \int du \cdot u = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{2} + C$$

$$= \frac{\tan^2 x^2}{4} + C$$

$$\bullet \int (1 - \cot^2 x) dx = ?$$

NOT: $\int 1 + \cot^2 x dx = -\cot x + C$

$\int -1 - \cot^2 x dx = \cot x + C$

$$\int (-1 - \cot^2 x) dx + \int 2 dx$$

$$= \cot x + 2x + C$$

$$+ 2 - 2$$

$$\bullet \int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx$$

$(\cot x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$

$$x^5 = u$$

$$5x^4 \cdot dx = du$$

$$\int \frac{\frac{du}{5}}{\sin^2 u} = \int \frac{\operatorname{cosec}^2 u \cdot du}{5}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot (-\cot u) + C$$

$$= -\frac{1}{5} \cot x^5 + C$$

$$\bullet \int \frac{\cos^2 x}{7} dx = ?$$

$$\frac{1}{7} \int \frac{\cos 2x + 1}{2} dx$$

$$= \frac{\sin 2x}{28} + \frac{x}{14} + C$$

$$= \frac{1}{14} \int (\cos 2x + 1) dx$$

! integral içinde yalnız kalanı

\cos^2, \sin^2 gördüğünüzde

yazın acı formüllerinden

yararlanılır.

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}$$

$$= \int \frac{dx}{2\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2(\frac{x}{2})}$$

$$= \frac{1}{2} \int \sec^2(\frac{x}{2}) dx = \frac{1}{2} \frac{\tan(\frac{x}{2})}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \tan(\frac{x}{2}) + C$$

1 + cos ...

gibi ifadeler
int. içinde varsa

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$= 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$\int \tan^2 x dx$$

$$1 + \tan^2 x \cdot dx = \tan x + C$$

$$\int 1 + \tan^2 x dx - \int dx$$

$$= \tan x - x + C$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^2 = \frac{\sin^2 2x}{4}$$

$$-\cos 4x = -1 + 2 \sin^2 2x$$

$$\frac{-\cos 4x + 1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{-\cos 4x + 1}{8}$$

$$\int \cos(3m+4) dm = \frac{\sin(3m+4)}{3} + C$$

$$\int \sqrt{1 + \cos 3x} dx$$

$$\cos 3x = 2 \cos^2 \left(\frac{3x}{2} \right) - 1$$

$$\int \sqrt{2 \cos^2 \left(\frac{3x}{2} \right)}$$

$$= \sqrt{2} \int \cos \left(\frac{3x}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{3x}{2} \right)}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin \left(\frac{3x}{2} \right) + C$$

MORE EXAMPLE INDEFINITE INTEGRALS

Question 1: $\int (x^2 + 3x - 2) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + C$

$$4^{x \cdot \ln a} = e^{x \cdot \ln 4} = e^{x \cdot \ln 4}$$

Question 2: $\int 4^x e^x dx = \int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{(2+ \ln 4)} + C$

→ Kemi int. ile çözümler.

$$\int e^{ax} \cdot e^{bx} dx = \int e^{(a+b)x} dx$$

$$= \int e^{x(a+b)} dx = \int e^{ax} dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} + C$$

Question 3: $\int \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} dx = \int 1 - 2\tan^2 x dx = \int \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} + C$

$$= \frac{e^{x(\ln 4+2)}}{\ln 4+2} + C$$

Question 4: $\int \frac{1}{1+\cos 6x} dx$, $1 + \cos 6x = 2\cos^2(3x) \rightarrow \sqrt{1 + \cos 6x}$

$$\int \frac{1}{2\cos^2(3x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2(3x)} dx = \frac{1}{2} \int \sec^2(3x) dx = \frac{1}{2} \frac{\tan(3x)}{3} + C$$

$$= \frac{\tan(3x)}{6} + C$$

Question 5: $\int \frac{x^4}{1+x^5} dx$, $x^5 = u$, $5x^4 dx = du$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{5} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{5} \arctan(u) + C$$

$$= \frac{1}{5} \arctan x^5 + C$$

Question 6: $\int \frac{m^2 \tan^{-1} m^3}{1+m^6} dm$, $m^2 \arctan(m^3)$, $m^3 = u$, $3m^2 dm = du$

$$m^3 = u$$

$$3m^2 dm = \frac{du}{3}$$

$\frac{1}{1+u^2}$ ifadesi, $\tan^{-1} u$ 'nin türevidir

Bu $u \cdot du$ formundadır.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{(\tan^{-1} u)^2}{2} = \frac{1}{6} (\tan^{-1} m^3)^2 + C$$

Question 7: $\int \frac{\sin 8x}{1-\cos^4 4x} dx = \int \frac{\sin 8x}{\sqrt{1-(\cos^2 4x)^2}}$, $\cos^2 4x$ 'in türevini alırken

$$(\cos 4x)' = -\sin 4x \cdot 4 = -4 \sin 4x$$

$$(\cos^2 4x)' = 2 \cdot \cos 4x \cdot (-4 \cdot \sin 4x)$$

$$= -8 \sin 4x \cdot \cos 4x$$

$$= -8 \sin^2 4x$$

$$C_{1,2} = \arcsin(\cos^2 4x) + C$$

Question 8: $\int \frac{6x+8}{3x^2+6x+2} dm = \int \frac{6x+6}{3x^2+6x+2} dx + \int \frac{2}{3x^2+6x+2} dx$

$$u = 3x^2 + 6x + 2$$

$$du = (6x+6) dx$$

$$\int \frac{u}{du} + \int \frac{2}{3x^2+6x+2} dx$$

$$\ln |3x^2 + 6x + 2| + \int \frac{2}{3x^2+6x+2} dx$$

$$\downarrow$$

$$3(x+1)^2 - 1 \quad \int \frac{2}{3(x+1)^2-1} dx = \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2 - \frac{1}{3}} = \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}(x+1)}{3}\right) + C$$

$$= \ln |3x^2 + 6x + 2| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}(x+1)}{3}\right) + C$$

Question 9: $\int e^{2x} \cos(3x+4) dx$

Kusni int

$$\begin{aligned} \cos(3x+4) &= u \\ \frac{\sin(3x+4)}{3} dx &= du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^{2x} f du \\ e^{2x} = v \end{aligned}$$

$$\left. \frac{e^{2x}}{3} [3\sin(3x+4) + 2\cos(3x+4)] + C_3 \right\}$$

$$C_3 = \frac{C}{13}$$

Question 10: $\int (\sin(\ln y) + \cos(\ln y)) dy = ?$

$$\begin{aligned} \ln y &= u \\ y &= e^u \\ dy &= e^u du \end{aligned}$$

$$\int e^u (\sin u + \cos u) du$$

Using the result $\int e^x (f(x) + f'(x)) dx = e^x f(x) + C$

$$e^{\ln y} \cdot \sin(\ln y) + C$$

$$y \cdot \sin(\ln y) + C$$

DİFERANSİEL DENKLEMLER

Türevi alınmış fonksiyon içeren denk. diferansiyel denk. denir.

Amaç türevi alınmış fonk. ne olduğunu bulmaktır.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

$$\Delta y = \underbrace{f'(x) \cdot \Delta x}_{dy} + \varepsilon \Delta x$$

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

$y = f(x)$ fonk. diferansiyeli denir

Sorular:

$$1. \quad y = (5-x)^3$$

$$dy = 3(5-x)^2, (-1) \cdot dx$$

$$2. \quad y = e^{4x^2} \Rightarrow 4x^2 e$$

$$3. \quad y = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$dy = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} \cdot dx$$

$$4. \quad y = \cos bx^2 \quad (2b)(-\sin bx^2)$$

$$dy = -2b \times \sin bx^2 \cdot dx$$

$$5. \quad y = \arccos 2x$$

$$b. \quad y = \log \operatorname{tg} x$$

$$15. \quad y = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$$

$$16. \quad y = e^{\sin^2 x}$$

$$17. \quad y = \frac{e^x}{x}$$

$$18. \quad y = \arcsin(\cos x)$$

$$19. \quad y = e^{\log_x^3}$$

$$21. \quad y = \frac{1 + e^{x/2}}{1 - e^{x/2}}$$

$$22. \quad y = \sqrt{1-x^2} \arcsin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}$$

$$23. \quad y = \arctan x^x$$

$$24. \quad y = e^{3x} + \arcsin 2x$$

$$25. \quad y = \cos^2 2x + \sin 3x$$

BELİSİZ İNTİGRAL

1. Degr̄ekler Değiştirme

2. Kismi integrasyon

3. Rasional Fonk. İntegrali →
Basit Kesirlerle Ayırma Metodu

$$\frac{k}{(x-a)^n}, \frac{Mx+N}{(x^2+ax+b)^n}$$

$$\frac{Mx+N}{x^2+ax+b} = \frac{Mx+N}{(x+k)^2 + R^2}$$

i. $x^2+ax+b=u$
 $(2x+a)dx = (Mx+N)dx$

ÖRNEKLER:

①

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \quad \cos x = t \quad -\sin x dx = dt$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{-dt}{t} = -\int \frac{dt}{t}$$

②

$$\int \arctan x dx$$

$$d(u.v) = v.du + u.dv$$

$$\arctan x = u \quad \int dx = \int du$$

$$u.v = \int v du + \int u dv$$

$$d(\arctan x) = du$$

$$x = v$$

$$u.v - \int v du = \int u dv \quad \left. \right\}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = du$$

$$u.v - \int u dv = \int v du$$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\int f(x) g(x) dx, \quad f(x)=u \quad g(x) dx = dv \\ , \quad g'(x)=u \quad f(x) dx = dv$$

polinom fonk. u denek toplamı seçtiğinde derecesi diğer
 ters trig. fonk. u denek \rightarrow türki olmalıdır
 ters trig. boyalar
 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Örnek: $\int \sec^3 x dx$ kismi int.

$$\textcircled{3} \quad \int f(x) = \int \frac{P(x)}{Q(x)}$$

paydonun türeni payı veriyorsa degr̄ekler değiştirme kullanılır.

Dır $P(x) \geq \text{Der } Q(x)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)}{Q(x)} + \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{Q(x)}{Q(x)} \\ \frac{P(x)}{Q(x)} \end{array} \right\} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$$

3 Örnek: $\int \frac{x}{(x-2)(x+1)} dx \quad \frac{x}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)}, \quad A, B \text{ sabit}$

$$x = A(x+1) + B(x-2)$$

$$\int \frac{x}{(x-2)(x+1)} dx = A \int \frac{dx}{x-2} + B \int \frac{dx}{x+1} = A \ln|x-2| + B \ln|x+1| + C$$

$$\int \frac{x^2}{(x-2)^3(x+1)^2(x+3)} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{B_1}{(x+1)} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+3)}$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$$

OB:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} = \int \frac{du}{2^2+u^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}$$

OB:

$$\int \frac{dx}{x(x^2+2x+5)}$$

$$\frac{1}{x(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+2x+5)}$$

$$1 \equiv (x^2+2x+5)A + (Bx+C)x$$

$$1 \equiv (Ax^2+2Ax+5A) + (Bx^2+Cx)$$

$$1 \equiv (A+B)x^2 + (2A+C)x + 5A$$

$$2Ax+C=0$$

$$C=-2A$$

$$C=-\frac{2}{5}A$$

$$A \in \mathbb{R}$$

$$A=\frac{1}{5}$$

$$B=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{x(x^2+2x+5)} = \frac{1}{5x} + \frac{-\frac{x}{5}-\frac{2}{5}}{(x^2+2x+5)}$$

$$\frac{1}{x(x^2+2x+5)} = \frac{1}{5x} - \frac{x+2}{5(x^2+2x+5)}$$

$$\frac{\ln|x|}{5} - \int \frac{x+2}{5(x^2+2x+5)} = \frac{\ln|x|}{5} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Basit kesir 2 türkü dir.

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

2. der polynom jossa
bit kökü mutlaka real
köküdir.

OB:

$$\int \frac{dx}{x(x^2+2x+5)^2}$$

$$\frac{1}{x(x^2+2x+5)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+5)^2}$$

OB:

$$\int \frac{4x-11}{x^2-6x+10} dx$$

$$x^2-6x+10=u$$

$$(2x-6)dx = du$$

$$4x-11 = 2\left(2x-\frac{11}{2}\right) = 2\left(2x-6+\frac{11}{2}\right) = 2(2x-6)+1$$

$\frac{1}{2}$
- gelücid
corporis
agitatione
dardu

$$2 \int \frac{2x-6}{x^2-6x+10} dx + \int \frac{dx}{x^2-6x+10}$$

Rasyonel Hale Getirilebilen Fonksiyonların integrali

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} \quad x = t^3$$

ÖR:

$$\int \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{6\sqrt{x}} dx \quad \begin{aligned} x &= t^{12} \\ dx &= 12t^{11} dt \end{aligned} \rightarrow \text{Rasyonel Fonk. integrali} \quad 2 \int \frac{t^{18} - t^3}{t^3} t^{11} dt = \frac{2}{27} x^{27/12} - \frac{2}{13} x^{13/12} + C$$

ÖR:

$$\int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}} \quad \begin{aligned} u^6 &= 1+x \\ 6u^5 dx &= dx \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\int \frac{u^2}{u+1} du \\ &= 6 \int \left(u-1 + \frac{1}{u+1}\right) du \\ &= 3u^2 - 6u + 6 \ln|u+1| + C \end{aligned}$$

Trigonometrik fonksiyonların integrali

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

negatif sayıların logaritması
toumlu değil o sebeple
mutlak değere alınır.

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x dx = ?$$

$$\int \csc x dx = ?$$

$$1. \int \sin^m x dx, \int \cos^n x dx$$

i m (veya n) tek terim ise

$$m = 2k+1$$

$$\begin{aligned} \int \sin^{2k+1} x dx &= \int \sin^{2k} x \cdot \sin x dx \\ &= \int (\sin^2 x)^k \cdot \sin x dx \\ &= \int (1-\cos^2 x)^k \cdot \sin x dx \end{aligned}$$

$$= - \int (1-u^2)^k du$$



$$\cos x = u$$

$$-\sin x dx = du$$

$$\begin{aligned} \text{ÖR: } \int \sin^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cdot \sin x \, dx \\ &= \int (1-\cos^2 x) \cdot \sin x \, dx \\ &= \int (u^2 - 1) \, du = \frac{u^3}{3} - u + C \\ &= \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C \end{aligned}$$

$$\text{ÖR: } \int \cos^5 x \, dx$$

$$\begin{aligned} &= \int \cos^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \, dx \\ &= \int (1-\sin^2 x) (1-\sin^2 x) \cos x \, dx && \sin x = u \quad \cos x \, dx = du \\ &= \int (1-u^2)^2 \, du \\ &= \int (1-2u^2+u^4) \, du \end{aligned}$$

(*) m(n) gift term

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\text{ÖR: } \int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int (1+\cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int (1+\cos 2x) \, dx \\ &\quad \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \end{aligned}$$

$$\text{ÖR: } \int \sin^2 x \, dx$$

EK Sorular

u-sub

1

$$\int \frac{m^2 \tan^{-1} m^3}{1+m^6} dm$$

$$t = \tan^{-1}(m^3)$$

$$\frac{dt}{dm} = \frac{1}{1+m^6} \cdot 3m^2$$

$$dt = \frac{3m^2}{1+m^6} dm$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{dt}{3} \cdot t \\ &= \frac{1}{3} \int t dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^2}{2} + C \\ &= \frac{(\tan^{-1}(m^3))^2}{6} + C \end{aligned}$$