# Ayrık Matematik

## Yüklemler ve Kümeler

H. Turgut Uyar   Ayşegül Gençata Yayımlı   Emre Harmancı

2001-2013



## Lisans





## Konular

Yüklemler
- Giriş
- Niceleyiciler
- Çoklu Niceleyiciler

Kümeler
- Giriş
- Altküme
- Küme İşlemleri
- İçleme-Dışlama



## Yüklem

**Tanım**
yüklem:

- bir ya da birden fazla değişken içeren ve
- bir önerme olmayan ama
- değişkenlere izin verilen seçenekler arasından değer verildiğinde bir önerme haline gelen

bir belirtim tümcesi (*açık bildirim*)



## Çalışma Evreni

**Tanım**
çalışma evreni: $\mathcal{U}$
izin verilen seçenekler kümesi

- örnekler:
  - $\mathbb{Z}$: tamsayılar
  - $\mathbb{N}$: doğal sayılar
  - $\mathbb{Z}^+$: pozitif tamsayılar
  - $\mathbb{Q}$: rasyonel sayılar
  - $\mathbb{R}$: reel sayılar
  - $\mathbb{C}$: karmaşık sayılar



## Yüklem Örnekleri

**Örnek**
$\mathcal{U} = \mathbb{N}$
$p(x)$: $x + 2$ bir çift sayıdır

$p(5)$: $Y$
$p(8)$: $D$

$\neg p(x)$: $x + 2$ bir çift sayı değildir

**Örnek**
$\mathcal{U} = \mathbb{N}$
$q(x, y)$: $x + y$ ve $x - 2y$ birer çift sayıdır

$q(11, 3)$: $Y$, $q(14, 4)$: $D$

## Niceleyiciler

bazı

Tanım
varlık niceleyicisi:
yüklem bazı değerler için doğru

- simgesi: $\exists$
- okunuşu: *vardır*

- simge: $\exists!$
- okunuşu: *vardır ve tektir*

Tanım
evrensel niceleyici:
yüklem bütün değerler için doğru

- simgesi: $\forall$
- okunuşu: *her*



## Niceleyiciler

varlık niceleyicisi
$\mathcal{U} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
$\exists x \; p(x) \equiv p(x_1) \vee p(x_2) \vee \cdots \vee p(x_n)$

- *bazı x'ler için $p(x)$ doğru*

evrensel niceleyici
$\mathcal{U} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
$\forall x \; p(x) \equiv p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \cdots \wedge p(x_n)$

- *her x için $p(x)$ doğru*



## Niceleyici Örnekleri

Örnek
$\mathcal{U} = \mathbb{R}$

- $p(x) : x \geq 0$
- $q(x) : x^2 \geq 0$
- $r(x) : (x-4)(x+1) = 0$
- $s(x) : x^2 - 3 > 0$

yandaki ifadeler doğru mudur?

- $\exists x \; [p(x) \wedge r(x)]$
- $\forall x \; [p(x) \rightarrow q(x)]$
- $\forall x \; [q(x) \rightarrow s(x)]$
- $\forall x \; [r(x) \vee s(x)]$
- $\forall x \; [r(x) \rightarrow p(x)]$



## Niceleyicilerin Değillenmesi

- $\forall$ yerine $\exists$, $\exists$ yerine $\forall$ konur
- yüklem değillenir

$$\begin{array}{rcl} \neg\exists x \; p(x) & \Leftrightarrow & \forall x \; \neg p(x) \\ \neg\exists x \; \neg p(x) & \Leftrightarrow & \forall x \; p(x) \\ \neg\forall x \; p(x) & \Leftrightarrow & \exists x \; \neg p(x) \\ \neg\forall x \; \neg p(x) & \Leftrightarrow & \exists x \; p(x) \end{array}$$



## Niceleyicilerin Değillenmesi

Teorem
$\neg\exists x \; p(x) \Leftrightarrow \forall x \; \neg p(x)$

Tanıt.

$$\begin{array}{rcl} \neg\exists x \; p(x) & \equiv & \neg[p(x_1) \vee p(x_2) \vee \cdots \vee p(x_n)] \\ & \Leftrightarrow & \neg p(x_1) \wedge \neg p(x_2) \wedge \cdots \wedge \neg p(x_n) \\ & \equiv & \forall x \; \neg p(x) \end{array}$$

□



## Niceleyici Eşdeğerlilikleri

Teorem
$\exists x \; [p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow \exists x \; p(x) \vee \exists x \; q(x)$

Teorem
$\forall x \; [p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow \forall x \; p(x) \wedge \forall x \; q(x)$

## Niceleyici Gerektirmeleri

Teorem
$\forall x\ p(x) \Rightarrow \exists x\ p(x)$

Teorem
$\exists x\ [p(x) \land q(x)] \Rightarrow \exists x\ p(x) \land \exists x\ q(x)$

Teorem
$\forall x\ p(x) \lor \forall x\ q(x) \Rightarrow \forall x\ [p(x) \lor q(x)]$



## Çoklu Niceleyiciler

*bazı x'ler için bazı y'ler doğrulamak için bulunabilir
* her x için bazı y'ler doğrulamak için bulunabilir
* bazı x'ler için tüm y'ler doğrulamak için bulunabilir
* tüm x'ler için tüm y'ler doğrulamak için kullanılabilir

- $\exists x \exists y\ p(x, y)$
- $\forall x \exists y\ p(x, y)$
- $\exists x \forall y\ p(x, y)$
- $\forall x \forall y\ p(x, y)$

*bazı x'ler için öyle bazı y'ler bulabilir ki
* her x için öyle bazı y'ler bulabilir ki
* her y için bazı x'ler bulunabilir ki
* her x için tüm y'ler bulunur ki bu ifade doğru olsun



## Çoklu Niceleyici Örnekleri

Örnek
$\mathcal{U} = \mathbb{Z}$
$p(x, y) : x + y = 17$

- $\forall x \exists y\ p(x, y)$:
  her $x$ için öyle bir $y$ bulunabilir ki $x + y = 17$ olur
- $\exists y \forall x\ p(x, y)$:
  öyle bir $y$ bulunabilir ki her $x$ için $x + y = 17$ olur
- $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ olsa?



## Çoklu Niceleyiciler

Örnek
$\mathcal{U}_x = \{1, 2\} \land \mathcal{U}_y = \{A, B\}$

dış döngü - iç döngü

$$
\begin{aligned}
\exists x \exists y\ p(x, y) &\equiv [p(1, A) \lor p(1, B)] \lor [p(2, A) \lor p(2, B)] \\
\exists x \forall y\ p(x, y) &\equiv [p(1, A) \land p(1, B)] \lor [p(2, A) \land p(2, B)] \\
\forall x \exists y\ p(x, y) &\equiv [p(1, A) \lor p(1, B)] \land [p(2, A) \lor p(2, B)] \\
\forall x \forall y\ p(x, y) &\equiv [p(1, A) \land p(1, B)] \land [p(2, A) \land p(2, B)]
\end{aligned}
$$



## Kaynaklar

Okunacak: Grimaldi

- Chapter 2: Fundamentals of Logic
  - 2.4. The Use of Quantifiers

Yardımcı Kitap: O'Donnell, Hall, Page

- Chapter 7: Predicate Logic



## Küme

Tanım
küme:

- birbirinden ayırt edilebilen
- aralarında sıralama yapılmamış
- yinelenmeyen

elemanlar topluluğu

## Küme Gösterilimi

- *açık gösterilim*
  elemanlar süslü parantezler içinde listelenir: $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
- *kapalı gösterilim*
  bir yüklemi doğru kılan elemanlar: $\{x | x \in G, p(x)\}$
- $\emptyset$: boş küme
- $S$ bir küme, $a$ bir nesne olsun
  - $a \in S$: $a$ nesnesi $S$ kümesinin elemanıdır
  - $a \notin S$: $a$ nesnesi $S$ kümesinin elemanı değildir
- $|S|$: eleman sayısı (kardinalite)



## Açık Gösterilim Örneği

Örnek
$\{3, 8, 2, 11, 5\}$
$11 \in \{3, 8, 2, 11, 5\}$
$|\{3, 8, 2, 11, 5\}| = 5$



## Kapalı Gösterilim Örnekleri

Örnek
$\{x | x \in \mathbb{Z}^+, 20 < x^3 < 100\} \equiv \{3, 4\}$
$\{2x - 1 | x \in \mathbb{Z}^+, 20 < x^3 < 100\} \equiv \{5, 7\}$

Örnek
$A = \{x | x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 5\}$

Örnek
$E = \{n | n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}\ [n = 2k]\}$
$A = \{x | x \in E, 1 \leq x \leq 5\}$



## Küme İkilemi

- Bir köyde bir berber yaşıyor.
  Kendi traş olmayan herkesi traş ediyor,
  Kendi traş olan kimseyi traş etmiyor.
  *Bu berber kendi traş olur mu?*
- evet $\rightarrow$ ama kendi traş olan kimseyi traş etmiyor
  $\rightarrow$ hayır
- hayır $\rightarrow$ ama kendi traş olmayan herkesi traş ediyor
  $\rightarrow$ evet



## Küme İkilemi

- $S$ kendisinin elemanı olmayan kümeler kümesi olsun
  $S = \{A | A \notin A\}$
  *$S$ kendinin elemanı mıdır?*
- evet $\rightarrow$ ama yüklemi sağlamaz $\rightarrow$ hayır
- hayır $\rightarrow$ ama yüklemi sağlar $\rightarrow$ evet



## Altküme

Tanım
$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\ [x \in A \rightarrow x \in B]$

- küme eşitliği:
  $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \land (B \subseteq A)$
- uygun altküme:
  $A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \land (A \neq B)$
- $\forall S\ [\emptyset \subseteq S]$

## Altküme

altküme değil

$$\begin{aligned} A \nsubseteq B \quad \Leftrightarrow & \quad \neg\forall x\ [x \in A \rightarrow x \in B] \\ \Leftrightarrow & \quad \exists x\ \neg[x \in A \rightarrow x \in B] \\ \Leftrightarrow & \quad \exists x\ \neg[\neg(x \in A) \vee (x \in B)] \\ \Leftrightarrow & \quad \exists x\ [(x \in A) \wedge \neg(x \in B)] \\ \Leftrightarrow & \quad \exists x\ [(x \in A) \wedge (x \notin B)] \end{aligned}$$

p->q ==> p' v q



## Altkümeler Kümesi

Tanım
altkümeler kümesi: $\mathcal{P}(S)$
bir kümenin bütün altkümelerinin oluşturduğu küme,
boş küme ve kendisi dahil

- $n$ elemanlı bir kümenin altkümeler kümesinin $2^n$ elemanı vardır



## Altkümeler Kümesi Örneği

Örnek

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \ \{ & \\ & \emptyset, \\ & \{1\},\{2\},\{3\}, \\ & \{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}, \\ & \{1,2,3\} \\ \} & \end{aligned}$$



## Küme İşlemleri

tümleme
$\overline{A} = \{x | x \notin A\}$

kesişim
$A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$

- $A \cap B = \emptyset$ ise $A$ ile $B$ ayrık kümeler

birleşim
$A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$



## Küme İşlemleri

fark
$A - B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$

- $A - B = A \cap \overline{B}$
- *bakışımlı fark*:
  $A \triangle B = \{x | (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B)\}$



## Kartezyen Çarpım

Tanım
Kartezyen çarpım:
$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$
$A \times B \times C \times \cdots \times N = \{(a,b,\ldots,n) | a \in A, b \in B, \ldots, n \in N\}$

- $|A \times B \times C \times \cdots \times N| = |A| \cdot |B| \cdot |C| \cdots |N|$

## Kartezyen Çarpım Örneği

**Örnek**

$A = \{a_1.a_2, a_3, a_4\}$
$B = \{b_1, b_2, b_3\}$

$$A \times B = \{ (a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3), (a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3), (a_3,b_1),(a_3,b_2),(a_3,b_3), (a_4,b_1),(a_4,b_2),(a_4,b_3) \}$$



## Eşdeğerlilikler

**Çifte Tümleme**
$\overline{\overline{A}} = A$

**Değişme**
$A \cap B = B \cap A$ $\quad$ $A \cup B = B \cup A$

**Birleşme**
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $\quad$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

**Sabit Kuvvetlilik**
$A \cap A = A$ $\quad$ $A \cup A = A$

**Terslik**
$A \cap \overline{A} = \emptyset$ $\quad$ $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$



## Eşdeğerlilikler

**Etkisizlik**
$A \cap \mathcal{U} = A$ $\quad$ $A \cup \emptyset = A$

**Baskınlık**
$A \cap \emptyset = \emptyset$ $\quad$ $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$

**Dağılma**
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\quad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

**Yutma**
$A \cap (A \cup B) = A$ $\quad$ $A \cup (A \cap B) = A$

**De Morgan Yasaları**
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\quad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



## De Morgan Kuralı

*Tanıt.*

$$\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x | x \notin (A \cap B)\} \\
&= \{x | \neg(x \in (A \cap B))\} \\
&= \{x | \neg((x \in A) \wedge (x \in B))\} \\
&= \{x | \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} \\
&= \{x | (x \notin A) \vee (x \notin B)\} \\
&= \{x | (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B})\} \\
&= \{x | x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} \\
&= \overline{A} \cup \overline{B}
\end{aligned}$$

□



## Eşdeğerlilik Örneği

**Teorem**
$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$



## Eşdeğerlilik Örneği

*Tanıt.*

$$\begin{aligned}
(A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} \\
&= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\
&= ((A \cap B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \\
&= \emptyset \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \\
&= (A \cap B) \cap \overline{C} \\
&= A \cap (B \cap \overline{C}) \\
&= A \cap (B - C)
\end{aligned}$$

□

## İçleme-Dışlama İlkesi

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \cup B \cup C| =$
  $|A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$

**Teorem**

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_i |A_i| - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| \\
&\quad + \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&\quad \cdots + -1^{n-1} |A_i \cap A_j \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
$$



## İçleme-Dışlama İlkesi Örneği

**Örnek (Eratosthenes Kalburu)**

- asal sayıları bulmak için bir yöntem

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | | | |
| 2 | 3 | | 5 | | 7 | | 9 | | 11 | | 13 | | 15 | | 17 |
| | 19 | | 21 | | 23 | | 25 | | 27 | | 29 | | | | |
| 2 | 3 | | 5 | | 7 | | | | 11 | | 13 | | | | 17 |
| | 19 | | | | 23 | | 25 | | | | 29 | | | | |
| 2 | 3 | | 5 | | 7 | | | | 11 | | 13 | | | | 17 |
| | 19 | | | | 23 | | | | | | 29 | | | | |

İlk iterasyonda 2'nin katlarını sil
Sonra üçün, sonra beşin, sonra 7 ...



## İçleme-Dışlama İlkesi Örneği

**Örnek (Eratosthenes Kalburu)**

- 1'den 100'e kadar asal sayıların sayısı
- 2, 3, 5 ve 7'ye bölünemeyen sayılar
  - $A_2$: 2'ye bölünen sayılar kümesi
  - $A_3$: 3'e bölünen sayılar kümesi
  - $A_5$: 5'e bölünen sayılar kümesi
  - $A_7$: 7'ye bölünen sayılar kümesi
- $|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7|$



## İçleme-Dışlama İlkesi Örneği

**Örnek (Eratosthenes Kalburu)**

- $|A_2| = \lfloor 100/2 \rfloor = 50$
- $|A_3| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33$
- $|A_5| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20$
- $|A_7| = \lfloor 100/7 \rfloor = 14$
- $|A_2 \cap A_3| = \lfloor 100/6 \rfloor = 16$
- $|A_2 \cap A_5| = \lfloor 100/10 \rfloor = 10$
- $|A_2 \cap A_7| = \lfloor 100/14 \rfloor = 7$
- $|A_3 \cap A_5| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$
- $|A_3 \cap A_7| = \lfloor 100/21 \rfloor = 4$
- $|A_5 \cap A_7| = \lfloor 100/35 \rfloor = 2$



## İçleme-Dışlama İlkesi Örneği

**Örnek (Eratosthenes Kalburu)**

- $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \lfloor 100/30 \rfloor = 3$
- $|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \lfloor 100/42 \rfloor = 2$
- $|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \lfloor 100/70 \rfloor = 1$
- $|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \lfloor 100/105 \rfloor = 0$
- $|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \lfloor 100/210 \rfloor = 0$



## İçleme-Dışlama İlkesi Örneği

**Örnek (Eratosthenes Kalburu)**

$$
\begin{aligned}
|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| &= (50 + 33 + 20 + 14) \\
&- (16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2) \\
&+ (3 + 2 + 1 + 0) \\
&- (0) \\
&= 78
\end{aligned}
$$

- asalların sayısı: $(100 - 78) + 4 - 1 = 25$

## Kaynaklar

### Okunacak: Grimaldi

- Chapter 3: Set Theory
  - 3.1. Sets and Subsets
  - 3.2. Set Operations and the Laws of Set Theory
- Chapter 8: The Principle of Inclusion and Exclusion
  - 8.1. The Principle of Inclusion and Exclusion

### Yardımcı Kitap: O'Donnell, Hall, Page

- Chapter 8: Set Theory