Teoria da Computação
Redutibilidade

Leonardo Takuno
{leonardo.takuno@gmail.com}

Centro Universitário Senac

Sumário

Sumário

Apresentação

- Redutibilidade
  - Técnica para relacionar dois problemas (linguagens)
  - Usa-se uma máquina para a linguagem B para criar uma outra máquina para a linguagem A.
  - Assim, construímos uma “redução de A para B”

Redutibilidade

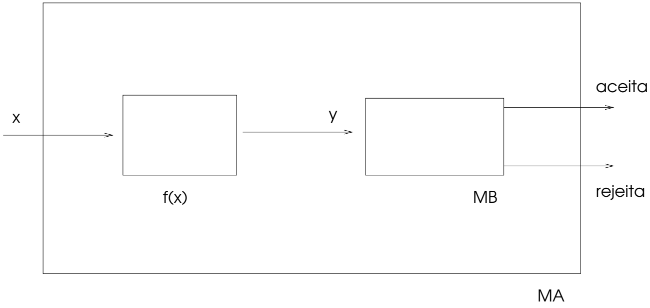
"Reduzir de A para B"

$M_A =$ "Sobre a entrada x:

1. Seja $y = f(x)$
2. Rode M_B sobre y
3. Aceite se M_B aceita. Rejeite se M_B rejeita.

Redutibilidade

"Reduzir de *A* para *B*"



Exemplos de redução

$A_{AFD} = \{\langle A, w\rangle | A \text{ é AFD que aceita } w\}$
$A_{AFN} = \{\langle A, w\rangle | A \text{ é AFN que aceita } w\}$
$A_{ER} = \{\langle R, w\rangle | R \text{ é ER que aceita } w\}$

$M_{AFD} =$ "Sobre a entrada $\langle B, w\rangle$, onde B é um AFD, e w, uma cadeia:

1. Simule B sobre a entrada w;
2. Se a simulação termina em um estado final, **aceite**. Caso contrário, **rejeite**"

Exemplos de redução

Redução de A_{AFN} para A_{AFD}:

$M_{AFN} =$ "Sobre a entrada $\langle B, w\rangle$ onde B é um AFN, e w, uma cadeia:

1. Converta AFN B para um AFD equivalente C
2. Rode a MT M_{AFD} sobre $\langle C, w\rangle$.
3. Se M_{AFD} aceita, **aceite**; caso contrário, **rejeite**".

Exemplos de redução

Redução de A_{ER} para A_{AFN}:

$M_{A_{ER}}$ = "Sobre a entrada $\langle R, w \rangle$, onde R é uma expressão regular e w é uma cadeia:

1. Converta a expressão regular R para um AFN equivalente B
2. Rode a MT M_{AFN} sobre $\langle B, w \rangle$
3. Se M_{AFN} aceitar, **aceite**, caso contrário, **rejeite**"

Exemplos de redução

$V_{AFD} = \{\langle A\rangle | A \text{ é AFD e } L(A) = \emptyset\}$
$EQ_{AFD} = \{\langle A, B\rangle | A \text{ e } B \text{ são AFDs e } L(A) = L(B)\}$

Como usar $M_{V_{AFD}}$ que decide V_{AFD} para decidir EQ_{AFD}?
Dados AFDs A e B:

- $L(?) = \emptyset$, $L(A) = L(B)$
- $L(?) \neq \emptyset$, $L(A) \neq L(B)$

Exemplos de redução

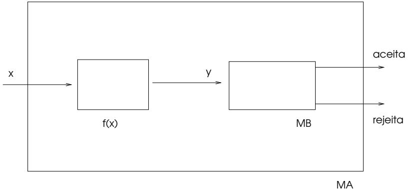
Redução de EQ_{AFD} para V_{AFD}:

$M_{EQ_{AFD}}$ = "Sobre a entrada $\langle A, B \rangle$ onde A e B são AFDs:

1. Construa o AFD C tal que $L(C) = (L(A) \cap \overline{L(B)}) \cup (\overline{L(A)} \cap L(B))$
2. Rode a $M_{V_{AFD}}$ sobre a entrada $\langle C \rangle$.
3. Se $M_{V_{AFD}}$ aceita, **aceite**. Caso contrário, **rejeite**"

Quais conclusões podemos obter?

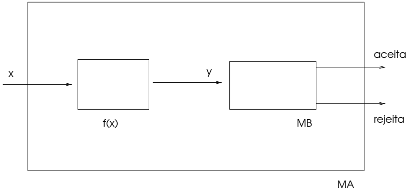
Se A pode ser reduzido para B



- Se B é decidível, então A também é.
- Resolver B não pode ser mais difícil do que resolver A, pois qualquer solução para B diretamente dá uma solução para A.

Quais conclusões podemos obter?

Se A pode ser reduzido para B



- Se B é decidível, então A também é.
- Se A não é decidível, então B também não é.

Redutibilidade

Vamos utilizar a redutibilidade para provar o seguinte:

Teorema 5.1: A linguagem

$$PARA_{MT} = \{\langle M, w\rangle | \text{M é uma MT e M pára sobre w}\}$$

é indecidível.

- Sabemos que $A_{MT} = \{\langle M, w\rangle | M$ é uma MT que aceita $w\}$ é indecidível.
- Idéia:
    - Suponha que $PARA_{MT}$ é decidível
    - Mostre que podemos usar $PARA_{MT}$ para decidir A_{MT}. (Redução)
    - Conclua que A_{MT} é decidível. Contradição.

Redutibilidade

Teorema 5.1: A linguagem

$$PARA_{MT} = \{\langle M, w\rangle | \text{M é uma MT e M pára sobre w}\}$$

é indecidível.

Prova: Prova por contradição. Supomos que $PARA_{MT}$ seja decidível e usamos essa suposição para mostrar que A_{MT} é decidível, contradizendo o Teorema 4.11. Suponha que MT R decida $PARA_{MT}$.

Redutibilidade

Teorema 5.1: A linguagem

$$PARA_{MT} = \{\langle M, w\rangle | \text{M é uma MT e M pára sobre w}\}$$

é indecidível.

Construímos a MT S para decidir A_{MT} da seguinte forma:
S = "Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$, uma codificação de uma MT M e uma cadeia w:

1. Rode MT R sobre a entrada $\langle M, w\rangle$
2. Se R rejeita, *rejeite*
3. Se R aceita, simule M sobre w até que ela pare
4. Se M aceita, *aceite*; se M rejeita, *rejeite* "

Redutibilidade

Nós vimos que A_{MT} é indecidível, logo é uma contradição e nossa hipótese de que $PARA_{MT}$ é decidível deve ser incorreta. $\square$

Redutibilidade

Teorema 5.2: A linguagem

$$V_{MT} = \{\langle M \rangle | \text{M é uma MT L(M)} = \oslash\}$$

é indecidível.

- Utilizando a idéia anterior:
  - Seja R uma MT que decida V_{MT}
  - Usaremos R para construir uma máquina MT S que decide A_{MT}
  - Prove A_{MT} é decidível. Contradição.
  - Então a MT R não pode existir.

Redutibilidade

Teorema 5.2: A linguagem

$$V_{MT} = \{\langle M \rangle | \text{M é uma MT L(M)} = \oslash\}$$

é indecidível.

Como S funcionará quando ela receber a entrada $\langle M, w \rangle$

- **Idéia 1:**
  - Rodar R sobre a entrada $\langle M \rangle$ e ver se aceita.
  - Se aceita, sabemos que $L(M) = \oslash$, então M não aceita w.
  - Mas se R rejeita $\langle M \rangle$, M aceita alguma cadeia, mas não sabemos se M aceita w.
  - **Assim, usaremos uma idéia diferente**.

Redutibilidade

Teorema 5.2: A linguagem

$$V_{MT} = \{\langle M \rangle | \text{M é uma MT L(M)} = \oslash\}$$

é indecidível.

Como S funcionará quando ela receber a entrada $\langle M, w \rangle$

- **Idéia 2:**
  - Em vez de rodar R sobre $\langle M \rangle$, rodamos R sobre uma modificação de $\langle M \rangle$, a qual chamaremos de $M1$.
  - $M1$ rejeita todas as cadeias, exceto w.
  - Então usamos R para determinar se M1 reconhece uma linguagem vazia.
  - Se a linguagem é vazia, então $M1$ não aceita w, caso contrário, $M1$ aceita w.

Redutibilidade

Teorema 5.2: A linguagem

$$V_{MT} = \{\langle M \rangle | \text{M é uma MT L(M)} = \oslash\}$$

é indecidível.

Prova: Por contradição. Assuma que V_{MT} é decidível e R é o decisor, e aí mostramos que A_{MT} é decidível - uma contradição. Supomos que a MT R decide V_{MT} e construímos a MT S que decide A_{MT}.

Redutibilidade

Teorema 5.2: A linguagem

$$V_{MT} = \{\langle M\rangle | \text{M é uma MT L(M)} = \emptyset\}$$

é indecidível.

S = "Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$, uma codificação de uma MT M e uma cadeia w:

1. Construa a máquina M1 a seguir :
   M1 = " Sobre a entrada x
   1. Se $x \neq w$, rejeite
   2. Se $x = w$, rode M sobre a entrada w e aceite se M aceita.
2. Execute R sobre $\langle M1\rangle$
3. Se R aceita, rejeite, se R rejeita, aceite." $\square$

Redutibilidade

Teorema 5.3: A linguagem

$$REGULAR_{MT} = \{\langle M\rangle|\text{M é MT e L(M) é uma linguagem regular}\}$$

é indecidível.

- Suponha que $REGULAR_{MT}$ é decidível por uma MT R.
- Usaremos essa suposição para construir uma MT S que decide A_{MT} - uma contradição.

Redutibilidade

Teorema 5.3: A linguagem

$$REGULAR_{MT} = \{\langle M \rangle | \text{M é MT e L(M) é uma linguagem regular}\}$$

é indecidível.

- **idéia:** Sobre a entrada $\langle M, w \rangle$, modificar M de modo que a máquina resultante M2 reconhece uma linguagem regular se, e somente se, M reconhece w. Assim, temos
  - Se $w \in L(M)$ então $L(M2) = \Sigma^*$ (Uma linguagem regular qualquer)
  - Se $w \notin L(M)$ então $L(M2) = \{0^n 1^n | n \geq 0\}$ (Uma linguagem qualquer que não seja regular)

Redutibilidade

Teorema 5.3: A linguagem

$$REGULAR_{MT} = \{\langle M\rangle | \text{M é MT e L(M) é uma linguagem regular}\}$$

é indecidível.

A máquina S decide A_{MT}, construída usando R é:
S = "Entrada $\langle M, w\rangle$, onde M é uma MT e w é uma string

1. Construa uma MT M2:
   M2 = Entrada string x
   1. Se x tem a forma 0^n1^n, aceite
   2. Se x não tem essa forma, então executa M sobre a entrada w e aceita, se M aceita w.
2. Execute R sobre a entrada $\langle M2\rangle$
3. Se R aceita, *aceite*; se R rejeita, *rejeite* ." □

Redutibilidade

Teorema 5.4: A linguagem

$$EQ_{MT} = \{\langle M1, M2\rangle | M_1 \text{ e } M_2 \text{ são MTs e } L(M_1) = L(M_2)\}$$

é indecidível.

- $V_{MT} = \{\langle M\rangle|$ M é uma MT L(M) $= \oslash\}$
- V_{MT} é redutível a EQ_{MT}
- Mostre que se EQ_{MT} fosse decidível, V_{MT} também seria.

Redutibilidade

Teorema 5.4: A linguagem

$$EQ_{MT} = \{\langle M1, M2\rangle | M_1 \text{ e } M_2 \text{ são MTs e } L(M_1) = L(M_2)\}$$

é indecidível.

- Mostre que se EQ_{MT} fosse decidível, V_{MT} também seria.
  - Assuma que uma MT R decide EQ_{MT} e construa uma MT S para decidir V_{MT}
  - Utilize uma MT M1 que rejeite todas as entradas, ou seja, tenha linguagem vazia
  - Utilize R para comparar M com M1 e verificar se $L(M) = \emptyset$, aceitando ou rejeitando.
  - Conclua que V_{MT} é decidível. Contradição.

Redutibilidade

Teorema 5.4: A linguagem

$$EQ_{MT} = \{\langle M1, M2\rangle | M_1 \text{ e } M_2 \text{ são MTs e } L(M_1) = L(M_2)\}$$

é indecidível.

Prova: Por contradição. Assuma que EQ_{MT} é decidível e R é um decisor. Mostramos que V_{MT} reduz EQ_{MT} por construir um decisor S para decidir V_{MT}.

Redutibilidade

Teorema 5.4: A linguagem

$$EQ_{MT} = \{\langle M1, M2\rangle | M_1 \text{ e } M_2 \text{ são MTs e } L(M_1) = L(M_2)\}$$

é indecidível.

S = "Sobre a entrada $\langle M\rangle$, onde M é uma MT:

1. Rode R sobre a entrada $\langle M, M_1\rangle$, onde M_1 é uma MT que rejeita todas as entradas.
2. Se R aceita, *aceite*; se R rejeita, *rejeite*."

Se R decide EQ_{MT}, S decide V_{MT}. Mas V_{MT} é indecidível pelo Teorema 5.2 portanto EQ_{MT} também tem de ser indecidível. □

Sumário

Teorema de Rice

Teorema: Todo teste de qualquer propriedade (não trivial) de linguagens reconhecidas por máquinas de Turing é indecidível.

Teorema de Rice

O que é uma propriedade de linguagem ?

- Um conjunto de linguagens que satisfazem a uma certa condição;
- Uma **propriedade** P de linguagem reconhecida por Máquina de Turing é uma coleção de descrições de máquinas de Turing satisfazendo
  Se $L(M_1) = L(M_2)$ então $\langle M_1 \rangle \in P \Leftrightarrow \langle M_2 \rangle \in P$

Note que uma propriedade de linguagens é, ela mesma, uma linguagem que contém cadeias descrevendo MTs.

Teorema de Rice

O que é uma propriedade trivial?

- Um **propriedade trivial de linguagem** é uma propriedade P que inclui todas as descrições de MTs, ou nenhuma.

  Exemplos:

  - $L(M) \subseteq \Sigma^*$ é trivial. Toda linguagem é subconjunto de Σ^*;
  - "A MT M aceita uma quantidade enumerável de cadeias?". Toda MT satisfaz isso.
  - "A MT aceita e rejeita alguma cadeia?". Nenhuma MT faz isso.

Teorema de Rice

O que é uma propriedade não-trivial?

- Uma **propriedade não-trivial de linguagem** é uma propriedade P tal que:
  1. P inclui pelo menos uma descrição de MT, e
  2. P não inclui todas as descrições de MTs.

Teorema de Rice

Teorema: Todo teste de qualquer propriedade (não trivial) de linguagens reconhecidas por máquinas de Turing é indecidível.

Para mostra que uma **propriedade P** de uma linguagem é indecidível, devemos verificar as seguintes condições:

1. P é uma propriedade da linguagem da linguagem da MT

$$\text{se } L(M1) = L(M2) \text{ então } \langle M1 \rangle \in P \Leftrightarrow \langle M2 \rangle \in P$$

2. P é não-trivial: ela contém alguma descrição, mas não todas as descrições de MTs.
   - existe uma MT M1 para o qual $\langle M1 \rangle \in P$, e
   - existe uma MT M2 para o qual $\langle M2 \rangle \notin P$

Teorema de Rice

Teorema: Todo teste de qualquer propriedade (não trivial) de linguagens reconhecidas por máquinas de Turing é indecidível.

exemplo:

- Testar se a linguagem reconhecida por uma MT é livre do contexto.
- Testar se linguagem reconhecida por uma MT é decidível.
- Testar se a linguagem reconhecida por uma máquina de Turing é finito.

Teorema de Rice

Teorema: Todo teste de qualquer propriedade (não trivial) de linguagens reconhecidas por máquinas de Turing é indecidível.

Prova: Por contradição. Seja P uma propriedade não-trivial de linguagem. Queremos mostrar que

$$L_P = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ satisfaz } P\},$$

é indecidível.
Assuma que L_P seja decidível e M_P é um decisor. Mostramos que podemos construir um decisor S para A_{MT}.

Teorema de Rice

Teorema: Todo teste de qualquer propriedade (não trivial) de linguagens reconhecidas por máquinas de Turing é indecidível.

S = "Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$, onde M é uma MT e w uma string:

1. Use MT M e w para construir a seguinte MT M':
   M' = Sobre a entrada $\langle T, x\rangle$, onde T é uma MT e x uma string
   1. Simule M sobre w. Se pára e rejeita, *rejeite*. se aceita, proceda os estágio 2
   2. Simule T sobre x. Se aceita, *aceite* (note: L_P não é trivial, então $\langle T\rangle \in L_P$ tem que existir.)
2. Execute M_P sobre M' para determinar se $\langle M'\rangle \in L_P$. Se M_P aceita, *aceite*. Caso contrário, rejeite."

Teorema de Rice

A MT M' simula T se M aceita w. Logo, $L(M')$ é igual a $L(T)$ se M aceita w e é igual a $\emptyset$, em caso contrário. Portanto, $\langle M' \rangle \in P$ sse M aceita w.

- M aceita $w \Rightarrow L(M') = L(T) \Rightarrow \langle M' \rangle \in P$
- M rejeita $w \Rightarrow L(M') = \emptyset = L(M_\emptyset) \Rightarrow \langle M' \rangle \notin P$
- M entra em loop sobre $w \Rightarrow L(M') = \emptyset = L(M_\emptyset) \Rightarrow \langle M' \rangle \notin P$

Visto que A_{MT} não é decidível, esta máquina não pode existir e nossa hipótese que L_P é decidível deve ser incorreta. $\square$

Teorema de Rice - aplicação

Teorema: A linguagem

$$INFINITA_{MT} = \{\langle M\rangle | M \text{ é uma MT e } L(M) \text{ é infinita}\}$$

é indecidível.

Prova: Para provar que $INFINITA_{MT}$ é indecidível, usamos o teorema de Rice. Para isso, observamos as condições:

1. Propriedade de uma linguagem de MT.
   se $L(M1) = L(M2)$ então
   $\langle M1\rangle \in INFINITA_{MT}$ sse $\langle M2\rangle \in INFINITA_{MT}$
2. P é não-trivial
   Seja X uma MT com $L(X) = \Sigma^* \Rightarrow \langle X\rangle \in INFINITA_{MT}$
   Seja Y uma MT com $L(Y) = \emptyset \Rightarrow \langle Y\rangle \notin INFINITA_{MT}$

Pelo Teorema de Rice $INFINITA_{MT}$ é indecidível.

Teorema de Rice - aplicação

Teorema: A linguagem

$$REGULAR_{MT} = \{\langle M \rangle | M \text{ é uma MT e } L(M) \text{ é regular}\}$$

é indecidível.

Prova: Usando o teorema de Rice, observe as seguintes condições:

1. Propriedade de uma linguagem de MT.
   se $L(M1) = L(M2)$ então
   $\langle M1 \rangle \in REGULAR_{MT}$ sse $\langle M2 \rangle \in REGULAR_{MT}$
2. P é não-trivial
   Seja X uma MT com $L(X) = \emptyset$
   $\Rightarrow \langle X \rangle \in REGULAR_{MT}$
   Seja Y uma MT que aceita a linguagem $\{0^n 1^n : n \geq 0\}$
   $\Rightarrow \langle Y \rangle \notin REGULAR_{MT}$

Pelo Teorema de Rice $REGULAR_{MT}$ é indecidível.

Teorema de Rice - aplicação

Teorema: A linguagem

$$H_\varepsilon = \{\langle M\rangle | M \text{ é uma MT e } M \text{ aceita } \varepsilon\}$$

é indecidível.

Prova: Pelo teorema de Rice, verifique as seguintes condições:

1. Propriedade de uma linguagem de MT.
   se $L(M1) = L(M2)$ então $\langle M1\rangle \in H_\varepsilon$ sse $\langle M2\rangle \in H_\varepsilon$
2. P é não-trivial
   Seja X uma MT com $L(X) = \Sigma^* \Rightarrow \langle X\rangle \in H_\varepsilon$
   Seja Y uma MT com $L(Y) = \emptyset \Rightarrow \langle Y\rangle \notin H_\varepsilon$

Pelo Teorema de Rice H_ε é indecidível.

Teorema de Rice - aplicação

Teorema: A linguagem

$$TRES_{MT} = \{\langle M \rangle | M \text{ é uma MT com } |L(M)| \leq 3\}$$

é indecidível.

Prova: Pelo teorema de Rice, verifique as seguintes condições:

1. Propriedade de uma linguagem de MT.
   se $L(M1) = L(M2)$ então
   $\langle M1 \rangle \in TRES_{MT}$ sse $\langle M2 \rangle \in TRES_{MT}$
2. P é não-trivial
   Seja X uma MT com $L(X) = \emptyset \Rightarrow \langle X \rangle \in TRES_{MT}$
   Seja Y uma MT com $L(Y) = \Sigma^* \Rightarrow \langle Y \rangle \notin TRES_{MT}$

Pelo Teorema de Rice $TRES_{MT}$ é indecidível.

Teorema de Rice - exercícios

Utilize o teorema de Rice para provar a indecidibilidade das seguintes linguagens:

1. $L(M) = \emptyset$
2. $L(M) \neq \emptyset$
3. $L(M)$ é finita? $L(M)$ é infinita?
4. $L(M)$ contém pelo menos duas cadeias.
5. $L(M)$ é regular?
6. $L(M)$ é livre de contexto?
7. $L(M) = \Sigma^*$
8. $L(M) = L(M)^{\mathcal{R}}$

Sumário

Reduções via Histórias de Computação

Definição: História de computação é uma seqüência de configurações, C_1, C_2 ,... , C_l, onde C_1 é a configuração inicial de M sobre w, C_l é uma configuração de aceitação ou de rejeição de M, e cada C_i segue C_{i-1} conforme as regras de M.

Autômato linearmente limitado

Definição: Um **autômato linearmente limitado** é um tipo restrito de máquina de Turing na qual à cabeça de leitura-escrita não é permitido mover-se para fora da parte da fita contendo a entrada.

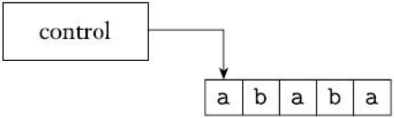


FIGURA 5.7
Esquemática de um autômato linearmente limitado

Autômato linearmente limitado

Lema 5.8: Seja M um ALL com q estados e g símbolos no alfabeto de fita. Existem exatamente qng^n configurações distintas distintas de M para uma fita de comprimente n.

Prova: M tem q estados. O comprimento da sua fita é n, portanto, a cabeça pode estar em uma das n posições e g^n cadeias possíveis de símbolos de fita aparecem sobre a fita. O produto dessas três quantidades é o número total de configurações diferentes de M com uma fita de comprimento n. □

Autômato linearmente limitado

Teorema 5.9:

$$A_{ALL} = \{\langle M, w\rangle | \text{M é um ALL que aceita a cadeia } w\}$$

é decidível.

Prova: O algoritmo que decide A_{ALL} é como segue.
L = "Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$, onde M é um ALL e w é uma cadeia:

1. Simule M sobre w por qng^n passos ou até que ela pare.
2. Se M parou, *aceite* se ela aceitou e *rejeite* se ela rejeitou. Se ela não parou, *rejeite*."

Autômato linearmente limitado

Teorema 5.9:

$$A_{ALL} = \{\langle M, w\rangle | \text{M é um ALL que aceita a cadeia } w\}$$

é decidível.

Se M sobre w não parou dentro de qng^n passos, ela tem que estar repetindo uma configuração conforme o Lema 5.8 e, consequentemente, estar em loop. É por isso que nosso algoritmo rejeita nessa instância. □

Autômato linearmente limitado

Teorema 5.10:

$$V_{ALL} = \{\langle M \rangle | \text{M é um ALL onde } L(M) = \emptyset\}$$

é indecidível.

Ideia da prova: Redução a partir de A_{MT}. Mostramos que se V_{ALL} fosse decidível, A_{MT} também seria.

- Suponha que V_{ALL} é decidível;
- Dado MT M e entrada w, construa um ALL B usando informações de M sobre w.
- Se L(B) é vazia, M não aceita w. Se L(B) não é vazia, M aceita w.

Autômato linearmente limitado

Teorema 5.10:

$$V_{ALL} = \{\langle M \rangle | \text{M é um ALL onde } L(M) = \emptyset\}$$

é indecidível.

Prova: Construímos um ALL B para aceitar uma entrada x se x é uma história de computação de aceitação para M sobre w. Assumimos que a história de computação de aceitação é apresentada como uma única cadeia, com as configurações separadas umas das outras pelo símbolo $\#$ como a figura 5.11.

$$\#\underbrace{\qquad\qquad}_{C_1}\#\underbrace{\qquad\qquad}_{C_2}\#\underbrace{\qquad\qquad}_{C_3}\#\quad\cdots\quad\#\underbrace{\qquad\qquad}_{C_l}\#$$

FIGURA **5.11**
Uma possível entrada para B

Autômato linearmente limitado

Teorema 5.10:

$$V_{ALL} = \{\langle M \rangle | \text{M é um ALL onde } L(M) = \emptyset\}$$

é indecidível.

Prova: O ALL B, então obtem a entrada x e verifica se é uma história de computação de aceitação,o qual deve satisfazer as três condições:

1. C_1 é a configuração inicial para M sobre w.
2. Cada C_{i+1} segue legitimamente de C_i.
3. C_l é uma configuração de aceitação para M.

Obs: Montamos o ALL B para alimentar o decisor de V_{ALL} que pressupomos existir

Autômato linearmente limitado

Teorema 5.10:

$$V_{ALL} = \{\langle M \rangle | \text{M é um ALL onde } L(M) = \emptyset\}$$

é indecidível.

Prova: Agora estamos prontos para enunciar a redução de A_{MT} para V_{ALL}. Suponha que MT R decide V_{ALL}. Construa MT S que decide A_{MT}.

Autômato linearmente limitado

Teorema 5.10:

$$V_{ALL} = \{\langle M \rangle | \text{M é um ALL onde } L(M) = \emptyset\}$$

é indecidível.

S = "Sobre a entrada $\langle M, w \rangle$, onde M é uma MT e w é uma cadeia:

1. Construa o ALL B a partir de M e w conforme descrito.
2. Rode R sobre a entrada $\langle B \rangle$.
3. Se R rejeita, aceite; se R aceita, rejeite."

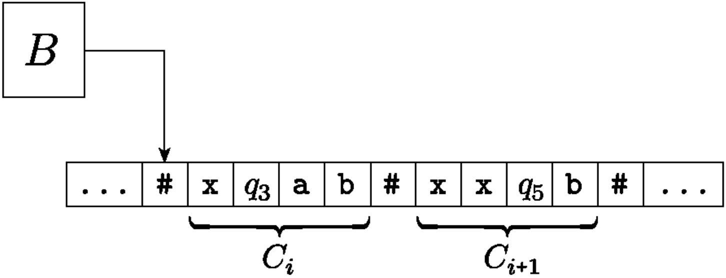
Autômato linearmente limitado

Observe:

- Se R aceita $\langle B \rangle$, então $L(B) = \emptyset$. Então, M não tem nenhuma história de computação de aceitação sobre w e M não aceita w. Conseqüentemente, S rejeita $\langle M, w \rangle$.
- Similarmente, se R rejeita $\langle B \rangle$, a linguagem de B é não vazia. A MT B aceita uma história de computação de aceitação para M sobre w. Portanto, M deve aceitar w. Como conseqüência, S aceita $\langle M, w \rangle$.

□

Autômato linearmente limitado



Sumário

Problemas indecidíveis sobre GLCs

Teorema 5.10:

$$TODAS_{GLC} = \{\langle G \rangle | \text{G é uma GLC e } L(G) = \Sigma^*\}$$

é indecidível.

Prova: Para uma MT M e uma entrada w, construimos uma GLC G para gerar todas as strings que não são histórias de computação de aceitação para M sobre w.

Isto é, G gera todas as strings se e somente se M não aceita w.

Se $TODAS_{GLC}$ fosse decidível então A_{MT} também seria.

Problemas indecidíveis sobre GLCs

Teorema 5.10:

$$TODAS_{GLC} = \{\langle G \rangle | \text{G é uma GLC e } L(G) = \Sigma^*\}$$

é indecidível.

Prova: Assuma que $TODAS_{GLC}$ é decidível. Construímos uma Autômato de Pilha D que aceita a string $\#C_1\#C_2^{\mathcal{R}}\#C_3\#C_4^{\mathcal{R}}\#...\#C_l\#$, tal que $\#C_1\#C_2\#C_3\#C_4\#...\#C_l\#$ não represente uma história de computação de aceitação de M sobre w.

Problemas indecidíveis sobre GLCs

Teorema 5.10:

$$TODAS_{GLC} = \{\langle G \rangle | \text{G é uma GLC e } L(G) = \Sigma^*\}$$

é indecidível.

D = "Sobre a entrada $\#C_1\#C_2^{\mathcal{R}}\#C_3\#C_4^{\mathcal{R}}\#...\#C_l\#$:

1. Se C_1 não é o estado inicial de M, então *aceite*
2. Se C_l não é o estado de aceitação de M, então *aceite*
3. Se C_i não produz C_{i+1}, então *aceite*"

No terceiro passo, D usa a pilha efetivamente.

Problemas indecidíveis sobre GLCs

Teorema 5.10:

$$TODAS_{GLC} = \{\langle G\rangle | \text{G é uma GLC e } L(G) = \Sigma^*\}$$

é indecidível.

Note que :

- $L(D) = \Sigma^* \Leftrightarrow M$ não aceita w, e
- $L(D) \neq \Sigma^* \Leftrightarrow M$ aceita w

□