Dienstag: Beweismethoden

Aufgabe 1

Finde möglichst viele verschiedene Beweise folgender mathematischer Aussage:
Ist $k \geq 2$ ein Teiler einer Zahl n, so ist die Zahl $n+1$ nicht durch k teilbar.

Aufgabe 2

Beweise folgende Aussagen mittels Kontraposition:

(a) Wenn x und y zwei natürliche Zahlen sind, dessen Produkt gerade ist, so muss mindestens eine der beiden Zahlen gerade sein.

(b) Wenn x und y zwei natürliche Zahlen sind, dessen Produkt ungerade ist, so müssen beide Zahlen ungerade sein.

Aufgabe 3

Schreibe einen möglichst präzisen Beweis für die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt keine ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass $6a + 18b = 1$.

(b) Es seien a, b, c natürliche Zahlen mit $a \cdot b = c$. Dann gilt $a \leq \sqrt{c}$ oder $b \leq \sqrt{c}$.

Aufgabe 4

Beweise folgende Aussagen für alle natürlichen Zahlen n mittels vollständiger Induktion[1]:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

(c) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ist durch 9 teilbar.

Zusatzaufgabe

Wir beweisen in dieser Aufgabe die folgende mathematische Aussage aus der Vorlesung vom Montag:
Ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ hat maximal n Nullstellen.
Dazu gehen wir wie folgt vor:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $Q(x)$ ein Polynom von Grad $n-1$ und sei $P(x) = (x - x_0)Q(x)$. Dann ist $P(x)$ ein Polynom vom Grad n.

(b) Zeige, dass wenn $P(x)$ ein Polynom von Grad n ist und x_0 eine Nullstelle von $P(x)$ ist, so kann $P(x)$ geschrieben werden als $P(x) = (x - x_0)Q(x)$, wobei $Q(x)$ ein Polynom von Grad $n-1$ ist.
Warnung: sehr schwierig! (löse ggf. erst (c))

(c) Beweise nun den Satz unter Nutzung von (a) und (b).

[1] Das Summenzeichen ist definiert als $\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + f(n)$ für beliebige Funktionen $f(k)$. Somit ist beispielsweise für Aufgabenteil (a) die Summe $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$ gerade die Summe aller natürlichen Zahlen $\leq n$.