

Donnerstag: Lineare Algebra

Aufgabe 1

Zeige: Der Lösungsraum

$$L = L_{A,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

ist ein Untervektorraum, genau dann, wenn $b = 0 \in \mathbb{R}^m$.

Aufgabe 2

Sei $S \subseteq V$ eine Teilmenge eines Vektorraums V . Zeige, dass der Spann (oder die lineare Hülle) von S :

$$\text{Sp}(S) := \{a_1v_1 + \dots + a_nv_n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, v_i \in S \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}$$

der kleinste Untervektorraum von V ist.

Hinweis: Du musst den folgenden Satz zeigen (Wieso?):

Für jeden Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $S \subseteq W$ gilt $\text{Sp}(S) \subseteq W$.

Aufgabe 3

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume? Was passiert, wenn in (c) der Körper \mathbb{R} durch den endlichen Körper \mathbb{F}_2 ersetzt wird? Verwende hierfür, dass $a^2 = a$ für alle $a \in \mathbb{F}_2$ gilt.

- (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$
- (b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1x_2x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$
- (c) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ (und für \mathbb{F}_2^2 ?)
- (d) $\{(\mu + a, a^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu, a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

Aufgabe 4

Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} . Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig und sei $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $\lambda v_1, \lambda v_2, \dots, \lambda v_n$ linear unabhängig.
- (b) Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ und $w_1, \dots, w_n \in V$ jeweils linear unabhängig. Dann sind $v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n$ linear unabhängig.

Aufgabe 5

Wir betrachten

$$\mathbb{R}_{\leq n}[x] = \{p(x) \mid p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_i \in \mathbb{R}\},$$

also die Menge aller reellen Polynome vom Grad höchstens n .

- (a) Die Menge aller reellen Polynome ist $\mathbb{R}[x]$. Es lässt sich leicht zeigen, dass dies ein Vektorraum ist. Ist diese Menge $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ ein Vektorraum?
- (b) Erkläre, wie man die Basis dieses Polynom-Vektorraums $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ wählen könnte. Vergleiche dies mit dem Standardvektorraum \mathbb{R}^{n+1} und seinen Basisvektoren $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$.
- (c) Bestimme die Dimension von $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$.