

Montag: Aussagenlogik, direkte Beweise

Aufgabe 1

Zeige, dass die Lösungen $x_{1,2}$ der Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Nullstellen des Polynoms $f(x) = ax^2 + bx + c$ sind.

Lösung

Die Mitternachtsformel besagt, dass für ein quadratisches Polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$, bis zu zwei Nullstellen gegeben sind (abhängig davon, ob $b^2 - 4ac$ größer, gleich oder kleiner 0 ist) durch

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Um dies zu überprüfen, setzen wir die Lösungen der Mitternachtsformel in das quadratische Polynom $P(x)$ ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} P(x_{1,2}) &= a \cdot \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) + c \\ &= \frac{1}{4a} (b^2 \mp 2b\sqrt{b^2 - 4ac} + b^2 - 4ac) + \frac{1}{2a} (-b^2 \pm b\sqrt{b^2 - 4ac}) + c \\ &= \frac{1}{4a} (2b^2 \mp 2b\sqrt{b^2 - 4ac} - 4ac - 2b^2 \pm 2b\sqrt{b^2 - 4ac}) + c \\ &= \frac{-4ac}{4a} + c \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit sind $x_{1,2}$ Nullstellen und die Aussage ist bewiesen.

Beachte, dass wir nicht bewiesen haben, dass dies auch die einzigen Nullstellen von $f(x)$ sind. Dies folgt aber (zumindest für $b^2 - 4ac > 0$) aus der Aussage, dass Polynome vom Grad 2 maximal zwei Nullstellen haben, wie in der Zusatzaufgabe des Übungsblattes für Dienstag bewiesen wird.

Aufgabe 2

- (a) Per Definition (Vorlesung) heisst eine Zahl ungerade, falls sie nicht gerade ist. Verneine die Definition von « n ist eine gerade Zahl» um eine explizite Definition für « n ist eine ungerade Zahl» zu erhalten.
- (b) Beweise mittels Wahrheitstafel: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.
- (c) Beweise: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

Lösung

- (a) Per Definition gilt: $n \in \mathbb{N}$ heisst gerade, falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = 2k$.

Die Verneinung dieser Aussage ist: $n \in \mathbb{N}$ heisst nicht gerade (= ungerade), falls es kein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = 2k$.

- (b) Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Die Aussagen $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ haben gemäss Wahrheitstafel für alle Fälle denselben Wahrheitswert. Demnach sind sie äquivalent.

(c) Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

Die Aussagen $\neg(A \wedge B)$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ haben gemäss Wahrheitstafel für alle Fälle denselben Wahrheitswert. Demnach sind sie äquivalent.

Aufgabe 3

Beweise folgenden Satz: Sei $x, y \in \mathbb{R}$. Wenn $y^3 + yx^2 \leq x^3 + xy^2$, dann gilt $y \leq x$.

Lösung

Wir beweisen den Satz mit einem direkten Beweis: Sei $y^3 + yx^2 \leq x^3 + xy^2$. Dann gilt auch $y^3 + yx^2 - x^3 - xy^2 \leq 0$. Wir faktorisieren die linke Seite und erhalten $(y-x)(x^2 + y^2) \leq 0$. Da $x^2 + y^2$ positiv ist, können wir beide Seiten durch $x^2 + y^2$ teilen, wobei zu beachten gilt, dass bei $x^2 + y^2 = 0$ auch $x = y = 0$ gilt und somit der Satz trivial ist. Wir erhalten $y - x \leq 0$ und somit $y \leq x$. \square

Aufgabe 4

Beweise folgenden Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \in \mathbb{N}$.

Lösung

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\frac{n(n+1)}{2}$ eine natürliche Zahl ist, oder äquivalent, dass $n(n+1)$ durch 2 teilbar ist. Damit ist aber auch $n(n+1)(n+2)$ durch 2 teilbar.

Wir zeigen nun zuerst, dass $n(n+1)(n+2)$ durch 3 teilbar ist, also $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \in \mathbb{N}$. Dazu nutzen wir Fallunterscheidung:

1. n ist durch 3 teilbar: Dann gibt es also ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $n = 3k$. Dies folgt aus der Definition von Teilbarkeit. Folglich ist $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(3k)(n+1)(n+2)}{3} = k(n+1)(n+2) \in \mathbb{N}$.
2. n geteilt durch 3 ergibt Rest 1: Dies bedeutet, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $n = 3k - 2$.¹ Wir können folgern, dass $n+2 = 3k$. Aber dann $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{n(n+1)(3k)}{3} = n(n+1)k \in \mathbb{N}$.
3. n geteilt durch 3 ergibt Rest 2: Hier ist nun $n = 3k - 1$, also $n+1 = 3k$. Es folgt analog zu den obigen Fällen $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{n(3k)(n+2)}{3} = nk(n+2) \in \mathbb{N}$.

Weitere Fälle kann es nicht geben, denn der Rest bei Division durch 3 ist 0, 1 oder 2. Demnach ist für alle $n \in \mathbb{N}$ immer $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \in \mathbb{N}$. Äquivalent ist $n(n+1)(n+2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar.

Wir haben also gesehen, dass $n(n+1)(n+2)$ sowohl durch 2, als auch durch 3 teilbar ist. Es folgt daraus, dass n auch durch 6 teilbar sein muss, also $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \in \mathbb{N}$. Nämlich gilt: Ist $n \in \mathbb{N}$ durch 2 teilbar, so ist $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Ist nun n auch durch 3 teilbar, so muss auch k durch 3 teilbar sein, also $k = 3\ell$ für $\ell \in \mathbb{N}$. Folglich ist $n = 2k = 6\ell$ durch 6 teilbar. \square

¹ Wir hätten auch schreiben können «Dies bedeutet, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $n = 3k + 1$ », hätten dann aber die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ gesondert betrachten müssen—denn in diesen Fällen wäre $k = 0$.