Mittwoch: Relationen

Aufgabe 1

Beweise per Induktion: *Eine Menge mit n Elementen besitzt 2^n Teilmengen.*
Hinweise: die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

Lösung

Wir beweisen die Aussage per Induktion:

- $n = 1$: Die Menge $\{x\}$ besitzt nur $\emptyset$ und $\{x\}$ als Teilmengen. Es sind also $2 = 2^1$ Teilmengen.
- $n \implies n+1$: Wir nehmen also an, dass jede aus n Elementen bestehende Menge 2^n Teilmengen besitzt. Wir betrachten nun eine Menge E_{n+1} welche aus den $n+1$ Elementen $x_1, ..., x_n, x_{n+1}$ besteht:

  $$E_{n+1} = \{x_1, ..., x_n, x_{n+1}\}$$

  Wir zerlegen $E_{n+1} = E_n \cup \{x_{n+1}\}$, wobei $E_n = \{x_1, ..., x_n\}$ n Elemente besitzt. E_n hat laut Induktionsannahme 2^n Teilmengen. Alle anderen Teilmengen von E_{n+1} bekommt man als Vereinigung von $\{x_{n+1}\}$ mit einer der Teilmengen von E_n. Es sind somit weitere 2^n Teilmengen dazuzuzählen. Insgesamt haben wir

  $$2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

  Teilmengen.

Aufgabe 2

Für $x, y \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$x \sim y \iff |x - y| < 0.25.$$

Definiert $\sim$ eine Äquivalenzrelation?

Lösung

Nein. Gegenbeispiel: Für $x = 0$, $y = 0.2$ und $z = 0.4$ gilt $|x - y| = 0.2 < 0.25$ und $|y - z| = 0.2 < 0.25$, aber $|x - z| = 0.4 > 0.25$. Also $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \not\Rightarrow (x \sim z)$ und somit ist die Transitivität im Allgemeinen nicht erfüllt.

Aufgabe 3

Zeige, dass die folgenden Relationen auch Äquivalenzrelationen sind.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $x, y \in \mathbb{R}$ setzen wir $x \sim y \iff f(x) = f(y)$.

(b) Auf $\mathbb{Z}$ definieren wir: $n \sim m \iff 5$ teilt $(n - m)$.

Lösung

(a) Dies folgt direkt aus der Definition einer Funktion: eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ordnet jedem Element aus $\mathbb{R}$ genau ein Element aus $\mathbb{R}$ zu. Seien also $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- Reflexivität: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt trivialerweise $f(x) = f(x)$. Das bedeutet, dass $x \sim x$.
- Symmetrie: Ist $x \sim y$, so ist $f(x) = f(y)$. Dann ist aber auch $f(y) = f(x)$, also $y \sim x$.

- Transitivität: Falls $x \sim y$ und $y \sim z$, so gilt $f(x) = f(y)$ und $f(y) = f(z)$. Es folgt $f(x) = f(y) = f(z)$ also auch $f(x) = f(z)$ und somit $x \sim z$.

(b) Wir überprüfen die drei Eigenschaften der Definition einer Äquivalenzrelation. Seien $n, m, l \in \mathbb{Z}$ gegeben:

- Reflexivität: 5 teilt $0 = n - n$. Somit $n \sim n$.
- Symmetrie: Ist $n \sim m$, so wird $n - m$ durch 5 geteilt. Folglich wird auch $m - n = -(n - m)$ durch 5 geteilt, also $m \sim n$.
- Transitivität: Falls $n \sim m$ und $m \sim l$, so werden $n - m$ und $m - l$ durch 5 geteilt. Es gilt nun $n - l = (n - m) + (m - l)$. Da die Terme $n - m$ und $m - l$ separat durch 5 geteilt werden, wird auch deren Summe $n - l$ durch 5 geteilt, das heisst $n \sim l$.

Aufgabe 4

Auf der Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ definieren wir: $A \sim B \iff A \subset B$ oder $B \subset A$. Definiert $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?

Lösung

Nein. Die Transitivität ist nicht erfüllt. Zum Beispiel: $\{1,2\} \sim \{1\}$ weil $\{1\} \subset \{1,2\}$. Analog $\{1,3\} \sim \{1\}$ weil $\{1\} \subset \{1,3\}$. Aber $\{1,2\} \nsim \{1,3\}$

Aufgabe 5

Auf der Menge $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ definieren wir

$$x \sim y \iff x^2 = y^2.$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A definiert und finde **alle Äquivalenzklassen**.

Lösung

Dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, haben wir schon in Aufgabe 3a) bewiesen. Wir betrachten nun zuerst das Element $3 \in A$. Die Äquivalenzklasse zu 3 ist die Menge aller $y \in A$, welche äquivalent zu 3 sind, d.h. alle $y \in A$ sodass $y^2 = 3^2$ erfüllt ist:

$$[3]_\sim = \{y \in A | y \sim 3\} = \{y \in A | y^2 = 3^2\} = \{-3, 3\}$$

Die Äquivalenzklasse zu 3 besteht also aus den Elementen ± 3. Da $-3 \in [3]_\sim$ müssen wir gar keine Arbeit leisten, um $[-3]_\sim$ zu bestimmen, denn $[-3]_\sim = [3]_\sim$ und wir wählen den Repräsentanten $[3]_\sim$[1]. Analog betrachten wir die Zahl 2:

$$[2]_\sim = \{y \in A | y \sim 2\} = \{y \in A | y^2 = 2^2\} = \{-2, 2\}$$

und somit $-2 \in [2]_\sim$ respektive $[2]_\sim = [-2]_\sim = \{-2, 2\}$. Für die Zahl $1 \in A$ erhalten wir

$$[1]_\sim = \{y \in A | y \sim 1\} = \{y \in A | y^2 = 1^2\} = \{-1, 1\}$$

und somit $-1 \in [1]_\sim$ respektive $[1]_\sim = [-1]_\sim = \{-1, 1\}$. Als letztes betrachten wir die Zahl $0 \in A$ und sehen

$$[0]_\sim = \{y \in A | y \sim 0\} = \{y \in A | y^2 = 0^2\} = \{0\}$$

Alle Äquivalenzklassen von A lauten also

$$[0]_\sim = \{0\}, \quad [1]_\sim = \{-1, 1\}, \quad [2]_\sim = \{-2, 2\}, \quad [3]_\sim = \{-3, 3\}.$$

[1]Wir hätten hier natürlich auch -3 als Repräsentanten wählen können. Die Wahl ist egal.

Aufgabe 6

Auf der Menge $A = \{1, 2, 3, ..., 20\}$ definieren wir

$$x \sim y \iff x \text{ und } y \text{ haben dieselbe Anzahl nichttrivialer Teiler.}$$

Nichttrivial bedeutet hier, dass wir die Zahl selbst und 1 nicht dazuzählen. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A definiert und finde **alle Äquivalenzklassen**.

Lösung

Wir zeigen anhand der drei Eigenschaften, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist:

- Reflexivität: trivialerweise $x \sim x$, da x gleich viele Teiler hat wie x.
- Symmetrie: Wenn x gleich viele nichttriviale Teiler hat wie y, dann hat automatisch auch y gleich viele nichttriviale Teiler wie x.
- Transitivität: Haben x und y gleich viele nichttriviale Teiler und y und z gleich viele nichttriviale Teiler, dann müssen auch x und z gleich viele nichttriviale Teiler haben.

Die 1 und alle Primzahlen haben keine nichttrivialen Teiler und gehören deshalb zur selben Äquivalenzklasse. Die einzigen beiden Zahlen, welche einen nichttriviale Teiler haben, sind 4 und 9. Die Zahlen $6, 8, 10, 14$ und 15 haben alle zwei nichttriviale Teiler. Die einzige Zahl, welche drei nichttriviale Teiler hat, ist 16. Die Zahl 12 hat vier nichttriviale Teiler, genauso wie 18 und 20. Wir finden somit

$$\begin{aligned}
[1]_\sim &= \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \\
[4]_\sim &= \{4, 9\} \\
[6]_\sim &= \{6, 8, 10, 14, 15\} \\
[16]_\sim &= \{16\} \\
[12]_\sim &= \{12, 18, 20\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

Betrachte die, auf $\mathbb{Z}$ definierte, Äquivalenzrelation

$$n \sim m \iff n = m \mod 4$$

Finde **alle Äquivalenzklassen** bezüglich $\sim$. Wie sehen die Äquivalenzklassen aus, wenn wir anstelle von 4 irgendeine Zahl p wählen?

Lösung

Die Äquivalenzklasse $[0]_\sim$ besteht aus allen Zahlen in $\mathbb{Z}$ welche modulo 4 gleich 0 sind. Diese sind $0, 4, 8, ...$ Es gilt somit

$$[0]_\sim = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, ...\}.$$

Die Äquivalenzklasse $[1]_\sim$ besteht aus allen Zahlen in $\mathbb{Z}$ welche modulo 4 gleich 0 sind. Diese sind $1, 5, 9, ...$ Es gilt somit

$$[1]_\sim = \{1, 5, 9, 13, -3, -7...\}$$

Analog folgt

$$[2]_\sim = \{\pm 2, \pm 6, \pm 10, \pm 14, ...\} \quad [3]_\sim = \{3, 7, 11, 15, -1, -5...\}$$

Es gibt keine weiteren Äquivalenzklassen, weil wir alle Zahlen in $\mathbb{Z}$ betrachtet haben. Somit sind die Äquivalenzklassen

$$[0]_\sim, [1]_\sim, [2]_\sim, [3]_\sim$$

Für ein beliebiges p erhalten wir die Äquivalenzklassen

$$[0]_\sim, [1]_\sim, \ldots, [p-2]_\sim, [p-1]_\sim$$

Denn p hätte wieder Rest 0 und $[p]_\sim = [0]_\sim$ usw. Siehe hierzu Restklassenringe (mit denen werdet ihr euch in der Analysis I noch viel beschäftigen).

Zusatzaufgabe

In der Vorlesung haben wir das faszinierende Gedankenexperiment des Hilbertschen Hotels kennengelernt - ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern, die alle belegt sind. Dennoch konnten wir mathematisch zeigen, dass es möglich ist, für einen neuen Gast stets ein Zimmer zu finden, indem wir alle bestehenden Gäste bitten, in das jeweils nächste Zimmer umzuziehen.

Doch was passiert, wenn ein Bus mit unendlich vielen nummerierten Plätzen vor dem Hotel hält? Auch in diesem Fall fanden wir eine Lösung: Indem wir alle aktuellen Gäste aufforderten, sich in die Zimmer mit den geraden Nummern $(2n)$ zu bewegen, blieben die ungeraden Zimmer frei und wir konnten alle Busgäste unterbringen.

Nun stellen wir uns eine neue Herausforderung vor: Was geschieht, wenn unendlich viele Busse, jeder mit unendlich vielen Plätzen, vor dem Hotel ankommen? Gibt es auch dann noch genug Platz für alle?

Und wenn wir die Situation noch weiter denken: Was passiert, wenn das Hotel am Ufer eines Ozeans liegt und unendlich viele Schiffe ankommen, die jeweils unendlich viele Busse geladen haben, und in jedem dieser Busse befinden sich unendlich viele Gäste? Gibt es auch in diesem scheinbar grenzenlosen Szenario genug Zimmer im Hotel?

Lösung

Eine schöne Diskussion der ersten Aufgabe findet man hier: Link zum New York Times Artikel. Weitere Lösungsansätze, vor allem für weitergehende Fragen, wie die der Schiffe, findet man hier.