

# Montag: Aussagenlogik, direkte Beweise

## Aufgabe 1

Zeige, dass die Lösungen  $x_{1,2}$  der Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Nullstellen des Polynoms  $f(x) = ax^2 + bx + c$  sind.

## Lösung

Die Mitternachtsformel besagt, dass für ein quadratische Polynom  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , wobei  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , bis zu zwei Nullstellen gegeben sind (abhängig davon, ob  $b^2 - 4ac$  grösser, gleich oder kleiner 0 ist) durch

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Um dies zu überprüfen, setzen wir die Lösungen der Mitternachtsformel in das quadratische Polynom  $P(x)$  ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} P(x_{1,2}) &= a \cdot \left( \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 + b \cdot \left( \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) + c \\ &= \frac{1}{4a} (b^2 \mp 2b\sqrt{b^2 - 4ac} + b^2 - 4ac) + \frac{1}{2a} (-b^2 \pm b\sqrt{b^2 - 4ac}) + c \\ &= \frac{1}{4a} (2b^2 \mp 2b\sqrt{b^2 - 4ac} - 4ac - 2b^2 \pm 2b\sqrt{b^2 - 4ac}) + c \\ &= \frac{-4ac}{4a} + c \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit sind  $x_{1,2}$  Nullstellen und die Aussage ist bewiesen.

Beachte, dass wir nicht bewiesen haben, dass dies auch die einzigen Nullstellen von  $f(x)$  sind. Dies folgt aber (zumindest für  $b^2 - 4ac > 0$ ) aus der Aussage, dass Polynome vom Grad 2 maximal zwei Nullstellen haben, wie in der Zusatzaufgabe des Übungsblattes für Dienstag bewiesen wird.

## Aufgabe 2

- (a) Per Definition (Vorlesung) heisst eine Zahl ungerade, falls sie nicht gerade ist. Verneine die Definition von « $n$  ist eine gerade Zahl» um eine explizite Definition für « $n$  ist eine ungerade Zahl» zu erhalten.
- (b) Beweise mittels Wahrheitstafel:  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ .
- (c) Beweise:  $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ .

## Lösung

- (a) Per Definition gilt:  $n \in \mathbb{N}$  heisst gerade, falls es ein  $k \in \mathbb{N}$  gibt mit  $n = 2k$ .  
Die Verneinung dieser Aussage ist:  $n \in \mathbb{N}$  heisst nicht gerade (= *ungerade*), falls es kein  $k \in \mathbb{N}$  gibt mit  $n = 2k$ .
- (b) Wahrheitstafel:

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Die Aussagen  $A \Rightarrow B$  und  $\neg B \Rightarrow \neg A$  haben gemäss Wahrheitstafel für alle Fälle denselben Wahrheitswert. Demnach sind sie äquivalent.

(c) Wahrheitstafel:

$A$	$B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

Die Aussagen  $\neg(A \wedge B)$  und  $\neg B \Rightarrow \neg A$  haben gemäss Wahrheitstafel für alle Fälle denselben Wahrheitswert. Demnach sind sie äquivalent.

### Aufgabe 3

Beweise folgenden Satz: Sei  $x, y \in \mathbb{R}$ . Wenn  $y^3 + yx^2 \leq x^3 + xy^2$ , dann gilt  $y \leq x$ .

#### Lösung

Wir beweisen den Satz mit einem direkten Beweis: Sei  $y^3 + yx^2 \leq x^3 + xy^2$ . Dann gilt auch  $y^3 + yx^2 - x^3 - xy^2 \leq 0$ . Wir faktorisieren die linke Seite und erhalten  $(y - x)(x^2 + y^2) \leq 0$ . Da  $x^2 + y^2$  positiv ist, können wir beide Seiten durch  $x^2 + y^2$  teilen, wobei zu beachten gilt, dass bei  $x^2 + y^2 = 0$  auch  $x = y = 0$  gilt und somit der Satz trivial ist. Wir erhalten  $y - x \leq 0$  und somit  $y \leq x$ .  $\square$

### Aufgabe 4

Beweise folgenden Satz: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \in \mathbb{N}$ .

#### Lösung

Aus der Vorlesung wissen wir, dass  $\frac{n(n+1)}{2}$  eine natürliche Zahl ist, oder äquivalent, dass  $n(n+1)$  durch 2 teilbar ist. Damit ist aber auch  $n(n+1)(n+2)$  durch 2 teilbar.

Wir zeigen nun zuerst, dass  $n(n+1)(n+2)$  durch 3 teilbar ist, also  $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \in \mathbb{N}$ . Dazu nutzen wir Fallunterscheidung:

1.  $n$  ist durch 3 teilbar: Dann gibt es also ein  $k \in \mathbb{N}$ , sodass  $n = 3k$ . Dies folgt aus der Definition von Teilbarkeit. Folglich ist  $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(3k)(n+1)(n+2)}{3} = k(n+1)(n+2) \in \mathbb{N}$ .
2.  $n$  geteilt durch 3 ergibt Rest 1: Dies bedeutet, dass es ein  $k \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $n = 3k - 1$ .<sup>1</sup> Wir können folgern, dass  $n + 2 = 3k$ . Aber dann  $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{n(n+1)(3k)}{3} = n(n+1)k \in \mathbb{N}$ .
3.  $n$  geteilt durch 3 ergibt Rest 2: Hier ist nun  $n = 3k - 1$ , also  $n + 1 = 3k$ . Es folgt analog zu den obigen Fällen  $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{n(3k)(n+2)}{3} = nk(n+2) \in \mathbb{N}$ .

Weitere Fälle kann es nicht geben, denn der Rest bei Division durch 3 ist 0, 1 oder 2. Demnach ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  immer  $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \in \mathbb{N}$ . Äquivalent ist  $n(n+1)(n+2)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch 3 teilbar.

Wir haben also gesehen, dass  $n(n+1)(n+2)$  sowohl durch 2, als auch durch 3 teilbar ist. Es folgt daraus, dass  $n$  auch durch 6 teilbar sein muss, also  $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \in \mathbb{N}$ . Nämlich gilt: Ist  $n \in \mathbb{N}$  durch 2 teilbar, so ist  $n = 2k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Ist nun  $n$  auch durch 3 teilbar, so muss auch  $k$  durch 3 teilbar sein, also  $k = 3\ell$  für  $\ell \in \mathbb{N}$ . Folglich ist  $n = 2k = 6\ell$  durch 6 teilbar.  $\square$

<sup>1</sup> Wir hätten auch schreiben können «Dies bedeutet, dass es ein  $k \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $n = 3k + 1$ », hätten dann aber die Fälle  $n = 1$  und  $n = 2$  gesondert betrachten müssen—denn in diesen Fällen wäre  $k = 0$ .