Donnerstag: Lineare Algebra

Aufgabe 1

Zeige: Der Lösungsraum

$$L = L_{A,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

ist ein Untervektorraum, genau dann, wenn $b = 0 \in \mathbb{R}^m$.

Lösung

Beweis. Wir beweisen beide Richtungen separat.
($\Leftarrow$) Sei $b = 0$. Wir überprüfen die Untervektorraum-Axiome:

- $0 \in L$, da $A \cdot 0 = 0$.
- Für $x, y \in L$ gilt $A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$, also $x + y \in L$.
- Für $x \in \ker(A)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda \cdot 0 = 0$, also $\lambda x \in L$.

($\Rightarrow$) Wir verwenden Kontraposition und zeigen: $b \neq 0 \implies L$ ist kein Untervektorraum. Sei also $b \neq 0$ und $x \in L$. Dann gilt $Ax = b$. Für $y = x$ folgt $Ay = b$ und somit $A(x + y) = A(2x) = 2Ax = 2b \neq b$. Also ist $x + y \notin L$. Damit ist die Abgeschlossenheit unter Addition verletzt, und L ist kein Untervektorraum.
Damit ist L genau dann ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, wenn $b = 0$. □

Aufgabe 2

Sei $S \subseteq V$ eine Teilmenge eines Vektorraums V. Zeige, dass der Spann (oder die lineare Hülle) von S:

$$\mathrm{Sp}(S) := \{a_1v_1 + ... + a_nv_n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, v_i \in S \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}$$

der kleinste Untervektorraum von V ist.
Hinweis: Du musst den folgenden Satz zeigen (Wieso?):

Für jeden Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $S \subseteq W$ gilt Sp(S) $\subseteq W$.

Lösung

Beweis. Um zu zeigen, dass $\mathrm{Sp}(S)$ der kleinste Untervektorraum ist, der S enthält, betrachten wir alle Untervektorräume $W \subseteq V$, die S enthalten (also $S \subseteq W$) und zeigen, dass immer $\mathrm{Sp}(S) \subseteq W$ gilt (also $\mathrm{Sp}(S)$ entweder kleiner oder gleich gross ist). So zeigen wir, dass $\mathrm{Sp}(S)$ minimal ist.

Sei also $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $S \subseteq W$. Wir wollen zeigen:

$$\mathrm{Sp}(S) \subseteq W.$$

Per Definition gilt

$$\mathrm{Sp}(S) = \left\{ a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R},\ v_i \in S \right\}.$$

Das heisst, jedes $x \in \mathrm{Sp}(S)$ ist eine Linearkombination von endlich vielen Vektoren aus S. Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach der Anzahl n der vorkommenden Summanden.
Induktionsanfang ($n = 1$): Für $n = 1$ hat ein Element von $\mathrm{Sp}(S)$ die Form $x = a_1v_1$ mit $v_1 \in S$ und $a_1 \in \mathbb{R}$. Da $S \subseteq W$ und W ein Untervektorraum ist, gilt $v_1 \in W$ und somit auch $a_1v_1 \in W$ aus dem dritten Axiom.

Induktionsschritt: Angenommen, jede Linearkombination von n Vektoren aus S liegt in W. Sei nun

$$x = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_{n+1}v_{n+1}, \quad v_i \in S,\ a_i \in \mathbb{R}.$$

Setze $y = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. Nach Induktionsvoraussetzung liegt $y \in W$. Da auch $v_{n+1} \in S \subseteq W$ gilt, folgt $a_{n+1}v_{n+1} \in W$. Weil W ein Untervektorraum ist, ist $x = y + a_{n+1}v_{n+1} \in W$ aus dem zweiten Axiom. Damit haben wir per vollständiger Induktion gezeigt, dass jede Linearkombination von endlich vielen Vektoren aus S in W liegt. Also gilt $\mathrm{Sp}(S) \subseteq W$. □

Aufgabe 3

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume? Was passiert, wenn in (c) der Körper $\mathbb{R}$ durch den endlichen Körper $\mathbb{F}_2$ ersetzt wird? Verwende hierfür, dass $a^2 = a$ für alle $a \in \mathbb{F}_2$ gilt.

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$

(b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1x_2x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

(c) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ (und für $\mathbb{F}_2^2$?)

(d) $\{(\mu + a, a^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu, a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

Lösung

(a) Dies ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ und deshalb ein Untervektorraum.

(b) Die Menge $A := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1x_2x_3 = 0\}$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, denn es gilt $(1, 1, 0), (0, 1, 1) \in A$, aber $(1, 2, 1) = (1, 1, 0) + (0, 1, 1) \notin A$. Das zweite Axiom ist also verletzt.

(c) Die Gleichung $x_1^2 + x_2^4 = 0$ ist in $\mathbb{R}$ nur durch $x_1 = x_2 = 0$ erfüllt. Die Menge ist daher $\{(0, 0)\}$ und somit ein Untervektorraum. Für den Körper $\mathbb{F}_2$ sieht es anders aus: Für alle $a \in \mathbb{F}_2$ gilt $a^2 = a$ und daher liest sich die Gleichung über $\mathbb{F}_2$ als $x_1 + x_2 = 0$. Die Menge ist also die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems und damit ein Untervektorraum von $\mathbb{F}_2^2$.

(d) Die Menge ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$, da z.B. $(1, 1)$ enthalten ist, das skalare Vielfache $(-1) \cdot (1, 1) = (-1, -1)$ jedoch nicht, denn das Quadrat einer reellen Zahl ist immer nicht-negativ. Das dritte Axiom ist also verletzt.

Aufgabe 4

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig und sei $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n$ linear unabhängig.

(b) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $w_1, \ldots, w_n \in V$ jeweils linear unabhängig. Dann sind $v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n$ linear unabhängig.

Lösung

(a) Die Aussage ist wahr und wir beweisen sie direkt.

Beweis. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_1(\lambda v_1) + \cdots + a_n(\lambda v_n) = 0$. Dann gilt $(a_1\lambda)v_1 + \cdots + (a_n\lambda)v_n = 0$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n$ folgt $a_1\lambda = \cdots = a_n\lambda = 0$. Also sind $\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n$ linear unabhängig. □

(b) Die Aussage ist falsch. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig und sei $w_i = -v_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann sind $w_1, \ldots, w_n$ nach Teilaufgabe (a) linear unabhängig, aber $v_1 + w_1 = 0_V, \ldots, v_n + w_n = 0_V$ sind linear abhängig. Dies liegt daran, dass eine Menge von Vektoren, die den Nullvektor enthält, immer linear abhängig ist. Genauer: Seien $v_1, \ldots, v_m, 0_V \in V$. Dann ist $0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_m + 1 \cdot 0_V = 0_V$ eine nicht-triviale Linearkombination dieser Vektoren.

Aufgabe 5

Wir betrachten
$$\mathbb{R}_{\leq n}[x] = \{\, p(x) \mid p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,\ a_i \in \mathbb{R}\,\},$$
also die Menge aller reellen Polynome vom Grad höchstens n.

(a) Die Menge aller reellen Polynome ist $\mathbb{R}[x]$. Es lässt sich leicht zeigen, dass dies ein Vektorraum ist. Ist diese Menge $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ ein Vektorraum?

(b) Erkläre, wie man die Basis dieses Polynom-Vektorraums $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ wählen könnte. Vergleiche dies mit dem Standardvektorraum $\mathbb{R}^{n+1}$ und seinen Basisvektoren $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$.

(c) Bestimme die Dimension von $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$.

Lösung

(a) Ja, $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Denn $\mathbb{R}_{\leq n}[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$ und die Untervektorraum-Axiome sind erfüllt:

- Die Nullfunktion $p(x) = 0$ liegt in $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$.
- Sind $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_{\leq n}[x]$, so gilt auch $p(x) + q(x) \in \mathbb{R}_{\leq n}[x]$, da die Summe zweier Polynome wieder ein Polynom vom Grad höchstens n ist.
- Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $p(x) \in \mathbb{R}_{\leq n}[x]$ gilt $\lambda p(x) \in \mathbb{R}_{\leq n}[x]$.

Somit ist $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]$ und somit auch ein Vektorraum.

(b) Ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ wird eindeutig durch die $n+1$ Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ bestimmt. Man kann also p mit dem Vektor
$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$
identifizieren. In $\mathbb{R}^{n+1}$ kennen wir die Standardbasisvektoren
$$(1, 0, \ldots, 0),\ (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ (0, 0, \ldots, 1),$$
welche die Rolle der Polynome $1, x, \ldots, x^n$ übernehmen. Wir zeigen nun, dass $\{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$ eine Basis bildet von $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$. Ein Polynom ist genau dann das Nullpolynom, wenn alle Koeffizienten verschwinden. Also gilt
$$p(x) = 0 \implies \alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$
Damit ist $\{1, x, \ldots, x^n\}$ linear unabhängig. Dass jedes Polynom eine Linearkombination der Elemente von $\{1, x, \ldots, x^n\}$ ist, folgt trivialerweise aus
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$
Die Menge $\{1, x, \ldots, x^n\}$ ist also eine Basis von $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$.

(c) Da B aus $n+1$ Vektoren besteht, die eine Basis bilden, hat der Raum $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ die Dimension

$$\dim(\mathbb{R}_{\leq n}[x]) = n + 1.$$