Mathematatik für Physiker

Für Studierende aus dem Vorkurs 2024

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus meinem Buch:
Für viele Studierende gestaltet sich der Einstieg in die Mathematik-Vorlesungen an der Universität als Herausforderung. Man sitzt in der letzten Reihe, starrt an die Tafel und spürt, wie die anfängliche Motivation von Vorlesung zu Vorlesung schwindet. Doch dann kommt die Prüfungsphase und plötzlich beginnt man, die Theorie zu verstehen – ein Erfolg! Doch beim Lösen alter Prüfungen und Aufgabenserien stößt man auf unerwartete Hindernisse. Warum ist das so? Schließlich wurde die Theorie doch verstanden!

Dieses Gefühl kennen viele Studierende sehr gut, insbesondere jene, die nicht Mathematik oder Physik als Hauptfach gewählt haben. In anderen Vorlesungen funktionieren die Aufgaben alter Prüfungen reibungslos, nur in der Mathematik ergeben sich Schwierigkeiten. Doch der Grund dafür ist nicht das Offensichtliche: Mathematik ist nicht zwangsläufig schwer! Sie ist einfach anders. Natürlich ist es wichtig, die Grundlagen der Theorie zu beherrschen. Aber um Mathematik zu meistern, gibt es nur eine Devise: üben, üben, üben.

Nach meinen eigenen Erfahrungen als Physikstudent, der die Herausforderungen der Mathematikvorlesungen durchlebte, entschied ich mich dazu, als Hilfsassistent für eine Mathematik-Vorlesung für Nicht-MathematikerInnen tätig zu werden. Ich hatte ein Ziel vor Augen: Ihnen zu zeigen, dass Mathematik richtig Spaß machen kann, wenn man sie mit ein paar cleveren Tricks und Methoden angeht. Und siehe da, meine Übungsstunden erwiesen sich als Erfolg: Anfangs waren es nur etwa 20 Studierende, die sich meine Tipps und Tricks anhörten. Aber am Ende des Semesters konnte ich ganze Vorlesungssäle füllen – über 100 Studentinnen und Studenten kamen zur Übungsstunde. Da wusste ich: Ich muss dieses Wissen auch anderen zugänglich machen. Und voilà: dieses Buch, das du gerade in den Händen hältst, ist das Ergebnis zahlreicher solcher unterhaltsamen Übungsstunden.

Beim Lesen dieses Buches wirst du dich fühlen, als wärst du in meiner Übungsstunde: Ich zeige dir Tipps und Tricks, wie du Integrale am einfachsten lösen kannst, alternative Methoden zum Gauß-Verfahren und viele vorgelöste Beispiele. Dieses Buch wird dir helfen, einen tieferen Einblick in mathematische Konzepte zu gewinnen, sodass du immer mehr Erfolgsmomente beim Lösen von Aufgaben erlebst. Und wer weiß, vielleicht wirst du beim Lernen sogar ein wenig Spaß haben!

Zürich, 2024 *Hrvoje Krizic*

1

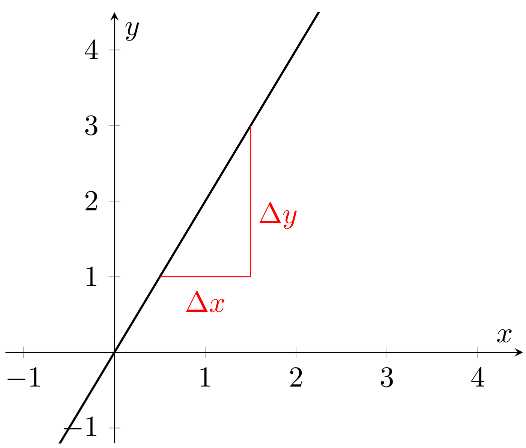
Differentialrechnung

„There's no better guarantee of failure than convincing yourself that success is impossible, and therefore never even trying."

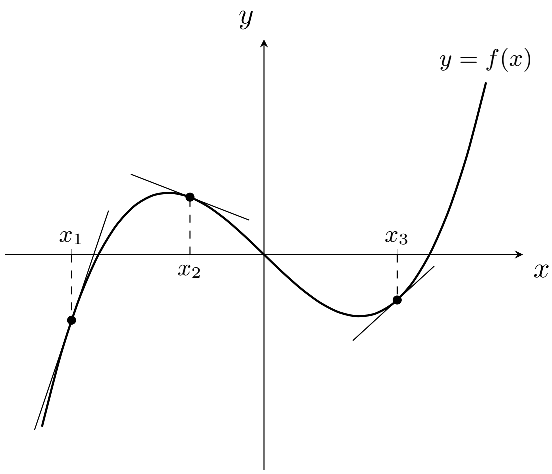
– Max Tegmark

1.1 Ableitungen und Differenzierbarkeit

Sei eine reelle Funktion $f(x)$ gegeben. Wir wissen, dass die Steigung einer linearen Funktion $f(x) = mx + c$ gegeben ist durch $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. In diesem folgenden Beispiel gilt beispielsweise $m = \frac{2}{1} = 2$:



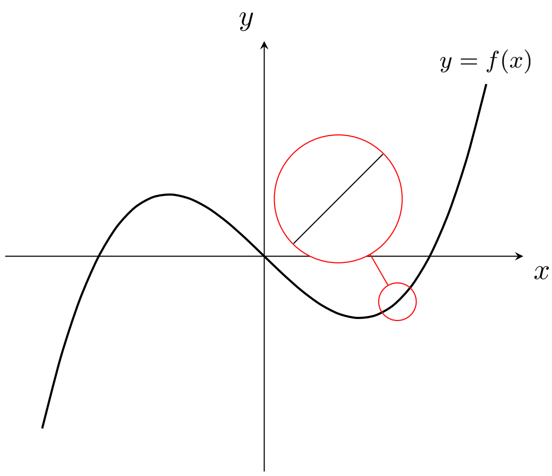
Nun wollen wir eine allgemeine Funktion $f(x)$ betrachten. Auch in dieser Funktion kann die Steigung an einem bestimmten Ort angegeben werden. Die Steigung an einem Punkt ist definiert als die Steigung der Tangente an diesem Punkt. Die folgende Funktion hat in x_1 eine positive Steigung, in x_2 eine negative und in x_3 wieder eine positive:



Wie kann man nun die Steigung an einem Punkt x_0 berechnen? Dazu folgende Überlegung: die Steigung an einem Punkt ist ungefähr gegeben durch

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

wobei $f(x)$ sehr nahe an $f(x_0)$ ist, bzw x sehr nahe an x_0. Wir können uns nämlich ein kleines Stück unserer Funktion beim Punkt x_0 anschauen. Wenn wir dieses Stück vergrößern, so nähern wir uns einer Gerade an.



Die Steigung dieser Gerade ist durch den folgenden Grenzwert gegeben, den wir auch den Differentialquotienten nennen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} =: f'(x).$$

$f'(x)$ ist die sogenannte Ableitung von $f(x)$. Wenn der Grenzwert existiert, so ist f an der Stelle x_0 differenzierbar. Die Tangente am Punkt x_0 hat die Gleichung

$$y_t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Beispiel. *Berechne die Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x = x_0$ mit dem Differentialquotienten.*

Lösung. *Wir rechnen*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0} x+x_0\\ &= 2x_0\end{aligned}$$

Beispiel. *Ist $f(x)=|x|$ differenzierbar in $x_0=0$?*

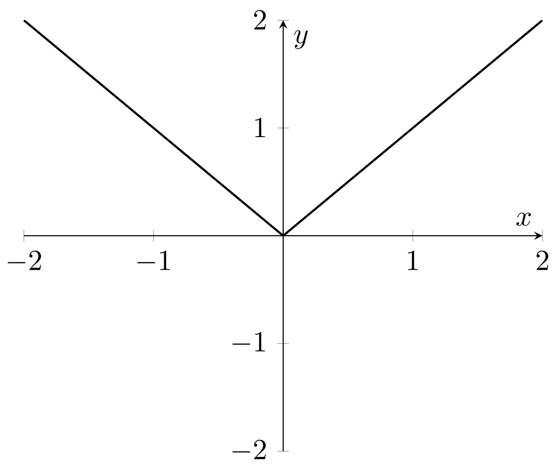
Lösung. *Wir möchten also zeigen, ob der Grenzwert*

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

existiert. Dazu können wir den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert berechnen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\nearrow 0}\frac{-x}{x}&=-1,\\ \lim_{x\searrow 0}\frac{x}{x}&=1.\end{aligned}$$

Die Grenzwerte stimmen nicht überein. Somit existiert der Differentialquotient nicht und $f(x)$ ist in 0 nicht differenzierbar. Wir können das ganze auch am Graph von $f(x)=|x|$ sehen:



Bei $x_0=0$ lässt sich keine eindeutige Tangente anlegen, da es sich um eine Ecke handelt. Die Funktion ist aber trotzdem bei $x_0=0$ stetig.

Im letzten Beispiel haben wir gesehen, dass es stetige Funktionen gibt, welche aber nicht überall differenzierbar sind. Ein wichtiger Satz der Analysis ist aber die Umkehrung dieses Satzes:

Satz. *Jede differenzierbare Funktion ist auch stetig.*

1.2 Ableitungsregeln

Damit man nicht immer mit dem Differentialquotienten arbeiten muss, können wir einige Tricks zur Berechnung der Ableitung verwenden. Zunächst müssen wir aber ein paar Standardableitungen kennenlernen:

$$\begin{aligned}
f(x) = x^n \quad &\Longrightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1} \\
f(x) = e^x \quad &\Longrightarrow \quad f'(x) = e^x \\
f(x) = \log(x) \quad &\Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \\
f(x) = a^x \quad &\Longrightarrow \quad f'(x) = a^x \cdot \log(a) \\
f(x) = \sin(x) \quad &\Longrightarrow \quad f'(x) = \cos(x) \\
f(x) = \cos(x) \quad &\Longrightarrow \quad f'(x) = -\sin(x) \\
f(x) = \tan(x) \quad &\Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

1.2.1 Linearität

Die Linearität der Ableitung besagt, dass die Ableitung der Summe zweier Funktionen auch die Summe der Ableitungen dieser zwei Funktionen ist, also

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Ebenfalls können wir konstante Faktoren vor die Ableitung nehmen:

$$(\lambda f(x))' = \lambda f'(x).$$

Beispiel. *Bestimme die Ableitung von*

$$f(x) = 3\sin(x) + \cos(x).$$

Lösung. *Wegen der Linearität können wir die zwei Summanden einzeln ableiten:*

$$\begin{aligned}
(3\sin(x))' &= 3\cos(x), \\
(\cos(x))' &= -\sin(x).
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$f'(x) = 3\cos(x) - \sin(x).$$

1.2.2 Produktregel

Haben wir eine Funktion, welche als Produkt zweier Funktionen geschrieben werden kann, so gilt die folgende Regel:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g + f(x) \cdot g'(x).$$

Wir leiten also zunächst $f(x)$ ab und multiplizieren mit $g(x)$ und dann addieren wir das Produkt von $f(x)$ und der Ableitung von $g(x)$.

Beispiel. *Bestimme die Ableitung von*

$$f(x) = \sin(x)\cos(x).$$

Lösung. *Es gilt nach der Produktregel (mit* $g(x) = \sin(x)$ *und* $h(x) = \cos(x)$*)*

$$(g(x) \cdot h(x))' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x),$$

wobei wir im letzten Schritt das Additionstheorem $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ *verwendet haben (siehe dazu Anhang A).*

Beispiel. *Bestimme die Ableitung von*

$$f(x) = x^2 e^x.$$

Lösung. *Es gilt nach der Produktregel (mit* $g(x) = x^2$ *und* $h(x) = e^x$*)*

$$(g(x) \cdot h(x))' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(2+x).$$

1.2.3 Kettenregel

Haben wir eine Komposition von Funktionen, so gilt die Kettenregel

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Wir möchten die Regel am folgenden Beispiel demonstrieren:

Beispiel. *Bestimme die Ableitung von*

$$\sin\Big(x^2 + 1\Big).$$

Lösung. *Wir haben hier die Funktion* $x^2 + 1$ *verschachtelt in der Funktion* $\sin(x)$*. Damit haben wir also* $g(x) = \sin(x)$ *und* $f(x) = x^2 + 1$*. Es gilt nach der Kettenregel*

$$g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos\Big(x^2 + 1\Big) \cdot 2x,$$

wobei wir im ersten Term $g(x) = \sin(x)$ *abgeleitet und dann statt* x *einfach* $f(x) = x^2 + 1$ *eingesetzt haben.*

Beispiel. *Berechne die Ableitung von*

$$e^{x^2}.$$

Lösung. *Die Funktion $f(x) = x^2$ ist verschachtelt in der Funktion $g(x) = e^x$. Es gilt also mit der Kettenregel*

$$g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x.$$

Beispiel. *Berechne die Ableitung von*

$$\tan(e^x)\sin(x).$$

Lösung. *Wir verwenden zunächst die Produktregel, da wir eine Multiplikation von zwei Funktionen haben:*

$$(\tan(e^x)\sin(x))' = (\tan(e^x))'\sin(x) + \tan(e^x)\cos(x).$$

Um $(\tan(e^x))'$ zu berechnen, benötigen wir die Kettenregel:

$$(\tan(e^x))' = \frac{e^x}{\cos^2(e^x)}.$$

Alles zusammen ergibt das

$$(\tan(e^x)\sin(x))' = \frac{e^x\sin(x)}{\cos^2(e^x)} + \tan(e^x)\cos(x).$$

1.2.4 Quotientenregel

Wenn wir eine Funktion haben, welche sich als Bruch zweier Funktionen schreiben lässt, so können wir die Produktregel und Kettenregel anwenden, um eine neue Regel dafür zu erhalten. Es gilt

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)'.$$

Mit der Kettenregel haben wir

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{1}{g^2(x)}g'(x)$$

und somit zusammengefasst

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Beispiel. *Berechne die Ableitung von*

$$\frac{e^x}{\sin(x)}.$$

Lösung. *Mit der Quotientenregel gilt*

$$\left(\frac{e^x}{\sin(x)}\right)' = \frac{e^x(\sin(x) - \cos(x))}{\sin^2(x)}.$$

1.2.5 Umkehrfunktion

Für Umkehrfunktionen $f^{-1}(x)$ einer differenzierbaren, umkehrbaren Funktion $f(x)$ können wir die Ableitung leicht berechnen. Es gilt dann

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Der Nenner darf dabei natürlich nicht 0 sein.

Beispiel. *Beweise, dass* $\log'(x) = \frac{1}{x}$.

Lösung. $\log(x)$ *ist die Umkehrfunktion von* e^x. *Sei also* $f(x) = e^x$, *dann gilt*

$$(f^{-1}(x))' = \log'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\log(x)}} = \frac{1}{x},$$

da $f'(x) = e^x$.

1.2.6 Funktion in Potenz

Für Funktionen der Form $f(x)^{g(x)}$ wenden wir folgenden Trick an:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}.$$

Ein Beispiel einer solchen Funktion ist

$$h(x) = x^{\sin(x)}.$$

Wie können wir $h'(x)$ bestimmen? Mit unserem Trick erhalten wir

$$h(x) = e^{\sin(x)\log(x)}.$$

Nun leiten wir die Funktion mit der Kettenregel ab:

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{\sin(x)\log(x)} \cdot (\sin(x)\log(x))' \\ &= e^{\sin(x)\log(x)} \cdot (\cos(x)\log(x) + \sin(x)\frac{1}{x}), \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt die Produktregel verwendet haben. Wir bemerken, dass der erste Term genau wieder $x^{\sin(x)}$ ist und somit

$$h'(x) = x^{\sin(x)} \cdot (\cos(x)\log(x) + \frac{\sin(x)}{x})$$

Beispiel. *Bestimme die Ableitung der Funktion* $f(x) = x^{x^2}$ *(dabei ist* $x^{x^2} = x^{(x^2)}$ *gemeint).*

Lösung. *Es gilt*

$$f(x) = x^{x^2} = e^{x^2 \log(x)}.$$

Somit gilt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x^2 \log(x)} \cdot (x^2 \log(x))' \\ &= e^{x^2 \log(x)} \cdot (2x \log(x) + x^2 \frac{1}{x}) \\ &= e^{x^2 \log(x)} \cdot x(2 \log(x) + 1) \\ &= x^{x^2} \cdot x(2 \log(x) + 1) \\ &= x^{x^2+1} \cdot (2 \log(x) + 1). \end{aligned}$$

1.3 Monotonie

Wir haben im letzten Kapitel definiert, was beispielsweise streng monoton fallend oder monoton steigend bedeutet. Wir können nun mithilfe von Ableitungen einfacher bestimmen, ob eine differenzierbare Funktion $f(x) : I \to \mathbb{R}$ (wobei I ein Intervall ist) eine Monotonie-Eigenschaft erfüllt. Dabei gelten die folgenden Eigenschaften:

1. $f(x)$ ist *streng monoton steigend*, falls $f'(x) > 0$.
2. $f(x)$ ist *monoton steigend*, falls $f'(x) \geq 0$.
3. $f(x)$ ist *monoton fallend*, falls $f'(x) \leq 0$.
4. $f(x)$ ist *streng monoton fallend*, falls $f'(x) < 0$.

Beispiel. *Zeige, dass die Funktion $f(x) = x^3$ monoton steigend, aber nicht streng monoton steigend ist.*

Lösung. *Wir bestimmen die Ableitung*

$$f'(x) = 3x^2.$$

Es gilt $x^2 \geq 0$ und somit ist die Funktion monoton steigend. Sie ist aber nicht streng monoton steigend, da $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$.

Beispiel. *Beweise, dass $\log(x)$ streng monoton steigend ist, mit Definitionsbereich $\mathbb{R}_{>0}$.*

Lösung. *Wir bestimmen die Ableitung*

$$\log'(x) = \frac{1}{x}.$$

Für $x > 0$ gilt $\frac{1}{x} > 0$. Somit ist $\log(x)$ im Definitionsbereich streng monoton steigend.

1.4 Zweite Ableitung und Krümmung

Die zweite Ableitung von $f(x)$ ist definiert als die Ableitung der Ableitung von $f(x)$, also

$$f''(x) := (f'(x))'.$$

Für was benötigen wir die zweite Ableitung? Eine weitere Eigenschaft einer Funktion (genauer gesagt eines Graphen) ist die Krümmung. Wir unterscheiden dabei folgende zwei Fälle:

1. Falls $f''(x) \geq 0$ gilt, so ist der Graph *linksgekrümmt* (oder auch konvex). Ein Beispiel dafür ist $f(x) = e^x$.

2. Falls $f''(x) \leq 0$ gilt, so ist der Graph *rechtsgekrümmt* (oder auch konkav). Ein Beispiel hierfür ist $f(x) = \log(x)$.

Beispiel. *Beweise, dass $\log(x)$ rechtsgekrümmt ist.*

Lösung. *Wir bestimmen die zweite Ableitung*

$$\log''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Da x^2 für alle x positiv ist und wir ein Minus-Zeichen vor dem Bruch haben, ist die zweite Ableitung immer negativ. Somit ist die Funktion rechtsgekrümmt.

1.5 Die Regel von de l'Hôpital

Wir können mithilfe von Ableitungen Grenzwerte bestimmter Funktionen einfach bestimmen. Dabei muss die Funktion ein Bruch $\frac{f(x)}{g(x)}$ der Form $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$ „$\frac{0}{0}$“ oder „$\pm\frac{\infty}{\infty}$“ sein. In diesen Fällen besagt die Regel von de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Wir gehen also nach folgendem Rezept vor:

Rezept. *(Regel von de l'Hôpital)*

1. *Berechne $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$. Sind beide 0 oder beide $\pm\infty$, so kannst du mit der Regel weiterfahren. Manchmal muss die Funktion zunächst umgestellt werden (dazu später mehr).*

2. *Berechne $f'(x)$ und $g'(x)$.*

3. *Berechne nun $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Erhältst du wieder „$\frac{0}{0}$“ oder „$\pm\frac{\infty}{\infty}$“ so beginne wieder beim ersten Schritt oder versuche eine andere Methode anzuwenden.*

Wir schauen uns ein paar Beispiele an:

Beispiel. *Berechne*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Lösung. *Es gilt*

$$\lim_{x\to 0} e^x - 1 = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Wir können also die Regel verwenden und erhalten

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

Beispiel. *Berechne*

$$\lim_{x\to 0} x \log(x)$$

Lösung. *Wir haben nun den Fall* $0 \cdot (-\infty)$. *Wir können aber* x *zu* $\frac{1}{\frac{1}{x}}$ *umschreiben und erhalten dadurch*

$$\frac{\log(x)}{\frac{1}{x}},$$

was dem Fall „$\frac{-\infty}{\infty}$*" entspricht. Wir leiten beide Seiten ab und erhalten*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

Wir verallgemeinern diesen Trick:

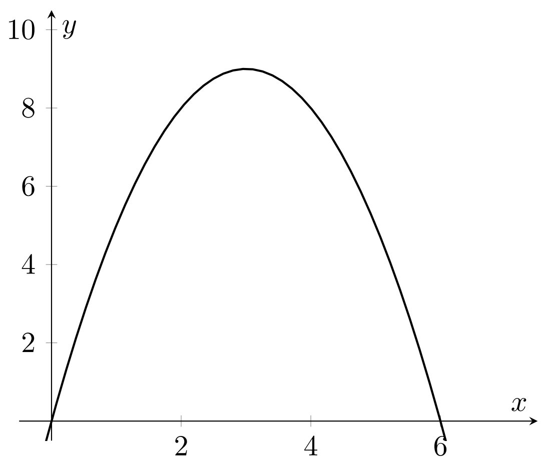
Trick. *Während wir l'Hôpital primär bei Grenzwerten der Form* $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{0}{0}$ *oder* $\frac{\infty}{\infty}$ *anwenden, können wir die Regel auch in folgenden Formen anwenden:*

Form	ausführliche Form	Transformation zu $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$
$\frac{0}{0}$	$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$	–
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$	–
$0 \cdot \infty$	$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$	$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{1/g(x)}$
0^0	$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$	$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \exp\left(\lim_{x\to x_0} \frac{\log(f(x))}{1/g(x)}\right)$
1^∞	$\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$	$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \exp\left(\lim_{x\to x_0} \frac{\log(f(x))}{1/g(x)}\right)$
∞^0	$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$	$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \exp\left(\lim_{x\to x_0} \frac{\log(f(x))}{1/g(x)}\right)$
$\infty - \infty$	$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$	$\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/(f(x)g(x))}$

Damit die Gleichungen besser lesbar sind, führen wir hier die Notation $\exp(x) = e^x$ ein.

1.6 Extrema

Sei nun das folgende Problem gegeben: Wir sind MathematikerInnen bei einer Baufirma und zuständig, einen Garten für ein Haus zu planen. Der Gartenzaun ist schon bestellt und insgesamt n Meter lang. Wir wollen nun die Gartenfläche (rechteckig) maximieren. Wie machen wir das? Sei x eine Seite des Rechtecks. Dann muss die andere Seite des Rechtecks genau $(\frac{n}{2} - x)$ sein. Somit ist die Fläche als Funktion von x gegeben durch $f(x) = x \cdot (\frac{n}{2} - x) = -x^2 + \frac{nx}{2}$. Sei $n = 12$, dann sieht diese Funktion wie folgt aus:



Wie wir sehen, hat diese Funktion ein Maximum, welches wir bestimmen wollen. Wie machen wir das? Wir gehen nach folgendem Rezept vor:

Rezept. *(Extrema für eindimensionale Funktionen bestimmen)*

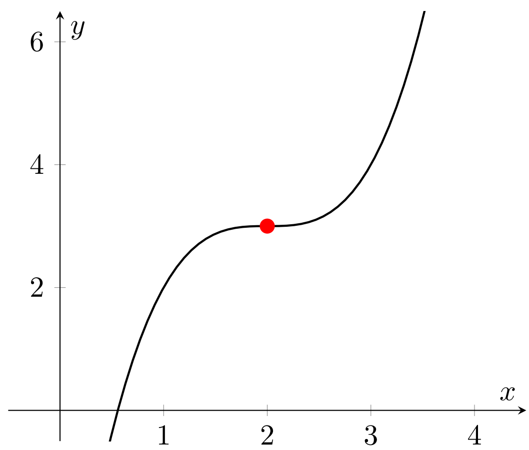
1. *Berechne die Ableitung von* $f(x) \implies f'(x)$. *In unserem Beispiel gilt für* $f(x) = -x^2 + \frac{nx}{2} \implies f'(x) = -2x + \frac{n}{2}$.
2. *Löse die Gleichung* $f'(x) = 0$. *Du erhältst* $x_1, x_2, \ldots$. *Für unser Beispiel erhalten wir*

$$-2x + \frac{n}{2} = 0 \implies x_0 = \frac{n}{4}$$

3. *Bestimme* $f''(x_1)$, $f''(x_2), \ldots$ *und klassifiziere die verschiedenen Extrema nach folgenden Bedingungen:*
   (a) $f''(x) > 0:$ *Es handelt sich um ein (lokales) Minimum.*
   (b) $f''(x) < 0:$ *Es handelt sich um ein (lokales) Maximum.*
   (c) $f''(x) = 0:$ *Es handelt sich um einen Sattelpunkt.*

   Wir bestimmen die zweite Ableitung: $f''(x) = -2$. *Somit handelt es sich bei* $x_0 = \frac{n}{4}$ *um ein Maximum.*

Wir erreichen also die größte Fläche, wenn wir die eine Seite $\frac{n}{4}$ Meter lang wählen, und die andere Seite somit $\frac{n}{2} - \frac{n}{4} = \frac{n}{4}$, also auch $\frac{n}{4}$ Meter lang. Der Garten hat die maximale Fläche, wenn wir alle Seiten gleich wählen. Während Minima und Maxima intuitiv klar sein sollten, möchten wir noch graphisch zeigen, wie ein Sattelpunkt aussieht:

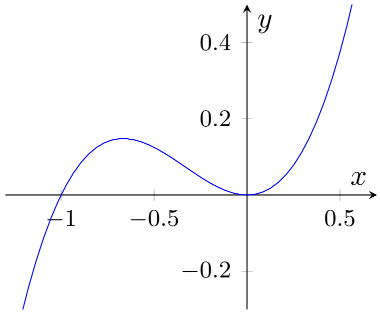


Hier ist der Sattelpunkt an der Stelle $(2, 3)$. Ist unser Punkt kein Sattelpunkt, sondern ein Extrema, so unterscheiden wir zwischen zwei Arten.

Lokales Maximum/Minimum

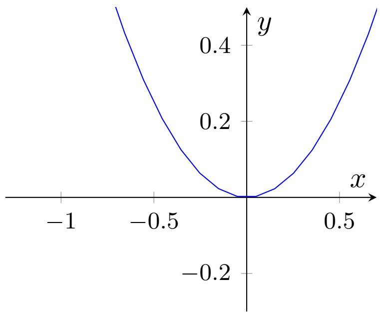
Ein lokales Maximum oder Minimum ist der größte (bzw. kleinste) Wert, der eine Funktion in einer kleinen Umgebung annimmt. Beispielsweise hat die Funktion $f(x) = x^3 + x^2$ ein lokales Minimum in $(0, 0)$. Denn beispielsweise ist $f(-5) = -100$,was deutlich kleiner ist als

$f(0) = 0$. Jedoch, wie wir schnell am Graphen der Funktion erkennen können, ist die Funktion in $(0,0)$ minimal in seiner Umgebung:



Globales Maximum/Minimum

Falls ein Punkt nicht nur in seiner Umgebung ein Maximum (bzw. Minimum) ist, sondern der Punkt (x_0, y_0) die Eigenschaft $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt (bzw. mit $\leq$ für ein Minimum), so nennen wir den Punkt ein „globales Maximum/Minimum“. Im eindimensionalen Fall von $f(x) = x^3 - x^2$ existiert kein globales Maximum oder Minimum, da für $x \to -\infty$ auch $f(x) \to -\infty$ gilt und umgekehrt für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to \infty$. Jedoch hat beispielsweise $f(x) = x^2$ ein globales Minimum in $(0,0)$, wie wir leicht sehen können:



Nun zurück zur Bestimmung von Extremstellen und Sattelpunkten:

Beispiel. *Bestimme und klassifiziere die Extremstellen von* $f(x) = e^{x^2}$.

Lösung. *Wir gehen nach dem Rezept vor:*

1. *Wir erhalten* $f'(x) = e^{x^2} 2x$ *mit der Kettenregel.*
2. $f'(x) = e^{x^2} 2x = 0 \implies x_0 = 0$. *Da* e^{x^2} *nie* 0 *ist, haben wir keine weiteren Lösungen.*
3. *Es gilt* $f''(x) = 2e^{x^2}(x + 1)$ *und somit* $f''(0) = 2$, *also handelt es sich bei* $x_0 = 0$ *um ein (globales) Minimum.*

Beispiel. *Bestimme und klassifiziere die Extremstelle von* $f(x) = \sin(x^2)$ *im Intervall* $x \in [1, 2]$.

Lösung. 1. *Es gilt* $f'(x) = \cos(x^2)2x$

2. *Wir setzen* $f'(x) = 0$ *und erhalten* $\cos(x^2)2x = 0$. *Da* $x_0 = 0$ *nicht im Intervall liegt, suchen wir Lösungen für* $\cos(x^2) = 0$. *Dies ist erfüllt, wenn* $x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$. *Für* $k = 0$ *erhalten wir die Lösung* $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, *welche auch in unserem Intervall liegt (da* $\frac{\pi}{2}$ *größer als* 1 *und kleiner als* 2 *ist und somit die Wurzel davon ebenfalls im Intervall liegt).*

3. *Wir bestimmen die zweite Ableitung:* $f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2))$. *Setzen wir* $x_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ *ein, erhalten wir* $f''(x_1) = -2\pi$ *und somit handelt es sich um ein (lokales) Maximum in* $x_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

1.7 Taylor-Polynome

Häufig benötigt man in der Mathematik (aber auch vor allem in der Physik) nur eine Funktion in der Nähe eines Werts x_0. Wir wollen nun eine komplizierte Funktion $f(x)$ so vereinfacht modellieren, dass sie um den Wert x_0 eine gute Annäherung von $f(x)$ liefert. Die „einfachsten " Funktionen sind Polynome. Um die komplizierte Funktion zu vereinfachen, können wir die sogenannten Taylorpolynome verwenden. Das Taylorpolynom vom Grad n an der Stelle x_0 ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2 \cdot 1}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

Dabei meint man mit $k!$ die Fakultät, also $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k$ und $0! = 1$. Mit $f^{(k)}(x_0)$ meinen wir die k-te Ableitung an der Stelle x_0.

Beispiel. *Berechne das Taylorpolynom zweiten Grades von* $f(x) = e^x$ *an der Stelle* $x_0 = 0$.

Lösung. *Es gilt*

$$T_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2 \cdot 1}x^2 = e^0 + \frac{e^0}{1}x + \frac{e^0}{2 \cdot 1}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Wir können nun einen Wert x_1 in der Nähe von $x_0 = 0$ wählen und erhalten dann $T_2(x_1) \approx e^{x_1}$. Ein Beispiel wäre $x_1 = 0.1$. Wir erhalten

$$e^{0.1} \approx 1.1052 \quad T_2(0.1) = 1.1050.$$

Beispiel. *Bestimme den ungefähren Wert von* $\sin(3.3)$.

Lösung. *Der Wert* 3.3 *befindet sich in der Nähe von* π. *Wir können also die Taylorreihe um* π *von* $\sin(x)$ *berechnen. Dazu wählen wir den Grad* 2 *und erhalten*

$$T_2(x) = -(x - \pi)$$

und somit $T_2(3.3) = -(3.3 - \pi) \approx -0.1584$. *Im Vergleich:* $\sin(3.3) \approx -0.1577$. *Ein höherer Grad der Taylorreihe würde ein noch genaueres Resultat ergeben.*

2

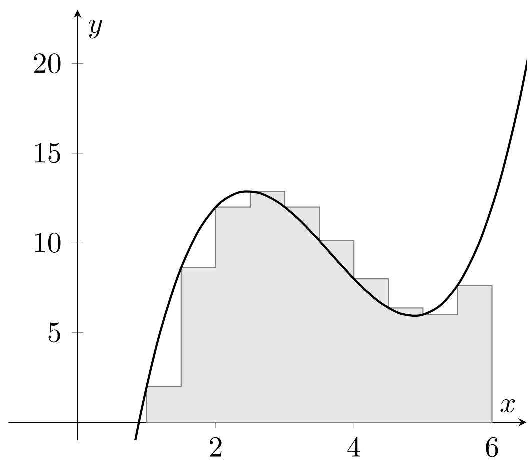
Integrale

„As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain, and as far as they are certain, they do not refer to reality.“

– Albert Einstein

2.1 Einführung

Sei eine Kurve in einem x-y-Koordinatensystem gegeben. Wir wollen nun die Fläche berechnen, die diese Kurve mit der x-Achse bildet. Eine Formel einer solchen Fläche ist uns nicht bekannt. Ein Beispiel einer Fläche, die wir aber einfach ausrechnen können, wäre ein Rechteck. Wir zerlegen also die Fläche in ganz viele kleine Rechtecke. Diese Rechtecke zusammenaddiert bilden dann eine Approximation unserer Fläche.



Eine Rechtecks-Fläche ist gegeben durch $f(x)\Delta x$, wobei $f(x)$ die Höhe des Rechtecks ist und Δx die Basis (oder Breite) bildet. In unserem Fall wählen wir die Breite der Rechtecke immer gleich. Wir können nun die Rechtecke aufsummieren und erhalten

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i,$$

wobei n die Anzahl Rechtecke beschreibt und x_i die Punkte sind, bei denen die Rechtecke jeweils beginnen. Wir betrachten also die Fläche im Intervall $x_1 =: a$ bis $x_n =: b$. Wir schreiben „$\approx$“, da wir nur eine Approximation unserer Fläche erhalten haben. Wollen wir die exakte

Fläche erhalten, müssen wir die Rechtecke immer verkleinern, genauer gesagt „unendlich" mal verkleinern (in der Mathematik reden wir häufig vom „infinitesimalen" Linienelement). Dabei geht $\Delta x_i \to 0$ für $n \to \infty$ (n ist die Anzahl Rechtecke). Diese Summe definieren wir als Integral

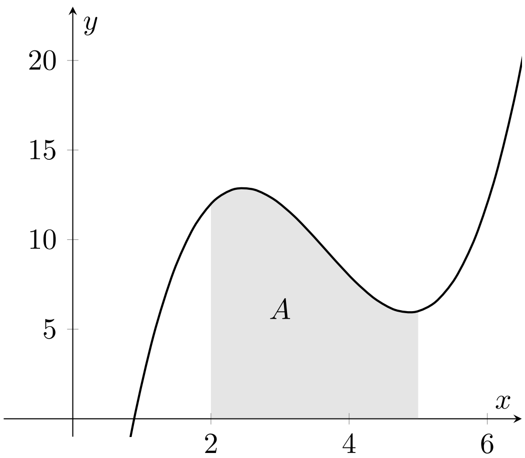
$$A = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i \right) =: \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \,.$$

Das $\mathrm{d}x$ ist genau unser infinitesimales Linienelement $\Delta x \to 0$. Es bestimmt somit, nach welcher Variable integriert werden muss.

Ein Integral gibt uns an, wie groß die Fläche zwischen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse ist. Die Grenzen sind durch a und b gegeben. Das Integral

$$\int_2^5 f(x)\, \mathrm{d}x \,,$$

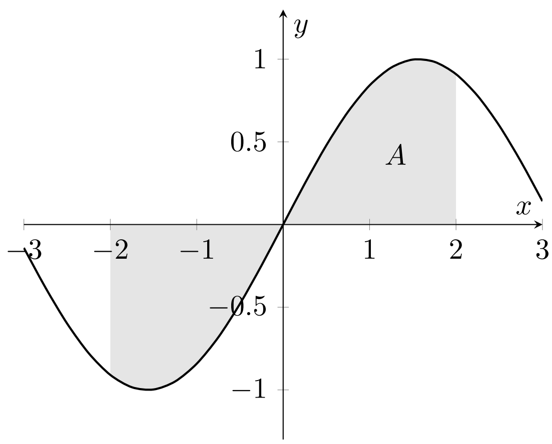
mit der Funktion aus dem ersten Beispiel, ergibt die Fläche:



Integrale können also Aussagen über eine Fläche unter einer Kurve machen. Es sei jedoch zu beachten, dass die Flächenberechnung mit Integralen nicht immer unserer intuitiven Flächenberechnung entspricht. Denn:

Satz. *Flächen über der x-Achse werden addiert, während Flächen, die unter der x-Achse liegen, subtrahiert werden.*

Sei als Beispiel die Funktion $f(x) = \sin(x)$ und die folgende Fläche gegeben:



Die Sinus-Funktion ist ungerade. Es gilt also

$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

Aus diesem Grund ist die Fläche links von der y-Achse genau gleich groß wie die Fläche rechts von der y-Achse. Wir erhalten mit dem Satz über negative Flächen direkt

$$\int_{-2}^{2} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

da wir ja die Fläche links (weil sie unter der x-Achse liegt) subtrahieren, während wir die Fläche rechts dazu-addieren. Wollen wir die „richtige“ Fläche (also unserer Intuition entsprechend), so müssen wir das Integral in zwei Integrale aufteilen und die linke Seite mit einem Minus versehen. Dies ergibt dann

$$A = -\int_{-2}^{0} \sin(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \sin(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Einfacher lässt sich die Fläche berechnen, indem wir die rechte Seite zweimal nehmen, da die beiden Flächen (links und rechts) genau gleich sind. Es gilt also auch

$$A = 2 \cdot \int_{0}^{2} \sin(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Wie wir nun dieses und viele andere Integrale berechnen, lernen wir in diesem Kapitel. Einen Satz können wir aber schon jetzt vorwegnehmen:

Satz. 1. *Ist die Funktion ungerade, also punktsymmetrisch oder $f(-x) = -f(x)$, so gilt (siehe Beispiel $\sin(x)$)*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2. *Ist die Funktion gerade, also symmetrisch an der $y-$Achse oder $f(-x) = f(x)$, so gilt*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

2.2 Stammfunktionen

Eine Stammfunktion $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist definiert durch

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Wie wir sehen, haben wir beim Integral keine Grenzen mehr. Wir betrachten also das allgemeine Integral (das sogenannte „unbestimmte Integral“). Wie bestimmen wir aber ein sogenanntes „bestimmtes Integral“ (also mit den Grenzen a und b), wenn die Stammfunktion bekannt ist? Hierfür müssen wir die Grenzen in unsere Stammfunktion einsetzen und die Resultate voneinander subtrahieren:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Beim Berechnen eines bestimmten Integrals ist es von Vorteil, immer zuerst die Stammfunktion zu bestimmen, bevor man die Grenzen erst ganz am Schluss einsetzt. Im Gymnasium lernt man nicht selten, dass die Bestimmung der Stammfunktion das „Aufleiten“ der Funktion ist, wobei das „Aufleiten“ das Gegenteil des Ableitens sein soll. Diese Aussage folgt aus dem Fundamentalsatz der Analysis (hier in etwas vereinfachter Form):

Satz. *Eine Stammfunktion* $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ *erfüllt die Gleichung*

$$F'(x) = f(x)$$

Wie wir sehen, ist die Ableitung der Stammfunktion genau durch die Funktion $f(x)$ gegeben. Wir können also beispielsweise die Lösung des folgenden Integrals schon etwas erahnen:

Beispiel. *Berechne*

$$\int 3x^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. *Wir wissen, dass die Ableitung der Funktion* x^n *durch* $n \cdot x^{n-1}$ *gegeben ist. Da wir hier genau die Form* $n \cdot x^{n-1}$ *mit* $n = 3$ *haben, ist eine Stammfunktion durch* $F(x) = x^3$ *gegeben. Es gilt nämlich* $F'(x) = 3x^2 = f(x)$*. Es gibt außerdem noch weitere Stammfunktionen, denn wenn wir zu* $F(x)$ *eine Konstante* C *dazuaddieren und diese Funktion dann ableiten, erhalten wir wieder* $f(x)$*. Somit ist die allgemeine Stammfunktion durch*

$$F(x) = x^3 + C$$

gegeben.

2.3 Standardintegrale

Um die Stammfunktionen zu finden, müssen wir zunächst ein paar Standardintegrale kennenlernen. Aus diesen können wir dann mit den Methoden in den nächsten Abschnitten zusammengesetzte Integrale berechnen. Folgende Integrale verwenden wir ohne Beweis:

$$\begin{aligned}
\int x^n \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C && \text{für } n \neq -1\\
\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x &= \log|x| + C && \text{für } x \neq 0\\
\int e^x \,\mathrm{d}x &= e^x + C && \text{für } x \in \mathbb{R}\\
\int \log x \,\mathrm{d}x &= x\log x - x + C && \text{für } x \neq 0\\
\int \sin x \,\mathrm{d}x &= -\cos x + C && \text{für } x \in \mathbb{R}\\
\int \cos x \,\mathrm{d}x &= \sin x + C && \text{für } x \in \mathbb{R}\\
\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x &= \tan x + C && \text{für } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\\
\int \tan x \,\mathrm{d}x &= -\log|\cos x| + C && \text{für } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x &= \arcsin x + C && \text{für } x \in (-1,1)\\
\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x &= \arccos x + C && \text{für } x \in (-1,1)\\
\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x &= \arctan x + C && \text{für } x \in \mathbb{R}\\
\int \frac{1}{1-x^2} \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C && \text{für } x \neq \pm 1
\end{aligned}$$

2.4 Linearität des Integrals

2.4.1 Addition und Subtraktion

Eine erste Methode zwei Integrale zusammenzusetzen ist es, diese zu addieren oder zu subtrahieren. Es gelten folgende Regeln:

$$\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
$$\int f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beispiel. *Berechne*

$$\int \sin x + x\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. *Im Integral haben wir die Summe zweier Funktionen. Wir können es also auseinanderziehen und erhalten die zwei Integrale*

$$\int \sin x + x\,\mathrm{d}x = \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x\,.$$

Wir wenden die Regeln vom letzten Abschnitt an und erhalten

$$\int \sin x + x\,\mathrm{d}x = -\cos x + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

2.4.2 Multiplikation mit Skalar

Wir können auch ein Integral mit einem Skalar multiplizieren. Es gilt folgende Regel:

$$\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$. Beachte hierbei, dass λ ein Skalar ist. Es ist unabhängig von x und einfach eine Zahl.

Beispiel. *Berechne*

$$\int 2e^x + 73\cos x\,\mathrm{d}x$$

Lösung. *Im Integral haben wir die Summe zweier Funktionen. Wir können es also auseinander ziehen und erhalten die zwei Integrale*

$$\int 2e^x + 73\cos x\,\mathrm{d}x = \int 2e^x\,\mathrm{d}x + \int 73\cos x\,\mathrm{d}x\,.$$

Weiter können wir die Skalare herausziehen und erhalten somit

$$\int 2e^x + 73\cos x \,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int e^x \,\mathrm{d}x + 73 \int \cos x \,\mathrm{d}x\,.$$

Wir wenden die Regeln vom letzten Abschnitt an und erhalten

$$\int 2e^x + 73\cos x \,\mathrm{d}x = 2e^x + 73\sin x + C.$$

2.5 Partielle Integration

Mit der partiellen Integration möchten wir ein Verfahren lernen, wie wir Integrale der Art

$$\int f(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x$$

berechnen können. Die Formel der partiellen Integration lautet wie folgt:

$$\int u'(x) \cdot v(x) \,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \,\mathrm{d}x\,.$$

Da die partielle Integration häufig zu vielen Rechenfehlern führt, möchten wir an dieser Stelle die DI-Methode einführen. Diese ist sehr praktisch und man kann sie für alle Fälle der partiellen Integration verwenden.

2.5.1 DI-Methode

Bei der partiellen Integration benötigen wir eine Funktion, welche leicht zu integrieren ist, und eine Funktion, welche wir leicht ableiten können. Welche der Funktionen wir wofür wählen sollten, ist durch keine Regel bestimmt. Hilfreich kann jedoch folgende Faustregel sein, welche in fast allen Fällen funktioniert:

Kürzel	Funktionen-Typ	Beispiele
L	logarithmisch	$\log x, \log_{10} x$
A	algebraisch	$x^n, x^5 + x + 1$
T	trigonometrisch	$\sin x, \cos x$
E	exponentiell	$e^x, e^{-x}, 8^x$

Je weiter oben die Funktion in dieser Tabelle ist, desto eher sollte man sie **ableiten**. Wir merken uns also **LATE**, zur Bestimmung, welche Funktion abgeleitet und welche integriert wird.

Wie funktioniert nun die DI-Methode? Wir zeichnen uns in allen Fällen die folgende Tabelle auf:

	D	I
$+$		
$-$		
$+$		
$-$		
$+$		

Nun schreibt man in die Spalte von „D“ in die erste Zeile die Funktion hin, welche wir ableiten und in die Spalte „I“ die Funktion, die wir integrieren möchten. Für das Integral

$$\int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$$

sieht die Tabelle wie folgt aus:

	D	I
$+$	x^2	$\cos x$
$-$		
$+$		
$-$		
$+$		

Nun wird Zeile für Zeile die Funktion bei D abgeleitet und bei I jeweils integriert. Wir erhalten in unserem Beispiel

	D	I
$+$	x^2	$\cos x$
$-$	$2x$	$\sin x$
$+$	2	$-\cos x$
$-$	0	$-\sin x$
$+$	$\vdots$	$\vdots$

Das ist die Ausgangslage für jedes Integral, welches wir mit partieller Integration lösen möchten. Wir schauen uns nun verschiedene Fälle der DI-Methode an.

1. Fall: Ableitung ist in einer Zeile 0

Wenn eine Zeile auf der D-Seite 0 ist, so können wir dort aufhören (schreiben aber noch die Zeile mit der 0 hin). Dies ist der Fall im Beispiel von weiter oben. Wir finden auf der vierten Zeile eine 0 in der Ableitung. Ist das erreicht, kann die Lösung abgelesen werden. Wir gehen dafür nach folgendem Rezept vor:

Rezept. *(DI-Methode, 1. Fall)*

1. *Wir packen die Vorzeichen auf unsere Ableitungen:*

	D	*I*		*D*	*I*
$+$	x^2	$\cos x$		x^2	$\cos x$
$-$	$2x$	$\sin x$	$\longrightarrow$	$-2x$	$\sin x$
$+$	2	$-\cos x$		2	$-\cos x$
$-$	0	$-\sin x$		0	$-\sin x$

2. *Nun nehmen wir die erste Zeile von D und multiplizieren diese mit der zweiten Zeile von I. Dann addieren wir dazu die zweite Zeile von D mal die dritte Zeile von I. Dies führen wir weiter, bis wir die 0-Zeile erreicht haben (also die Zeile, in der bei der D-Spalte eine 0 steht).*

D	I
x^2	$\cos x$
$-2x$	$\sin x$
2	$-\cos x$
0	$-\sin x$

Wir erhalten in unserem Beispiel also

$$\int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x = x^2 \sin x + (-2x)(-\cos(x)) + 2 \cdot (-\sin x) = (x^2 - 2)\sin x + 2x \cos x + C.$$

Beispiel. *Berechne*

$$\int x^3 e^x \, \mathrm{d}x \, .$$

Lösung. *Aus* ***LATE*** *wissen wir, dass wir x^3 ableiten und e^x integrieren müssen. Wir verwenden die DI-Methode und erhalten folgende Tabelle:*

	D	I
$+$	x^3	e^x
$-$	$3x^2$	e^x
$+$	$6x$	e^x
$-$	6	e^x
$+$	0	e^x

Die Lösung ist dann (Diagonalen jeweils multiplizieren und dazu-addieren)

$$\int x^3 e^x \, \mathrm{d}x = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C.$$

Beispiel. *Bestimme*

$$\int x^2 \sin(2x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Lösung. *Aus der Faustregel* ***LATE*** *wissen wir, dass wir x^2 ableiten und $\sin(2x)$ integrieren müssen. Wir verwenden die DI-Methode und erhalten folgende Tabelle:*

	D	I
$+$	x^2	$\sin(2x)$
$-$	$2x$	$-\frac{1}{2}\cos(2x)$
$+$	2	$-\frac{1}{4}\sin(2x)$
$-$	0	$\frac{1}{8}\cos(2x)$

Die Lösung ist dann (Diagonalen jeweils multiplizieren und dazu-addieren):

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin(2x)\,\mathrm{d}x &= -x^2 \cdot \frac{1}{2}\cos(2x) + 2x \cdot \frac{1}{4}\sin(2x) + 2 \cdot \frac{1}{8}\cos(2x) + C \\ &= -\frac{x^2}{2}\cos(2x) + \frac{x}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C.\end{aligned}$$

2. Fall: Eine Zeile kann integriert werden

Bemerkung: *Diesen Trick verwenden wir primär dann, wenn logarithmische Funktionen* (**L**) *abgeleitet werden und der erste Fall nicht funktioniert.*

Wir nehmen nun als Beispiel folgendes Integral:

$$\int x^4 \log x \,\mathrm{d}x\,.$$

Wir können nun wieder unsere DI-Methode anwenden und leiten dieses Mal $\log x$ ab und integrieren x^4. Dann ist die Tabelle gegeben durch:

	D	I
$+$	$\log x$	x^4
$-$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{5}x^5$
$+$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{30}x^6$

Wir sehen, dass wir in diesem Fall nie die 0 erreichen werden. Wir müssen also anders vorgehen. Wenn wir sehen, dass eine Zeile aber als Multiplikation integrierbar ist (in unserem Fall die zweite Zeile), so können wir folgendes Rezept verwenden:

Rezept. *(DI-Methode, 2. Fall)*

1. *Wir packen die Vorzeichen auf unsere Ableitungen:*

	D	*I*
$+$	$\log x$	x^4
$-$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{5}x^5$
$+$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{30}x^6$

$\longrightarrow$

D	*I*
$\log x$	x^4
$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{5}x^5$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{30}x^6$

2. *Nun nehmen wir die erste Zeile von D und multiplizieren diese mit der zweiten Zeile von I. Dann addieren wir dazu die zweite Zeile von D mal die dritte Zeile von I und so weiter (gleich, wie beim ersten Fall). Dies machen wir so lange, bis wir eine Zeile erreicht haben, welche wir integrieren können (also die Zeile, in der der Eintrag von D multipliziert mit dem Eintrag in I ein einfaches Integral ergibt).*

D	*I*
$\log x$	x^4
$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{5}x^5$

Wir erhalten also

$$\int x^4 \log x \,\mathrm{d}x = \log x \cdot \frac{1}{5}x^5 + \int (-\frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{5}x^5 \,\mathrm{d}x = \frac{x^5 \log x}{5} - \int \frac{x^4}{5} \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^5 \log x}{5} - \frac{1}{25}x^5 + C.$$

Beispiel. *Bestimme*

$$\int x^2 \log(5x) \,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. *Aus der Faustregel **LATE** wissen wir, dass wir $\log(x)$ ableiten und x^2 integrieren müssen. Somit erhalten wir folgende DI-Tabelle:*

	D	*I*
$+$	$\log(5x)$	x^2
$-$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{3}x^3$

Die Multiplikation der beiden Terme auf der zweiten Zeile lässt sich leicht integrieren. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\int x^2 \log(5x) \,\mathrm{d}x &= \log(5x) \cdot \frac{1}{3}x^3 + \int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{3}x^3 \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\log(5x) \cdot x^3}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\log(5x) \cdot x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C.\end{aligned}$$

Beispiel. *Bestimme das Integral*

$$\int \log(x) \,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. *Hier ist es nicht wirklich klar, wie wir das Integral berechnen. Jedoch wird es klar, wenn wir das Integral wie folgt schreiben:*

$$\int 1 \cdot \log(x) \,\mathrm{d}x\,.$$

*Wegen der Faustregel **LATE** leiten wir $\log(x)$ ab und integrieren die 1. Somit erhalten wir folgende Tabelle:*

	D	*I*
$+$	$\log(x)$	1
$-$	$\frac{1}{x}$	x

Die zweite Zeile kann integriert werden:

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \log(x)\,\mathrm{d}x &= \log(x) \cdot x + \int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot x\,\mathrm{d}x \\ &= \log(x) \cdot x - \int 1\,\mathrm{d}x \\ &= \log(x) \cdot x - x + C = x \cdot (\log(x) - 1) + C.\end{aligned}$$

3. Fall: Eine Zeile wiederholt sich

Bemerkung: *Diesen Trick verwenden wir hauptsächlich dann, wenn trigonometrischen Funktionen (**T**) abgeleitet werden und der erste Fall nicht funktioniert.*

Nun wollen wir uns noch den letzten Fall anschauen und nehmen als Beispiel das Integral

$$\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x\,.$$

Wir stellen wieder unsere Tabelle auf und leiten $\sin x$ ab. Die Funktion e^x integrieren wir.

	D	I
$+$	$\sin x$	e^x
$-$	$\cos x$	e^x
$+$	$-\sin x$	e^x

Wieder können wir die 0 nie erreichen. Wir sehen aber, dass die dritte Zeile, bis auf das Vorzeichen, der ersten Zeile entspricht. In diesem Fall können wir die letzte Methode verwenden:

Rezept. *(DI-Methode, 3. Fall)*

1. *Wir packen die Vorzeichen auf unsere Ableitungen:*

	D	*I*
$+$	$\sin x$	e^x
$-$	$\cos x$	e^x
$+$	$-\sin x$	e^x

$\longrightarrow$

D	I
$\sin x$	e^x
$-\cos x$	e^x
$-\sin x$	e^x

2. *Wir gehen so vor, wie im zweiten Fall (eine Zeile kann integriert werden). Wir wählen nur nicht die Zeile aus, die sich am einfachsten integrieren lässt, sondern die, welche sich wiederholt (bis auf konstante Vorfaktoren).*

D	*I*
$\sin x$	e^x
$-\cos x$	e^x
$-\sin x$	e^x

Wir erhalten also

$$\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x = e^x \sin x + (-\cos x) \cdot e^x - \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x\,.$$

Wir können unser Integral nun als eine Variable definieren:

$$I = \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x \, .$$

Dann gilt

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I.$$

Wir stellen dann nach I um und erhalten die gewünschte Lösung:

$$\begin{aligned} 2I &= e^x \sin x - e^x \cos x \\ I &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C. \end{aligned}$$

Beispiel. *Bestimme*

$$\int e^{3x} \cos(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Lösung. *Aus **LATE** wissen wir, dass wir $\cos(x)$ ableiten und e^{3x} integrieren müssen. Somit erhalten wir folgende DI-Tabelle:*

	D	I
$+$	$\cos(x)$	e^{3x}
$-$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{3}e^{3x}$
$+$	$-\cos(x)$	$\frac{1}{9}e^{3x}$

Wir sehen, dass sich die dritte Zeile (bis auf die Vorfaktoren) wiederholt. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \cos(x) \, \mathrm{d}x &= \cos(x) \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + \sin(x) \cdot \frac{1}{9} e^{3x} - \int \cos(x) \cdot \frac{1}{9} e^{3x} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\cos(x) \cdot e^{3x}}{3} + \frac{\sin(x) \cdot e^{3x}}{9} - \frac{1}{9} \int e^{3x} \cos(x) \, \mathrm{d}x \, . \end{aligned}$$

Wir ersetzen das zu bestimmende Integral mit I und erhalten

$$\begin{aligned} I &= \frac{\cos(x) \cdot e^{3x}}{3} + \frac{\sin(x) \cdot e^{3x}}{9} - \frac{1}{9} I \\ \implies \frac{10}{9} I &= \frac{\cos(x) \cdot e^{3x}}{3} + \frac{\sin(x) \cdot e^{3x}}{9} \\ \implies I &= \frac{9}{10} \left(\frac{\cos(x) \cdot e^{3x}}{3} + \frac{\sin(x) \cdot e^{3x}}{9} \right) + C. \end{aligned}$$

Wir können das Resultat noch vereinfachen und erhalten dann:

$$I = \frac{1}{10} e^{3x} \left(3 \cos(x) + \sin(x)\right) + C.$$

2.6 Substitution

Wir können bei verschachtelten und etwas komplizierteren Integralen Terme durch eine Variable u (welche von x abhängt) ersetzen. Diese Methode nennen wir „Substitution". Es kann dann einfacher sein, nach u zu integrieren, als das eigentliche Integral nach x zu integrieren. Leider können wir nicht jeden Term einfach so durch u ersetzen. Wir müssen bei einer Substitution immer das Integral zuerst durch die Ableitung der Substitution teilen, bevor wir das Integral nach $\mathrm{d}u$ lösen. Dass wir $\mathrm{d}x$ durch $\mathrm{d}u$ ersetzen können, indem wir durch die Ableitung von u teilen, können wir anhand der Bruch-Schreibweise der Ableitung erkennen:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'$$
$$\mathrm{d}x = \frac{1}{u'}\,\mathrm{d}u$$

Dass $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ sowas wie ein Bruch ist, ist mathematisch nicht ganz korrekt. Dieser Trick funktioniert aber trotzdem in vielen Fällen und wir werden diesen Trick bei den Differentialgleichungen nochmals gebrauchen. Zurück zur Substitution! Wir gehen nach folgendem Rezept vor:

Rezept. *(Substitution)*

1. *Wähle einen Term $g(x)$, den du substituieren möchtest. Ersetze diesen Term durch die Variable u.*
2. *Teile die gesamte Funktion durch die Ableitung des Terms $g'(x)$ (oder u'). Du kannst nun $\mathrm{d}u$ anstatt $\mathrm{d}x$ schreiben.*
3. *Die neu eingeführte Variable u ist von x abhängig, und somit ist x auch von u abhängig. Löse also zuerst $u = g(x)$ nach x auf und ersetze dann jedes übrig geblieben x durch den erhaltenen u-Term. Im Integral darf jetzt kein x mehr vorkommen! Löse das neue Integral.*
4. *Ersetze in der erhaltenen Stammfunktion wieder jedes u durch $g(x)$ (Rücksubstitution).*

Grenzen bei bestimmten Integralen sollen erst nach der Rücksubstitution eingesetzt werden, um Fehler zu vermeiden.

Möchte man die Grenzen direkt, ohne Rücksubstitution, einsetzen, so muss man sich bewusst sein, dass sich durch die Substitution auch die Grenzen wie folgt ändern:

$$\int_a^b \ldots \,\mathrm{d}x \overset{u=g(x)}{\longrightarrow} \int_{g(a)}^{g(b)} \ldots \,\mathrm{d}u\,.$$

Dies erlaubt das Lösen eines bestimmten Integrals, ohne Rücksubstitution im vierten Schritt.

Beispiel. *Bestimme*

$$\int x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. *Wir gehen nach dem Rezept vor:*

1. *Da $1-x$ verschachtelt ist in $\sqrt{1-x}$, können wir versuchen, $g(x)=1-x$ durch u zu substituieren:*
$$\int x\sqrt{u}\,\mathrm{d}x\,.$$
2. *Die Ableitung von $g(x)$ ist $g'(x)=-1$. Wir müssen das Integral durch $g'(x)$ teilen (und schreiben nun $\mathrm{d}u$ statt $\mathrm{d}x$):*
$$\int \frac{x\sqrt{u}}{-1}\,\mathrm{d}u = -\int x\sqrt{u}\,\mathrm{d}u\,.$$
3. *Wir dürfen dieses Integral noch nicht integrieren, da noch ein x im Integral steht. Es gilt $u=1-x$ und somit $x=1-u$. Also ersetzen wir das letzte x durch $1-u$:*
$$-\int (1-u)\sqrt{u}\,\mathrm{d}u\,.$$
Dieses Integral lässt sich mit den Standardintegralen berechnen. Wir teilen das Integral auf und schreiben Wurzeln zu Potenzen um:
$$-\int \sqrt{u}-u\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = -\int u^{\frac{1}{2}} - \int u^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}u = -\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right) + C.$$
4. *Zuletzt ersetzen wir jedes u wieder durch die Substitution $g(x)$:*
$$-\left(\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right) + C.$$

Manchmal bleiben auch keine x mehr übrig, und wir können den dritten Schritt abkürzen:

Beispiel. *Berechne*
$$\int \sqrt{3x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. *Wir kennen die Funktion $\sqrt{x}$ und wissen, dass*
$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$
gilt (dies folgt aus Integration von x^s gemäß den Standardintegralen). Wir sehen nun aber, dass das zu berechnende Integral genau dieses Integral ist, jedoch die Funktion $3x$ in ihr verschachtelt ist. Somit wählen wir die Substitution $u=3x$ und erhalten $u'=3$. Es gilt somit
$$\int \sqrt{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{9}u^{3/2} + C.$$
Wir konnten hier direkt integrieren, da kein x mehr übrig war und haben so den dritten Schritt übersprungen. Schlussendlich können wir rücksubstituieren, indem wir für das u wieder $3x$ einsetzen. Wir erhalten also als Lösung
$$\int \sqrt{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}(3x)^{3/2} + C.$$

Beispiel. *Berechne*

$$\int x \sin\Big(x^2+1\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. *Wir kennen die Funktion* $\sin x$ *und wissen, dass*

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

gilt. Wir sehen nun aber, dass im zu berechnenden Integral genau dieses Integral vorkommt, jedoch die Funktion x^2+1 *in ihr verschachtelt ist. Somit wählen wir die Substitution* $u = x^2+1$ *und erhalten* $u' = 2x$*. Es gilt also*

$$\int x \sin\Big(x^2+1\Big)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2x}\sin u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \sin u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos u + C.$$

Durch das Teilen durch u' *konnten wir das übrig gebliebene* x *sowieso kürzen und müssen uns nicht mehr darum kümmern. Schlussendlich können wir rücksubstituieren, indem wir wieder für das* u *unser* x^2+1 *einsetzen. Wir erhalten die Lösung*

$$\int x \sin\Big(x^2+1\Big)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos\Big(x^2+1\Big) + C.$$

Wieso haben wir keine partielle Integration gebraucht? Grund dafür ist, dass die Ableitung der verschachtelten inneren Funktion im Integral in gewisser Weise schon im Integral vorkommt. Das x wird mit dem $\sin(x)$ multipliziert. Da wir aber bei der Substitution durch unsere Ableitung $(2x)$ teilen, wird dieses x weg-gekürzt. Merke dir:

Trick. *Denke immer zuerst an die Substitution, bevor du partiell integrierst. Wenn die Ableitung einer verschachtelten Funktion in irgendeiner Weise vorkommt, kann es sein, dass nach dem Substituieren gekürzt werden kann.*

Ein weiteres Beispiel eines solchen Integrals wäre das folgende:

Beispiel. *Bestimme*

$$\int \frac{x^3}{x^4+5}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. *Hier können wir* x^4+5 *substituieren, da* x^3 *fast (bis auf Vorfaktoren) die Ableitung von* x^4+5 *ist und dadurch weg-gekürzt wird. Denn* $u = x^4+5$ *und somit* $u' = 4x^3$ *führt zum Integral*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4x^3}\frac{x^3}{u}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{4}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\log|u| + C = \frac{1}{4}\log|x^4+5| + C.\end{aligned}$$

Aus dem Trick folgen die Regeln[1]:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \log(f(x)) + C \qquad \text{und} \qquad \int f'(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(x)^2 + C.$$

Einige weitere Beispiele zum Trick und zu den Formeln:

Beispiel. *Bestimme*

$$\int \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. $\cos(x)$ *ist die Ableitung von* $\sin(x)$. *Somit müssten wir* $u = \sin(x)$ *substituieren (könnten aber auch* $u = \cos(x)$ *setzen, da die Ableitung davon* $-\sin(x)$ *ist und bis auf das Vorzeichen ebenfalls vorkommt). Noch einfacher geht es mit der Formel von vorhin: Wir erhalten genau den Fall* $\int f'(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ *und somit*

$$\int \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(x)^2 + C.$$

Beispiel. *Bestimme*

$$\int \frac{5x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. *Der Zähler ist fast schon die Ableitung des Nenners (bis auf den Vorfaktor). Wir substituieren deswegen den Nenner und erhalten:*

$$\begin{aligned}\int \frac{5x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2x}\frac{5x}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{5}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{5}{2}\log|u| + C\\ &= \frac{5}{2}\log|x^2+1| + C.\end{aligned}$$

[1] Allgemeiner folgt sogar

$$\int f'(x)\cdot g(f(x))\,\mathrm{d}x = G(f(x)) + C$$

wobei $G(x)$ die Stammfunktion der äußeren Funktion ist. Du siehst hier gut, dass das genau die „aufgeleitete“ Kettenregel ist.

Beispiel. *Bestimme*

$$\int x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. x^2 *ist fast schon die Ableitung der Potenz von* e *(bis auf den Vorfaktor). Wir substituieren deswegen die Potenz und erhalten:*

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{3x^2} x^2 e^u\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{3}\int e^u\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{3}e^u + C\\ &= \frac{1}{3}e^{x^3} + C.\end{aligned}$$

Beispiel. *Bestimme*

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. *Im Zähler haben wir* e^x*. Somit sollten wir etwas substituieren, dass dieses* e^x *wegkürzt. Die Substitution von* $u = e^{2x}+1$ *ist keine gute Substitution, da wir als Ableitung* $2e^{2x}$ *erhalten, und die Substitution somit das Integral nochmals etwas verkompliziert. Was geschieht, wenn wir einfach* $u = e^x$ *setzen? Dann erhalten wir mit* $u' = e^x$ *und* $e^{2x} = u^2$*:*

$$\int \frac{1}{e^x}\frac{e^x}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u\,.$$

Dieses Integral kennen wir aus den Standardintegralen, es gilt

$$\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \arctan(u) + C$$

und mit Rücksubstitution

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(e^x) + C.$$

2.7 Partialbruchzerlegung

2.7.1 Koeffizientenvergleich

Der Koeffizientenvergleich ist eine Methode in der Mathematik, bei der man unbekannte Koeffizienten durch Vergleich von Koeffizienten (bspw. von $x, x^2, \ldots$) findet. Sei, als erstes Beispiel, folgendes Polynom gegeben:

$$p(x) = A(x-1) + B(x-3) + Cx^2.$$

Wir wollen nun A, B und C so finden, dass dieses Polynom dem folgenden entspricht:

$$q(x) = 3x^2 + x + 1.$$

Dazu bringen wir das Polynom $p(x)$ und das Polynom $q(x)$ in die folgende Form:

$$x^2 \cdot (...) + x \cdot (...) + ...$$

Wir führen also alle Koeffizienten von x^2, x und den Rest zusammen. Für $p(x)$ wäre dies also

$$p(x) = x^2 \cdot (C) + x \cdot (A + B) - A - 3B$$

und für $q(x)$

$$q(x) = x^2 \cdot (3) + x \cdot (1) + 1.$$

Stellen wir diese beiden nun gleich, können wir schon erkennen, was wir als Nächstes machen müssen:

$$x^2 \cdot (C) + x \cdot (A + B) - A - 3B = x^2 \cdot (3) + x \cdot (1) + 1.$$

Die Koeffizienten von x^2, x und der Rest müssen übereinstimmen. Wir erhalten also ein Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} C &= 3 \\ A + B &= 1 \\ -A - 3B &= 1. \end{aligned}$$

Auflösen der zweiten Gleichung ergibt $A = 1 - B$ und einsetzen in die dritte Gleichung ergibt

$$-1 - 2B = 1 \implies B = -1.$$

Somit ist unsere Lösung

$$A = 2 \quad B = -1 \quad C = 3.$$

2.7.2 Integrale mit Partialbruchzerlegung

Sei nun ein Integral der Form

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} \,\mathrm{d}x$$

gegeben, wobei $f(x)$ und $g(x)$ Polynome sind und $g(x)$ komplett in Linearfaktoren zerlegt werden kann. Die Funktion $g(x)$ kann also wie folgt geschrieben werden:

$$g(x) = (x - ...) \cdot (x - ...) \cdot \ldots \cdot (x - ...)..$$

Ein Beispiel eines solchen Integrals wäre

$$\int \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2} \,\mathrm{d}x\,.$$

Wir gehen nun nach folgendem Rezept vor:

Rezept. *(Partialbruchzerlegung)*

1. *Faktorisiere den Nenner in seine Linearfaktoren:* $g(x) = (x - x_1)...(x - x_k)$*. In unserem Beispiel also*

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

2. *Schreibe nun folgende Summe hin*

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + ...$$

mit $A, B, ...$ *Konstanten. Falls ein Linearfaktor eine Potenz* $k \geq 2$ *hat, so muss jede einzelne Potenz von ihm summiert werden. Beispielsweise für* $g(x) = (x - 2)^2(x + 1)$ *müssen wir folgende Summe hinschreiben:*

$$\frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{C}{x + 1}.$$

In unserem Beispiel aber erhalten wir

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}.$$

3. *Bringe die Summe auf einen Nenner* $(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_k)$*. Für unser Beispiel erhalten wir*

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)}.$$

4. *Setze nun den Zähler gleich* $f(x)$ *(also dem Zähler aus dem Integral) und löse mit Koeffizientenvergleich nach* A *und* B *auf. Für unser Beispiel erhalten wir*

$$\begin{aligned} &A(x - 2) + B(x - 1) = x + 1 \\ \Longrightarrow\ &x(A + B) - 2A - B = x + 1 \\ \Longrightarrow\ &A + B = 1, \quad -2A - B = 1 \\ \Longrightarrow\ &A = -2, \quad B = 3. \end{aligned}$$

5. *Die Lösung ist nun gegeben durch*

$$\int \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + ... \, \mathrm{d}x\,,$$

oder in unserem Beispiel

$$\int \frac{-2}{x - 1} + \frac{3}{x - 2} \mathrm{d}x = -2 \log |x - 1| + 3 \log |x - 2| + C,$$

wobei wir das Integral in zwei Integrale aufgespalten haben und jeweils eine Substitution durchgeführt haben.

Trick. *Man ist deutlich schneller, wenn man sich einfach merkt, dass*

$$\int \frac{a}{x - x_i} \mathrm{d}x = a \log |x - x_i| + C$$

mit $a \in \mathbb{R}$ *gilt (Wieso? Versuche dies als Übung zu zeigen.)*

Beispiel. *Berechne*

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. *Wir gehen wie im Rezept vor:*

1. *Der Nenner* $g(x) = (x-1)^2(x+1)$ *ist schon faktorisiert.*

2. *Wir schreiben folgende Summe hin:*

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

3. *Als Nächstes bringen wir die Summe auf einen Nenner:*

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}.$$

4. *Nun wird der Zähler dem Zähler des gesuchten Integrals gleichgestellt und die Koeffizienten verglichen:*

$$A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 = x.$$

Es folgt durch Ausmultiplizieren

$$(A+C)x^2 + (B-2C)x - A + B + C = x,$$

und somit die folgenden drei Gleichungen

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B - 2C &= 1 \\ -A + B + C &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich mit Umstellen und Auflösen (oder mit dem Gauss-Verfahren, siehe dazu Kapitel 5) lösen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \\ B &= \frac{1}{2} \\ C &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

5. *Somit ist unsere Lösung gegeben durch*

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\log|x+1| + C. \end{aligned}$$

Beispiel. *Bestimme*

$$\int \frac{2x+1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. *Wir gehen nach dem Rezept vor:*

1. *Wir bestimmen die Nullstellen des Nenners x^2-x-2 und erhalten $x_1=-1$ und $x_2=2$. Somit ist die Faktorisierung des Nenners:*

$$g(x)=(x-2)(x+1).$$

2. *Wir schreiben den folgenden Ansatz hin:*

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}.$$

3. *Die Summe wird dann auf den Nenner $(x-2)(x+1)$ gebracht:*

$$\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}.$$

4. *Wir lösen mit Koeffizientenvergleich nach A und B auf:*

$$\begin{aligned} A(x+1)+B(x-2)&=2x+1\\ x(A+B)+A-2B&=2x+1\\ \Longrightarrow A+B=2,\quad A-2B&=1\\ \Longrightarrow A=\frac{5}{3},\quad B&=\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

5. *Die Lösung ist dann gegeben durch*

$$\int \frac{\frac{5}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{3}\log|x-2|+\frac{1}{3}\log|x+1|+C.$$

Beispiel. *Bestimme:*

$$\int \frac{x-1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. *Wir gehen nach dem Rezept vor:*

1. *Zuerst berechnen wir die Nullstellen des Nenners und erhalten $x_1=-2$ und $x_2=-1$. Die Faktorisierung ist also $g(x)=(x+2)(x+1)$.*

2. *Unser Ansatz ist somit*

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}.$$

3. *Wir bringen die beiden Brüche auf einen Nenner:*

$$\frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)}.$$

4. *Mit Koeffizientenvergleich erhalten wir:*

$$\begin{aligned} A(x+1)+B(x+2) &= x-1 \\ x(A+B)+A+2B &= x-1 \\ \implies A+B=1, &\quad A+2B=-1 \\ \implies A=3, &\quad B=-2. \end{aligned}$$

5. *Die Lösung ist dann gegeben durch*

$$\int \frac{3}{x+2}+\frac{-2}{x+1}\,\mathrm{d}x = 3\log|x+2| - 2\log|x+1| + C.$$

Beispiel. *Bestimme*

$$\int \frac{x}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. *Wir gehen nach dem Rezept vor:*

1. *Es gilt* $x^2-4x+4=(x-2)^2$*. Dies ist die Faktorisierung des Nenners.*
2. *Unser Ansatz ist somit*

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2},$$

da $x=2$ *eine doppelte Nullstelle ist.*

3. *Wir bringen den Ansatz auf einen Bruch:*

$$\frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}.$$

4. *Durch Vergleich der Koeffizienten erhalten wir*

$$\begin{aligned} A(x-2)+B &= x \\ \implies x\cdot A-2A+B &= x \\ \implies A=1, &\quad -2A+B=0 \\ \implies A=1, &\quad B=2. \end{aligned}$$

5. *Die Lösung ist dann*

$$\int \frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \log|x-2| - \frac{2}{x-2} + C.$$

Beispiel. *Bestimme*

$$\int \frac{x+2}{x^3-7x^2+14x-8}\,\mathrm{d}x\,.$$

Hinweis: $x_0 = 1$ ist eine Nullstelle des Nenners.

Lösung. *Wir gehen nach unserem Rezept vor:*

1. *Wir möchten die Nullstellen des Nenners herausfinden. Aus dem Hinweis wissen wir, dass $x_0 = 1$ eine Nullstelle ist. Also führen wir die folgende Polynomdivision aus:*

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ x^3 - 7x^2 + 14x - 8\big) \div \big(x-1\big) = x^2 - 6x + 8 \\
\underline{-x^3 \ + x^2} \\
\qquad\ \ - 6x^2 + 14x \\
\qquad\ \ \underline{\ \ 6x^2 \ - 6x} \\
\qquad\qquad\qquad 8x - 8 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-8x + 8} \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ 0
\end{array}$$

Alternativ hätten wir auch das Horner-Schema anwenden können. Das übrig gebliebene quadratische Polynom hat Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$, somit lautet die vollständige Faktorisierung:

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = (x-1)(x-2)(x-4).$$

2. *Unser Ansatz ist somit*

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}.$$

3. *Wir bringen den Ansatz auf einen Bruch:*

$$\frac{A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-4)}.$$

4. *Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir*

$$\begin{aligned}
& A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x-2) = x+2 \\
\Longrightarrow\ & x^2(A+B+C) + x(-6A-5B-3C) + 8A+4B+2C = x+2 \\
\Longrightarrow\ & A+B+C = 0, \quad -6A-5B-3C = 1, \quad 8A+4B+2C = 2 \\
\Longrightarrow\ & A = 1, \quad B = -2, \quad C = 1.
\end{aligned}$$

Wir haben dabei das Gleichungssystem durch Umstellen der Gleichungen (oder durch das Gauss-Verfahren) gelöst.

5. *Wir erhalten*

$$\int \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}x = \log|x-1| - 2\log|x-2| + \log|x-4| + C$$

2.7.3 Ein Trick für den Koeffizientenvergleich

Wie wir gesehen haben, ist der Koeffizientenvergleich sehr aufwendig. Um uns dies zu vereinfachen, können wir folgenden Trick anwenden:

Trick. *Haben wir die Gleichungen aus dem Koeffizientenvergleich aufgestellt, können wir die Nullstellen von $g(x)$ für x einsetzen, um schneller A, B und C zu erhalten.*

Beispiel. *Bestimme*

$$\int \frac{x+2}{x^3 - 7x^2 + 14x - 8} \, \mathrm{d}x$$

mit diesem Trick.

Lösung. *Die ersten drei Schritte bleiben gleich. Wir erhalten also immer noch*

$$A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x-2) = x+2.$$

Nun setzen wir die Nullstellen von $g(x)$ ein, statt ein Gleichungssystem aufzustellen:

$$\begin{aligned}
x = 1 &\implies A(1-2)(1-4) + B(1-1)(1-4) + C(1-1)(1-2) = 1+2 \implies 3A = 3 \\
x = 2 &\implies A(2-2)(2-4) + B(2-1)(2-4) + C(2-1)(2-2) = 2+2 \implies -2B = 4 \\
x = 4 &\implies A(4-2)(4-4) + B(4-1)(4-4) + C(4-1)(4-2) = 4+2 \implies 6C = 6.
\end{aligned}$$

Wir erhalten $A = 1$, $B = -2$ und $C = 1$. Der Rest der Lösung bleibt gleich.

Als Übung kannst du versuchen, alle Aufgaben bis hierhin mit diesem Trick zu lösen.

3

Komplexe Zahlen

„Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas."

– Albert Einstein

3.1 Einführung

Der Einstieg in die komplexen Zahlen fällt vielen Studierenden schwer. Viele können sich diese nicht vorstellen oder finden einfach keinen Bezug zur Realität. Wieso brauchen wir komplexe Zahlen, wenn diese nur imaginär sind? Um diese Frage zu beantworten, wollen wir zunächst die nicht-komplexen Zahlen besser verstehen. Sei folgende Gleichung gegeben

$$x - 1 = 0.$$

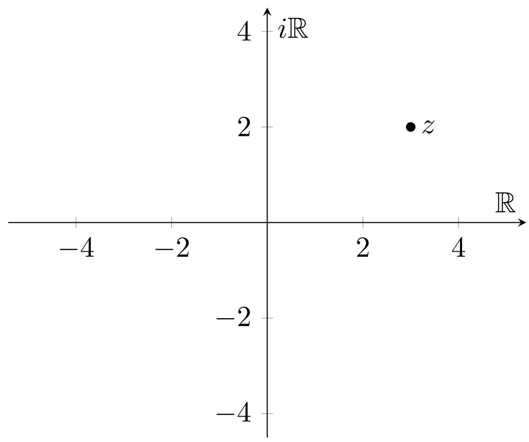
Damit wir diese Gleichung lösen können, benötigen wir die bekannten natürlichen Zahlen. Wir schreiben für die Lösung $x \in \mathbb{N}$. Schnell bemerken wir aber, dass diese Zahlenmenge nicht genügt, um alle Gleichungen der Mathematik zu lösen. Man fand beispielsweise, dass $x+1 = 0$ keine Lösung in $\mathbb{N}$ besitzt. Es musste also eine weitere Zahlenmenge definiert werden, welche die natürlichen Zahlen mit den negativen Zahlen ergänzt. Dies waren die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. So ging man weiter vor und fand zunächst die Gleichung $2x - 1 = 0$ und definierte somit die Zahlenmenge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, und dann die Gleichung $x^2 - 2 = 0$, dessen Lösung eine reelle Zahl ist. Die Menge aller reellen Zahlen ist $\mathbb{R}$. Man beachte hierbei, dass wir jedes Mal die Zahlenmengen nur ergänzt haben. Die rationalen Zahlen sind also beispielsweise alle in $\mathbb{R}$ enthalten.
Somit haben wir alle Zahlen, die wir bislang kennen, in Zahlenmengen definiert. Das Problem an diesen Zahlenmengen ist jedoch, dass sie zwar sehr viele Gleichungen in der Mathematik lösen, aber nicht alle. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0.$$

Man kann nun sagen, dass eine solche Lösung nicht existiert, da Wurzeln aus negativen Zahlen nicht existieren. Wieso aber bestimmt man nicht einfach eine weitere Zahlenmenge, welche genau diese Gleichungen löst? Genau diese Zahlenmenge nennen wir die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

3.2 Definition und Rechenregeln

Um die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ aus dem vorherigen Abschnitt zu lösen, definieren wir die imaginäre Einheit i, welche die Eigenschaft $i^2 = -1$ haben soll[1]. Eine komplexe Zahl definieren wir dann als ein Vielfaches dieser imaginären Einheit plus eine reelle Zahl. Also $z = x + iy$, wobei x, y beide reelle Zahlen sind. Wir nennen x den Realteil der komplexen Zahl ($\mathrm{Re}(z) = x$) und y den Imaginärteil ($\mathrm{Im}(z) = y$).
In der Grundstufe lernt man reelle Zahlen auf einem sogenannten Zahlenstrahl einzuzeichnen. Damit wir uns nun komplexe Zahlen bildlich vorstellen können, erweitern wir den Zahlenstrahl zu einer Zahlenebene – der Gauß-Ebene. Die reellen Zahlen (in unserem Fall also $y = 0$) liegen dabei immer noch auf der x-Achse (oder reellen Achse) dieser Ebene. Wir können nun beispielsweise $z = 3 + 2i$ einzeichnen, indem wir den Punkt $(3 \mid 2)$ in der komplexen Ebene markieren.



Allgemein ist also der Punkt z gegeben durch $(\mathrm{Re}(z) \mid \mathrm{Im}(z))$. Die komplexe Zahlenebene veranschaulicht auch das Problem, dass wir komplexe Zahlen nicht vergleichen können. Ob $-2 + 3i$ oder $-1 + 2i$ größer ist, lässt sich also nicht beantworten. Ob zwei komplexe Zahlen gleich sind hingegen schon. Wir schreiben nämlich $z_1 = z_2$ genau dann, wenn $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ und $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$ gilt.

Wie schon mit den Zahlen in $\mathbb{R}$, können wir auch mit komplexen Zahlen rechnen. Die Rechenregeln folgen dabei ziemlich intuitiv aus den reellen Zahlen. Wir verwenden das folgende Rezept:

Rezept. *(Multiplikation, Addition und Subtraktion in $\mathbb{C}$)*

1. *Fasse die imaginäre Einheit i als Variable auf.*
2. *Klammere alle Terme aus und rechne normal wie mit den reellen Zahlen.*
3. *Ersetze jedes i^2 durch -1. Auch andere Potenzen von i können ersetzt werden: $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ etc.*

[1] Man beachte, dass $i = \sqrt{-1}$ nur Notation ist und man beim Rechnen mit Wurzeln wegen der Mehrdeutigkeit vorsichtig sein muss (siehe hierzu Abschnitt 4.4.6). Wir stoßen etwa auf folgenden Widerspruch:

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Wir werden aber sehen, dass man in vielen Fällen $\sqrt{-1}$ trotzdem durch i ersetzen kann.

4. *Führe das Resultat auf folgende Form zurück: $A + iB$, wobei A und B reelle Terme ohne i sind.*

Ein Ausnahmefall ist die Division. Diese wird im nächsten Abschnitt behandelt.

Beispiel. *Berechne $(1 + 4i) \cdot (3 - 2i)$.*

Lösung.

$$\begin{aligned}(1 + 4i) \cdot (3 - 2i) &= 3 + 12i - 2i - 8i^2 \\ &= 3 + 10i + 8 \\ &= 11 + 10i\end{aligned}$$

Beispiel. *Berechne $(-i)^5$.*

Lösung. *Es gilt*

$$\begin{aligned}(-i)^5 &= (-1)^5 \cdot i^5 \\ &= (-1) \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i \\ &= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot i \\ &= -i,\end{aligned}$$

wobei wir den Trick benutzt haben, eine negative Zahl $-a$ als Produkt von (-1) und a aufzufassen (in unserem Fall $a = i$).

3.3 Komplexe Konjugation und Betrag

Um die Division von komplexen Zahlen einzuführen, benötigen wir zwei Begriffe:

1. Für $z = x + iy$ nennen wir $\bar{z} = x - iy$ die komplexe Konjugation von z.
2. Sei $z = x + iy$. Wir nennen $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ den Betrag von z.

Wir können mithilfe von Pythagoras leicht überprüfen, dass in der komplexen Ebene der Abstand von z zum Koordinatenursprung $(0 \mid 0)$ genau dem Betrag von z entspricht. Die komplexe Konjugation ist die Spiegelung an der reellen Achse (x-Achse). Außerdem bemerken wir, dass der Betrag immer reell ist, da x und y beide reell sind und $x^2 + y^2$ positiv ist.
Eine wichtige Beziehung der beiden Begriffe ist

$$|z|^2 = \bar{z} \cdot z.$$

Beispiel. *Beweise die Beziehung* $|z|^2 = \bar{z} \cdot z$.

Lösung. *Es gilt*

$$\begin{aligned}\bar{z} \cdot z &= (x+iy)(x-iy) \\ &= x^2 - (iy)^2 \\ &= x^2 - i^2y^2 \\ &= x^2 - (-1)y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2,\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Gleichung die dritte binomische Formel benutzt haben.

Wir möchten nun die Division der komplexen Zahlen verstehen. Wir wenden hierzu das Rezept aus dem letzten Abschnitt für den Zähler und Nenner separat an. Das wichtigste dabei ist, dass wir den Bruch $\frac{z_1}{z_2}$ in die Form $x+iy$ bringen wollen. Wir verwenden dazu das folgende Rezept:

Rezept. *(Division zweier komplexen Zahlen* $\frac{z_1}{z_2}$*)*

1. *Multipliziere sowohl Zähler als auch Nenner mit dem komplex Konjugierten des Nenners.*
2. *Du erhältst nun im Nenner (wegen der Beziehung, welche wir hergeleitet haben)* $|z_2|^2$.
3. *Führe den Zähler auf die Form* $a+ib$ *zurück. Du erhältst nun* $\frac{a+ib}{|z_2|^2}$
4. *Wir können den Bruch in zwei Teile teilen (einen Realteil und Imaginärteil) und erhalten* $\frac{a}{|z_2|^2} + i\frac{b}{|z_2|^2}$.

Wir wollen nun dieses Verfahren anhand einiger Beispiele anwenden:

Beispiel. *Berechne* $\frac{3+i}{3-i}$.

Lösung.

$$\begin{aligned}\frac{3+i}{3-i} &= \frac{(3+i)\cdot(3+i)}{(3-i)\cdot(3+i)} \\ &= \frac{3^2+6i+i^2}{3^2+1^2} \\ &= \frac{8+6i}{10} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\end{aligned}$$

Beispiel. *Berechne* $\frac{1+i}{\sqrt{2}i}$.

Lösung.

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{\sqrt{2}i} &= \frac{(1+i)\cdot(-\sqrt{2}i)}{\sqrt{2}i\cdot(-\sqrt{2}i)}\\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\end{aligned}$$

Beachte hier im zweiten Schritt, dass das komplex Konjugierte von $\sqrt{2}i$ *genau* $-\sqrt{2}i$ *ist, da wir* $\sqrt{2}i$ *auch als* $0+\sqrt{2}i$ *schreiben können.*

Beispiel. *Für welche komplexe Zahl* z *gilt:* $1+i+\frac{1}{z}=2+3i$*?*

Lösung. *Wir formen um, dass nur noch* z *auf einer Seite steht:*

$$\begin{aligned}1+i+\frac{1}{z}=2+3i &\iff \frac{1}{z}=1+2i\\ &\iff z=\frac{1}{1+2i}.\end{aligned}$$

Wir erhalten nun mit dem Rezept:

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{1+2i}\\ &= \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}\\ &= \frac{1-2i}{1^2+2^2}\\ &= \frac{1}{5}-\frac{2}{5}i.\end{aligned}$$

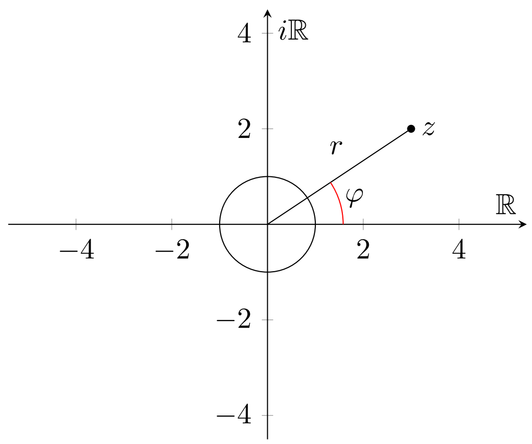
Beispiel. *Zeige, dass* $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ *gilt.*

Lösung. *Sei $z = a + ib$ und $w = c + id$. Dann gilt*

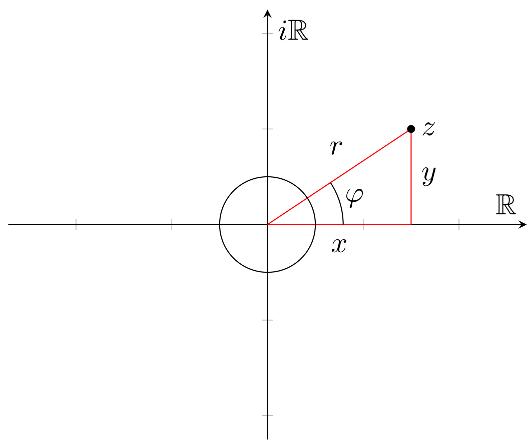
$$\begin{aligned}
\overline{z+w} &= \overline{a+ib+c+id} \\
&= \overline{a+c+i(b+d)} \\
&= a+c-i(b+d) \\
&= a+c-ib-id \\
&= a-ib+c-id \\
&= \overline{z}+\overline{w}.
\end{aligned}$$

3.4 Polarform

Bis jetzt haben wir komplexe Zahlen immer in der Form $z = x + iy$ betrachtet. Diese Form nennen wir „Normalform von z". Nun schauen wir uns nochmals die komplexe Zahlenebene an. Wir können unseren Punkt auch anders beschreiben:



Den Kreis in der Mitte mit Radius 1 nennen wir den Einheitskreis. Wie wir nun sehen können, kann unsere komplexe Zahl z eindeutig durch ihren Real- und Imaginärteil bestimmt werden, aber wir können sie auch mit einem Winkel φ und dem Radius $r = |z|$ definieren. Der Radius r ist hierbei genau die Länge des Vektors z (oder das Vielfache vom Radius des Einheitskreises, dessen Radius genau 1 ist) und der Winkel φ ist genau der Winkel, welcher der Vektor z zur reellen Achse bildet (siehe Abbildung oben). Wie können wir nun z in Abhängigkeit von φ und r schreiben? Dazu verwenden wir Trigonometrie:



Wir erhalten für die Ankathete $x = r\cos(\varphi)$ und für die Gegenkathete $y = r\sin(\varphi)$. Wir erhalten also die komplexe Zahl (nur abhängig von r und φ)

$$z = r\cos(\varphi) + i \cdot r\sin(\varphi).$$

Dies ist der Grundbaustein der Polarform. Allerdings ist sie in dieser Form noch nicht wirklich brauchbar. Die rechte Seite lässt sich aber deutlich einfacher schreiben, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

3.4.1 Die schönste Formel der Welt

Im Jahre 1748 bewies der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler in seinem Werk „Introductio in analysin infinitorum" eine der wohl verblüffendsten Gleichungen der Mathematik: die eulersche Identität

$$e^{i\pi} = -1.$$

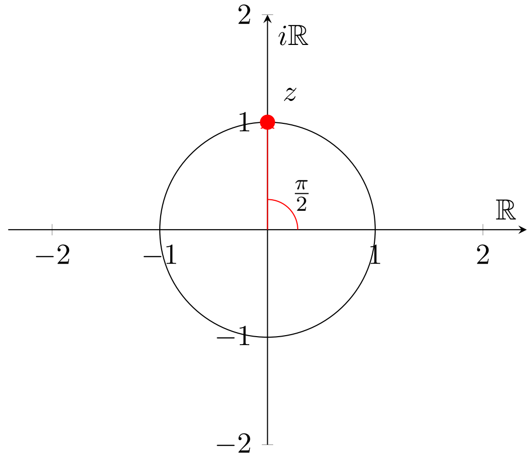
Dass die zwei reellen Zahlen e und π zusammen mit der komplexen Zahl i eine solch schöne Formel bilden, verdanken wir der allgemeinen Formel

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi).$$

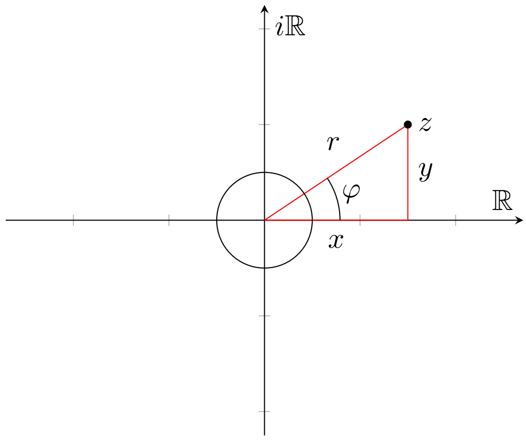
Wir können nun die eulersche Identität beweisen, indem wir $x = \pi$ einsetzen. Diese Formel nennt man die Euler-Formel und sie ist grundlegend für die Polarform der komplexen Zahlen (der Beweis folgt aus den Potenzreihendarstellungen der trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion). Wenn wir die Formel mit der bisherigen Form $z = r\cos(\varphi) + i \cdot r\sin(\varphi)$ vergleichen, erhalten wir

$$z = re^{i\varphi}.$$

Das ist die Polarform. Ein Beispiel: der Punkt $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$ lässt sich wie folgt darstellen:



Wie finden wir aber die Polarform einer komplexen Zahl in Normalform? Der Radius ist nichts Weiteres als der Betrag der komplexen Zahl z. Es gilt also $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wie groß ist der Winkel? Wir schauen uns nochmals die Ebene von vorhin an



Da wir die Koordinaten von z kennen, können wir trigonometrische Funktionen benutzen, um den Winkel zu finden. Die komplexe Zahl z in diesem Beispiel ist $z = 3 + 2i$. Für den Winkel gilt genau $\tan(\varphi) = \frac{2}{3}$. Und somit gilt $\varphi = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0.98$. Sei $z = x + iy$ eine allgemeine komplexe Zahl. Es gilt dann analog zu vorhin

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Mit diesem Winkel erhalten wir in unserem Beispiel also die Polarform

$$z \approx \sqrt{3^2 + 2^2}e^{i \cdot 0.98} = \sqrt{13}e^{i \cdot 0.98}.$$

Bevor wir dies in einem Rezept zusammenfassen, möchten wir noch einen Begriff einführen: das Argument. Das Argument einer komplexen Zahl z ist der Polarwinkel dieser Zahl φ, also

$$\arg(z) = \varphi.$$

Wie wir später sehen werden, ist diese Funktion nur dann definiert, wenn wir $\arg(z)$ auf ein gewisses Intervall einschränken. Wir verwenden in diesem Buch die Konvention $\arg(z) = \varphi \in (-\pi, \pi]$.

3.4.2 Umformung Normalform → Polarform

Wir möchten die Ergebnisse des vorherigen Abschnittes nochmals in einem Rezept zusammenfassen:

Rezept. *(**Falsches Rezept** zur Umrechnung von Normalform zur Polarform einer komplexen Zahl $z = x + iy$)*

1. *Wir bestimmen zunächst den Radius der komplexen Zahl mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.*
2. *Nun bestimmen wir den Winkel φ, den die komplexe Zahl mit der reellen Achse bildet. Dieser ist gegeben durch $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$. Im Sonderfall von $x = 0$ gilt $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.*
3. *Wir schreiben nun $z = re^{i\varphi}$ mit den aus den Schritten 1 und 2 bestimmten Parametern.*

Wir stellen aber schnell fest, dass dieses Rezept nicht immer gilt. Sei beispielsweise $z = -1-i$. Dann würde nach unserem Rezept für den Winkel $\varphi = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{\pi}{4}$ gelten. Dies ist aber unmöglich, da $-1-i$ im dritten Quadranten liegt. Das Problem ist, dass aus $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$ nicht immer $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ folgt. Denn für stumpfe Winkel φ muss zu $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ noch π hinzuaddiert werden. Dies ist genau dann der Fall, wenn z im zweiten oder dritten Quadranten liegt. Dementsprechend schreiben wir das Rezept um:

Rezept. *(Umrechnung von Normalform zur Polarform einer komplexen Zahl $z = x + iy$)*

1. *Wir bestimmen zunächst den Radius der komplexen Zahl mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.*
2. *Nun bestimmen wir den Winkel φ, den die komplexe Zahl mit der reellen Achse bildet. Wir betrachten hierbei zwei Fälle.*
   (a) *z liegt im 1. oder 4. Quadranten: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$.*
   (b) *z liegt im 2. Quadranten: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi$.*
   (c) *z liegt im 3. Quadranten: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) - \pi$.*

   Im Sonderfall von $x = 0$ gilt $\varphi = \frac{\pi}{2}$ falls $y > 0$ und $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ falls $y < 0$.
3. *Wir schreiben nun $z = re^{i\varphi}$ mit den aus den Schritten 1 und 2 bestimmten Parametern.*

$\arctan(x)$-Werte können von folgender Tabelle abgelesen werden, wobei zu beachten gilt, dass $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Beispiel. *Berechne die Polarform der Zahl $z = 1 + i$.*

Lösung. *Wir berechnen zunächst den Radius r:*

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Die Zahl befindet sich im ersten Quadranten. Wir erhalten also für den Winkel φ

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Die Polarform ist somit $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Beispiel. *Berechne die Polarform der Zahl $z = -1 - \sqrt{3}i$.*

Lösung. *Wir berechnen zunächst den Radius r:*

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Die Zahl befindet sich im dritten Quadranten. Wir erhalten also für den Winkel φ:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Die Polarform ist somit $z = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Beispiel. *Berechne die Polarform der Zahl $z = -\sqrt{3} + i$.*

Lösung. *Wir berechnen zunächst den Radius r:*

$$r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Die Zahl befindet sich im zweiten Quadranten. Wir erhalten also für den Winkel φ:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Die Polarform ist somit $z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Beispiel. *Berechne die Polarform von $z = \frac{1+i}{i}$.*

Lösung. *Wir formen zunächst um, sodass wir die Normalform erhalten:*

$$z = \frac{1+i}{i} = \frac{(1+i)(-i)}{1^2} = 1 - i.$$

Weiter berechnen wir den Radius r:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Die Zahl befindet sich im vierten Quadranten. Wir erhalten also für den Winkel φ

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Die Polarform ist somit $z = \sqrt{2}e^{i\cdot(-\frac{\pi}{4})}$.

3.4.3 Umformung Polarform $\to$ Normalform

Die Umrechnung von Polarform zur Normalform erfolgt durch das Anwenden der Eulerschen Formel. Sei also $z = e^{i\varphi}$ die Polarform der komplexen Zahl. Dann gilt

$$z = r\cos(\varphi) + i \cdot r\sin(\varphi).$$

Beispiel. *Berechne die Normalform der Zahl* $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Lösung. *Wir setzen in die Formel ein und erhalten mit* $r = 2$ *und* $\varphi = \frac{\pi}{2}$*:*

$$z = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2i.$$

3.4.4 Rechenregeln

Seien $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Wie ändert sich der Radius und der Winkel, wenn wir die beiden komplexen Zahlen multiplizieren? Es gilt

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Die Radien werden also multipliziert ($r = r_1 r_2$) und die Winkel addiert ($\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$). Somit gilt auch $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$. Weiter gilt

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Bei der Division teilt man also die Radien ($r = \frac{r_1}{r_2}$) und man nimmt die Differenz der Winkel ($\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$). Ein großer Vorteil der Polarform ist das Potenzieren der komplexen Zahl. Während man bei der Normalform $z^n = (x + iy)^n$ ausrechnen müsste, geht das mit der Polarform deutlich einfacher. Denn es gilt

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{i\varphi \cdot n}.$$

Der Radius wird also zu $r_{neu} = r^n$ und der Winkel zu $\varphi_{neu} = n\varphi$. Zu guter Letzt gilt wegen der Spiegelung an der reellen Achse

$$\bar{z} = \overline{re^{i\varphi}} = re^{i(-\varphi)}.$$

Somit ändert sich der Radius beim komplex Konjugieren nicht. Nur der Winkel ändert das Vorzeichen.

Beispiel. *Bestimme* $\arg(2 - 2i)$.

Lösung. *Wir wollen den Winkel* φ *von* $z = 2-2i$ *bestimmen. Da* $2-2i$ *im vierten Quadranten liegt, gilt*

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-2}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Beispiel. *Bestimme* $\arg(2i \cdot (2 - 2i))$.

Lösung. *Wir wenden die Regel* $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ *an und erhalten aus dem vorherigen Beispiel*

$$\arg(2i \cdot (2 - 2i)) = \arg(2i) + \arg(2 - 2i) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Beispiel. *Bestimme* $(1+i)^6$ *in Normalform.*

Lösung. *Für Potenzen* $n > 2$ *benutzen wir lieber die Polarform und erhalten hier* $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. *Damit gilt*

$$(1+i)^6 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^6 = 8e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

Nun formen wir die erhaltene komplexe Zahl wieder in die Normalform um und erhalten

$$8e^{i\frac{3\pi}{2}} = 8(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)) = -8i.$$

Beispiel. *Bestimme* $(2+2i)^3(1-i)$ *in Normalform.*

Lösung. *Wir erhalten hier* $2 + 2i = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}$. *Damit gilt*

$$(2+i)^3 = (\sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}})^3 = 16\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Nun formen wir die erhaltene komplexe Zahl wieder in die Normalform um und erhalten

$$16\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -16(1-i).$$

Somit gilt

$$(2+2i)^3(1-i) = -16(1-i)^2 = -16 \cdot (-2i) = 32i. \tag{3.1}$$

Beispiel. *Mit welcher komplexen Zahl* z *muss eine beliebige komplexe Zahl* w *multipliziert werden, damit* w *um* $\frac{\pi}{4}$ *in die positiv mathematische Richtung gedreht und die Länge um den Faktor 2 gestreckt wird.*

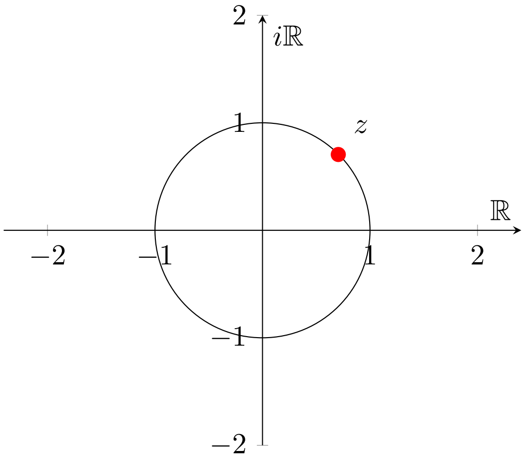
Lösung. *Sei* $w = re^{i\varphi}$. *Dann muss* $w \cdot z = 2re^{i(\varphi+\frac{\pi}{4})}$ *gelten. Weiter gilt*

$$w \cdot z = 2re^{i(\varphi+\frac{\pi}{4})} = re^{i\varphi} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{4}} = w \cdot 2e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Somit gilt $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3.4.5 Eindeutigkeit der Polarform

Ein Problem, welches wir noch nicht thematisiert haben, ist das Problem der Eindeutigkeit der Polarform. Diese ist nämlich keineswegs eindeutig (solange man nicht den Wertebereich von φ definiert). Schauen wir uns nochmals den Einheitskreis und den Punkt $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ an.



Was geschieht nun, wenn wir zum Winkel 2π hinzuzählen? 2π ist bekanntlich eine ganze Kreisumdrehung, somit würden wir wieder genau am gleichen Ort ankommen. Es gilt also $z = e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi)}$. Wir können aber nicht nur eine Kreisumdrehung machen, sondern beliebig viele (auch im Gegenuhrzeigersinn, also mathematisch negative Kreisumdrehungen). Wir erhalten

$$z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi+2\pi\cdot k)} \text{ (wobei } k \in \mathbb{Z}).$$

Die Polarform ist also alles andere als eindeutig. Dies ist essenziell für die Betrachtung der Wurzel einer komplexen Zahl.

3.4.6 Wurzel

Sei $z = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$ eine komplexe Zahl. Wir möchten nun die dritte Wurzel dieser Zahl ziehen. Dazu potenzieren wir die komplexe Zahl mit $\frac{1}{3}$ und erhalten

$$\sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}} = (3e^{i\frac{\pi}{4}})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

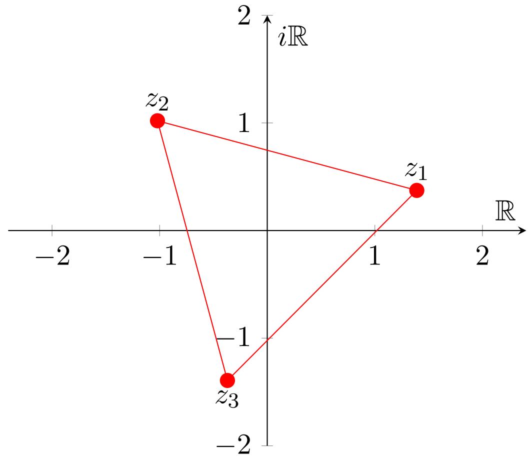
Somit ist das eine Lösung von $\sqrt[3]{z}$. Wir können das auch schnell überprüfen, wenn wir das Ganze wieder hoch 3 rechnen. Das Problem ist aber, dass dies nur eine mögliche Lösung ist. Denn die Zahl $z = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$ kann auch als $z = 3e^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot k)}$ geschrieben werden. Führen wir nun die Rechnung von weiter oben wieder aus, erhalten wir:

$$\sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}} = (3e^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot k)})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi\cdot k}{3})}.$$

Damit finden wir folgende drei Lösungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{3}e^{i\frac{\pi}{12}} && (k=0) \\ z_2 &= \sqrt[3]{3}e^{i\frac{9\pi}{12}} && (k=1) \\ z_3 &= \sqrt[3]{3}e^{i\frac{17\pi}{12}} && (k=2) \end{aligned}$$

Für $k = 3$ erhält man wieder z_1. Die drei Lösungen bilden in der komplexen Zahlenebene ein gleichseitiges Dreieck:



Im allgemeinen Fall gilt für die n-te Wurzel einer komplexen Zahl

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} k)} \text{ mit } k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

Die Lösungen bilden ein regelmäßiges n-Eck in der komplexen Zahlenebene.

Beispiel. *Bestimme alle Lösungen der Gleichung* $z^3 = i$.

Lösung. *Aus der Gleichung muss* $z = \sqrt[3]{i}$ *gelten. Es gibt also drei Lösungen dieser Gleichung. In Polarform gilt* $i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}$. *Somit gilt* $z = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} k)}$. *Wir finden für* $k \in \{0, 1, 2\}$ *folgende Lösungen:*

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad (k = 0)$$
$$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}} \qquad (k = 1)$$
$$z_3 = e^{i\frac{9\pi}{6}} \qquad (k = 2)$$

Beispiel. *Bestimme alle Lösungen der Gleichung* $z^2 = i$.

Lösung. *Aus der Gleichung muss* $z = \sqrt{i}$ *gelten. Es gibt also zwei Lösungen dieser Gleichung. In Polarform gilt* $i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}$. *Somit gilt* $z = e^{i(\frac{\pi}{4} + \pi k)}$. *Wir finden für* $k \in \{0, 1\}$ *dann folgende Lösungen:*

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad (k = 0)$$
$$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \qquad (k = 1)$$

3.5 Fundamentalsatz der Algebra

Wir wissen, dass Gleichungen in vielen Fällen mehr als nur eine Lösung haben können. Beispielsweise hat die Gleichung $x^2 - 1 = 0$ zwei reelle Lösungen: $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. Die

Gleichung $x^3 - 1 = 0$ hat eine reelle Lösung: $x = 1$. Wir wissen aber nun aus dem Abschnitt davor, dass die n-te Wurzel einer Zahl genau n komplexe Lösungen hat. Somit hat $x^3 - 1 = 0$ genau drei komplexe Lösungen. Die Frage ist nun, wie viele Lösungen die Gleichung $x^5 - x^3 + 2x + 1 = 0$ hat. 1799 formulierte Carl Friedrich Gauß einen Satz, der genau diese Frage beantwortet: den Fundamentalsatz der Algebra.

Satz. *Jedes Polynom vom Grad n*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \text{ mit } a_k \in \mathbb{C}$$

hat genau n komplexe Nullstellen.

$x^5 - x^3 + 2x + 1 = 0$ hat also genau 5 Nullstellen. Dabei sind jedoch einige Dinge zu beachten. Das Polynom zerfällt in n Faktoren $p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$ wobei z_k die Nullstellen sind. Hierbei kann auch ein z_k mehr als nur einmal vorkommen. Diese Nullstelle besitzt dann eine „Vielfachheit“ größer als 1. Die Nullstellen im Fundamentalsatz der Algebra werden also mit Vielfachheit gezählt.

Beispiel. *Wie viele Nullstellen besitzt die Funktion $f(z) = \frac{2z^4+z}{z} (z \neq 0)$?*

Lösung. *Es gilt $f(z) = \frac{2z^4+z}{z} = 2z^3 + 1$ und somit hat $f(z)$ genau drei Nullstellen nach dem Fundamentalsatz der Algebra.*

Beispiel. *Bestimme die Linearfaktorzerlegung von $z^2 + 1$.*

Lösung. *Da $z^2 + 1$ ein Polynom zweiten Grades ist, hat es auch zwei Nullstellen, für die $z^2 + 1 = 0$ gilt. Wir formen um und erhalten $z^2 = -1$. Somit sind die zweiten Wurzeln von -1 gesucht. Wir wissen, dass i sicherlich eine Nullstelle ist. Also gilt $z^2 + 1 = (z - i)(z - z_2)$ und wir finden $z_2 = -i$.*

Tatsächlich lässt sich das letzte Beispiel auch einfacher mit folgendem Satz lösen:

Satz. *Sind alle a_k im Polynom reell, also $a_k \in \mathbb{R}$, dann gilt: falls z_0 eine Nullstelle $p(z_0) = 0$ ist, so ist auch $\bar{z}_0$ eine Nullstelle $p(\bar{z}_0) = 0$.*

Im Beispiel vorhin hatten wir die zwei Koeffizienten $a_0 = 1, a_2 = 1$. Beide Koeffizienten sind reell. Daher konnten wir aus der ersten Nullstelle $z_1 = i$ direkt folgern, dass $\bar{z}_1 = -i$ ebenfalls eine Nullstelle ist.

4

Differentialgleichungen

„Mathematics is a game played according to certain simple rules with meaningless marks on paper.“

– David Hilbert

4.1 Einführung

Allgemein betrachtet, ist eine Differentialgleichung eine mathematische Gleichung für eine Funktion $y(x)$, in welcher Ableitungen der Funktion enthalten sind. Die Gleichung stellt also einen Zusammenhang zwischen der Funktion, der Variablen der Funktion und den Ableitungen der Funktion auf. Beispielsweise ist

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = xy(x)$$

eine Differentialgleichung. Wie wir sehen, können wir diese Gleichung nicht einfach integrieren, da auf der rechten Seite ebenfalls ein $y(x)$ steht. Wir brauchen also andere Mittel, diese Gleichung zu lösen. Diese Methoden werden wir in diesem Kapitel lernen. Wofür brauchen wir aber Differentialgleichungen? Schauen wir uns ein Beispiel aus der Physik an. Wir lassen einen Gegenstand mit der Masse m fallen (beispielsweise eine Tafel Schokolade). Nun gibt es einige Kräfte, die auf diese Tafel Schokolade wirken. Einmal wirkt die Gewichtskraft $F_g = mg$, mit der Gravitationsbeschleunigung $g = 9.81\, m/s^2$. Weiter wirkt die entgegengesetzte Luftwiderstands-Kraft. Diese ist (sehr vereinfacht) gegeben durch $F_L = -N \cdot v(t)$ (dabei ist N eine Konstante). Sie ist also abhängig von der Geschwindigkeit des Gegenstandes (in Realität ist die Kraft abhängig vom Quadrat der Geschwindigkeit). Wir möchten nun zu jeder Zeit wissen, wo sich die Tafel Schokolade während dem Fallen befindet. Dazu müssen wir das zweite Gesetz von Newton anwenden. Dieses besagt, dass die Beschleunigung eines Gegenstandes multipliziert mit seiner Masse genau die Summe aller Kräfte ist, welche auf ihn wirken. In unserem Beispiel würde das bedeuten

$$m \cdot a(t) = mg - Nv(t).$$

Da aber $a(t) = x''(t)$ und $v(t) = x'(t)$ ist, können wir diese Gleichung zu einer Differentialgleichung, welche nur noch $x(t)$ als unbekannte Funktion hat, umschreiben zu

$$m \cdot x''(t) = mg - Nx'(t).$$

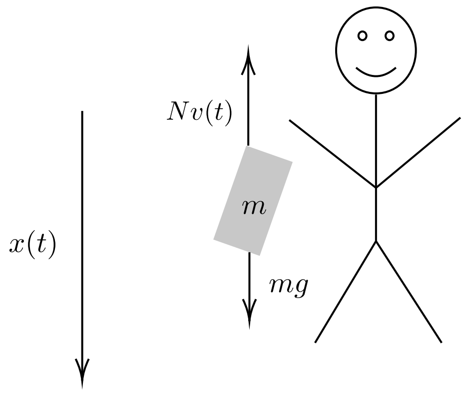


Abbildung 4.1: Eine Person lässt eine Schokoloadentafel herunterfallen. Auf die Tafel wirkt die Gewichtskraft ($F_g = mg$) und der, in die entgegengesetzte Richtung wirkende, Luftwiderstand (vereinfacht $F_L = -N \cdot v(t)$). Die Bewegung der Tafel lässt sich durch eine Differentialgleichung beschreiben.

Wie wir später sehen werden, ist die Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung (die Ordnung ist die höchste Ableitung in der Gleichung) gegeben durch die Funktion

$$x(t) = \frac{m}{N}(Ce^{\frac{-Nt}{m}} + gt) + K.$$

Wie wir sehen, erhalten wir eine Lösung, welche von zwei verschiedenen Konstanten abhängt: C und K. Das ergibt nicht viel Sinn, denn wir möchten ein physikalisches Problem lösen, welches nur eine Lösung besitzt. Hier kommen sogenannte Anfangsbedingungen ins Spiel. In unserem Beispiel haben wir noch gar nie erwähnt, aus welcher Höhe der Gegenstand fällt. Deswegen existiert auch noch keine eindeutige Lösung. Erst mit der Bedingung $x(0) = 10\ \mathrm{m}$ erhalten wir zumindest eine der beiden Konstanten. Eine zweite Anfangsbedingung über die Anfangsgeschwindigkeit würde uns die zweite Konstante liefern. Die Ordnung gibt also auch an, wie viele Anfangsbedingungen wir benötigen, um eine eindeutige Lösung erhalten zu können. Ein physikalisches Problem besteht dann immer durch eine Differentialgleichung n-ter Ordnung mit n Anfangsbedingungen. Eine solche Differentialgleichung nennen wir in der Physik auch „Bewegungsgleichung“. Sehr viele Probleme der Dynamik lassen sich durch solche Bewegungsgleichungen beschreiben. Es ist also sehr wichtig, dass wir nun so schnell wie möglich lernen, wie wir diese Gleichung lösen, damit wir die Bewegung in einem solchen Prozess ohne Probleme beschreiben können. Zurück zu Differentialgleichungen: Wir unterscheiden mehrere Arten von Differentialgleichungen.

4.2 Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Bevor wir zum Lösen der Differentialgleichungen kommen, möchten wir eine andere Notation einführen. Wir schreiben statt $y(x)$ einfach y (da meist klar ist, was die Variable, und was die Funktion ist) und wir schreiben statt $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$ kurz y'. Damit erhalten wir beispielsweise die Differentialgleichung $y' = xy$, die wir vorhin angeschaut haben.
Die Ordnung einer Differentialgleichung ist gegeben durch die höchste Ableitung in der Gleichung. Wir befassen uns in diesem Abschnitt mit der linearen Differentialgleichung erster Ordnung. Eine solche Gleichung ist immer vom Typ

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x).$$

Dabei sind $p(x)$ und $q(x)$ Funktionen, welche nur von x abhängen. Falls $q(x) = 0$ ist, sprechen wir von einer homogenen Differentialgleichung. Ansonsten nennen wir sie inhomogen. Wie lösen wir nun diese Differentialgleichung? Dazu schauen wir uns zunächst den homogenen Fall an.

4.2.1 homogener Fall

Eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung ist von der Form

$$y'(x) = p(x)y(x).$$

Wie wir später allgemeiner sehen werden, ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung $y(x) = Ce^{P(x)}$, wobei $P(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x$ die Stammfunktion von $p(x)$ ist. C ist eine Konstante, welche wir durch weitere Bedingungen (sogenannte Anfangsbedingungen) bestimmen können (wir sind diesen Anfangsbedingungen schon in der Einführung begegnet). Wir veranschaulichen diese Art von Differentialgleichungen anhand eines Beispiels:

Beispiel. *Bestimme alle Lösungen $y(x)$ der Differentialgleichung $y'(x) = xy(x)$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 1$.*

Lösung. *Die Differentialgleichung ist von der Form $y'(x) = p(x)y(x)$ mit $p(x) = x$. Die Stammfunktion von $p(x)$ ist $P(x) = \frac{1}{2}x^2$ (ohne Konstante, da diese in C später enthalten ist). Somit ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung*

$$y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$$

mit einer Konstante $C \in \mathbb{R}$. Diese Konstante lässt sich nun durch die Anfangsbedingung bestimmen. Es gilt

$$y(0) = Ce^{\frac{1}{2}0^2} = Ce^0 = C.$$

Da $y(0) = 1$ die Anfangsbedingung ist, muss $C = 1$ gelten. Die eindeutige Lösung der Differentialgleichung ist somit

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

4.2.2 inhomogener Fall

Im inhomogenen Fall können wir die Differentialgleichung mit der „Variation der Konstanten“ lösen:

Rezept. *(Lösen von Differentialgleichungen der Form $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$)*

1. *Wir denken uns im ersten Schritt das $q(x)$ am Schluss weg und lösen die homogene Gleichung $y'(x) = p(x)y(x)$. Somit erhalten wir $y_h(x) = Ce^{P(x)}$.*

2. *Wir ersetzen jetzt das C durch eine Funktion $C(x)$ und erhalten $y(x) = C(x)e^{P(x)}$.*

3. *Nun setzen wir diese Lösung in unsere Gleichung oben ein und erhalten*

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x) \iff C'(x)e^{P(x)} + P'(x)C(x)e^{P(x)} = p(x)C(x)e^{P(x)} + q(x).$$

4. *Da aber $P'(x) = p(x)$ gilt, kürzt sich dieser Term auf beiden Seiten weg und wir erhalten*

$$C'(x)e^{P(x)} = q(x).$$

5. *Wir lösen diese Differentialgleichung nach $C(x)$ und setzen sie in unsere Lösung ein, also*

$$C'(x) = e^{-P(x)}q(x) \longrightarrow C(x) = \int e^{-P(x)}q(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

wobei wir das $+C$ nicht vergessen dürfen!

Unsere Lösung ist dann gegeben durch $y(x) = C(x)e^{P(x)}$. Das Resultat lässt sich einfach überprüfen, indem man die Lösung wieder in die Differentialgleichung einsetzt und schaut, ob beide Seiten übereinstimmen.

Wir wenden nun dieses Verfahren an Beispielen an. Theoretisch kann man direkt die Formel aus dem Rezept nutzen. Wir werden in den Beispielen aber immer die gesamte Herleitung geben.

Beispiel. *Bestimme alle Lösungen $y(x)$ der Differentialgleichung $y'(x) = y(x) + 1$.*

Lösung. *Die Differentialgleichung ist von der Form $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$ mit $p(x) = 1$ und $q(x) = 1$.*

1. *Wir denken uns $q(x) = 1$ weg und erhalten die Differentialgleichung $y'(x) = y(x)$. Diese hat die Lösung $y_h(x) = Ce^x$.*

2. *Wir ersetzen das C durch $C(x)$ und erhalten $y(x) = C(x)e^x$.*

3. *Im nächsten Schritt setzen wir $y(x)$ wieder in unsere Differentialgleichung ein und erhalten*

$$y'(x) = y(x) + 1 \iff C'(x)e^x + C(x)e^x = C(x)e^x + 1.$$

4. *Wir lösen nun nach $C'(x)$ auf und erhalten*

$$C'(x) = e^{-x} \iff C(x) = \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\,.$$

5. *Damit ergibt sich*

$$C(x) = -e^{-x} + C.$$

6. *Wir setzen nun wieder $C(x)$ in unsere Lösung ein und erhalten*

$$y(x) = (-e^{-x} + C)e^x = Ce^x - 1.$$

Beispiel. *Bestimme die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $y'(x) = y(x)+x^2$ mit Anfangsbedingung $y(0) = -2$.*

Lösung. *Die Differentialgleichung ist von der Form $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$ mit $p(x) = 1$ und $q(x) = x^2$.*

1. *Wir denken uns den Term $q(x) = x^2$ weg und erhalten die Differentialgleichung $y'(x) = y(x)$. Diese hat die Lösung $y_h(x) = Ce^x$.*

2. *Wir ersetzen das C durch $C(x)$ und erhalten $y(x) = C(x)e^x$.*

3. *Im nächsten Schritt setzen wir $y(x)$ wieder in unsere Differentialgleichung ein und erhalten*
$$y'(x) = y(x) + x^2 \iff C'(x)e^x + C(x)e^x = C(x)e^x + x^2.$$

4. *Wir lösen nun nach $C'(x)$ auf und erhalten*
$$C'(x) = e^{-x}x^2 \iff C(x) = \int e^{-x}x^2 \,\mathrm{d}x\,.$$

5. *Mit partieller Integration (DI-Methode 1. Fall) erhalten wir*
$$C(x) = -e^{-x}(2 + 2x + x^2) + C.$$

6. *Wir setzen nun $C(x)$ wieder in unsere Lösung ein und erhalten*
$$y(x) = (-e^{-x}(2 + 2x + x^2) + C)e^x = Ce^x - 2 - 2x - x^2.$$

7. *Um C zu bestimmen, setzen wir die Anfangsbedingung ein:*
$$y(0) = Ce^0 - 2 - 2 \cdot 0 - 0^2 = C - 2 = -2 \implies C = 0.$$

   Die Lösung ist somit $y(x) = -2 - 2x - x^2$.

4.2.3 konstante Koeffizienten

Ist unsere Differentialgleichung von der Form
$$y'(x) = ay(x) + b$$
mit Konstanten a und b, so ist die Lösung der Differentialgleichung (wie man leicht selbst überprüfen kann) gegeben durch
$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}.$$

4.2.4 partikuläre Lösung

Haben wir eine inhomogene Differentialgleichung, dessen Lösung (für ein beliebiges C) schon bekannt ist, so gilt

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

wobei $y_h(x)$ die Lösung der homogenen Gleichung ist und $y_p(x)$ die gefundene partikuläre Lösung.

Beispiel. *Bestimme die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $y'(x) = -y(x) + x + 1$.*

Lösung. *Die Differentialgleichung ist von der Form $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$ mit $p(x) = -1$ und $q(x) = x + 1$. Wir können diese Gleichung nun mithilfe unseres Rezeptes für inhomogene Differentialgleichungen erster Ordnung lösen. Ein einfacherer Weg ist es aber, eine Lösung zu erraten. Beispielsweise ist in diesem Fall $y_p(x) = x$ eine Lösung, da $y_p'(x) = 1$ und $-y_p(x)+x+1 = -x+x+1 = 1$ ist. Die homogene Lösung ist die Lösung der Gleichung $y'(x) = -y(x)$, also $y(x) = Ce^{-x}$. Somit ist die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-x} + x.$$

4.3 Nicht-lineare Differentialgleichung erster Ordnung

In diesem Abschnitt kümmern wir uns um nicht-lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Diese sind von der Form

$$y'(x) = p(x)g(y(x)).$$

Wie wir sehen, haben wir jetzt eine Funktion von $y(x)$ auf der rechten Seite. Beispielsweise ist $y'(x) = xy^2(x)$ eine nicht-lineare Differentialgleichung. Wir können diese Art von Gleichungen mithilfe der „Trennung der Variablen“ lösen.

4.3.1 Trennung der Variablen

Bei der Trennung der Variablen wollen wir die Gleichung so umformen, dass auf der linken Seite nur Terme stehen, die $y(x)$ enthalten, und rechts nur Terme, die x enthalten. Anschließend integrieren wir einzeln auf beiden Seiten. Hierzu folgendes Rezept:

Rezept. *(Lösen von Differentialgleichungen der Form $y' = p(x)g(y)$)*

1. *Ersetze die Ableitung durch den Differentialquotienten $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)g(y).$$

2. *Stelle nun die Gleichung so um, dass alle y-Terme auf einer Seite, und alle x- Terme (inklusive $\mathrm{d}x$) auf der anderen sind:*

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = p(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

3. *Integriere beide Seiten. Du erhältst auf beiden Seiten eine Konstante. Diese kannst du zu einer Konstanten zusammenfassen.*

4. *Stelle die Gleichung nach y um.*

Das Resultat lässt sich einfach überprüfen, indem man die Lösung wieder in die Differentialgleichung einsetzt und schaut, ob beide Seiten übereinstimmen.

Um das Rezept zu veranschaulichen, wenden wir es in den nächsten zwei Beispielen an.

Beispiel. *Bestimme die Lösung y der Differentialgleichung $y' = p(x)y$ mit $p(x)$ beliebig.*

Lösung. *Dies ist genau die Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung. Wir wollen jedoch nun das Resultat mithilfe der Trennung der Variablen herleiten.*

1. *Wir ersetzen die Ableitung durch den Differentialquotienten $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ und erhalten*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y.$$

2. *Nun trennen wir die Variablen x und y und erhalten*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y \iff \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = p(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

3. *Wir integrieren beide Seiten und erhalten*

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int p(x)\,\mathrm{d}x \\ \implies \log|y| + C_1 &= P(x) + C_2. \end{aligned}$$

4. *Schlussendlich stellen wir die Gleichung nach y um, wobei wir die Konstanten zu $C_0 = C_2 - C_1$ zusammenfassen:*

$$\begin{aligned} \log|y| &= P(x) + C_0 \\ y &= e^{P(x)+C_0} \\ y &= e^{P(x)}e^{C_0} \end{aligned}$$

und da e^{C_0} eine Konstante ist, können wir mit $C = e^{C_0}$ die Lösung auch als $y = Ce^{P(x)}$ schreiben.[1]

[1] Wir haben hier bei der zweiten Gleichheit die Betragsstriche weggelassen. Mit den Betragsstrichen würden wir $y = \pm e^{P(x)}e^{C_0}$ erhalten. Wir können dann $\pm e^{C_0}$ (also mit dem Vorzeichen) zur Konstanten $C = \pm e^{C_0}$ zusammenfassen und erhalten das gleiche Ergebnis. Da dies häufiger der Fall ist, lassen wir diese hier einfachheitshalber einfach weg.

Beispiel. *Bestimme die Lösung y der Differentialgleichung $y' = \sqrt{y}$ (mit der Annahme, dass y stets positiv ist).*

Lösung. *Wir lösen die Differentialgleichung mit der Trennung der Variablen.*

1. *Wir ersetzen die Ableitung durch den Differentialquotienten $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ und erhalten*
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{y}.$$
2. *Nun trennen wir die Variablen x und y und erhalten*
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{y} \iff \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x\,.$$
3. *Wir integrieren beide Seiten und erhalten*
$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x$$
$$2\sqrt{y} = x + C.$$
4. *Schlussendlich stellen wir die Gleichung nach y um:*
$$2\sqrt{y} = x + C$$
$$\implies y = \Big(\frac{x+C}{2}\Big)^2.$$

4.3.2 Substitution

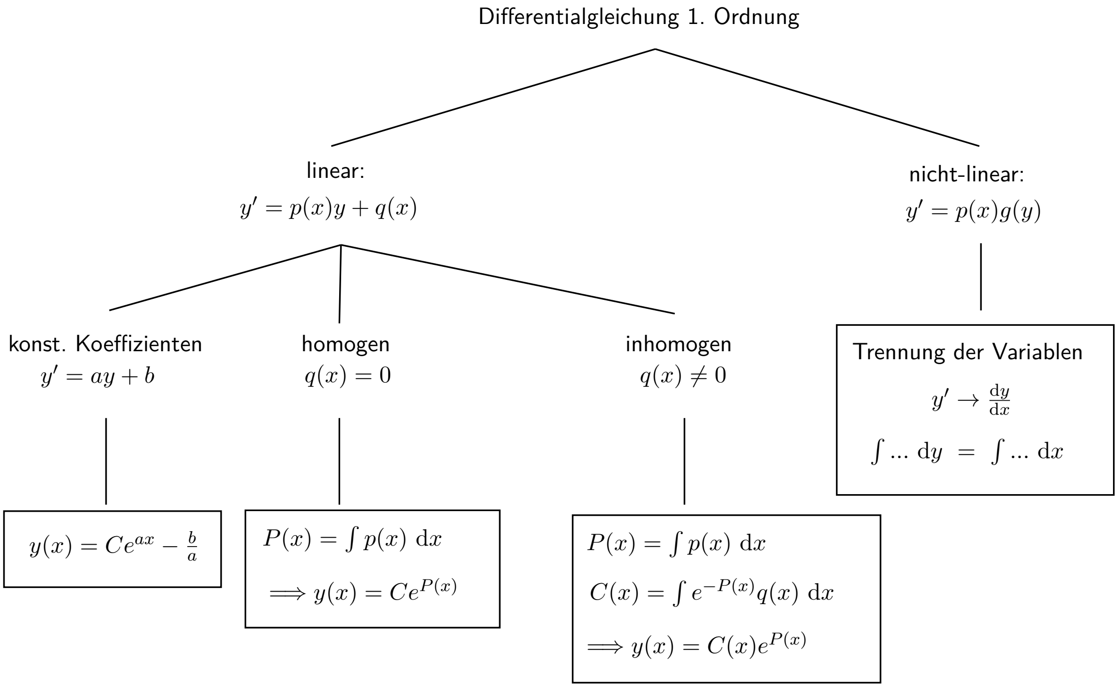
Wie schon bei den Integralen, kann es auch bei Differentialgleichungen nützlich sein, Substitution anzuwenden. Die zwei wichtigsten Arten von Differentialgleichungen, welche mit Substitution gelöst werden, sind
$$y' = h(\frac{y}{x}) \quad \text{und} \quad y' = h(ax + by + c).$$
Wir führen dann die Substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ für das erste Beispiel, und $z(x) = ax + by + c$ für das zweite Beispiel ein. Anschließend leiten wir $z(x)$ ab und erhalten eine neue Differentialgleichung für $z(x)$, welche wir lösen. Schlussendlich rücksubstituieren wir wieder und erhalten $y(x)$. Folgendes Beispiel sollte dies veranschaulichen:

Beispiel. *Bestimme die Lösung y der Differentialgleichung $y' = 2x - y$.*

Lösung. *Wir haben hier den Fall $y' = h(ax + by + c)$ und substituieren $z(x) = 2x - y(x)$. Wir erhalten dann die Differentialgleichung*
$$z' = 2 - y' = 2 - (2x - y) = 2 - z$$
Mit unseren bekannten Methoden erhalten wir dann die Lösung $z = 2 - Ce^{-x}$. Durch Einsetzen in die Substitution erhalten wir $y = 2x - z = Ce^{-x} + 2x - 2$.

4.4 Zusammenfassung 1. Ordnung

Im folgenden Schema wird nochmals das Lösen der Differentialgleichungen erster Ordnung zusammengefasst:



4.5 Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

Bis jetzt haben wir immer nur Differentialgleichungen mit der ersten Ableitung von y betrachtet. Wir wollen nun aber die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung verstehen. Allgemeine Differentialgleichungen 2. Ordnung sind – wenn überhaupt analytisch – meist nur mit großem Aufwand lösbar. Deswegen konzentrieren wir uns hier auf lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese hat die Form

$$ay'' + by' + cy = g(x),$$

wobei a, b und c (wie es der Name schon sagt) konstante Koeffizienten sind und $g(x)$ eine Funktion in Abhängigkeit von x. Wir betrachten wieder zunächst den homogenen Fall $g(x) = 0$ und anschließend den inhomogenen Fall.

4.5.1 homogener Fall

Im homogenen Fall ist die Differentialgleichung gegeben durch

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Wir können diese Gleichung mit dem folgenden Rezept lösen:

Rezept. *(Lösen von Differentialgleichungen der Form $ay'' + by' + cy = 0$)*

1. *Beginne mit dem Ansatz $y = e^{\lambda x}$ und setze diesen direkt in die Gleichung ein:*
$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0.$$
2. *Anschliessend müssen wir alles durch $e^{\lambda x}$ teilen und erhalten die charakteristische Gleichung*
$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$
Die ersten beiden Schritte können somit vereinfacht werden, indem man direkt y'' durch λ^2, y' durch λ und y durch 1 ersetzt.
3. *Wir können nun λ bestimmen und müssen drei Fälle unterscheiden:*
   i. *$b^2 - 4ac > 0$: Es gilt dann $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (beide reell) und die Lösung ist gegeben durch*
   $$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$
   ii. *$b^2 - 4ac = 0$: Es gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha \in \mathbb{R}$ und die Lösung ist gegeben durch*
   $$C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x},$$
   wobei das x im zweiten Term hinzugekommen ist.
   iii. *$b^2 - 4ac < 0$: Es gilt $\overline{\lambda_1} = \lambda_2 = \alpha + i\beta$ (beide also komplex) und die Lösung ist gegeben durch*
   $$e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)).$$

Das Resultat lässt sich einfach überprüfen, indem man die Lösung wieder in die Differentialgleichung einsetzt und schaut, ob beide Seiten übereinstimmen.

Welches β wählen wir aber im dritten Schritt? Da sich der Imaginärteil bei den zwei Eigenwerten nur im Vorzeichen unterscheidet, ist es aufgrund von $\cos(-\beta x) = \cos(\beta x)$ und $\sin(-\beta x) = -\sin(\beta x)$ egal, welchen Imaginärteil wir für β auswählen (beim Sinus fließt das Vorzeichen in die Konstante). Um Vorzeichenfehler zu vermeiden, setzen wir den positiven Imaginärteil gleich β. Wir möchten das Rezept nun an zwei Beispielen anwenden.

Beispiel. *Bestimme die Lösung y der Differentialgleichung $y'' + 3y' - 4y = 0$.*

Lösung.
1. *Die charakteristische Gleichung ist gegeben durch*
$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0.$$
2. *Die Lösungen dieser Gleichung sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -4$. Somit haben wir den ersten Fall.*
3. *Die allgemeine Lösung ist gegeben durch $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.*

Beispiel. *Bestimme die Lösung y der Differentialgleichung $y'' + 4y' + 20y = 0$.*

Lösung. *1. Die charakteristische Gleichung ist gegeben durch*

$$\lambda^2 + 4\lambda + 20 = 0.$$

2. *Die Lösungen dieser Gleichung sind $\lambda_{1,2} = -2 \pm 4i$, was dem dritten Fall entspricht.*
3. *Die allgemeine Lösung ist gegeben durch (wir wählen $\beta = 4$):*

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x)).$$

4.5.2 inhomogener Fall

Beim inhomogenen Fall der Differentialgleichungen zweiter Ordnung funktioniert die Variation der Konstanten nicht so simpel wie im Falle der Differentialgleichung erster Ordnung. Man benutzt daher meist die Methode der partikulären Lösung. Bei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung empfiehlt es sich, die Variation der Konstanten zu benutzen. Für inhomogenen lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung benutzen wir folgendes Rezept:

Rezept. *(Lösen inhomogener Differentialgleichungen der Form $y'' + ay' + by = g(x)$)*

1. *Löse zunächst die homogene Differentialgleichung (setze dafür $g(x) = 0$) mit dem Rezept aus dem letzten Abschnitt und erhalte somit y_h.*
2. *Finde eine partikuläre Lösung y_p mithilfe der Lösungsansätze in der Tabelle weiter unten, wobei du die unbekannten Koeffizienten mithilfe vom Koeffizientenvergleich finden kannst.*
3. *Die Lösung ist*

$$y = y_p + y_h.$$

Im Folgenden findest du die Tabelle für die Lösungsansätze, dabei ist

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x)$$

die Differentialgleichung, $g(x)$ die Störfunktion und das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$. Falls also „... ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms“ steht, so ist dieser Term, eingesetzt für λ, eine Lösung der Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

A, B, C... sind Koeffizienten, die dann mithilfe vom Koeffizientenvergleich bestimmt werden müssen.

Störfunktion $g(x)$	**Lösungansatz** $y_p(x)$ DGL: $y'' + ay' + by = g(x)$ char. Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$
Polynom vom Grad n	▪ $b \neq 0 : y_p = Ax^n + Bx^{n-1} + ... + Cx + D$ ▪ $a \neq 0, b = 0 : y_p = Ax^{n+1} + Bx^n + ... + Cx^2 + Dx$ ▪ $a = 0, b = 0 : y_p = Ax^{n+2} + Bx^{n+1} + ... + Cx^3 + Dx^2$ Dabei sind a, b von $y'' + ay' + by = g(x)$ zu entnehmen. $A, B, C, ...$ sind die, durch Koeffizientenvergleich zu bestimmenden, Koeffizienten.
$g(x) = ke^{cx}$	▪ c ist **keine** Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = A \cdot e^{cx}$ ▪ c ist eine **einfache** Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = Ax \cdot e^{cx}$ ▪ c ist eine **doppelte** Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = Ax^2 \cdot e^{cx}$ Dabei ist c von der Störfunktion $g(x)$ zu entnehmen. A ist der zu bestimmende Koeffizient. Tipp: die Nullstellen des charakteristischen Polynoms hast du schon bestimmt: λ_1, λ_2. Falls beide gleich sind und c entsprechen, ist es beispielsweise eine doppelte Nullstelle.
$g(x) = \sin(\beta x)$ oder $g(x) = \cos(\beta x)$ oder $g(x) = n \cdot \sin(\beta x) + m \cdot \cos(\beta x)$ wobei $n \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{R}$.	▪ $i\beta$ ist **keine** Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)$ ▪ $i\beta$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = Ax \cdot \sin(\beta x) + Bx \cdot \cos(\beta x)$ Dabei ist β von der Störfunktion $g(x)$ zu entnehmen. A und B sind die zu bestimmenden Koeffizienten. Alternativ kann auch $y_p = C \cdot \sin(\beta x + \phi)$, respektive $y_p = Cx \cdot \sin(\beta x + \phi)$ als Ansatz gebraucht werden, wobei C und ϕ die zu bestimmenden Koeffizienten sind.
$g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \sin(\beta x)$ oder $g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \cos(\beta x)$ Dabei ist P_n ein Polynom $n-$ten Grades.	▪ $c + i\beta$ ist **keine** Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = e^{cx}(Q_n \cdot \sin(\beta x) + R_n \cdot \cos(\beta x))$ ▪ $c + i\beta$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = x \cdot e^{cx}(Q_n \cdot \sin(\beta x) + R_n \cdot \cos(\beta x))$ Dabei sind c und β von der Störfunktion $g(x)$ zu entnehmen. Die Polynome n-ten Grades Q_n und R_n enthalten die zu bestimmenden Koeffizienten. Man setze also beispielsweise $Q_n = Ax^n + Bx^{n-1} ... + Cx + D$ und bestimme die Koeffizienten $A, B, C...$ mithilfe dem Koeffizientenvergleich.

Wir wenden das Rezept an einem Beispiel an:

Bestimme die Lösung der inhomogenen DGL 2. Ordnung:

$$y'' + 9y = \sin(5x).$$

Lösung. *Die homogene Differentialgleichung lautet*

$$y'' + 9y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

und somit $\lambda = \pm 3i$. Wir erhalten also die homogene Lösung (mit $\alpha = 0$, $\beta = 1$)

$$y_h = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x).$$

Nun zur partikulären Lösung. Die Störfunktion ist in der Form $\sin(\beta x)$ mit $\beta = 5$. Da $5i$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms bildet, müssen wir den Ansatz

$$y_p = A \sin(5x) + B \cos(5x)$$

wählen. Einsetzen in die Differentialgleichung 2. Ordnung ergibt

$$\begin{aligned} -25A\sin(5x) - 25B\cos(5x) + 9(A\sin(5x) + B\cos(5x)) &= \sin(5x) \\ \implies -16A\sin(5x) - 16B\cos(5x) &= \sin(5x) \end{aligned}$$

und somit $B = 0$ und $A = -\frac{1}{16}$. Wir erhalten die partikuläre Lösung

$$y_p = -\frac{1}{16}\sin(5x)$$

und damit die Gesamtlösung

$$y = y_h + y_p = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) - \frac{1}{16}\sin(5x).$$

4.6 Richtungsfeld

Ein Richtungsfeld ist eine grafische Darstellung einer Differentialgleichung. Wir betrachten hierbei Differentialgleichungen erster Ordnung der allgemeinen Form

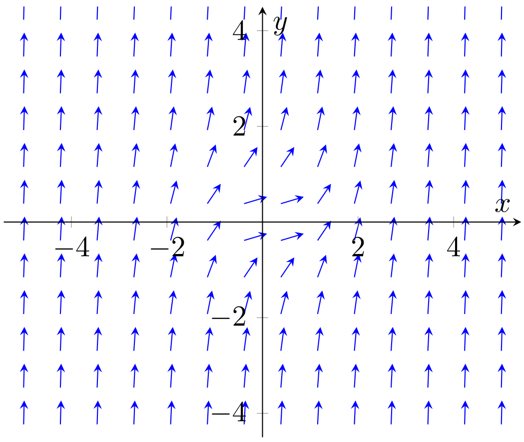
$$y' = f(x, y).$$

Um das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung zu erstellen, wird an jedem Punkt (x_0, y_0) eine kurze Strecke mit der Steigung $y' = f(x_0, y_0)$ eingezeichnet. Jede Lösung der Differentialgleichung wird sich dann an dieses Richtungsfeld richten. Wir fassen das Zeichnen des Richtungsfelds in einem Rezept zusammen:

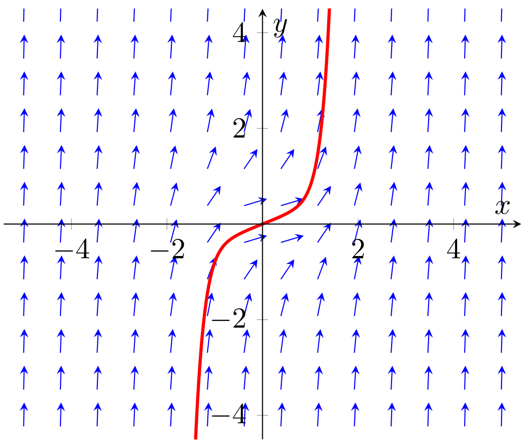
Rezept. *(Richtungsfeld einer Differentialgleichung erster Ordnung zeichnen)*

1. *Führe die Differentialgleichung auf die Form $y' = f(x,y)$ zurück.*
2. *Wähle nun Punkte in einem Koordinatensystem, welche möglichst gleichmäßig im gewählten Bereich des Koordinatensystems verteilt sind.*
3. *Werte an diesen gleichmäßig verteilten Punkten $f(x,y)$ aus und zeichne an diesem Punkt einen Pfeil ein, der genau die Steigung $f(x,y)$ besitzt.*

Das Richtungsfeld von $y' = x^2 + y^2$ ist beispielsweise



Es lässt sich nun erahnen, wie die Funktion $y(x)$ etwa aussehen könnte. Die Funktion durch $(0,0)$ (also mit Anfangsbedingung $y(0) = 0$) würde etwa so aussehen:



Anhang A

Vorkenntnisse

A.1 Potenzen

Wichtige Potenzgesetze sind:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

Wir möchten zeigen, dass diese Potenzgesetze der Definition der Potenz nicht widersprechen. Das erste Gesetz folgt direkt aus der Definition der Potenz, denn

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{Mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m-\text{Mal}} = a^{n+m}.$$

Auch das zweite Gesetz folgt direkt, denn wir können in diesem Fall kürzen:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{\cancel{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}^{m-\text{Mal}} \cdot \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}^{(n-m)-\text{Mal}}}{\underbrace{\cancel{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}_{m-\text{Mal}}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{(n-m)-\text{Mal}} = a^{n-m}.$$

Wir überlassen hier die Beweise der 3.-5. Gesetze als Übung. Diese lassen sich alle ebenfalls mit der Definition beweisen. Das 6. Gesetz folgt aus dem 2. Gesetz. Wir wählen dazu $n = 0$ und erhalten:

$$a^{n-m} = a^{0-m} = a^{-m} \overset{2.}{=} \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}.$$

Wir haben hier die folgende Eigenschaft für $a \neq 0$ verwendet:

$$a^0 = 1.$$

Wir bemerken, dass 0^0 nicht definiert ist. Für $n \neq 0$ gilt

$$0^n = 0.$$

A.2 Wurzeln

Was haben Wurzeln mit Potenzen zu tun? Tatsächlich sind Wurzeln nichts anderes als Potenzen. Denn es gilt

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Wurzeln sind rationale Exponenten! Genau so sollten wir auch mit Wurzeln umgehen. Bei Ableitungen, Integralen und Folgen müssen wir Wurzeln immer als Potenzen mit rationalen Exponenten betrachten.

A.3 Logarithmus

Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion von e^x. Es gilt also

$$b = e^a \iff \log(b) = a.$$

Wir bemerken hier, dass wir die Notation $\log(x) = \ln(x)$ benutzen. In diesem Buch verwenden wir keinen Logarithmus zu einer anderen Basis als e. Es gelten die folgenden Eigenschaften:

1. $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$,
2. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$,
3. $\log\left(a^b\right) = b \cdot \log(a)$.

Wir können die zweite Eigenschaft mit der ersten und dritten beweisen. Es gilt $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$ und somit

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log\left(a \cdot b^{-1}\right) \overbrace{=}^{1.} \log(a) + \log\left(b^{-1}\right) \overbrace{=}^{3.} \log(a) - \log(b).$$

Wie zuvor erwähnt, werden wir neben der natürlichen e-Basis keine andere Basis verwenden. Möchten wir jedoch trotzdem eine andere Basis nutzen, so gilt

$$\log_b(x) = \frac{\log(x)}{\log(b)},$$

wobei b die gewünschte Basis ist.

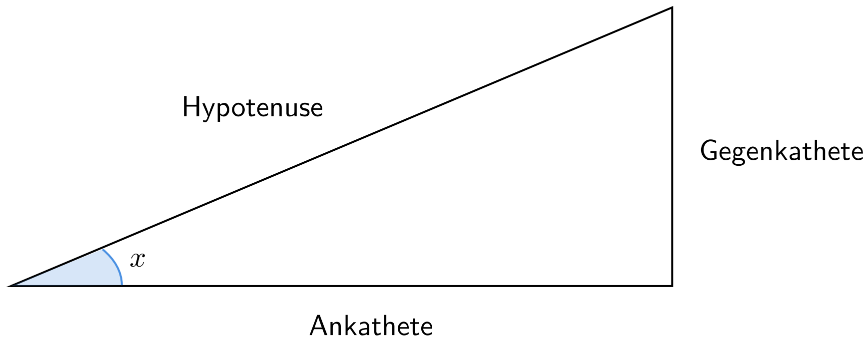
A.4 Trigonometrie

A.4.1 Definition und Einheitskreis

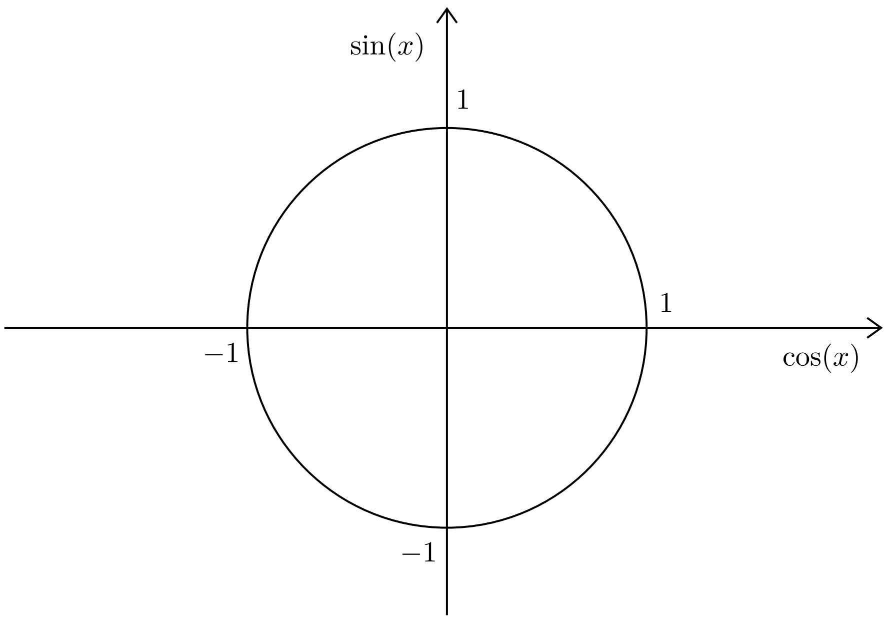
Die Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind aus der Uni-Mathematik nicht wegzudenken. Es ist daher essenziell, die Grundlagen der Trigonometrie gut zu verstehen. Wir erinnern uns, dass in einem rechtwinkligen Dreieck folgende Definitionen für den Sinus und Kosinus gelten:

$$\sin(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos(x) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

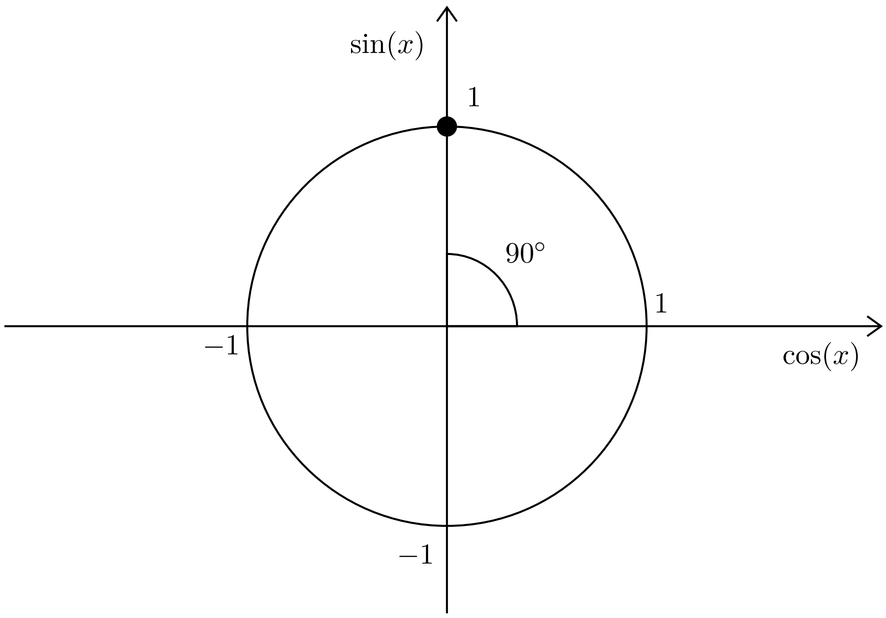
Die Begriffe Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse sind in der folgenden Grafik dargestellt:



Es ist deutlich einfacher (und besser), sich den Sinus und Kosinus anhand des Einheitskreises vorzustellen. Der Einheitskreis ist ein Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius $r = 1$. Wir beschriften die Achsen in unserem Koordinatensystem mit $\sin(x)$ und $\cos(x)$:



Wir beginnen bei der 1 auf der Kosinus-Achse. Möchten wir beispielsweise $\sin(90°)$ bestimmen, so drehen wir uns im *Gegenuhrzeigersinn* um $90°$ und lesen die $\sin(x)$-Achse ab. Wir erhalten in unserem Bild:



Also ist $\sin(90°) = 1$. Ein weiteres Beispiel: wir möchten $\cos(-270°)$ bestimmen. Da wir nun ein Minus davor haben, beginnen wir zwar wieder bei der 1 auf der Kosinus-Achse, drehen aber im *Uhrzeigersinn* um $270°$. Wir erhalten wieder genau den gleichen Punkt wie im Bild vorhin. Jetzt wollen wir aber den Kosinus ablesen. Auf der Kosinus-Achse sind wir genau bei $\cos(-270°) = 0$.

A.4.2 Bogenmaß

Bevor wir zu den Eigenschaften von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ kommen, lernen wir eine bessere Einheit für Winkel kennen. Bis jetzt haben wir Winkel in Grad angegeben. Für komplexe Zahlen und viele weitere mathematische Berechnungen ist es aber deutlich einfacher das Bogenmaß zu verwenden. Es gilt folgende Beziehung:

$$1° = \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad}\,.$$

Wir lassen aber das „rad" (kurz für Radian) in den meisten Fällen weg und schreiben einfach beispielsweise $180° = \pi$. Einige wichtige Winkel in Bogenmaß sind in der folgenden Tabelle gegeben:

Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$360°$
Bogenmass	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

A.4.3 Eigenschaften

Es gelten folgende wichtige Eigenschaften von Sinus und Kosinus. Als Übung sollte man versuchen, alle mit dem Einheitskreis zu verstehen:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos(x),\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin(x),\\ \sin^2(x)+\cos^2(x) &= 1.\end{aligned}$$

Die letzte Eigenschaft ist der trigonometrische Pythagoras. Weiter gilt, sowohl für Sinus als auch Kosinus, dass sie 2π-periodisch sind, also $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$. Betrachten wir den Einheitskreis, so haben wir mit 2π eine $360°$-Drehung, also ändert sich der Wert der beiden Funktionen nicht.

A.4.4 Additionstheoreme

Die Additionstheoreme sind ebenfalls eine wichtige Eigenschaft von $\sin(x)$ und $\cos(x)$. Es gilt ohne Herleitung:

$$\begin{aligned}\sin(x\pm y) &= \sin(x)\cos(y)\pm\cos(x)\sin(y),\\ \cos(x\pm y) &= \cos(x)\cos(y)\mp\sin(x)\sin(y).\end{aligned}$$

Mit $y = x$ folgen direkt die Doppelwinkel-Sätze:

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x),\\ \cos(2x) &= \cos^2(x)-\sin^2(x).\end{aligned}$$

A.4.5 Symmetrien

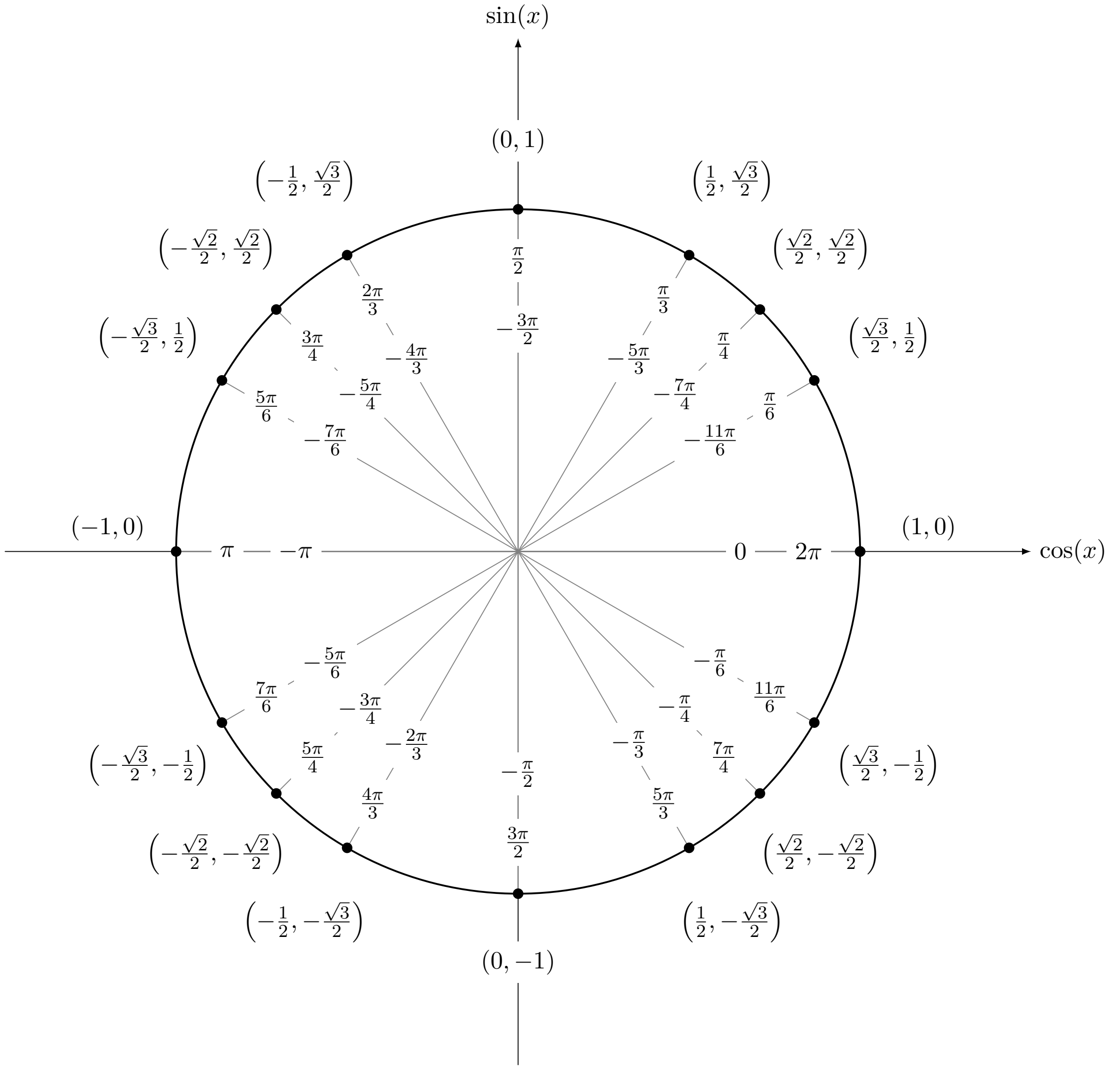
Die Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ weisen wichtige Symmetrien auf. Es gilt

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin(x),\\ \cos(-x) &= \cos(x).\end{aligned}$$

Wir sehen, dass $\cos(x)$ also symmetrisch an der $y-$Achse ist und wir nennen die Funktion deswegen gerade. Die Funktion $\sin(x)$ hingegen ist punktsymmetrisch am Nullpunkt. Wir nennen $\sin(x)$ ungerade.

A.4.6 Wertetabelle

Mit dem Einheitskreis lassen sich von Auge schon einige wichtige Werte von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ herleiten. Einige weitere besondere Werte sind im folgenden Einheitskreis aufgelistet. Die Punkte beschreiben jeweils $(\cos(x), \sin(x))$:



A.5 Weitere Vorkenntnisse

A.5.1 Doppelbrüche

Bei Doppelbrüchen können wir folgenden Trick anwenden: Das Produkt der äußeren Zahlen ergibt den Zähler, das Produkt der inneren Zahlen ergibt den Nenner:

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}.$$

A.5.2 Quadratische Ergänzung

Ein Thema, welches im Gymnasium häufig ausgelassen wird, ist das quadratische Ergänzen eines quadratischen Polynoms. Sei ein Polynom zweiten Grades

$$ax^2 + bx + c$$

gegeben. Dann können wir das Polynom zu

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

umschreiben. Wir wollen dies überprüfen und klammern aus:

$$\begin{aligned}
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= a\left((x^2+2x\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
&= ax^2+bx+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
&= ax^2+bx+c.
\end{aligned}$$

Die quadratische Ergänzung ist wichtig für Integrale mit einem quadratischen Polynom im Nenner.

Anhang B

Mathematische Symbole

B.1 Mengen

Name	Zeichen	Beispiel
Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ (manchmal auch inklusive 0)
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	Beispiele sind $\pi, e, \frac{3}{2} \in \mathbb{R}$
Komplexe Zahlen	$\mathbb{C}$	Beispiele sind $i, 3i, 1, \pi, \frac{2i}{5} \in \mathbb{C}$
Element von	$\in$	$x \in \mathbb{R}$ („x ist eine reelle Zahl“)
leere Menge	$\emptyset$	$\emptyset = \{\}$ (alternative Schreibweise)
Differenz Mengen	$\setminus$	$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ (alle Zahlen $x \leq 0$)
Schnittmenge	$\cap$	$\{2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 4, 5\} = \{3, 4\}$
Vereinigung	$\cup$	$\{2, 3, 4\} \cup \{1, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
Teilmenge	$\subset$	$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (alle reellen Zahlen sind auch komplex)

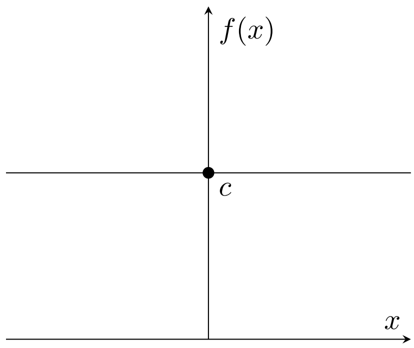
B.2 Aussagenlogik

Name	Zeichen	Beispiel
für alle	$\forall$	$\forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$
		(alle Quadrate reeller Zahlen sind positiv)
es existiert	$\exists$	$\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$
		(es existiert mindestens eine reelle Zahl, deren Quadrat 2 ist)
es existiert genau ein	$\exists!$	$\exists!\, x \in \mathbb{R} : x^3 = 2$
		(es existiert genau eine kubische Wurzel aus 2)
Verneinung	$\neg$	sei $A =$ „es regnet“; dann ist $\neg A =$ „es regnet nicht“
und	$\wedge$	$x \in \mathbb{R} \wedge y \in R$
		(x und y sind reell)
oder	$\vee$	$x \in \mathbb{R} \vee y \in \mathbb{R}$
		(x ist reell oder y ist reell oder beide sind reell*)
impliziert	$\Longrightarrow$	$x \in \mathbb{R} \implies x \in \mathbb{C}$
		(wenn x reell ist, so ist x auch komplex)
wird impliziert von	$\Longleftarrow$	$x \in \mathbb{C} \impliedby x \in \mathbb{R}$
		(Umkehrung der vorherigen Aussage)
Äquivalenz	$\Longleftrightarrow$	$x \in \mathbb{N} \iff (x \in \mathbb{Z} \wedge x > 0)$

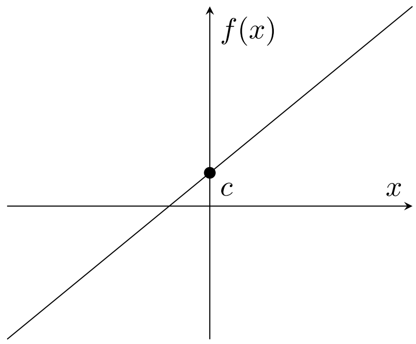
*Das „oder“ in der Logik entspricht also nicht dem „entweder, oder“ in der deutschen Sprache (was ausschließen würde, dass beide richtig sind). $A \vee B$ ist also auch wahr, wenn A und B beide wahr sind.

Anhang C

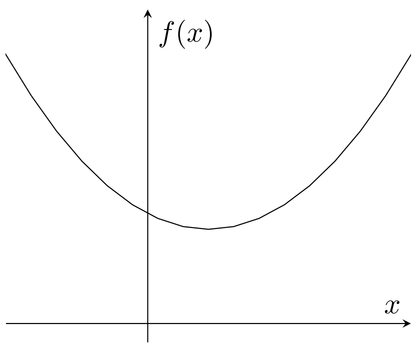
Wichtige Graphen



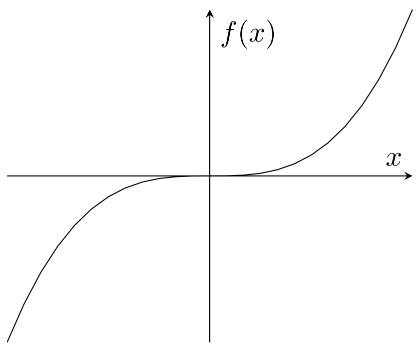
$f(x) = c$



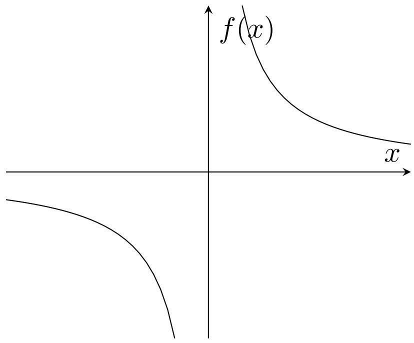
$f(x) = mx + c$



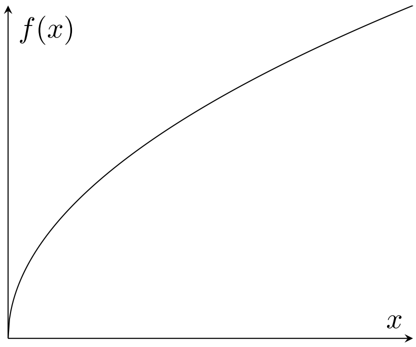
$f(x) = ax^2 + bx + c$



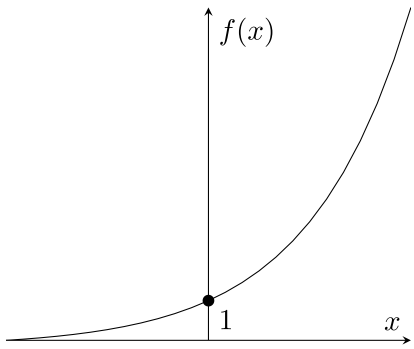
$f(x) = ax^3$



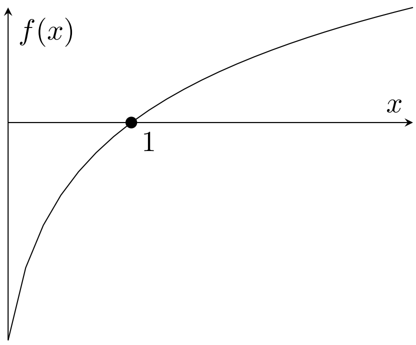
$f(x) = \frac{1}{x}$



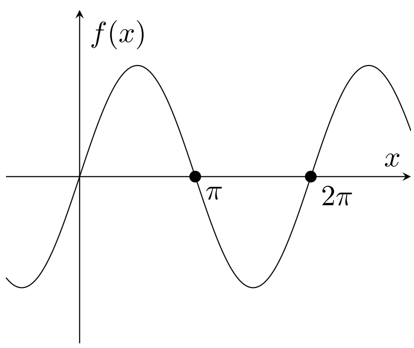
$f(x) = \sqrt{x}$



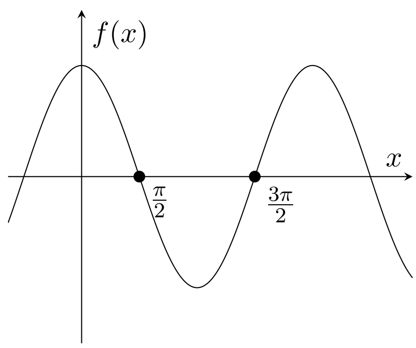
$f(x) = e^x$



$f(x) = \log x$



$f(x) = \sin(x)$



$f(x) = \cos(x)$

Anhang D

Beweis DI-Methode

Wir möchten nun verstehen, wieso die DI-Methode funktioniert, und im Prinzip das gleiche ist, wie die bekannte Formel

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx,$$

wobei $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$ ist. Wir integrieren $f(x)$ und leiten $g(x)$ ab. In der DI-Methode würde das wie folgt aussehen:

	D	I
$+$	$g(x)$	$f(x)$
$-$	$g'(x)$	$F(x)$
$+$		
$-$		
$+$		

Wenn wir jetzt die DI-Methode wie im zweiten oder dritten Fall verwenden, so müssen wir zuerst die erste Diagonale hinschreiben und die zweite Zeile als Integral auffassen:

	D	I
$+$	$g(x)$	$f(x)$
$-$	$g'(x)$	$F(x)$
$+$		
$-$		
$+$		

$$\rightarrow \quad F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx.$$

Das ist genau unsere Formel für die partielle Integration. Bei der herkömmlichen Formel (rechts) müssen wir das zweite Integral jetzt ausrechnen. Das können wir nochmals mit der DI-Methode machen, müssen aber jetzt die Vorzeichen ändern, da ein Minus vor dem Integral steht (nun ist die Stammfunktion von $F(x)$ gekennzeichnet durch $\mathcal{F}$):

$$-\int F(x) \cdot g'(x)\, dx \quad \rightarrow$$

	D	I
$-$	$g'(x)$	$F(x)$
$+$	$g''(x)$	$\mathcal{F}(x)$
$-$		
$+$		

Die DI-Methode ist aber genau deswegen so einfach, weil wir unsere erste Tabelle auch einfach weiterführen können. Denn wenn wir bei der zweiten Zeile beginnen, erhalten wir genau die Tabelle für das zweite Integral. Wir können den Prozess so oft wiederholen, wie wir möchten. Sobald wir eine 0 in einer Zeile stehen haben, ist das Integral, welches wir berechnen müssen, einfach 0 (bzw. eine Konstante $+C$). Somit müssen wir das Integral nicht mehr aufschreiben und hören einfach auf, indem wir die Diagonalen hinschreiben.

Anhang E

Literaturverzeichnis

[1] Caspar, A.: Vorlesungsnotizen, ETH Zürich (2022).

[2] Farkas, E. W.: Vorlesungsnotizen, ETH Zürich (2023).

[3] Papula, L.: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium. Springer Vieweg (2018).

[4] Papula, L.: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium. Springer Vieweg (2015).

[5] Michaels, T.C.T.: Analysis 1: Eine praxisorientierte Einführung für Mathematiker und Physiker mit über 900 gerechneten Beispielen. Felix Verlag Editrice (2015)

[6] Michaels, T.C.T.: Analysis 2: Eine praxisorientierte Einführung für Mathematiker und Physiker mit über 400 gerechneten Beispielen. Felix Verlag Editrice (2015)

[7] Jänich, K.: Analysis für Physiker und Ingenieure. Springer-Verlag (2001).

[8] Axler, S.: Linear Algebra Done Right. Springer Cham (2015).

[9] Strang, G.: Introduction to Linear Algebra, 6th Edition. Wellesley-Cambridge Press (2023)

[10] Caspar, A.; Hungerbühler, N.: Mathematische Modellierung in den Life Sciences. Springer Spektrum (2022)