Mittwoch: Relationen

Aufgabe 1

Beweise per Induktion: *Eine Menge mit n Elementen besitzt 2^n Teilmengen.*
Hinweise: die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

Aufgabe 2

Für $x, y \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$x \sim y \iff |x - y| < 0.25.$$

Definiert $\sim$ eine Äquivalenzrelation?

Aufgabe 3

Zeige, dass die folgenden Relationen auch Äquivalenzrelationen sind.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $x, y \in \mathbb{R}$ setzen wir $x \sim y \iff f(x) = f(y)$.

(b) Auf $\mathbb{Z}$ definieren wir: $n \sim m \iff 5$ teilt $(n - m)$.

Aufgabe 4

Auf der Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ definieren wir: $A \sim B \iff A \subset B$ oder $B \subset A$. Definiert $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?

Aufgabe 5

Auf der Menge $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ definieren wir

$$x \sim y \iff x^2 = y^2.$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A definiert und finde **alle Äquivalenzklassen**.

Aufgabe 6

Auf der Menge $A = \{1, 2, 3, ..., 20\}$ definieren wir

$$x \sim y \iff x \text{ und } y \text{ haben dieselbe Anzahl nichttrivialer Teiler.}$$

Nichttrivial bedeutet hier, dass wir die Zahl selbst und 1 nicht dazuzählen. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A definiert und finde **alle Äquivalenzklassen**.

Aufgabe 7

Betrachte die, auf $\mathbb{Z}$ definierte, Äquivalenzrelation

$$n \sim m \iff n = m \mod 4$$

Finde **alle Äquivalenzklassen** bezüglich $\sim$. Wie sehen die Äquivalenzklassen aus, wenn wir anstelle von 4 irgendeine Zahl p wählen?

Zusatzaufgabe

In der Vorlesung haben wir das faszinierende Gedankenexperiment des Hilbertschen Hotels kennengelernt - ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern, die alle belegt sind. Dennoch konnten wir mathematisch zeigen, dass es möglich ist, für einen neuen Gast stets ein Zimmer zu finden, indem wir alle bestehenden Gäste bitten, in das jeweils nächste Zimmer umzuziehen.

Doch was passiert, wenn ein Bus mit unendlich vielen nummerierten Plätzen vor dem Hotel hält? Auch in diesem Fall fanden wir eine Lösung: Indem wir alle aktuellen Gäste aufforderten, sich in die Zimmer mit den geraden Nummern $(2n)$ zu bewegen, blieben die ungeraden Zimmer frei und wir konnten alle Busgäste unterbringen.

Nun stellen wir uns eine neue Herausforderung vor: Was geschieht, wenn unendlich viele Busse, jeder mit unendlich vielen Plätzen, vor dem Hotel ankommen? Gibt es auch dann noch genug Platz für alle?

Und wenn wir die Situation noch weiter denken: Was passiert, wenn das Hotel am Ufer eines Ozeans liegt und unendlich viele Schiffe ankommen, die jeweils unendlich viele Busse geladen haben, und in jedem dieser Busse befinden sich unendlich viele Gäste? Gibt es auch in diesem scheinbar grenzenlosen Szenario genug Zimmer im Hotel?