Montag: Aussagenlogik, direkte Beweise

Aufgabe 1

Zeige, dass die Lösungen $x_{1,2}$ der Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Nullstellen des Polynoms $f(x) = ax^2 + bx + c$ sind.

Lösung

Die Mitternachtsformel besagt, dass für ein quadratische Polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$, bis zu zwei Nullstellen gegeben sind (abhängig davon, ob $b^2 - 4ac$ grösser, gleich oder kleiner 0 ist) durch

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Um dies zu überprüfen, setzen wir die Lösungen der Mitternachtsformel in das quadratische Polynom $P(x)$ ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
P(x_{1,2}) &= a \cdot \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) + c \\
&= \frac{1}{4a}(b^2 \mp 2b\sqrt{b^2 - 4ac} + b^2 - 4ac) + \frac{1}{2a}(-b^2 \pm b\sqrt{b^2 - 4ac}) + c \\
&= \frac{1}{4a}(\cancel{2b^2} \cancel{\mp 2b\sqrt{b^2 - 4ac}} - 4ac - \cancel{2b^2} \cancel{\pm 2b\sqrt{b^2 - 4ac}}) + c \\
&= \frac{-4ac}{4a} + c \\
&= 0
\end{aligned}$$

Somit sind $x_{1,2}$ Nullstellen und die Aussage ist bewiesen.
Beachte, dass wir nicht bewiesen haben, dass dies auch die einzigen Nullstellen von $f(x)$ sind. Dies folgt aber (zumindest für $b^2 - 4ac > 0$) aus der Aussage, dass Polynome vom Grad 2 maximal zwei Nullstellen haben, wie in der Zusatzaufgabe des Übungsblattes für Dienstag bewiesen wird.

Aufgabe 2

(a) Beweise mittels Wahrheitstafel: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

(b) Beweise: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

(c) Beweise: $(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$

Lösung

(a) Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Die Aussagen $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ haben gemäss Wahrheitstafel für alle Fälle denselben Wahrheitswert. Demnach sind sie äquivalent.

(b) Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

Die Aussagen $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ haben gemäss Wahrheitstafel für alle Fälle denselben Wahrheitswert. Demnach sind sie äquivalent.

(c) Wahrheitstafel:

A	B	$A \implies B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
w	w	w	f	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

Die Aussagen $A \implies B$ und $\neg A \vee B$ haben gemäss Wahrheitstafel für alle Fälle denselben Wahrheitswert. Demnach sind sie äquivalent.

Aufgabe 3

Beweise folgenden Satz: *Sei $x, y \in \mathbb{R}$. Wenn $y^3 + yx^2 \leq x^3 + xy^2$, dann gilt $y \leq x$.*

Lösung

Wir beweisen den Satz mit einem direkten Beweis: Sei $y^3+yx^2 \leq x^3+xy^2$. Dann gilt auch $y^3+yx^2-x^3-xy^2 \leq 0$. Wir faktorisieren die linke Seite und erhalten $(y-x)(x^2+y^2) \leq 0$. Da x^2+y^2 positiv ist, können wir beide Seiten durch x^2+y^2 teilen, wobei zu beachten gilt, dass bei $x^2+y^2=0$ auch $x=y=0$ gilt und somit der Satz trivial ist. Wir erhalten $y-x \leq 0$ und somit $y \leq x$. □

Aufgabe 4

Beweise folgenden Satz: *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \in \mathbb{N}$.*

Lösung

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\frac{n(n+1)}{2}$ eine natürliche Zahl ist, oder äquivalent, dass $n(n+1)$ durch 2 teilbar ist. Damit ist aber auch $n(n+1)(n+2)$ durch 2 teilbar.
Wir zeigen nun zuerst, dass $n(n+1)(n+2)$ durch 3 teilbar ist, also $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \in \mathbb{N}$. Dazu nutzen wir Fallunterscheidung:

1. n ist durch 3 teilbar: Dann gibt es also ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $n = 3k$. Dies folgt aus der Definition von Teilbarkeit. Folglich ist $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(3k)(n+1)(n+2)}{3} = k(n+1)(n+2) \in \mathbb{N}$.

2. n geteilt durch 3 ergibt Rest 1: Dies bedeutet, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $n = 3k - 2$.[1] Wir können folgern, dass $n + 2 = 3k$. Aber dann $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{n(n+1)(3k)}{3} = n(n + 1)k \in \mathbb{N}$.

3. n geteilt durch 3 ergibt Rest 2: Hier ist nun $n = 3k - 1$, also $n + 1 = 3k$. Es folgt analog zu den obigen Fällen $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{n(3k)(n+2)}{3} = nk(n + 2) \in \mathbb{N}$.

Weitere Fälle kann es nicht geben, denn der Rest bei Division durch 3 ist 0, 1 oder 2. Demnach ist für alle $n \in \mathbb{N}$ immer $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \in \mathbb{N}$. Äquivalent ist $n(n + 1)(n + 2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar.
Wir haben also gesehen, dass $n(n + 1)(n + 2)$ sowohl durch 2, als auch durch 3 teilbar ist. Es folgt daraus, dass $n(n + 1)(n + 2)$ auch durch 6 teilbar sein muss, also $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \in \mathbb{N}$. Nämlich gilt: Ist $n(n + 1)(n + 2) \in \mathbb{N}$ durch 2 teilbar, so ist $n(n + 1)(n + 2) = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Ist nun $n(n + 1)(n + 2)$ auch durch 3 teilbar, so muss auch k durch 3 teilbar sein, also $k = 3\ell$ für $\ell \in \mathbb{N}$. Folglich ist $n(n + 1)(n + 2) = 2k = 6\ell$ durch 6 teilbar. □

[1] Wir hätten auch schreiben können «Dies bedeutet, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $n = 3k + 1$», hätten dann aber die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ gesondert betrachten müssen—denn in diesen Fällen wäre $k = 0$.