Dienstag: Beweismethoden

Aufgabe 1

Finde möglichst viele verschiedene Beweise folgender mathematischer Aussage:
Ist $k \geq 2$ ein Teiler einer Zahl n, so ist die Zahl $n + 1$ nicht durch k teilbar.

Lösung

1. direkter Beweis: Sei $n = k \cdot b$, also ist $n + 1 = k \cdot b + 1$. Aber dann ist $(k \cdot b + 1)/k = b + \frac{1}{k}$. Während b eine natürliche Zahl ist, ist der Bruch $\frac{1}{k}$ im zweiten Summand keine ganze Zahl, da $k \geq 2$. Deren Summe kann dann auch keine ganze Zahl sein und demnach ist $n + 1$ nicht durch k teilbar.

2. mittels Widerspruch: Nehmen wir an, dass auch $n+1$ durch k teilbar ist. Dann ist also $n = k \cdot b$ und $n+1 = k \cdot a$. Subtraktion liefert $1 = k(a - b)$, oder $\frac{1}{k} = a - b$. Für $k \geq 2$ ist die linke Seite dieser Gleichung keine ganze Zahl, die rechte Seite aber schon. Dies ist ein Widerspruch, unsere Annahme war also falsch und damit ist $n + 1$ nicht durch k teilbar.

3. geometrischer Beweis: Da k ein Teiler von n ist, kann man n Punkte in einem Rechteck mit Höhe k und Breite b darstellen. Die Höhe ist dabei mindestens zwei, sodass es nicht möglich ist, auf der Seite des Rechteckes einen weiteren Punkt hinzuzufügen und wieder ein Rechteck der Höhe k zu erhalten.

4. via Mengen: Die Menge aller Vielfachen von k ist zugleich die Menge aller natürlicher Zahlen, die durch k teilbar sind. Diese Menge ist gegeben durch $\{a \cdot k \mid a \in \mathbb{N}\}$. Der Abstand zweier solcher Zahlen ak und bk mit $a \neq b$ ist $k|a - b| \geq k \geq 2$. Aber der Abstand von n und $n + 1$ ist eins und daher können nicht beide Teil dieser Menge sein.

Aufgabe 2

Beweise folgende Aussagen mittels Kontraposition:

(a) Wenn x und y zwei natürliche Zahlen sind, dessen Produkt gerade ist, so muss mindestens eine der beiden Zahlen gerade sein.

(b) Wenn x und y zwei natürliche Zahlen sind, dessen Produkt ungerade ist, so müssen beide Zahlen ungerade sein.

Lösung

(a) Wir bilden die Kontraposition der Aussage: wenn x und y beide ungerade sind, so ist dessen Produkt ungerade. Wir nehmen also an, dass x und y beide ungerade sind. Also existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ so dass $x = 2m + 1$ und es existiert $n \in \mathbb{Z}$ so dass $y = 2n + 1$. Demnach gilt $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$. Damit ist xy ungerade und somit die Kontraposition, bzw. die Aussage, bewiesen.

(b) Wir bilden wiederum die Kontraposition der Aussage: wenn x oder y gerade sind, so ist xy gerade. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir Annehmen, dass x gerade ist. Dann gilt: es existiert ein $n \in \mathbb{Z}$ sodass $x = 2n$ und wir folgern daraus $xy = 2(ny)$. Das Produkt ist demnach gerade und die Aussage konnte per Kontraposition bewiesen werden.

Aufgabe 3

Schreibe einen möglichst präzisen Beweis für die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt keine ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass $6a + 18b = 1$.

(b) Es seien a, b, c ganze Zahlen mit $a \cdot b = c$. Dann gilt $a \leq \sqrt{c}$ oder $b \leq \sqrt{c}$.

Lösung

(a) Wir zeigen die Aussage per Widerspruchsbeweis. Seien also a und b ganze Zahlen, sodass $6a + 18b = 1$. Wir dividieren beide Seiten durch 6 und erhalten

$$a + 3b = \frac{1}{6}.$$

Die ist ein Widerspruch, da die Summe zweier ganzen Zahlen a und $3b$ ebenfalls eine ganze Zahl sein muss. Daher gibt es keine ganzen Zahlen a und b, sodass $6a + 18b = 1$.

(b) Wir zeigen die Aussage per Widerspruchsbeweis. Man nehme also an, dass $a > \sqrt{c}$ und $b > \sqrt{c}$. Dann gilt aber

$$a \cdot b > \sqrt{c} \cdot \sqrt{c} = c.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Aussage $a \cdot b = c$. Der Satz folgt.

Aufgabe 4

Beweise folgende Aussagen für alle natürlichen Zahlen n mittels vollständiger Induktion[1]:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

(c) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ist durch 9 teilbar.

Lösung

(a) (i) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ergeben beide Seiten genau 1.

(ii) Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage für n gilt (IV = Induktionsvoraussetzung) und beweisen nun, das daraus die Aussage auch für $n + 1$ folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) &\overset{\text{IV}}{=} \frac{n\,(n+1)}{2} + \frac{2\,(n+1)}{2} \\ &= \frac{n\,(n+1) + 2\,(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Dies ist genau die zu zeigende Aussage für $n + 1$.

(b) (i) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ergeben beide Seiten genau 1.

(ii) Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage für n gilt und beweisen nun, das daraus die Aussage auch für $n + 1$ folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 &\overset{\text{IV}}{=} \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + \frac{6\,(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

Dies ist gerade die zu zeigende Aussage für $n + 1$.

(c) (i) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ durch 9 teilbar.

[1] Das Summenzeichen ist definiert als $\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + f(n)$ für beliebige Funktionen $f(k)$. Somit ist beispielsweise für Aufgabenteil (a) die Summe $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$ gerade die Summe aller natürlichen Zahlen $\leq n$.

(ii) Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage für n gilt und beweisen nun, das daraus die Aussage auch für $n+1$ folgt:

$$\begin{aligned}(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3 &= (n+1)^3+(n+2)^3+(n^3+9n^2+27n+27)\\ &= n^3+(n+1)^3+(n+2)^3+(9n^2+27n+27)\\ &= \underbrace{n^3+(n+1)^3+(n+2)^3}_{\text{IV: durch 9 teilbar}}+9\,(n^2+3n+3).\end{aligned}$$

Der letzte Term ist offensichtlich durch 9 teilbar und somit ist die Aussage bewiesen.

Zusatzaufgabe

Wir beweisen in dieser Aufgabe die folgende mathematische Aussage aus der Vorlesung vom Montag:
Ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ hat maximal n Nullstellen.
Dazu gehen wir wie folgt vor:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $Q(x)$ ein Polynom von Grad $n-1$ und sei $P(x) = (x-x_0)Q(x)$. Dann ist $P(x)$ ein Polynom vom Grad n.

(b) Zeige, dass wenn $P(x)$ ein Polynom von Grad n ist und x_0 eine Nullstelle von $P(x)$ ist, so kann $P(x)$ geschrieben werden als $P(x) = (x-x_0)Q(x)$, wobei $Q(x)$ ein Polynom von Grad $n-1$ ist.
Warnung: sehr schwierig! (löse ggf. erst (c))

(c) Beweise nun den Satz unter Nutzung von (a) und (b).

Lösung

(a) Als Polynom vom Grad $n-1$ hat $Q(x)$ die Form $Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$, wobei $b_{n-1} \neq 0$. Es ist dann

$$P(x) = (x-x_0)Q(x) = (x-x_0)\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i = b_{n-1}x^n + \sum_{i=1}^{n-1}(b_{i-1}-b_i x_0)x^i - b_0 x_0\,.$$

Der höchste auftretende Exponent von x ist damit n, also ist nach Definition der Grad von $P(x)$ gerade n.

(b) Wir konstruieren $Q(x)$ explizit: Als Polynom vom Grad n ist $P(x)$ von der Form $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, wobei $a_n \neq 0$. Analog hat $Q(x)$ die Form $Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$ mit $b_{n-1} \neq 0$. Wir wollen, dass die Gleichung

$$\begin{aligned} P(x) = (x-x_0)Q(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = (x-x_0)\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i\\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = b_{n-1}x^n + \sum_{i=1}^{n-1}(b_{i-1}-x_0 b_i)x^i - x_0 b_0\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Mittels Koeffizientenvergleich ist dies äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_0 &= -x_0 b_0\\ a_i &= (b_{i-1}-x_0 b_i) \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq n-1\\ a_n &= b_{n-1}\end{aligned} \tag{$*$}$$

welches linear in b_i ist. Ist dieses lineare Gleichungssystem für die b_i (bei gegebenen a_i) lösbar, so erhält man Koeffizienten für $Q(x)$, sodass $Q(x)$ die gewünschte Gleichung erfüllt. Ist $x_0 \neq 0$, so ist dies in der Tat möglich, denn die obigen Gleichungen $(*)$ können nach den b_i aufgelöst werden uns es gilt äquivalent

$$b_0 = -\frac{a_0}{x_0} \qquad \text{und} \qquad b_i = \frac{b_{i-1}}{x_0} - \frac{a_i}{x_0} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n-1.$$

Dies erlaubt es die b_i für alle $1 \leq i \leq n-1$ iterativ zu konstruieren. Man findet so

$$b_i = -\sum_{j=0}^{i} \frac{a_j}{(x_0)^{(i-j+1)}}$$

für alle $0 \leq i \leq n-1$. Damit ist $Q(x)$ wie gewünscht konstruiert. Wir sind jedoch noch nicht ganz fertig, denn zusätzlich muss noch $b_{n-1} = a_n$ gelten (siehe letzte Gleichung des Systems $(*)$). Expliziter muss also gelten

$$\begin{aligned} a_n = b_{n-1} = -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{(x_0)^{(n-j)}} \quad &\Leftrightarrow \quad a_n(x_0)^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j (x_0)^j = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{j=0}^{n} a_j (x_0)^j = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad P(x_0) = 0 \end{aligned}$$

In der ersten Äquivalenz haben wir mit $(x_0)^n$ multipliziert und im letzten Schritt haben wir genutzt, dass $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ist. Da x_0 Nullstelle von $P(x)$ ist, ist die letzte Aussage wahr, und da wir Äquivalenzumformungen durchgeführt haben, damit auch die erste. Also ist in der Tat $b_{n-1} = a_n$, das Gleichungssystem ist gelöst und $Q(x)$ mit der gewünschten Eigenschaft konstruiert.
Zuletzt ist noch der Fall $x_0 = 0$ zu betrachten. Dies ist besonders einfach, denn dann lautet das Gleichungssystem $(*)$ einfach $a_0 = 0$ und $a_i = b_{i-1}$ für alle $1 \leq i \leq n$. Damit ist offensichtlich $b_i = a_{i+1}$ für alle $0 \leq i \leq n-1$. Zusätzlich ist $a_0 = 0$ tatsächlich erfüllt (folgt aus $P(0) = a_0 = 0$, denn $x_0 = 0$ ist Nullstelle von $P(x)$).
Hinweis: Diese Teilaufgabe ist auf einem Schwierigkeitslevel, das erst im weiteren Verlauf des ersten Semesters erreicht wird. Man beachte, wie im Beweis die Lineare Algebra (Lösung eines linearen Gleichungssystems) hilft, ein Problem der Analysis (Nullstellen von Polynomen) zu lösen.

(c) Wir beweisen diese Aussage per vollständiger Induktion nach n:

(i) Für $n = 1$ ist der Satz klar, da Polynome vom Grad 1 die Form $f(x) = a_1 x + a_0$ mit $a_1 \neq 0$ haben. Damit ist $f(x)$ eine lineare Funktion und hat mit $x_1 = -a_0$ genau eine Nullstelle.

(ii) Wir nehmen an, dass ein Polynom $Q(x)$ n-ten Grades maximal n Nullstellen besitzt. Sei nun $P(x)$ ein Polynom mit Grad $n+1$ und x_0 eine beliebige Nullstelle von $P(x)$. Wie in Teil (b) gezeigt, kann dann $P(x)$ geschrieben werden als

$$P(x) = (x - x_0)Q(x)$$

$Q(x)$ hat dabei Grad n (gemäss Teil (a)). Nach Induktionsvoraussetzung hat $Q(x)$ höchstens n Nullstellen. Für jede weiter Nullstelle x_1 von $P(x)$ gilt wegen $0 = P(x_1) = (x_1 - x_0)Q(x_1)$ auch $Q(x_1) = 0$. Somit ist jede weitere Nullstelle von $P(x)$ auch Nullstelle von $Q(x)$. Aber laut Induktionsannahme kann $Q(x)$ maximal n Nullstellen haben. Somit hat $P(x)$ neben x_0 noch höchstens n weitere Nullstellen und daher insgesamt maximal $n+1$ Nullstellen.

(c*) Alternativ kann der Satz auch mittels Kontrapostion bewiesen werden: Hat ein Polynom $P(x)$ mehr als n Nullstellen, so muss der Grad von $f(x)$ grösser als n sein.
Sei also x_1 eine beliebige Nullstelle von $P(x)$, so wissen wir durch Teil (b), dass $P(x) = (x - x_1)Q_1(x)$. Hier ist $Q_1(x)$ ein Polynom. Sei nun x_2 eine weitere Nullstelle von $f(x)$, so ist also

$$0 = P(x_2) = (x_2 - x_1)Q_1(x_2)$$

und da $x_1 \neq x_2$ muss $0 = Q_1(x_2)$ sein. Mit anderen Worten, x_2 ist Nullstelle von $Q_1(x)$. Wir wenden nun (b) auf $Q_1(x)$ an und erhalten $Q_1(x) = (x - x_2)Q_2(x)$ für ein Polynom $Q_2(x)$. Einsetzen in obige Gleichung für $P(x)$ liefert

$$P(x) = (x - x_1)Q_1(x) = (x - x_1)(x - x_2)Q_2(x)$$

Wir setzen dies induktiv fort und nach $n + 1$ Schritten erhalten wir

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)(x - x_{n+1})Q_{n+1}(x)$$

für ein Polynom $Q_{n+1}(x)$. Da der Grad von $Q_{n+1}(x)$ nicht kleiner als Null sein kann, folgt dann die Aussage aus $n + 1$-maliger Anwendung von Teil (a).