Bayes 公式

给定两个随机变量 X, Y 的联合概率：$p(x, y)$， 归一性关系 $\sum_{x,y} p(x, y) = 1$

偏概率：$p_X(x) \equiv \sum_y p(x, y),\ p_Y(y) \equiv \sum_x p(x, y)$ (即p_X 定义为将样本集(X, Y)中所有满足 $X = x$ 的成员的概率值求和), 归一性关系 $\sum_x p_X(x) = 1$

条件概率：$p(x|y) \equiv \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$, 归一性关系 $\sum_x p(x|y) = 1$

根据上述定义，显然有

$$p(y|x) = \frac{p(x|y)p_Y(y)}{p_X(x)} \equiv \frac{p(x|y)p_Y(y)}{\sum_{y'} p(x|y')p_Y(y')}$$

$$\text{postior} = \frac{\text{conditional prob} \times \text{prior}}{\text{evidence}}$$

该公式称为“Bayes”公式，Bayes公式从上述定义的角度来说是“平庸”的，但其意义在于对条件概率概念的“解释”和应用

根据Bayes公式，显然有如下**Chain Rule**：

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1)p(x_2|x_1)p(x_3|x_1, x_2)\dots p(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

“机器学习”实际的算法模型中，由于概率密度函数一般会涉及大量的模型参数（latent variables），为简化计算，我们一般会基于一些合理假设认为，整体概率函数可以分解为若干因子的乘积（每个因子只依赖少量参数），这种乘积可以认为是对 Bayes chain rule 的简化，并可以用directional graph来的描述，例如：
graphic_distribution.png
其对应关系是：

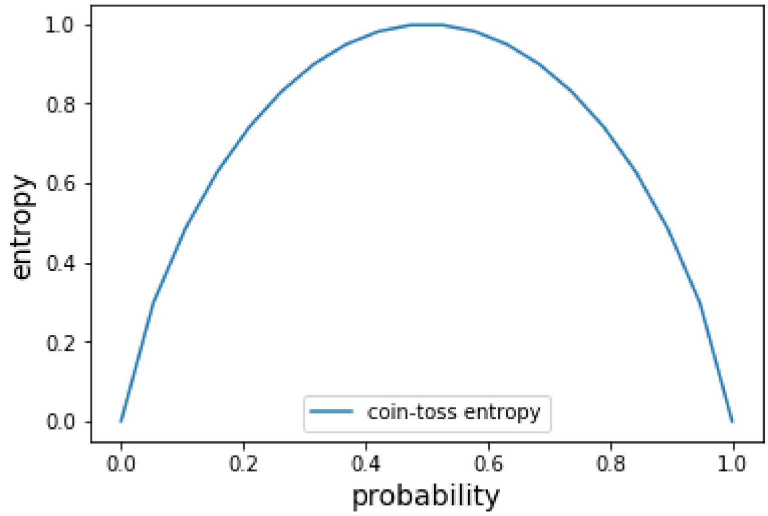
$$p(a, b, c, d, e) = p(a)p(b|a)p(c|a, b)p(d|b)p(e|c)$$

熵

In [1]:

```
%matplotlib inline
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

pp = np.linspace(0.000001,1-0.0000001, 20)
ss = -pp*np.log2(pp) - (1-pp)*np.log2(1-pp)
plt.plot(pp, ss, label="coin-toss entropy")
plt.xlabel("probability", fontsize=14)
plt.ylabel("entropy", fontsize=14)
plt.legend()
plt.show()
```



“自然”随机分布

二项式分布(Binominal Distribution)

掷硬币N次，硬币面朝上的几率为θ，则硬币面朝上出现次数为n的几率为：

$$P_n = C_N^n \theta^n (1-\theta)^{N-n}$$

称为"二项式分布"，记作$Binominal(N, \theta)$，（n 的峰值大致位于 $N\theta$ 处）

多项式分布(Multinominal Distribution)

是二项式分布的高维推广：

掷一个有k个面的骰子N次，骰子面i的几率为θ_i，各骰子面i分别出现的次数为$\{n_i\}$，显然 $\sum \theta_i = 1$，$\sum n_i = N$，这种结果出现的几率为：

$$P_{n1,\ldots nk} = \frac{N!}{n_1! \ldots n_k!} \theta_1^{n1} \ldots \theta_k^{nk}$$

称为"多项式分布"，记作$Multinominal(N, \theta_1, \ldots, \theta_k)$

泊松分布（Poisson Distribution）

是二项式分布的“参数连续化”：

类似于 *“全球平均每小时出生3000个小孩”* 的现象，有以下特点：

1. 单个事件在自然界任意时刻的发生概率很低 （某时刻诞生*“一个小孩的概率”*远低于*“没有诞生一个小孩”*的概率）
2. 某段时间内事件发生的次数，与且仅与这段时间的长短成正比 （全球平均每小时出生3000个，那么平均每2小时出生6000个）

不妨假设，将某段时间等距划分为N个dt的时段，上帝通过“掷硬币”来决定是否在每个时段内诞生一个孩子（诞生的概率为p），显然由于特点（1），可以假设 $N \to \infty, p \to 0$, 这段时间内出生k个孩子的概率为二项式分布(Binorminal Distribution)：

$$P_k = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$$

这段时间内出生孩子个数k的期望值为：$\langle k \rangle = pN$, 由于特点（2），可以假设该期望值仅和这段时间的长短成正比，即 $\langle k \rangle = pN = \lambda t$, 其中 t 表示时段的长短，λ 是比例常数，即

$$\text{在 } N \to \infty, p \to 0, pN = \lambda t \text{ 的条件下，求 } P_k = C_N^k p^k (1-p)^{N-k} \text{ 的极限}$$

，可以证明：

$$P_k = C_N^k p^k (1-p)^{N-k} \xrightarrow{p \to 0,\ pN = \lambda t} P_k = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \text{ (Poisson 分布)}$$

其中 $\xi \equiv \lambda t$ 是一个和时段长短相关的无量纲参数，并满足归一性：$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$, “泊松分布”记为$Poisson(\xi)$，（$k$ 的峰值大致位于 ξ 处）

类似于放射元素辐射的现象也和Poisson分布有密切关系，$1/\lambda$ 衡量 “半衰期”

正态分布（Norminal Distribution）

连续随机变量$X \in (-\infty, +\infty)$, 概率密度函数若满足

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

, 则称为“正态分布”，记为$Norminal(\mu, \sigma)$

相关定理：

二项式分布 $P_n = C_N^n \theta^n (1-\theta)^{N-n}$，当 $n\theta \gg 1,\ n(1-\theta) \gg 1$ 时，

$$Binominal(N, \theta) \xrightarrow{n\theta \gg 1,\ n(1-\theta) \gg 1} Norminal\left(\mu = n\theta, \sigma = \sqrt{n\theta(1-\theta)}\right)$$

Poisson 分布 $P_k = \frac{\xi^k e^{-\xi}}{k!}$, 当 $k \gg 1$ 时，

$$Poisson(\xi) \xrightarrow{k \gg 1} Norminal\left(\mu = \xi, \sigma = \sqrt{\xi}\right)$$

中心极限定理：大量统计独立的随机变量的平均值的分布趋于正态分布

其它随机分布（一般是具有良好性质的“人工”函数，用于参数拟合等）

beta 分布

对于连续随机变量$\Theta \in [0, 1]$，具有如下形式的概率密度函数：

$$Beta(\theta | a, b) \equiv \frac{\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}}{B(a, b)}, \qquad \text{其中 } a > 0, b > 0, \theta \in [0, 1]$$

称为“beta分布”，其中 归一化因子 $B(a, b) \equiv \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$，以确保 $\int_0^1 \mathrm{d}\theta Beta(\theta | a, b) = 1$

$a, b > 1$时，$Beta(\theta|a, b)$ 是“钟形”曲线，峰值位于 $(a-1)/(a+b-2)$，事实上，对于 分布$Beta(\theta|a, b)$，

$$平均值：E(\theta) = \frac{a}{a+b}, 平方差：\sigma_\theta^2 = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

Dirichelet 分布

是beta 分布的高维推广：

假设K维随机变量 $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K\}$，满足 $0 \le \theta_i \le 1$ 且 $\sum_i \theta_i = 1$, 具有如下形式的概率密度函数：

$$Dir(\theta_1, \ldots, \theta_K|\alpha_1, \ldots, \alpha_K) \equiv \frac{1}{B(\alpha_1, \ldots, \alpha_K)} \prod_{i=1}^{K} \theta_i^{\alpha i-1}, \qquad 其中所有\alpha_i > 0$$

beta分布 作为二项式分布的conjugate prior

问题：试验掷硬币5次，出现3次硬币面朝上，对面朝上几率θ“最合理的”猜测值应该是多少?

思路：由于此时θ 是一个未知的待估值，可以认为θ满足某种概率分布，所谓“最合理的”猜测值，即求在某种条件概率下的期望值问题

详解：掷硬币5次，所有可能出现的相关事件集为$\{I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5\}$, 其中$I_i$ 表示“出现i次面朝上”的事件。由于试验结果为I_3, 因此相关的条件概率为 $p(\theta|I_3)$, 根据Bayes公式，有：

$$p(\theta|I_3) \propto p(I_3|\theta)p(\theta), 其中\ p(I_3|\theta) = C_5^3\theta^3(1-\theta)^2\ 是二项式分布$$

其中$p(\theta)$ 称为θ的“先验分布”（prior），由于我们对θ"没有任何信息量"，因此认为 $p(\theta) = 1$，即是$[0, 1]$上的均匀分布, 于是

$$\$p(\theta|I_3) \propto \theta^3(1-\theta)^2 \sim Beta(\theta|4, 3)$$

$Beta(\theta|4, 3)$ 的峰值在$\theta_{\text{peak}} = 3/5 = 0.6$，平均值$E(\theta) = 4/7 \approx 0.57$, 因此 0.57或0.6都是某种意义上的合理猜测值

若我们根据某些信息用beta分布来描述 $p(\theta)$，即

$$p(\theta) = Beta(\theta|a, b) \equiv \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}/B(a, b)$$

, 则

$$p(\theta|I_3) \propto p(I_3|\theta)p(\theta) \propto \theta^{a+3-1}(1-\theta)^{b+2-1} \sim Beta(\theta|a+3, b+2)$$

(注意到：当$a = b = 1$时，$Beta(\theta|a+3, b+2)$ 还原到 $Beta(\theta|4, 3)$的结果)

对比观察 posterior 概率 $p(\theta|I_3)$ 和 $p(\theta)$ 都满足beta函数的形式，正是因为在Bayes公式中的这种前后一致性，我们称beta分布是二项式分布的"conjugate prior"

Dirichelet分布 作为多项式分布的conjugate prior

t-distribution

t-SNE: t-distributed stochastic neighbor embedding

It is a nonlinear dimensionality reduction technique that is particularly well-suited for embedding high-dimensional data into a space of two or three dimensions, in such a way that similar objects are modeled by nearby points and dissimilar objects are modeled by distant points