一维高斯分布与多维高斯分布

Gaussian Distribution(Normal Distribution)其图形特点为中间高，两头低，是钟形曲线(bell-shaped curve)。在高斯分布中，以数学期望μ表示钟型的中心位置（也即曲线的位置），而标准差（standard deviation）σ表征曲线的离散程度。

随机变量X服从数学期望为μ、方差为σ^2的正态分布，记为：

X = N (μ, σ^2)

当数学期望为0，方差为1时，该分布为标准正态分布（standard normal distribution）。

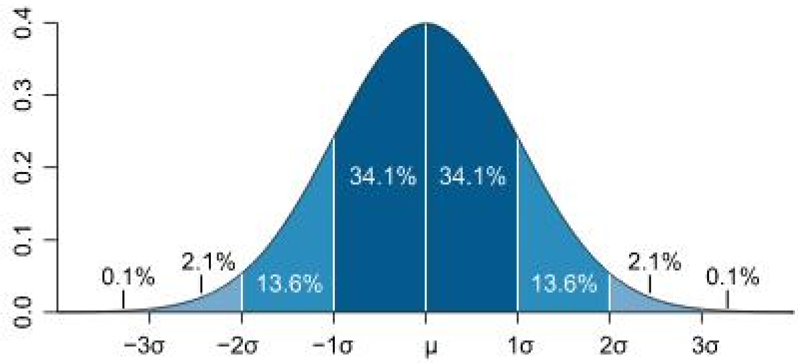
高斯分布的概率密度函数(probability density function)为：

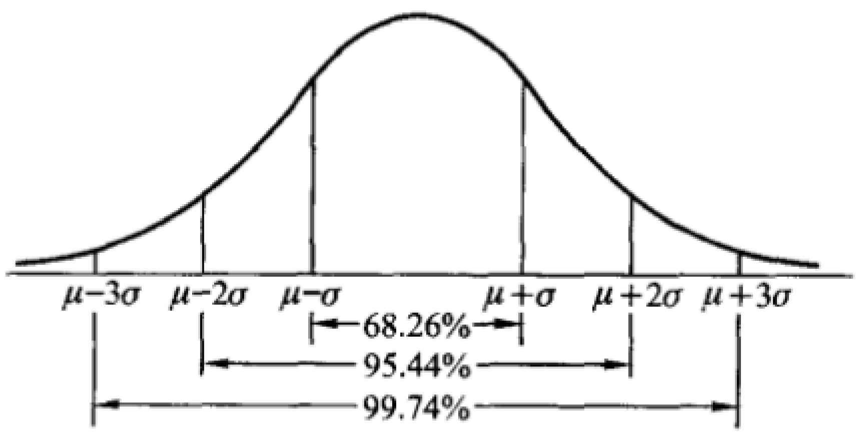
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

高斯分布曲线的特征：

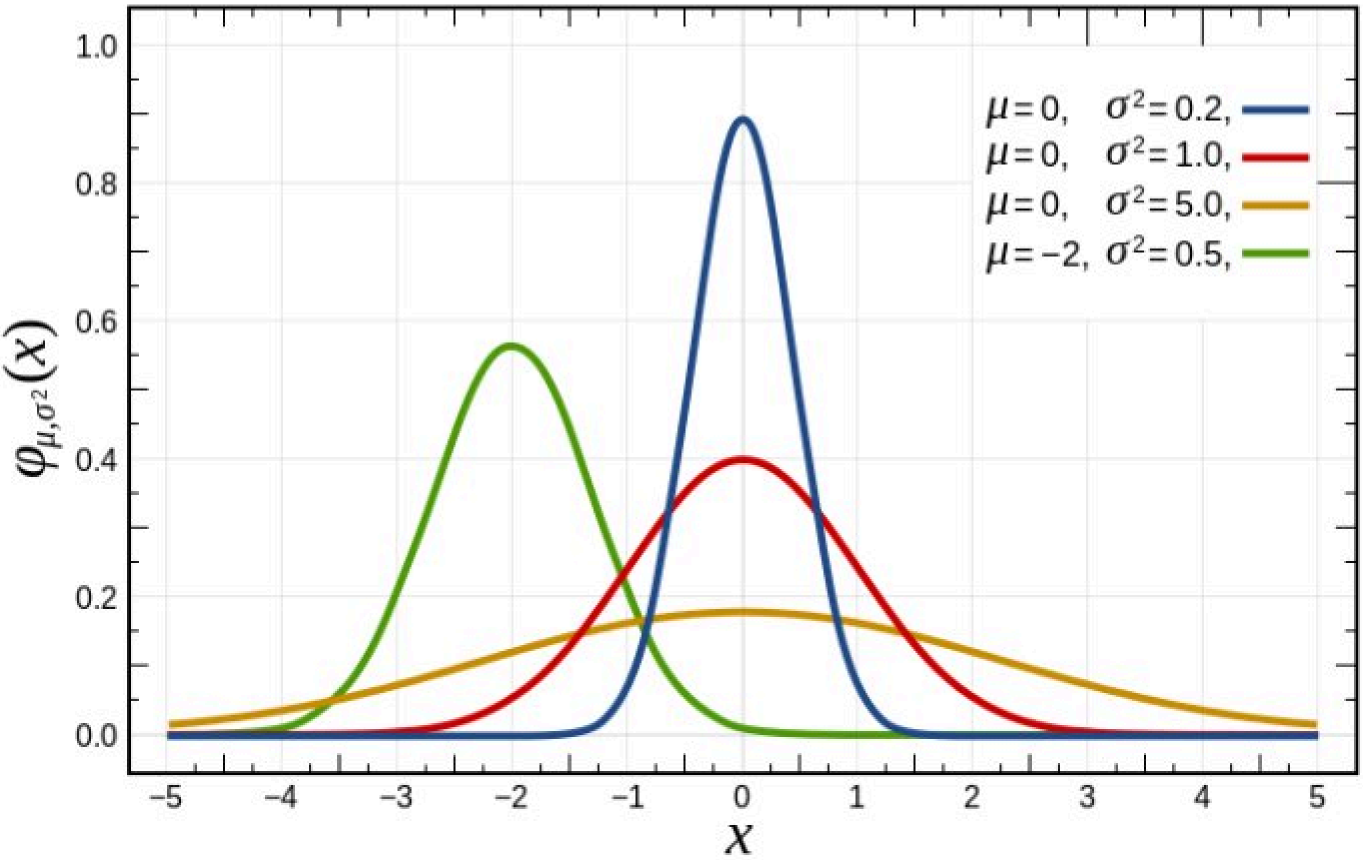
关于μ对称；总面积为1；在μ加减σ处为拐点（先内翻后外翻。

此外，我们通过公式可以看出，σ越大，x位置的概率值就越小，说明曲线越平缓（矮小）；而如果σ小，x的概率就大，说明曲线是瘦高的，概率分布比较集中。





如下图所示，红，蓝，橘黄色曲线的数学期望在0点，但蓝色的方差为0.2，所以其最为陡峭，而橘红色曲线的方差为5.0，证明其分布很广，由于曲线的概率总和为1，所以若其分布广，则高度必然会较低。绿色曲线由于其数学期望为－2，所以，在其他三条曲线的左侧。

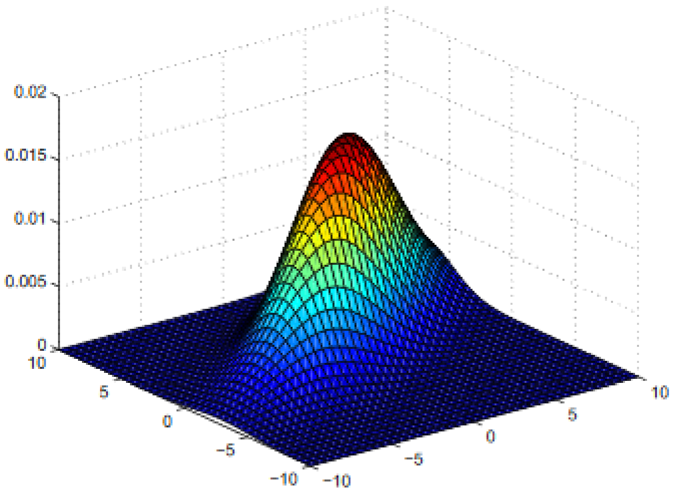


下面，扩展高斯分布到多维：

$$p(x;\mu,\Sigma)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right).$$

$$\Sigma=E[(X-\mu)(X-\mu)^T]=E[XX^T]-\mu\mu^T.$$

下图是一个二维高斯分布：



https://www.youtube.com/watch?v=JjB58InuTqM