1.

$$设Ax \le 0, Bx = 0, c^T x > 0\ 有解$$

$$\because Bx = 0$$

$$\therefore Bx \le 0, Bx \ge 0 \Rightarrow -Bx \le 0$$

$$\begin{cases} Ax \le 0 \\ c^T x > 0 \end{cases} \begin{cases} Bx \le 0 \\ c^T x > 0 \end{cases} \begin{cases} -Bx \le 0 \\ c^T x > 0 \end{cases}$$

$$针对上述三式应用Farks定理，得$$

$$\begin{cases} A^T y = c \\ y \ge 0 \end{cases} \begin{cases} B^T u = c \\ u \ge 0 \end{cases} \begin{cases} B^T v = -c \\ v \ge 0 \end{cases} 无解$$

$$令z = u + v，即$$

$$A^T y + B^T u + B^T v = A^T y + B^T(u + v) = A^T + B^T z = c + c - c = c, y \ge 0, z \ge 0\ 无解$$

$$换方向$$

$$设A^T y + B^T z = c, y \ge 0, z \ge 0\ 有解$$

$$令z = u + v, B^T u = c, B^T v = -c, u \ge 0, v \ge 0$$

$$则\begin{cases} A^T y = c \\ y \ge 0 \end{cases} \begin{cases} B^T u = c \\ u \ge 0 \end{cases} \begin{cases} (-B)^T v = c \\ v \ge 0 \end{cases}$$

$$如第一个证明所示，反过来应用Farks定理，即可得$$

$$Ax \le 0, Bx = 0, c^T x > 0\ 无解$$

2.

$$设Ax \le 0, x \ge 0, c^T x > 0\ 有解$$

$$则Ax \le x \Rightarrow (A - I)x \le 0$$

$$根据Farks定理，有$$

$$(A - I)^T y = c, y \ge 0\ 无解$$

即$A^Ty=c+y\leq c, y\geq 0$ 无解

换方向

设$A^Ty\geq c, y\geq 0$ 有解，加入剩余变量，得

$A^Ty-u=c, y\geq 0, u\geq 0$ 有解

令$u=y$, 则$(A^T-I)y=c, y\geq 0$

根据Farks定理，有$(A^T-I)x\leq 0, c^Tx>0$ 无解

则$A^Tx\leq 0, x\geq 0, c^Tx>0$ 无解(标红字的感觉不太对劲，到时候看看参考答案)