1

a

假设G_f有环，则在E_f中至少存在一条边(u, v),使得在拓扑排序中$index(u) > index(v)$，则根据定义，这条边不在E_f中，出现矛盾，因此G_f无环。

根据E_f的定义可知，G_f中的边都是$i < j的$，因此，G_f的拓扑排序是$< v1, v2, \dots, v_{|V|} >$

对G_b的证明同理

b

c

没有改变 Bellman-Ford 算法的渐进运行时间。因为$\lceil \left|\frac{V}{2}\right| \rceil$遍松弛的条件下，渐进时间还是$O(V)$，每一遍松弛还是需要$O(E)$的时间，所以总时间还是$O(VE)$

2

a

令 M 为传递闭包矩阵，大小为$|V| * |V|$，$M_{ij} = \begin{cases} 1, i到j有path \\ 0, i到j没path \end{cases}$

初始化 M 矩阵的方法：$M_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

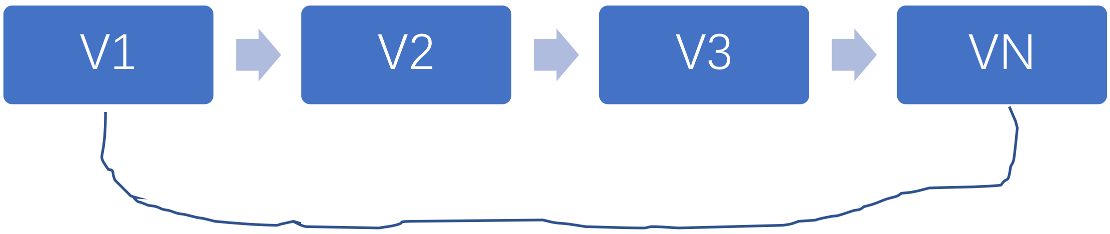
当加入一条边(u, v)后，更新 M 的算法为

$UPDATE(M, u, v)$

1. $for\ i = 1\ to\ |V|$
2. $\quad for\ j = 1\ to\ |V|$
3. $\quad\quad if\ M[i][u] == 1\ \&\&\ M[j][v] == 1$
4. $\quad\quad\quad M[i][j] = 1$

容易看出此算法的时间复杂度是$O(V^2)$

b



如图，有一个线性图，最后有一条边从V_n指向V_1（画的不太好）。当没加这条边的时候，闭包矩阵是个上三角矩阵，加了这条边后，闭包矩阵全是 1，因此变化了$|V|^2 - \frac{(1+|V|)|V|}{2}$，因此不管什么算法，最少都是$\Omega(V^2)$

c

a 中的方法时间复杂度是$O(V^4)$，因为有向完全图最多有$|V|(|V|-1)$条边，每次插入一条边都是$O(V^2)$，因此总共$O(V^4)$，所以不符合这道题的题意。

所以我们要对 a 中的方法进行改进，稍微想一下可以发现，如果$i \to v$之间已经有 path 了，那么加入$u \to v$这条边对结果没有任何影响，所以可以在进入第二重循环的时候，加一个检测条件，不能无脑进入第二重循环。

UPDATE-NEW(T,u,v)

1. $for\ i = 1\ to\ |V|$
2. $\quad if\ t_{iu} == 1\ \&\&\ t_{iv} == 0$
3. $\quad\quad for\ j = 1\ to\ |V|$
4. $\quad\quad\quad if\ t_{vj} == 0$
5. $\quad\quad\quad\quad t_{ij} = 1$

首先 1，2 行跟 a 一样，还是$O(V)$时间，然后 345 行，因为每加一条边，至少有一个t_{ij}变成 1，T 总共$|V|^2$的大小，所以 345 行最多运行$|V|^2$次。最多有$|V||V-1|$条边，所以时间是$O(V^3)$