# 第七章　最优性条件

$$\text{非线性规划问题}\begin{cases}\text{无约束极值问题}\\ \text{有约束极值问题}\end{cases}$$

有约束极值问题：

$$\begin{aligned}\min\quad & f(x)\\ s.t.\quad & g_i(x)\ge 0,\quad i=1,2,\cdots,l\\ & h_j(x)=0,\quad j=1,2,\cdots,m.\end{aligned}$$

# 问题的提出

例:某公司经营两种设备。第一种设备每件售价为30元，第二种设备每件售价为450元。且知，售出第一、二种设备分别需时为每件约0.5小时和（$2+0.25x_2$）小时，其中$x_2$为第二种设备售出数量。公司的总营业时间为800小时。

求：公司为获取最大营业额（销售额）的最优营业计划。

[解]设公司应经营销售第一、二种设备数额分别为$x_1$件和$x_2$件，则有

$$\max: f(X)=30x_1+450x_2$$

$$s.t.\ 0.5x_1+2x_2+0.25x_2^2\leq 800$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$$

- 定义 1： 设$f(x)$为目标函数，$S$为可行域，$x^0\in S$，若对$\forall x\in S$, **有**$f(x)\geqslant f(x^0)$, **则**$x^0$**称为极小化问题**min$f(x)$， $x\in S$**的（全局）最优解．**

- **定义 2 ：**设$f(x)$为目标函数，$S$为可行域，若存在$x^0$的$\varepsilon$邻域

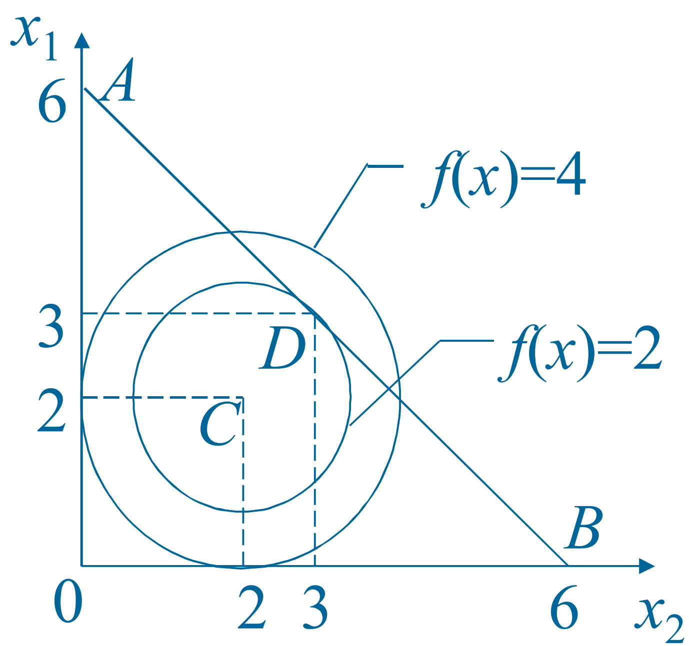
- $$N_\varepsilon(x^0)=\{x \mid \| x-x^0 \| < \varepsilon, \varepsilon>0\}$$

- 使得对$\forall x\in S\cap N_\varepsilon(x^0)$，**有**$f(x)\geqslant f(x^0)$, **则**$x^0$**称为极小化问题**min$f(x)$， $x\in S$**的局部最优解．**

[例]求解下述非线性规划

$$\min\ f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2$$

$$h(x)=x_1+x_2-6=0$$




显然，与直线*AB*相切的点必为最优解。

图中的*D*点即为最优点，此时目标函数值为：

$f(x^*)=2$，$x_1^*=x_2^*=3$

[例]非线性规划为

$$\min f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2$$

$$h(x)=x_1+x_2-6\le 0$$

最优解为$x_1^*=x_2^*=2$ ，$f(x^*)=0$，该点落在可行域内部，其边界约束失去作用。

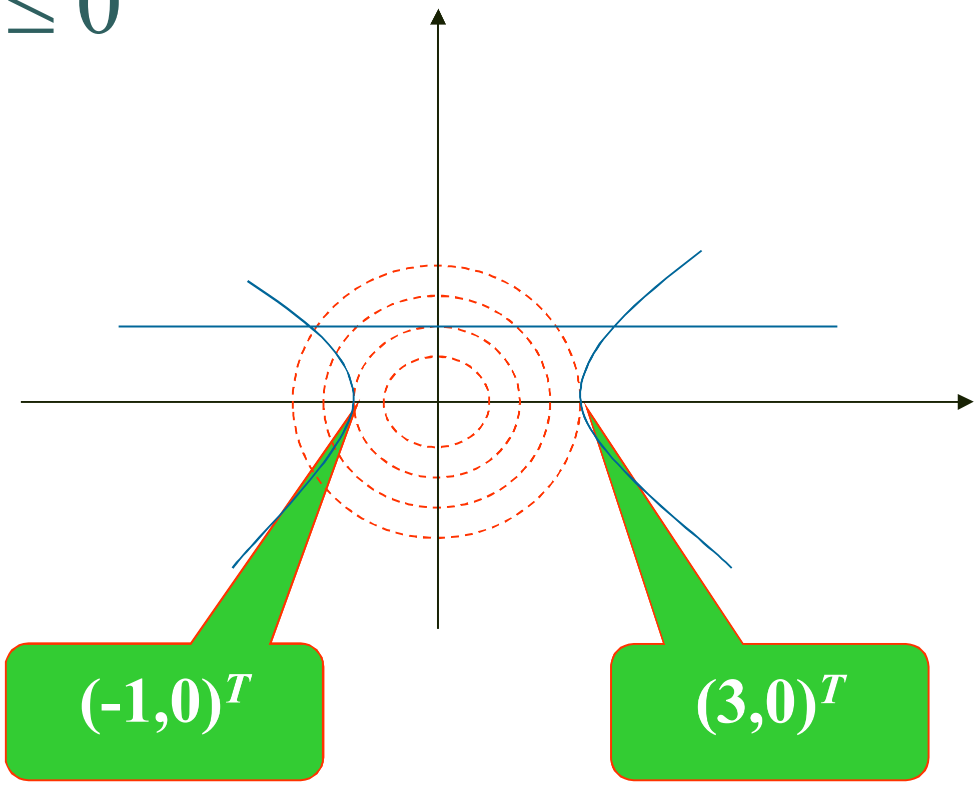
结论:非线性规划的最优解（如果存在）可在其可行域上任一点达到。

求下列约束问题的解：

$$\min\ x_1^2 + x_2^2$$

$$s.t.\quad (x_1 - 1)^2 - x_2^2 - 4 = 0$$

$$x_2 - 1 \le 0$$



# 无约束问题的极值条件

$$\min \quad f(x)$$
$$s.t. \quad x \in E^n$$

**定义：** 对$\min\limits_{x\in E^n} f(x)$，设$\overline{x} \in E^n$是任给一点，$d \neq 0$，若存在$\delta > 0$，使得对任意的$\lambda \in (0,\delta)$，有$f(\overline{x}+\lambda d) < f(\overline{x})$，则称$d$为$f(x)$在点$\overline{x}$处的下降方向。

引理：设函数$f(x)$在点$\bar{x}$可微，若存在$d \neq 0$使$\nabla f(\bar{x})^T d < 0$，则存在$\delta > 0$，使对$\forall \lambda \in (0,\delta)$，有$f(\bar{x}+\lambda d) < f(\bar{x})$。

证明：由泰勒展开公式

$$f(\bar{x}+\lambda d) = f(\bar{x}) + \lambda \nabla f(\bar{x})^T d + \| \lambda d \| \alpha(\bar{x}, \lambda d)$$

$$= f(\bar{x}) + \lambda [\nabla f(\bar{x})^T d + \frac{|\lambda|}{\lambda} \| d \| \alpha(\bar{x}, \lambda d)]$$

其中当 $\lambda \to 0$时， $\alpha(\bar{x}, \lambda d) \to 0$

$\because \nabla f(\bar{x})^T d < 0$，当$|\lambda|$充分小时，有

$$\lambda [\nabla f(\bar{x})^T d + \frac{|\lambda|}{\lambda} \| d \| \alpha(\bar{x}, \lambda d)] < 0$$

$\therefore$ 存在 $\delta > 0$，使得当 $\lambda \in (0,\delta)$时，有

$$\lambda [\nabla f(\bar{x})^T d + \frac{|\lambda|}{\lambda} \| d \| \alpha(\bar{x}, \lambda d)] < 0$$

$\therefore$ $f(\bar{x}+\lambda d) < f(\bar{x})$.

# 必要条件

定理1:(一阶必要条件)设函数$f(x)$在点$\bar{x}$处可微，若$\bar{x}$是局部极小点，则$\nabla f(\bar{x})=0.$

证明：设$\nabla f(\bar{x})\neq 0$，取$d=-\nabla f(\bar{x})\neq 0$,

则有$\nabla f(\bar{x})^T d=\nabla f(\bar{x})^T(-\nabla f(\bar{x}))$

$$=-\|\nabla f(\bar{x})\|^2<0$$

由引理，存在$\delta>0$,使当$\lambda\in(0,\delta)$时，有

$$f(\bar{x}+\lambda d)<f(\bar{x})$$

与$\bar{x}$是局部极小点矛盾。

**定义：** 若$f(x)$在点$x^*$可微，并且$\nabla f(x^*)=0$，则$x^*$称为$f(x)$的一个驻点(或者平稳点，stationary point)。既不是极小点，也不是极大点的驻点称为鞍点(saddle point)。

**例：** 对于二次函数$f(x)=x_1x_2$, $x^*=(0,0)^T$是它的驻点，但是该点既不是极小点，也不是极大点，所以$x^*$是$f(x)$的鞍点。

定理2:(二阶必要条件)设$f(x)$在$\bar{x}$处二阶可微，若$\bar{x}$是局部极小点，则$\nabla f(\bar{x})=0$，且$Hessian$矩阵$\nabla^2 f(\bar{x})$是半正定的。

证明：由定理1，$\nabla f(\bar{x})=0$.

设$d$是任意一个$n$维非零向量，

$\because f(x)$在$\bar{x}$处二阶可微,且$\nabla f(\bar{x})=0$,

$$\therefore f(\bar{x}+\lambda d)=f(\bar{x})+\lambda\nabla f(\bar{x})^T d+\frac{1}{2}\lambda^2 d^T\nabla^2 f(\bar{x})d+\lambda^2\|d\|^2\alpha(\bar{x},\lambda d)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(\bar{x}+\lambda d)-f(\bar{x})}{\lambda^2}=\frac{1}{2}d^T\nabla^2 f(\bar{x})d+\|d\|^2\alpha(\bar{x},\lambda d)$$

其中当$\lambda\to 0$时,$\alpha(\bar{x},\lambda d)\to 0$

$\because \bar{x}$是局部极小点,当$|\lambda|$充分小时,必有$f(\bar{x}+\lambda d)\geq f(\bar{x})$

$\therefore$当$\lambda\to 0$时,有$d^T\nabla^2 f(\bar{x})d\geq 0$

即$\nabla^2 f(\bar{x})$为半正定的.

定理3：设函数$f(x)$在点$\bar{x}$处二次可微，若梯度$\nabla f(\bar{x})=0$，且$Hessian$矩阵$\nabla^2 f(\bar{x})$正定，则$\bar{x}$是严格局部极小点。

二阶充分条件

证明：对任意$x \neq \bar{x}$,

$\because f(x)$在$\bar{x}$处二阶可微且$\nabla f(\bar{x})=0$,

$$\therefore f(x)=f(\bar{x})+\frac{1}{2}(x-\bar{x})^T\nabla^2 f(\bar{x})(x-\bar{x})+o(\|x-\bar{x}\|^2)$$

$\because \nabla^2 f(\bar{x})$是正定的，$\therefore (x-\bar{x})^T\nabla^2 f(\bar{x})(x-\bar{x})>0$

因此，存在$\varepsilon>0$，当$x\in N_\varepsilon(\bar{x})$且$x\neq\bar{x}$时，有

$$f(x)>f(\bar{x})$$

$\therefore \bar{x}$是严格局部极小点.

定理3'：设函数$f(x)$在点$\overline{x}$的邻域内二次可微，若梯度$\nabla f(\overline{x})=0$, 且$Hessian$矩阵$\nabla^2 f(x)$在该邻域内半正定，则$\overline{x}$是局部极小点。特别地，对于邻域内的任意点$x \neq \overline{x}$, 若$\nabla^2 f(x)$是正定矩阵，则$\overline{x}$是一个严格的局部极小点.

例：求$f(x)=\left(x_1-2\right)^4+\left(x_1-2x_2\right)^2$的极小点。

解：因为

$$\nabla f\left(x\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\left(x_1-2\right)^3+2\left(x_1-2x_2\right)\\ -4\left(x_1-2x_2\right)\end{bmatrix}$$

令$\nabla f(x)=0$,解得驻点$x^*=(2,1)^T$.

$$\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix}12\left(x_1-2\right)^2+2 & -4\\ -4 & 8\end{bmatrix}\Rightarrow\nabla^2 f(x^*)=\begin{bmatrix}2 & -4\\ -4 & 8\end{bmatrix}$$

$\nabla^2 f(x)$半正定，但$\nabla^2 f(x)(x\neq x^*)$在$x^*$的邻域内正定，所以$x^*$是严格局部极小点。

推论：对于正定二次函数$f(x)=\dfrac{1}{2}x^T Ax+b^T x+c$

($A$对称正定)，有唯一极小点$x^*=-A^{-1}b$.

证明：$\because f(x)=\dfrac{1}{2}x^T Ax+b^T x+c$

$\therefore \quad \nabla f(x)=Ax+b, \quad \nabla^2 f(x)=A$

令$\nabla f(x)=0, \quad \because A$正定，

$\therefore Ax+b=0$有唯一解$x^*=-A^{-1}b$.

显然$\nabla f(x^*)=0$且$\nabla^2 f(x^*)=\mathrm{A}$正定,

$\therefore x^*$为唯一极小点.

定理4：设$f(x)$是定义在$E^n$上的可微凸函数，$\bar{x} \in E^n$，则$\bar{x}$为整体极小点的充要条件是$\nabla f(\bar{x}) = 0$.

证明：只证充分性。

设$\nabla f(\bar{x}) = 0$.

$\because f(x)$是$E^n$上的可微凸函数，

$\therefore$ 对任意的$x \in E^n$，有

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) = f(\bar{x})$$

$\therefore \bar{x}$为整体极小点。

例：$\min\ f(x)=5x_1^2-6x_1x_2+5x_2^2$

解：$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=10x_1-6x_2,\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=-6x_1+10x_2$

令$\nabla f(x)=0$,得$x^*=\left(0,\ 0\right)^T$,

$\because \nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}10 & -6\\ -6 & 10\end{pmatrix}$正定，故$f(x)$为凸函数

$\therefore x^*$为整体极小点。

例：求$f(x)=\frac{1}{3}x_1^3+\frac{1}{3}x_2^3-x_2^2-x_1$的极小点。

解：$\frac{\partial f}{\partial x_1}=x_1^2-1,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=x_2^2-2x_2$

令$\nabla f(x)=0$，得$\begin{cases} x_1^2-1=0 \\ x_2^2-2x_2=0 \end{cases}$，得驻点

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ x^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ x^{(3)}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\ x^{(4)}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$f(x)$的$Hessian$矩阵$\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}2x_1 & 0\\ 0 & 2x_2-2\end{pmatrix}$

# 约束极值问题的最优性条件

$$\begin{cases} \min \quad f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0, \quad i=1,2,\cdots,m \text{----不等式约束} \\ \qquad\quad h_j(x)=0, \quad j=1,2,\cdots,l. \text{----等式约束} \\ \qquad\quad x \in E^n \end{cases}$$

$$S=\left\{ x \left| \begin{array}{ll} g_i(x) \geq 0, & i=1,2,\cdots,m \\ h_j(x)=0, & j=1,2,\cdots,l \end{array} \right. \right\}$$

-------------可行集或可行域

**定义：** 对 $\min\limits_{x\in E^n} f(x)$，设 $\bar{x}\in E^n$ 是任给一点，$d\neq 0$，若存在 $\delta>0$，使得对任意的 $\lambda\in(0,\delta)$，有 $f(\bar{x}+\lambda d)<f(\bar{x})$，则称 $d$ 为 $f(x)$ 在点 $\bar{x}$ 处的下降方向(descent direction)。

$$F_0=\left\{d \,\middle|\, \nabla f(\bar{x})^T d<0\right\}$$

称为点 $\bar{x}$ 处的下降方向集。

**定义：** 设集合$S \subset E^n, \bar{x} \in clS, d$为非零向量，若存在数$\delta > 0,$使得对任意$\lambda \in (0, \delta)$，都有

$$\bar{x} + \lambda d \in S$$

则称$d$为集合$S$在$\bar{x}$的可行方向(feasible direction)。

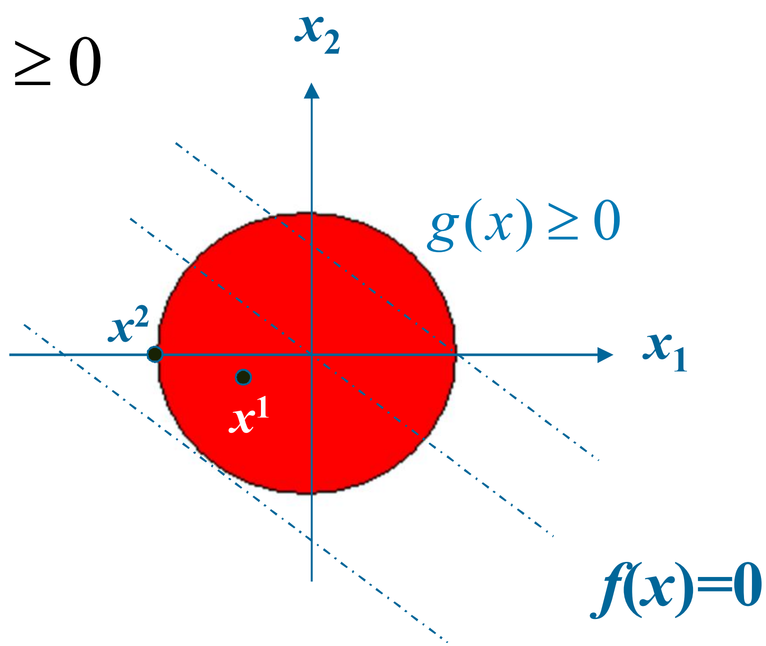
$$D = \left\{ d \middle| \, d \neq 0, \bar{x} \in clS, \exists \delta > 0, \forall \lambda \in (0, \delta), \text{有} \bar{x} + \lambda d \in S \right\}$$

$\bar{x}$处的可行方向锥。

例：考虑如下约束优化问题：

$$\min\ f(x) = x_1 + x_2$$

$$s.t.\quad g(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$




对于任意内点$x^1$，可行方向锥$D = R^2 \setminus \{0\}$.

对于边界点$x^2 = (-1, 0)^T$,可行方向锥

$$D = \{d \in R^2 \mid d_1 > 0\}.$$

定理1（几何最优性条件）：考虑问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & x \in S \end{aligned}$$

设$S$是$E^n$的非空集合，$\bar{x} \in S$，$f(x)$在$\bar{x}$处可微，若$\bar{x}$是局部最优解，则$F_0 \cap D = \varnothing$。

证明：设存在的$d \in F_0 \cap D$,则$d \in F_0, d \in D$.

$\because d \in F_0, \therefore \exists \delta_1 > 0$,对$\forall \lambda \in (0, \delta_1)$,有$f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$;

$\because d \in D, \therefore \exists \delta_2 > 0$,对$\forall \lambda \in (0, \delta_2)$,有$\bar{x} + \lambda d \in S$.

取$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$,则当$\lambda \in (0, \delta)$,有

$\bar{x} + \lambda d \in S$且$f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$,

与$\bar{x}$为局部最优解矛盾。

# 不等式约束问题的一阶最优性条件

$$(1)\quad \begin{cases} \min & f(x) \\ s.t. & g_i(x) \ge 0, i = 1, \cdots, m. \end{cases}$$

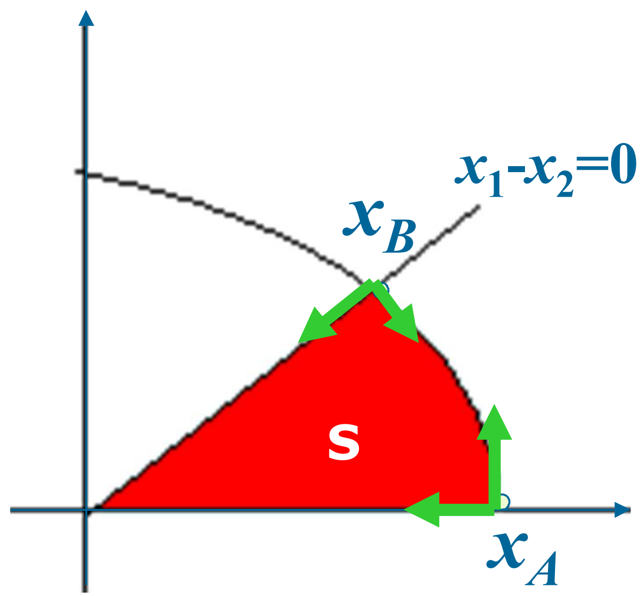
可行域 $S = \{x | g_i(x) \ge 0, i = 1, \cdots, m\}$

**定义:** 若问题(1)的一个可行点$\bar{x}$(即$\bar{x} \in S$)使某个不等式约束$g_i(x) \ge 0$变成等式，即$g_i(\bar{x}) = 0$，则该不等式约束称为关于可行点$\bar{x}$的起作用约束（或等式约束）；否则，若$\bar{x}$使得某个$g_i(\bar{x}) > 0$，则该不等式约束称为关于可行点$\bar{x}$的不起作用约束（或松约束）。

$$\text{记}\quad I = \{i | g_i(\bar{x}) = 0, \bar{x} \in S\}$$

例：约束

$$\begin{cases} g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 1 \geq 0 \\ g_2(x) = x_1 - x_2 \geq 0 \\ g_3(x) = x_1 \geq 0 \\ g_4(x) = \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$




$$x_A = (1, 0)^T, x_B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$$

$$G_0 = \left\{ d \middle| \nabla g_i(\bar{x})^T d > 0, i \in I \right\}$$

称$G_0$为$S$在点$\bar{x}$处的局部约束方向锥（ 或内方向锥）。

定理2：设$\bar{x}\in S$，$f(x)$和$g_i(x)(i\in I)$在$\bar{x}$处可微，$g_i(x)(i\notin I)$在$\bar{x}$处连续，如果$\bar{x}$是问题(1)的局部最优解，则$F_0\bigcap G_0=\varnothing$。

证明：由定理1，在$\bar{x}$处，有$F_0\bigcap D=\varnothing$.

设$d\in G_0$，则$\nabla g_i(\bar{x})^T d>0$，$i\in I$；令$\tilde{g}_i(x)=-g_i(x)$，$i\in I$.

则$\nabla\tilde{g}_i(\bar{x})^T d<0$，$i\in I$;

由引理，存在$\delta_1>0,$当$\lambda\in(0,\delta_1)$时，有

$$\tilde{g}_i(\bar{x}+\lambda d)<\tilde{g}_i(\bar{x}),\ i\in I$$

即 $g_i(\bar{x}+\lambda d)>g_i(\bar{x})=0$，$i\in I$.

当$i\notin I$时，$g_i(\bar{x})>0,\because g_i(\bar{x})(i\notin I)$在$\bar{x}$连续,

$\therefore$存在$\delta_2>0,$当$\lambda\in(0,\delta_2)$时，有$g_i(\bar{x}+\lambda d)>0,i\notin I.$

令$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则当$\lambda\in(0,\delta)$时，有$g_i(\bar{x}+\lambda d)>0,\forall i,$

$\Rightarrow\bar{x}+\lambda d\in S\quad\Rightarrow d\in D$

$\Rightarrow\quad G_0\subseteq D\quad\Rightarrow F_0\bigcap G_0=\varnothing$

定理3($Fritz\ \ John$条件) 设$\bar{x} \in S, I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$, $f(x), g_i(x)(i \in I)$在$\bar{x}$处可微， $g_i(x)(i \notin I)$在$\bar{x}$处连续，若$\bar{x}$是问题(1)的局部最优解，则存在 不全为零的数$w_0, w_i(i \in I)$,使得

$$\begin{cases} w_0 \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \\ w_0,\ \ w_i \geq 0, \quad i \in I. \end{cases}$$

$\bar{x}$ **称为Fritz John 点(即满足Fritz John条件的点).**

证明：由定理2，在点$\bar{x}$, $F_0 \cap G_0 = \varnothing$,即不等式

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x})^T d < 0 \\ -\nabla g_i(\bar{x})^T d < 0, \quad i \in I \end{cases} \text{无解。}$$

设$I = \{i_1, i_2, \cdots, i_s\}$, 令$A = \begin{pmatrix} \nabla f(\bar{x})^T \\ -\nabla g_{i_1}(\bar{x})^T \\ \vdots \\ -\nabla g_{i_s}(\bar{x})^T \end{pmatrix}$

有$Ad < 0$无解,由$Gordan$定理,存在$w = \left(w_0, w_{i_1}, \cdots, w_{i_s}\right)^T \geq 0, w \neq 0$,使得

$$A^T w = 0,\text{即}\left(\nabla f(\bar{x}), -\nabla g_{i_1}(\bar{x}), \cdots, -\nabla g_{i_s}(\bar{x})\right)\begin{pmatrix} w_0 \\ w_{i_1} \\ \vdots \\ w_{i_s} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow w_0 \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0.$$

定理3'(*Fritz John*条件) 设$\bar{x}\in S, I=\{i \mid g_i(\bar{x})=0\}$，$f(x), g_i(x)$在$\bar{x}$处可微，若$\bar{x}$是问题(1)的局部最优解，则存在不全为零的数$w_0, w_1, \cdots, w_m$,使得

$$
\begin{cases}
w_0 \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} w_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \\
w_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\
w_0,\ w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m.
\end{cases}
$$

互补松弛条件

这里这个互补松弛条件怎么理解？

问题

$$\begin{cases} \min \quad f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \le 0, i = 1, 2, \cdots, m \end{cases}$$

的*Fritz John*条件为

$$\begin{cases} w_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \\ w_0,\ w_i \ge 0, \quad i \in I. \end{cases}$$

例：设非线性规划问题

$$\begin{cases} \min\ f(x)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2 \\ s.t.\quad g_1(x)=-x_1^2-x_2^2+5\geq 0 \\ \qquad\quad g_2(x)=-x_1-2x_2+4\geq 0 \\ \qquad\quad g_3(x)=x_1\geq 0 \\ \qquad\quad g_4(x)=x_2\geq 0 \end{cases}$$

判别点$x^{(1)}=(2,1)^T$和$x^{(2)}=(0,0)^T$是否是*Fritz John*点？

解： $\nabla f(x)=\left(2(x_1-3),2(x_2-2)\right)^T$

$$\nabla g_1(x)=(-2x_1,-2x_2)^T,\nabla g_2(x)=(-1,-2)^T$$

$$\nabla g_3(x)=(1,0)^T,\quad \nabla g_4(x)=(0,1)^T$$

$$\min\ f(x)=\left(x_1-1\right)^2+\left(x_2-1\right)^2$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & g_1(x)=\left(1-x_1-x_2\right)^3\ge 0 \\ & g_2(x)=x_1\ge 0 \\ & g_3(x)=x_2\ge 0 \end{aligned}$$

最优解为

$$x^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T.$$

$\because$ 直线$x_1+x_2=1$上所有可行点$\overline{x}$使$\nabla g_1(\overline{x})=0,$

$\therefore$ 取$w_0=0, w_1=a>0$，$w_2=w_3=0$，总有

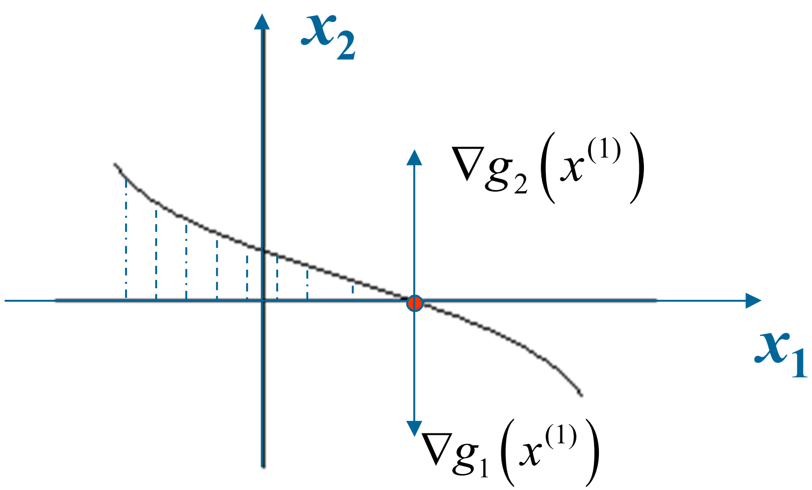
$$w_0\nabla f(\overline{x})-w_1\nabla g_1(\overline{x})-w_2\nabla g_2(\overline{x})-w_3\nabla g_3(\overline{x})=0$$

说明在直线$x_1+x_2=1$上每个可行点$\overline{x}$都是*Fritz John*点，但除$x^*$外，都不是最优解。

例2. 设非线性规划问题：

$$\begin{cases} \min -x_1 \\ s.t. \quad g_1(x) = -x_2 + (1-x_1)^3 \ge 0 \\ \qquad\quad g_2(x) = x_2 \ge 0 \end{cases}$$

判别点$x^{(1)} = (1, 0)^T$是否是*Fritz John*点？



解： $\because \nabla f(x)=(-1,0)^T$

$\nabla g_1(x)=(-3(1-x_1)^2,-1)^T, \nabla g_2(x)=(0,1)^T$

在点$x^{(1)}=(1,0)^T$处, $I=\{1,2\}$

$\nabla f(x^{(1)})=(-1,0)^T, \nabla g_1(x^{(1)})=(0,-1)^T,$

$\nabla g_2(x)=(0,1)^T$，设有

$$w_0\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}-w_1\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}-w_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0$$

$\Rightarrow w_0=0$, 取$w_1=w_2>0$

$\Rightarrow x^{(1)}=(1,0)^T$是$Fritz\ John$点。

# Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件

定理2. 考虑问题$\begin{cases} \min\ f(x) \\ s.t.\quad g_i(x) \geq 0, i=1,\cdots,m \end{cases}$

设$\bar{x} \in S, f, g_i (i \in I)$在$\bar{x}$处可微，$g_i (i \notin I)$在$\bar{x}$连续，$\boxed{\{\nabla g_i(\bar{x}) \mid i \in I\}\text{线性无关，}}$ 若$\bar{x}$是局部最优解，则存在非负数$w_i, i \in I$，使得

$$\boxed{\phantom{w_0}}\ \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0.$$

与Fritz john相比

证明：由定理1，存在不全为零的非负数

$w_0, w_i', i \in I$，使得

$$w_0 \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} w_i' \nabla g_i(\bar{x}) = 0.$$

显然$w_0 \neq 0$，否则$\nabla g_i(\bar{x})(i \in I)$线性相关，矛盾。

于是，令$w_i = \dfrac{w_i'}{w_0} \geq 0\ (i \in I)$，得

$$\nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0.$$

## Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件

定理2'. 考虑问题 $\begin{cases} \min\ f(x) \\ s.t.\quad g_i(x) \geq 0, i = 1, \cdots, m \end{cases}$

设$\bar{x} \in S, f, g_i$在$\bar{x}$可微,$\{\nabla g_i(\bar{x}) \mid i \in I\}$线性无关,

若$\bar{x}$是局部最优解，则存在数$w_i, i = 1,2,\cdots,m,$使得

$$\nabla f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} w_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

$$w_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$w_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

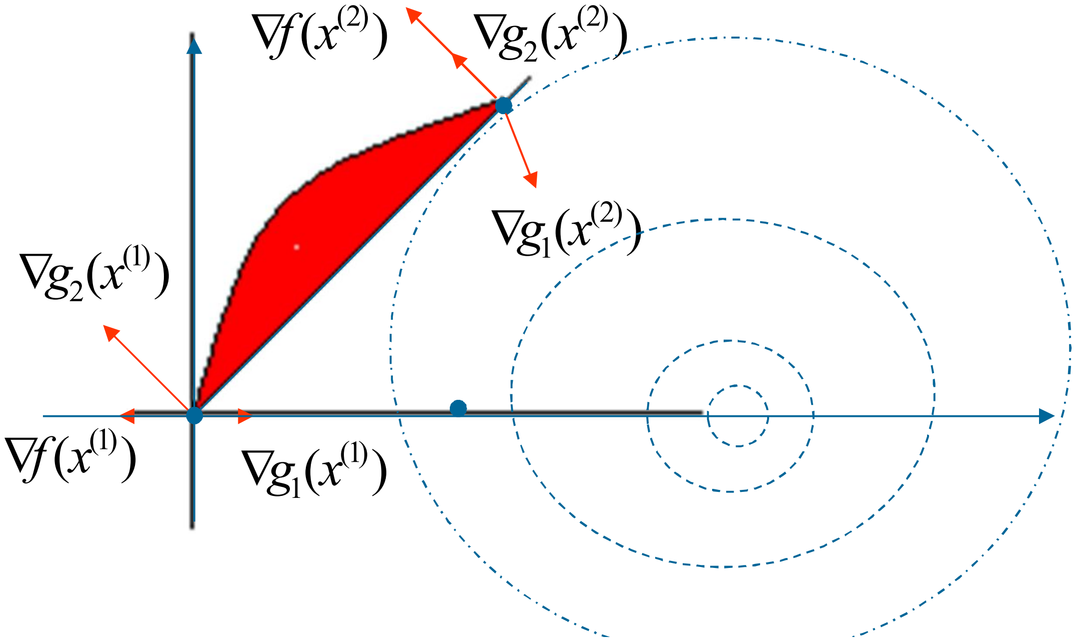
互补松弛条件

这里跟Fritz John的互补松弛一样也不是很能理解

例：给定非线性规划问题：

$$\begin{cases} \min\ (x_1-2)^2+x_2^2 \\ s.t.\quad x_1-x_2^2\geq 0 \\ \qquad\quad -x_1+x_2\geq 0 \end{cases}$$

验证$x^{(1)}=(0,0)^T, x^{(2)}=(1,1)^T$是否为$KKT$点。



例：给定非线性规划问题$\begin{cases} \min\ f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2 \\ s.t. \quad g_1(x) = -x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ \qquad\quad g_2(x) = x_2 \geq 0 \end{cases}$

求满足$KKT$条件的点。

解：$\nabla f(x) = (2(x_1 - 1), 1)^T, \nabla g_1(x) = (-1, -1)^T, \nabla g_2(x) = (0, 1)^T$

设$x$为满足$KTT$条件的点，则有

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 1 \end{pmatrix} - w_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - w_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_1(-x_1 - x_2 + 2) = 0 \\ w_2 x_2 = 0, \quad -x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ w_1, w_2 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 0, w_1 = 0, w_2 = 1$

即$KKT$点为$(1, 0)^T$.

## 例:求下列非线性规划问题的KKT点.

$$\min\ f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2$$

$$s.t.\quad g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 5 \geq 0$$

$$g_2(x) = -3x_1 - x_2 + 6 \geq 0$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

设$x$为满足$KKT$条件的点，则有

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 10 + 2w_1x_1 + 3w_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 + 2w_1x_2 + w_2 = 0 \\ \boxed{\begin{array}{l} w_1(-x_1^2 - x_2^2 + 5) = 0 \\ w_2(-3x_1 - x_2 + 6) = 0 \end{array}} \\ -x_1^2 - x_2^2 + 5 \geq 0 \\ -3x_1 - x_2 + 6 \geq 0 \\ w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2,$$
$$w_1 = 1, w_2 = 0$$

# 凸规划

$$\begin{cases} \min\ f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0,\ i=1,2,\cdots,m \\ \qquad\quad h_j(x)=0,\ j=1,2,\cdots,l. \end{cases}$$

其中是$f(x)$凸函数，$g_i(x)$是凹函数，$h_j(x)$是线性函数。

定理3.(一阶充分条件)

$$\text{设问题}\begin{cases}\min\ f(x)\\ s.t.\quad g_i(x)\geq 0\ \ i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

中，$f$是凸函数，$g_i(i=1,2,\cdots,m)$是凹函数，$S$为可行域，$\bar{x}\in S$，$I=\{i\mid g_i(\bar{x})=0\}$。$f$和$g_i(i\in I)$在点$\bar{x}$可微，$g_i(i\notin I)$在点$\bar{x}$连续，且在$\bar{x}$处$KKT$条件成立，则$\bar{x}$为整体极小点。

证明：显然$S$为凸集,

$\because \overline{x} \in S, f$为凸函数且在$\overline{x}$可微, $\therefore$对$\forall x \in S$

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + \nabla f(\overline{x})^T (x - \overline{x}) -----(1)$$

又点$\overline{x}$处$KKT$条件成立,所以存在$w_i (i \in I), w_i \geq 0$

使得 $\nabla f(\overline{x}) = \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\overline{x}) --------(2)$

代入(1)得

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\overline{x})^T (x - \overline{x}) ----(3)$$

$\because g_i$是凹函数, $\therefore$当$i \in I$有

$$g_i(x) \leq g_i(\overline{x}) + \nabla g_i(\overline{x})^T (x - \overline{x})$$

$$\Rightarrow \nabla g_i(\overline{x})^T (x - \overline{x}) \geq g_i(x) - g_i(\overline{x}) = g_i(x) \geq 0 --(4)$$

将(4)代入(3),得

$f(x) \geq f(\overline{x}) \Rightarrow \overline{x}$是整体最优解.

# 一般约束问题的一阶最优性条件

$$
(NP)\begin{cases}\min\ f(x) \\ s.t.\quad g_i(x)\ge 0 \quad i=1,2,\cdots,m \\ \qquad\quad h_j(x)=0 \quad j=1,2,\cdots,l\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}\min\ f(x) \\ s.t.\quad g(x)\ge 0 \\ \qquad\quad h(x)=0\end{cases} \qquad g(x)=\begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x)\end{bmatrix}, h(x)=\begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ h_l(x)\end{bmatrix}
$$

**定义：** 设$\bar{x}$为可行点，不等式约束中在$\bar{x}$起作用约束下标集记为$I$，如果向量组

$$\left\{\nabla g_i(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x}) \mid i \in I, j = 1, 2, \cdots, l\right\}$$

线性无关，则称$\bar{x}$为约束$g(x) \geq 0$和$h(x) = 0$的正则点。

**定义：** 称点集$\left\{x = x(t) \mid t_0 \leq t \leq t_1\right\}$为曲面$S = \left\{x \mid h(x) = 0\right\}$上的一条曲线，如果对所有$t \in \left[t_0, t_1\right]$均有$h(x(t)) = 0$.

如果导数$x'(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$存在，则称曲线是可微的.

设$\bar{x}$是曲面$S=\{x|h(x)=0\}$上的一个点。

**定义:** 称点集$\left\{x=x(t)\,|\,t_0\le t\le t_1\right\}$为曲面$S=\left\{x\,|\,h(x)=0\right\}$过点$\bar{x}$的一条曲线，如果对所有$t\in\left[t_0,t_1\right]$均有$h(x(t))=0$，而且存在$t^*\in\left[t_0,t_1\right]$，使得$x(t^*)=\bar{x}.$

曲面$S$上在点$\bar{x}$处所有可微曲线的切向量组成的集合，称为曲面$S$在点$\bar{x}$的切平面，记为$T(\bar{x})$.

## 定义子空间

$$H = \{d \mid \nabla h(x)^T d = 0\}$$

其中$\nabla h(x) = (\nabla h_1(x), \nabla h_2(x), \cdots, \nabla h_l(x))$

**结论：** 若向量$d \in T(\bar{x})$，则有

$$d \in H = \{d \mid \nabla h(\bar{x})^T d = 0\}$$

**证明：** 设$d \in T(\overline{x})$，则有曲线$x(t)$使得$h(x(t)) = 0\left(t_0 \le t \le t_1\right)$，

且存在$t_0 \le t^* \le t_1$使得$x(t^*) = \overline{x}, x'(t^*) = d$

由于

$$\frac{\mathrm{d}h(x(t))}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}h_1(x(t))}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}h_2(x(t))}{\mathrm{d}t} \\ \cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}h_l(x(t))}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla h_1(x(t))^T x'(t) \\ \nabla h_2(x(t))^T x'(t) \\ \vdots \\ \nabla h_l(x(t))^T x'(t) \end{pmatrix}$$

所以 $\nabla h(\overline{x})^T d = 0$

$\Rightarrow \quad d \in H$

定理：设$\bar{x}$是曲面$S=\{x \mid h(x)=0\}$上的一个正则点，则

$$T(\bar{x})=H=\{d \mid \nabla h(\bar{x})^T d=0\}.$$

证明：设$d \in H$,考虑非线性方程组$h(\bar{x}+td+\nabla h(\bar{x})y)=0$

其中$t \in R^1, y \in R^l$.该方程组有解$(y,t)=(0,0)$.

在$t=0$处，$h$关于$y$的$Jacobi$矩阵为$\nabla h(\bar{x})^T \nabla h(\bar{x})$

由隐函数定理，在$t=0$的邻域，存在连续可微函数

$y=y(t)(y(0)=0)$,使$h(\bar{x}+td+\nabla h(\bar{x})y(t))=0$成立

令$x(t)=\bar{x}+td+\nabla h(\bar{x})y(t)$,则$x(t)$为曲面$S$上过$x(0)$的一条

曲线。在点$x(0)=\bar{x}$，切向量为

$$x'(0)=d+\nabla h(\bar{x})y'(0)$$

又 $\nabla h(\bar{x})^T d+\nabla h(\bar{x})^T \nabla h(\bar{x})y'(0)=0$

而$d \in H \Rightarrow \nabla h(\bar{x})^T d=0, \because \bar{x}$是正则点$, \therefore \nabla h(\bar{x})^T \nabla h(\bar{x})$可逆，

$\Rightarrow y'(0)=0 \Rightarrow x'(0)=d \Rightarrow d \in T(\bar{x}).$

定理：设$\bar{x} \in S$，$f(x)$和$g_i(x)(i \in I)$在$\bar{x}$处可微，$g_i(x)(i \notin I)$在$\bar{x}$处连续，$h_j(j=1,2,\cdots,l)$在$\bar{x}$处连续可微，且$\bar{x}$是$S=\{x \mid h(x)=0\}$的正则点。如果$\bar{x}$是问题$(NP)$的局部最优解，则在$\bar{x}$处，有

$$F_0 \cap G_0 \cap H_0 = \varnothing,$$

其中
$$F_0 = \left\{d \mid \nabla f(\bar{x})^T d < 0\right\},$$
$$G_0 = \left\{d \mid \nabla g_i(\bar{x})^T d > 0, i \in I\right\},$$
$$H_0 = \left\{d \mid \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, j = 1,2,\cdots,l\right\}.$$

证明：设存在向量$y \in F_0 \cap G_0 \cap H_0$,则有$\nabla f(\overline{x})^T y < 0$,

$\nabla g_i(\overline{x})^T y > 0, i \in I$和$\nabla h_j(\overline{x})^T y = 0, j = 1,2,\cdots,l$.由定理，

有$y \in T(\overline{x})$,即在曲面$S = \{x \mid h(x) = 0\}$上存在经过点

$\overline{x} = x(0)$的可微曲线$x(t)$,使得$\dfrac{dx(0)}{dt} = y$.

(1)$i \in I$时，有$\dfrac{dg_i(x(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \nabla g_i(\overline{x})^T \dfrac{dx(0)}{dt} = \nabla g_i(\overline{x})^T y > 0$,

因此存在$\delta_1 > 0$,当$t \in [0, \delta_1)$时，$g_i(x(t)) \geq 0$;

(2)$i \notin I$时，由于$g_i(\overline{x}) > 0$且$g_i$在$\overline{x}$连续，因此存在$\delta_2 > 0$,当

$t \in (0, \delta_2)$时，$g_i(x(t)) \geq 0$;

(3)因为$\dfrac{df(x(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \nabla f(\overline{x})^T y < 0$,因此存在$\delta_3 > 0$,当

$t \in [0, \delta_3)$时，有$f(x(t)) < f(\overline{x})$;

取$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$,则当$t \in (0, \delta)$时$x(t)$是可行解，且

$f(x(t)) < f(\overline{x})$，矛盾。

引理：若系统$Ax<0, Bx=0$无解，则系统

$A^T y + B^T z = 0, y \geq 0$，且$y \neq 0$或$z \neq 0$有解.

证明：假设系统$Ax<0, Bx=0$无解，定义

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \middle| d_1 = Ax, d_2 = Bx, x \in R^n \right\}, \quad S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \middle| d_1 < 0, d_2 = 0 \right\}$$

则$S_1, S_2$为非空凸集，且$S_1 \cap S_2 = \varnothing$,由凸集分离定理

存在非零向量$p = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$,使得对$\forall x \in R^n, \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \in clS_2$有

$$y^T Ax + z^T Bx \geq y^T d_1 + z^T d_2 = y^T d_1$$

令$x=0, \because d_1 < 0, \therefore y \geq 0.$

令$d_1 \to 0$，得$y^T Ax + z^T Bx \geq 0.$

取$x = -\left(A^T y + B^T z\right)$,则有$-\left\| A^T y + B^T z \right\|^2 \geq 0$

$\Rightarrow A^T y + B^T z = 0.$

定理1($Fritz\ John$条件) 设$\bar{x}\in S, I=\{i\mid g_i(\bar{x})=0\}$, $f(x), g_i(x)(i\in I)$在$\bar{x}$处可微， $g_i(x)(i\notin I)$在$\bar{x}$处连续， $h_j(j=1,2,\cdots,l)$在$\bar{x}$处连续可微，若 $\bar{x}$是问题($NP$)的局部最优解，则存在 不全为零的数$w_0$, $w_i(i\in I)$和$v_j(j=1,2,\cdots,l)$, 使得

$$\begin{cases} w_0\nabla f(\bar{x})-\sum_{i\in I} w_i\nabla g_i(\bar{x})-\sum_{j=1}^{l} v_j\nabla h_j(\bar{x})=0 \\ w_0,\ w_i\geq 0,\quad i\in I. \end{cases}$$

证明：不妨假设$\nabla h_1(\bar{x}),\cdots,\nabla h_l(\bar{x})$线性无关，

则有　$F_0 \cap G_0 \cap H_0 = \varnothing$

即不等式组　$\begin{cases} \nabla f(\bar{x})^T d < 0 \\ \nabla g_i(\bar{x})^T d > 0, \quad i \in I \\ \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, \quad j = 1,2,\cdots,l \end{cases}$

无解. 令$A$是以$\nabla f(\bar{x})^T$，$-\nabla g_i(\bar{x})^T\left(i \in I\right)$为行组成的矩阵，

$B$是以$-\nabla h_j(\bar{x})^T\left(j = 1,2,\cdots,l\right)$为行组成的矩阵,

则系统$Ad < 0, Bd = 0$无解，由引理，存在非零向量$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$

且$p_1 \geq 0$, 使得　$A^T p_1 + B^T p_2 = 0$

记$p_1$的分量为$w_0, w_i\left(i \in I\right), p_2$的分量为$v_j\left(j = 1,\cdots,l\right)$,则有

$$w_0 \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^{l} v_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$$

$w_0, w_i\left(i \in I\right) \geq 0$,且$w_0, w_i\left(i \in I\right), v_j\left(j = 1,\cdots,l\right)$不全为零.

定理1'(*Fritz John*条件) 设$\bar{x} \in S, I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$,
$f(x), g_i(x)$在$\bar{x}$处可微， $h_j(j = 1,2,\cdots,l)$在$\bar{x}$处连续可微，若$\bar{x}$是问题$(NP)$的局部最优解，则存在不全为零的数$w_0, w_i(i \in I)$和$v_j(j = 1,2,\cdots,l)$,使得

$$\begin{cases} w_0 \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} w_i \nabla g_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^{l} v_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0 \\ w_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,m \\ w_0, \ w_i \geq 0, \quad i = 1,2,\cdots,m. \end{cases}$$

定理2($KKT$必要条件）考虑问题$\begin{cases}\min\ f(x)\\ s.t.\quad g_i(x)\geq 0, i=1,\cdots,m\\ \qquad\quad h_j(x)=0,\ j=1,\cdots,l\end{cases}$

设$\bar{x}$为可行点,$I=\{i\mid g_i(\bar{x})=0\}.f,g_i(i\in I)$在$\bar{x}$处可微，

$g_i(i\notin I)$在$\bar{x}$连续，$h_j(j=1,\cdots,l)$在$\bar{x}$连续可微，向量集

$$\{\nabla g_i(\bar{x}),\ \nabla h_j(\bar{x})\mid i\in I, j=1,\cdots,l\}$$

线性无关，若$\bar{x}$是局部最优解，则存在数$w_i,i\in I$

和$v_j(j=1,\cdots,l)$，使得

$$\nabla f(\bar{x})-\sum_{i\in I}w_i\nabla g_i(\bar{x})-\sum_{j=1}^{l}v_j\nabla h_j(\bar{x})=0.$$

$$w_i\geq 0\quad (i\in I).$$

定理2'($KKT$必要条件）考虑问题$\begin{cases} \min\ f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0, i = 1, \cdots, m \\ \qquad\quad h_j(x) = 0,\ j = 1, \cdots, l \end{cases}$

设$\bar{x}$为可行点,$I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$.$f, g_i$在$\bar{x}$处可微，$h_j(j = 1, \cdots, l)$在$\bar{x}$连续可微，向量集

$$\{\nabla g_i(\bar{x}),\ \nabla h_j(\bar{x}) \mid i \in I, j = 1, \cdots, l\}$$

线性无关，若$\bar{x}$是局部最优解，则存在数$w_i, i \in I$和$v_j(j = 1, \cdots, l)$，使得

$$\nabla f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} w_i \nabla g_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^{l} v_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$$

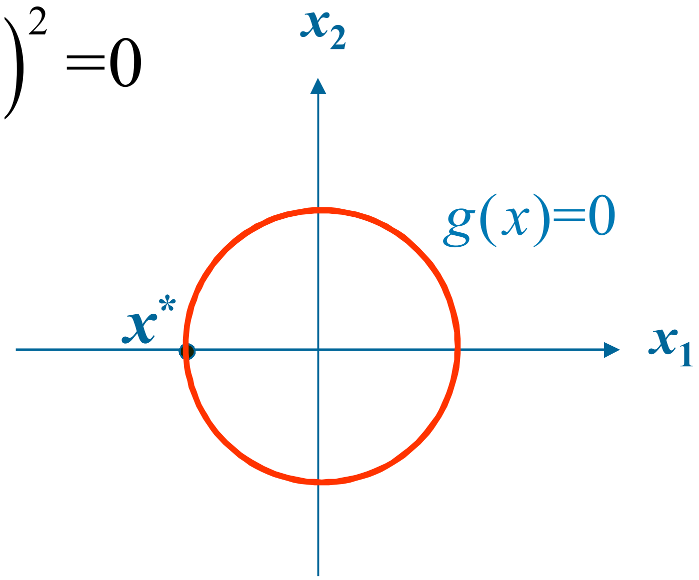
$$w_i g_i(\bar{x}) = 0, i = 1, 2, \cdots, m$$

$$w_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

例：考虑如下约束优化问题：

$$\min\ f(x) = x_1$$

$$s.t.\quad g(x) = \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^2 = 0$$



## 定义广义的Lagrange函数:

$$L(x,w,v)=f(x)-\sum_{i=1}^{m}w_i g_i(x)-\sum_{j=1}^{l}v_j h_j(x)$$

$$=f(x)-w^T g(x)-v^T h(x)$$

其中 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^T$

$$v=(v_1,v_2,\cdots,v_l)^T$$

乘子向量

$$g(x)=(g_1(x),\cdots,g_m(x))^T$$

$$h(x)=(h_1(x),\cdots,h_l(x))^T.$$

定理2'($KKT$必要条件）考虑问题$\begin{cases}\min\ f(x) \\ s.t.\quad g_i(x)\geq 0, i=1,\cdots,m \\ \qquad\quad h_j(x)=0,\ j=1,\cdots,l\end{cases}$

设$\overline{x}$为可行点,$I=\{i\mid g_i(\overline{x})=0\}.f,g_i$在$\overline{x}$处可微，$h_j(j=1,\cdots,l)$在$\overline{x}$连续可微，向量集

$$\{\nabla g_i(\overline{x}),\ \nabla h_j(\overline{x})\mid i\in I, j=1,\cdots,l\}$$

线性无关，若$\overline{x}$是局部最优解，则存在乘子向量$\overline{w}\geq 0,\overline{v}$,使得

$$\nabla_x L(\overline{x},\overline{w},\overline{v})=0$$

$$\overline{w}^T g(\overline{x})=0$$

一般情形的一阶必要条件(**KKT**必要条件)可表示为**:**

$$
\begin{cases}
\nabla_x L(x,w,v)=0 \\
w_i g_i(x)=0,\ i=1,2,\cdots,m \\
g_i(x)\ge 0,\ i=1,2,\cdots,m \\
h_j(x)=0,\ j=1,2,\cdots,l \\
w_i \ge 0,\ i=1,2,\cdots,m
\end{cases}
$$

定理3.(一阶充分条件)

设问题$\begin{cases} \min\ f(x) \\ s.t.\quad g_i(x)\geq 0\quad i=1,2,\cdots,m \\ \qquad\quad h_j(x)=0\quad j=1,2,\cdots,l \end{cases}$

中，$f$是凸函数，$g_i(i=1,2,\cdots,m)$是凹函数，$h_j(j=1,2,\cdots,l)$是线性函数，$S$为可行域，$\overline{x}\in S$，$I=\{i\mid g_i(\overline{x})=0\}$。$f$和$g_i(i\in I)$在点$\overline{x}$可微，$h_j(j=1,2,\cdots,l)$在点$\overline{x}$连续可微，$g_i(i\notin I)$在点$\overline{x}$连续，且在$\overline{x}$处$KKT$条件成立，则$\overline{x}$为整体极小点。

证明：显然$S$为凸集，

$\because \bar{x} \in S$, $f$为凸函数且在$\bar{x}$可微，$\therefore$ 对$\forall x \in S$

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x})$$

而 $\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{l} v_j \nabla h_j(\bar{x})$

$$\therefore f(x) \geq f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \sum_{j=1}^{l} v_j \nabla h_j(\bar{x})^T (x - \bar{x})$$

$\because g_i$是凹函数，$\therefore$ 当$i \in I$有

$$g_i(x) \leq g_i(\bar{x}) + \nabla g_i(\bar{x})^T (x - \bar{x})$$

$$\Rightarrow \nabla g_i(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \geq g_i(x) - g_i(\bar{x}) = g_i(x) \geq 0$$

$\because h_j$为线性函数 $\therefore h_j(x) = h_j(\bar{x}) + \nabla h_j(\bar{x})^T (x - \bar{x})$

$$\Rightarrow \quad \nabla h_j(\bar{x})^T (x - \bar{x}) = 0$$

$f(x) \geq f(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x}$是整体最优解.

推论：问题$\begin{cases}\min cx \\ s.t. \quad Ax \ge b \\ \qquad\quad x \ge 0\end{cases}$,则$x^*$是最优解

$\Leftrightarrow$ 存在$w \in R^m, v \in R^n$,使得

$$\begin{cases} Ax^* \ge b \\ x^* \ge 0 \\ c - w^T A - v^T = 0 \\ w^T(Ax^* - b) = 0 \\ v^T x^* = 0 \\ w, v \ge 0 \end{cases}$$

证明：（充分性）设$x^*$是满足条件的点，则$x^*$是$(L)$的可行解；设$x$是任一可行解，则

$$0=(c^T-A^Tw-r)^T(x^*-x)$$

$$=c(x^*-x)-w^T(Ax^*-b)-r^Tx^*+w^T(Ax-b)+r^Tx$$

$$=c(x^*-x)+w^T(Ax-b)+r^Tx$$

$\because w\geq 0, r\geq 0, \therefore cx^*\leq cx \Rightarrow x^*$是最优解。

推论：对于标准形式的$LP$问题

$$\begin{cases} \min cx \\ s.t. \quad Ax = b \\ \qquad\quad x \geq 0 \end{cases}$$

则$x$是该问题的最优解，当且仅当存在向量$w$，$r$，使得

$$Ax = b, \quad x \geq 0;$$

$$A^T w + r = c^T, \quad r \geq 0;$$

$$r^T x = 0.$$

求解下列线性规划问题：

$$\begin{cases} \min -2x_1 + x_2 \\ s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ \qquad\;\; x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ \qquad\;\; x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min -2x_1 + x_2 \\ s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 - 4 \geq 0 \\ \qquad\;\; -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 6 \geq 0 \\ \qquad\;\; x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

由KKT条件,得

$$\begin{cases} -2-w_1+w_2-w_3=0 & (1) \\ 1-w_1+2w_2-w_4=0 & (2) \\ -w_1+2w_2-w_5=0 & (3) \\ w_1(x_1+x_2+x_3-4)=0 & (4) \\ w_2(-x_1-2x_2-2x_3+6)=0 & (5) \\ w_3x_1=0 \quad w_4x_2=0 \quad w_5x_3=0 & (6) \\ w_i\ge 0, x_i\ge 0 & (7) \\ x_1+x_2+x_3-4\ge 0 & (8) \\ -x_1-2x_2-2x_3+6\ge 0 & (9) \end{cases}$$

得到$KKT$点$(6,0,0)^T$.

$(6,0,0)^T$为整体最优解。

**例:考虑问题**

$$\begin{cases} \min \left(x_1 - \frac{9}{4}\right)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ s.t. \quad x_2 - x_1^2 \ge 0 \\ \qquad\ \ x_1 + x_2 \le 6 \\ \qquad\ \ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(1)写出$KKT$必要条件，并验证在点$x^* = \left(\frac{3}{2} \ \ \frac{9}{4}\right)^T$成立。

（2）证明$x^*$是全局最优解。

$KKT$必要条件为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2\left(x_1 - \dfrac{9}{4}\right) \\ 2(x_2 - 2) \end{pmatrix} - w_1 \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix} - w_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - w_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - w_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ w_1(x_2 - x_1^2) = 0 \\ w_2(-x_1 - x_2 + 6) = 0 \\ w_3 x_1 = 0 \\ w_4 x_2 = 0 \\ x_2 - x_1^2 \geq 0 \\ -x_1 - x_2 + 6 \geq 0 \\ x_1, x_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0 \end{cases}$$

## 用KKT条件解下列问题:

$$\begin{cases} \min\ f=(x_1-1)^2+(x_2-1)^2 \\ s.t.\quad -x_1-x_2+2\ge 0 \\ \qquad\quad x_2-x_1=1 \\ \qquad\quad x_1\ge 0 \\ \qquad\quad x_2\ge 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(x)=\big(2(x_1-1),\,2(x_2-1)\big)^T \quad \nabla g_1(x)=(-1,-1)^T$$

$$\nabla g_2(x)=(1,0)^T \quad \nabla g_3(x)=(0,1)^T \quad \nabla h(x)=(-1,1)^T$$

**KKT条件为:**

$$
\begin{cases}
2(x_1-1)-w_1(-1)-w_2-v(-1)=0 \\
2(x_2-1)-w_1(-1)-w_3-v=0 \\
-x_1-x_2+2\geq 0 \\
x_2-x_1=1 \\
x_1,x_2\geq 0 \\
w_1(-x_1-x_2+2)=0 \\
w_2x_1=0 \\
w_3x_2=0 \\
w_1,w_2,w_3\geq 0
\end{cases}
$$

$x^*=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)^T$为$KKT$点.

因为$f(x)$为凸函数，$g_i(x)$，$h(x)$为线性函数，所以本问题为凸规划问题，

$\Rightarrow x^*$为全局最优解

$$f_{\min}=\frac{1}{2}$$

$$\min\ f(x) = x_2$$

$$s.t.\quad g(x) = x_1^2 + x_2 \ge 0$$

**KKT点应满足方程组**

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - w \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ w(x_1^2 + x_2) = 0 \\ x_1^2 + x_2 \ge 0 \\ w \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} w = 1 \\ x_1 = x_2 = 0 \end{array}$$

$x^* = (0, 0)^T$ 不是极小点。

# 二阶条件

$$(NP)\begin{cases}\min\ f(x) \\ s.t.\quad g_i(x)\ge 0 \quad i=1,2,\cdots,m \\ \qquad\quad h_j(x)=0 \quad j=1,2,\cdots,l\end{cases}$$

$$g(x)=(g_1(x),\cdots,g_m(x))^T$$

$$h(x)=(h_1(x),\cdots,h_l(x))^T$$

## Lagrange 函数

$$L(x,w,v)=f(x)-w^T g(x)-v^T h(x)$$

其中$w\in E^m, v\in R^l$,称为$Lagrange$乘子。

$Lagrange$乘子问题：是否存在$x\in E^n, w\in R^m, v\in R^l$满足方程组：

$$(LM)\begin{cases}\nabla_x L(x,w,v)=\nabla f(x)-\nabla g(x)w-\nabla h(x)v=0\\ \nabla_w L(x,w,v)=-g(x)\le 0\\ \nabla_v L(x,w,v)=h(x)=0\\ w\ge 0\\ w_i g_i(x)=0, i=1,2,\cdots,m.\end{cases}$$

定理($KKT$必要条件）考虑问题$\begin{cases} \min\ f(x) \\ s.t.\quad g_i(x) \geq 0, i = 1, \cdots, m \\ \qquad\ \ h_j(x) = 0,\ j = 1, \cdots, l \end{cases}$

设$\overline{x}$为可行点,$I = \{i \mid g_i(\overline{x}) = 0\}$.$f, g_i$在$\overline{x}$处可微，$h_j(j = 1, \cdots, l)$在$\overline{x}$连续可微，向量集

$$\{\nabla g_i(\overline{x}),\ \nabla h_j(\overline{x}) \mid i \in I, j = 1, \cdots, l\}$$

线性无关，若$\overline{x}$是局部最优解，则存在$\overline{w}, \overline{v}$,使得$(\overline{x}, \overline{w}, \overline{v})$为$(LM)$的解。

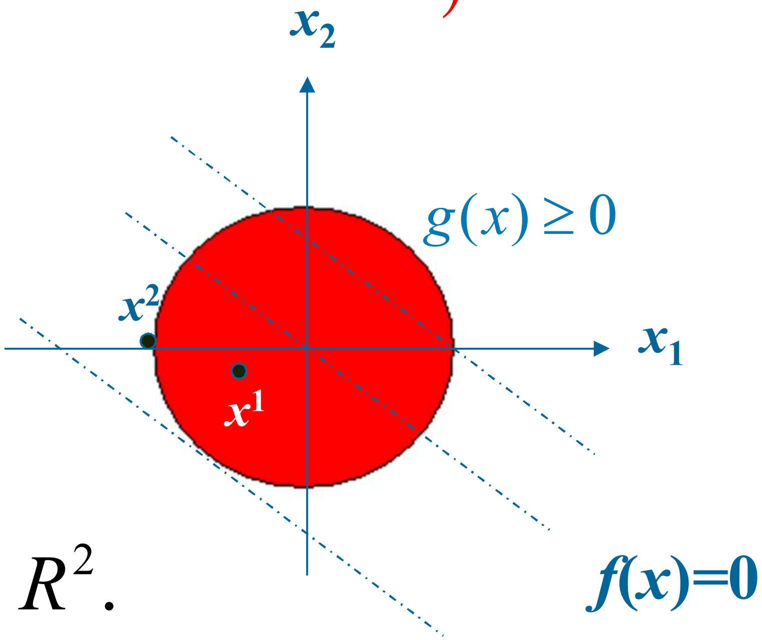
定义：设$S$是$R^n$中一个非空集合，点$\bar{x}\in clS$，集合

$$T=\left\{d \mid x^{(k)}\in S, x^{(k)}\to\bar{x}, \lambda_k>0, d=\lim_{k\to\infty}\lambda_k\left(x^{(k)}-\bar{x}\right)\right\},$$

则称$T$为集合$S$在点$\bar{x}$的切锥(tangent cone)或称为序列化可行方向锥(sequential feasible cone)。

$$\min\ f(x)=x_1+x_2$$

$$s.t.\quad g(x)=1-x_1^2-x_2^2\ge 0$$




对于任意内点$x^1$，切锥$=R^2$.

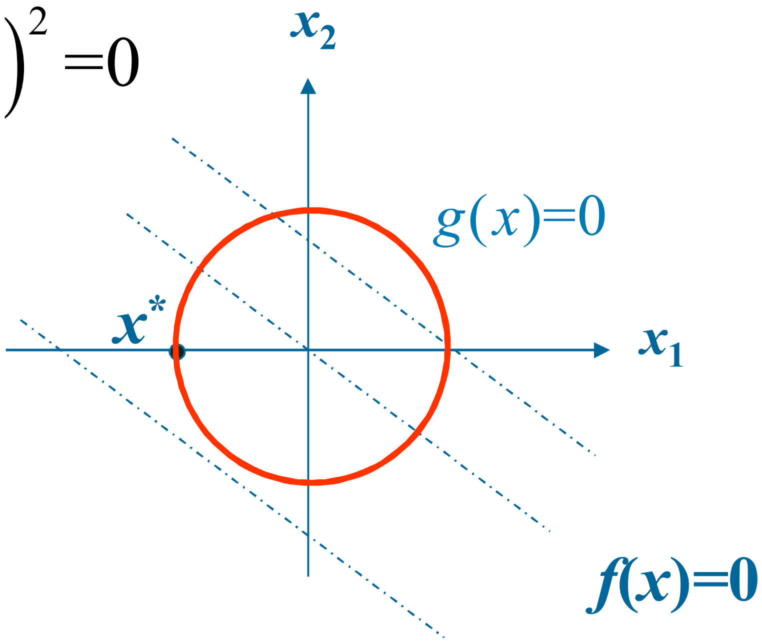
对于边界点$x^2=(-1,0)^T$，切锥

$$D=\{d\in R^2 \mid d_1\ge 0\}.$$

**例：考虑如下约束优化问题：**

$$\min\ f(x)=x_1+x_2$$

$$s.t.\quad g(x)=\left(1-x_1^2-x_2^2\right)^2=0$$




$$在x^*=\left(-1,0\right)^T，可行方向锥=\varnothing.$$

$$在点x^*=(-1,0)^T,切锥D=\{d\in R^2\mid d_1=0\}.$$

命题：假设确定集合$S$的所有约束函数在$x \in S$处连续可微，则有

$$D(x,S) \subseteq SFD(x,S)$$

其中$D(x,S)$为$x$点的可行方向锥，$SFD(x,S)$为$x$点的切锥。

证明：$\forall d \in D(x,S)$,则存在$\delta > 0$,使得当$\lambda \in \left(0，\delta\right)$,有$x+\lambda d \in S$.

令$d^k = d, \lambda_k = \dfrac{2^k}{\delta} > 0, x^k = x + \dfrac{1}{\lambda_k} d^k \in S$,

则$x^k \to x$,且$d^k \to d$,

$\therefore d \in SFD(x,S)$.

定义 $$\bar{S}=\left\{x\,\middle|\,\begin{array}{ll} x\in R^n & \\ g_i(x)=0, & i\in I\text{且}\bar{w}_i>0 \\ g_i(x)\geq 0, & i\in I\text{且}\bar{w}_i=0 \\ h_j(x)=0, & j=1,2,\cdots,l \end{array}\right\}$$

设集合$\bar{S}$在点$\bar{x}$的切锥为$\bar{T}$.

定义 $$\bar{G}=\left\{d\,\middle|\,\begin{array}{l} d\in R^n \\ \nabla g_i(\bar{x})^T d=0, i\in I\text{且}\bar{w}_i>0 \\ \nabla g_i(\bar{x})^T d\geq 0, i\in I\text{且}\bar{w}_i=0 \\ \nabla h_j(\bar{x})^T d=0, j=1,2,\cdots,l \end{array}\right\}.$$

结论：$\bar{G}\supseteq\bar{T}$.

例：给定非线性规划问题：

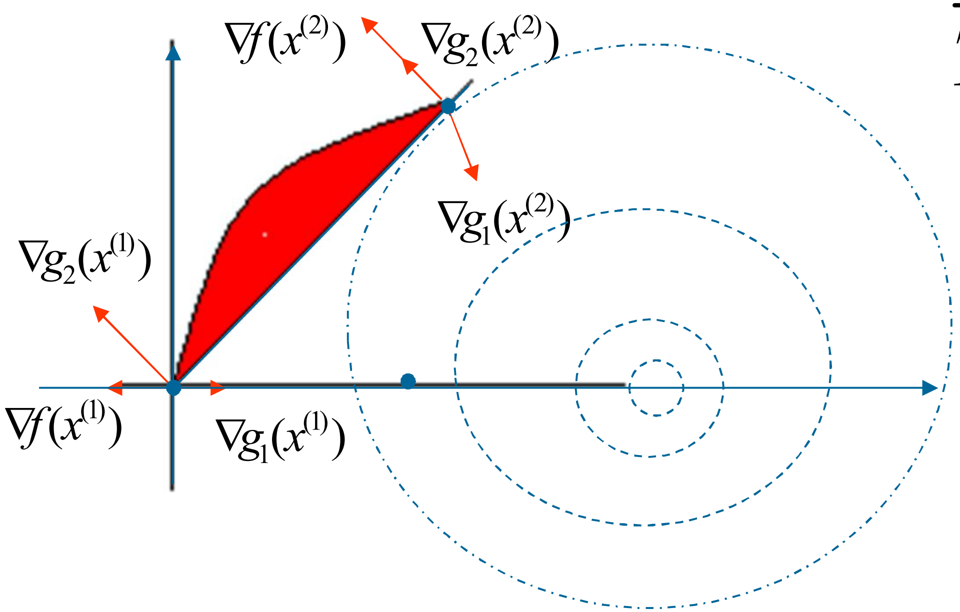
$$\begin{cases} \min\ f(x) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \\ s.t. \quad g_1(x) = x_1 - x_2^2 \geq 0 \\ \qquad\ \ g_2(x) = -x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\bar{S} = \{x \mid x_1 - x_2^2 \geq 0, -x_1 + x_2 = 0\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \middle| 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

$x^{(2)} = (1,1)^T$ 是 $KKT$ 点，且

$$\nabla f\left(x^{(2)}\right) - w_2 \nabla g_2\left(x^{(2)}\right) = 0$$




$$\bar{T} \subseteq \bar{G} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \leq 0 \right\}$$

证明：设$d\in\overline{T}$,则存在$\left\{x^{(k)}\right\}\subseteq\overline{S}$和正数列$\{\lambda_k\}$,

使得$\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k\left(x^{(k)}-\bar{x}\right)=d$

$$g_i\left(x^{(k)}\right)=g_i(\bar{x})+\nabla g_i(\bar{x})^T\left(x^{(k)}-\bar{x}\right)+o\left(\left\|x^{(k)}-\bar{x}\right\|\right),$$

$$h_j\left(x^{(k)}\right)=h_j(\bar{x})+\nabla h_j(\bar{x})^T\left(x^{(k)}-\bar{x}\right)+o\left(\left\|x^{(k)}-\bar{x}\right\|\right).$$

当$i\in I$且$w_i>0$时，有　$\nabla g_i(\bar{x})^T\left(x^{(k)}-\bar{x}\right)+o\left(\left\|x^{(k)}-\bar{x}\right\|\right)=0;$

当$i\in I$且$w_i=0$时，有　$\nabla g_i(\bar{x})^T\left(x^{(k)}-\bar{x}\right)+o\left(\left\|x^{(k)}-\bar{x}\right\|\right)\geq 0;$

当$j=1,2,\cdots,l$时，有　$\nabla h_j(\bar{x})^T\left(x^{(k)}-\bar{x}\right)+o\left(\left\|x^{(k)}-\bar{x}\right\|\right)=0.$

把以上各式两端乘以$\lambda_k$，令$k\to\infty$，得到

$$\begin{aligned}&\nabla g_i(\bar{x})^T d=0,\quad i\in I\text{且}w_i>0\\&\nabla g_i(\bar{x})^T d\geq 0,\quad i\in I\text{且}w_i=0\quad\Rightarrow d\in\overline{G}\Rightarrow\overline{G}\supseteq\overline{T}\\&\nabla h_j(\bar{x})^T d=0,\quad j=1,2,\cdots,l\end{aligned}$$

定理（二阶必要条件）：设$\bar{x}$是$(NP)$的局部最优解，$f$，$g_i(i=1,\cdots,m)$和$h_j(j=1,\cdots,l)$二次连续可微，且存在$\bar{w},\bar{v}$，使$(\bar{x},\bar{w},\bar{v})$为$(LM)$的解, 又假设在$\bar{x}$处，约束规格$\bar{G}=\bar{T}$成立, 则对任意的$d\in\bar{G}$，都有

$$d^T\nabla_x^2 L(\bar{x},\bar{w},\bar{v})d\geq 0,$$

即$\nabla_x^2 L(\bar{x},\bar{w},\bar{v})$在子空间$\bar{G}$上是半正定的.

$$\bar{G}=\left\{d\left|\begin{array}{l} d\in R^n \\ \nabla g_i(\bar{x})^T d=0, i\in I\text{且}\bar{w}_i>0 \\ \nabla g_i(\bar{x})^T d\geq 0, i\in I\text{且}\bar{w}_i=0 \\ \nabla h_j(\bar{x})^T d=0, j=1,2,\cdots,l \end{array}\right.\right\}.$$

证明：设向量$d \in \overline{G} \setminus \{0\}$,则存在$\{x^{(k)}\} \subseteq \overline{S}$和$\{\lambda_k\}$

使得 $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_k (x^{(k)} - \overline{x}) = d$。

$$L(x^{(k)}, \overline{w}, \overline{v}) = L(\overline{x}, \overline{w}, \overline{v}) + \nabla_x L(\overline{x}, \overline{w}, \overline{v})^T (x^{(k)} - \overline{x})$$

$$+ \frac{1}{2}(x^{(k)} - \overline{x})^T \nabla_x^2 L(\overline{x}, \overline{w}, \overline{v})^T (x^{(k)} - \overline{x}) + o(\| x^{(k)} - \overline{x} \|)$$

$\because x^{(k)} \in \overline{S}, \overline{x}$为局部最优解，

$$\therefore f(x^{(k)}) = f(\overline{x})$$

$$+ \frac{1}{2}(x^{(k)} - \overline{x})^T \nabla_x^2 L(\overline{x}, \overline{w}, \overline{v})^T (x^{(k)} - \overline{x}) + o(\| x^{(k)} - \overline{x} \|).$$

$\because \overline{x}$为局部最优解，$\therefore f(x^{(k)}) \geq f(\overline{x})$

$$\Rightarrow \quad d^T \nabla_x^2 L(\overline{x}, \overline{w}, \overline{v})^T d \geq 0.$$

定理（二阶必要条件）：设$\overline{x}$是$(NP)$的局部最优解，$f$，$g_i(i=1,\cdots,m)$和$h_j(j=1,\cdots,l)$二次连续可微，且在$\overline{x}$处，$\{\nabla g_i(\overline{x}), i\in I, \nabla h_j(\overline{x}), j=1,\cdots,l\}$为线性无关组，则存在$\overline{w},\overline{v}$，使$(\overline{x},\overline{w},\overline{v})$为$(LM)$的解且矩阵$\nabla_x^2 L(\overline{x},\overline{w},\overline{v})$在子空间$\overline{G}$上是半正定的，其中

$$\overline{G}=\left\{d \left| \begin{array}{l} \nabla g_i(\overline{x})^T d=0, i\in I\text{且}\overline{w}_i>0 \\ \nabla g_i(\overline{x})^T d\geq 0, i\in I\text{且}\overline{w}_i=0 \\ \nabla h_j(\overline{x})^T d=0, j=1,2,\cdots,l \end{array}\right.\right\}.$$

定理（二阶充分条件）：设$f$，$g_i(i=1,\cdots,m)$和$h_j(j=1,\cdots,l)$是二次连续可微函数，$\overline{x}$为可行解，若存在$\overline{w},\overline{v}$，使$(\overline{x},\overline{w},\overline{v})$为$(LM)$的解且矩阵$\nabla_x^2 L(\overline{x},\overline{w},\overline{v})$在子空间$\overline{G}$上是正定的，则$\overline{x}$是严格局部极小点。

其中
$$\overline{G}=\left\{d\left|\begin{array}{l}\nabla g_i(\overline{x})^T d=0,i\in I\text{且}\overline{w}_i>0\\ \nabla g_i(\overline{x})^T d\geq 0,i\in I\text{且}\overline{w}_i=0\\ \nabla h_j(\overline{x})^T d=0,j=1,2,\cdots,l\end{array}\right.\right\}.$$

证明： 假设 $\bar{x}$ 不是问题的严格局部极小点, 则存在序列

$\{x^{(k)}\}\subset S$, 使得 $x^{(k)}\neq\bar{x}, x^{(k)}\to\bar{x}$, 并且 $f(x^{(k)})\leq f(\bar{x})$, 即

$$f(x^{(k)})-f(\bar{x})=\nabla f(\bar{x})^T(x^{(k)}-\bar{x})+o(\|x^{(k)}-\bar{x}\|)\leq 0.$$

记 $$d^{(k)}=\frac{x^{(k)}-\bar{x}}{\|x^{(k)}-\bar{x}\|},$$

显然, $\forall k\geq 1,\quad \|d^{(k)}\|\equiv 1.$

根据有界序列的性质可知, 存在一个收敛子列 $\{d^{(k_i)}\}\to d\neq 0$

不妨假设 $d^{(k)}\to d$ 则， $d\in\bar{T}(\bar{x},S)$

因为 $\nabla f(\bar{x})^T d^k+o(1)\leq 0$

令 $k\to\infty$

于是有 $d^T\nabla f(\bar{x})\leq 0$

以下证明 $\nabla f(\bar{x})d^T = 0$

将$g_i(x)$在点$\bar{x}$展开，再令$x = x^{(k)}$,得到

$$g_i(x^{(k)}) = g_i(\bar{x}) + \nabla g_i(\bar{x})^T (x^{(k)} - \bar{x}) + o(\| x^{(k)} - \bar{x} \|)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla g_i(\bar{x})^T (x^{(k)} - \bar{x}) + o(\| x^{(k)} - \bar{x} \|) \geq 0 \ (i \in I)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla g_i(\bar{x})^T d \geq 0 \quad (i \in I)$$

同理可证 $\nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, l$

**利用KKT条件, 得到**

$$\nabla f(\bar{x})^T d = \sum_{i \in I} \bar{w}_i \nabla g_i(\bar{x})^T d + \sum_{j=1}^{l} \bar{v}_j \nabla h(\bar{x})^T d \geq 0,$$

**因此,** $\nabla f(\bar{x})^T d = 0.$

由于 $\nabla f(\bar{x})^T d = \sum_{i \in I} \bar{w}_i \nabla g_i(\bar{x})^T d = 0$

$$\therefore \nabla g_i(\bar{x})^T d = 0, \quad i \in I, \bar{w}_i > 0 \qquad \Rightarrow \quad d \in \overline{G}.$$

$\because x^{(k)} \in S$ **由Taylor展开公式, 有**

$$L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) = f(\bar{x}) \geq f(x^{(k)})$$

$$\geq f(x^{(k)}) - \sum_{i \in I} \bar{w}_i g_i(x^{(k)})^T - \sum_{j=1}^{l} \bar{v}_j h_j(x^{(k)})^T = L(x^{(k)}, \bar{w}, \bar{v})$$

而 $L(x^{(k)}, \bar{w}, \bar{v}) = L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) + \nabla_x L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})^T (x^{(k)} - \bar{x})$

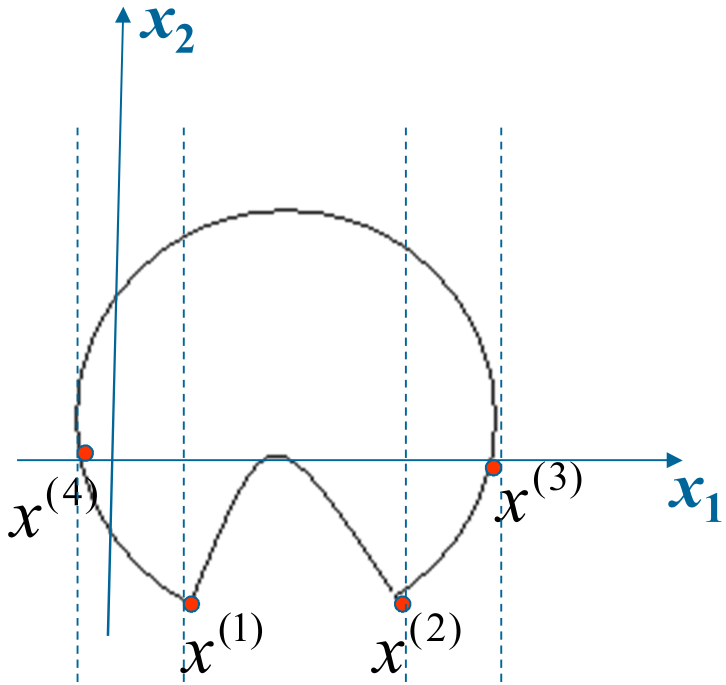
$$+\frac{1}{2}(x^{(k)} - \bar{x})^T \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})(x^{(k)} - \bar{x}) + o(\|(x^{(k)} - \bar{x})\|^2).$$

$$\therefore \frac{1}{2}(x^{(k)} - \bar{x})^T \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})(x^{(k)} - \bar{x}) + o(\|(x^{(k)} - \bar{x})\|^2) \leq 0.$$

$$\therefore \quad d^T \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) d \leq 0.$$

矛盾。

## 例:考虑下列非线性规划问题:




$$\begin{cases} \min x_1 \\ s.t. \quad 3(x_1-3)^2+x_2\ge 0 \\ \qquad (x_1-3)^2+x_2^2-10=0 \end{cases}$$

检验$x^{(1)}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $x^{(2)}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, $x^{(3)}=\begin{pmatrix}3+\sqrt{10}\\0\end{pmatrix}$,

$x^{(4)}=\begin{pmatrix}3-\sqrt{10}\\0\end{pmatrix}$是否为局部最优解。

$$\begin{cases} \min x_1 \\ s.t. \quad 3(x_1-3)^2 + x_2 \geq 0 \\ \qquad (x_1-3)^2 + x_2^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

解：$\nabla f(x) = (1, 0)^T$

$$\nabla g(x) = (6(x_1-3), 1)^T, \nabla h(x) = (2(x_1-3), 2x_2)^T$$

$$L(x, w, v) = f(x) - wg(x) - vh(x)$$

$$\nabla_x L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - w \begin{pmatrix} 6(x_1-3) \\ 1 \end{pmatrix} - v \begin{pmatrix} 2(x_1-3) \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_x^2 L = \begin{pmatrix} -6w-2v & 0 \\ 0 & -2v \end{pmatrix}$$

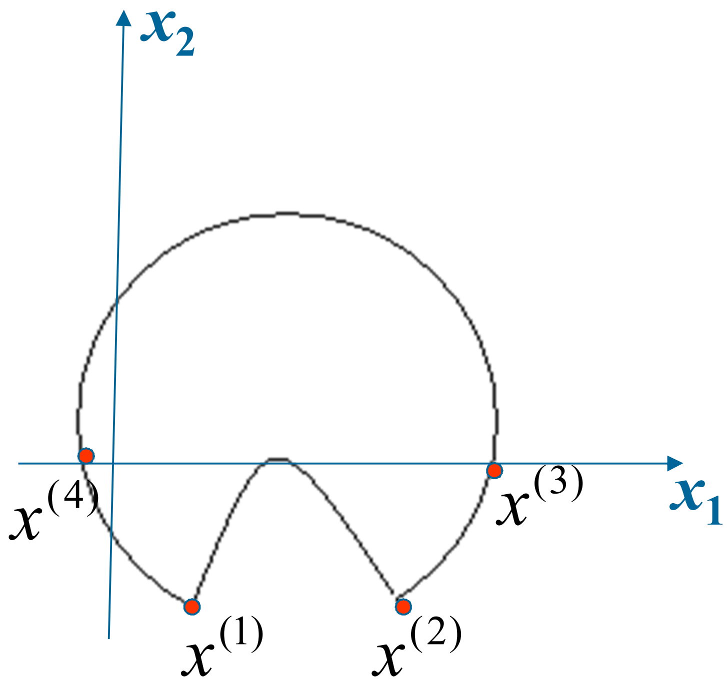
(1) $x^{(1)}=(2,-3)^T$是可行点，且$g(x)$是紧约束，设有

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-w\begin{pmatrix}6(2-3)\\1\end{pmatrix}-v\begin{pmatrix}2(2-3)\\2(-3)\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow v=-\frac{1}{38},\ w=-\frac{3}{19}<0$$

$\therefore x^{(1)}$不是$KKT$点，因此$x^{(1)}$一定不是局部最优解。

$$\begin{cases}\min\ x_1\\ s.t.\quad 3(x_1-3)^2+x_2\geq 0\\ \qquad\quad (x_1-3)^2+x_2^2-10=0\end{cases}$$



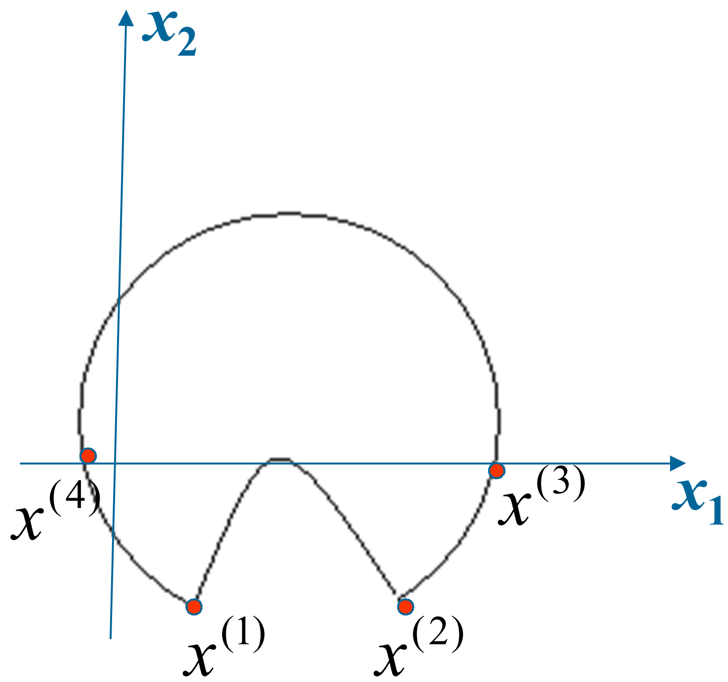
(2) $x^{(2)}=(4,-3)^T$是可行点，且$g(x)$是紧约束，设有

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-w\begin{pmatrix}6(4-3)\\1\end{pmatrix}-v\begin{pmatrix}2(4-3)\\2(-3)\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow v=\frac{1}{38},\ w=\frac{3}{19}\ \therefore x^{(2)}\text{是}KKT\text{点.}$$

$$\nabla_x^2 L\left(x,\frac{3}{19},\frac{1}{38}\right)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{19}\end{pmatrix}$$

但$\overline{G}=\{0\}$，$\therefore x^{(2)}$是局部极小点。

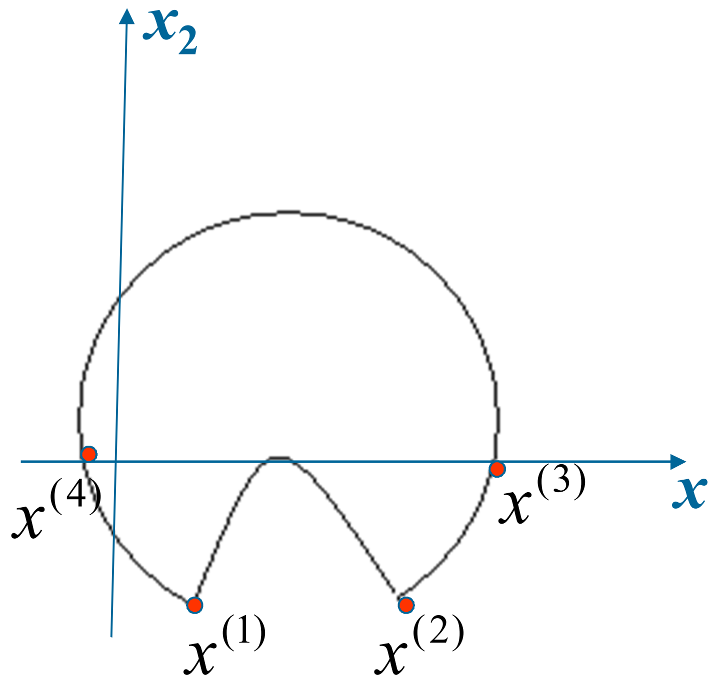


(3) $x^{(3)}=(3+\sqrt{10},0)^T$是可行点，且$g(x)$是不起作用约束，

设有 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-v\begin{pmatrix}2(3+\sqrt{10}-3)\\0\end{pmatrix}=0$

$\Rightarrow v=\dfrac{1}{2\sqrt{10}}\ \therefore x^{(3)}$是$KKT$点.

$$\nabla_x^2 L\left(x,0,\frac{1}{2\sqrt{10}}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{10}} & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}$$



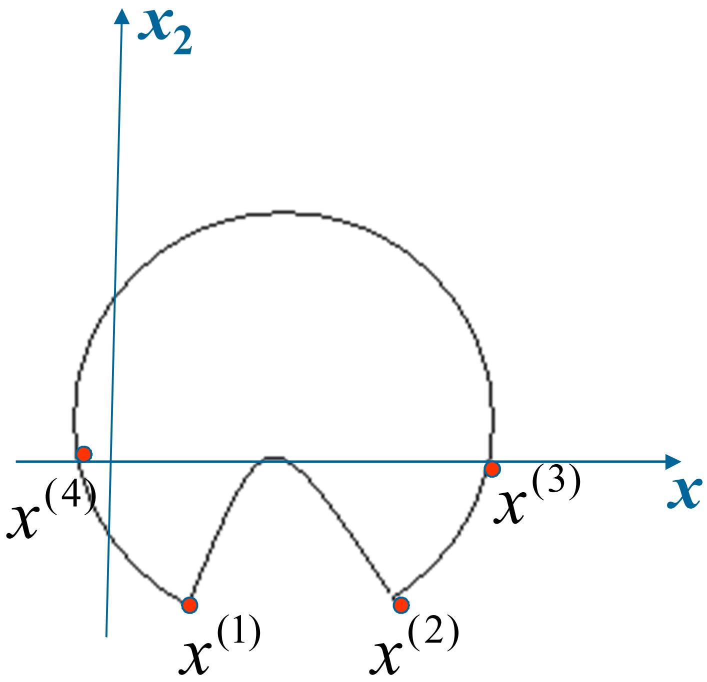

但$\overline{G}=\left\{d=(0,d_2)^T\mid d_2\in R\right\}$， 此时对$d\in\overline{G}$且$d\neq 0$,

$$d^T\nabla_x^2 L\left(x,0,\frac{1}{2\sqrt{10}}\right)d=-\frac{1}{\sqrt{10}}d_2^2<0$$

$\therefore x^{(3)}$不是局部极小点。

(4) $x^{(4)} = (3-\sqrt{10}, 0)^T$ 是可行点，且$g(x)$是不起作用约束，

设有 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - v\begin{pmatrix} 2(3-\sqrt{10}-3) \\ 0 \end{pmatrix} = 0$




$\Rightarrow v = -\dfrac{1}{2\sqrt{10}} \therefore x^{(4)}$是$KKT$点.

$$\nabla_x^2 L\left(x, 0, -\frac{1}{2\sqrt{10}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

是正定矩阵，

$\therefore x^{(4)}$是局部极小点。

## 例:考虑下列非线性规划问题

$$\min\ x_1^2+(x_2-2)^2$$
$$s.t.\quad \beta x_1^2-x_2=0$$

其中$\beta$为某个实数，讨论点$x^{(0)}=(0,0)^T$是否为局部最优解？

解：$L(x,v)=x_1^2+(x_2-2)^2-v(\beta x_1^2-x_2)$

$$\nabla_x L(x,v)=\begin{pmatrix}2x_1-v\cdot 2\beta x_1\\ 2(x_2-2)+v\end{pmatrix},\quad \nabla_x^2 L(x,v)=\begin{pmatrix}2-2v\beta & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

设 $\nabla_x L(x^{(0)},v)=0$, 得$v=4$

$\therefore$ $x^{(0)}$是$KKT$点，且

$$\nabla_x^2 L(x,v)|_{v=4}=\begin{pmatrix}2-8\beta & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

求集合$\overline{G}$的元素$d=(d_1,d_2)^T$，令

$$\nabla h(x^{(0)})^T d=0 \quad \Rightarrow \quad d_2=0$$

$\therefore \quad \overline{G}=\left\{(d_1,0)^T \middle| d_1\in R\right\}$.此时对$d\in\overline{G}\setminus\{0\}$,

$$d^T\nabla_x^2 L(x^{(0)},4)d=(2-8\beta)d_1^2$$

$\therefore$当$2-8\beta>0$，即$\beta<\dfrac{1}{4}$时，$x^{(0)}$是局部最优解。

当$2-8\beta<0$，即$\beta>\dfrac{1}{4}$时,对$\forall d\in\overline{G}\setminus\{0\}$,

$$d^T\nabla_x^2 L(x^{(0)},4)d<0,$$

所以，$x^{(0)}$不是局部最优解。

当$\beta = \dfrac{1}{4}$时，原问题为：

$$\min\ x_1^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$s.t.\quad \frac{1}{4}x_1^2 - x_2 = 0$$

由$\dfrac{1}{4}x_1^2 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_1^2 = 4x_2$

$\therefore$ 原问题变为：$\min\ 4x_2 + (x_2 - 2)^2$.

显然$(0, 0)^T$是驻点，且$f''(x_2) = 2 > 0$,

$\therefore x^{(0)} = (0, 0)^T$是局部极小点。

即当$\beta \le \dfrac{1}{4}$时，$x^{(0)} = (0, 0)^T$是局部极小点；

当$\beta > \dfrac{1}{4}$时，$x^{(0)} = (0, 0)^T$不是局部极小点

# 对偶及鞍点问题

## Lagrange对偶问题

$$\min\ f(x)$$
$$s.t.\quad g_i(x) \geq 0, i = 1, \cdots, m$$
$$h_j(x) = 0, j = 1, \cdots, l \qquad \textbf{(1)}$$
$$x \in D$$

集约束

**定义(1)的对偶问题:**

$$\max\ \theta(w, v)$$
$$s.t.\quad w \geq 0 \qquad \textbf{(2)}$$

其中$\theta(w,v) = \inf\left\{ f(x) - \sum_{i=1}^{m} w_i g_i(x) - \sum_{j=1}^{l} v_j h_j(x) \middle| x \in D \right\}$

若上式不存在有限下界时，令$\theta(w,v) = -\infty$.

$\theta(w,v)$称为$Lagrange$对偶函数。

$$\max \theta(w, v)$$
$$s.t. \quad w \geq 0$$

$$\text{其中}\theta(w,v) = \inf\left\{ f(x) - \sum_{i=1}^{m} w_i g_i(x) - \sum_{j=1}^{l} v_j h_j(x) \middle| x \in D \right\}$$

$$L(x, w, v) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} w_i g_i(x) - \sum_{j=1}^{l} v_j h_j(x)$$

Lagrange函数

对于任意的$x \in D$，$Lagrangr$函数$L(x,w,v)$是$w,v$的线性函数，于是对偶函数$\theta(w,v)$作为线性函数的逐点下确界，必然是一个凹函数，所以，对偶问题是一个凸规划问题。

例：考虑线性规划问题

$$\begin{aligned} &\min cx \\ &s.t. \quad A_1 x \geq b_1 \\ &\qquad\ \ A_2 x = b_2 \\ &\qquad\ \ x \geq 0 \end{aligned}$$

若取集合约束$D=\{x|x\geq 0\}$，则该线性规划问题的Lagrange函数为

$$\begin{aligned} \theta(w,v) &= \inf\left\{cx - w^T(A_1x - b_1) - v^T(A_2x - b_2) \mid x \in D\right\} \\ &= \inf\{(c - w^TA_1 - v^TA_2)x + w^Tb_1 + v^Tb_2 \mid x \in D\} \\ &= \begin{cases} w^Tb_1 + v^Tb_2 & \text{若} c - w^TA_1 - v^TA_2 \geq 0 \\ -\infty & \text{若} c - w^TA_1 - v^TA_2 \ngeq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

线性规划的对偶问题为：

$$\begin{aligned} &\max w^Tb_1 + v^Tb_2 \\ &s.t. \quad w^TA_1 + v^TA_2 \leq c \\ &\qquad\ \ w \geq 0 \end{aligned}$$

**求下列非线性规划问题的对偶问题:**

$$\begin{cases} \min\ x_1^2+x_2^2 \\ s.t. \quad x_1+x_2-4\ge 0 \\ \qquad\quad x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

解1：把变量的非负限制作为集约束，即

$$x\in D=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1\ge 0, x_2\ge 0\right\},$$

则$\theta(w)=\inf\{x_1^2+x_2^2-w(x_1+x_2-4)\mid x\in D\}$.

$$\begin{aligned}\theta(w) &= \inf\left\{x_1^2 + x_2^2 - w(x_1+x_2-4) \mid x \in D\right\} \\ &= \inf\left\{x_1^2 - wx_1 + x_2^2 - wx_2 + 4w \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\} \\ &= \inf\left\{x_1^2 - wx_1 \mid x_1 \geq 0\right\} + \inf\left\{x_2^2 - wx_2 \mid x_2 \geq 0\right\} + 4w\end{aligned}$$

当$w \geq 0$时,

$$\inf\left\{x_1^2 - wx_1 \mid x_1 \geq 0\right\} = \left(\frac{w}{2}\right)^2 - w \times \frac{w}{2} = -\frac{w^2}{4}.$$

$$\inf\left\{x_2^2 - wx_2 \mid x_2 \geq 0\right\} = \left(\frac{w}{2}\right)^2 - w \times \frac{w}{2} = -\frac{w^2}{4}.$$

$$\therefore \theta(w) = -\frac{w^2}{4} - \frac{w^2}{4} + 4w = -\frac{w^2}{2} + 4w.$$

**对偶问题为:**

$$\begin{cases} \max -\dfrac{w^2}{2} + 4w \\ s.t. \quad w \geq 0 \end{cases}$$

求下列非线性规划问题的对偶问题:

$$\begin{cases} \min\ x_1^2+x_2^2 \\ s.t.\quad x_1+x_2-4\geq 0 \\ \qquad\quad x_1,x_2\geq 0 \end{cases}$$

解2: 若取集约束$D=E^n$,则

$$\theta(w)=\inf\left\{x_1^2+x_2^2-w_1(x_1+x_2-4)-w_2x_1-w_3x_2 \mid x\in E^n\right\}.$$

$$\theta(w)=\inf\left\{x_1^2+x_2^2-w_1(x_1+x_2-4)-w_2x_1-w_3x_2 \mid x\in E^n\right\}.$$

$$=\inf\left\{x_1^2-w_1x_1-w_2x_1\right\}+\inf\left\{x_2^2-w_1x_2-w_3x_2\right\}+4w_1$$

当$w_i\geq 0$时，有

$$\theta(w_1,w_2,w_3)=\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)^2-w_1\times\frac{w_1+w_2}{2}-w_2\times\frac{w_1+w_2}{2}$$

$$+\left(\frac{w_1+w_3}{2}\right)^2-w_1\times\frac{w_1+w_3}{2}-w_3\times\frac{w_1+w_3}{2}+4w_1$$

$$=-\frac{(w_1+w_2)^2}{4}-\frac{(w_1+w_3)^2}{4}+4w_1$$

**对偶问题为:**

$$\begin{cases}\max -\dfrac{(w_1+w_2)^2}{4}-\dfrac{(w_1+w_3)^2}{4}+4w_1\\ s.t.\quad w_i\geq 0,\ i=1,2,3.\end{cases}$$

**求下列非线性规划问题的对偶问题:**

$$\begin{cases} \min\ x_1^2 + x_2^2 \\ s.t. \quad x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ \qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解3：若集约束为

$$x \in D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \right\},$$

则 $\theta(w_1, w_2) = \inf\left\{ x_1^2 + x_2^2 - w_1 x_1 - w_2 x_2 \mid x \in D \right\}.$

$$\theta(w_1, w_2) = \inf\left\{x_1^2 + x_2^2 - w_1 x_1 - w_2 x_2 \mid x \in D\right\}$$

令$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - w_1 x_1 - w_2 x_2, g(x) = x_1 + x_2 - 4.$

当$w_1 + w_2 - 8 < 0$时，$f(x)$与$g(x)$相切时达最小

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 - w_1 \\ 2x_2 - w_2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{w_1 + k}{2}, x_2 = \frac{w_2 + k}{2}$$

$\because x_1, x_2$满足$x_1 + x_2 - 4 = 0$，

$$\therefore \text{有} \frac{w_1 + k}{2} + \frac{w_2 + k}{2} - 4 = 0 \quad \Rightarrow k = \frac{8 - (w_1 + w_2)}{2}$$

$$\therefore \quad x_1 = 2 + \frac{w_1 - w_2}{4}, x_2 = 2 + \frac{w_2 - w_1}{4}$$

$$\Rightarrow \theta(w_1, w_2) = 8 - 2w_1 - 2w_2 - \frac{(w_1 - w_2)^2}{8}$$

$$\theta(w_1, w_2) = \inf\left\{x_1^2 + x_2^2 - w_1 x_1 - w_2 x_2 \mid x \in D\right\}$$

令$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - w_1 x_1 - w_2 x_2$

$$= \left(x_1 - \frac{w_1}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{w_2}{2}\right)^2 - \frac{w_1^2 + w_2^2}{4},$$

$g(x) = x_1 + x_2 - 4.$

当$w_1 + w_2 - 8 \geq 0$时，$f(x)$在$x_1 = \dfrac{w_1}{2}, x_2 = \dfrac{w_2}{2}$时达最小

$$\Rightarrow \theta(w_1, w_2) = -\frac{w_1^2}{4} - \frac{w_2^2}{4}.$$

$$\therefore \theta(w_1, w_2) = \begin{cases} 8 - 2w_1 - 2w_2 - \dfrac{(w_1 - w_2)^2}{8} & w_1 + w_2 < 8 \\ -\dfrac{w_1^2}{4} - \dfrac{w_2^2}{4} & w_1 + w_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min\ x_1^2 + x_2^2 \\ s.t. \quad x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ \qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解3：若集约束为

$$x \in D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \right\},$$

则对偶问题为：

$$\max\ 8 - 2w_1 - 2w_2 - \frac{(w_1 - w_2)^2}{8}$$

$$s.t. \quad w_1 + w_2 < 8$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

# 对偶定理

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ s.t.\ & g(x) \geq 0 \\ & h(x) = 0 \\ & x \in D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ & \theta(w, v) \\ s.t.\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

$$g(x) = \left(g_1(x), \cdots, g_m(x)\right)^T$$

$$h(x) = \left(h_1(x), \cdots, h_l(x)\right)^T$$

$$\theta(w, v) = \inf\left\{ f(x) - w^T g(x) - v^T h(x) \mid x \in D \right\}$$

## 定理1(弱对偶定理)

设$\bar{x}$和$(\bar{w},\bar{v})$分别是原问题和对偶问题的可行解，则

$$f(\bar{x}) \geq \theta(\bar{w},\bar{v})。$$

证明：$\because$ $\bar{x}$和$(\bar{w},\bar{v})$是可行解，

$$\therefore \quad g(\bar{x}) \geq 0, h(\bar{x}) = 0, \bar{w} \geq 0$$

$$\begin{aligned}
\therefore \theta(\bar{w},\bar{v}) &= \inf\left\{ f(x) - \bar{w}^T g(x) - \bar{v}^T h(x) \mid x \in D \right\} \\
&\leq f(\bar{x}) - \bar{w}^T g(\bar{x}) - \bar{v}^T h(\bar{x}) \\
&\leq f(\bar{x}).
\end{aligned}$$

**推论1:** 对于原问题和对偶问题，必有

$$\inf\{f(x) \mid g(x) \geq 0, h(x) = 0, x \in D\} \geq \sup\{\theta(w,v) \mid w \geq 0\}.$$

**推论2:** 若$f(\bar{x}) \leq \theta(\bar{w},\bar{v})$，其中$\bar{x}$为原问题的可行解，$\bar{w} \geq 0$，则$\bar{x}$和$(\bar{w},\bar{v})$分别是原问题和对偶问题的最优解。

**推论3:** 若$\inf\{f(x) \mid g(x) \geq 0, h(x) = 0, x \in D\} = -\infty$，则对$\forall w \geq 0$，有$\theta(w,v) = -\infty$。

**推论4:** 如果$\sup\{\theta(w,v) \mid w \geq 0\} = +\infty$，则原问题没有可行解。

$$\inf\{f(x) \mid g(x) \geq 0, h(x) = 0, x \in D\} \underset{记}{=} f_{\min}$$

$$\sup\{\theta(w, v) \mid w \geq 0\} \underset{记}{=} \theta_{\max}$$

**对偶间隙：** $\delta = f_{\min} - \theta_{\max} \geq 0$

**问题：** $\delta = 0$成立的条件.

引理 设D为非空的凸集, $f: D \to R$ 为凸函数, $g_i: D \to R$ 为凹函数, $h(x)$ 为线性函数.

对于下面的两个不等式系统:

**(1)** 存在 $x \in D$, 使得

$$f(x) < 0, \quad g(x) \geq 0, \quad h(x) = 0;$$

**(2)** 存在$(\lambda_0, \lambda^T, \mu^T) \neq 0$,使得$(\lambda_0, \lambda^T) \geq 0$, 并且

$$\lambda_0 f(x) - \lambda^T g(x) - \mu^T h(x) \geq 0 \quad (\forall x \in D).$$

若系统(1)无解, 则系统(2)有解; 若系统(2)有满足 $\lambda_0 > 0$ 的解, 则系统(1)无解.

证明 先证结论的第一部分: (1)无解 $\Rightarrow$ (2)有解.

令集合 $C=\{(p,q^T,r^T)\mid \exists x\in D,\ p>f(x),\ g(x)\ge q,\ h(x)=r\}$.

根据函数的凸(凹)性和凸集的定义, 易证 $C$ 是非空的凸集.

若(1)无解, 则 $(0,0,0)\notin C$. 由凸集分离定理可知, 存在

$(\lambda_0,\lambda^T,\mu^T)\neq 0$, 使得 $\forall(p,q^T,r^T)\in cl(C)$,

$$\lambda_0 p-\lambda^T q-\mu^T r\ge 0.$$

分别令 $p\to+\infty,\ q\to-\infty$

于是有 $\lambda_0\ge 0,\ \lambda\ge 0.$

特别地, 上式对于

$$p=f(x),\ q=g(x),\ r=h(x)(\forall x\in D)$$

也成立, 因此(2)有解.

(2)有解 $\Rightarrow$ (1)无解.

假设(2)有满足 $\lambda_0 > 0$的解, 由于

$$\forall x \in D, \lambda_0 f(x) \geq \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)$$

所以对于任何满足 $g(\bar{x}) \geq 0, h(\bar{x}) = 0$

的点 $\bar{x} \in D$

利用 $\lambda \geq 0$

可知, $\lambda_0 f(\bar{x}) \geq 0$

也就是说, $f(\bar{x}) \geq 0$

因此, 系统(1)无解.

## 强对偶定理:

设$D$为非空开凸集，$f$和$g_i(i=1,\cdots,m)$分别是$E^n$上的凸函数和凹函数，$h_j(j=1,\cdots,l)$是$E^n$上的线性函数，即$h(x)=Ax-b$。

又设存在$\hat{x}\in D$，使得

$$g(\hat{x})>0,\ h(\hat{x})=0,\ 0\in \operatorname{int} H(D)$$

其中$H(D)=\{h(x)\,|\,x\in D\}$，则

$$f_{\min}\overset{def}{=}\inf\{f(x)\,|\,g(x)\ge 0,\ h(x)=0,\ x\in D\}=\sup\{\theta(w,v)\,|\,w\ge 0\}\overset{def}{=}\theta_{\max};$$

而且，若inf为有限值，则存在某个$(\bar{w},\bar{v})$,使得

$$\sup\{\theta(w,v)\,|\,w\ge 0\}$$

在$(\bar{w},\bar{v})$达到，$\bar{w}\ge 0$；如果inf在点$\bar{x}$达到，则$\bar{w}^T g(\bar{x})=0.$

证明：根据弱对偶定理的推论3，不妨假设$f_{\min} > -\infty$.
则，不等式组

$$f(x) - f_{\min} < 0, g(x) \ge 0, h(x) = 0$$

在非空凸集$D$内无解. 由引理，存在$(w_0, w, v) \ne 0$,
$(w_0, w) \ge 0$,使得对$\forall x \in D$,有

$$w_0\left(f(x) - f_{\min}\right) - w^T g(x) - v^T h(x) \ge 0.$$

若$w_0 = 0$，则$w^T g(x) + v^T h(x) \le 0$
由假设，存在$\hat{x} \in D$使得$g(\hat{x}) > 0, h(\hat{x}) = 0 \quad \Rightarrow w = 0$
$\Rightarrow v^T h(x) \le 0 \quad \forall x \in D$
$\because 0 \in \operatorname{int} H(D), \therefore$ 可取$x \in D$和$\rho > 0$,使得$h(x) = \rho v$
$\Rightarrow \quad 0 \ge v^T h(x) = v^T \rho v = \rho \| v \|^2 \quad \Rightarrow v = 0$
$\Rightarrow (w_0, w, v) = 0$，矛盾。所以$w_0 \ne 0$。

令 $\quad \bar{w}=\dfrac{w}{w_0},\quad \bar{v}=\dfrac{v}{w_0}$,则对任意$x\in D$

$$f(x)-\bar{w}^T g(x)-\bar{v}^T h(x)\geq f_{\min}$$

$$\therefore \theta\left(\bar{w},\bar{v}\right)=\inf\{f(x)-\bar{w}^T g(x)-\bar{v}^T h(x)\mid x\in D\}\geq f_{\min},$$

由弱对偶定理的推论2，知$\left(\bar{w},\bar{v}\right)$为对偶问题的最优解，

并且$\theta_{\max}=\theta\left(\bar{w},\bar{v}\right)=f_{\min}$.

若$\exists\bar{x}\in D,\ f(\bar{x})=f_{\min}$,则利用$\bar{w}\geq 0,\ g(\bar{x})\geq 0,\ h(\bar{x})=0$

$$\Rightarrow \quad \bar{w}^T g(\bar{x})=0$$

## 考虑如下约束优化问题

$$
\begin{aligned}
\min\ & f(x) = \frac{1}{x} \\
s.t.\ & g(x) = x - 1 \geq 0 \\
& x \in D = (0, +\infty)
\end{aligned}
$$

该问题没有最优解，但目标函数的下确界$f_{\min} = 0.$

## 该问题的Lagrange函数为

$$
\theta(w) = \inf\left\{ \frac{1}{x} - w(x-1) \mid x \in D \right\} = \begin{cases} -\infty & w > 0 \\ 0 & w = 0 \end{cases}
$$

对偶问题$\max\{\theta(w) \mid w \geq 0\}$的最优解为$\bar{w} = 0,$

最优值$\theta_{\max} = 0 = f_{\min}$。

# 鞍点最优性条件

$$(NP)\begin{cases}\min\ f(x) \\ s.t.\quad g_i(x)\geq 0 \quad i=1,2,\cdots,m \\ \qquad\quad h_j(x)=0 \quad j=1,2,\cdots,l\end{cases}$$

$$g(x)=(g_1(x),\cdots,g_m(x))^T$$

$$h(x)=(h_1(x),\cdots,h_l(x))^T$$

Lagrange
函数

$$L(x,w,v)=f(x)-w^T g(x)-v^T h(x)$$

$$\max\ \theta(w,v)$$

$$s.t.\quad w\geq 0$$

$$\theta(w,v)=\inf\left\{f(x)-w^T g(x)-v^T h(x)\mid x\in E^n\right\}$$

**定义：** 设$L(x,w,v)$为$Lagrange$函数，$\bar{x}\in E^n$，$\bar{w}\in E^m$，$\bar{w}\geq 0$，$\bar{v}\in E^l$，如果对任意$x\in E^n$，$w\in E^m$，$w\geq 0$及$v\in E^l$，都有

$$L(\bar{x},w,v)\leq L(\bar{x},\bar{w},\bar{v})\leq L(x,\bar{w},\bar{v})$$

则称$(\bar{x},\bar{w},\bar{v})$为$L(x,w,v)$的鞍点。

**结论：**

**Lagrange函数的鞍点必是Lagrange函数关于$x$的极小点及关于$(w, v)$ $(w\geq 0)$的极大点.**

$$\begin{cases} \min\ f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ s.t. \quad g_1(x) = -x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ \qquad g_2(x) = x_1 \geq 0 \qquad g_3(x) = x_2 \geq 0 \\ \qquad h(x) = x_2 - x_1 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$L(x, w, v) = f(x) - w_1 g_1(x) - w_2 g_2(x) - w_3 g_3(x) - vh(x)$$

鞍点为： $\bar{x} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)^T, \bar{w} = (0, 0, 0)^T, \bar{v} = 1$

$$L(\bar{x}, w, v) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} w_2 - \frac{3}{2} w_3 \quad L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) = \frac{1}{2}$$

$$L(x, \bar{w}, \bar{v}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - (x_2 - x_1 - 1)$$

## 鞍点定理:

(1)设$(\bar{x},\bar{w},\bar{v})$是原问题的$Lagrange$函数$L(x,w,v)$的鞍点，则$\bar{x}$和$(\bar{w},\bar{v})$分别是原问题和对偶问题的最优解。(2)假设$f$是凸函数，$g_i(x)(i=1,\cdots,m)$是凹函数，$h_j(x)(j=1,\cdots,l)$是线性函数，即$h(x)=Ax-b$，且$A$是行满秩矩阵，又设存在$\hat{x}$，使$g(\hat{x})>0$，$h(\hat{x})=0$，如果$\bar{x}$是原问题的最优解，则存在$(\bar{w},\bar{v})(\bar{w}\geq 0)$，使$(\bar{x},\bar{w},\bar{v})$是$Lagrange$函数的鞍点。

证明：（1）设$\left(\bar{x},\bar{w},\bar{v}\right)$为$Lagrange$函数的鞍点，

则对所有$w\in R^m, w\geq 0, v\in R^l$,有

$$L\left(\bar{x},w,v\right)\leq L\left(\bar{x},\bar{w},\bar{v}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(w-\bar{w}\right)^T g(\bar{x})+\left(v-\bar{v}\right)^T h(\bar{x})\geq 0.$$

若取$w=\bar{w}, v=\bar{v}+e^j$,有$h_j(\bar{x})\geq 0$,

若取$w=\bar{w}, v=\bar{v}-e^j$,有$h_j(\bar{x})\leq 0$

$$\Rightarrow \quad h(\bar{x})=0.$$

若取$w=\bar{w}+e^i$,有$g_i(\bar{x})\geq 0$

$$\Rightarrow \quad g(\bar{x})\geq 0$$

$\therefore \quad \bar{x}$是可行点。

以下证明$\bar{x}$和$(\bar{w},\bar{v})$分别是原问题和对偶问题的最优解

$$\because h(\bar{x})=0,\quad \therefore (w-\bar{w})^T g(\bar{x})\geq 0$$

取$w=0$,有$-\bar{w}^T g(\bar{x})\geq 0.$

$$\because \bar{w}\geq 0,\, g(\bar{x})\geq 0,\quad \therefore\quad \bar{w}^T g(\bar{x})=0$$

由鞍点的定义可知，对任意的$x\in D$，有

$$f(\bar{x})=L(\bar{x},\bar{w},\bar{v})\leq L(x,\bar{w},\bar{v})$$

$$\qquad =f(x)-\bar{w}^T g(x)-\bar{v}^T h(x)$$

$$\Rightarrow\quad f(\bar{x})\leq \theta(\bar{w},\bar{v})$$

根据弱对偶定理的推论2，$\bar{x}$和$(\bar{w},\bar{v})$分别是原问题和对偶问题的最优解。

(2)在假设条件成立时，根据强对偶定理，对原问题的最优解$\bar{x}$，存在$(\bar{w},\bar{v}),\bar{w}\ge 0$，使得

$$f(\bar{x})=\theta(\bar{w},\bar{v}),\quad \bar{w}^T g(\bar{x})=0$$

$\because \theta(w,v)=\inf\{f(x)-w^T g(x)-v^T h(x)\mid x\in E^n\}$

$\therefore$ 对任意的$x\in E^n$，有

$\theta(\bar{w},\bar{v})\le f(x)-\bar{w}^T g(x)-\bar{v}^T h(x)=L(x,\bar{w},\bar{v})$

$\because \bar{x}$为可行解，所以

$L(\bar{x},\bar{w},\bar{v})=f(\bar{x})=\theta(\bar{w},\bar{v})\le L(x,\bar{w},\bar{v})$

$\because L(\bar{x},w,v)=f(\bar{x})-w^T g(\bar{x})-v^T h(\bar{x})$

且$g(\bar{x})\ge 0,w\ge 0,h(\bar{x})=0$

$\therefore L(\bar{x},w,v)\le f(\bar{x})=L(\bar{x},\bar{w},\bar{v})$

$\Rightarrow (\bar{x},\bar{w},\bar{v})$是$Lagrange$函数的鞍点。

例 $\min\ f(x)=x^3$

$s.t.\quad -x^2\geq 0, x\in R$

最优解$\bar{x}=0, f(\bar{x})=0$,相应的$Lagrange$函数

$$L(x,w)=x^3+wx^2.$$

求$\bar{w}\geq 0$,使得对任意$x\in R$，有

$$L(\bar{x},w)\leq L(\bar{x},\bar{w})\leq L(x,\bar{w})$$

$$\Rightarrow \bar{x}^3+w\bar{x}^2\leq \bar{x}^3+\overline{w}\overline{x}^2\leq x^3+\bar{w}x^2$$

$$\Rightarrow\quad x^3+\bar{w}x^2\geq 0\quad \forall x\in R$$

若$\bar{w}=0$，则取$x=-1$，上式不成立；

若$\bar{w}>0$，则取$x=-2\bar{w}$，上式不成立；

$\therefore$不存在$\bar{w}\geq 0$，使$(\bar{x},\bar{w})$为鞍点。

# 鞍点与KKT条件之间的关系

**定理：**

$\min\{f(x) \mid g(x) \geq 0, h(x) = 0\}$中，可行域为$S$，$\bar{x} \in S$满足$KKT$条件，即存在$\bar{w} \geq 0$，$\bar{v}$使

$$\nabla f(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})\bar{w} - \nabla h(\bar{x})\bar{v} = 0,$$

且$f$为凸函数，$g_i(i \in I)$为凹函数，$h_j$为线性函数，则$(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$为$Lagrange$函数$L(x, w, v)$的鞍点；反之，设$f, g_i$，$h_j$可微，若$(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})(\bar{w} \geq 0)$是$Lagrange$函数的鞍点，则$(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$满足$KKT$条件。

# Lagrange乘子的意义

$$
(NP)\begin{cases}\min\ f(x) \\ s.t.\quad g_i(x)\geq 0 \quad i=1,2,\cdots,m \\ \qquad\quad h_j(x)=0 \quad j=1,2,\cdots,l\end{cases}
$$

设(NP)的局部最优解为$x^*$,相应的$Lagrange$乘子为$(w^*,v^*)$, $w^*\geq 0$.

## 对约束的右端项进行扰动

$$\begin{cases} \min\ f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq \varepsilon_i \quad i=1,2,\cdots,m \\ \qquad\quad h_j(x)=\lambda_j \quad j=1,2,\cdots,l \end{cases}$$

扰动问题

令$\varepsilon=\left(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m\right),\lambda=\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_l\right)$

设扰动问题的局部最优解为$x^*(\varepsilon,\lambda)$,相应的*Lagrange*乘子为$\left(w^*(\varepsilon),v^*(\lambda)\right)$，则当$(\varepsilon,\lambda)=(0,0)$时，有$x^*(0,0)=x^*$, $\left(w^*(0),v^*(0)\right)=\left(w^*,v^*\right)$.

## 只有一个等式约束

$$(NP)\begin{cases}\min\ f(x)\\ s.t.\quad h(x)=0\end{cases}$$

设局部最优解为$x^*$,相应的乘子为$v^*$.

$$\text{扰动问题}\begin{cases}\min\ f(x)\\ s.t.\quad h(x)=\lambda\end{cases}$$

设局部最优解为$x^*(\lambda)$,相应的乘子为$v^*(\lambda)$.

$$\frac{d}{d\lambda}f\left(x^*(\lambda)\right)\Big|_{\lambda=0}=\nabla_x f\left(x^*(\lambda)\right)^T\frac{d}{d\lambda}x^*(\lambda)\Big|_{\lambda=0}$$

$$=\nabla_x f\left(x^*\right)^T\left[\frac{d}{d\lambda}x^*(\lambda)\right]_{\lambda=0}.$$

由扰动问题的约束条件，得到

$$h\left(x^*(\lambda)\right)=\lambda$$

$$\therefore 1=\frac{d}{d\lambda}h\left(x^*(\lambda)\right)\Big|_{\lambda=0}=\nabla_x h\left(x^*(\lambda)\right)^T\frac{d}{d\lambda}x^*(\lambda)\Big|_{\lambda=0}$$

$$=\nabla_x h\left(x^*\right)^T\left[\frac{d}{d\lambda}x^*(\lambda)\right]_{\lambda=0}.$$

由**KKT**条件 $\nabla f\left(x^*\right)-v^*\nabla h\left(x^*\right)=0$

得 $$\frac{d}{d\lambda}f\left(x^*(\lambda)\right)\Big|_{\lambda=0}=\nabla_x f\left(x^*\right)^T\left[\frac{d}{d\lambda}x^*(\lambda)\right]_{\lambda=0}$$

$$=v^*\nabla_x h\left(x^*\right)^T\left[\frac{d}{d\lambda}x^*(\lambda)\right]_{\lambda=0}=v^*.$$

## 只有一个不等式约束

$$(NP)\begin{cases}\min\ f(x) \\ s.t.\quad g(x)\ge 0\end{cases}$$

设局部最优解为$x^*$,相应的乘子为$w^*$.

扰动问题 $\begin{cases}\min\ f(x) \\ s.t.\quad g(x)\ge \varepsilon\end{cases}$

设局部最优解为$x^*(\varepsilon)$,相应的乘子为$w^*(\varepsilon)$.

并假设$x^*(0)=x^*, w^*(0)=w^*$.

## 分两种情况讨论

(1) $g\left(x^*\right)=0$,即$g(x)\geq 0$在$x^*$处是起作用约束.

当$|\varepsilon|$很小时，可以假设有$g\left(x^*(\varepsilon)\right)=\varepsilon$,

即$g(x)$在$x^*(\varepsilon)$处为起作用约束，所以有

$$\frac{d}{d\varepsilon}f\left(x^*(\varepsilon)\right)\Big|_{\varepsilon=0}=w^*.$$

(2) $g(x^*) > 0$,即$g(x) \geq 0$在$x^*$处是不起作用约束.

此时，$x^*$是无约束问题$\min f(x)$的局部最优解，因此当$|\varepsilon|$很小时，$x^*$也是扰动问题的局部最优解，所以有

$$\frac{d}{d\varepsilon} f\left(x^*(\varepsilon)\right)\Big|_{\varepsilon=0} = 0 = w^*.$$

$$
(NP)\begin{cases}\min\ f(x) \\ s.t.\quad g_i(x)\geq 0 \quad i=1,2,\cdots,m \\ \qquad\ \ h_j(x)=0 \quad j=1,2,\cdots,l\end{cases}
$$

定理：设$f(x),g_i(x),h_j(x)$具有连续的二阶偏导数，$x^*$是$(NP)$的局部最优解，$(w^*,v^*)$是相应的$Lagrange$乘子向量.假设$x^*(\lambda,\varepsilon)$是扰动问题的局部最优解，$(w^*(\lambda),v^*(\varepsilon))$是相应的乘子向量，则有

$$
\nabla_\lambda f\left(x^*(\lambda)\right)\big|_{\lambda=0}=w^*
$$

$$
\nabla_\varepsilon f\left(x^*(\varepsilon)\right)\big|_{\varepsilon=0}=v^*.
$$

例：某企业预算以2千元作为广告费，根据以往的经验，若以$x_1$千元作广播广告，$x_2$千元作报纸广告，销售金额为

$$-2x_1^2-10x_2^2-8x_1x_2+18x_1+34x_2\,(\text{千元})$$

试问：

(1) 如何分配2千元广告费？

(2) 广告费预算作微小改变的影响如何？

解：最优化问题为

$$\min\ 2x_1^2 + 10x_2^2 + 8x_1x_2 - 18x_1 - 34x_2$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & x_1 + x_2 - 2 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

相应的$KKT$条件为

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 - 18 - w_1 - v = 0 \\ 20x_2 + 8x_1 - 34 - w_2 - v = 0 \\ w_1x_1 = 0, \quad w_2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2 = 0 \\ x_1, x_2, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} KKT\text{点为} x^* = (1,1)^T \\ w_1^* = w_2^* = 0 \\ v = -6 \end{array}}$$

## 广告费作微小改动，考虑扰动问题

$$\min f(x) = 2x_1^2 + 10x_2^2 + 8x_1x_2 - 18x_1 - 34x_2$$

$$s.t.\quad x_1 + x_2 - 2 = \varepsilon$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

有 $$\left.\frac{df\left(x^*(\varepsilon)\right)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = v^* = -6$$

当$\varepsilon$增加时，$f\left(x^*(\varepsilon)\right)$下降，即$-f\left(x^*(\varepsilon)\right)$上升，即当广告费增加后，销售金额也随着增加，而且销售金额的增加大约是广告费的6倍，可见适当增加广告费的预算是有利的。