5.3-4

明显不是均匀随机排列。

此算法是一个循环的排列, 就是先生成一个数, 然后每个下标加这个数, 然后如果下标超了, 就把这个数塞到前面。因为随机生成的是 1-n 之间的 n 个数，而 n 又是数组的元素个数, 所以可以明显看出，它只能生成 n 种排列，每种排列的概率是$\frac{1}{n}$，而均匀随机重排有 n!种排列，剩下的 n!-n 种没法生成，所以不是均匀随机排列。

举个例子，一个数组是[1, 2, 3, 4]，那么这个算法只能生成 4 种排列，分别是[4, 1, 2, 3], [3, 4, 1, 2], [2, 3, 4, 1], [1, 2, 3, 4]，再往下就没有意义了，因为生成的排列总会跟这 4 个里面的相同。但是，4 个数的排列，一共有 4！ = 24 种，剩下的 24-4 = 20 种，这个算法没法生成，所以肯定不是均匀随机重排。

为什么会这样呢？一句话，没改变元素之间的相对顺序。

5.3-5

$$令 m = n^3$$

$$则全排列个数为\ m^n$$

$$其中不重复的有 P(m,n) = m * (m-1) * \ldots * (m-n+1)$$

$$\therefore 运用古典概率学思想，所有元素都唯一的概率为 P(m,n)/m^n$$

$$下证此概率 \geq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\frac{P(m,n)}{m^n} = \frac{m * (m-1) * \ldots * (m-n+1)}{m^n} \geq \frac{(m-n) * (m-n) * \ldots * (m-n)}{m^n} = \frac{(m-n)^n}{m^n}$$
$$= \left(\frac{m-n}{m}\right)^n = \left(\frac{n^3-n}{n^3}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$将上式最后一项用二项式定理展开，得\ 1 - \frac{1}{n} + \cdots + \left(-\frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$从式子结构，易知当系数扩大 n 时，项中的分母扩大 n^2，\therefore 偶数项 - 奇数项 \geq 0$$

$$\therefore \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\therefore 命题得证$$