1

首先来看$x^{(2)}$. $x^{(2)}$不满足$-x_1^2+x_2\ge 0$的约束，所以不是可行解，自然不是最优解

将函数化为标准型，得

$$\min\left(x_1-\frac{9}{4}\right)^2+(x_2-2)^2$$
$$s.t.-x_1^2+x_2\ge 0$$
$$-x_1-x_2+6\ge 0$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

如果不是 KKT 点，则一定不会是最优解，所以我们先来求此系统的 KKT 点

$$\nabla f(x)=(2\left(x_1-\frac{9}{4}\right),2(x_2-2))$$
$$\nabla g_1(x)=(-2x_1,1)$$
$$\nabla g_2(x)=(-1,-1)$$
$$\nabla g_3(x)=(1,0)$$
$$\nabla g_4(x)=(0,1)$$

$$\therefore\begin{cases}2x_1-\frac{9}{2}+2w_1x_1+w_2-w_3=0\\ 2x_2-4-w_1+w_2-w_4=0\\ w_1(-x_1^2+x_2)=0\\ w_2(-x_1-x_2+6)=0\\ w_3x_1=0\\ w_4x_2=0\\ -x_1^2+x_2\ge 0\\ -x_1-x_2+6\ge 0\\ x_1,x_2\ge 0,w\ge 0\end{cases}$$

$$解得\ x=\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right),w=(\frac{1}{2},0,0,0)$$

$\because x^{(3)}$*不是KKT点，所以肯定不是最优解*

对$x^{(1)}$*来说，满足KKT的一阶充分条件，因此是整体最优解*

2

等效模型为$\min x_1^2+x_2^2$

$$s.t.\,x_1+x_2\ge 4$$
$$2x_1+x_2\ge 5$$

直接求解 KKT 点，有

$$\nabla \mathrm{f(x)} = (2\mathrm{x}_1, 2\mathrm{x}_2)$$
$$\nabla \mathrm{g}_1(x) = (1,1)$$
$$\nabla \mathrm{g}_2(x) = (2,1)$$
$$\begin{cases} 2x_1 - w_1 - 2w_2 = 0 \\ 2x_2 - w_1 - w_2 = 0 \\ w_1(x_1 + x_2 - 4) = 0 \\ w_2(2x_1 + x_2 - 5) = 0 \\ x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5 \geq 0 \\ w \geq 0 \end{cases}$$

解得 $\mathrm{x} = (2,2), \mathrm{w} = (4,0)$

$\because$ 此点满足 KKT 一阶充分条件，所以是全局最优解， $\therefore$ 最小距离为 $2\sqrt{2}$

3

将最大化问题先转化为标准型，即

$$\min -14\mathrm{x}_1 + x_1^2 - 6x_2 + x_2^2 - 7$$
$$\mathrm{s.t.} -\mathrm{x}_1 - x_2 + 2 \geq 0$$
$$-\mathrm{x}_1 - 2x_2 + 3 \geq 0$$

老套路，求 KKT 点

$$\nabla \mathrm{f(x)} = (-14 + 2\mathrm{x}_1, -6 + 2\mathrm{x}_2)$$
$$\nabla \mathrm{g}_1(x) = (-1,-1)$$
$$\nabla \mathrm{g}_2(x) = (-1,-2)$$
$$\begin{cases} -14 + 2x_1 + w_1 + w_2 = 0 \\ -6 + 2x_2 + w_1 + 2w_2 = 0 \\ w_1(-x_1 - x_2 + 2) = 0 \\ w_2(-x_1 - 2x_2 + 3) = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3 \geq 0 \\ w \geq 0 \end{cases}$$

解得 $\mathrm{x} = (3,-1), \mathrm{w} = (8,0)$

$\because$ 此点满足 KKT 一阶条件， $\therefore$ 是全局最优解， $\therefore \max f(x) = 33$