最优化方法

陆　玫

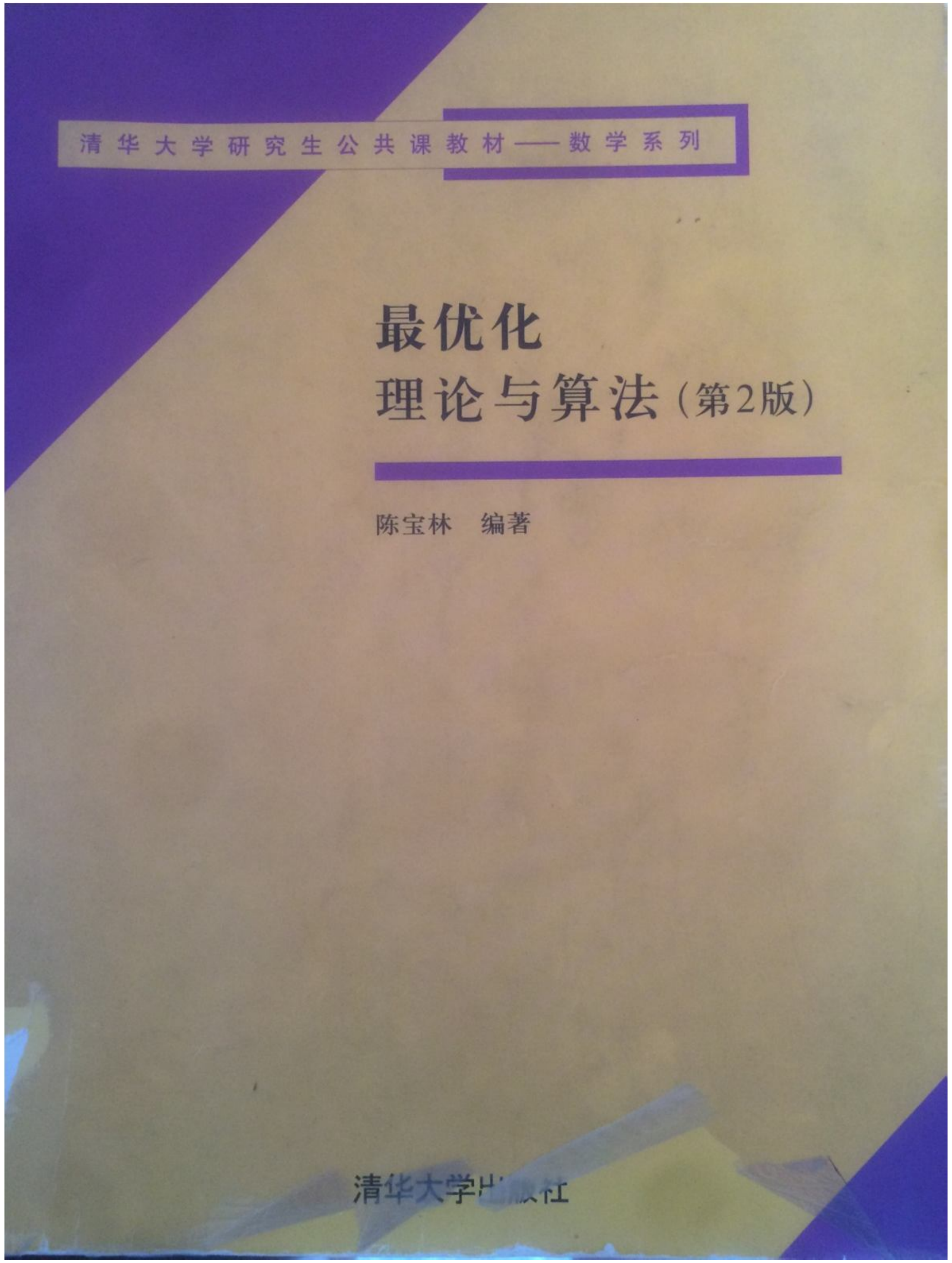
lumei@tsinghua.edu.cn

Tel：62794756

内容：

- 1. 线性规划
  2. 整数规划
  3. 非线性规划

教材



参考书

- 《数学规划》黄红选，韩继业编著
- 《运筹学》＜运筹学＞教材编写组编著
- **Linear and Nonlinear Programming, David G. Luenberger and Yinyu Ye**

作业要求与答疑安排

- 请使用作业纸，写清名字与学号并将作业扫描（或者拍照）后在网络学堂上提交。
- 每周四晚上12点之前提交作业。
- 答疑时间：每周一下午2：30--3：30
- 答疑地点：理科楼A414
- 通过邮箱(lumei@tsinghua.edu.cn)答疑
- 总成绩=平时成绩(20%)+期末考试成绩(80%)

- 助教：

  刘可 (liuke17@mails.tsinghua.edu.cn)

  方春秋(fcq15@mails.tsinghua.edu.cn)

  栾雨(luany18@mails.tsinghua.edu.cn)

  齐宁(qn18@mails.tsinghua.edu.cn)

  叶廷青(yetq18@mails.tsinghua.edu.cn)

生产计划的编制

产品 / 资源	A	B	C	企业现有资源
钢材(吨/只)	3	4	2	600
木材（立方米/只）	2	1	2	400
人工（千小时/只）	1	3	3	300
机床(台/只)	1	4	4	200
收益（千元/只）	2	4	3	

问：企业应如何安排生产，能使总收益最大？

2、数学模型

- 决策目标：A、B、C 产品各生产多少台使企业总收益最大?

- 决策变量：设 x_1, x_2, x_3为生产A, B, C三种产品的数量。
- 目标函数： $\max \ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$
- 约束条件：

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\le 600 \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 400 \\
x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\le 300 \\
x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\le 200
\end{aligned}
$$

- 非负条件： $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

$$
\begin{cases}
\max \quad 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
s.t. \quad 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 600 \\
\qquad\quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 400 \\
\qquad\quad x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 300 \\
\qquad\quad x_1 + 4x_2 + 4x_3 \le 200 \\
\qquad\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{cases}
$$

运输问题

如某建材公司有三个水泥厂 A_1，A_2，A_3 ，四个经销商 B_1，B_2，B_3，B_4 其产量、销量、运费（元/吨）见表2．5。

表 2.5 建材公司的数据

产地＼销售地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量（吨）
A_1	8	7	3	2	2000
A_2	4	7	5	1	10000
A_3	2	4	9	6	4000
销量（吨）	3000	2000	4000	5000	

如何制定调运方案，使总的运费最小?

数学模型----线性规划问题

$$\min f = 8x_{11} + 7x_{12} + 3x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + 7x_{22}$$
$$+5x_{23} + x_{24} + 2x_{31} + 4x_{32} + 9x_{33} + 6x_{34}$$

$$s.t.\quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 2000$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 10000$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 4000$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 3000$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \ge 2000$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \ge 4000$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \ge 5000$$
$$x_{ij} \ge 0, i = 1,\ 2,\ 3;\ \ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

由生产基地 $A_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$

运到销售地 $B_j\ (j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

的货运量为 x_{ij}

问题的解决方案

其解为 $x=(0,0,2000,0,1000,0,2000,5000,2000,2000,0,0)^T$，$\min f=37000$ 元。最佳运输方案见：表2．6

表 2.6　最佳运输方案

销售地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量（吨）
A_1	0	0	2000	0	2000
A_2	1000	0	2000	5000	10000
A_3	2000	2000	0	0	4000
销量（吨）	3000	2000	4000	5000	

合理下料问题

现有一批长度一定的原材料钢管，由于生产的需要，要求截出不同规格的钢管若干。

试问应如何下料，既能满足生产的需要，又使得使用的原材料钢管数量最少（即废材最少）？

具体问题：料长7.4m，要求截成2.9m，2.lm，1.5m的钢管分别为1000根，2000根，1000根。如何截取，才使得总用料最省?

Modeling

把所有可能的下料方式、按照各种下料方式从料长7．4m的原料上得到的不同规格钢管的根数、残料长度,以及需要量列于表2．8中。

表 2.8

下料方式 / 钢管规格（m）	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	需要量(根)
2.9	2	1	1	1	0	0	0	0	1000
2.1	0	0	2	1	2	1	3	0	2000
1.5	1	3	0	1	2	3	0	4	1000
残料长度（m）	0.1	0	0.3	0.9	0.2	0.8	1.1	1.4	

问题转化为确定每种下料方式各用多少根7．4m的原料。

数学模型----整数线性规划问题

设 $x_1, x_2, \cdots, x_8$ 分别为按照 $B_1, B_2, \dots, B_8$ 方式下料的原料根数,

则 $\min f = x_1 + x_2 + \cdots + x_8$

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 && \geq 1000 \\
& 2x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + 3x_7 && \geq 2000 \\
& x_1 + 3x_2 \qquad x_4 + 2x_5 + 3x_6 \qquad + 4x_8 && \geq 1000 \\
& x_j \geq 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)\text{且为整数}
\end{aligned}
$$

其解为 $x = (0, 200, 800, 0, 200, 0, 0, 0)^T$, $\min f = 1200$ （根）

最佳下料方案为：方式 $B_2 : 200$ 根，方式 $B_3 : 800$ 根，方式 $B_5 : 200$ 根。

人力资源安排问题

某商场是个中型的百货商场，现在需要对营业员的工作时间作出安排，营业员每周工作五天，休息两天，并要求休息的两天是连续的，问题归结为：如何安排营业员的作息时间，既能满足工作需要，又使配备的营业员人数最少？

1、有关数据

对营业员的需求进行统计分析，营业员每天的需求人数如下表所示：

时　间	所需营业员人数
星期日	28 人
星期一	15 人
星期二	24 人
星期三	25 人
星期四	19 人
星期五	31 人
星期六	28 人

2、模型

决策变量：设x_j为第j天开始休息的人数$(j=1,2,\cdots,7)$

目标函数： $\min\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$

约束条件：

$$
\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \ge 28\\
&x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \ge 15\\
&x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 \ge 24\\
&x_4+x_5+x_6+x_7+x_1 \ge 25\\
&x_5+x_6+x_7+x_1+x_2 \ge 19\\
&x_6+x_7+x_1+x_2+x_3 \ge 31\\
&x_7+x_1+x_2+x_3+x_4 \ge 28\\
&x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 \ge 0,\text{整数}
\end{aligned}
$$

❖ 例（挑选球员问题）某篮球教练要从8名业余队员中挑选3名队员参加专业球队，使平均身高达到最高。队员的号码、身高及所擅长的位置如下。要求：中锋1人，后卫1人，前锋1人，但1号、3号与6号队员中至少保留1人给业余队。

号码	身高（米）	位置	挑选变量
1	1.92	中锋	x_1
2	1.91	中锋	x_2
3	1.90	前锋	x_3
4	1.86	前锋	x_4
5	1.85	前锋	x_5
6	1.83	后卫	x_6
7	1.80	后卫	x_7
8	1.79	后卫	x_8

$$
\begin{aligned}
\max\ & 1.92x_1 + 1.91x_2 + 1.90x_3 + 1.86x_4 \\
& + 1.85x_5 + 1.83x_6 + 1.80x_7 + 1.79x_8 \\
s.t.\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 3 \\
& x_1 + x_2 = 1 \\
& x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\
& x_6 + x_7 + x_8 = 1 \\
& x_1 + x_3 + x_6 \le 2 \\
& x_i = 0 \text{ 或 } 1 \quad i = 1, 2, \cdots, 8
\end{aligned}
$$

- (连续投资问题)某投资公司拟制定今后5年的投资计划，初步考虑下面的4个投资计划项目。
- 项目1：从第1年到第4年每年年初需要投资，于次年年末收回成本，并可获利润15%;
- 项目2：第3年年初需要投资，到第5年年末可以收回成本，并获得利润25%，但为保证足够的资金流动，规定该项目的投资金额上限为不超过总金额的40%;
- 项目3：第2年年初需要投资，到第5年年末可以收回成本，并获利润40%，但公司规定该项目的最大投资金额不超过总金额的30%;
- 项目4：5年内每年年初可以购买公债，于当年年末可以归还本金，并获利息6%。
- 公司现有投资金额100万元，该公司如何制定这些项目每年的投资计划，使公司到第5年年末能够获得最大利润？

x_{ij} : 表示第i年年初第j个项目的投资额

$$\max\ 1.15x_{41} + 1.25x_{32} + 1.40x_{23} + 1.06x_{54}$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad & x_{11} + x_{14} = 1000000 \\
& x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1.06x_{14} \\
& x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1.15x_{11} + 1.06x_{24} \\
& x_{41} + x_{44} = 1.15x_{21} + 1.06x_{34} \\
& x_{54} = 1.15x_{31} + 1.06x_{44} \\
& x_{32} \le 400000 \\
& x_{23} \le 300000 \\
& x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4} \ge 0, \quad i = 1,2,3,4,5
\end{aligned}$$

- 例（选址问题）设有n个市场，第j个市场的位置为(a_j,b_j)，对某种货物的需要量为q_j, $j=1,\ldots,n$,现计划建立m个仓库，第i个仓库的容量为c_i,$i=1,\ldots,m$,试确定仓库的位置，使各仓库到各市场的运输量与路程乘积之和最小.
- 解：设第i个仓库的位置为(x_i,y_i)，运输量为w_{ij}.

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} w_{ij}\sqrt{(x_i-a_j)^2+(y_i-b_j)^2} \\ s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \le c_i \quad i=1,2,\cdots,m \\ \qquad \sum_{i=1}^{m} w_{ij} = q_j \quad j=1,2,\cdots,n \\ \qquad w_{ij} \ge 0 \quad i=1,2,\cdots,m \; j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

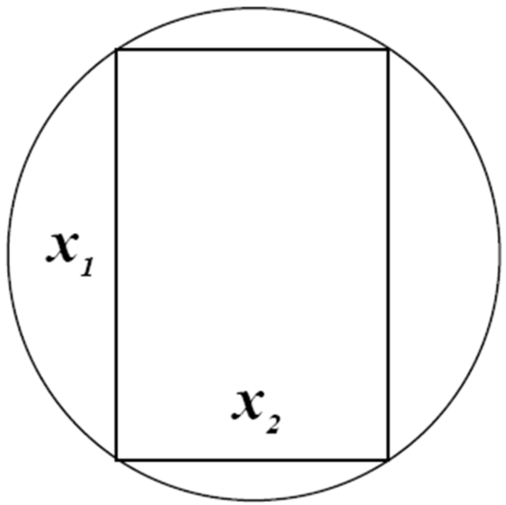
- 例（数据拟合问题）在实验数据处理或统计资料分析中常遇到如下问题：设两个变量x和y，已知存在函数关系，但其解析表达式或者是未知的、或者虽然为已知的但过于复杂。设已取得一组数据，
- $(x_i, y_i),\quad i=1,2,\ldots,m$
- 根据这组数据导出函数$y=f(x)$的一个简单而近似的解析表达式。
- 取一个简单的函数序列$g_0(x), g_1(x),\ldots,g_n(x)$

$$\min \sum_{i=1}^{m}\left[y_i-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j g_j\left(x_i\right)\right]^2$$

例：把圆形木材加工成矩形横截面的木梁，要求木梁高度不超过H，横截面的惯性矩(高度^2 ×宽度)不小于W，而且高度介于宽度与4倍宽度之间，问如何确定木梁尺寸可使木梁成本最小。

设矩形横截面的高度为x_1，宽度为x_2

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \pi\left(\frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2\right) \\
s.t. \quad & x_1 \le H \\
& x_1^2 x_2 \ge W \\
& x_2 \le x_1 \le 4x_2 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



总结

最优化问题的共同特征：

- 每一个问题变量都用一组决策变量（$x_1, x_2, \ldots, x_n$）表示某一方案，这组决策变量的值代表一个具体方案。

- 存在一定的约束条件，这些约束条件可以用一组线性（或非线性）等式或线性（或非线性）不等式来表示。

- 目标函数用决策变量的线性（或非线性）函数来表示。按问题的不同，要求目标函数实现最大化和最小化。

基本概念

- 可行点（可行解）：在线性规划和非线性规划中，满足约束条件的点.
- 可行集或可行域**S**：全体可行点组成的集合.
- 无约束问题：如果一个问题的可行集是整个空间.

- 对于一个规划问题，下面三种情况必占其一：
- **(1)** $S=\Phi$，则称该问题无解或不可行；
- (2) $S\neq\Phi$，但目标函数在S上无界，则称该问题无界；
- (3) $S\neq\Phi$且目标函数有有限的最优值，则称该问题有最优解.

- 定义1： 设$f(x)$为目标函数，S为可行域，$x^0 \in S$，若对$\forall x \in S$, 有$f(x) \geqslant f(x^0)$, 则x^0称为极小化问题$\min f(x)$， $x \in S$的（全局）最优解．

- 定义2：设$f(x)$为目标函数，S为可行域，若存在x^0的ε邻域

- $$N_\varepsilon(x^0) = \{x \mid \| x - x^0 \| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

- 使得对$\forall x \in S \cap N_\varepsilon(x^0)$，有$f(x) \geqslant f(x^0)$, 则$x^0$称为极小化问题$\min f(x)$， $x \in S$的局部最优解．

预备知识

线性相关与线性无关：

设V为向量空间，$v^1, v^2, \cdots, v^k \in V$，若存在不全为零的数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$使得

$$\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \cdots + \lambda_k v^k = 0$$

则称$v^1, v^2, \cdots, v^k$为线性相关的向量组，否则称为线性无关的向量组。

范数

若函数$\|\cdot\|$：$\Re^n \to \Re$满足下面条件：

（1）正定型：$\forall x \in \Re^n, \|x\| \geq 0$，并且$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

（2）三角不等式：$\forall x, y \in \Re^n, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

(3) 齐次性：$\forall \alpha \in \Re, \forall x \in \Re^n, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

则称$\|\cdot\|$为$\Re^n$上的范数.

常用范数：

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

序列的极限

- 定义：设$\{x^{(k)}\}$是R^n中的一个向量序列，$\bar{x} \in R^n$,如果对任给的$\varepsilon>0$存在正整数K_ε，使得当$k>K_\varepsilon$是就有 $\left\|x^{(k)} - \bar{x}\right\| < \varepsilon$,则称序列收敛到 $\bar{x}$ 或称序列以 $\bar{x}$为极限，记作 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = \bar{x}$.
- 结论：序列若存在极限，则任何子序列有相同的极限，即序列极限是唯一的。
- 定义：设$\{x^{(k)}\}$是R^n中的一个向量序列，如果存在一个子序列 $\left\{x^{(k_j)}\right\}$ ，使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k_j)} = \hat{x}$，则称 $\hat{x}$ 是序列$\{x^{(k)}\}$的一个聚点。

- 定义：设$\{x^{(k)}\}$是R^n中的一个向量序列， 如果对任给定的ε>0，总存在正整数K_ε，使得当m, $l>K_\varepsilon$是就有$\left\|x^{(m)}-x^{(k)}\right\|<\varepsilon$，则称序列$\{x^{(k)}\}$为Cauchy序列。

- 定理：设 $\left\{x^{(j)}\right\}\subset R^n$ 为Cauchy序列，则 $\left\{x^{(j)}\right\}$ 的聚点必为极限点。

集合

x^0的$\varepsilon-$邻域：$N_\varepsilon(x^0)=\{x \mid \| x-x^0 \|<\varepsilon, \varepsilon>0\}$

内点： 设$x^0 \in S \subset \Re^n$，若存在$\varepsilon>0$，使得$N_\varepsilon(x^0) \subset S$，

则称x^0为S的一个内点。

补集： 集合S的补集定义为$S^C=\{x \mid x \notin S, x \in \Re^n\}$

开集： 若对$\forall x \in S, x$为内点，则称S为开集。

闭集： 若集合S的补集S^C为开集，则称S为闭集。

有界集 ：若存在正数$M>0$，使得$\forall x \in S, \| x \| \leq M$成立，

则称S为有界集。

紧集： 有界闭集称为紧集.

性质：

（1）集合$S \subset \Re^n$是闭集，当且仅当对任意的无穷序列$\{x^k\} \subset S$，若$x^k \to x^*$，则$x^* \in S$。

（2）集合$S \subset \Re^n$是紧集当且仅当对任意的无穷序列$\{x^k\} \subset S$，必存在收敛于S中点的子序列$\{x^{k_i}\}$.

函数的展开

梯度：$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T$

Hesse矩阵：

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Taylor展开

定理：

设函数$f:\Re^n \to \Re$连续可微，向量$p \in \Re^n$，则

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + o(\| p \|)。$$

若函数f是二阶连续可微，则

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x) p + o(\| p \|^2).$$

二次型的正定性

定义： 对实二次型$f(X)=X^TAX$，若$\forall X\neq 0$，都有$f(X)=X^TAX>0$成立，则称$f(X)$为正定二次型，A为正定矩阵。

定理： 对于n阶实对称矩阵A，下列命题等价：

（1）X^TAX是正定二次型（或A是正定矩阵）；

（2）A的n个顺序主子式都大于零；

（3）A的n个特征值都大于零；

（4）存在可逆矩阵P，使得$A=P^TP$.

二次型的半正定性

定义： 对实二次型$f(X)=X^TAX$，若$\forall X\neq 0$，都有$f(X)=X^TAX\geq 0$成立，且存在$X\neq 0$使得$f(X)=X^TAX=0$，则称$f(X)$为半正定二次型，A为半正定矩阵。

定理： 对于n阶实对称矩阵A，下列命题等价：

（1）X^TAX是半正定二次型（或A是半正定矩阵）；

（2）A的所有主子式（行号与列号取成相同的子式）都大于等于零，而且至少有一个等于零；

（3）A的n个特征值都大于等于零，而且至少有一个等于零。

凸集(convex set)

- 定义：设x,y为欧式空间E^n中相异的两个点，则点集
- $P=\{\lambda x+(1-\lambda)y|\lambda\in R\}$
- 称为通过x和y的直线。
- 定义：设$S\subseteq E^n$, 若对$\forall x^{(1)}, x^{(2)}\in S$及$\forall\lambda\in[0,1]$, 都有
- $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\in S$
- 则称S为凸集。
- 设$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}\in S$, 称
- $\lambda_1 x^{(1)}+\lambda_2 x^{(2)}+\ldots+\lambda_k x^{(k)}$
- (其中$\lambda_i\geq 0$, $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1$)为$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$的凸组合.

- $H=\{x|p^{T}x=a\}$ ——————超平面
- $H^{-}=\{x|p^{T}x\leqslant a\}$ ——————（闭）半空间
- $L=\{x\,|\,x=x^{(0)}+\lambda d,\ \lambda\geqslant 0\}$ ————射线

凸集的性质

- 设S_1和S_2为E^n中的两个凸集，β是实数，则
- (1) $\beta S_1=\{\beta x|x\in S_1\}$为凸集。
- (2) $S_1\cap S_2$为凸集。
- (3) $S_1+S_2=\{x^{(1)}+x^{(2)}|x^{(1)}\in S_1，x^{(2)}\in S_2\}$为凸集。
- (4) $S_1-S_2=\{x^{(1)}-x^{(2)}|x^{(1)}\in S_1，x^{(2)}\in S_2\}$为凸集。

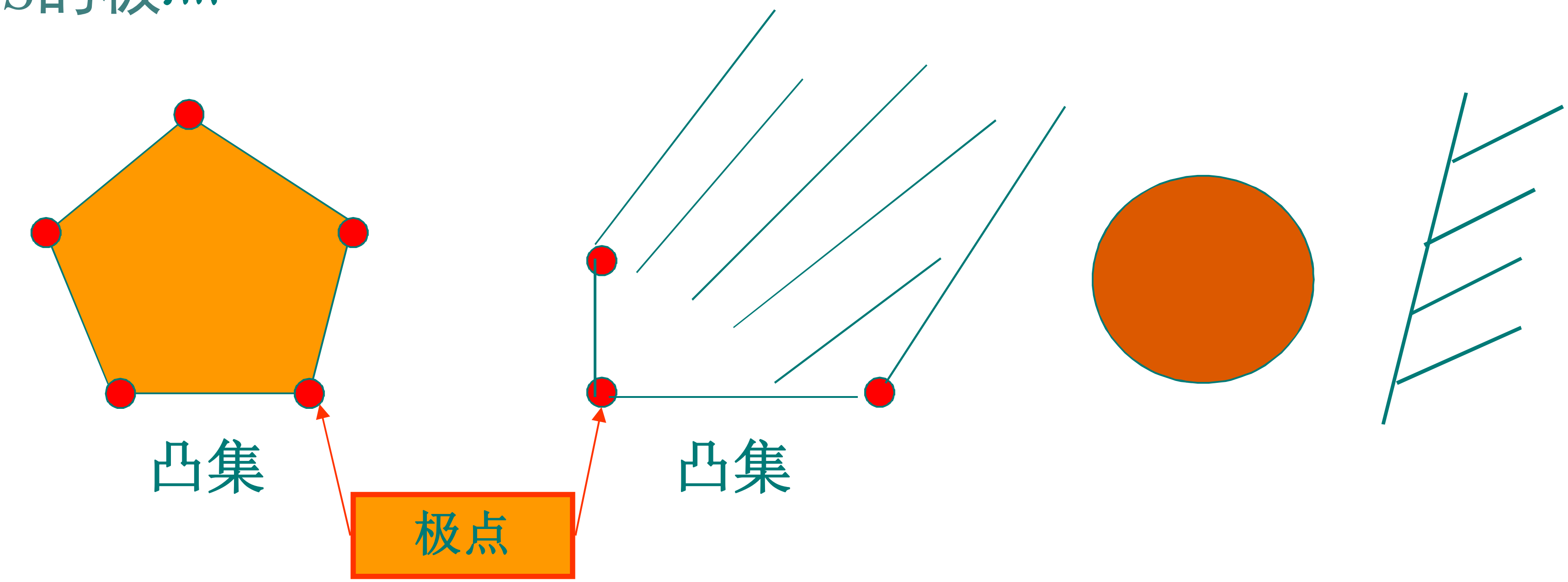
凸锥和多面体

定义: 设有集合$C \subset E^n$，若对C中每一点x，及任意的$\lambda \geq 0$，都有$\lambda x \in C$，则称C为锥；若C为凸集，则称C为凸锥。

定义： 有限个闭半空间的交$\{x \mid Ax \leq b\}$称为多面体。

极点(extreme point)

定义：设S是非空凸集，$x \in S$，若由$x = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$，其中$\lambda \in (0,1)$, $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$，必推出$x = x^{(1)} = x^{(2)}$，则称x是S的极点.



极方向(extreme direction)

定义:设S为E^n中的闭凸集，$d \in E^n, d \neq 0$，如果对$\forall x \in S$，有

$$\{x + \lambda d \mid \lambda \geq 0\} \subset S$$

则称向量d为S的方向。设$d^{(1)}, d^{(2)}$为S的方向，若对任意的$\lambda > 0$，有$d^{(1)} \neq \lambda d^{(2)}$，则称$d^{(1)}$与$d^{(2)}$是两个不同的方向。若$S$的方向$d$不能表示为该集合的两个不同方向的正的线性组合，则称d为S的极方向。

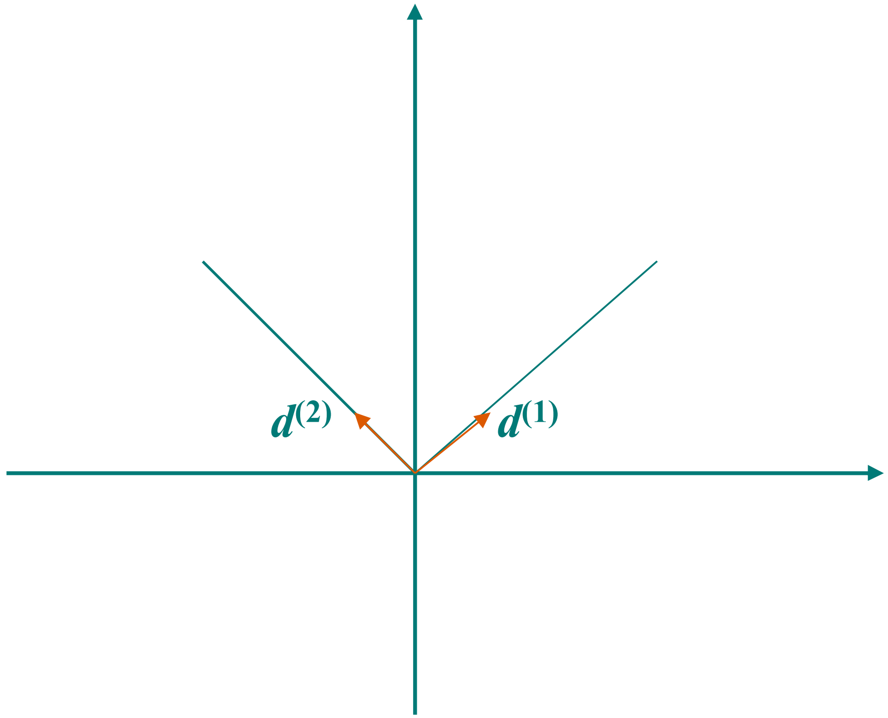
$$S = \{(x_1, x_2)^T \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

向量$d \geq 0, d \neq 0$是S的方向

例：

设$S=\{(x_1,x_2)^T \mid x_2 \geq |x_1|\}$, $d^{(1)}=(1,1)^T$, $d^{(2)}=(-1,1)^T$,

则$d^{(1)}, d^{(2)}$是S的极方向。



例：设$S=\{(x_1,x_2)^T \mid x_2 \geq |x_1|\}$, $d^{(1)}=(1,1)^T$, $d^{(2)}=(-1,1)^T$,

则$d^{(1)}, d^{(2)}$是S的极方向。

对$\forall x \in S, \forall \lambda \geq 0$, 有

$$x+\lambda d^{(1)}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+\lambda \\ x_2+\lambda \end{pmatrix},$$

$\because x \in S, \quad \therefore x_2 \geq |x_1|,$

而 $x_2+\lambda \geq |x_1|+\lambda \geq |x_1+\lambda|$

$\therefore \quad \left\{x+\lambda d^{(1)} \mid \lambda \geq 0\right\} \subset S$

$\Rightarrow \quad d^{(1)}$是$S$的方向。

设$d^{(1)}=\lambda_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$, 其中$\lambda_1$，$\lambda_2>0$, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$是$S$的方向,

则有 $\begin{cases}1=\lambda_1 x_1+\lambda_2 y_1\\1=\lambda_1 x_2+\lambda_2 y_2\end{cases}\Rightarrow \lambda_1 x_1+\lambda_2 y_1=\lambda_1 x_2+\lambda_2 y_2$

$$\Rightarrow \quad x_1=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(y_2-y_1)+x_2$$

$\because \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$是$S$的方向, $\therefore x_2\geq|x_1|,\ y_2\geq|y_1|,\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\neq 0,\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\neq 0$

$$\Rightarrow x_2\geq|x_1|=\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(y_2-y_1)+x_2\right|\Rightarrow y_2\leq y_1$$

$$\because y_2\geq|y_1|,\therefore y_2=y_1\Rightarrow x_2=x_1\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\frac{x_1}{y_1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

所以，$d^{(1)}$是S的极方向。

定理： 设$S=\{x\mid Ax=b,\ x\geq 0\}\neq\varnothing$, d是非零向量，则d是S的方向$\Leftrightarrow d\geq 0$，且$Ad=0$.

证明： “$\Leftarrow$” $\forall x\in S,\ \lambda\geq 0$，有$x+\lambda d\geq 0$，且

$$A(x+\lambda d)=Ax+\lambda Ad=b$$

$\therefore\ x+\lambda d\in S$,即$d$是$S$的方向。

“$\Rightarrow$” 设d是S的方向，则由$x\in S$,得

$x+\lambda d\in S$, 其中$\lambda>0$

$$\therefore\ A(x+\lambda d)=b$$

由 $Ax=b,\ \lambda>0$,得$Ad=0$.

又对$\forall\lambda>0,\ x+\lambda d\geq 0,\ \therefore\ d\geq 0$.

多面集的表示定理

- 定理：设$S=\{x|Ax=b, x\geq 0\}$为非空多面集，则有
- （1）极点集非空，且存在有限个极点$x^{(1)},\cdots,x^{(k)}$.
- （2）极方向集合为空集的充要条件是S有界；若S无界，则存在有限个极方向 $d^{(1)},d^{(2)},\cdots,d^{(l)}$.
- （3） $x\in S$的充要条件是

$$x=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j x^{(j)}+\sum_{j=1}^{l}\mu_j d^{(j)}$$

其中$\lambda_j\geq 0,\ j=1,2,\cdots,k,\ \sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1$

$$\mu_j\geq 0,\ j=1,2,\cdots,l.$$