Farkas 定理中说明 S={z|z=Ay, y≥0}是闭集

设 $A_{m\times n}$，$e_1,e_2,\dots,e_n$ 是 R^n 的自然基，令 $f_j = Ae_j, 1\le j\le n$，则 $S=\{z\,|\,z=Ay=y_1f_1+y_2f_2+\cdots+y_nf_n, y_i\ge 0\}$。

以下对 ***n*** 归纳。

***n*=1** 时，显然成立。

假设对 ***n*≥1**，结论成立，考虑

$$S=\{z\,|\,z=Ay=y_1f_1+y_2f_2+\cdots+y_{n+1}f_{n+1}, y_i\ge 0\}$$

若 $f_1,f_2,\dots,f_{n+1}$ 线性无关，则序列 $\{z_k = Ay^{(k)}\}$ 收敛当且仅当对所有的 **1≤*j*≤*n*+1** 序列 $\{y_j^{(k)}\}$ 收敛，所以 ***S*** 的闭集。

假设 $f_1,f_2,\dots,f_{n+1}$ 线性相关，则存在不全为零的数（且其中至少有一个为正数）$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n+1}$ 使得 $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i f_i = 0$。

对任意的 $z\in S=\{z\,|\,z=Ay=\sum_{i=1}^{n+1} y_i f_i, y_i\ge 0\}$，令

$$t(y)=\min_{\substack{1\le j\le n+1\\ \alpha_j>0}}\frac{y_j}{\alpha_j}=\frac{y_{i(y)}}{\alpha_{i(y)}}\ge 0$$

则 $y_{i(y)}-t(y)\alpha_{i(y)}=0$，且

$$z=\sum_{i=1}^{n+1}y_i f_i=\sum_{i=1}^{n+1}(y_i-t(y)\alpha_i)f_i$$
$$=\sum_{\substack{1\le i\le n+1\\ i\ne i(y)}}(y_i-t(y)\alpha_i)f_i$$

其中 $y_j-t(y)\alpha_j\ge 0$ （**1≤*j*≤*n*+1**）。

对任意的 **1≤*j*≤*n*+1**，令

$$S_i=\left\{z\mid z=Ay=\sum_{\substack{1\le j\le n+1\\ j\ne i}}y_j f_j, y_i\ge 0\right\}$$

则 $S=\bigcup_{i=1}^{n+1}S_i$，由归纳假设，S_i 是闭集，所以 ***S*** 是闭集。