1.

原问题的对偶问题为

$$\max\ \ w_1 + 2w_2$$
$$s.t.\ w_1 + w_2 \le 4$$
$$-w_1 + 2w_2 \le 3$$
$$w_1 - 3w_2 \le 1$$
$$w_1, w_2, w_3 \ge 0$$
$$\because w^* = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right) 在第三个约束成立严格不等式$$
$$\therefore x_3 = 0$$
$$\because w^* 的两个分量都大于 0，\ \therefore 原问题的两个约束在最优解处成立等式$$
$$\therefore x1 - x2 + x3 = 1$$
$$x1 + 2x2 - 3x3 = 2$$
$$将 x_3 = 0\ 代入，\ 得 x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, 最优解 f^* = \frac{19}{3}$$

2.

原问题的对偶问题为

$$\max\ \ b_1 w_1 + w_2$$
$$w_1 + w_2 \le 5$$
$$-w_1 + w_2 \le 0$$
$$6w_1 + 2w_2 \le 21$$
$$w_1, w_2, w_3 \ge 0$$

利用互补松弛定理（这个定理太强了，原来 b 不知道是多少，对偶用一下就能求出来）

$$\because x_1, x_3 >= 0$$
$$\therefore w_1 + w_2 = 5$$
$$6w_1 + 2w_2 = 21$$
$$\therefore w_1 = \frac{11}{4}, w_2 = \frac{9}{4}, f^* = \frac{1}{2} * 5 + 21 * \frac{1}{4} = b_1 * w_1 + w_2 = \frac{31}{4}, b_1 = 2$$

3.

此非对称形式的线性规划问题的对偶问题是

$$\max wb$$

$$s.t. wA \le c$$

$$\because wA \le c$$

$$\therefore (wA)^T \le c^T \Rightarrow A^T w^T \le c^T$$

$$\because c^T = b, A^T = A$$

$$\therefore A^T w^T \le c^T \Rightarrow Aw^T \le b$$

令$x^{(0)} = w^T, \therefore \left(x^{(0)}\right)^T$是对偶问题的可行解，容易看出此时$cx^{(0)} = wb$，根据对偶定理

$x^{(0)}$也是最优解

4.

(1)

增加x_4, x_5为剩余变量，然后约束条件同乘以-1，以x_4, x_5为基变量得到初始矩阵

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$B^{-1}b$
x_4	-1	0	-3	1	0	-3
x_5	0	-1	-2	0	1	-5
检验系数	-4	-6	-18	0	0	0

经过主元消去后，最终矩阵如下

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$B^{-1}b$
x_3	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
x_2	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	-1	3
检验系数	-2	0	0	-2	-6	36

$\therefore$ 最优解$x^* = (0,3,1)^T, f^* = 36$，此时对偶问题的最优解为$w^* = (2,6)$

(2)

将原问题转化为最小化问题，增加x_4为剩余变量

选取x_3, x_4为基变量，容易看出基本解不是对偶可行的，因此对问题进行扩充

初始矩阵如下

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$B^{-1}b$
x_3	1	-1	-1	0	0	1
x_4	1	-1	-2	1	0	-1
x_5	1	1	0	0	1	M
检验系数	1	1	0	0	0	0

经过变换后，最终矩阵如下

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$B^{-1}b$
x_3	1	0	0	0	1	M+1
x_4	0	0	1	-1	0	2
x_5	0	1	0	1	1	M-2
检验系数	0	0	0	-1	-2	1-2M

从表中可以看出，当 M 取很大的时候，min 问题没有下界，即 max 的原问题无上界

（3）

初始基变量选取的不同，带来的解题难度也不一样

一开始我想选x_1为一个基变量，但是发现要引入扩展问题

但是选x_8为基变量以后，不需要引入扩展问题，可直接用对偶单纯形法

将原问题做初等变换后，选取x_6, x_8, x_7为基变量

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$B^{-1}b$
x_6	-2	1	1	1	-1	1	0	0	-3
x_8	1	1	-3	2	-2	0	0	1	4
x_7	-1	-1	1	1	-1	0	1	0	-2
检验系数	-4	-3	-5	-1	-2	0	0	0	0

经过变换后，最后阶段的矩阵如下

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$B^{-1}b$
x_5	2	-1	-1	-1	1	-1	0	0	3
x_8	5	-1	-5	0	0	-2	0	1	10
x_7	1	-2	0	0	0	-1	1	0	1
检验系数	0	-5	-7	-3	0	-2	0	0	6

$\therefore$ *最优解为*$x^T = (0,0,0,0,3,0,1,10)$, *最优值*$f^* = 6$