

灵敏度分析（优化后分析）

一、参数的可变性 (c_j, b_i, a_{ij})

二、灵敏度分析的内容

- 1、参数的变化对原最优解有什么影响？原最优解是否仍为最优解。
- 2、参数在什么范围变化时，原最优解保持不变？
- 3、当原最优解已不再最优时，应如何利用原单纯形表，以最简捷的方法求得新的最优解。

三、最优性分析

$$B^{-1}b \geq 0 \quad \text{可行性}$$

$$c_B B^{-1} A - c \leq 0 \quad \text{最优性 (对偶可行)}$$

一、价值系数向量 c 的变化

$$(L) \quad \begin{cases} \min & cx \\ s.t. & Ax=b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

设(L)的最优解为 $x_B=B^{-1}b$, $x_N=0$, $f_{\min}=c_B B^{-1}b$

1、非基变量 x_k 的系数 c_k 改变为 c'_k

考虑检验数： $z_j - c_j = c_B B^{-1} P_j - c_j$ j 为非基变量下标

\therefore 若 $j \neq k$, 有

$$z'_j - c'_j = c_B B^{-1} P_j - c_j = z_j - c_j \leq 0$$

$$z'_k - c'_k = c_B B^{-1} P_k - c'_k = z_k - c_k + (c_k - c'_k)$$

若 $z'_k - c'_k \leq 0$, 则 B 仍为最优基;

若 $z'_k - c'_k > 0$, 改变后 x_k 为进基变量。

在原单纯形表中将 $z_k - c_k$ 换成 $z'_k - c'_k$, 然后在原表中用单纯性法求新问题的解。

2、基变量 x_r 的系数 c_r 改变为 $c'_r=c_r+\Delta c_r$

$$\begin{aligned} z'_j - c'_j &= c'_B B^{-1} P_j - c'_j = (c_B + \Delta c_B) B^{-1} P_j - c'_j \\ &= c_B B^{-1} P_j - c_j + \Delta c_B B^{-1} P_j + c_j - c'_j \\ &= z_j - c_j + \Delta c_B y_j + (c_j - c'_j) \end{aligned}$$

若 $j \neq r$, 有

$$z'_j - c'_j = z_j - c_j + (0 \cdots \Delta c_r \cdots 0) y_j = z_j - c_j + \Delta c_r y_{rj};$$

$$\begin{aligned} z'_r - c'_r &= z_r - c_r + (0 \cdots \Delta c_r \cdots 0) y_r + (c_r - c'_r) \\ &= 0 + \Delta c_r - \Delta c_r = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{目标函数值} &= (c_B + \Delta c_B) B^{-1} b = c_B B^{-1} b + \Delta c_B B^{-1} b \\ &= c_B B^{-1} b + \Delta c_r \bar{b}_r \end{aligned}$$

c_r 变为 c'_r 后, 只要把原单纯形表中 x_r 所在的行乘以 $(c'_r - c_r)$ 加到判别数行, 并使 x_r 对应的判别数为0, 既可用单纯形法继续做下去。

例: $\min x_1 + x_2 - 4x_3$

$s.t \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9$

$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$

$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$

$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{13}{3} \right)^T$

$f^* = -17$

引入松弛变量，得它的最优单纯形表为

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
	0	-4	0	-1	0	-2	-17

1. c_2 由1变为-4时

$$\min x_1 + x_2 - 4x_3$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
	0	-4	0	-1	0	-2	-17

由于 $z_2' - c_2' = c_B B^{-1} P_2 - c_2' = z_2 - c_2 + (c_2 - c_2') = -4 + (1 + 4) = 1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
	0	1	0	-1	0	-2	-17
x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
	0	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-20

$$x^* = \left(\frac{4}{3}, 3, \frac{7}{3} \right)^T$$

$$f_{\min} = -20$$

$$\min x_1 + x_2 - 4x_3$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
	0	-4	0	-1	0	-2	-17

问题： c_2 在什么范围变化时，最优解不变？

2. c_1 由1变为7, 此时 $\Delta c_1 = c_1' - c_1 = 7 - 1 = 6$

$$\min x_1 + x_2 - 4x_3$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
	0	-4	0	-1	0	-2	-17

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
	0	-6	0	1	0	-6	-15
x_4	3	-1	0	1	0	-2	1
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	-1	1	1	0	0	1	4
	-3	-5	0	0	0	-4	-16

$$x^* = (0, 0, 4)^T$$

$$f_{\min} = -16$$

$$\min x_1 + x_2 - 4x_3$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
	0	-4	0	-1	0	-2	-17

问题： c_1 在什么范围变化时，最优解不变？

二、改变右端向量 **b**

设 **$b \rightarrow b'$** , 设改变前的最优基为 **B** 。

1. **$B^{-1}b' \geq 0$** 此时, 原来的最优基仍为最优基, 但基变量的取值、目标函数最优值将发生变化。

设 **$b' = b + \Delta b$** , 则

$$x'_B = B^{-1}b' = B^{-1}(b + \Delta b) = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b$$

$$x'_N = 0$$

$$\begin{aligned} f'_{\min} &= c_B B^{-1}b' = c_B B^{-1}(b + \Delta b) = c_B B^{-1}b + c_B B^{-1}\Delta b \\ &= f_{\min} + c_B B^{-1}\Delta b \end{aligned}$$

二、改变右端向量 b

设 $b \rightarrow b'$, 设改变前的最优基为 B 。

2. $B^{-1}b' \not\geq 0$ 。此时, 原来的最优基对于新问题来说, 不再是可行的, 但由于所有的判别数 ≤ 0 , 所以是对偶可行的, 此时, 只要把原问题最优表的右端列

加以修改, 代之以 $\begin{bmatrix} B^{-1}b' \\ c_B B^{-1}b' \end{bmatrix}$, 就可用对偶单纯形法去求解新问题。

例：某工厂在计划期内要安排生产两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时及A、B两种原材料的消耗为：

	产品1	产品2	
设备	1	2	8台时
原材料A	4	0	16kg
原材料B	0	4	12kg

该工厂每生产一件产品1可获利2元，每生产一件产品2可获利3元，问应如何安排计划，使该工厂获利最多？

$$\max 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t \quad x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 \leq 16$$

$$4x_2 \leq 12$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1,2$$

$$\begin{aligned}
 \min \quad & -2x_1 - 3x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\
 & 4x_1 + x_4 = 16 \\
 & 4x_2 + x_5 = 12 \\
 & x_j \geq 0 \quad j=1,2,3,4,5
 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	2	1	0	0	8
x_4	4	0	0	1	0	16
x_5	0	4	0	0	1	12
	2	3	0	0	0	0

最优表为:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	0	1/4	0	4
x_5	0	0	-2	1/2	1	4
x_2	0	1	1/2	-1/8	0	2
	0	0	-3/2	-1/8	0	-14

$$x^* = (4, 2)^T$$

$$f_{\max} = 14$$

若该厂又从别处抽出4台时用于生产产品1和2，
求这时该厂生产产品1和2的最优方案。

$$B^{-1}\Delta b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1}b' = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$f = c_B B^{-1}b + c_B B^{-1}\Delta b = -14 + (-2 \ 0 \ -3) \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix} = -20$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	0	1/4	0	4
x_5	0	0	-2	1/2	1	-4
x_2	0	1	1/2	-1/8	0	4
	0	0	-3/2	-1/8	0	-20
x_1	1	0	0	1/4	0	4
x_3	0	0	1	-1/4	-1/2	2
x_2	0	1	0	0	1/4	3
	0	0	-1/2	-3/4	0	-17

$$x^* = (4, 3, 2)^T$$

$$f_{\max} = 17$$

问题： b_1 在什么范围变化时，最优基不变？

三. 改变约束矩阵 A

1. 非基列 $P_j \rightarrow P_j'$, 影响 $y_j = B^{-1}P_j$ 及 $z_j - c_j$

$$\min \quad x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$s.t \quad x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 6$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1,2,3$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	1	1	1	0	4
x_4	3	-2	0	1	6
	0	3	0	0	4

最优表为:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	1	1	1	0	4
x_4	5	0	2	1	14
	-3	0	-3	0	-8

$$x^* = (0, 4, 0, 14)^T$$

$$f_{\max} = -8$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	1	1	1	0	4
x_4	3	-2	0	1	6
	0	3	0	0	4

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	1	1	1	0	4
x_4	5	0	2	1	14
	-3	0	-3	0	-8

若 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow P'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则

$$c_B B^{-1} P'_1 - c_1 = (-2 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = -5 < 0$$

所以，最优基、最优解保持不变。

$$x^* = (0, 4, 0, 14)^T$$

$$f_{\max} = -8$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	1	1	1	0	4
x_4	5	0	2	1	14
	-3	0	-3	0	-8

若 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow P'_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则

$$c_B B^{-1} P'_1 - c_1 = (-2 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = 3 > 0$$

$$y'_1 = B^{-1} P'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	-2	1	1	0	4
x_4	-3	0	2	1	14
	3	0	-3	0	-8

无界!

一般的, 当非基列 $P_j \rightarrow P_j'$,
若 $z_j' - c_j \leq 0$, 则原最优解也是新问题的最优解。
若 $z_j' - c_j > 0$, 则把 $y_j \rightarrow y_j'$, $z_j - c_j \rightarrow z_j' - c_j$ 迭代。

2. 基列 $P_j \rightarrow P_j'$
重新计算

四. 增加新的约束

$$(L) \quad \begin{cases} \min & cx \\ s.t. & Ax=b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

增加新的约束: $P^{m+1}x \leq b_{m+1}$ P^{m+1} 为 $1 \times n$ 阶向量

$$(L') \quad \begin{cases} \min & cx \\ s.t. & Ax=b \\ & P^{m+1}x \leq b_{m+1} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

1. 若原最优解满足新增加的约束, 则它也是新问题的最优解。

2. 若原最优解不满足新增加约束

设原问题最优基为 B ，则有

$$(L') \quad \begin{cases} \min & cx \\ \text{s.t.} & x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\ & P_B^{m+1}x_B + P_N^{m+1}x_N + x_{n+1} = b_{m+1} \\ & x, x_{n+1} \geq 0 \end{cases}$$

x_B	x_N	x_{n+1}	
I	$B^{-1}N$	0	$B^{-1}b$
P_B^{m+1}	P_N^{m+1}	1	b_{m+1}
0	$c_B B^{-1}N - c_N$	0	$c_B B^{-1}b$

$$B' = \begin{bmatrix} B & 0 \\ P_B^{m+1} & 1 \end{bmatrix}, \quad B'^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -P_B^{m+1} B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = B'^{-1} b' = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -P_B^{m+1} B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ b_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} b \\ b_{m+1} - P_B^{m+1} B^{-1} b \end{bmatrix}$$

$$f' = c_B' B'^{-1} b' = (c_B \ 0) B'^{-1} b' = c_B B^{-1} b$$

x_B	x_N	x_{n+1}	
I	$B^{-1}N$	0	$B^{-1}b$
0	$P_N^{m+1} - P_B^{m+1} B^{-1}N$	1	$b_{m+1} - P_B^{m+1} B^{-1}b$
0	$c_B B^{-1}N - c_N$	0	$c_B B^{-1}b$

$$\begin{cases} \min & x_1 - 2x_2 + x_3 \\ s.t. & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ & x_i \geq 0, i=1,2,3 \end{cases}$$

引入松弛变量 x_4 , 得最优表

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	1	1	1	0	4
x_4	5	0	2	1	14
	-3	0	-3	0	-8

$$x^* = (0, 4, 0, 14)^T$$

$$f_{\max} = -8$$

增加新约束: $-x_1 + x_2 + 2x_3 \leq -2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	1	1	1	0	4
x_4	5	0	2	1	14
	-3	0	-3	0	-8

引入松弛变量 x_5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	1	1	0	0	4
x_4	5	0	2	1	0	14
x_5	-1	1	2	0	1	-2
	-3	0	-3	0	0	-8
x_2	1	1	1	0	0	4
x_4	5	0	2	1	0	14
x_5	-2	0	2	0	1	-6
	-3	0	-3	0	0	-8
x_2	0	1	3/2	0	1/2	1
x_4	0	0	9/2	1	5/2	-1
x_1	1	0	-1/2	0	-1/2	3
	-3	0	-3	0	0	1

无可行解！

练习题

一个LP问题为

$$\begin{aligned} \min z &= -10x_1 + 16x_2 - x_3 \\ \text{s.t} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2 + 2\theta \\ & x_1 - x_2 \leq 4 + \theta \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

其中 $\theta \geq 0$, 求:

- 1) 当 $\theta = 0$ 时, 求解上述LP问题
- 2) θ 在什么范围内变化, 原问题的最优性不变。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	-1	-1	2	6
x_2	0	1	-1	-1	1	2
	0	0	-5	-6	-4	-28

有两个LP问题如下:

$$\min z = cx$$

$$(LP1) \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\min z = \alpha cx$$

$$(LP2) \quad Ax = \beta b$$

$$x \geq 0$$

分析LP1与LP2最优解之间的关系。 $(\alpha > 0, \beta > 0)$

设 x_1^*, x_2^* 分别为LP1、LP2的最优解 即: $\beta x_1^* = \begin{pmatrix} B^{-1}(\beta b) \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$

$$\text{则 } x_1^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (B \text{ 为最优基})$$

$$c_B B^{-1} A - c \leq 0$$

$$\because \alpha > 0, \beta > 0$$

$$\therefore \beta x_1^* = \beta \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\alpha(c_B B^{-1} A - c) \leq 0$$

$$\alpha c_B B^{-1} A - \alpha c \leq 0$$

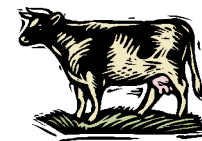
$$A(\beta x_1^*) = \beta Ax_1^* = \beta b$$

得: B 也是LP2的最优基

$$x_2^* = \beta x_1^*$$

$$z_2^* = \alpha \beta z_1^*$$

奶制品的生产与销售



企业生产计划

空间层次

工厂级：根据外部需求和内部设备、人力、原料等条件，以最大利润为目标制订产品生产计划；

车间级：根据生产计划、工艺流程、资源约束及费用参数等，以最小成本为目标制订生产批量计划。

时间层次

若短时间内外部需求和内部资源等不随时间变化，可制订单阶段生产计划，否则应制订多阶段生产计划。

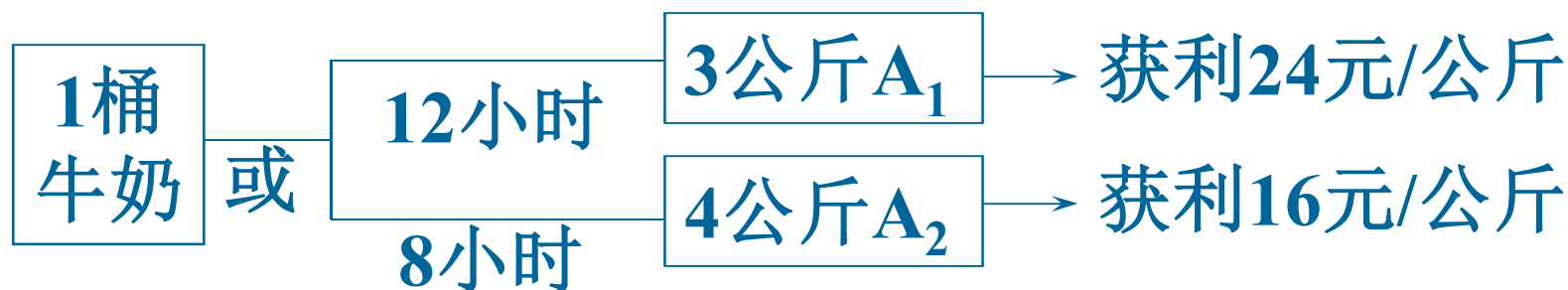


本节课题

例1 加工奶制品的生产计划



问题



每天： 50桶牛奶 时间480小时 至多加工100公斤 A_1

制订生产计划，使每天获利最大

- 35元可买到1桶牛奶，买吗？若买，每天最多买多少？
- 可聘用临时工人，付出的工资最多是每小时几元？
- A_1 的获利增加到 30元/公斤，应否改变生产计划？

基本模型

1桶
牛奶

或

12小时

8小时

3公斤A₁

→ 获利24元/公斤

4公斤A₂

→ 获利16元/公斤

每天 50桶牛奶 时间480小时 至多加工100公斤A₁

决策变量

x_1 桶牛奶生产A₁ x_2 桶牛奶生产A₂

目标函数

获利 $24 \times 3x_1$

获利 $16 \times 4x_2$

每天获利 $Max \ z = 72x_1 + 64x_2$

约束条件

原料供应

劳动时间

加工能力

非负约束

$$x_1 + x_2 \leq 50$$

$$12x_1 + 8x_2 \leq 480$$

$$3x_1 \leq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

线性
规划
模型
(LP)

模型求解

图解法

约束条件

$$x_1 + x_2 \leq 50$$



$$l_1 : x_1 + x_2 = 50$$

$$12x_1 + 8x_2 \leq 480$$



$$l_2 : 12x_1 + 8x_2 = 480$$

$$3x_1 \leq 100$$



$$l_3 : 3x_1 = 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

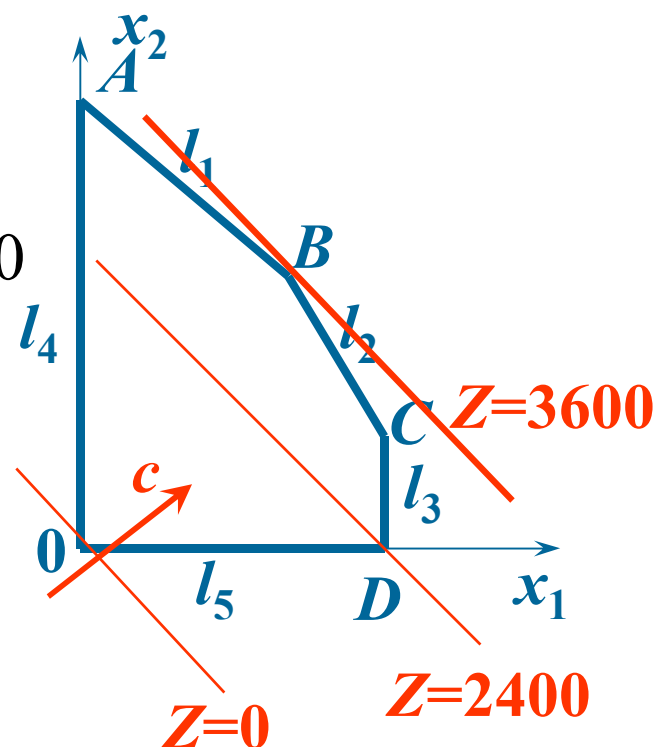


$$l_4 : x_1 = 0, l_5 : x_2 = 0$$

目标函数

$$\text{Max } z = 72x_1 + 64x_2$$

$z=c$ (常数) ~等值线



在 $B(20,30)$ 点得到最优解

模型求解

max 72x1+64x2

st

2) x1+x2<50

3) 12x1+8x2<480

4) 3x1<100

end

DO RANGE

(SENSITIVITY)

ANALYSIS? No

软件实现

LINGO 10

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3360.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
-----------------	--------------	---------------------

X1	20.000000	0.000000
-----------	------------------	-----------------

X2	30.000000	0.000000
-----------	------------------	-----------------

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
------------	-------------------------	--------------------

2)	0.000000	48.000000
----	----------	-----------

3)	0.000000	2.000000
----	----------	----------

4)	40.000000	0.000000
----	-----------	----------

NO. ITERATIONS= 2

20桶牛奶生产A₁, 30桶生产A₂, 利润3360元。

结果解释

max $72x_1 + 64x_2$

st

2) $x_1 + x_2 < 50$

3) $12x_1 + 8x_2 < 480$

4) $3x_1 < 100$

end

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3360.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
----------	-------	--------------

X1	20.000000	0.000000
----	-----------	----------

X2	30.000000	0.000000
----	-----------	----------

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
-----	------------------	-------------

原料无剩余 ← 2)	0.000000	48.000000
------------	----------	-----------

时间无剩余 ← 3)	0.000000	2.000000
------------	----------	----------

加工能力剩余40 ← 4)	40.000000	0.000000
---------------	-----------	----------

NO. ITERATIONS= 2

三种资源

“资源” 剩余为零的约束为紧约束（有效约束）

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3360.000

结果解释

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	30.000000	0.000000

最优解下“资源”增加
1单位时“效益”的增
量

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
-----	------------------	-------------

影子价格

2) 0.000000

48.000000

→ 原料增加1单位, 利润增长48

3) 0.000000

2.000000

→ 时间增加1单位, 利润增长2

4) 40.000000

0.000000

→ 加工能力增长不影响利润

NO. ITERATIONS= 2

• 35元可买到1桶牛奶, 要买吗?

35 < 48, 应该买!

• 聘用临时工人付出的工资最多每小时几元?

2元!

DO RANGE(SENSITIVITY) ANALYSIS? **Yes**

最优解不变时目标函数系数允许变化范围

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

(约束条件不变)

VARIABLE CURRENT ALLOWABLE ALLOWABLE

COEF INCREASE DECREASE

X1 72.000000 24.000000 8.000000

x_1 系数范围(64,96)

X2 64.000000 8.000000 16.000000

x_2 系数范围(48,72)

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW CURRENT ALLOWABLE ALLOWABLE

RHS INCREASE DECREASE

2 50.000000 10.000000 6.666667

3 480.000000 53.333332 80.000000

4 100.000000 INFINITY 40.000000

x_1 系数由 $24 \times 3 = 72$ 增加为 $30 \times 3 = 90$,
在允许范围内

• A_1 获利增加到 30元/公斤, 应否改变生产计划?

不变!

结果解释 影子价格有意义时约束右端的允许变化范围

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

(目标函数不变)

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	72.000000	24.000000	8.000000
X2	64.000000	8.000000	16.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	50.000000	10.000000	6.666667
3	480.000000	53.333332	80.000000
4	100.000000	INFINITY	40.000000

原料最多增加10

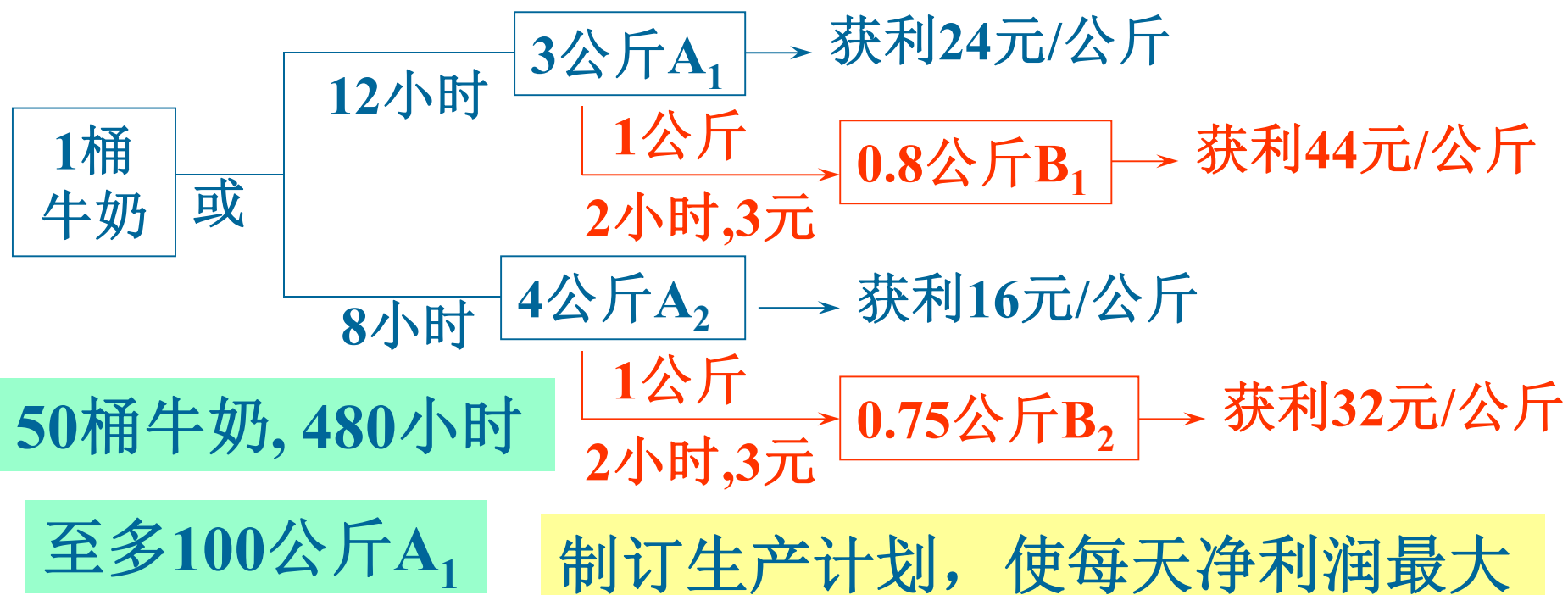
时间最多增加53

• 35元可买到1桶牛奶, 每天最多买多少?

最多买10桶!

例2 奶制品的生产销售计划

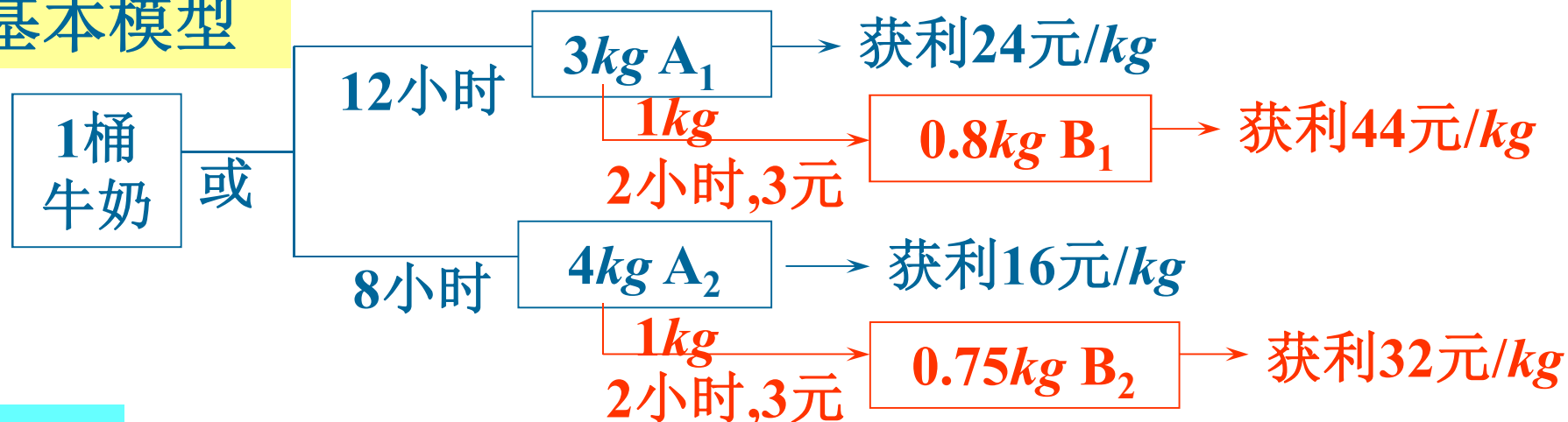
在例1基础上深加工



• 30元可增加1桶牛奶, 3元可增加1小时时间, 应否投资? 现投资150元, 可赚回多少?

• B_1 , B_2 的获利经常有10%的波动, 对计划有无影响?

基本模型



决策变量

出售 $x_1 kg A_1, x_2 kg A_2,$ $x_3 kg B_1, x_4 kg B_2$

$x_5 kg A_1$ 加工 $B_1,$ $x_6 kg A_2$ 加工 B_2

目标函数

利润

$$\text{Max } z = 24x_1 + 16x_2 + 44x_3 + 32x_4 - 3x_5 - 3x_6$$

原料供应

$$\frac{x_1 + x_5}{3} + \frac{x_2 + x_6}{4} \leq 50$$

加工能力

$$x_1 + x_5 \leq 100$$

约束条件

劳动时间

$$4(x_1 + x_5) + 2(x_2 + x_6) + 2x_5 + 2x_6 \leq 480$$

附加约束

$$x_3 = 0.8x_5$$

$$x_4 = 0.75x_6$$

非负约束

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

模型求解

软件实现

LINGO 10

$$2) \frac{x_1 + x_5}{3} + \frac{x_2 + x_6}{4} \leq 50$$



$$2) 4x_1 + 3x_2 + 4x_5 + 3x_6 \leq 600$$

$$3) 4(x_1 + x_5) + 2(x_2 + x_6) + 2x_5 + 2x_6 \leq 480$$



$$3) 4x_1 + 2x_2 + 6x_5 + 4x_6 \leq 480$$

DO RANGE
(SENSITIVITY)
ANALYSIS? No

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3460.800

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
----------	-------	--------------

X1	0.000000	1.680000
----	----------	----------

X2	168.000000	0.000000
----	------------	----------

X3	19.200001	0.000000
----	-----------	----------

X4	0.000000	0.000000
----	----------	----------

X5	24.000000	0.000000
----	-----------	----------

X6	0.000000	1.520000
----	----------	----------

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
-----	------------------	-------------

2)	0.000000	3.160000
----	----------	----------

3)	0.000000	3.260000
----	----------	----------

4)	76.000000	0.000000
----	-----------	----------

5)	0.000000	44.000000
----	----------	-----------

6)	0.000000	32.000000
----	----------	-----------

NO. ITERATIONS= 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3460.800

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
----------	-------	--------------

X1	0.000000	1.680000
----	----------	----------

X2	168.000000	0.000000
----	------------	----------

X3	19.200001	0.000000
----	-----------	----------

X4	0.000000	0.000000
----	----------	----------

X5	24.000000	0.000000
----	-----------	----------

X6	0.000000	1.520000
----	----------	----------

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
-----	------------------	-------------

2)	0.000000	3.160000
----	----------	----------

3)	0.000000	3.260000
----	----------	----------

4)	76.000000	0.000000
----	-----------	----------

5)	0.000000	44.000000
----	----------	-----------

6)	0.000000	32.000000
----	----------	-----------

NO. ITERATIONS= 2

结果解释

每天销售168 kgA_2
和19.2 kgB_1 ，
利润3460.8（元）

8桶牛奶加工成 A_1 ，
42桶牛奶加工成 A_2 ，
将得到的24 kgA_1 全部
加工成 B_1

除加工能力外
均为紧约束

30元可增加1桶牛奶，3元可增加1小时时间，
 应否投资？现投资150元，可赚回多少？

结果解释

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3460.800

VARIABLE VALUE REDUCED COST

X1	0.000000	1.680000
X2	168.000000	0.000000
X3	19.200001	0.000000
X4	0.000000	0.000000
X5	24.000000	0.000000
X6	0.000000	1.520000

ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES

2)	0.000000	3.160000
3)	0.000000	3.260000
4)	76.000000	0.000000
5)	0.000000	44.000000
6)	0.000000	32.000000

$$2) \frac{x_1 + x_5}{3} + \frac{x_2 + x_6}{4} \leq 50$$



$$2) 4x_1 + 3x_2 + 4x_5 + 3x_6 \leq 600$$

增加1桶牛奶使利润
 增长 $3.16 \times 12 = 37.92$

增加1小时时间使
 利润增长3.26

投资150元增加5桶牛奶，
 可赚回189.6元。(大于
 增加时间的利润增长)

结果解释

B_1, B_2 的获利有 10% 的波动，对计划有无影响

DO RANGE
(SENSITIVITY)
ANALYSIS? **Yes**

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE CURRENT ALLOWABLE ALLOWABLE

COEF

INCREASE

DECREASE

B_1 获利下降 10%，超出 **X3** 系数允许范围

X1 24.000000 1.680000 INFINITY

X2 16.000000 8.150000 2.100000

B_2 获利上升 10%，超出 **X4** 系数允许范围

X3 44.000000 19.750002 3.166667

X4 32.000000 2.026667 INFINITY

X5 -3.000000 15.800000 2.533334

波动对计划有影响

X6 -3.000000 1.520000 INFINITY

.....

生产计划应重新制订：如将 x_3 的系数改为 39.6 计算，会发现结果有很大变化。