第三章 函数的增长

第三章读书笔记基本完成了，最后三题（思考题）的答案没给或者没给全，这是因为最近我的时间确实比较紧，请大家原谅（如果迫切需要解答请与我联系），另外，我想结识一点正在学习算法的仁兄，把算法导论（我想学算法的都会看这本书吧）的读书笔记完善，并且尽量减少错误。我的读书笔记原版是用 Word2007+Aurora 插件(使用 MikTex 脚本的一个工具)所写，如果哪位想帮我一起完善这部笔记，请联系我，我会把 word 版本笔记发给你的。
第三章没有真正的算法出现，但是这些数学方面的知识对以后学习算法，特别是判断和计算算法的效率和复杂度是有很大帮助的。本章的内容很抽象，但是其实都是很容易理解的。重要的是不仅仅看，而且要多想，动手算。
以后的读书笔记将不再把一些书本上的原本内容（比如题目）抄录下来，而只是把一些重点内容和我的理解和一些题的解答写上去，这本书很有用的，建议大家不要不舍得花这点钱，买一本吧。

$\boldsymbol{\Theta}$记号：渐近确界

$\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{g}(\mathbf{n}))=\{f(n)\}$，存在正常数$\mathbf{c_1},\mathbf{c_2}$和$\mathbf{n_0}$，使对所有的$\mathbf{n}\geqslant\mathbf{n_0}$，有：

$$\mathbf{0}\leqslant\mathbf{c_1g(n)}\leqslant\mathbf{f(n)}\leqslant\mathbf{c_2g(n)}$$

$\mathbf{O}$记号：渐近上界

$\mathbf{O(g(n))}=\{\mathbf{f(n)}\}$，存在正常数$\mathbf{c}$和$\mathbf{n_0}$，使对所有的$\mathbf{n}\geqslant\mathbf{n_0}$，有：

$$\mathbf{0}\leqslant\mathbf{f(n)}\leqslant\mathbf{cg(n)}$$

$\boldsymbol{\Omega}$记号：渐近下界

$\boldsymbol{\Omega}\mathbf{(g(n))}=\{\mathbf{f(n)}\}$，存在正常数$\mathbf{c}$和$\mathbf{n_0}$，使对所有的$\mathbf{n}\geqslant\mathbf{n_0}$，有：

$$\mathbf{0}\leqslant\mathbf{cg(n)}\leqslant\mathbf{f(n)}$$

$\mathbf{o}$记号：非渐近紧确的上界

$\mathbf{o(g(n))}=\{\mathbf{f(n)}\}$，对任意正常数$\mathbf{c}$，存在常数$\mathbf{n_0}>\mathbf{0}$，使对所有的$\mathbf{n}\geqslant\mathbf{n_0}$，有：

$$\mathbf{0}\leqslant\mathbf{f(n)}\leqslant\mathbf{cg(n)}$$
$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0\right)$$

ω记号：非渐近紧确的下界

$\omega\mathbf{(g(n))}=\{\mathbf{f(n)}\}$，对任意正常数$\mathbf{c}$，存在常数$\mathbf{n_0}>\mathbf{0}$，使对所有的$\mathbf{n}\geqslant\mathbf{n_0}$，有：

$$\mathbf{0}\leqslant\mathbf{cg(n)}<\mathbf{f(n)}$$
$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\infty\right)$$

定理：

$$\mathbf{f(n)}=\mathbf{O(g(n))}\wedge\mathbf{f(n)}=\boldsymbol{\Omega}\mathbf{(g(n))}\implies\mathbf{f(n)}=\boldsymbol{\Theta}\mathbf{(g(n))}$$

传递性：

$$\begin{aligned}
f(n)=\Theta(g(n))\wedge g(n)=\Theta(h(n)) &\implies f(n)=\Theta(h(n))\\
f(n)=O(g(n))\wedge g(n)=O(h(n)) &\implies f(n)=O(h(n))\\
f(n)=\Omega(g(n))\wedge g(n)=\Omega(h(n)) &\implies f(n)=\Omega(h(n))\\
f(n)=o(g(n))\wedge g(n)=o(h(n)) &\implies f(n)=o(h(n))\\
f(n)=\omega(g(n))\wedge g(n)=\omega(h(n)) &\implies f(n)=\omega(h(n))
\end{aligned}$$

自反性：

$$\begin{aligned}
f(n)&=\Theta(f(n))\\
f(n)&=O(f(n))\\
f(n)&=\Omega(f(n))
\end{aligned}$$

对称性：

$$g(n)=\Theta(f(n)) \implies f(n)=\Theta(g(n))$$

转置对称性：

$$\begin{aligned}
g(n)=\Omega(f(n)) &\implies f(n)=O(g(n))\\
g(n)=\omega(f(n)) &\implies f(n)=o(g(n))
\end{aligned}$$

函数 f 和 g 的渐近比较和两个实数 a 与 b 的比较做类比：

$$\begin{cases} a=f(n)\\ b=g(n)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
f(n)=O(g(n)) &\approx a\leqslant b\\
f(n)=\Omega(g(n)) &\approx a\geqslant b\\
f(n)=\Theta(g(n)) &\approx a=b\\
f(n)=o(g(n)) &\approx a<b\\
f(n)=\omega(g(n)) &\approx a>b
\end{aligned}$$

这个类比对理解这些渐近记号很有帮助。

如果$f(n)=o(g(n))$，则$f(n)$比$g(n)$渐近较小；如果$f(n)=\omega(g(n))$，则$f(n)$比$g(n)$渐近较大。

三分性：对两个实数 a 和 b，下列三种情况恰有一种成立：$a<b, a=b \text{ or } a>b$

虽然两个实数都可以做比较，但并不是所有的函数都是可以渐近比较的。

【练习】

3.1-1 ：设$f(n)$与$g(n)$都是渐近非负函数。利用Θ记号的基本定义来证明

$\mathbf{max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n), g(n))}$。

证明：

$$\text{要使 } \mathbf{max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n), g(n))}$$

只要存在正常数c_1, c_2，当 n 足够大时：

$$c_1(f(n)+g(n)) \leqslant max(f(n), g(n)) \leqslant c_2(f(n)+g(n))$$

1. $max(f(n), g(n)) \leqslant c_2(f(n)+g(n))$

   只要取$c_2 = 1$

2. $c_1(f(n)+g(n)) \leqslant max(f(n), g(n))$

   这里$f(n), g(n)$轮换对称，假设$f(n) \geqslant g(n)$

   取$c_1 = \frac{1}{2}$，

$$\frac{1}{2}f(n) + \frac{1}{2}g(n) \leqslant f(n)$$

$$\iff g(n) \leqslant f(n) \text{ 恒成立}$$

故存在正常数$c_1 = \frac{1}{2}$，$c_2 = 1$，使 n 足够大时

$$c_1(f(n)+g(n)) \leqslant max(f(n), g(n)) \leqslant c_2(f(n)+g(n))$$

成立，故$\mathbf{max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n), g(n))}$。

3.1-2：证明对任意实常数 a 和 b，其中$\mathrm{b} > 0$，有

$$\mathbf{(n+a)^b = \Theta(n^b)}$$

证明：

$$\text{要使 } c_1 n^b \leqslant (n+a)^b \leqslant c_2 n^b$$

$$c_1 n^b \leqslant (n+a)^b \implies \lg c_1 + b\lg n \leqslant b\lg(n+a) \implies \lg c_1 \leqslant b\lg(1+\frac{a}{n})$$

$$(n+a)^b \leqslant c_2 n^b \implies \lg c_2 \geqslant b\lg(1+\frac{a}{n})$$

取$n_0 \geqslant 2|a|$，则当$n \geqslant n_0$时

1. $a < 0$

$\frac{1}{2} < 1 + \frac{a}{n} < 1 \implies -1 < \lg(1 + \frac{a}{n}) < 0$

在$\lg c_1 \leqslant b\lg(1+\frac{a}{n})$中取$\lg c_1 = -b \implies c_1 = 2^{-b}$

在$\lg c_2 \geqslant b\lg(1+\frac{a}{n})$中取$\lg c_2 = 0 \implies c_2 = 1$

故存在正常数$c_1 = 2^{-b}, c_2 = 1$使$c_1 n^b \leqslant (n+a)^b \leqslant c_2 n^b$，即$\mathbf{(n+a)^b = \Theta(n^b)}$

2. $a \geqslant 0$

$$\lg 1 < \lg(1+\frac{a}{n}) \leqslant \lg\frac{3}{2} < \lg 2 \iff 0 < \lg(1+\frac{a}{n}) < 1$$

在$\lg c_1 \leqslant b\lg(1+\frac{a}{n})$中取$\lg c_1 = 0 \implies c_1 = 1$

在$\lg c_2 \geqslant b\lg(1+\frac{a}{n})$中取$\lg c_2 = b \implies c_2 = 2^b$

故存在正常数$c_1 = 1, c_2 = 2^b$使$c_1 n^b \leqslant (n+a)^b \leqslant c_2 n^b$，即$\mathbf{(n+a)^b = \Theta(n^b)}$

3.1-3：解释为什么"算法 A 的运行时间至少是$\mathrm{O(n^2)}$"这句话是无意义的。

大于等于渐近上界就不是这个算法的合理运行时间了，所以是无意义的。

3.1-4：$\mathbf{2^{n+1} = O(2^n)}$成立吗？$\mathbf{2^{2n} = O(2^n)}$成立吗？

1.$0 \leqslant 2^{n+1} \leqslant c \times 2^n$，取$c = 3$

$$\therefore \quad \mathbf{2^{n+1} = O(2^n)}$$

2.$0 \leqslant 2^{2n} \leqslant c \times 2^n \implies 2n \leqslant c \times \lg c + n \implies \lg c \geqslant n$

不存在正常数 c 使上式成立。

$$\therefore \quad \mathbf{2^{2n} \neq O(2^n)}$$

3.1-5：证明定理 3.1

证明：

条件一：$f(n) = O(g(n)) \implies$存在正常数c_1，使$0 \leqslant f(n) \leqslant c_1 g(n)$

条件二：$f(n) = \Omega(g(n)) \implies$存在正常数$c_2$，使$0 \leqslant c_2 g(n) \leqslant f(n)$

综合条件一、二：存在正常数c_2, c_1：

$$c_2 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_1 g(n)$$
$$\therefore \quad f(n) = \Theta(n)$$

3.1-6 证明：一个算法的运行时间是$\Theta(g(n))$当且仅当其最坏情况运行时间是$O(g(n))$，且最佳情况运行时间是$\Omega(g(n))$。

见定理 3.1

3.1-7：证明$o(g(n)) \cap \omega(g(n))$是空集。

简单的说明如下（可以用基本定义进行严格证明）：一个是非渐近紧确的上界而另一个是非渐近紧确的下界，其交集显然是空集。

3.1-8：可以将我们的表示法扩展到有两个参数 n 和 m 的情形，其中 n 和 m 的值可以以不同的速率，互相独立地趋于无穷。对给定的函数$g(n,m)$，$O(g(n,m))$为函数集 $O(g(n,m)) = \{f(n,m)$：存在正整数c, n_0和m_0，使对所有$n \geqslant n_0$或$m \geqslant m_0$，有$0 \leqslant f(n,m) \leqslant cg(n,m)\}$。

给出对应的$\Omega(g(n,m))$和$\Theta(g(n,m))$的定义。

$\Omega(g(n,m)) = \{f(n,m)$：存在正整数$c, n_0$和$m_0$，使对所有$n \geqslant n_0$或$m \geqslant m_0$，有$0 \leqslant cg(n,m) \leqslant f(n,m)\}$。

$\Theta(g(n,m)) = \{f(n,m)$：存在正整数$c_1, c_2, n_0$和$m_0$，使对所有$n \geqslant n_0$或$m \geqslant m_0$，有$0 \leqslant c_1g(n,m) \leqslant f(n,m) \leqslant c_2g(n,m)\}$。

下取整：$\lfloor x \rfloor$

上取整：$\lceil x \rceil$

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1$$

相关性质：

$$\lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor = n$$

对任意实数$n \geqslant 0$和整数$a, b > 0$

$$\lceil \lceil n/a \rceil /b \rceil = \lceil n/ab \rceil$$
$$\lfloor \lfloor n/a \rfloor /b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor$$
$$\lceil a/b \rceil \leqslant (a+(b-1))/b$$
$$\lfloor a/b \rfloor \geqslant (a+(b-1))/b$$

对于一个 d 次的渐近正多项式$p(n)$，有$p(n)=\Theta(n^d)$。

若对于某个常数$\mathbf{k}$有$\mathbf{f(n)=O(n^k)}$，则称函数$\mathbf{f(n)}$有多项式界。

***可以变形的使用$\mathbf{\lg f(n)=O(k\lg n)=O(\lg n)}$**

任何底大于 1 的指数函数比任何多项式函数增长得更快。$n^b=o(a^n)$

任意正的多项式函数都比多项对数函数增长得快。$\lg^b n=o(n^a)$

斯特林近似公式：

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

对于任意的$n\geqslant 1$，下列等式成立（原书记述可能有错）：

$$n! \backsim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{a_n}$$

其中

$$\frac{1}{12n+1}<a_n<\frac{1}{12n}$$

在数学上斯特林公式和相关的极限及等价代换：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1$$
$$n! \backsim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

更精确的估计：

$$n! \backsim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\lambda n}$$

其中：

$$\frac{1}{12n+1} < \lambda_n < \frac{1}{12n}$$

多重对数函数： $\lg *n = min\{i \geqslant 0 : \lg^{(i)n} \leqslant 1\}$

斐波那契数：

$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$，$F_i = \frac{\phi^i - \hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}$

性质 第 i 个斐波那契数等于和$\phi^i/5$最接近的整数。所以斐波那契数以指数形式增长。

我总结的一些关系：

1. $\omega \implies \Omega$

2. $\mathrm{o} \implies \mathrm{O}$

3. $\omega \implies \bar{\mathrm{o}} \wedge \bar{\mathrm{O}}$

4. $\mathrm{o} \implies \bar{\omega} \wedge \bar{\Omega}$

5. $\mathrm{O} \wedge \Omega \iff \Theta$

6. $\mathrm{O} \wedge \Omega \implies \bar{o} \wedge \bar{\omega}$

【练习】

3.2-1：证明：若$\mathrm{f(n)}$和$\mathrm{g(n)}$是单调递增的函数，则$\mathrm{f(n)+g(n)}$和$\mathrm{f(g(n))}$也是单调递增的；另外，若$\mathrm{f(n)}$和$\mathrm{g(n)}$是非负的，那么$\mathrm{f(n)\cdot g(n)}$也是单调递增的。

证明：

$m \leqslant n$时，$f(m) \leqslant f(n)$，$g(m) \leqslant g(n)$

1.$f(m) + g(m) \leqslant f(n) + g(n)$，故$\mathbf{f(n) + g(n)}$是单调递增函数。

2. $\mathbf{f(n)}$是单调递增函数且$\mathbf{g(m) \leqslant g(n) \implies f(g(m) \leqslant f(g(n)))}$

故$\mathbf{f(g(n))}$是单调递增函数。

3.$\mathbf{f(m) \cdot g(m) \leqslant f(n) \cdot g(m) \leqslant f(n) \cdot g(n)}$

故$\mathbf{f(n) \cdot g(n)}$是单调递增函数。

3.2-2：证明等式（3.15）。

1.$\log_b(1/a) = \log_b a^{-1} = -\log_b a$

2.$\log_b a = \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = \dfrac{1}{\log_a b}$

3.$a^{\log_b a} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = a^{\log_a c \cdot \log_b a} = c^{\log_b a}$

3.2-3：证明等式（3.18）。并证明$n! = \omega(2^n)$**和**$n! = o(n^n)$。

证明：

1. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0 \quad \therefore \quad n! = o(n^n)$

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n!}{2^n} = \infty \quad \therefore \quad n! = \omega(2^n)$

3.$\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$

a.$\lg(n!) \leqslant c_2 n \lg n$

$\because \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^n}{n!} = \infty \implies n^n = \omega(n!)$

$\therefore$ 对于足够大的 n，一定有$n^n > n!$，对数函数是单调递增函数，所以取$c_2 = 1$。

b.$c_1 n \lg n \leqslant \lg(n!)$

$$\begin{aligned}
n! &= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&> \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\\
&> \left(\frac{n}{e}\right)^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 n\lg n < \lg\left(\frac{n}{e}\right)^n < \lg(n!)\\
\Longrightarrow\ & c_1 n\lg n < n\lg n - n\lg e\\
\Longrightarrow\ & (1-c_1)\lg n > lge\\
\Longrightarrow\ & c_1 < 1-\frac{\lg e}{\lg n}
\end{aligned}$$

取$n_0 = 4$，当$n \geqslant n_0$时：

$$1-\frac{\lg e}{\lg n} \geqslant 1-\frac{\lg e}{2} > 1-\frac{\lg 2}{2} = \frac{1}{2}$$

取$c_1 = \frac{1}{2} < 1-\frac{\lg e}{\lg n}$

故存在正常数$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 1, n_0 = 4$，当$n \geqslant n_0$时，$c_1 n\lg n \leqslant \lg(n!) \leqslant c_2 n\lg n$。

$\therefore \lg(n!) = \Theta(n\lg n)$

3.2-4：函数$\lceil\lg n\rceil!$是否是多项式有界？函数$\lceil\lg\lg n\rceil!$呢？

多项式有界条件$f(n) = O(n^k) \implies \lg(f(n)) = O(k\lg n) = O(lgn)$

利用$\lg(n!) = \Theta(n\lg n)$

$$\begin{aligned}
\lg(\lceil\lg n\rceil!) &= \Theta(\lceil\lg n\rceil\lg\lceil\lg n\rceil)\\
&= \Theta(\lg n\lg\lg n)\\
&= \omega(\lg n)\\
&\neq O(\lg n)
\end{aligned}$$

所以该多项式不是多项式有界的。

$$\begin{aligned}
\lg(\lceil\lg\lg n\rceil) &= \Theta(\lceil\lg\lg n\rceil\lg\lceil\lg\lg n\rceil)\\
&= \Theta(\lg\lg n\lg\lg\lg n)\\
&= o((\lg\lg n)^2)\\
&= o(\lg^2(\lg n))\\
&= o(\lg n)\quad [\because \lg^b n = o(n^a), resume\ a=1, b=2, n=\lg n]\\
&= O(\lg n)
\end{aligned}$$

所以，该多项式是多项式有界的。

3.2-5：哪一个在渐近上更大些：$\lg(\lg *n)$还是$\lg *(\lg n)$？

假设$\mathbf{n} = \mathbf{2^{2^{2^{\cdots}}}}$（i 个 2）

$\lg(\lg * n) = \lg i$，$\lg * (\lg n) = i - 1$

所以在渐近上$\lg * (\lg n)$更大些。

3.2-6：用归纳法证明：第 i 个斐波那契数满足等式

$$F_i = \frac{\phi^i - \hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}$$

其中ϕ是黄金分割律，$\hat{\phi}$是共轭数。

证明：

1. 当 i=1，$F_1 = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = 1$
2. 假设 i=k-2 时，$F_{k-2} = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}}{\sqrt{5}}$

   i=k-1 时，$F_{k-1} = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}}$

   则当 n=k 时，有

$$\begin{aligned}
F_k = F_{k-2} + F_{k-1} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

   成立，因此对于任意正整数 i，第 i 个斐波那契数满足：

$$F_i = \frac{\phi^i - \hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}$$

3.2-7：证明：对于$i \geqslant 0$，第$(i+2)$个斐波那契数满足$F_{i+2} \geqslant \phi^i$。

证明：

$$\frac{\hat{\phi}}{\phi} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \phi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \hat{\phi}^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned}
& F_{i+2} = \frac{\phi^{i+2} - \hat{\phi}^{i+2}}{\sqrt{5}} \geqslant \phi^i \\
\Longleftrightarrow\ & \phi^{i+2} - \hat{\phi}^{i+2} \geqslant \sqrt{5}\phi^i \\
\Longleftrightarrow\ & \left(\phi^2 - \sqrt{5}\right)\phi^i \geqslant \hat{\phi}^{i+2} \\
\Longleftrightarrow\ & \phi^2 - \sqrt{5} \geqslant \left(\frac{\hat{\phi}}{\phi}\right)^i \hat{\phi}^2 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \geqslant \frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\hat{\phi}}{\phi}\right)^i \\
\Longleftrightarrow\ & \left(\frac{\hat{\phi}}{\phi}\right)^i \leqslant 1 \\
\Longleftrightarrow\ & \left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^i \leqslant 1 \\
& \approx (-0.38)^i \leqslant 1
\end{aligned}$$

显然成立。故有$F_{i+2} \geqslant \phi^i$。

【思考题】

3-1：多项式的渐近性质

设$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$为一个 n 的 d 次多项式，其中$a_d > 0$，令 k 为一个常数。利用渐近记号的定义来证明如下性质：

a) **若$k \geqslant d$，则$p(n) = O(n^k)$**

b) **若$k \leqslant d$，则$p(n) = \Omega(n^k)$**

c) **若**$k=d$**，则**$p(n)=\Theta(n^k)$

d) **若**$k>d$**，则**$p(n)=o(n^k)$

e) **若**$k<d$**，则**$p(n)=\omega(n^k)$

假设 i 足够大，在$d\geqslant i$时$\sum_{i=0}^{d}a_in^i>0$(渐近正的)：

a)$0\leqslant\sum_{i=0}^{d}a_in^i\leqslant cn^k$,取$c=a_d(d+1)$即可。

b) $0\leqslant cn^k\leqslant\sum_{i=0}^{d}a_in^i$,取$c=a_d$即可。

c) $0\leqslant c_1n^k\leqslant\sum_{i=0}^{d}a_in^i\leqslant c_2n^k$

取$c_1=a_d, c_2=a_d(d+1)$即可。

d) $0\leqslant\sum_{i=0}^{d}a_in^i\leqslant cn^k$

当 n 足够大时，对任意 c 的取值该式始终成立。（可以用极限判断）

e) $0\leqslant cn^k\leqslant\sum_{i=0}^{d}a_in^i$

当 n 足够大时，对任意 c 的取值该式始终成立。（可以用极限判断）

3-2：相对渐进增长

在下表中，对每一对表达式(A,B),指出 A 是 B 的O,o,Ω,ω**或**Θ**中的哪种关系。假设，**

$k\leqslant 1,\varepsilon>0,c>1$**都是常数。在表格的空格内填入“是”或“否”即可。**

$(?\,(\mathbf{A})=\mathbf{B})$

	A	B	O	o	Ω	ω	Θ
a	$\lg^k n$	n^{ε}	否	否	是	是	否
b	n^k	c^n	否	否	是	是	否

c	$\sqrt{\mathbf{n}}$	$\mathbf{n}^{\sin \mathbf{n}}$	否	否	否	否	否
d	$\mathbf{2}^{\mathbf{n}}$	$\mathbf{2}^{\mathbf{n}/2}$	是	是	否	否	否
e	$\mathbf{n}^{\lg \mathbf{c}}$	$\mathbf{c}^{\lg \mathbf{n}}$	是	否	是	否	是
f	$\lg(\mathbf{n}!)$	$\lg(\mathbf{n}^{\mathbf{n}})$	是	否	是	否	是

a：$\lg^b n = o(n^a) \implies \lg^k n = o(n^\varepsilon) \implies \omega(\lg^k n) = n^\varepsilon$,$\omega \implies \Omega$,$\omega \implies \bar{o} \wedge \bar{O}$,$\implies \bar{\Theta}$

b：$n^b = o(a^n) \implies n^k = o(c^n) \implies \omega(n^k) = c^n$,$\omega \implies \Omega$,$\omega \implies \bar{o} \wedge \bar{O}$,$\implies \bar{\Theta}$

c：$\sin n$函数是周期性变换大小的。因此具有不确定性。A、B 关系不定。

d：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n/2}}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0 \implies o(2^n) = 2^{n/2}$,$o \implies O$,$o \implies \bar{\omega} \wedge \bar{\Omega}$,$\implies \bar{\Theta}$

e：$n^{\lg c} = c^{\lg n}$，显然当取$c_1 = c_2 = 1$时有O, Ω, Θ成立，$O \wedge \Omega \implies \bar{o} \wedge \bar{\omega}$

f：$\lg(n!) = \Theta(n \lg n) \implies \Theta(\lg(n!)) = n \lg n = \lg(n^n)$,$\Theta \implies O \wedge \Omega \implies \bar{o} \wedge \bar{\omega}$

3-3：根据渐近增长率排序

a) 根据增长率来对下列函数排序，即找出函数的一种排列$g_1, g_2, \cdots, g_{30}$，使

$g_1 = \Omega(g_2), g_2 = \Omega(g_3), \cdots, g_{29} = \Omega(g_{30})$。将该序列划分成等价类，使$f(n)$和$g(n)$在同一个等价类中当且仅当$f(n) = \Theta(g(n))$。

$\lg(\lg^* n)$	$2^{\lg^* n}$	$(\sqrt{2})^{\lg n}$	n^2	$n!$	$(\lg n)!$
$\left(\frac{3}{2}\right)^n$	n^3	$\lg^2 n$	$\lg(n!)$	2^{2^n}	$n^{1/\lg n}$
$\ln \ln n$	$\lg^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\lg \lg n}$	$\ln n$	1
$2^{\lg n}$	$(\lg n)^{\lg n}$	e^n	$4^{\lg n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\lg n}$
$\lg^*(\lg n)$	$2^{\sqrt{2 \lg n}}$	n	2^n	$n \lg n$	$2^{2^{n+1}}$

b) 给出非负函数$f(n)$的一个例子，使对任何在（a）中的$g_i(n)$，$f(n)$既不是$O(g_i(n))$也不是$\Omega(g_i(n))$。

a:略

b:$f(n)=\left(2^{2^{n+2}}\right)^{\sin n}$

3-4：渐近记号的性质

设$f(n)$和$g(n)$为渐近正函数。证明或否定以下的假设：

a)$f(n)=O(g(n)) \implies g(n)=O(f(n))$

b)$f(n)+g(n)=\Theta(min(f(n),g(n)))$

c)$f(n)=O(g(n)) \implies \lg(f(n))=O(\lg(g(n)))$**，其中**$\lg(g(n))\geqslant 1$**且**$f(n)\geqslant 1$**对足够大的 n 成立。**

d)$f(n)=O(g(n)) \implies 2^{f(n)}=O(2^{g(n)})$

e)$f(n)=O((f(n))^2)$

f)$f(n)=O(g(n)) \implies g(n)=\Omega(f(n))$

g)$f(n)=\Theta(f(n/2))$

h)$f(n)+o(f(n))=\Theta(f(n))$

3-5：O和Ω的一些变形

某些作者定义Ω的方式和我们略有不同，可以用$\overset{\infty}{\Omega}$（读作“Ω无穷大”）来表示这种定义。若存在正常数 c 使$f(n)\geqslant cg(n)\geqslant 0$对无穷多的整数 n 成立 则说$f(n)=\overset{\infty}{\Omega}(g(n))$。

a） **说明渐近非负的两个函数$f(n)$和$g(n)$，要么$f(n)=O(g(n))$，要么$f(n)=\overset{\infty}{\Omega}(g(n))$，要么二者都成立，然后再用$\Omega$代替$\overset{\infty}{\Omega}$时并不成立。**

b） **请描述用$\overset{\infty}{\Omega}$代替Ω以刻画程序运行时间的潜在优点和缺点。**

某些作者定义的O也略有不同，设为O'。称$f(n)=O'(g(n))$当且仅当$|f(n)|=O(g(n))$。

c） **如果我们用O'代替O而仍然使用Ω，定理 3.1 的“当且仅当”的两个方向各有**

什么变化？

某些作者定义的$\breve{O}$**表示略去了对数因子的**O

$\breve{O}(g(n))=\{f(n)$:**存在正常数 c，k 和**n_0**使得**$0\leqslant f(n)\leqslant cg(n)\lg^k(n)$**，对所有**

$n\geqslant n_0$**成立**$\}$

d） 请类似的定义$\breve{\Omega}$**和**$\breve{\Theta}$**，并证明与定理 3.1 的类似关系。**