

第二章 线性规划(linear programming)的基本性质

LP的标准形式

- 1、极小化型
- 2、约束方程为等式
- 3、所有的决策变量为非负值

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & z = cx \quad c_{1 \times n} \\ s.t. \quad & Ax = b \quad A_{m \times n} \quad b_{m \times 1} \\ & x \geq 0 \quad x_{n \times 1} \end{aligned}$$

- 非标准型**LP**模型转化为标准型**LP**模型

一、目标函数是极大化的转化

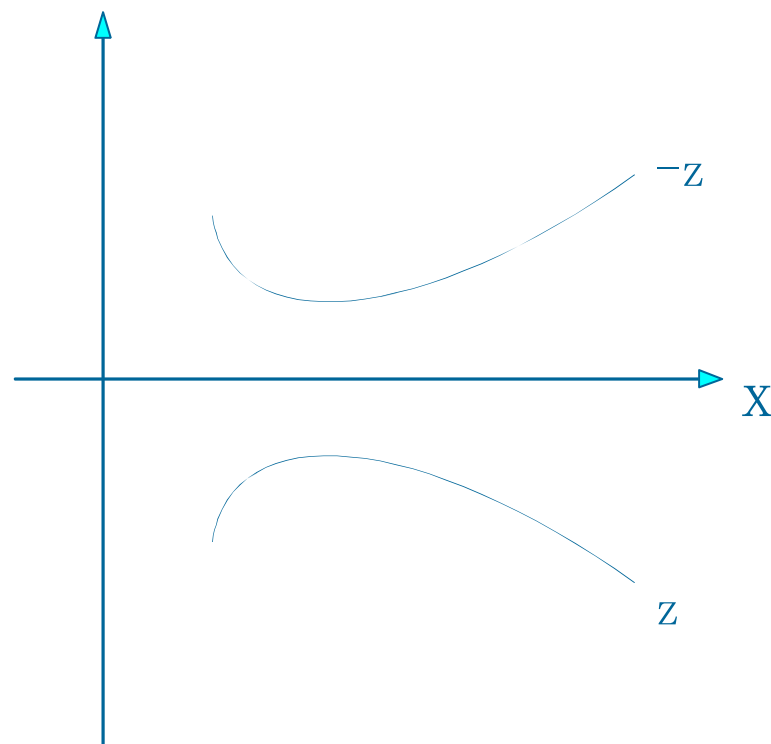
例： $\max z = 3x_1 + 2x_2 - 7x_3$

等价变换： 令 $z' = -z$,

则目标函数转换为 \rightarrow

$$z' = -3x_1 - 2x_2 + 7x_3$$

$$\max z \Rightarrow \min z'$$



二、约束方程为不等式的转换

1、约束方程为 \leq

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

等价于

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + y_i = b_i$$

$y_i \geq 0$ y_i 称为松弛变量(slack variable)

2、约束方程为 \geq

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$

等价于

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - y_i = b_i$$

$y_i \geq 0$ y_i 称为剩余变量(surplus variable) ³

三、决策变量 x_j 无非负限制的转换

如： x_j 无非负约束

引入 $x'_j \geq 0, x''_j \geq 0$, 令 $x_j = x'_j - x''_j$

四、决策变量有上下界的转换

如： $1 \leq x_3 \leq 5, \rightarrow x_3 \geq 1, x_3 \leq 5$

令 $x'_3 = x_3 - 1$, 则 $x'_3 \geq 0, x'_3 \leq 4$

例：	$\max z = 3x_1 - 2x_2 + x_3$	$\min \bar{z} = -3x_1 + 2(x'_2 - x''_2) - (x'_3 + 1)$
	s.t	s.t
	$x_1 + x_2 \leq 7$	$x_1 + (x'_2 - x''_2) + x_4 = 7$
	$x_1 - x_2 + x_3 \geq 5$	$x_1 - (x'_2 - x''_2) + x'_3 - x_5 = 4$
	$1 \leq x_3 \leq 6$	$x'_3 + x_6 = 5$
	$x_1 \geq 0, x_2$ 无非负约束	

令： $\bar{z} = -3x_1 + 2x_2 - x_3$, $x_1, x'_2, x''_2, x'_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

$x_2 = x'_2 - x''_2, x'_3 = x_3 - 1$

五. 含有绝对值

规划问题为

$$\min |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

$$s.t. \quad Ax \leq b$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, A, b 为相应维数的矩阵和向量

解：取
$$u_i = \frac{x_i + |x_i|}{2}, \quad v_i = \frac{|x_i| - x_i}{2}$$

则 $u_i, v_i \geq 0, \quad x_i = u_i - v_i, \quad |x_i| = u_i + v_i$

记 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T, \quad v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T$

$$\min (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n)$$

$$s.t. \quad A(u - v) + w = b$$

$$u, v, w \geq 0$$

两变量线性规划问题的图解法

1.线性不等式的几何意义— 半平面

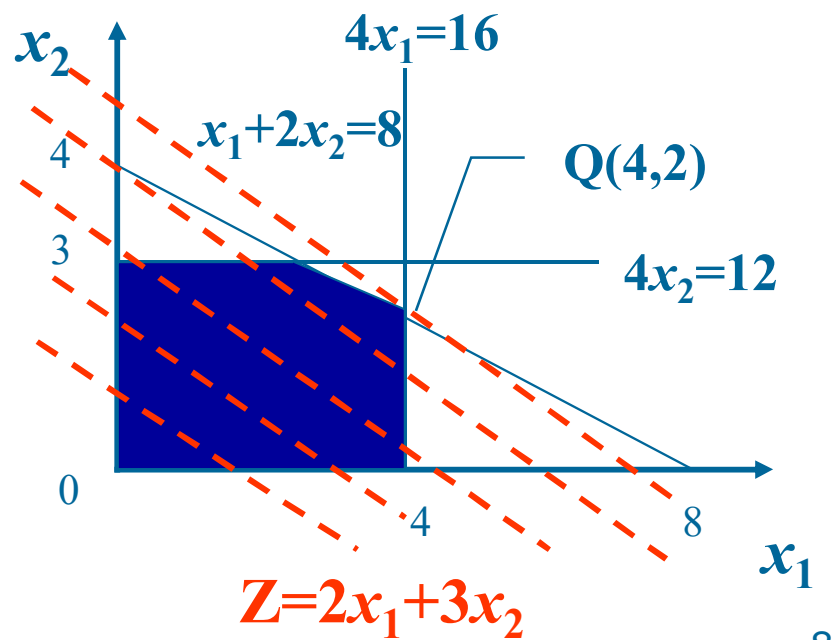
2.图解法步骤

- 1) 作出LP问题的可行域
- 2) 作出目标函数的等值线
- 3) 移动等值线到可行域边界得到最优点

例 $\max Z = 2x_1 + 3x_2$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

做目标函数 $2x_1+3x_2$ 的等值线，与阴影部分的边界相交于Q(4,2)点，Q点为最优解。



例

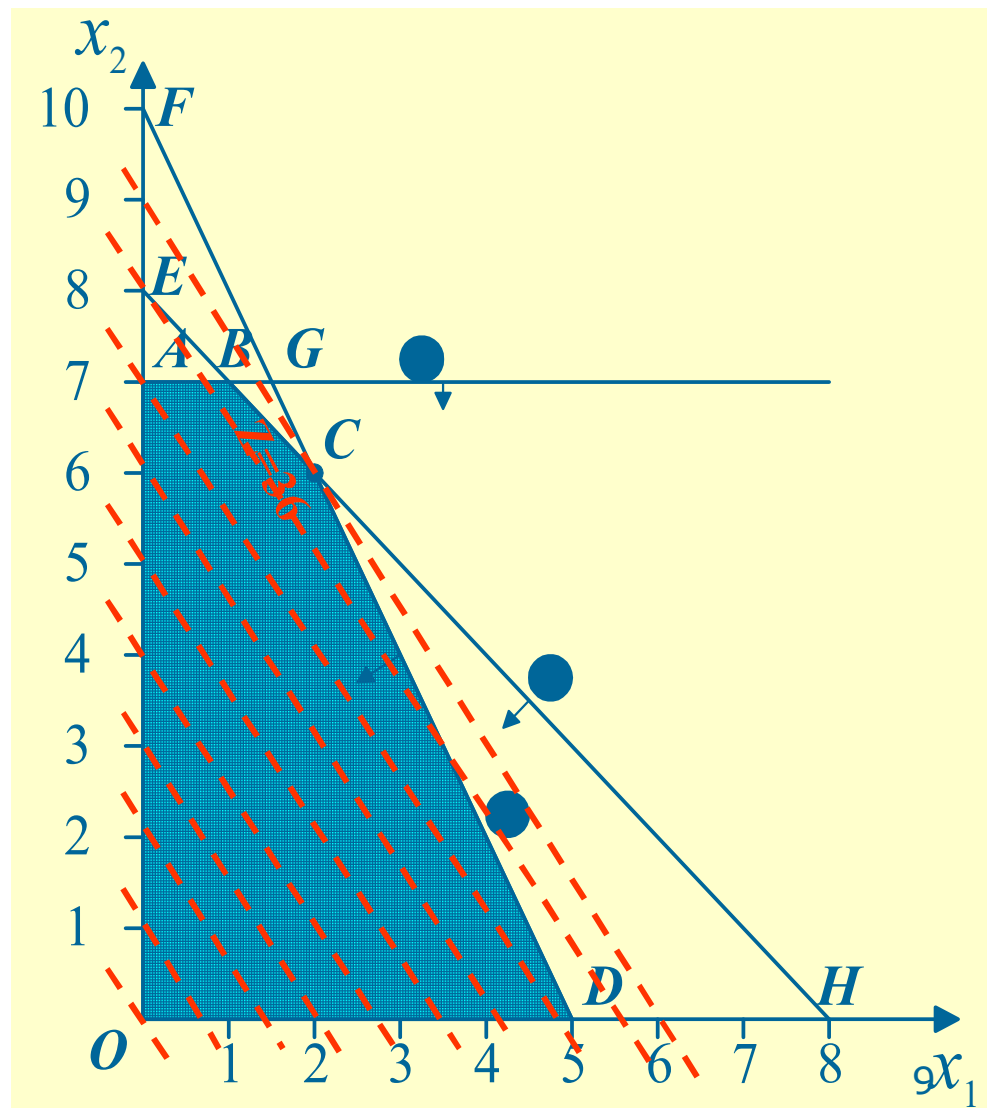
$$\max Z = 6x_1 + 4x_2$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

最优解: $x_1 = 2$

$x_2 = 6$

$Z = 36$



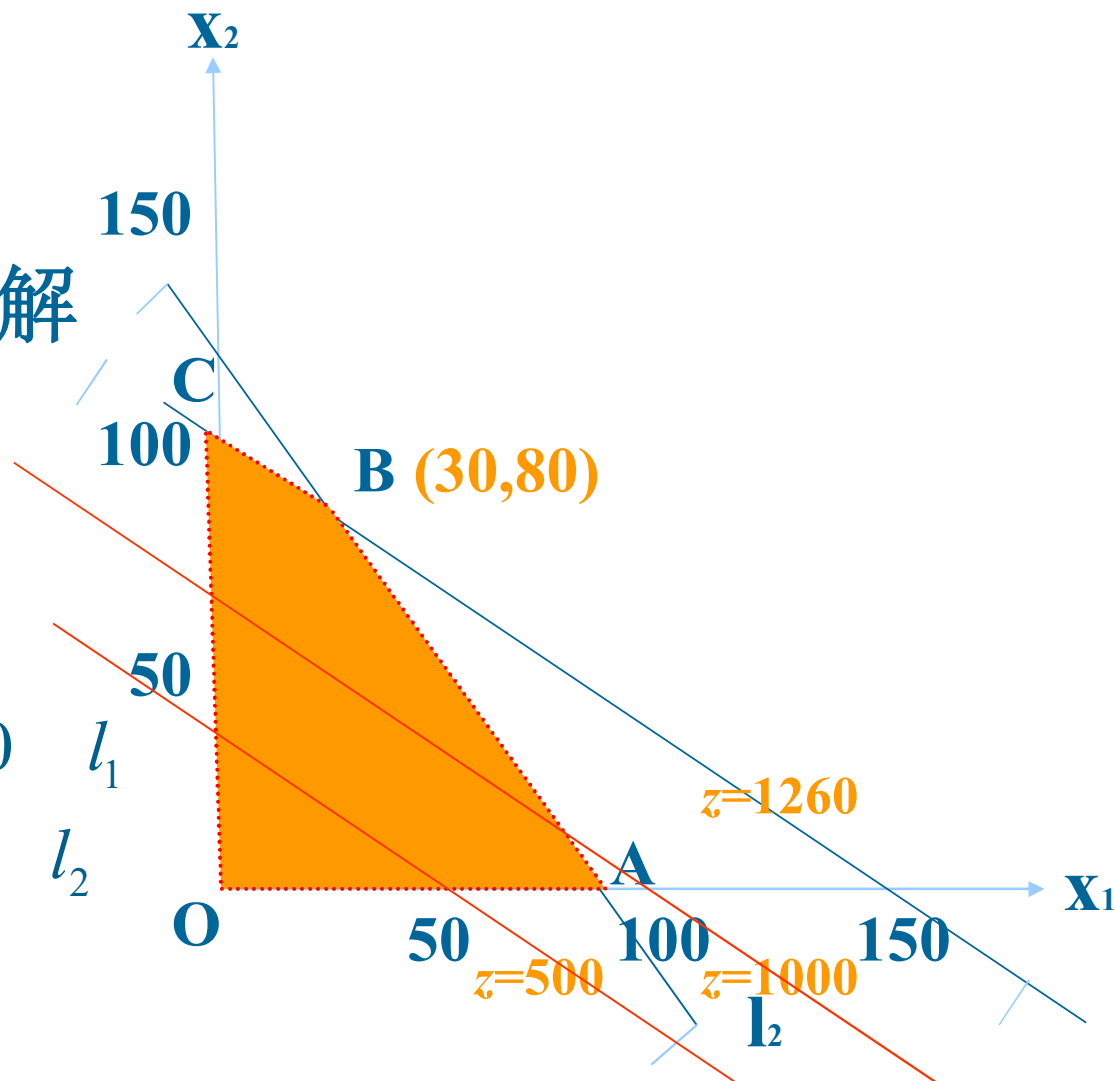
结论： 若**LP**问题存在最优解，则必在可行域的某个极点上找到。

一般的，当等值线沿目标函数法向量方向平行移动时，目标函数值逐步增加；当等值线沿目标函数法向量反方向平行移动时，目标函数值逐步减少。

二、几种特殊情况

1、LP存在多个最优解

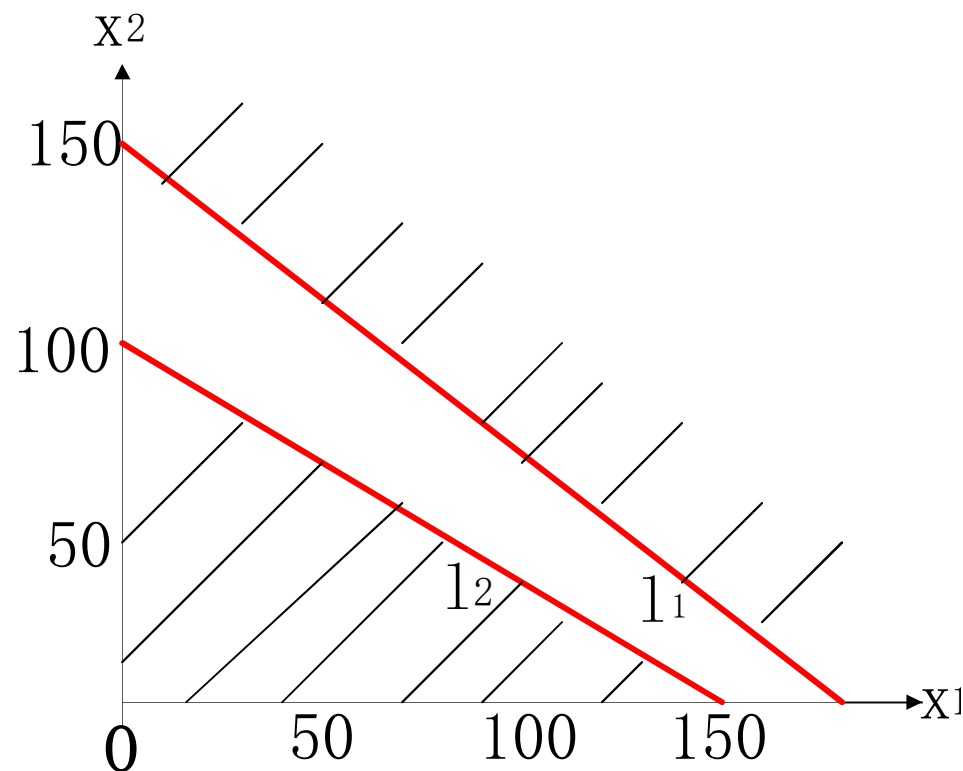
例： $\min z = -10x_1 - 15x_2$
 $s.t \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 300 \quad l_1$
 $2x_1 + 1.5x_2 \leq 180 \quad l_2$
 $x_1, x_2 \geq 0$



结论：以 z 为参数的直线族与可行域某一条边平行，最终重合，则 该LP存在多个最优解。

2、LP问题无可行解

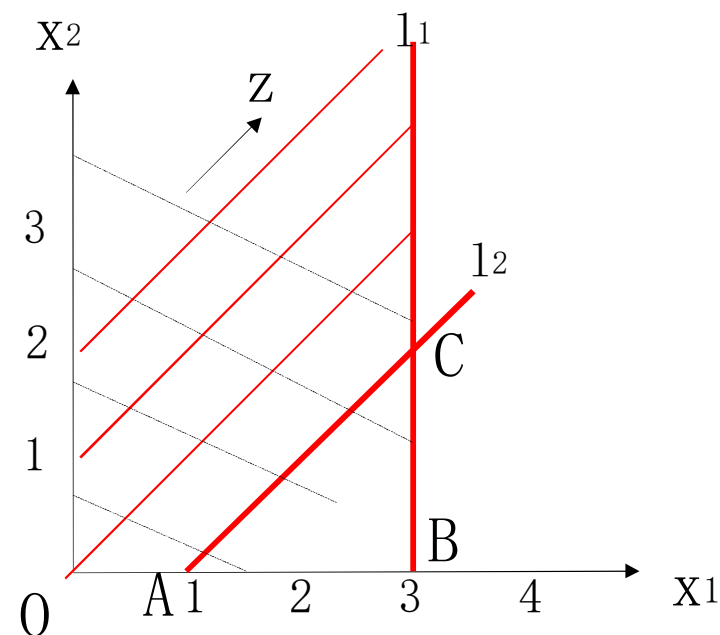
例： $\min z = -10x_1 - 12x_2$
 $s.t$ $5x_1 + 6x_2 \geq 900 \quad l_1$
 $2x_1 + 3x_2 \leq 300 \quad l_2$
 $x_1, x_2 \geq 0$



结论：若LP的可行域为空集，则该LP问题无可行解。

3、LP问题存在无界解

例： $\min z = -3x_1 - 4x_2$
s.t $x_1 \leq 3 \quad l_1$
 $x_1 - x_2 \leq 1 \quad l_2$
 $x_1, x_2 \geq 0$

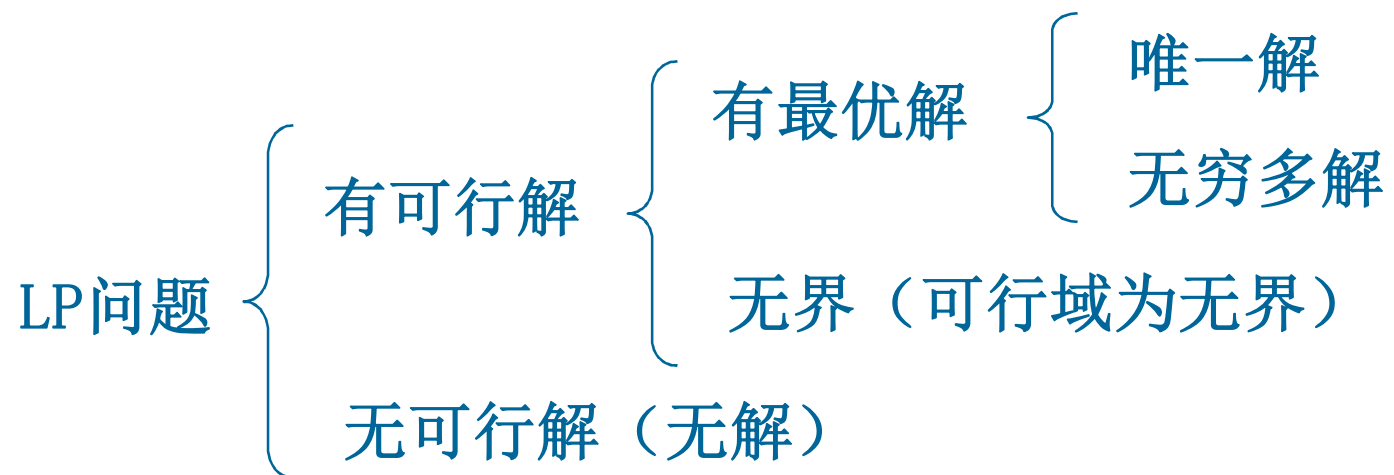


判断： 若LP的可行域无界，则该LP可能存在无界解。

3. 图解法的作用

- 能解决少量问题
- 揭示了线性规划问题的若干规律

规律1:



思考题

已知 LP 问题如下：

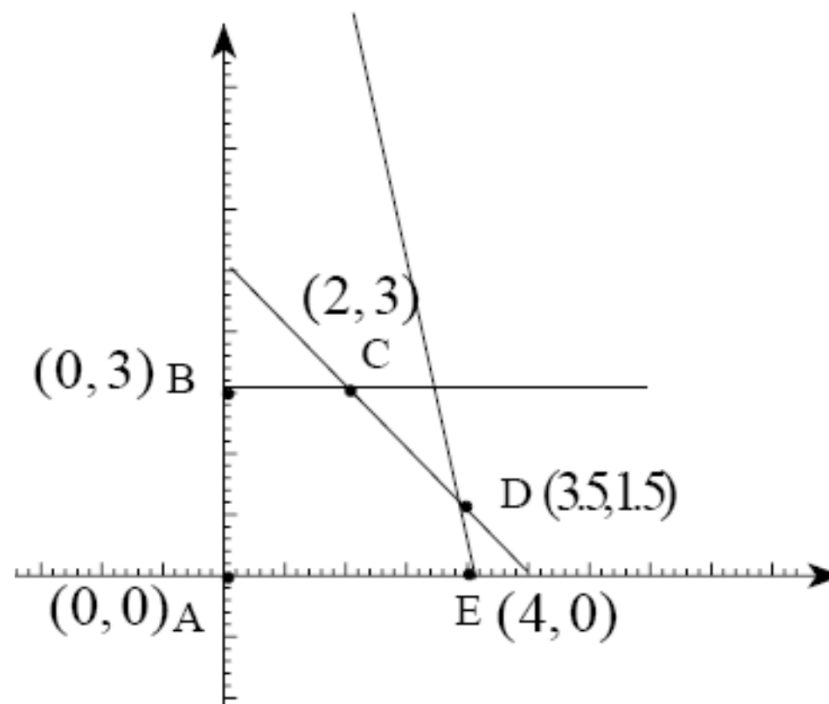
$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$s.t \quad 5x_2 \leq 15$$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 24$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



假设 $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ ，讨论 c_1, c_2 的值如何变化，该 LP 可行域的每个极点依次使目标函数达到唯一最优。

第二节 **LP**问题的基本性质

一、可行解

满足**LP**模型的约束条件且满足非负条件的解。

例: $\max z = 3x_1 + 2x_2$
 $s.t$ $x_1 + 3x_2 \geq 6$
 $x_1 - 2x_2 \leq 4$
 $x_1, x_2 \geq 0$

判断 $X = (5 \ 1)^T$, $X = (-1 \ 3)^T$, $X = (2 \ 1)^T$
是否为可行解?

定理1: 线性规划的可行域是凸集。

二. 最优极点

考虑标准形式:
$$\begin{cases} \min & cx \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

设可行域 $S = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$.

极点: $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$

极方向: $d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(l)}$.

由表示定理, 对任意 $x \in S$

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x^{(j)} + \sum_{j=1}^l \mu_j d^{(j)}$$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, k$$

$$\mu_j \geq 0, j = 1, \dots, l.$$

代入标准型



$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j cx^{(j)} + \sum_{j=1}^l \mu_j cd^{(j)} = f(\lambda, \mu) \\ s.t. \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, k \\ \mu_j \geq 0, j = 1, \dots, l. \end{array} \right.$$

(1) 若存在 j ,使得 $cd^{(j)} < 0$, 则 $f(\lambda, \mu) \rightarrow -\infty$,即该问题无界.

(2) 对任意 $j, cd^{(j)} \geq 0$, 令 $\mu_j = 0, j = 1, \dots, l$.得

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j cx^{(j)} \\ s.t. \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, k \end{array} \right.$$

令 $cx^{(p)} = \min_{1 \leq j \leq k} cx^{(j)}$, 则当 $\lambda_p = 1, \lambda_j = 0 (j \neq p)$

时, $f(\lambda, \mu) = cx^{(p)}$ 最小。

对任意 $x \in S$, 由于

$$\begin{aligned} cx &= \sum_{j=1}^k \lambda_j cx^{(j)} + \sum_{j=1}^l \mu_j cd^{(j)} \\ &\geq \sum_{j=1}^k \lambda_j cx^{(j)} \geq \sum_{j=1}^k \left(cx^{(p)} \right) \lambda_j \\ &\geq \left(cx^{(p)} \right) \sum_{j=1}^k \lambda_j = cx^{(p)} \end{aligned}$$

所以, 极点 $x^{(p)}$ 是原问题的最优解。

定理2. 设线性规划(L)的可行域非空, 则

- (1) (L)存在最优解的充要条件是对任意的 j , $cd^{(j)} \geq 0$, 其中 $d^{(j)}$ 为可行域的极方向。
- (2) 若(L)存在最优解, 则目标函数的最优值可在某个极点达到。

三、基和基本解

$$\min \quad z = cx$$

$$C_{1 \times n}$$

$$s.t. \quad Ax = b$$

$$A_{m \times n} \quad (n \geq m) \quad b_{m \times 1}$$

$$x \geq 0$$

$$x_{n \times 1}$$

$$\text{设 } r(A) = m,$$

$$A \xrightarrow{\text{按列分块}} (P_1, P_2, \dots, P_n)$$

$Ax = b$ 等价于

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n = b$$

1、系数矩阵A中任意 m 列所组成的 m 阶可逆子方阵B, 称为(LP)的一个**基(矩阵)**, 变量 x_j , 若它所对应的列 P_j 包含在基B中, 则称 x_j 为**基变量**, 否则称为**非基变量**。基变量的全体称为一组基变量, 记

$$x_{B_1}, x_{B_2}, \dots, x_{B_m}.$$

$$\text{基矩阵的个数最多为 } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

(2) 设 $A = [B \quad N]$, 其中 $r(B) = m$, 设 $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$.

由 $Ax = b$ 得, $Bx_B + Nx_N = b$

$$\Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

令 $x_N = 0$, 得 $x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ 称 x 为 (LP) 的基本解。

(3) 若 $B^{-1}b \geq 0$, 则称 $x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ 为 (LP) 的基本可行解,

B 称为可行基矩阵, $x_{B_1}, x_{B_2}, \dots, x_{B_m}$ 为一组可行基。

(4) 若 $B^{-1}b > 0$, 则称基本可行解是非退化的, 否则称为退化的。

例： $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \end{cases}$ 引入松弛变量化为

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 4 \end{cases} \quad \text{系数矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

基矩阵为：

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{22}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 4 \end{cases} \quad \text{求基本解。}$$

$$(1) \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B_1^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1^{-1}b = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{基本解为 } x^{(1)} = \left(\frac{24}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0 \right)^T.$$

$$\text{或 } B_1 X_{B_1} = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{增广矩阵}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \end{array} \right) \xRightarrow{\text{初等变换}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -2 \end{array} \right)$$

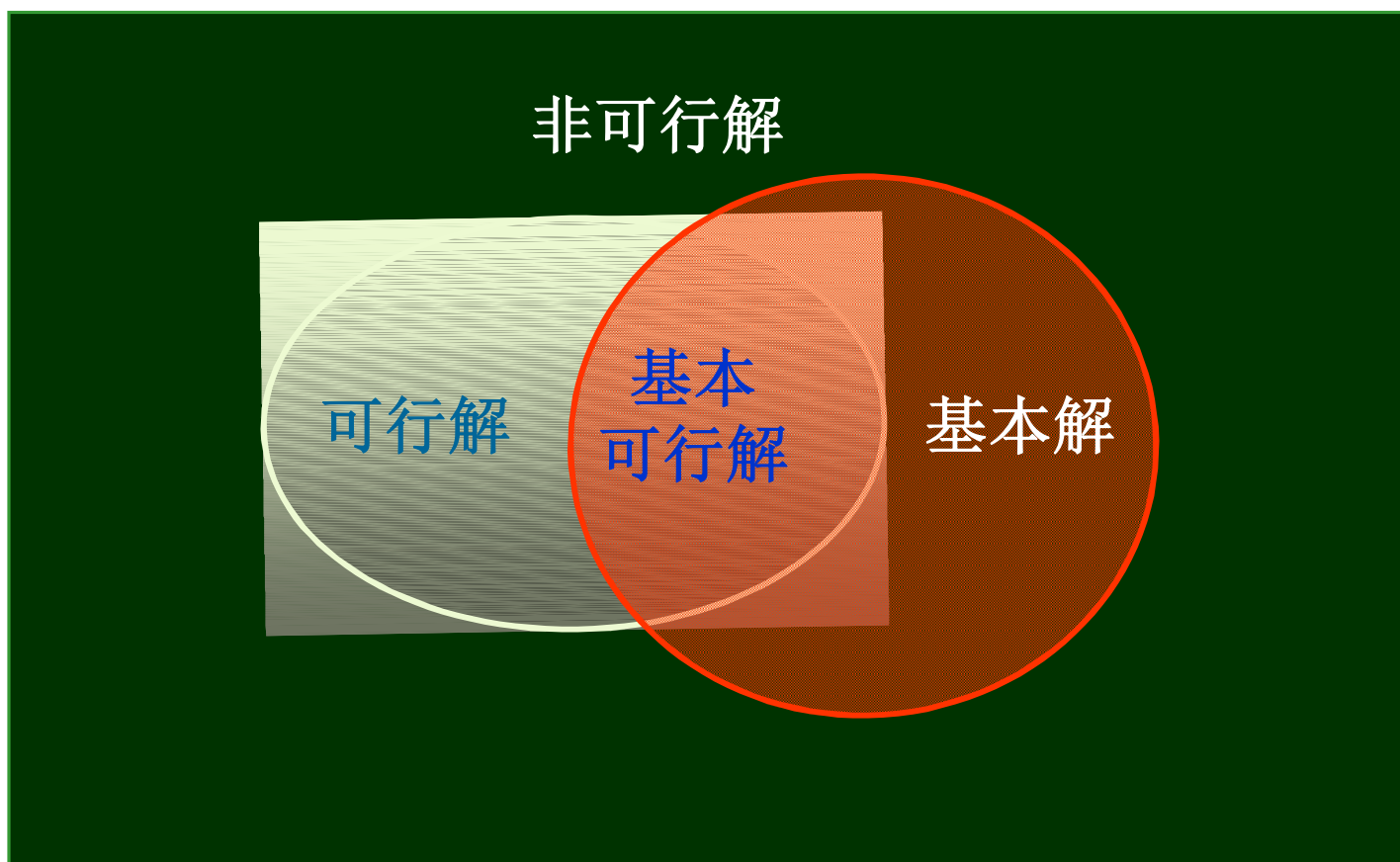
$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2/5 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 24/5 \\ 0 & 1 & 2/5 \end{array} \right) \quad x_1 = 24/5 \quad x_2 = 2/5$$

$$x^{(1)} = \left(24/5 \quad 2/5 \quad 0 \quad 0 \right)^T \quad x^{(2)} = (4 \quad 0 \quad -2 \quad 0)^T \quad x^{(3)} = (6 \quad 0 \quad 0 \quad -2)^T$$

$$x^{(4)} = (0 \quad -2 \quad -12 \quad 0)^T \quad x^{(5)} = (0 \quad 2 \quad 0 \quad 8)^T \quad x^{(6)} = (0 \quad 0 \quad -6 \quad 4)^T$$

只有 $x^{(1)}$ 和 $x^{(5)}$ 为基本可行解。

线性规划标准型问题解的关系



可行解、基本解和基本可行解举例

$$\max Z = 6x_1 + 4x_2$$

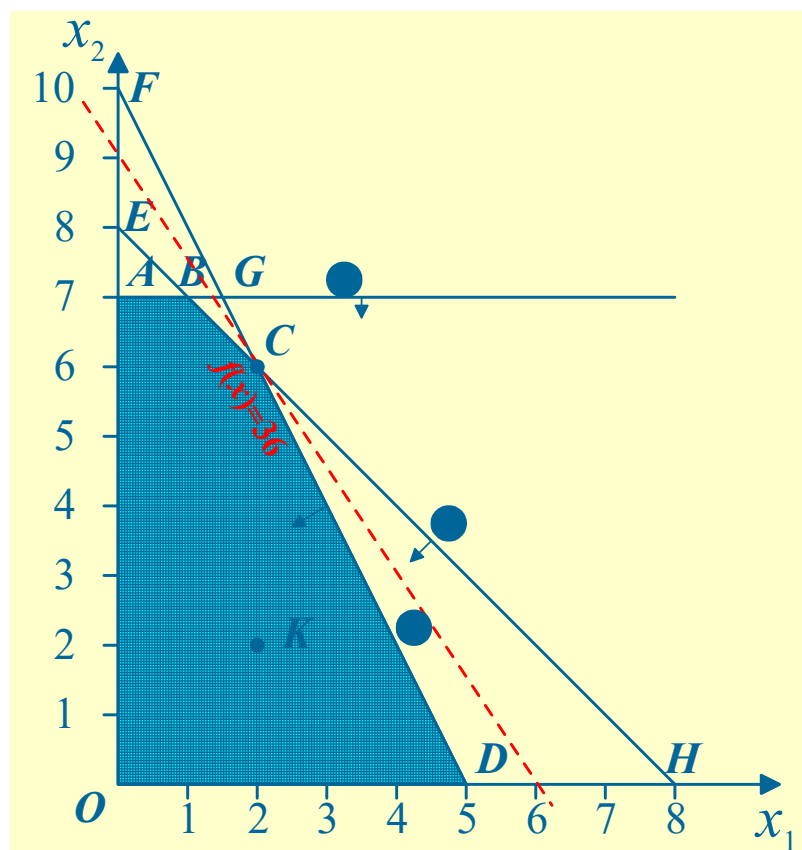
$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\min Z = -6x_1 - 4x_2$$

$$\Rightarrow s.t. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ x_2 + x_5 = 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

可行解、基本解和基本可行解举例



非基变量	基变量			图中的点 解
x_1, x_2	$x_3=10$	$x_4=8$	$x_5=7$	O 基本可行解
x_1, x_3	$x_2=10$	$x_4=-2$	$x_5=-3$	F 基本解
x_1, x_4	$x_2=8$	$x_3=2$	$x_5=-1$	E 基本解
x_1, x_5	$x_2=7$	$x_3=3$	$x_4=1$	A 基本可行解
x_2, x_3	$x_1=5$	$x_4=3$	$x_5=7$	D 基本可行解
x_2, x_4	$x_1=8$	$x_3=-6$	$x_5=7$	H 基本解
x_3, x_4	$x_1=2$	$x_2=6$	$x_5=1$	C 基本可行解 最优解
x_3, x_5	$x_1=1.5$	$x_2=7$	$x_4=-0.5$	G 基本解
x_4, x_5	$x_1=1$	$x_2=7$	$x_3=1$	B 基本可行解
$x_1=2, x_2=2, x_3=4, x_4=4, x_5=3$				K 可行解

三. 基本可行解与极点之间的关系

引理：可行解 \bar{x} 是基本可行解 $\Leftrightarrow \bar{x}$ 的非零分量所对应的A的列向量线性无关。

证明：不妨设 \bar{x} 的前 k 个分量为正分量

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k, 0, \dots, 0)^T, \bar{x}_j > 0, j = 1, \dots, k.$$

" \Rightarrow " \bar{x} 是基本可行解, 则取正值的变量必为基变量, 它们对应的列向量 P_1, P_2, \dots, P_k 为基向量, 所以线性无关。

" \Leftarrow " 设 P_1, P_2, \dots, P_k 线性无关, 则 $k \leq m$. 因为 \bar{x} 是可行解, 所以有

$$P_1 \bar{x}_1 + P_2 \bar{x}_2 + \dots + P_k \bar{x}_k = b$$

若 $k = m$, 则 $B = (P_1, P_2, \dots, P_k)$ 就是基.

若 $k < m$, 则一定可以从其余的 $n - k$ 个列向量中再挑出 $m - k$ 个列向量, 设为 P_{k+1}, \dots, P_m , 使 $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_m$ 线性无关。令 $B = (P_1, P_2, \dots, P_m)$

则B是基, 且 $P_1 \bar{x}_1 + P_2 \bar{x}_2 + \dots + P_m \bar{x}_m + \dots + P_n \bar{x}_n = b$.

所以, \bar{x} 是相应于 B 的基本可行解。

定理2 设 S 是 (L) 的可行域, $\bar{x} \in S$, 则 \bar{x} 是 S 的极点 $\Leftrightarrow \bar{x}$ 是 (L) 的基本可行解。

证明: “ \Rightarrow ” 设 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n)^T$ 是 S 的极点, 其中 $\bar{x}_j > 0, j = 1, \dots, k$, $\bar{x}_j = 0, j = k+1, \dots, n$. 设 \bar{x}_j 对应的列向量为 P_j , 则 P_1, P_2, \dots, P_k 线性无关.

否则, 存在不全为0的数 y_1, y_2, \dots, y_k , 使得

$$y_1 P_1 + y_2 P_2 + \dots + y_k P_k = 0$$

$$\text{令 } x_j^{(1)} = \begin{cases} \bar{x}_j + \lambda y_j & j = 1, 2, \dots, k \\ 0 & j = k+1, \dots, n \end{cases} \quad x_j^{(2)} = \begin{cases} \bar{x}_j - \lambda y_j & j = 1, 2, \dots, k \\ 0 & j = k+1, \dots, n \end{cases}$$

因为 $\bar{x}_j > 0, j = 1, 2, \dots, k$, 所以, 当 λ 充分小时, 有 $x^{(1)} \geq 0, x^{(2)} \geq 0$.

由于 $\bar{x} \in S$, 因此 $A\bar{x} = b$, 即 $\bar{x}_1 P_1 + \bar{x}_2 P_2 + \dots + \bar{x}_k P_k = b$.

$$\begin{aligned} \text{则 } Ax^{(1)} &= (P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots, P_n) (\bar{x}_1 + \lambda y_1, \dots, \bar{x}_k + \lambda y_k, 0, \dots, 0)^T \\ &= (\bar{x}_1 P_1 + \bar{x}_2 P_2 + \dots + \bar{x}_k P_k) + \lambda (y_1 P_1 + y_2 P_2 + \dots + y_k P_k) = b \end{aligned}$$

同理可证 $Ax^{(2)} = b$

所以, $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$, 且 $x^{(1)} \neq x^{(2)}$, 但 $\bar{x} = \frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)}$

与 \bar{x} 是极点矛盾, 所以 P_1, P_2, \dots, P_k 线性无关, 由引理, \bar{x} 是基本可行解。

定理2 设 S 是 (L) 的可行域, $\bar{x} \in S$, 则 \bar{x} 是 S 的极点 $\Leftrightarrow \bar{x}$ 是 (L) 的基本可行解。

“ \Leftarrow ” 已知 \bar{x} 是 $Ax = b, x \geq 0$ 的基本可行解, 即

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0.$$

假设存在 $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$ 及 $\lambda \in (0, 1)$ 使得 $\bar{x} = \lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)}$.

设 $x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_B^{(1)} \\ x_N^{(1)} \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_B^{(2)} \\ x_N^{(2)} \end{pmatrix}$, 则有

$$\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_B^{(1)} \\ x_N^{(1)} \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} x_B^{(2)} \\ x_N^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_B^{(1)} + (1 - \lambda)x_B^{(2)} \\ \lambda x_N^{(1)} + (1 - \lambda)x_N^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\therefore 0 = \lambda x_N^{(1)} + (1 - \lambda)x_N^{(2)}$$

$$\because x^{(1)}, x^{(2)} \in S, \therefore x_N^{(1)}, x_N^{(2)} \geq 0 \text{ 又因为 } \lambda, 1 - \lambda > 0, \text{ 所以 } x_N^{(1)} = x_N^{(2)} = 0.$$

$$\because x^{(1)}, x^{(2)} \in S, \therefore Ax^{(1)} = b, Ax^{(2)} = b$$

$$\text{即 } Bx_B^{(1)} + Nx_N^{(1)} = b \text{ 且 } Bx_B^{(2)} + Nx_N^{(2)} = b \text{ 因此有 } x_B^{(1)} = B^{-1}b \quad x_B^{(2)} = B^{-1}b$$

所以 $\bar{x} = x^{(1)} = x^{(2)}$, 即 \bar{x} 是极点。

例:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

x_1, x_2

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

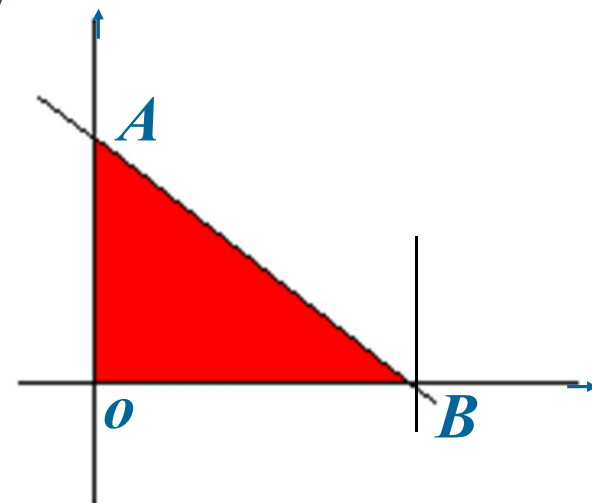
x_1, x_4

$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

x_1, x_3

x_2, x_4

x_3, x_4



$x^{(1)} = x^{(2)} = x^{(3)} = (10, 0, 0, 0)^T$

$x^{(4)} = (0, 10, 0, 10)^T, x^{(5)} = (0, 0, 10, 10)^T$

定理3 设 $S = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ 的方向 d 有 k 个非零分量, 则 d 是 S 的极方向 \Leftrightarrow d 的非零分量所对应的 A 的列向量组的秩为 $k-1$

证明: “ \Leftarrow ” $\because r(A) = m, \therefore k \leq m+1$.

设 d 的非零分量为 $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}, d_{m+1}$, 使得 P_1, P_2, \dots, P_{k-1} 线性无关, 则这 $k-1$ 个向量可以扩充为一组基, 设 $B = (P_1, P_2, \dots, P_m), r(B) = m$.

设存在 S 的方向 $d^{(1)}, d^{(2)}$ 及 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ 使得 $d = \lambda_1 d^{(1)} + \lambda_2 d^{(2)}$

则 $d^{(1)}, d^{(2)}$ 的后 $n-m-1$ 个分量为 0, 故可设

$$d^{(1)} = \begin{pmatrix} d_B^{(1)} \\ d_{m+1}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d^{(2)} = \begin{pmatrix} d_B^{(2)} \\ d_{m+1}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

由 $Ad^{(1)} = 0, Ad^{(2)} = 0$ 知

$$Bd_B^{(1)} + d_{m+1}^{(1)}P_{m+1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad d_B^{(1)} = -d_{m+1}^{(1)}B^{-1}P_{m+1}$$

$$Bd_B^{(2)} + d_{m+1}^{(2)}P_{m+1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad d_B^{(2)} = -d_{m+1}^{(2)}B^{-1}P_{m+1}$$

若 $d_{m+1}^{(1)} = 0$, 则 $d_B^{(1)} = 0 \Rightarrow d^{(1)} = 0$ 与 $d^{(1)}$ 是方向矛盾.

所以, $d_{m+1}^{(1)} > 0$, 同理, $d_{m+1}^{(2)} > 0$, $\therefore d^{(1)} = \frac{d_{m+1}^{(1)}}{d_{m+1}^{(2)}} d^{(2)}$

即 $d^{(1)}, d^{(2)}$ 是相同的方向, 所以, d 为极方向.

定理3 设 $S = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ 的方向 d 有 k 个非零分量, 则 d 是 S 的极方向 $\Leftrightarrow d$ 的非零分量所对应的 A 的列向量组的秩为 $k-1$

“ \Rightarrow ” 设 d 为极方向, 且 $d_{m+1} > 0$.

(1) $k = 1$, 则由 $Ad = 0$ 得 $d_{m+1}P_{m+1} = 0$, 因此 $P_{m+1} = 0$, 结论成立。

(2) $k > 1$. 设 $d_1, \dots, d_{k-1} > 0$, $d = (d_1, \dots, d_{k-1}, 0, \dots, 0, d_{m+1}, 0, \dots, 0)^T$.

由 $Ad = 0$, 得 $d_1P_1 + \dots + d_{k-1}P_{k-1} + d_{m+1}P_{m+1} = 0$,

因此, $P_1, \dots, P_{k-1}, P_{m+1}$ 线性相关。

若 P_1, \dots, P_{k-1} 线性相关, 则存在不全为 0 的数 y_1, \dots, y_{k-1} , 使得

$$y_1P_1 + y_2P_2 + \dots + y_{k-1}P_{k-1} = 0$$

$$\text{令 } d_j^{(1)} = \begin{cases} d_j + \lambda y_j & j = 1, \dots, k-1 \\ d_{m+1} & j = m+1 \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \quad d_j^{(2)} = \begin{cases} d_j - \lambda y_j & j = 1, \dots, k-1 \\ d_{m+1} & j = m+1 \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

则有 $Ad^{(1)} = Ad^{(2)} = 0$, 且当 λ 充分小时, 有 $d^{(1)}, d^{(2)} \geq 0$,

$d^{(1)} \neq 0, d^{(2)} \neq 0, \therefore d^{(1)}, d^{(2)}$ 是方向。

显然, $d^{(1)} \neq d^{(2)}$, 但 $d = \frac{1}{2}d^{(1)} + \frac{1}{2}d^{(2)}$, 与 d 是极方向矛盾。

四. 基本可行解的存在问题

定理1. 如果(LP)有可行解,则一定存在基本可行解.

证明: 设 $A = (P_1, P_2, \dots, P_n)$, $x = (x_1, \dots, x_s, 0, \dots, 0)^T$ 是一个可行解且 $x_j > 0, j = 1, \dots, s$.

若 P_1, P_2, \dots, P_s 线性无关, 则由引理, x 为基本可行解;

设 P_1, P_2, \dots, P_s 线性相关, 则存在不全为0的、而且其中至少有一个为正的数 y_1, \dots, y_s

使得 $y_1 P_1 + y_2 P_2 + \dots + y_s P_s = 0$.

定义 $\bar{x}_j = \begin{cases} x_j - \lambda y_j & j = 1, 2, \dots, s \\ 0 & j = s+1, \dots, n \end{cases}$ 其中 $\lambda = \min \left\{ \frac{x_j}{y_j} \mid y_j > 0 \right\} = \frac{x_k}{y_k} (> 0)$

则当 $j = 1, 2, \dots, s$ 时, 有 $\bar{x}_j = x_j - \lambda y_j = x_j - \frac{x_k}{y_k} y_j \geq 0$

且 $\bar{x}_k = x_k - \frac{x_k}{y_k} y_k = 0$.

$$\because A\bar{x} = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j P_j = \sum_{j=1}^s \left(x_j - \frac{x_k}{y_k} y_j \right) P_j = \sum_{j=1}^s x_j P_j - \frac{x_k}{y_k} \sum_{j=1}^s y_j P_j = b$$

$\therefore \bar{x}$ 是可行解, 且 \bar{x} 的正分量至少比 x 少1. 若 \bar{x} 的正分量所对应的 A 的列线性无关, 则 \bar{x} 为基本可行解, 否则, 从 \bar{x} 出发, 重复以上步骤, 直至获得一个基本可行解.

定理2. 如果(LP)有最优解, 则存在一个基本可行解是最优解。

结论: 若LP问题有最优解, 则要么最优解唯一, 要么有无穷多最优解。

证明: $\min \quad z = cx$

$$s.t. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

不妨设 $x^{(1)} \neq x^{(2)}$ 是LP问题的最优解

则有 $Ax^{(1)} = b, \quad x \geq 0, \quad z^* = cx^{(1)}$

$Ax^{(2)} = b, \quad x \geq 0, \quad z^* = cx^{(2)}$

作 $\bar{x} = \alpha x^{(1)} + (1-\alpha) x^{(2)}, \quad \alpha \in [0,1]$

则 $A\bar{x} = A[\alpha x^{(1)} + (1-\alpha) x^{(2)}] = \alpha b + (1-\alpha) b = b$

又 $\bar{x} \geq 0$, 且 $c\bar{x} = c[\alpha x^{(1)} + (1-\alpha) x^{(2)}] = \alpha z^* + (1-\alpha) z^* = z^*$

则 \bar{x} 是最优解。