## 练习题

1．设 $D$ 为 $n$ 维欧氏空间中的凸集，证明：函数 $f(x)$ 在 $D$ 上是凸函数当且仅当对任意的 $x, y \in D\ (x \neq y)$，函数 $\varphi(a) = f(ax + (1-a)y)$ 是 $0 \le a \le 1$ 的凸函数。

2．考虑下列约束问题：

$$\min\ f(x) = x_1 x_2$$
$$s.t.\quad c(x) = x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$$

（1） 当 $R = 1$ 时，求出问题的局部最优解及最优值 $f^*$。

（2） 如何调整 $R$，使该问题的目标函数最优值小于 $f^*$。

3．设线性规划问题 $\begin{cases} \max\ cx \\ s.t.\quad Ax \le b \\ \qquad\ x \ge 0 \end{cases}$，已知其初始单纯形表及最优单纯形表。

（1） 请填写最优表中空白处的数字并求出 $b_1, b_2, b_3$ 的值；

（2） 写出原问题及其对偶规划并用互补松弛条件求出对偶问题的最优解；

（3） 当 $b$ 变为 $b + \lambda b^*$，其中 $b^* = [1\quad -1\quad 0]^T$，问 $\lambda$ 在什么范围内变化时，原最优性不变？

（4） 目标函数中 $x_2$ 的系数 $c_2$ 从 $-1$ 变为 $-2$，原最优性是否改变？

原问题化为标准型（极小化问题）后，初始表为：

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | $b_1$ |
| $x_5$ | 1 | $-1$ | 2 | 0 | 1 | 0 | $b_2$ |
| $x_6$ | 1 | 1 | $-1$ | 0 | 0 | 1 | $b_3$ |
| | 2 | $-1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

其中 $c_B = (0, 0, 0)$

最优表为：

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | (　) | (　) | (　) | (　) | $-1$ | $-2$ | 10 |
| $x_1$ | (　) | (　) | (　) | (　) | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 15 |
| $x_2$ | (　) | (　) | (　) | (　) | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 5 |
| | (　) | (　) | (　) | (　) | (　) | (　) | (　) |

4. 给定非线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &s.t.\quad Ax = 0 \\ &\qquad\quad x^T x \le \gamma^2 \end{aligned}$$

其中 $A$ 为 $m \times n$ 矩阵 $(m < n)$，$A$ 的秩为 $m$，$c \in R^n$ 且 $c \ne 0$，$\gamma$ 是一个正数。

（1） 试求问题的最优解及目标函数最优值。

（2） 写出该问题的对偶问题（集约束为整个空间并假设对应不等式约束的乘子向量非零）。

5．考虑下列约束问题：

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &s.t.\quad Ax = b \\ &\qquad\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

令 $A = (B, N), x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$,其中，$B$是$m \times m$阶可逆矩阵，$x$是问题的一个可行解，$x_B$和$x_N$分别是由基变量和非基变量构成的向量，则

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

带入原问题的目标函数，得到仅以 $x_N$ 为自变量的函数 $F(x_N) = f(x_B(x_N), x_N)$。令

$$r(x_N) = \nabla F(x_N) = \nabla_{x_N} f(x_B(x_N), x_N) - (B^{-1}N)^T \nabla_{x_B} f(x_B(x_N), x_N).$$

定义 $d = \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix}$，其中

$$d_{N_j} = \begin{cases} -r_{N_j}, & \text{如果} x_{N_j} > 0 \text{或} r_{N_j} \le 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},\quad d_B = -B^{-1}Nd_N,$$

假设 $x_B > 0$。

证明：（1）若 $d \ne 0$，则 $d$ 为 $x$ 处的下降可行方向；

（2）$d = 0$ 的充分必要条件是 $x$ 为约束问题的 KKT 点。