整数规划(IP)问题

一、定义

规划中的变量（部分或全部）限制为整数时，称为整数规划。若在线性规划模型中，变量限制为整数，则称为整数 线性规划。

二、整数规划(**IP**)分类

变量全限制为整数的，称纯（完全）整数规划。

变量部分限制为整数的，称混合整数规划。

要求决策变量仅取**0**或**1**,称为**0-1**规划问题.

整数规划问题的提出

例1 某厂拟用集装箱托运甲乙两种货物，每箱的体积、重量、可获利润以及托运所受限制如下表：

货物	体积 每箱(米^3)	重量 每箱(百斤)	利润 每箱(百元)
甲	**5**	**2**	**20**
乙	**4**	**5**	**10**
托运限制	**24**	**13**	

问两种货物各托运多少箱，可使获得的利润为最大？

解：设托运甲、乙两种货物x_1，x_2箱，用数学式可表示为：

(ILP)

$$MaxZ = 20x_1 + 10x_2$$

$$ST: \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, \ x_2 \ge 0, \text{ 且为整数} \end{cases}$$

$$MaxZ = 20x_1 + 10x_2$$

$$ST: \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

称为(ILP)的伴随规划

2、整数线性规划一般形式

$$\max \quad cx$$

$$ST: \begin{cases} Ax = b \\ x_i \geq 0, x_i\text{部分或全部为整数} \end{cases}$$

$$\min \quad cx$$

$$ST: \begin{cases} Ax = b \\ x_i \geq 0, x_i\text{部分或全部为整数} \end{cases}$$

3、与LP问题的区别

$$MaxZ = 20x_1 + 10x_2$$

$$ST: \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, \ x_2 \ge 0, \ \text{且为整数} \end{cases}$$

（1）求解方法方面

在例1中，

求ILP问题的伴随规划的最优解(值)为：

$$x^* = (4.8, 0), Z^* = 96$$

而 $x^{(1)} = (5,0)$ 不是可行解；

$x^{(2)} = (4,0)$ 是可行解，但 $Z = 80$ 非最优值

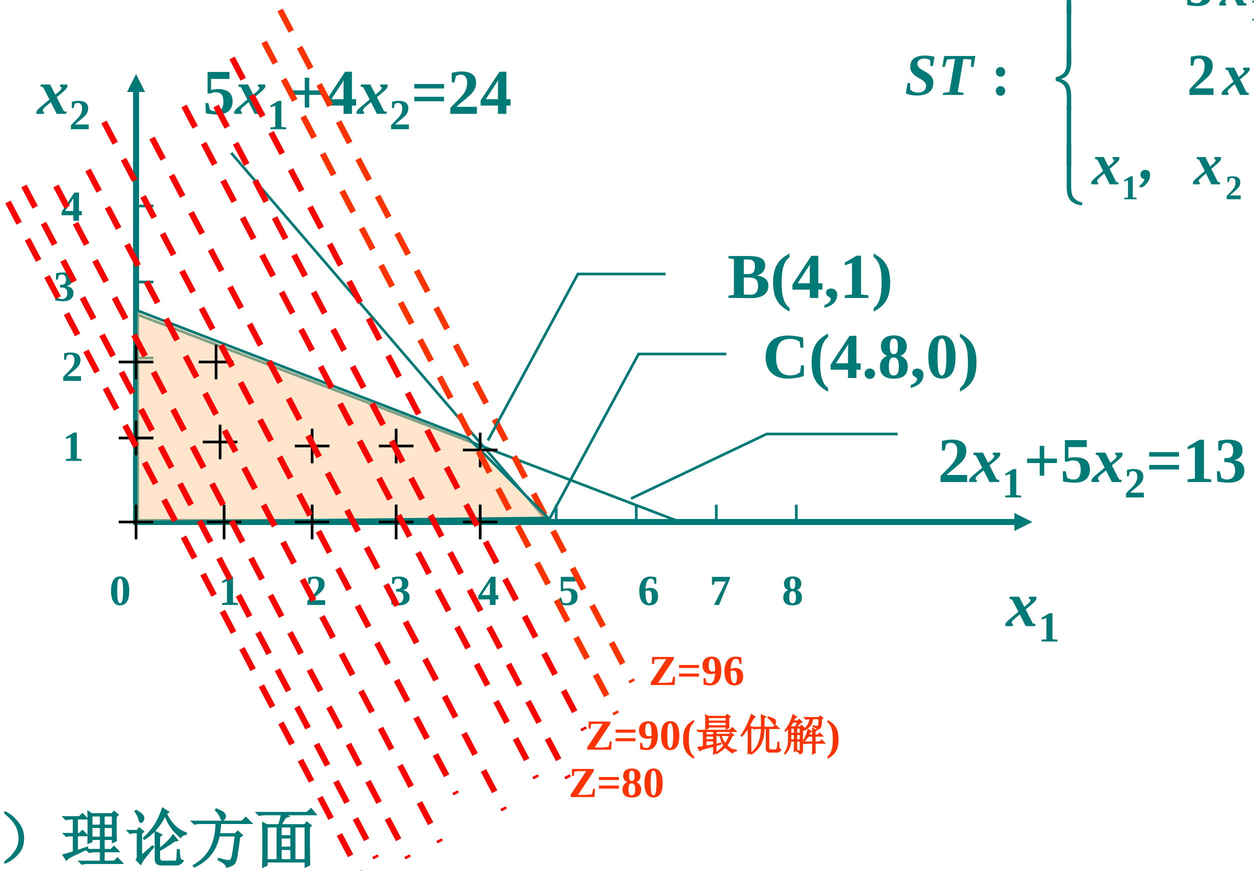
此IP问题的最优解(值)为：

$$x^* = x^{(3)} = (4,1), Z^* = 90$$

例2 做图分析例1的最优解(直观)

$$MaxZ = 20x_1 + 10x_2$$

$$ST:\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1,\ x_2 \ge 0,\ 且为整数 \end{cases}$$



（2）理论方面

IP 问题可行域不为凸集

整数规划特点

伴随规划有最优解，当自变量限制为整数后，其整数规划解出现下述情况：

①原线性规划最优解全是整数，则整数规划最优解与线性规划最优解一致。

②整数规划无可行解。

③有可行解（当然就存在最优解），但最优解值变差。

例 原线性规划为：

$$\min \quad x_1+x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1+4x_2=5,$$

$$x_1\geq 0 \quad x_2\geq 0$$

其最优实数解为：$x_1=0$，$x_2=5/4$，最优值 $=5/4$。

若限制整数则可行域为空集.

例 原线性规划为：

$$\min \quad x_1+x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1+4x_2=6$$

$$x_1\geq 0 \quad x_2\geq 0$$

其最优实数解为：$x_1=0$，$x_2=3/2$，最优值$=3/2$。

若限制整数则得：$x_1=1$，$x_2=1$，最优值$=2$。

四、求解方法分类：

1．割平面法——主要求解纯整数线性规划

2．分枝定界法——可求纯或混合整数线性规划

3．隐枚举法——求解“0~1”整数规划：

①过滤隐枚举法；

②分枝隐枚举法

4．匈牙利法——解决指派问题（“0~1”规划特殊情形）。

5．蒙特卡洛法——求解各种类型规划。

第二节 分枝定界法

适用范围：

纯整数规划问题

0-1规划问题

混合整数规划问题

一、几何解释

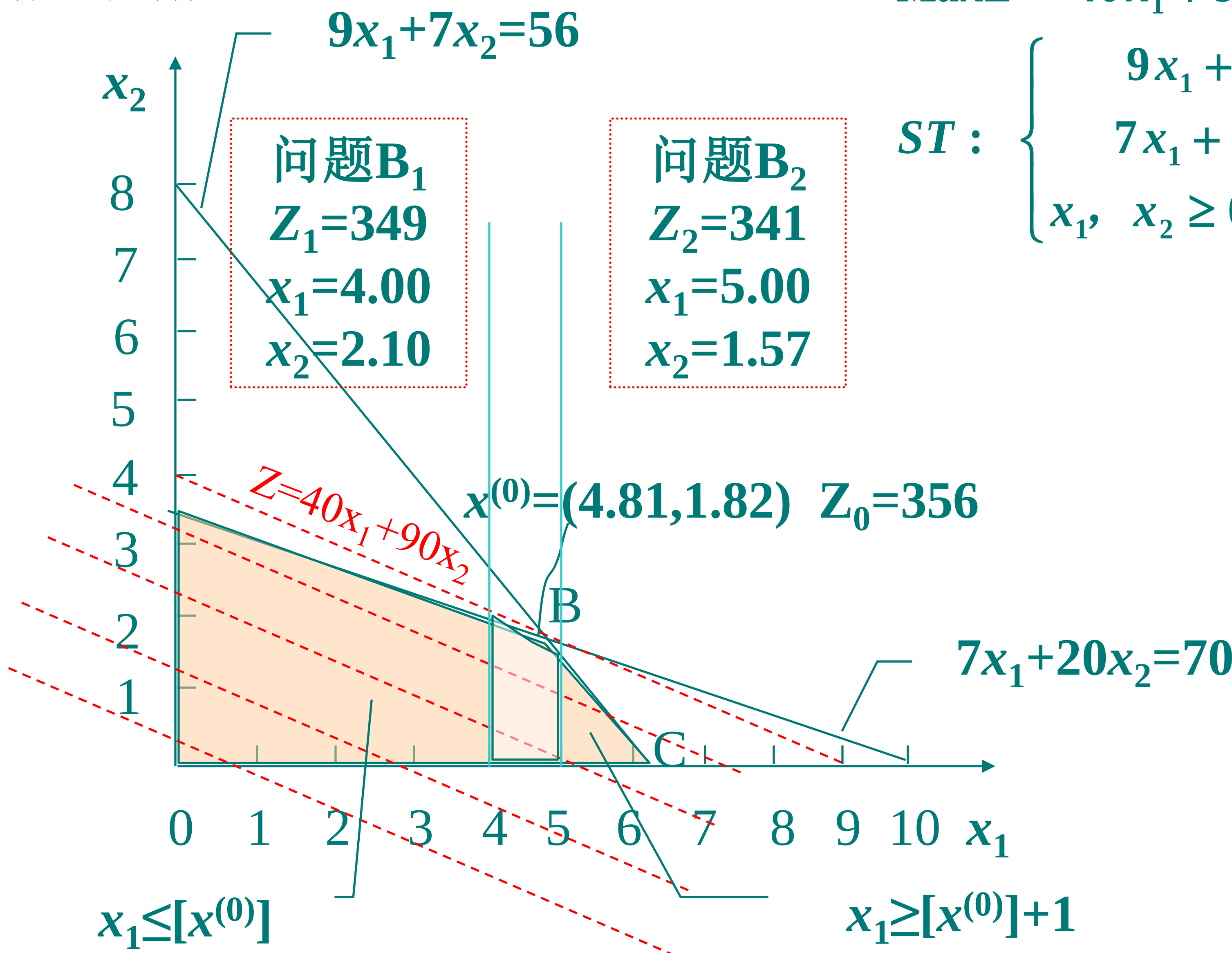
$$MaxZ = 40x_1 + 90x_2$$

$$ST: \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1,\ x_2 \ge 0,\ \text{且为整数} \end{cases}$$

解：图解法。

$$MaxZ = 40x_1 + 90x_2$$

$$ST: \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1,\ x_2 \ge 0,\ 且为整数 \end{cases}$$



例:求解下列整数规划问题

$$(A_0)\quad \begin{cases} \max\ z = 10x_1 + 20x_2 \\ s.t.\quad 0.25x_1 + 0.4x_2 \le 3 \\ \qquad x_1 \le 8 \\ \qquad x_2 \le 4 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

(A_0)的伴随规划为:

$$(B_0)\quad \begin{cases} \max\ f = 10x_1 + 20x_2 \\ s.t.\quad 0.25x_1 + 0.4x_2 \le 3 \\ \qquad x_1 \le 8 \\ \qquad x_2 \le 4 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

用单纯形法求解(B_0),得到最优解：$x_0^* = (5.6,\ 4)^T$, $f_0{}^* = 136.$

1.计算原问题(A_0)的目标函数值的初始上界$\overline{z}$

$$\overline{z} \le f_0^* = 136.$$

$$\text{取}\ \overline{z} = f_0^* = 136.$$

注1:若(B_0)无可行解,则(A_0)也无可行解,停止计算.

注2:若(B_0)的最优解满足整数条件,则该最优解也是(B_0)的最优解,停止计算.

注3:若(B_0)无界,则(A_0)无界,停止计算.

2.计算原问题(A_0)的目标函数值的初始下界$\underline{z}$.

若能从A_0的约束条件中观察到一个整数可行解，则可将其目标函数值作为A_0目标函数值的初始下界，否则令$\underline{z}=-\infty$.

本例中，很容易得到一个整数可行解$(0,0)^T$，所以令$\underline{z}=0$.

(B_0)最优解：$x_0^* = (5.6,\ 4)^T$.

3.增加约束条件将原问题分枝

$$(A_1)\quad \begin{cases} \max\ z = 10x_1 + 20x_2 \\ s.t.\quad 0.25x_1 + 0.4x_2 \le 3 \\ \qquad x_1 \le 8 \\ \qquad x_2 \le 4 \\ \qquad x_1 \le 5 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \qquad (A_2)\quad \begin{cases} \max\ z = 10x_1 + 20x_2 \\ s.t.\quad 0.25x_1 + 0.4x_2 \le 3 \\ \qquad x_1 \le 8 \\ \qquad x_2 \le 4 \\ \qquad x_1 \ge 6 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

作出问题A_1,A_2的伴随规划B_1,B_2并将同一问题分解出的两个分枝问题称为”一对分枝”.

4.分别求解一对分枝（伴随规划）

（1）无可行解：说明该枝情况已查明，不需要再继续分枝，称该分枝为“树叶”.

（2）得到整数最优解：说明该枝情况也已查明，不需要再继续分枝，称该分枝为“树叶”.

（3）得到非整数解：

i)该最优解的目标函数值f小于当前的下界$\underline{z}$,则该分枝内不可能含有原问题的整数最优解，该分枝称为“枯枝”，需要剪掉。

ii)若该最优解的目标函数值f大于当前的下界$\underline{z}$，则仍需要对该分枝继续分枝，以查明该分枝内是否有目标函数值比当前$\underline{z}$更好的整数最优解。

$$(B_1)\begin{cases} \max\ z = 10x_1 + 20x_2 \\ s.t.\quad 0.25x_1 + 0.4x_2 \le 3 \\ \qquad x_1 \le 8 \\ \qquad x_2 \le 4 \\ \qquad x_1 \le 5 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
\qquad
(B_2)\begin{cases} \max\ z = 10x_1 + 20x_2 \\ s.t.\quad 0.25x_1 + 0.4x_2 \le 3 \\ \qquad x_1 \le 8 \\ \qquad x_2 \le 4 \\ \qquad x_1 \ge 6 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$x_1^* = (5, 4)^T$$

树叶

$$f_1^* = 130$$

$$x_2^* = (6, 3.75)^T$$

$$f_2^* = 135$$

5.修改上、下界$\bar{z}$与$\underline{z}$

(1)修改下界$\underline{z}$

修改下界的时机：每求出一个整数可行解。

修改下界的原则：在至今所有计算出来的整数可行解中，选目标函数值最大的那个作为最新下界$\underline{z}$.

(2)修改上界$\bar{z}$

修改上界的时机：每求完一对分枝。

修改上界的原则：挑选在迄今为止所有未被分枝的问题的目标函数值中最大的一个作为新的上界，新的上界应小于原来的上界，在分枝定界法的整个求解过程中，上界的值在不断减少。.

$$\underline{z} = 0 \qquad \bar{z} = 136$$

$$x_1^* = (5, 4)^T \qquad x_2^* = (6, 3.75)^T$$

$$f_1^* = 130 \qquad f_2^* = 135$$

修改下界$\underline{z} = 130$.　修改上界$\bar{z} = 135$.

$\because B_2$的最优解不是整数，且$\bar{z} > \underline{z}$

$\therefore$需要继续分枝。

$$
(B_3)\begin{cases}
\max\ f = 10x_1 + 20x_2 \\
s.t.\quad 5x_1 + 8x_2 \le 60 \\
\qquad x_1 \le 8 \\
\qquad x_2 \le 4 \\
\qquad x_1 \ge 6 \\
\qquad x_2 \le 3 \\
\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{cases}
\qquad
(B_4)\begin{cases}
\max\ f = 10x_1 + 20x_2 \\
s.t.\quad 5x_1 + 8x_2 \le 60 \\
\qquad x_1 \le 8 \\
\qquad x_2 \le 4 \\
\qquad x_1 \ge 6 \\
\qquad x_2 \ge 4 \\
\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{cases}
$$

树叶

$$x_3^* = (7.2, 3)^T$$

$$f_3^* = 132$$

B_4的可行域$=\varnothing$。

$\underline{z} = 130$ $\bar{z} = 135$

$x_3^* = (7.2, 3)^T$

$f_3^* = 132$

修改上界$\bar{z} = 132$.

$\because B_3$的最优解不是整数，且$\bar{z} > \underline{z}$

$\therefore$需要继续分枝。

$$
(B_5)\begin{cases}
\max \ f = 10x_1 + 20x_2 \\
s.t. \quad 5x_1 + 8x_2 \le 60 \\
\qquad x_1 \le 8 \\
\qquad x_2 \le 4 \\
\qquad x_1 \ge 6 \\
\qquad x_2 \le 3 \\
\qquad x_1 \le 7 \\
\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{cases}
\qquad
(B_6)\begin{cases}
\max \ f = 10x_1 + 20x_2 \\
s.t. \quad 5x_1 + 8x_2 \le 60 \\
\qquad x_1 \le 8 \\
\qquad x_2 \le 4 \\
\qquad x_1 \ge 6 \\
\qquad x_2 \le 3 \\
\qquad x_1 \ge 8 \\
\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{cases}
$$

$$x_5^* = (7, 3)^T \qquad x_6^* = (8, 2.5)^T$$

$$f_5^* = 130 \qquad f_6^* = 130$$

$$\underline{z} = 130 \qquad \bar{z} = 135$$

$$x_5^* = (7, 3)^T \qquad x_6^* = (8, 2.5)^T$$

$$f_5^* = 130 \qquad f_6^* = 130$$

修改上界$\bar{z} = 130$.

6.结束准则

当所有的分枝均已查明（或无可行解---“树叶”，或已为整数可行解---“树叶”，或其目标函 数值不大于下界$\underline{z}$----“枯枝”），且此时$\underline{z}=\bar{z}$，则得到原问题的整数最优解。

$$\therefore \text{最优解：} x^*=(7,3)^T, f^*=130$$

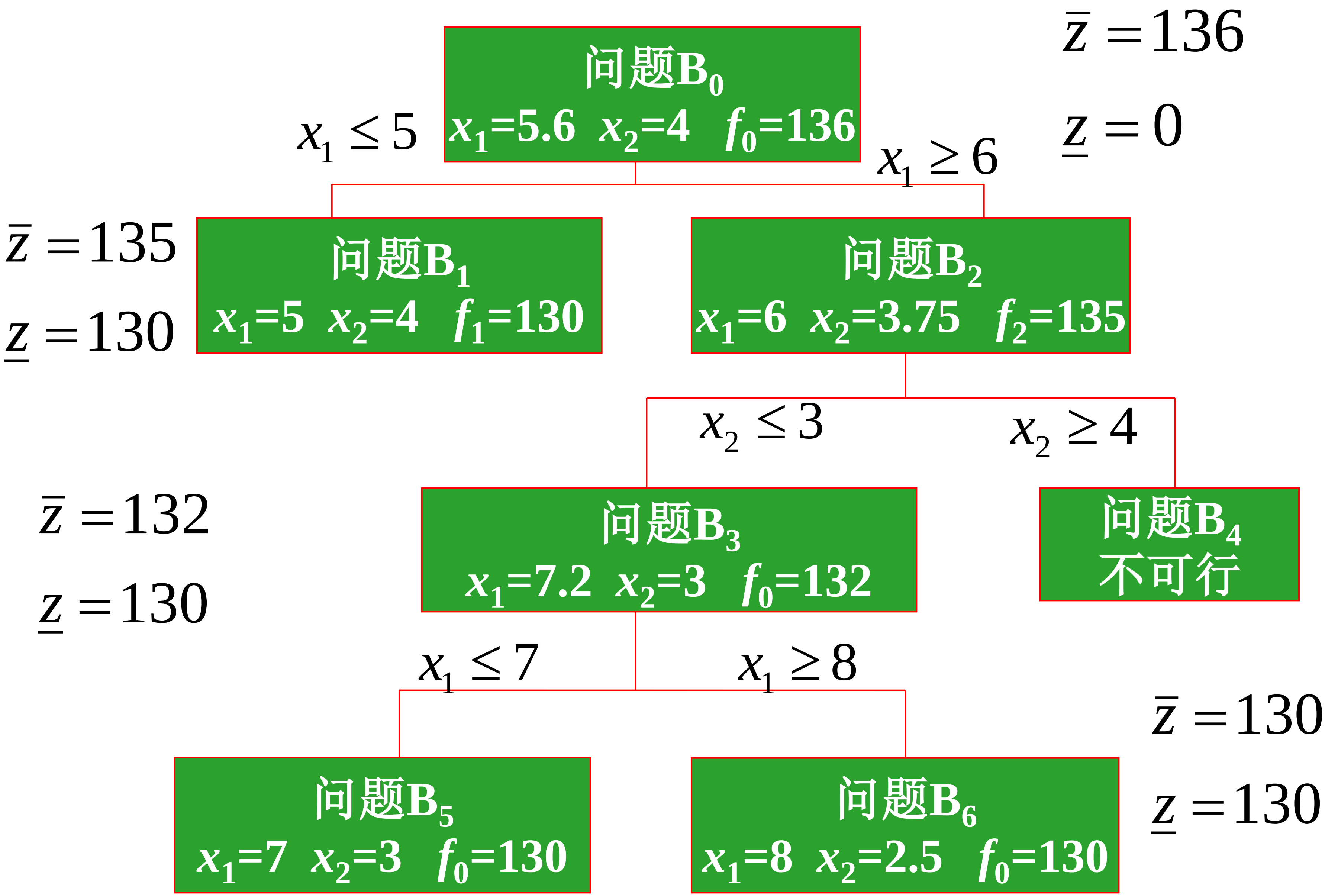
$$\text{或} x^*=(5,4)^T, f^*=130.$$

例:求解下列整数规划问题

$$(A_0)\quad \begin{cases} \max\ z = 10x_1 + 20x_2 \\ s.t.\quad 0.25x_1 + 0.4x_2 \le 3 \\ \qquad\qquad x_1 \qquad\quad \le 8 \\ \qquad\qquad\qquad x_2 \le 4 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

(A_0)的伴随规划为:

$$(B_0)\quad \begin{cases} \max\ f = 10x_1 + 20x_2 \\ s.t.\quad 0.25x_1 + 0.4x_2 \le 3 \\ \qquad\qquad x_1 \qquad\quad \le 8 \\ \qquad\qquad\qquad x_2 \le 4 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



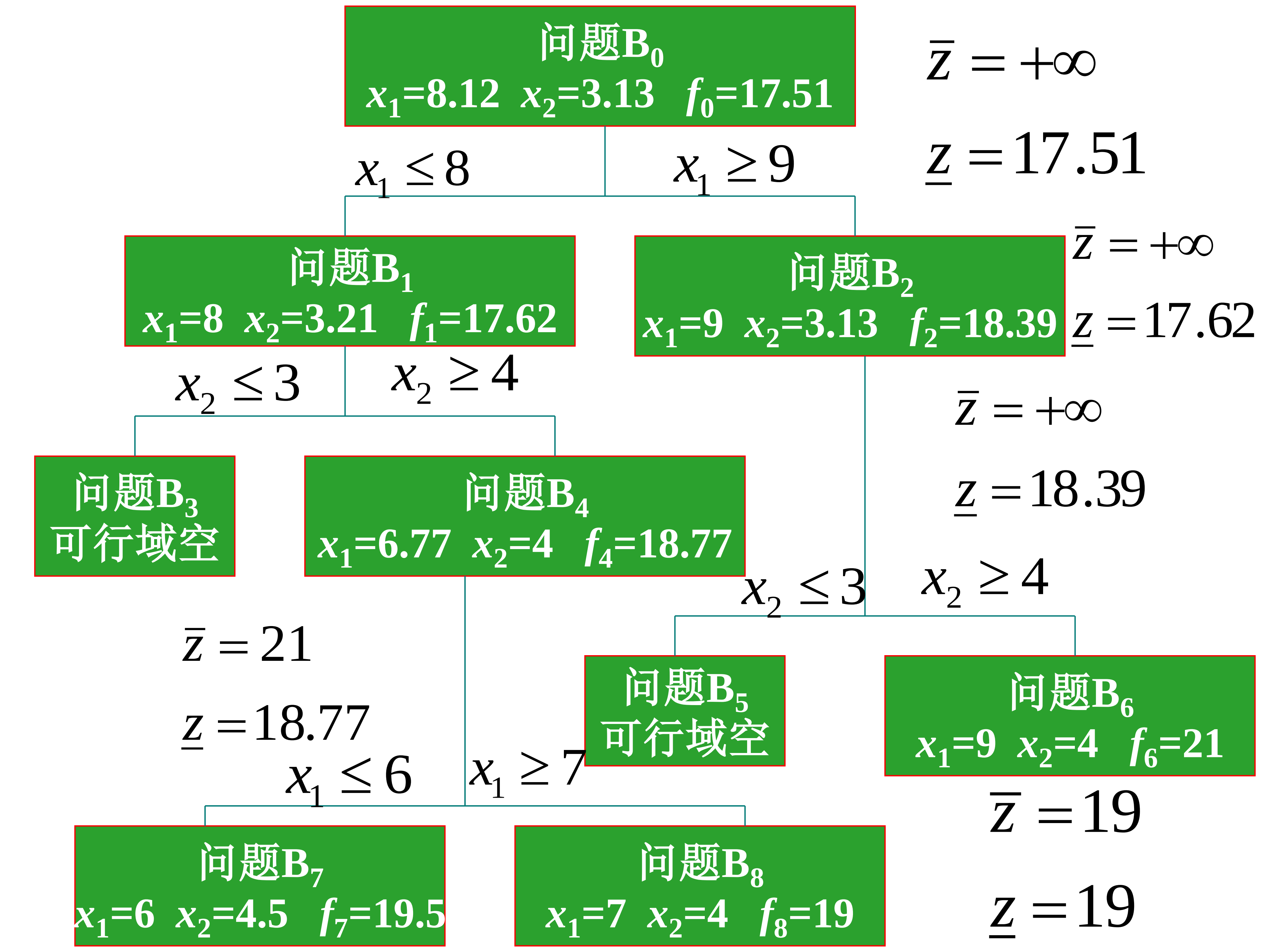
$\bar{z}=136$
$\underline{z}=0$
问题B_0
$x_1=5.6$ $x_2=4$ $f_0=136$
$x_1\leq 5$
$x_1\geq 6$
$\bar{z}=135$
$\underline{z}=130$
问题B_1
$x_1=5$ $x_2=4$ $f_1=130$
问题B_2
$x_1=6$ $x_2=3.75$ $f_2=135$
$x_2\leq 3$
$x_2\geq 4$
$\bar{z}=132$
$\underline{z}=130$
问题B_3
$x_1=7.2$ $x_2=3$ $f_0=132$
问题B_4
不可行
$x_1\leq 7$
$x_1\geq 8$
$\bar{z}=130$
$\underline{z}=130$
问题B_5
$x_1=7$ $x_2=3$ $f_0=130$
问题B_6
$x_1=8$ $x_2=2.5$ $f_0=130$

例:求解下列整数规划问题

$$(A_0)\quad \begin{cases} \min\ z = x_1 + 3x_2 \\ s.t.\quad 22x_1 + 34x_2 \geq 285 \\ \qquad\qquad x_2 \qquad\qquad \geq 3.13 \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

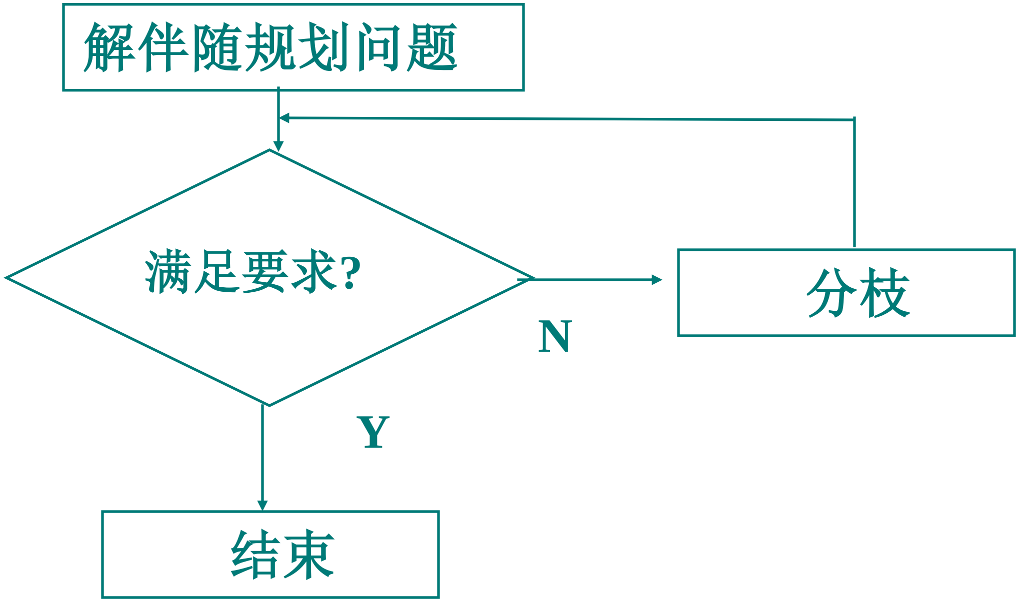
(A$_0$)的伴随规划为:

$$(B_0)\quad \begin{cases} \min\ z = x_1 + 3x_2 \\ s.t.\quad 22x_1 + 34x_2 \geq 285 \\ \qquad\qquad x_2 \qquad\qquad \geq 3.13 \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



问题B0
x1=8.12 x2=3.13 f0=17.51
z̄ = +∞
z = 17.51
x1 ≤ 8
x1 ≥ 9
问题B1
x1=8 x2=3.21 f1=17.62
问题B2
x1=9 x2=3.13 f2=18.39
z̄ = +∞
z = 17.62
x2 ≤ 3
x2 ≥ 4
z̄ = +∞
z = 18.39
问题B3
可行域空
问题B4
x1=6.77 x2=4 f4=18.77
x2 ≤ 3
x2 ≥ 4
z̄ = 21
z = 18.77
问题B5
可行域空
问题B6
x1=9 x2=4 f6=21
x1 ≤ 6
x1 ≥ 7
z̄ = 19
问题B7
x1=6 x2=4.5 f7=19.5
问题B8
x1=7 x2=4 f8=19
z = 19

三、运算步骤



一般整数规划问题属于一类未解决的难题，**NP-complete**，只有少数特殊问题有好的算法，如**任务分配问题、匹配问题**

第三节 割平面法

适用范围：全整数规划问题

$$\min z = cx$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = 1, 2, \cdots, m)$$

其中$\boldsymbol{x_j, a_{ij}, b_i}$全为整数,

$$\boldsymbol{x_j \geq 0, (i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n)}$$

一、一个符号的说明

$$r = \lfloor r \rfloor + f, 0 \leq f < 1$$

其中$\lfloor r \rfloor$为不大于r的最大整数，

f为r的纯小数部分

- min $z=cx$
- S.t. $Ax=b$ (1)
- $x \geq 0$ (2)
- x_i为整数 (3)
- 不考虑x_i为整数的条件，解(LP)问题，得最优单纯形表

	x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1} … x_n	
x_1	1	0	…	0	y_{1m+1} … y_{1n}	b'_1
x_2	0	1	…	0	y_{2m+1} … y_{2n}	b'_2
…						
x_r	0	0	…	0	y_{rm+1} … y_{rn}	b'_r
…						
x_m	0	0	…	1	y_{mm+1} … y_{mn}	b'_m
	0				$C_BB^{-1}N-C_N$	$C_BB^{-1}b$

- 1. 若b'_i为整数，则$x^0=(b'_1, b'_2,\ldots, b'_m,0,\ldots 0)^T$即为原整数规划问题的最优解.
- 2. 若存在b'_r不是整数，考虑第r个方程：
- $$x_r+\sum_{j=m+1}^{n} y_{rj}x_j=b'_r$$ 写成

$$x_r+\sum_{j=m+1}^{n}\lfloor y_{rj}\rfloor x_j+\sum_{j=m+1}^{n} f_{rj}x_j=\lfloor b'_r\rfloor+f_r \quad (4)$$

- 其中 $$f_{rj}=y_{rj}-\lfloor y_{rj}\rfloor,\ f_r=b'_r-\lfloor b'_r\rfloor$$
- (4)写成 $$\sum_{j=m+1}^{n} f_{rj}x_j=f_r+\left(\lfloor b'_r\rfloor-x_r-\sum_{j=m+1}^{n}\lfloor y_{rj}\rfloor x_j\right)$$
- 若$\lfloor b'_r\rfloor-x_r-\sum_{j=m+1}^{n}\lfloor y_{rj}\rfloor x_j\le -1$

  则$\sum_{j=m+1}^{n} f_{rj}x_j\le f_r-1<0$，矛盾

  所以$\lfloor b'_r\rfloor-x_r-\sum_{j=m+1}^{n}\lfloor y_{rj}\rfloor x_j\ge 0$

  即$-\sum_{j=m+1}^{n} f_{rj}x_j\le -f_r$

所以$-\sum_{j=m+1}^{n} f_{rj}x_j+y_r=-f_r, y_r\ge 0$为整数。

割平面方程(Gomory约束).

- 定理：整数规划
- $\min \ z=cx$
- S.t. $Ax=b$
- $x \geq 0$
- x_i为整数
- 与
- $\min \ z=cx$
- S.t. $Ax=b$
- $y_r - \sum_{j=m+1}^{n} f_{rj} x_j = -f_r$
- x， $y_r \geq 0$
- x_i， y_r为整数
- 等价。

证明：设$x_1', x_2', \cdots x_m', \cdots x_n'$是(1)的非负整数解，

代入 $y_r - \sum_{j=m+1}^{n} f_{rj} x_j = -f_r$，得

$$y_r = -f_r + \sum_{j=m+1}^{n} f_{rj} x_j' \qquad (*)$$

$$\because f_r = b'_r - \lfloor b'_r \rfloor,\ f_{rj} = y_{rj} - \lfloor y_{rj} \rfloor,\ x_r' + \sum_{j=m+1}^{n} y_{rj} x_j' = b'_r$$

$$\therefore y_r = -b'_r + \lfloor b'_r \rfloor + \sum_{j=m+1}^{n} y_{rj} x_j' - \sum_{j=m+1}^{n} \lfloor y_{rj} \rfloor x_j'$$

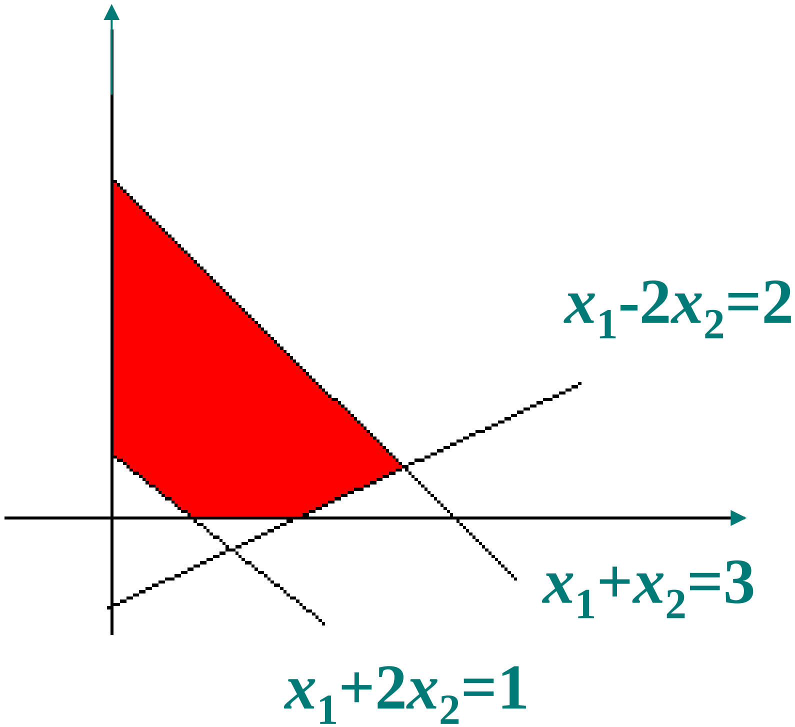
$$= -x_r' + \lfloor b'_r \rfloor - \sum_{j=m+1}^{n} \lfloor y_{rj} \rfloor x_j'$$

$\Rightarrow y_r$是整数，又由（*），有$y_r \geq -f_r > -1$，

$\because y_r$是整数，$\therefore y_r \geq 0$。

❖ 例：用割平面法解下列整数规划问题

$$\begin{cases} \max\ z = 3x_1 - x_2 \\ s.t. \quad x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ \qquad\quad x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ \qquad\quad x_1 + x_2 \leq 3 \\ \qquad\quad x_1, x_2 \text{为非负整数} \end{cases}$$



- 解：引入松弛变量，求解如下模型

$$\begin{cases} \max\ z = 3x_1 - x_2 \\ s.t. \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ \qquad x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 = 2 \\ \qquad x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 3 \\ \qquad x_i \geq 0 \end{cases}$$

- 得最优表如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	0	1/3	2/3	8/3
x_2	0	1	0	-1/3	1/3	1/3
x_3	0	0	1	-1/3	4/3	7/3
	0	0	0	4/3	5/3	23/3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	0	1/3	2/3	8/3
x_2	0	1	0	-1/3	1/3	1/3
x_3	0	0	1	-1/3	4/3	7/3
	0	0	0	4/3	5/3	23/3

- x_1=8/3不是整数，取相应的方程
- $x_1 + 1/3\, x_4 + 2/3\, x_5 = 8/3 = (2+2/3)$
- 得割平面方程
- $y_1 - 1/3\, x_4 - 2/3\, x_5 = -2/3$
- 将割平面方程添入原最优表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	
x_1	1	0	0	1/3	2/3	0	8/3
x_2	0	1	0	-1/3	1/3	0	1/3
x_3	0	0	1	-1/3	4/3	0	7/3
y_1	0	0	0	-1/3	-2/3	1	-2/3
	0	0	0	4/3	5/3	0	23/3
x_1	1	0	0	0	0	1	2
x_2	0	1	0	-1/2	0	1/2	0
x_3	0	0	1	-1	0	2	1
x_5	0	0	0	1/2	1	-3/2	1
	0	0	0	1/2	0	5/2	6

$$y_1 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 = -\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \le -\frac{2}{3}$$

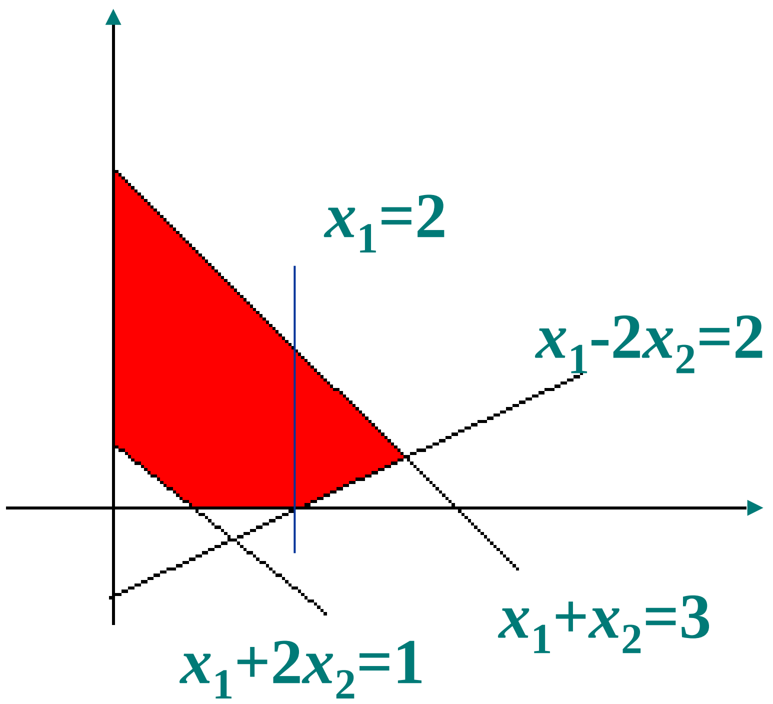
$$\Leftrightarrow x_4 + 2x_5 \ge 2$$

$$\because x_4 = 2 - x_1 + 2x_2$$

$$x_5 = 3 - x_1 - x_2$$

$$\therefore \quad x_1 \le 2$$

$$\begin{cases} \max\ z = 3x_1 - x_2 \\ s.t. \quad x_1 + 2x_2 \ge 1 \\ \qquad x_1 - 2x_2 \le 2 \\ \qquad x_1 + x_2 \le 3 \\ \qquad x_1, x_2 \text{为非负整数} \end{cases}$$



- 注1：通常取$f_r=\max\{f_i|1 \le i \le m\}$，以
- $$y_r-\sum_{j=m+1}^{n} f_{rj}x_j = -f_r$$
- 作为割平面方程。
- 注2：每增加一个割平面方程，就增加一个松弛变量y_r，此松弛变量是唯一可被选作离基变量的基变量，若在求解过程中y_r再次成为基变量，则可从表中删除它相应的行和列。

0-1型整数规划

- -----变量x_i仅可取值0或1.
- 应用：
- 1．特殊约束的处理。
- 2．多中选一的约束。

隐枚举法(Implicit Enumeration)

- 例：max $z=3x_1-2x_2+5x_3$
- s.t $x_1+2x_2-x_3\le 2$ (1)
- $x_1+4x_2+x_3\le 4$ (2)
- $x_1+x_2\le 3$ (3)
- $4x_2+x_3\le 6$ (4)
- $x_i=0$ or 1
- 解：(1)先用试探法求出一个可行解，如$x^0=(1,0,0)^T$，其目标函数值为$z_0=3$.
- (2) 以$z\ge z_0$作为过滤条件增加到原有约束集中,得

- max $z=3x_1-2x_2+5x_3$
- s.t $x_1+2x_2-x_3\leq 2$ (1)
- $x_1+4x_2+x_3\leq 4$ (2)
- $x_1+x_2\leq 3$ (3)
- $4x_2+x_3\leq 6$ (4)
- $3x_1-2x_2+5x_3\geqslant 3$ (5)
- $x_i=0$ or 1
- (3) 求解新的规划模型。
- 按照枚举法的思路，依次检查各种变量的组合，每找到一个可行解，求出它的目标函数值z_1，若$z_1\geqslant z_0$，则将过滤条件换成$z\geqslant z_1$。

点	过滤条件	约束					z值
	$3x_1-2x_2+5x_3 \geqslant 3$	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	
$(0,0,0)^T$		×					
$(0,0,1)^T$		√	√	√	√	√	5
	$3x_1-2x_2+5x_3 \geqslant 5$						
$(0,1,0)^T$		×					
$(0,1,1)^T$		×					
$(1,0,0)^T$		×					
$(1,0,1)^T$		√	√	√	√	√	8
	$3x_1-2x_2+5x_3 \geqslant 8$						
$(1,1,0)^T$		×					
$(1,1,1)^T$		×					

- 最优解为： $(1,0,1)^T$

0-1型整数规划的典型应用问题

- 1. 背包问题
- 例：一登山运动员，他需要携带的物品如下，设他可携带的最大量为25kg,试选择该队员所应携带的物品。

物品	食品	氧气	冰镐	绳索	帐篷	照相器材	通信器材
重量/kg	5	5	2	6	12	2	4
重要性	20	15	18	14	8	4	10

- 解：设$x_i=0$ 不应携带物品i
- $x_i=1$ 应携带物品i
- Max $20x_1+15x_2+18x_3+14x_4+8x_5+4x_6+10x_7$
- S.t. $5x_1+5x_2+2x_3+6x_4+12x_5+2x_6+4x_7 \le 25$
- $x_i=0$ or 1

背包问题的一般形式

$$
\begin{cases}
\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \\
\qquad x_i = 1 \; or \; 0
\end{cases}
$$

2. 布点问题

- 例：某城市共有6个区，每个区都可以建消防站，市政府希望设置的消防站越少越好，但必须满足在城市任何地区发生火警时，消防车要在15分钟内赶到现场，据实地测定，各区之间消防车行驶的时间见下表，试制定一个布点最少的计划。

	地区1	地区2	地区3	地区4	地区5	地区6
地区1	0	10	16	28	27	20
地区2	10	0	24	32	17	10
地区3	16	24	0	12	27	21
地区4	28	32	12	0	15	25
地区5	27	17	27	15	0	14
地区6	20	10	21	25	14	0

$$
\begin{cases}
\min \sum_{i=1}^{6} x_i \\
s.t. \quad x_1 + x_2 \geq 1 \\
\qquad x_1 + x_2 + x_6 \geq 1 \\
\qquad x_3 + x_4 \geq 1 \\
\qquad x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \\
\qquad x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\
\qquad x_2 + x_5 + x_6 \geq 1 \\
\qquad x_i = 1 \; or \; 0
\end{cases}
$$

3. 旅行商问题

- 一个商人欲到n个城市推销商品，每两个城市i和j之间的距离为d_{ij}，如何选择一条道路，使得商人每个城市走过一遍后回到起点且所走路径最短。
- 解：设x_{ij}=1若商人行走的路线中包含从城市i到j的路径，否则x_{ij}=0。

$$\begin{cases} \min \sum\limits_{i \neq j} d_{ij} x_{ij} \\ s.t. \quad \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \cdots, n \\ \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ j = 1, 2, \cdots, n \\ \qquad \sum\limits_{i, j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, 2 \leq |S| \leq n - 1 \ S \subset \{1, \cdots, n\} \\ \qquad x_{ij} = 1 \ or \ 0 \end{cases}$$