1

首先易知强连通一定是半连通。所以，如果运行强连通算法，只有 1 个强连通分量，说明是强连通图，那么肯定是半连通的，如果强连通分量的数量≥ 2，则只要强连通分量之间存在一条顺序且方向一致的边，就是半连通的。

$$\text{即令}S_1, S_2, \dots, S_n\text{为各个强连通分量}$$

$$\text{存在边}E_{12}, E_{23}, \dots, E_{(n-1)n}\text{将各个强连通分量连接起来，那么此 G 是半连通的}$$

怎么知道有没有这样的边呢？将每个强连通分量看成是一个新的点，然后求这个新图的表，如果S_{n-1}的表中有S_n，说明这两个强连通分量之间有一条边。从 1 开始遍历，如果遍历到 n-1 都有这样的边，说明有一个这样的链把这些强连通分量串起来，所以整个图是一个半连通图。

运行时间取决于强连通分量算法的运行时间和邻接表的运行时间，综合下来还是 O(V+E)

2

3

a 证明最小生成树是唯一的

$$\text{假设目前已知一棵最小生成树}T_1\text{, 欲求另一棵最小生成树}T_2\text{，}\forall V_T \in T_1, \forall V_G \in G, V_G \notin T_1$$

$$\text{可将}V_T\text{换出，}V_G\text{换入，得到一棵新的生成树}T_2$$

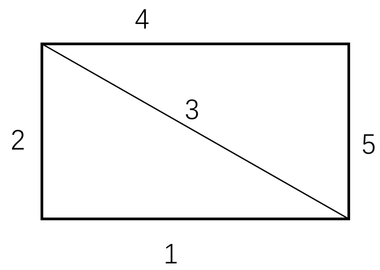
$$\text{由于}T_1\text{是一棵最小生成树，且}w(V_T) \neq w(V_G)$$

$$\text{因此得到的新生成树}T_2\text{的权值}w(T_2) > w(T_1)\text{, 否则}T_2\text{就是最小生成树，与已知条件矛盾}$$

$$\therefore \text{最小生成树是唯一的}$$

a 证明次优最小生成树不唯一

举例证明，如图所示。



次优最小生成树有 134 和 215。

b 证明最小生成树和次优最小生成树只有一条边不同

令最小生成树=MT，次优最小生成树=SMT。假设 MT 和 SMT 有两条边不同，即有

$$\mathrm{SMT} = \mathrm{MT} - \text{边}\,1 + \text{边}\,2 - \text{边}\,3 + \text{边}\,4$$

因此我总可以舍弃边 3 和边 4 或者边 1 和边 2，构造出另一颗生成树

$$\mathrm{SMT2} = \mathrm{MT} - \text{边}\,1 + \text{边}\,2 \text{ 或 } \mathrm{SMT2} = \mathrm{MT} - \text{边}\,3 + \text{边}\,4$$

使得 $w(\mathrm{MT}) < w(\mathrm{SMT2}) < w(\mathrm{SMT})$

这与 SMT 是次优最小生成树的假设矛盾，因此，MT 和 SMT 只有 1 条边不同

c 求两点间最大权重的边

执行 prime 算法，每次新加进一条边，就计算 T 中每个点V_T到新点 N 的最大边

$$m[V_T]\,[N] = \max\,(m[V_T][U], w(U, N))$$

其中 m 数组是维护的两个点之间的最大边的权重，U 是新加进的与 N 相连的边的另一个顶点，$w(U, N)$

是这条边的权值

d 求次优最小生成树

随便将一个不属于 T 的边加入 T 中，形成一个环，找这个环里面除了刚加入的那条边以外权值最大的边去掉，得到一棵新的生成树，所有这样的生成树里面 w 最小的就是次优最小生成树。

4