Cálculo de Combinadores SKI

Mateus Davi Simon
Ricardo de Araujo Coelho

Histórico

- Quando/Quem
  - Em 1920 o ucraniano Moses Schönfinkel publicou suas ideias sobre combinadores em uma palestra.

  - Combinadores foram reinventados em **1927** pelo americano **Haskell Curry**. Primeiro a definir Lógica Combinatória como um sistema preciso.

Histórico

- Finalidade
  - Visava originalmente servir como uma "pré-lógica" que clarificasse o papel das variáveis quantificadas na lógica, eliminando-as do processo.
  - Hoje em dia linguagem de programação funcional e sistemas formais de alta-ordem precisam de uma versão de λ ou Lógica Combinatória(CL) como parte das suas sintaxes.
  - É um sistema turing completo minimalista e usado para se provar teoremas.

Origem

- Propriedade Comutativa da adição:

$$(\forall x, y)\ x + y \quad = \quad y + x$$

  Possui variáveis ligadas ‘x’ e ‘y’ que podem ser removidas:

$$A(x,y) = x+y \qquad\qquad (\text{para todo } x, y)$$

$$(\mathbf{C}\ (f))(x,y) = f(y,x) \qquad\qquad (\text{para todo } f,x,y)$$

  Propriedade Comutativa:

$$A = \mathbf{C}(A)$$

- **C** é chamado de *combinador*.

Cálculo de Combinadores SKI

- Em computação, sistema de combinadores são projetados para fazer o mesmo trabalho que sistemas de cálculo-λ, mas sem usar variáveis ligadas.

- De fato, as complicações técnicas que involvem a substituição e a conversão-α são completamente evitadas.

Combinadores SKI

- Combinadores: funções de alta ordem

  I: identidade I(x) = x

  K: formador de constantes K(a, x) = a

  S: Operador de composição S(f, g)(x) = f(x, g(x))

Lógica Combinatória - Sintaxe

- Átomo: uma váriavel ou uma constante atômica (incluindo S, K, I)
- Um termo em lógica combinatória (CL-term) é:
  - Um átomo
  - Se X e Y são CL-terms então (X Y) também é.

- Termos fechados: termo que não contém variáveis;
- Combinador: termo cujo únicos átomos são só combinadores básicos (S, K, I)

Exemplos

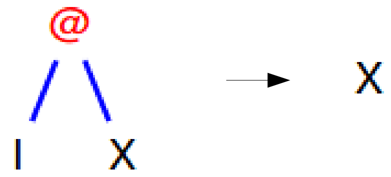
- Exemplos de CL-terms:
  - ((S(KS))K) - Combinador
  - (S(Kv_0))((SK)K)) - Não combinador

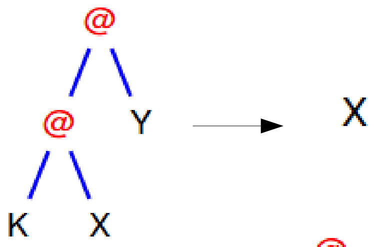
- Aplicações se associam a esquerda:
  - SKK ≡ ((SK)K)

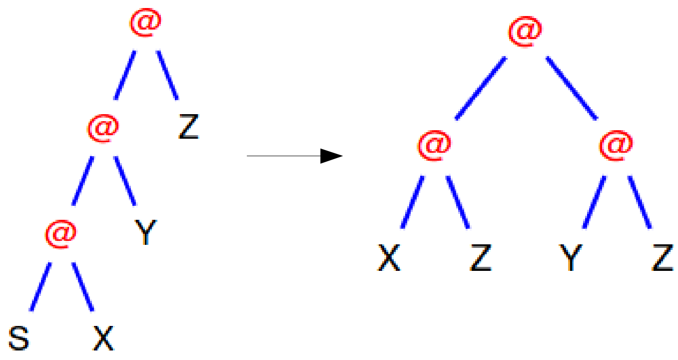
Redução fraca

- Qualquer termo **I**X, **K**XY, **S**XYZ são chamados *redex* (fraco). Contraindo uma ocorrência de um redex fraco num termo *U* significa substituir as ocorrências:
  - **I**X por X,
  - **K**XY por X,
  - **S**XYZ XZ(YZ).

Redução fraca

- **I**X   por X: 

- **K**XY   por X: 

- **S**XYZ   por XZ(YZ): 

Exemplos

- $\mathbf{S}(\mathbf{K}x)\mathbf{I}z \;\rhd_w\; \mathbf{K}xz(\mathbf{I}z)$
- $\mathbf{K}xz(\mathbf{I}z) \;\rhd_w\; x(\mathbf{I}z)$
- $\mathbf{x}(\mathbf{I}z) \;\rhd_w\; xz$ (forma normal)

Forma normal: quando um termo não possui *redex*, todo CL-term possui no máximo uma forma normal.

Definições

- Tamanho do CL-Termo (length(x)):
  - length(a) = 1 para átomos
  - length(UV) = length(U)+length(V)

Definições

- FV() - Variáveis Livres
  - O conjunto de todas as variáveis que ocorrem em Y é chamado de FV(Y).
    (Nos CL-termos, todas as ocorrências de uma variável são livres, porque não há λ para ligá-las.)
  - Ex:
    - $Y \equiv \mathbf{K}(x\mathbf{S})((x\mathbf{S}yz)(\mathbf{I}x))$.
    - $FV(Y) = \{x, y, z\}$

Definições

- Substituição
  - $[U/x]Y$ é definido como o resultado da substituição de todas as ocorrências de x por U em Y, isso é:
    - $[U/x]x \equiv U$,
    - $[U/x]a \equiv a$ para átomos $a \not\equiv x$,
    - $[U/x](VW) \equiv ([U/x]V\ [U/x]W)$

Definições

- Abstração em CL
  - Pode-se definir um CL-termo chamado '[x].*M*' para qualquer x e *M*, com a seguinte propriedade:

    $$([x].M)\ N \ \rhd_w\ [N/x]\ M$$

  - Assim, o termo [x].*M* se aproxima do λx.*M*. Na eliminação de abstração [x].*M* se torna uma combinação de **I**'s, **K**'s, **S**'s e partes de *M*.

Eliminação de abstração

(a) $[x].M \equiv \mathbf{K}M$ se $x \notin FV(M)$;

(b) $[x].x \equiv \mathbf{I}$;

(c) $[x].Ux \equiv U$ se $x \notin FV(U)$;

(d) $[x].UV \equiv \mathbf{S}([x].U)([x].V)$ se (a) e (b) não se aplicam.

Exemplo de eliminação de abstração

- [x].xy ≡ **S**([x].x)([x].y) aplicando (d)

  ≡ **S**(**I**)([x].y) aplicando (b)

  ≡ **S**(**I**)(**K**y) aplicando (a)

  ≡ **SI**(**K**y)

Observação

- Abstração em CL
  - Em contraste com λx no cálculo labmda, [x] não faz parte de sistema formal de CL-termos;
  - [x].*M* é definido na metateoria por indução em *M*, e é construído com **I**, **K**, **S**, e partes de *M*.
  - Em outras palavras, [x].M é uma forma abreviada de representar um CL-termo (composto por **I**,**K**,**S**)

(Ñ CL-term) (CL-term)

$$\underbrace{[x].xy}_{\text{(Ñ CL-term)}} \equiv \underbrace{\mathbf{SI}(\mathbf{K}y)}_{\text{(CL-term)}}$$

Prova

- **Teorema**:
  - As regras de remoção de abstração permitem construir [x].*M* para qualquer *M* e x, tal que [x].*M* não contenha x, e para todo *N*:

$$([x].M)\ N \quad \rhd_w \quad [N/x]M$$

Prova

- Por inducão em M

  Mostrar que $[x].M$ está sempre definido e não contém x, e que:

  $$([x].M)N \quad \rhd_w \quad [N/x]M$$

  - Hipótese indutiva: dado um CL-termo M com length(M) = n, assumir que para qualquer termo N com length(N) < n, existe '$[x].N$' que não contenha x;
  - Base:
    - Caso $M \equiv x$, a regra (b) se aplica:
      $([x].x)N \equiv_{(b)} \mathbf{I}N \rhd_w N \equiv [N/x]M \equiv [N/x]x$
    - Caso M é um átomo e $M \equiv a \not\equiv x$, (a) se aplica:
      $([x].a)N \equiv_{(a)} \mathbf{K}aN \rhd_w a \equiv [N/x]M \equiv [N/x]a$

Prova

- Por inducão em M
  - Indução, caso $M \equiv UV$
    - x $\notin$ FV(M), então (a) se aplica também:
      $([x].M)N \equiv_{(a)} \mathbf{K}MN \rhd_w M \equiv [N/x]M$
    - x $\notin$ FV(U) e $V \equiv$ x, então se aplica (c):
      $([x].Ux)N \equiv_{(c)} UN \equiv [\mathrm{N}/x]M \equiv [\mathrm{N}/x]Ux$
    - Nenhum dos casos acima, então se aplica (d):
      $([x].UV)N \equiv_{(d)} \mathbf{S}([x].U)([x].V)N \rhd_w ([x].U)N(([x].V)N) \equiv ([\mathrm{N}/x]U)([N/x]V)$
      $\equiv [N/x]M$

Turing-completude

- CL → λ → norma2 → norma → turing
- CL simula cálculo-λ:
  - Qualquer termo em cálculo-λ pode ser representado por um termo equivalente em lógica de combinadores.
  - Basta aplicar a regra de eliminação de abstração à ‘λx’ para converter em um CL-termo.

Exemplo de conversão de termo-λ em termo-CL

- $\lambda a.\lambda b.a \equiv_{(a)} \lambda a.\mathbf{K}a \equiv_{(c)} \mathbf{K}$
- $\lambda a.\lambda b.b \equiv_{(a)} \lambda a.\mathbf{I} \equiv_{(c)} \mathbf{K}\ \mathbf{I}$
- $\lambda f.\lambda x.f(f\ x) \equiv_{(d)} \lambda f.\mathbf{S}(\lambda x.f)(\lambda x.f\ x)$

$$\begin{aligned}
&\equiv_{(b)} \lambda f.\mathbf{S}(\mathbf{K}f)(\lambda.f\ x)\\
&\equiv_{(c)} \lambda f.\mathbf{S}(\mathbf{K}f)f\\
&\equiv_{(d)} \mathbf{S}(\lambda f.\mathbf{S}(\mathbf{K}f))(\lambda f.f)\\
&\equiv_{(b)} \mathbf{S}(\lambda f.\mathbf{S}(\mathbf{K}f))\mathbf{I}\\
&\equiv_{(d)} \mathbf{S}(\mathbf{S}(\lambda f.\mathbf{S})(\lambda f.\mathbf{K}f))\mathbf{I}\\
&\equiv_{(a)} \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{KS})(\lambda f.\mathbf{K}f))\mathbf{I}\\
&\equiv_{(c)} \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{KS})\mathbf{K})\mathbf{I}
\end{aligned}$$