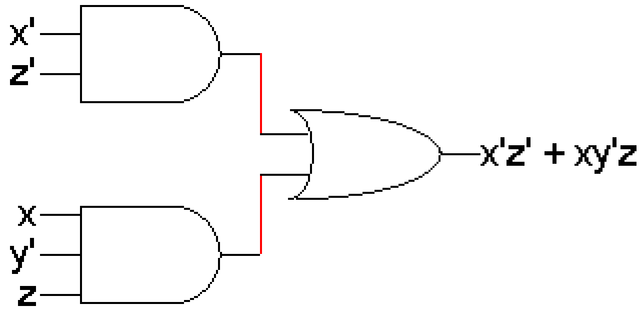
Peta Karnaugh

- Terakhir kali kita melihat aplikasi logika Boolean untuk desain sirkuit.
  - Operasi dasar Boolean adalah AND, OR dan NOT.
  - Operasi ini dapat digabungkan untuk membentuk ekspresi kompleks, yang juga dapat langsung diterjemahkan ke dalam rangkaian perangkat keras.
  - Aljabar Boolean membantu kita menyederhanakan ekspresi dan sirkuit.
- Hari ini kita akan melihat teknik grafis untuk menyederhanakan ekspresi menjadi jumlah produk yang minimal (MSP) formulir:
  - Ada jumlah minimal istilah produk dalam ekspresi.
  - Setiap istilah memiliki jumlah literal minimal.
- Dari *segi* sirkuit, ini mengarah pada implementasi dua tingkat *minimal* .



Menata ulang tabel kebenaran

- Fungsi dua variabel memiliki empat kemungkinan minterm. Kita dapat mengatur ulang minterm ini menjadi peta Karnaugh .

x	y	minterm
0	0	$x'y'$
0	1	$x'y$
1	0	xy'
1	1	xy

		y	
		0	1
X	0	$x'y'$	$x'y$
	1	xy'	xy

- Sekarang kita dapat dengan mudah melihat minterm mana yang mengandung literal umum.
  - Minterm di ruas kiri dan kanan masing-masing berisi y' dan y .
  - Minterms di baris atas dan bawah masing-masing berisi x' dan x .

		y	
		0	1
X	0	$x'y'$	$x'y$
	1	xy'	xy

	y'	y
X'	$x'y'$	$x'y$
X	xy'	xy

Penyederhanaan peta Karnaugh

- Bayangkan jumlah minterm dua variabel:

$$x'y' + x'y$$

- Kedua minterm ini muncul di baris atas peta Karnaugh, yang berarti keduanya mengandung x' literal .

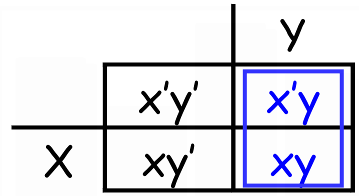
		y
	$x'y'$	$x'y$
x	xy'	xy

- Apa yang terjadi jika Anda menyederhanakan ekspresi ini menggunakan aljabar Boolean?

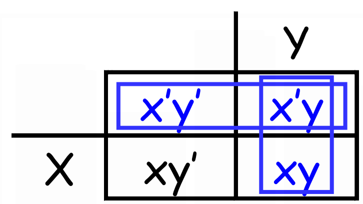
$x'y' + x'y = x'(y' + y)$ [Distributif]
$= x' \bullet 1$ [$y + y' = 1$]
$= x'$ [$x \bullet 1 = x$]

Contoh dua variabel lainnya

- Contoh ekspresi lainnya adalah x'y + xy .
  - Kedua minterms muncul di sisi kanan, di mana y tidak dilengkapi.
  - Jadi, kita dapat mereduksi x'y + xy menjadi hanya y .



- Bagaimana dengan x'y' + x'y + xy ?
  - Kami memiliki x'y' + x'y di baris atas, sesuai dengan x' .
  - Ada juga x'y + xy di sisi kanan, sesuai dengan y .
  - Seluruh ekspresi ini dapat direduksi menjadi x' + y .



Peta Karnaugh tiga variabel

- Untuk ekspresi tiga variabel dengan input x, y, z, susunan minterm lebih rumit:

		YZ			
		00	01	11	10
X	0	x'y'z'	x'y'z	x'yz	x'yz'
	1	xy'z'	xy'z	xyz	xyz'

		YZ			
		00	01	11	10
X	0	m_0	m_1	m_3	m_2
	1	m_4	m_5	m_7	m_6

- Cara lain untuk memberi label K-map (gunakan mana saja yang Anda suka):

			Y	
	x'y'z'	x'y'z	x'yz	x'yz'
X	xy'z'	xy'z	xyz	xyz'
		Z		

			Y	
	m_0	m_1	m_3	m_2
X	m_4	m_5	m_7	m_6
		Z		

Kenapa urutannya lucu?

- Dengan pengurutan ini, setiap kelompok 2, 4 atau 8 kotak yang berdekatan pada peta berisi literal umum yang dapat difaktorkan.

			y	
	x'y'z'	x'y'z	x'yz	x'yz'
X	xy'z'	xy'z	xyz	xyz'
		Z		

$x'y'z + x'yz$
$= x'z(y' + y)$
$= x'z \bullet 1$
$= x'z$

- "Kedekatan" termasuk membungkus sisi kiri dan kanan:

			y	
	x'y'z'	x'y'z	x'yz	x'yz'
X	xy'z'	xy'z	xyz	xyz'
		Z		

$x'y'z' + xy'z' + x'yz' +$
xyz'
$= z'(x'y' + xy' + x'y + xy)$
$= z'(y'(x' + x) + y(x' + x))$
$= z'(y'+y)$
$= z'$

- Kami akan menggunakan properti kotak yang berdekatan ini untuk melakukan penyederhanaan kami.

Contoh penyederhanaan K-map

- Mari kita pertimbangkan untuk menyederhanakan $f(x,y,z) = xy + y'z + xz$.
- Pertama, Anda harus mengonversi ekspresi ke dalam bentuk penjumlahan minterms, jika belum.
  - Cara termudah untuk melakukannya adalah dengan membuat tabel kebenaran untuk fungsi tersebut, dan kemudian membacakan mintermnya.
  - Anda dapat menulis literal atau menggunakan singkatan minterm.
- Berikut adalah tabel kebenaran dan jumlah minterms untuk contoh kita:

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(x,y,z) = x'y'z + xy'z + xyz' + xyz$
$= m_1 + m_5 + m_6 + m_7$

Ekspresi yang tidak disederhanakan

- Anda juga dapat mengonversi ekspresi menjadi jumlah minterm dengan aljabar Boolean.
  - Terapkan hukum distributif secara terbalik untuk menambahkan variabel yang hilang.
  - Sangat sedikit orang yang benar-benar melakukan ini, tetapi kadang-kadang berguna.

$$
\begin{aligned}
xy + y'z + xz &= (xy \bullet 1) + (y'z \bullet 1) + (xz \bullet 1) \\
&= (xy \bullet (z' + z)) + (y'z \bullet (x' + x)) + (xz \bullet (y' + y)) \\
&= (xyz' + xyz) + (x'y'z + xy'z) + (xy'z + xyz) \\
&= xyz' + xyz + x'y'z + xy'z
\end{aligned}
$$

- Dalam kedua kasus, kami sebenarnya "menyederhanakan" ekspresi contoh kami.
  - Ekspresi yang dihasilkan lebih besar dari yang asli!
  - Tetapi memiliki semua minterm individual memudahkan untuk menggabungkannya dengan K-map.

Membuat contoh K-map

- Selanjutnya adalah menggambar dan mengisi K-map.
  - Letakkan 1 di peta untuk setiap minterm, dan 0 di kotak lainnya.
  - Anda dapat menggunakan produk minterm atau singkatan untuk menunjukkan di mana 1s dan 0s berada.
- Dalam contoh kita, kita dapat menulis f(x,y,z) dalam dua cara yang setara.

$f(x,y,z) = x'y'z + xy'z + xyz' + xyz$

			y	y
	x'y'z'	x'y'z	x'yz	x'yz'
x	xy'z'	xy'z	xyz	xyz'
		z	z	

$f(x,y,z) = m_1 + m_5 + m_6 + m_7$

			y	y
	m_0	m_1	m_3	m_2
x	m_4	m_5	m_7	m_6
		z	z	

- Dalam kedua kasus tersebut, K-map yang dihasilkan ditunjukkan di bawah ini.

			y	y
	0	1	0	0
x	0	1	1	1
		z	z	

K-maps dari tabel kebenaran

- Anda juga dapat mengisi K-map langsung dari tabel kebenaran.
  - Output pada baris *i* dari tabel masuk ke $m_{i\ persegi}$ dari K-map.
  - Ingat bahwa kolom paling kanan dari K-map adalah "switched".

			Y	Y
	m_0	m_1	m_3	m_2
X	m_4	m_5	m_7	m_6
		Z	Z	

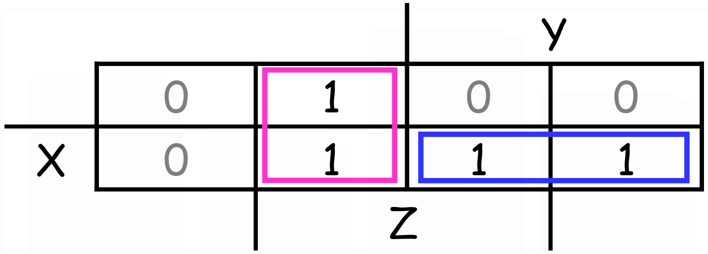
x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

			Y	Y
	0	1	0	0
X	0	1	1	1
		Z	Z	

	~Y~Z	~YZ	YZ	Y~z
~X				
X				

Mengelompokkan minterm bersama-sama

- Langkah paling sulit adalah mengelompokkan semua 1 di K-map.
  - Buat persegi panjang di sekitar kelompok satu, dua, empat atau delapan 1s.
  - Semua angka 1 di peta harus disertakan dalam setidaknya satu persegi panjang.
  - Jangan sertakan salah satu dari 0 .



- Setiap kelompok sesuai dengan satu istilah produk. Untuk hasil paling sederhana:
  - Buat persegi panjang sesedikit mungkin, untuk meminimalkan jumlah produk dalam ekspresi akhir.
  - Buat setiap persegi panjang sebesar mungkin, untuk meminimalkan jumlah literal di setiap suku.
  - Tidak apa-apa jika persegi panjang tumpang tindih, jika itu membuatnya lebih besar.

Membaca MSP dari K-map

- Akhirnya, Anda dapat menemukan MSP.
  - Setiap persegi panjang sesuai dengan satu istilah produk.
  - Produk ditentukan dengan menemukan literal umum dalam persegi panjang itu.

			y	
	0	1	0	0
X	0	1	1	1
		Z		

			y	
	x'y'z'	x'y'z	x'yz	x'yz'
X	xy'z'	xy'z	xyz	xyz'
		Z		

- Untuk contoh kami, kami menemukan bahwa xy + y'z + xz = y'z + xy . (Ini adalah salah satu hukum aljabar tambahan dari terakhir kali.)

Latihan K-map 1

- Sederhanakan jumlah minterm $m_1 + m_3 + m_5 + m_6$.

			y	
x				
		z		

			y	
	m_0	m_1	m_3	m_2
x	m_4	m_5	m_7	m_6
		z		

Solusi untuk latihan K-map 1

- Berikut adalah K-map yang terisi, dengan semua grup ditampilkan.
  - Kelompok magenta dan hijau tumpang tindih, yang membuat masing-masing menjadi sebesar mungkin.
  - Minterm m_6 berada dalam satu grup dengan kesendiriannya.

			y	y
	0	1	1	0
X	0	1	0	1
		Z	Z	

- MSP terakhir di sini adalah $x'z + y'z + xyz'$.

K-map empat variabel

- Kita juga bisa melakukan ekspresi empat variabel!
  - Minterm di kolom ketiga dan keempat, *dan* di baris ketiga dan keempat, dibalik.
  - Sekali lagi, ini memastikan bahwa kotak yang berdekatan memiliki literal yang sama.

			y	y	
	w'x'y'z'	w'x'y'z	w'x'yz	w'x'yz'	
	w'xy'z'	w'xy'z	w'xyz	w'xyz'	X
W	wxy'z'	wxy'z	wxyz	wxyz'	X
W	wx'y'z'	wx'y'z	wx'yz	wx'yz'	
		Z	Z		

			y	y	
	m_0	m_1	m_3	m_2	
	m_4	m_5	m_7	m_6	X
W	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}	X
W	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	
		Z	Z		

- Pengelompokan minterm mirip dengan kasus tiga variabel, tetapi:
  - Anda dapat memiliki grup persegi panjang dengan 1, 2, 4, 8 atau 16 minterms.
  - Anda dapat membungkus *keempat* sisinya.

Contoh: Sederhanakan $m_0 + m_2 + m_5 + m_8 + m_{10} + m_{13}$

- Ekspresi sudah merupakan jumlah minterms, jadi inilah K-mapnya:

y

1	0	0	1
0	1	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1

x w z

y

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

x w z

- Kita dapat membuat grup berikut, menghasilkan MSP $x'z' + xy'z$.

y

1	0	0	1
0	1	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1

x w z

y

w'x'y'z'	w'x'y'z	w'x'yz	w'x'yz'
w'xy'z'	w'xy'z	w'xyz	w'xyz'
wxy'z'	wxy'z	wxyz	wxyz'
wx'y'z'	wx'y'z	wx'yz	wx'yz'

x w z

K-maps bisa rumit!

- Mungkin tidak selalu ada MSP yang *unik* . K-map di bawah ini menghasilkan dua MSP yang valid dan setara, karena ada dua kemungkinan cara untuk memasukkan minterm m_7 .

			y	
	0	1	0	1
X	0	1	1	1
		Z		

			y	
	0	1	0	1
X	0	1	1	1
		Z		

$y'z + yz' + xy$

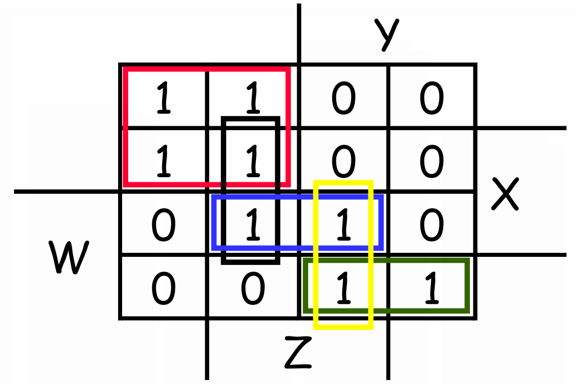
			y	
	0	1	0	1
X	0	1	1	1
		Z		

$y'z + yz' + xz$

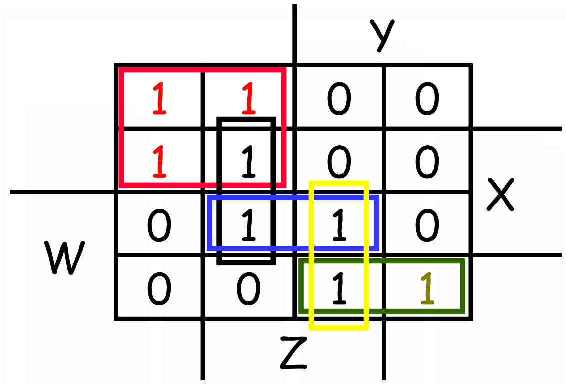
- Ingatlah bahwa grup yang tumpang tindih dimungkinkan, seperti yang ditunjukkan di atas.

Implikator utama

- Tantangan dalam menggunakan K-maps adalah memilih grup yang tepat. Jika Anda tidak meminimalkan jumlah grup dan memaksimalkan ukuran setiap grup:
  - Ekspresi yang Anda hasilkan akan tetap sama dengan yang asli.
  - Tapi itu tidak akan menjadi jumlah *minimal* produk.
- Apa pendekatan yang baik untuk menemukan MSP yang sebenarnya?
- Pertama, temukan semua kemungkinan pengelompokan terbesar dari 1s.
  - Ini disebut implikan utama .
  - MSP terakhir akan berisi subset dari implikan utama ini.
- Berikut adalah contoh peta Karnaugh dengan implikan prima yang ditandai:

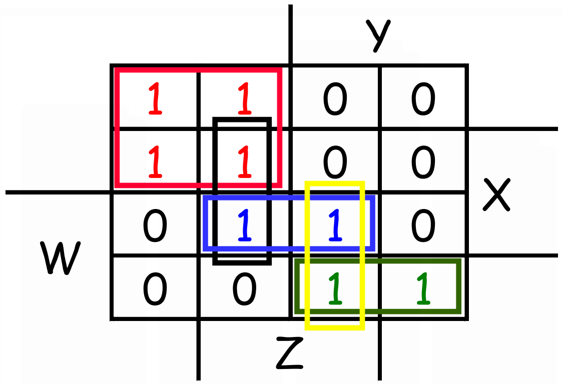


Implikator utama esensial



- Jika ada grup yang berisi minterm yang tidak juga dicakup oleh grup lain yang tumpang tindih, maka itu adalah implikan prima yang esensial .
- Implikator utama esensial *harus* muncul di MSP, karena mengandung minterm yang tidak termasuk dalam istilah lain.
- Contoh kita hanya memiliki dua implikan utama yang esensial:
  - merah ($w'y'$) sangat penting, karena m_0 , m_1 dan m_4 .
  - hijau ($wx'y$) sangat penting, karena m_{10} .

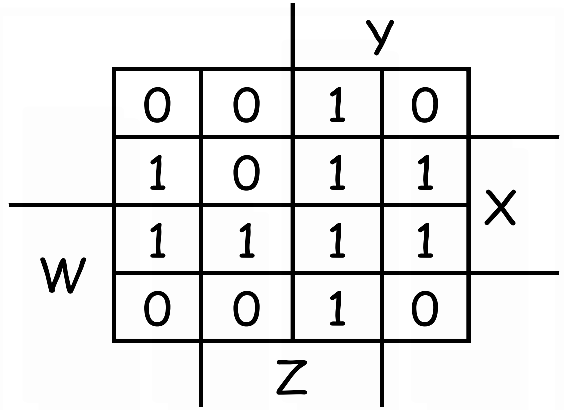
Meliputi minterm lainnya



- Terakhir, pilih sesedikit mungkin implikan utama lainnya seperlunya untuk memastikan bahwa semua minterm tercakup.
- Setelah memilih persegi panjang merah dan hijau dalam contoh kita, hanya ada dua minterm yang tersisa untuk dibahas, m_{13} dan m_{15} .
  - Keduanya termasuk dalam implikan prima biru, wxz .
  - MSP yang dihasilkan adalah w'y' + wxz + wx'y .
- Kelompok hitam dan kuning tidak diperlukan, karena semua minterm tercakup oleh tiga kelompok lainnya.

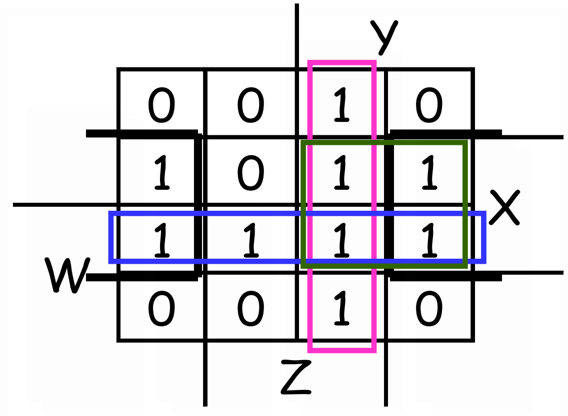
Latihan K-map 2

- Sederhanakan untuk K-map berikut:



Solusi untuk latihan K-map 2

- Sederhanakan untuk K-map berikut:



Semua implikan prima dilingkari.

Implikator prima esensial adalah **xz'** , wx dan yz .

MSP adalah **xz'** + wx + yz .
(Termasuk grup xy akan berlebihan.)

Saya tidak peduli!

- Anda tidak selalu membutuhkan semua 2^n kombinasi input dalam fungsi n-variabel.
  - Jika Anda dapat menjamin bahwa kombinasi input tertentu tidak pernah terjadi.
  - Jika beberapa keluaran tidak digunakan di rangkaian lainnya.
- Kami menandai keluaran not-care dalam tabel kebenaran dan K-maps dengan Xs.

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	X
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	X
1	1	1	1

- Dalam K-map, setiap X dapat dianggap sebagai 0 atau 1. Anda harus memilih interpretasi yang paling memungkinkan penyederhanaan.

Latihan K-map 3

- Temukan MSP untuk

$$f(w,x,y,z) = m(0,2,4,5,8,14,15),\ d(w,x,y,z) = m(7,10,13$$

Notasi ini berarti bahwa kombinasi input wxyz = 0111, 1010 dan 1101 (sesuai dengan minterm m_7 , m_{10} dan m_{13}) tidak digunakan.

y

	1	0	0	1
	1	1	x	0
W	0	x	1	1
W	1	0	0	x

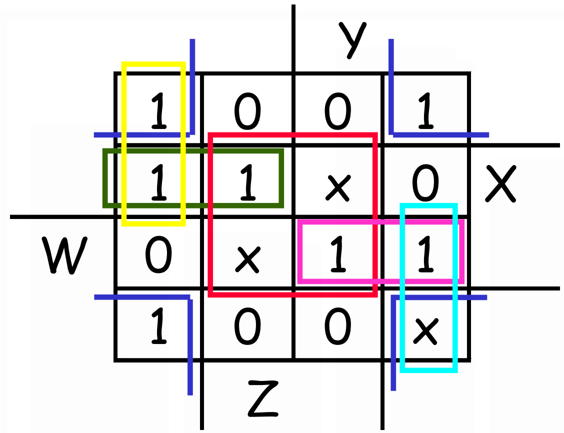
X

Z

Solusi untuk latihan K-map 3

- Temukan MSP untuk:

$$f(w,x,y,z) = m(\ 0,2,4,5,8,14,15\ ),\ d(w,x,y,z) = m(7,10,13)$$



Semua implikan prima dilingkari. Kita dapat memperlakukan X sebagai 1 jika kita mau, jadi grup merah mencakup dua X, dan grup biru muda mencakup satu X.

Satu- *satunya implikan* prima yang esensial adalah $x'z'$. Kelompok merah tidak esensial karena minterm di dalamnya juga muncul di kelompok lain.

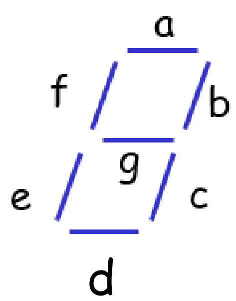
MSP adalah $x'z' + wxy + w'xy'$. Ternyata kelompok merah itu berlebihan; kita dapat mencakup semua minterms di peta tanpa itu.

Ringkasan

- K-maps adalah alternatif aljabar untuk menyederhanakan ekspresi.
  - Hasilnya adalah *jumlah produk minimal* , yang mengarah ke sirkuit dua tingkat minimal.
  - Sangat mudah untuk menangani kondisi tidak peduli.
  - K-maps benar-benar hanya bagus untuk penyederhanaan manual dari ekspresi kecil... tapi itu cukup bagus untuk CS231!
- Hal-hal yang perlu diingat:
  - Ingat urutan minterm yang benar di K-map.
  - Saat mengelompokkan, Anda dapat membungkus semua sisi K-map, dan grup Anda dapat tumpang tindih.
  - Buat persegi panjang sesedikit mungkin, tetapi buatlah masing-masing sebesar mungkin. Ini mengarah pada istilah produk yang lebih sedikit, tetapi lebih sederhana.
  - Mungkin ada lebih dari satu solusi yang valid.

Contoh: Tampilan Tujuh Segmen

Input: digit yang dikodekan sebagai 4 bit: ABCD



Meja untuk e

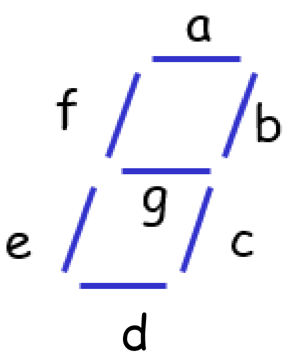
Asumsi: Input mewakili digit legal (0-9)

CD / AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	1
11	X	X	X	X
10	1	0	X	X

CD' + B'D'

	A	B	C	D	E
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
X					X
X					X
X					X
X					X
X					X
X					X

Contoh: Tampilan Tujuh Segmen



Meja untuk

Asumsi: Input mewakili digit legal (0-9)

CD / AB	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	1
11	X	X	X	X
10	1	1	X	X

A + C + BD + B'D'

	A	B	C	D	E
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
X					X
X					X
X					X
X					X
X					X
X					X