PEUBAH ACAK

Peubah Acak

Pengertian: Suatu fungsi yang memetakan ruang kejadian (daerah fungsi) ke ruang bilangan nyata (wilayah fungsi).

Tipe Peubah Acak

1. Peubah acak diskret
   - Nilai-nilai peubah acak dapat dicacah, pencacahan
   - Nilai bilangan bulat
   - Contoh : X = Banyaknya tendangan penalti oleh pemain A
2. Peubah acak kontinu
   - Nilai-nilai peubah acak tidak dapat dicacah, pengukuran
   - Nilai berupa selang
   - Contoh : X = Berat badan (kg)

Fungsi Massa Peluang

Fungsi massa peluang (fmp): suatu fungsi (dari peubah acak diskret) yang memberikan nilai peluang $p(x_i)$ pada saat peubah acak X bernilai x_i:

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

Fmp memenuhi:

1. $0 < p(x_i) < 1$
2. $\sum_i p(x_i) = 1$

Fungsi Sebaran Kumulatif

Fungsi sebaran kumulatif (notasi: $F(x_0)$): nilai peluang X kurang atau sama dengan x_0.

$$F(x_0) = P(X \leq x_0)$$

Peubah acak diskret

$$F(x) = \sum_{X \leq x} P(x)$$

Peubah acak kontinu

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Sifat-sifat fungsi sebaran kumulatif :

- $F(x) \geq 0$
- $0 \leq F(x) \leq 1$
- Fungsi monoton tak turun

Fungsi Kepekatan Peluang

- **Fungsi kepekatan peluang** (fkp) dari peubah acak kontinu: suatu fungsi yang dapat diintegralkan, yang digunakan untuk peluang peubah acak dalam suatu selang.
- Notasi fkp peubah acak X: $f(x)$
- $f(x)$: turunan pertama dari fungsi sebaran kumulatif $F(x)$
- Peluang pada p.a. kontinu = luas di bawah kurva
- Pada peubah acak kontinu, karena $F(x_0) = P(X \leq x_0)$, maka

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Fkp memenuhi:

1. $f(x) \geq 0$ untuk x dalam $D_{f(x)}$
2. $\int_{\forall x} f(x)dx = 1$
3. $f(x) = 0$ untuk x yang tidak ada pada $D_{f(x)}$

Latihan Soal

1. Nyatakan apakah peubah acak berikut diskret atau kontinu!
   X: banyaknya kecelakaan lalu lintas setiap tahun di kota Z
   Y: lamanya memainkan permainan golf 18 lubang
   M: waktu kedatangan antara dua panggilan telepon di suatu pusat layanan pelanggan
   N: produksi telur ayam per bulan per induk.
   P: banyaknya izin mendirikan bangunan yang dikeluarkan oleh sebuah kota tertentu
   Q: produksi beras per hektar
2. Sebuah perusahaan memiliki lowongan kerja untuk 2 posisi, dan ada 5 orang (2 wanita dan 3 pria) yang datang untuk melamar kedua posisi tersebut. Asumsikan kelima orang pelamar tersebut memenuhi kriteria dan pihak perusahaan tidak memiliki preferensi untuk memilih berdasarkan jenis kelamin. Jika X adalah peubah acak yang menyatakan banyaknya wanita yang terpilih untuk kedua posisi tersebut, buat sebaran peluang bagi peubah acak X tersebut!
3. Peluang suatu pertanaman padi mendapat serangan hama dan penyakit pada suatu musim tanam adalah 1/3. Jika kita melakukan survei terhadap 3 petani padi di daerah Karawang, dan X adalah peubah acak yang menyatakan banyaknya petani yang mengalami kerugian

karena tanamannya terserang hama dan penyakit. Buat sebaran peluang bagi peubah acak X tersebut!

4. Suatu peubah acak X memiliki fungsi kepekatan peluang berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 0.25;\, 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{x+1}{8};\, 1 < x < 3 \\ 0;\, x\ yang\ lain \end{cases}$$

   a. Gambarkan sketsa dari fungsi kepekatan tersebut
   b. Gambarkan pula sketsa dari fungsi sebaran kumulatifnya
   c. Hitunglah $P(1.5 < X < 2.5)$
   d. Hitunglah median dari X

Pembahasan

1. X: banyaknya kecelakaan lalu lintas setiap tahun di kota Z → peubah acak diskret
   Y: lamanya memainkan permainan golf 18 lubang → peubah acak kontinu
   M: waktu kedatangan antara dua panggilan telepon di suatu pusat layanan pelanggan peubah acak kontinu
   N: produksi telur ayam per bulan per induk → peubah acak diskret
   P: banyaknya izin mendirikan bangunan yang dikeluarkan oleh sebuah kota tertentu → peubah acak diskret
   Q: produksi beras per hektar peubah acak kontinu

2. Ada 2 posisi, 5 pelamar (2 wanita dan 3 pria)
   X = banyaknya wanita yang terpilih untuk kedua posisi
   Kemungkinan banyak wanita terpilih → $X = \{0, 1, 2\}$
   Untuk $\boldsymbol{X = 0}$ (tidak ada pelamar wanita yang terpilih)

$$P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = 0.3$$

   Untuk $\boldsymbol{X = 1}$ (ada 1 pelamar wanita yang terpilih)

$$P(X = 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = 0.6$$

   Untuk $\boldsymbol{X = 2}$ (ada 2 pelamar wanita yang terpilih)

$$P(X = 2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = 0.1$$

Jadi, sebaran peluang bagi peubah acak X adalah

$$P(X=x)=\begin{cases} 0.3 \ \ untuk\ x=0 \\ 0.6 \ \ untuk\ x=1 \\ 0.1 \ \ untuk\ x=2 \\ 0\ \ untuk\ x\ lainnya \end{cases}$$

3. X = banyaknya petani yang rugi karena tanamannya terserang hama dan penyakit
   $n=3$ petani
   P(padi terserah hama dan penyakit pada musim tanam/rugi) = $P(R)=\frac{1}{3}$ sehingga $P(R^c)=\frac{2}{3}$
   Kemungkinan banyaknya petani yang rugi → $X=\{0,1,2,3\}$
   Untuk $\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ → $=\{R^c\ R^cR^c\}$

$$P(X=0)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}$$

   Untuk $\boldsymbol{X}=\mathbf{1}$ → $=\left\{\{R\ R^cR^c\},\{R^c\ RR^c\},\{R^c\ R^cR\}\right\}$

$$P(X=1)=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{27}$$

   Untuk $\boldsymbol{X}=\mathbf{2}$ → $=\left\{\{R\ RR^c\},\{RR^cR\},\{R^cRR\}\right\}$

$$P(X=2)=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{6}{27}$$

   Untuk $\boldsymbol{X}=\mathbf{3}$ → $=\{RRR\}$

$$P(X=3)=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}$$

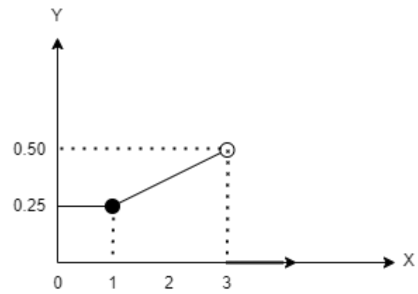
   Jadi, sebaran peluang bagi peubah acak X adalah

$$P(X=x)=\begin{cases} \frac{8}{27} \ \ untuk\ x=0 \\ \frac{12}{27} \ \ untuk\ x=1 \\ \frac{6}{27} \ \ untuk\ x=2 \\ \frac{1}{27} \ \ untuk\ x=3 \\ 0\ untuk\ x\ lainnya \end{cases}$$

4. Fkp bagi X

$$f(x) = \begin{cases} 0.25; 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{x+1}{8}; 1 < x < 3 \\ 0; x\ yang\ lain \end{cases}$$

a. Sketsa dari fungsi kepekatan tersebut



b. Sketsa dari fungsi sebaran kumulatifnya

Mencari fungsi sebaran kumulatif bagi X

Untuk $x \leq 0$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt = 0$

Untuk $0 < x \leq 1$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$= \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 0.25dt$

$= 0.25t|_{0}^{x}$

$= 0.25x$

Untuk $1 < x \leq 3$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$= \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} 0.25dt + \int_{1}^{x} \frac{t+1}{8} dt$

$= 0.25t|_{0}^{1} + \left(\frac{1}{16}t^2 + \frac{1}{8}t\right|_{1}^{x}$

$= 0.25 + \left(\left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{8}x\right) - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8}\right)\right)$

$= \frac{1}{4} + \frac{x^2+2x}{16} - \frac{3}{16}$

$= \frac{x^2+2x+1}{16}$

Untuk $x > 3$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$= \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} 0.25dt + \int_{1}^{3} \frac{t+1}{8} dt + \int_{3}^{x} 0dt$

$= 0.25t|_0^1 + \left(\frac{1}{16}t^2 + \frac{1}{8}t\right|_1^3$

$= 0.25 + \left(\left(\frac{1}{16}3^2 + \frac{1}{8}(3)\right) - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8}\right)\right)$

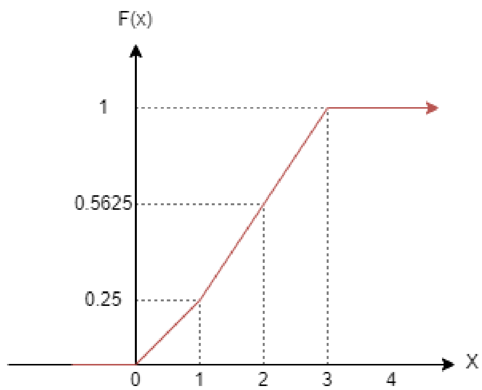
$= \frac{1}{4} + \frac{9+6}{16} - \frac{3}{16}$

$= \frac{16}{16} = 1$

Sehingga, fungsi sebaran kumulatif bagi X sebagai berikut

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0.25x, & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{x^2 + 2x + 1}{16}, & 1 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Sketsa dari fungsi sebaran kumulatifnya



c. Hitunglah $P(1.5 < X < 2.5)$

$P(1.5 < X < 2.5) = F(2.5) - F(1.5)$

$= \frac{2.5^2+2(2.5)+1}{16} - \frac{1.5^2+2(1.5)+1}{16}$

$= 0.375$

d. Hitunglah median dari X

$\int_{-\infty}^{m} f(x)dx = \frac{1}{2}$

$\int_0^1 0.25dx + \int_1^m \frac{x+1}{8}dx = \frac{1}{2}$

$0.25x|_0^1 + \left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{8}x\right|_1^m = \frac{1}{2}$

$0.25 + \left(\left(\frac{1}{16}m^2 + \frac{1}{8}m\right) - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8}\right)\right) = \frac{1}{2}$

$0.25 + \frac{m^2+2m}{16} - \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$

$m^2 + 2m - 7 = 0$

Diperoleh $m = 1.8284$ atau $m = -3.8284$. Nilai m yang memenuhi yaitu 1.8284

Jadi, median dari X adalah 1.8284

STA202 – TEORI PELUANG

PEUBAH ACAK

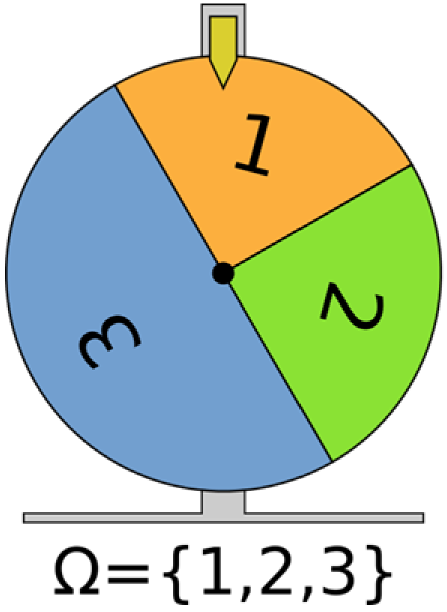
Oleh: Anik Djuraidah

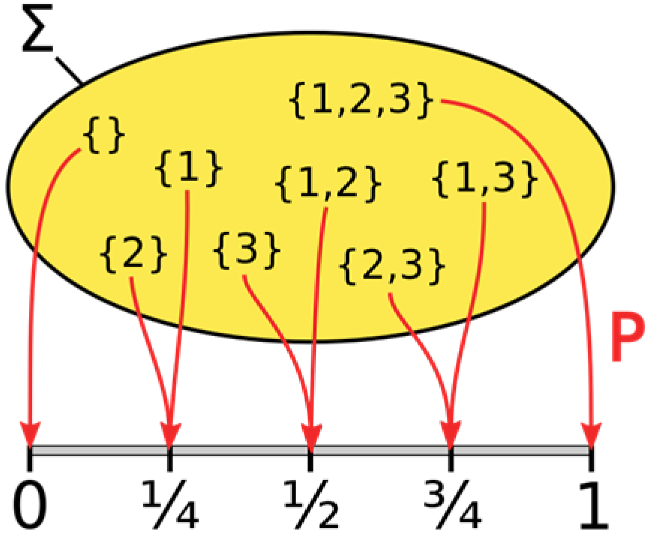
Program Studi Sarjana Statistika dan Sains Data

Departemen Statistika - FMIPA

Outline

1. Konsep Peubah Acak
2. Fungsi massa peluang
3. Fungsi Sebaran Peluang
4. Fungsi kepekatan peluang
5. Peubah Acak Campuran





REFERENSI:

1. *Ross SM. 2010. A first course in probability. 8th ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall.*
2. *Wackerly DD, Mendenhall W, Scheaffer RL. 2008. Mathematical Statistics with Applications. Seventh Edition. California: Thomson Learning, Inc*

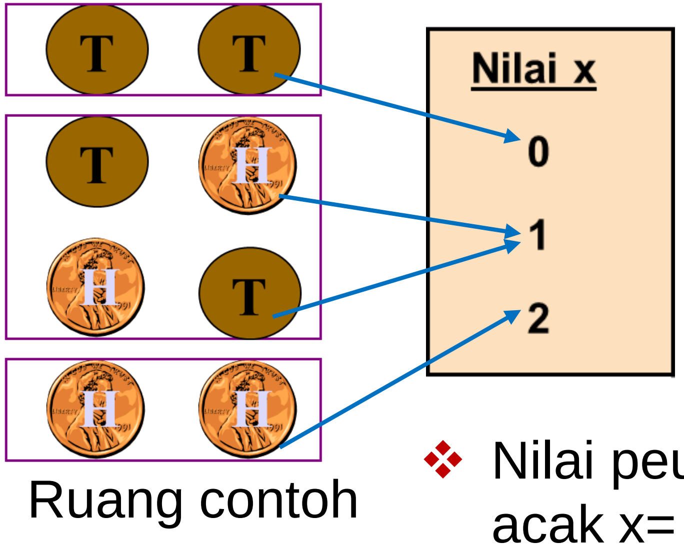
1. PEUBAH ACAK

- Peubah Acak: Representasi semua kemungkinan nilai numerik dari suatu percobaan acak
- Tujuan: peubah acak merupakan suatu langkah dalam statistika untuk mengkuantifikasikan kejadian-kejadian dari suatu percobaan.

Peubah acak: suatu fungsi yang memetakan ruang kejadian (daerah fungsi) ke ruang bilangan nyata (wilayah fungsi).

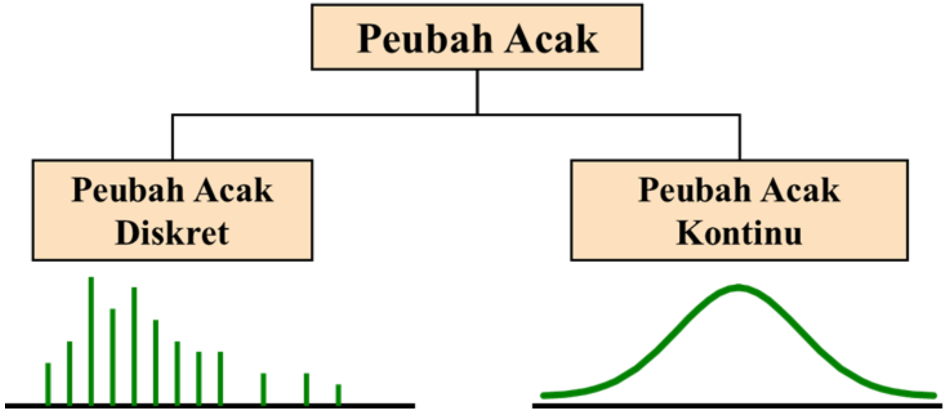
- Peubah acak dilambangkan huruf kapital (misalkan X, Y, Z)
- Nilai peubah acak dilambangkan huruf kecil (x, y, z)

- **Ilustrasi:** Satu keping uang dilemparkan 2 kali:
- Peubah acak X: banyaknya sisi H



- Nilai peubah acak x= 0, 1, 2

Tipe Peubah Acak



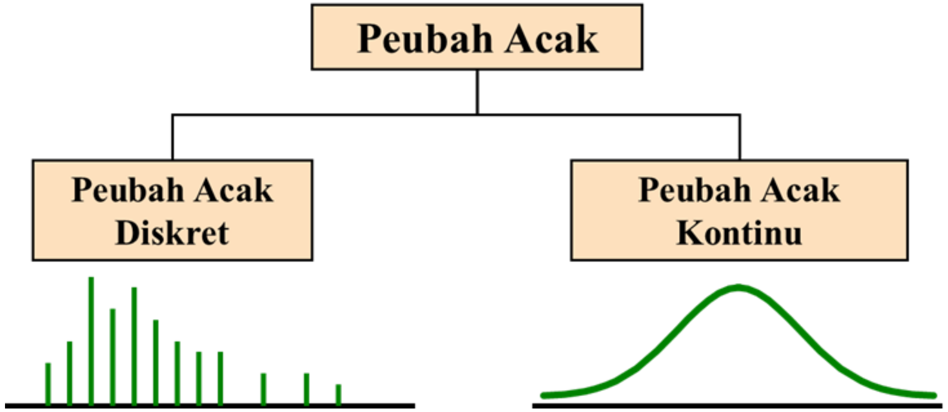
DISKRET

- Segugus nilai dari suatu peubah acak yang nilainya diskret
- Nilai bilangan bulat, bisa terhingga atau tak hingga

Ilustrasi:

- X = Banyaknya TV yang terjual dalam satu hari di suatu toko
  - x =0, 1, 2, 3, 4 (terhingga)
- Y=banyaknya pelanggan yang datang pada suatu hari
  - x = 0, 1, 2, . . . (takhingga)
  - (banyaknya pelanggan yang datang dapat dihitung, tetapi jumlah maksimum pelanggan yang datang tidak diketahui.

Tipe Peubah Acak



KONTINU

- Nilai-nilai dari peubah acak tersebut bersifat kontinu
- Nilai berupa selang
- **Ilustrasi:**
  - ✓ X = Lamanya waktu tunggu dalam suatu antrian
  - ✓ Y= Lamanya waktu menelpon seseorang

Perhatikan pertanyaan berikut:

- Misalkan X menyatakan berapa kali sebuah angkot berhenti untuk mengambil penumpang untuk perjalanan dari Bubulak ke Baranangsiang

  X adalah p. a Diskret atau Kontinu?

  P(X=3 kali berhenti)=?

- Misalkan Y menyatakan jarak yang ditempuh angkot sampai mendapatkan penumpang pertama.

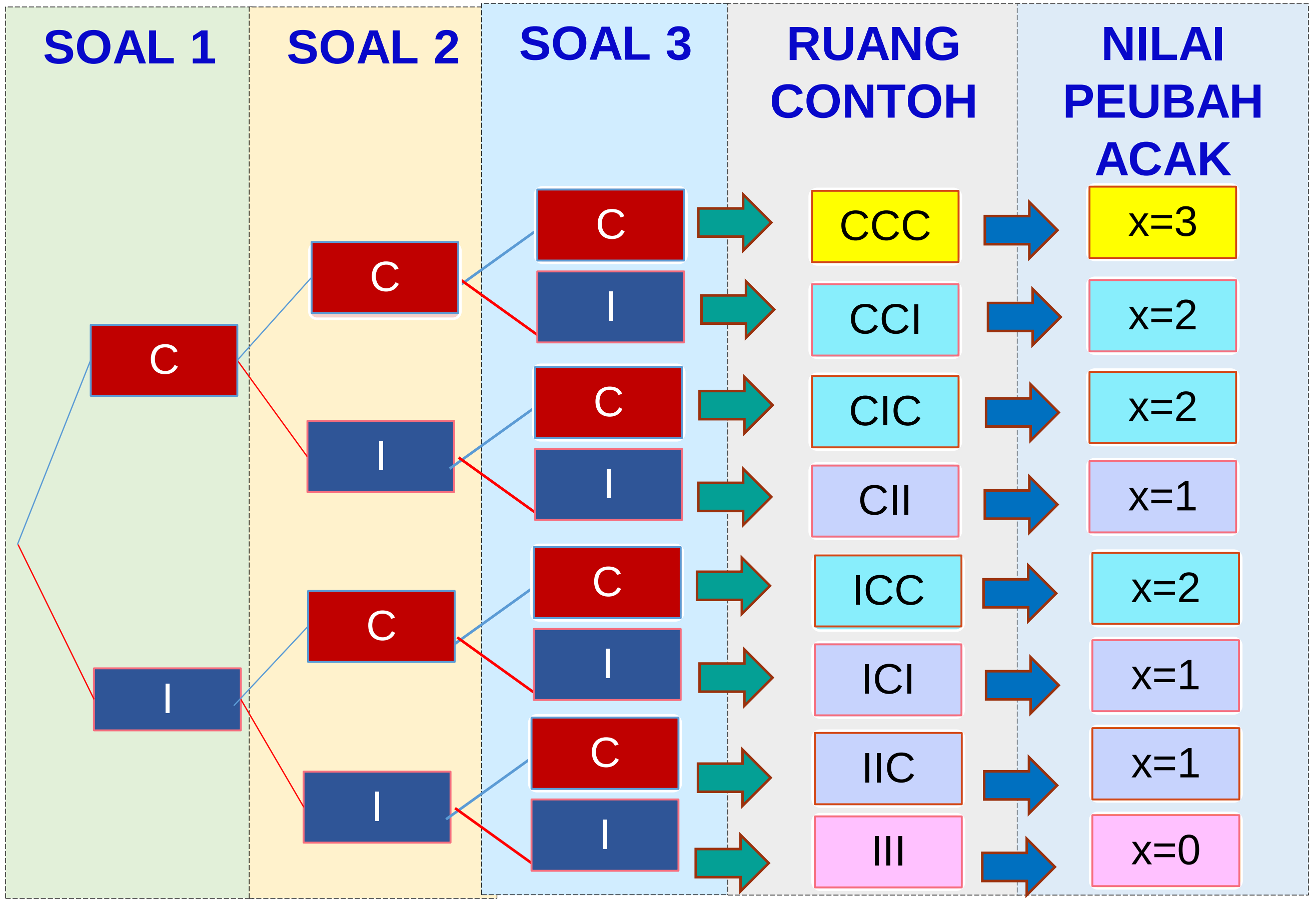
  Y adalah p. a Diskret atau Kontinu?

  P(Y=2 km)=?

Ilustrasi-1: pa diskret

- Quiz suatu Metode Statistika terdiri atas 3 soal pilihan ganda. Setiap soal mempunya 2 pilihan jawaban. Misalkan jawaban benar dinotasikan C dan salah dinotasikan I.
- Peubah acak X menyatakan banyaknya jawaban yang benar

❖ Maka nilai x = 0, 1, 2, 3



Ilustrasi-2: pa diskret

Dua dadu digulirkan

Misalkan X adalah banyaknya sisi 4 muncul

- Kejadian warna kuning dipetakan ke x=0
- Kejadian warna biru dipetakan ke x=1
- Kejadian warna hijau dipetakan ke x=2
- Maka nilai x = 0, 1, 2

Ruang contoh hasil percobaan

Dadu 1	Dadu 2					
	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

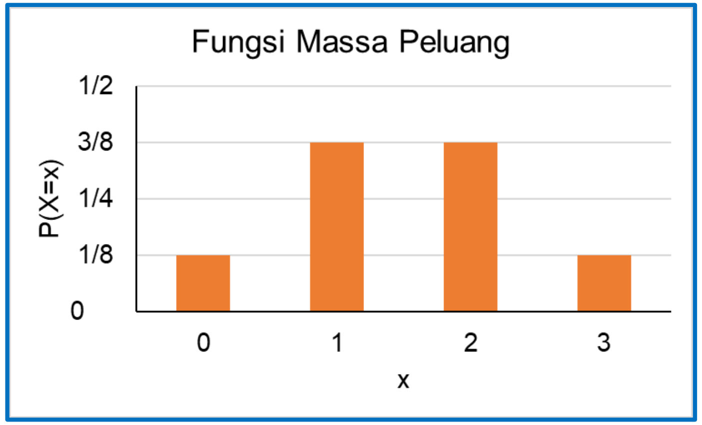
x=0 x=1 x=2

2. FUNGSI MASSA PELUANG

- Fungsi massa peluang/fmp dari peubah acak diskret X adalah suatu fungsi yang memberikan nilai peluang $p(x_i)$ pada saat peubah acak X bernilai x_i:

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

- Fmp memenuhi:
  i. $0 < p(x_i) < 1$
  ii. $\sum_i p(x_i) = 1$



Ilustrasi- fmp:

- Perhatikan ilustrasi-1 pa diskret
- Nilai peubah acak X adalah $0, 1, 2, 3$.
- Nilai peluangnya adalah:
  - ✓ $P(X = 0) = P\{\text{III}\} = \frac{1}{8}$
  - ✓ $P(X = 1) = P\{\text{IIC, ICI, CII}\} = \frac{3}{8}$
  - ✓ $P(X = 2) = P\{\text{ICC, CIC, CCI,}\} = \frac{3}{8}$

$P(X = 3) = P\{\text{CCC}\} = \frac{1}{8}$

$\bigcup_{i=0}^{3} P(X = i) = \sum_{i=0}^{3} P(X = i) = 1$

x	0	1	2	3
P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8

3. FUNGSI SEBARAN (KUMULATIF)

- Fungsi sebaran kumulatif dinotasikan sebagai $F(x_0)$, menunjukkan nilai peluang X kurang atau sama dengan x_0

$$\boxed{F(x_0) = P(X \le x_0)}$$

- Untuk X p.a diskret dapat juga dinyatakan:

$$\boxed{F(x_0) = \sum_{x \le x_0} P(x)}$$

- Ilustrasi fungsi sebaran p.a Diskret
  - Perhatikan ilustrasi-fmp.

➢ $F(0) = P(X \le 0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$

➢ $F(1) = P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

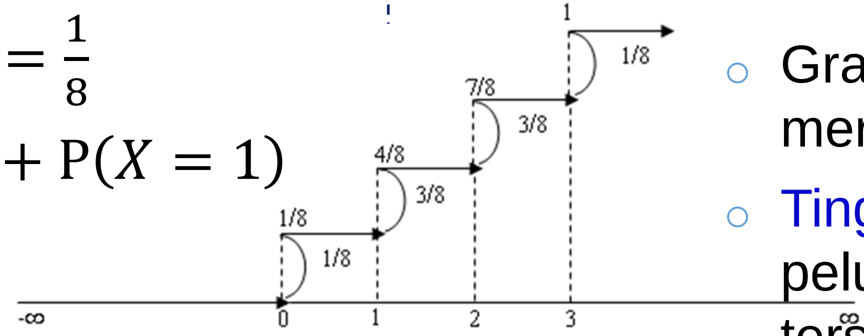
$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

➢ $F(2) = P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

➢ $F(3) = P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

➢ atau dapat diringkas:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk} \quad x < 0 \\ 1/8 & \text{untuk} \quad 0 \le x < 1 \\ 4/8 & \text{untuk} \quad 1 \le x < 2 \\ 7/8 & \text{untuk} \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{untuk} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

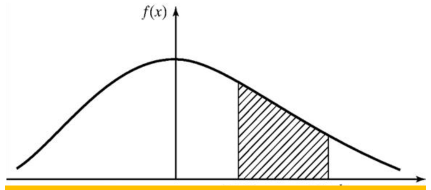


- Grafik fungsi massa peluang merupakan fungsi tangga
- Tinggi tangga menunjukkan peluang pada nilai peubah acak tersebut

4. FUNGSI KEPEKATAN PELUANG

- Peubah acak kontinu mempunyai nilai yang tidak berhingga
- Peubah acak kontinu umumnya merupakan pengukuran.
  - Misalkan tinggi badan, berat badan, kandungan gula dalam jeruk, waktu yang dibutuhkan untuk lari 1 mil.
- Fungsi kepekatan peluang (Fkp) suatu peubah acak kontinu adalah suatu fungsi yang dapat diintegralkan, yang digunakan untuk menghitung peluang peubah acak dalam suatu selang
- Fkp peubah acak X dinotasikan sebagai $f(x)$ adalah turunan pertama dari fungsi (sebaran) kumulatif F(x): $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$

- Untuk peubah acak kontinu, yang dihitung adalah $P(a \le X \le b)$



$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

- Karena $F(x) = P(X \le x)$, maka:

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

- Peluang pada titik bernilai 0: $P(X = x_i) = 0$
- **Sifat fkp:**

  i. $f(x) \ge 0$ untuk x dalam $D_{f(x)}$

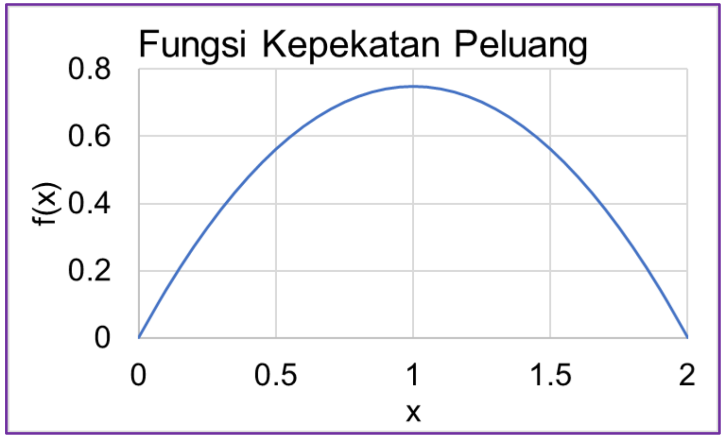
  ii. $\int_{\forall x} f(x)dx = 1$

  iii. $f(x) = 0$ untuk x yang tidak ada pada $D_{f(x)}$

Ilustrasi: fkp

Misalkan X adalah sebuah peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} c\,(4x - 2x^2) & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{lainnya} \end{cases}$$



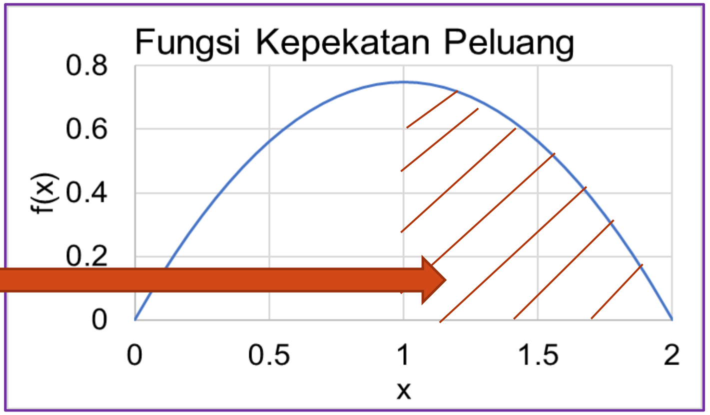
a) nilai c:

$$\int_0^2 \mathrm{f(x)dx} = \int_0^2 \mathrm{c(4x - 2x^2)dx} = 1$$

$$\leftrightarrow \mathrm{c}\left(2\mathrm{x}^2 - \frac{2\mathrm{x}^3}{3}\right)\Bigg|_{\mathrm{x}=0}^{\mathrm{x}=2} = 1 \qquad \leftrightarrow \mathrm{c} = \frac{3}{8}$$

b) $\mathrm{P}(X > 1)$:

$$\mathrm{P(X > 1)} = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx = \frac{1}{2}$$

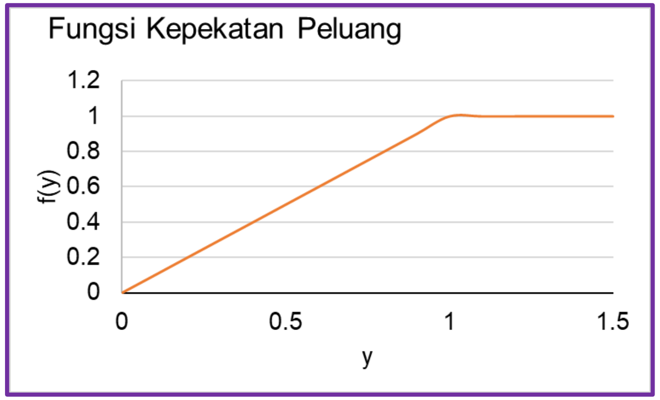


Ilustrasi: Fungsi Sebaran p.a Kontinu

Misalkan sebuah toko memiliki rak untuk 150 kotak minuman buah untuk dikirim setiap minggunya. Misalkan Y menunjukkan permintaan minuman setiap minggunya dalam satuan ratusan kotak. Diketahui fungsi kepekatan peluang seperti berikut:

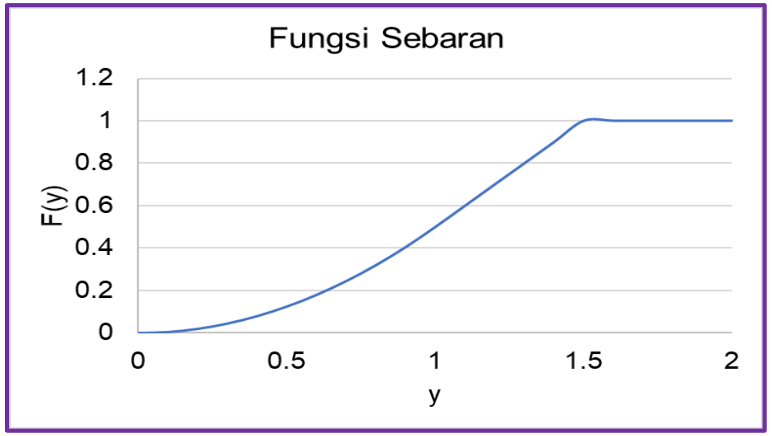
$$f(y) = \begin{cases} y & , \quad 0 \le y \le 1 \\ 1 & , \quad 1 \le y \le 1.5 \\ 0 & , \quad \text{lainnya} \end{cases}$$

Tentukan $F(y)$



$$F(y) = P(Y \le y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt$$

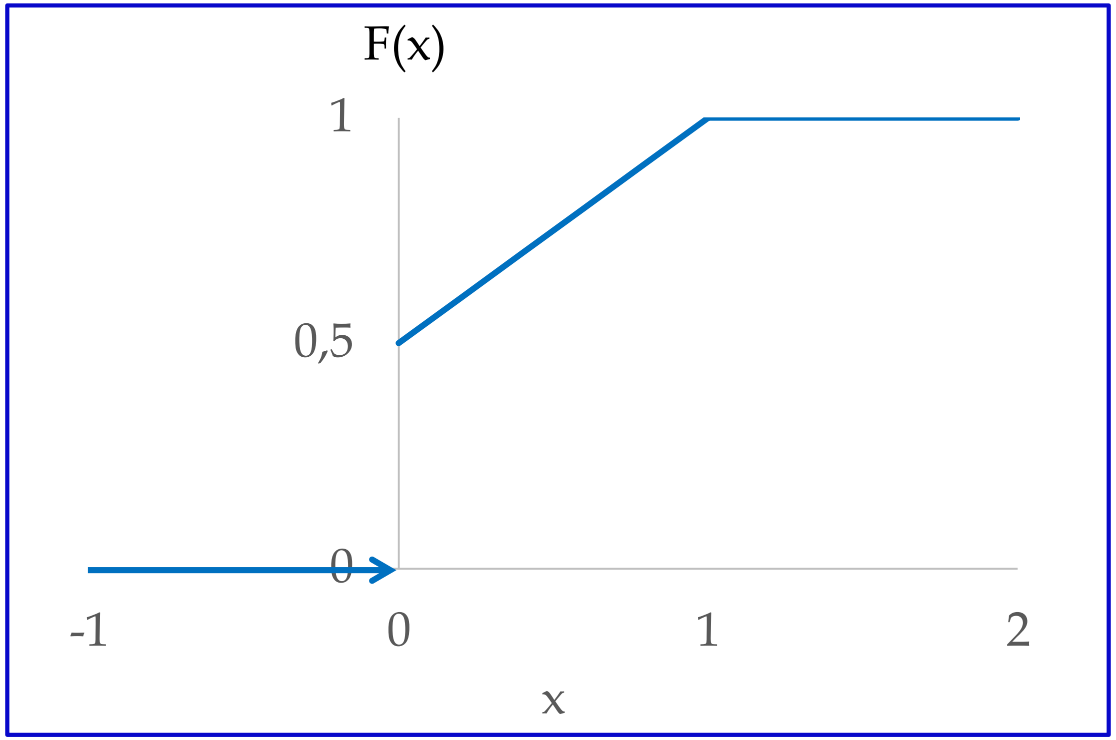
$$\rightarrow F(y) = \begin{cases} 0 \quad \text{untuk } y < 0 \\ \int_0^y t\,dt = y^2/2 \quad \text{untuk } 0 \le y < 1 \\ \int_0^1 t\,dt + \int_1^y 1\,dt = y - \frac{1}{2} \quad \text{untuk } 1 \le y < 1.5 \\ 1 \quad \text{untuk } y \ge 1.5 \end{cases}$$



5. PEUBAH ACAK CAMPURAN

Misalkan peubah acak X mempunyai fungsi sebaran sebagai berikut:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x+1}{2} & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$



- ✓ $P\left(-3 < X \le \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(-3) = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$
- ✓ $P(X = 0) = F(0) - F(0\_) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

SOAL

The length of time that an individual talks on a long-distance telephone call has been found to be of a random nature. Let X be the length of the talk; assume it to be a continuous random variable with probability density function given by

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-(1/5)x}, & x > 0 \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

Find

(a) The value of α that makes $f(x)$ a probability density function.

(b) The probability that this individual will talk (i) between 8 and 12 minutes, (ii) less than 8 minutes, (iii) more than 12 minutes.

(c) Find the cumulative distribution function, $F(x)$.

SOAL

2.5.13. Let T be the life length of a mechanical system. Suppose that the cumulative distribution of such a system is given by

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{(t-\gamma)^{\beta}}{\alpha}\right), & t \geq 0, \alpha > 0, \beta, \gamma \geq 0. \end{cases}$$

Find the probability density function that describes the failure behavior of such a system.

2.6.17. The probability density function of the random variable X is given by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{6x-2x^2-3}{2}, & 1 < x \leq 2, \\ \frac{(x-3)^2}{2}, & 2 < x \leq 3, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Find the expected value of the random variable X.

SOAL

IPB University
Bogor Indonesia

Suppose that Y has density function

$$f(y) = \begin{cases} ky(1-y), & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

a Find the value of k that makes $f(y)$ a probability density function.

b Find $P(.4 \le Y \le 1)$.

c Find $P(.4 \le Y < 1)$.

d Find $P(Y \le .4 | Y \le .8)$.

e Find $P(Y < .4 | Y < .8)$.

A random variable Y has the following distribution function:

$$F(y) = P(Y \le y) = \begin{cases} 0, & \text{for } y < 2, \\ 1/8, & \text{for } 2 \le y < 2.5, \\ 3/16, & \text{for } 2.5 \le y < 4, \\ 1/2 & \text{for } 4 \le y < 5.5, \\ 5/8, & \text{for } 5.5 \le y < 6, \\ 11/16, & \text{for } 6 \le y < 7, \\ 1, & \text{for } y \ge 7. \end{cases}$$

a Is Y a continuous or discrete random variable? Why?

b What values of Y are assigned positive probabilities?

c Find the probability function for Y.

d What is the median, $\phi_{.5}$, of Y?

SOAL

4.7. Suppose that a die is rolled twice. What are the possible values that the following random variables can take on:

(a) the maximum value to appear in the two rolls;
(b) the minimum value to appear in the two rolls;
(c) the sum of the two rolls;
(d) the value of the first roll minus the value of the second roll?

4.4. Five men and 5 women are ranked according to their scores on an examination. Assume that no two scores are alike and all 10! possible rankings are equally likely. Let X denote the highest ranking achieved by a woman. (For instance, $X = 1$

4.17. Suppose that the distribution function of X is given by

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{b}{4} & 0 \le b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4} & 1 \le b < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \le b < 3 \\ 1 & 3 \le b \end{cases}$$

(a) Find $P\{X = i\}, i = 1, 2, 3$.
(b) Find $P\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\}$.


TERIMA
KASIH

TEORI PELUANG

Anik Djuraidah

MEDAN SIGMA

Definisi Peluang

Definisi Klasik Peluang

- setiap anggota ruang contoh $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$mempunyai peluang yang sama /peluang seragam $P(\{\omega_i\}) = 1/n$
- Kejadian A beranggotakan k kejadian dasar, maka $P(A) = k/n$

Definisi Empirik/Frekuensi Nisbi suatu kejadian

oleh R. Von Mises (1883-1953) dan R.A Fisher (1890-1962)

- suatu kejadian berkaitan dengan sekuens hasil percobaan yang diulang takhingga kali
- Peluang kejadian A didefinikan $P(A) = \lim_{n\to\infty} k/n$

  k = frekuensi kejadian A muncul

  n =banyaknya percobaan bebas yang dilakukan

Definisi Peluang

Definisi Aksiomatik terkenal dengan Kolmogorov Axioms (1933)

peluang adalah suatu fungsi yang memetakan unsur-unsur suatu ruang contoh ke suatu gugus bilangan nyata dan memenuhi ketiga aksioma peluang, yaitu:

1. Bernilai taknegatif yaitu $P(\{\omega_i\}) \geq 0$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$
2. Bernorma satu, yaitu $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$
3. Bersifat aditif yaitu $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = \sum_{i=1}^{m} A_i$, jika $A_j \cap A_k = \emptyset$ untuk $j \neq k$

definisi klasik

definisi empirik

definisi aksiomatik

Ruang contoh kejadian :
gugus terhingga

Permasalahan

Ruang contoh kejadian : **gugus tak hingga** (tercacah takhingga, taktercacah takhingga)

- Suatu gugus tercacah/ diskret : semua unsurnya dapat dipadankan 1-1 dengan semua bilangan bulat taknegatif (bilangan cacah)
- Ruang contoh tercacah takhingga : gugus bilangan cacah, gugus bilangan bulat, atau bilangan rasional
- Ruang contoh taktercacah takhingga : gugus bilangan nyata

diperlukan penyesuaian tehadap definisi peluang

Ruang Peluang

- Ruang Peluang mempunyai **3 komponen** yaitu $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yang terdiri dari:
  - **ruang contoh**
  - **ruang kejadian**
  - **ruang peluang**
- Ω adalah ruang contoh yaitu himpunan hasil dari suatu percobaan acak.
  - Misalkan pelemparan koin sebanyak dua kali, maka $\Omega = \{HH; HT; TT; TH\}$

Ruang Peluang

- Sebuah kejadian adalah himpunan bagian dari ruang contoh Ω.
- Misalkan:
  - Sedikitnya satu sisi Gambar yaitu: $\{HH, HT, TH\}$
  - Tidak lebih satu sisi Gambar yaitu: $\{HT, TH, TT\}$
- Pada teori peluang, ruang kejadian $\mathcal{F}$ dimodelkan sebagai sebuah medan-σ (σ-algebra/ σ-field) dari Ω.
  - $\mathcal{F}$ merupakan sebuah kumpulan dari himpunan bagian yang mempunyai 3 sifat.

Medan-σ

Suatu kelas $\mathcal{F}$ yang merupakan kejadian dalam suatu ruang contoh Ω disebut medan-σ jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. Jika $A \in \mathcal{F}$, maka $A^c \in \mathcal{F}$(tertutup terhadap pengolahan komplemen)
3. Jika $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, maka $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$(tertutup terhadap pengolahan gabungan takhingga)

Sifat tambahan:

4. Sifat (1)+(2)$\rightarrow \Omega \in \mathcal{F}$
5. Sifat (3) + dalil de Morgan $\rightarrow (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ (tertutup terhadap pengolahan irisan takhingga)

Ilustrasi Medan-σ

- Misalkan pelemparan koin sebanyak dua kali, maka $\Omega = \{HH; HT; \ TT; \ TH\}$
- Maka banyak medan−σ yang dapat dibentuk:

1. $\{\emptyset, \Omega\}$ (trivial medan- σ)
2. Fungsi kuasa P(Ω), yang terdiri dari semua himpunan bagian dari Ω

Ilustrasi Medan-σ

Misalkan $\Omega = \{A, B\},\ \mathcal{F} = \left\{\phi, \{A\}, \{B\}, \{A, B\}\right\}$

Apakah $\mathcal{F}$ merupakan medan-σ ?

Periksa :

1. $\emptyset \epsilon \mathcal{F}$
2. $\{A\} \epsilon \mathcal{F}$, maka $\{A\}^c = \{B\} \epsilon \mathcal{F}$

   $\{B\} \epsilon \mathcal{F}$, maka $\{B\}^c = \{A\} \epsilon \mathcal{F}$

   $\{A, B\} \epsilon \mathcal{F}$, maka $\{A, B\}^c = \phi \epsilon \mathcal{F}$
3. $\{A\}, \{B\} \epsilon \mathcal{F}$, maka $\{A, B\} \epsilon \mathcal{F}$, maka

   $\mathcal{F}$ merupakan medan sigma

Ilustrasi Medan-σ

Misalkan $X = \{1,2,3,4,5\}$ dan misalkan $\mathcal{M} = \{\{1\},\{2\}\}$ adalah himpunan bagian dari X.

Medan sigma yang mengandung $\mathcal{M}$

- $\mathcal{F}_1 = \{\{1,2,3,4,5\}, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}\}$
- $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \ \{1,3\}, \{2,3\},$
  $\{4,5\}, \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{1,4,5\}, \{2,4,5\},$

Medan-σ

- Secara praktis dari pada menentukan medan-σ dari awal, biasanya terdapat sebuah kelas dari kejadian yang menjadi perhatian $\mathbb{C}$, yang akan dimasukkan ke dalam medan-σ. Sehingga kita melengkapi $\mathbb{C}$ dengan menambahkan kejadian-kejadian agar membentuk dalam medan- σ.
- Misalkan pelemparan koin sebanyak 2 kali. Medan sigma terkecil mengandung (HH); (HT); (TH); (TT); disebut medan-σ yang dibangkitkan dari kejadian dasar.
- Secara formal, misalkan $\mathbb{C}$ adalah koleksi dari subset Ω. Minimal medan-σ yang dibangkitkan dari $\mathbb{C}$, dinotasikan $\sigma(\mathbb{C})$ memenuhi:
  1. $\mathbb{C} \subset \sigma(\mathbb{C})$
  2. jika ada $\mathcal{F}'$, medan-σ lain yang mengandung $\mathbb{C}$, maka $\sigma(\mathbb{C}) \subset \mathcal{F}'$

Ilustrasi

- Misalkan $\mathbb{C}1 = \{HH\}$

  $\rightarrow$maka $\sigma(\mathbb{C}1) = \{\emptyset, \Omega, \{HH\}, \{HT, TH, TT\}\}$
- Misalkan $\mathcal{F}'$ medan- σ lain

  dari kelas kejadian $\mathbb{C}2 = \{\{HH\}, \{TH, HT\}\}$

  yg mengandung $\mathbb{C}1$

  $\rightarrow$ maka

  $$\sigma(\mathbb{C}2) = \left\{ \begin{matrix} \emptyset, \Omega, \{HH\}, \{HT, TH, TT\}, \{TH, HT\}, \\ \{HH, TT\}, \{TT\}, \{TH, HT, HH\} \end{matrix} \right\}$$
- sehingga $\sigma(\mathbb{C}1) \subset \mathcal{F}'$

Medan-σ

- Misalnya dari gugus $\{A_1, \cdots, A_n\} \subseteq \Omega$
  - dapat dibentuk suatu kelas $\mathcal{F}$ dengan unsur-unsurnya terdiri atas $A_1, \cdots, A_n, A_1^c, \cdots, A_n^c$ dan semua irisan dari 2n buah gugus ini.
  - medan-σ $\mathcal{F}$ ini disebut medan-σ terkecil yang dibangkitkan oleh sekuens gugus $A_1, \cdots, A_n$
- Pada ruang contoh diskret terhingga, medan-σ adalah gugus kuasanya
- Pada ruang **contoh diskret takhingga atau kontinu, tidak mungkin membentuk suatu medan-σ yang mencakup semua anak gugus ruang contoh tersebut**

Medan-σ Borel

- Pada ruang contoh **diskret takhingga atau kontinu**, didefinisikan medan-σ $\mathcal{F}$ sebagai medan-σ yang dibangkitkan oleh semua selang terbuka di kiri $(-\infty, r], r \epsilon \mathcal{R}$
- Medan-σ ini berunsurkan semua titik dan semua selang pada $\mathcal{R}$.
- Setiap anggota medan-σ $\mathcal{F}$ dapat diperoleh dengan pengolahan gugus (paduan takhingga, potongan/irisan takhingga, beda, dan komplemen/ tandingan) terhadap selang
- Medan-σ terkecil yang mengandung semua selang $(-\infty, r]$, disebut dengan medan-σ Borel dan dinotasikan sebagai $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ sesuai nama pencetusnya, Emile Borel (1871-1956).

Ilustrasi

Jika $a < b \in \mathcal{R}$, maka

- Selang $(a, b] = (-\infty, b] - (-\infty, a]$
- Titik $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, a]$
- Selang $(a, b) = (a, b] - \{b\}$
- Selang $(a, \infty) = (-\infty, a]^c$

Ruang Ukuran Peluang

Misalkan Ω=ruang contoh, $\mathcal{F}$ = medan-σ pada Ω.

P = fungsi yang memetakan $\mathcal{F}$ ke gugus bilangan nyata $\mathcal{R}$

$P : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}$ disebut ukuran peluang jika:

1. P taknegatif, yaitu untuk setiap $\{A\} \in \mathcal{B}$, $P(A) \geq 0$
2. P bernorma satu, yaitu $P(\Omega) = 1$
3. P bersifat aditif takhingga yaitu jika $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{B}$ dengan $A_j \cap A_k = \emptyset$ untuk $j \neq k$, maka $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

- Pasangan $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ disebut ruang ukuran peluang
- Perbedaan definisi di atas dengan definisi peluang sebelumnya adalah **perubahan sifat aditif terhingga menjadi aditif takhingga**.

Ruang Ukuran Peluang

- Misalkan didefinikan P adalah himpunan $\{A \in \mathcal{F} : P(A) > 0\}$
- Contoh: 2 buah koin setimbang dilempar, maka fungsi peluang untuk anggota medan-σ yang mengandung semua himpunan bagian Ω adalah

Kejadian A	**P(A)**
HH	0.25
HT	0.25
TH	0.25
TT	0.25
$\varnothing$	0
Ω	1
(HH, HT, TH)	0.75
(HH, TT)	0.5
……	

Ilustrasi Ruang Ukuran Peluang

Misalkan ruang peluang: $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu)$

1. Ruang contoh dalam selang bilangan nyata $[0,1]$
2. $\mathcal{B}([0,1])$menyatakan medan-σ Borel $[0,1]$, yang merupakan medan-σ minimal yang dibangkitkan dari kejadian dasar $\{[a,b), 0 \leq$

Ilustrasi Ruang Ukuran Peluang

- Untuk mengetahui selang tertutup dapat dibangkitkan dari irisan tak terhingga dari selang terbuka
  - $\lim_{n\to\infty}[0,1/n) = \cap_{n=1}^{\infty}[0,1/n) = \{0\}$
  - $\lim_{n\to\infty}(0,1/n) = \cap_{n=1}^{\infty}(0,1/n) = \emptyset$
  - $\lim_{n\to\infty}(a-1/n\,,b+1/n) = \cap_{n=1}^{\infty}(a-$

Ilustrasi Ruang Ukuran Peluang

- Sehingga $\mathcal{B}([0,1])$ secara ekuivalen dapat dicirikan sebagai minimal medan-σ yang dibangkitkan oleh
  i. selang terbuka (a, b) pada $[0,1]$
  ii. selang tertutup $[a, b]$
  iii. selang setengah terbuka $(a, b]$ dan $[a, b)$
- Disamping itu minimal medan-σ mengandung himpunan terbuka pada $[0,1]$:

$$\mathcal{B}([0,1]) = \sigma(\text{himpunan terbuka pada } [0,1])$$

- Karakteristik medan Borel sebagai medan-σ yang mengandung himpunan bagian terbuka yang dapat digeneralisasi pada setiap ruang metrik termasuk $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^k$, dan ruang fungsional.

IlustrasiRuang Ukuran Peluang

3. $\mu(.)$ Untuk semua $A \in \mathcal{B}$, adalah ruang ukuran (measure) Lebesque, yang didefinisikan sebagai jumlah dari panjang selang yang mengandung A, misalnya $\mu\left(\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]\right) = \frac{1}{6}$, $\mu\left(\left[0,\frac{1}{2}\right] \cup (2/3,1]\right) = \frac{5}{6}$, $\mu\left(\left[\frac{1}{2}\right]\right) = 0$

$\mu(.)$ dapat merupakan suatu fungsi kepekatan peluang, sepeti Normal, exponensial, Gama, Beta, dll

Sifat Aditif takhingga

- Sifat aditif terhingga dapat diturunkan dari aditif tak hingga dengan semua gugus A_{n+1}, A_{n+2}, sama dengan $\emptyset$.
- Aksioma keaditifan lengkap dapat dipandang sebagai perluasan dari aksioma keaditifan terhingga.
- Aksioma ini diperlukan untuk sifat kekontinuan dari peluang. Sifat ini berhubungan dengan sekuens kejadian-kejadian monoton tak hingga.
- Sekuens takhingga kejadian-kejadian $\{A_n\}_1^\infty$ disebut sekuens naik monoton jika $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$

Sifat Aditif takhingga

- Limit sekuens ini dibatasi sebagai $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$
- Kejadian membentuk sekuens naik monoton dengan

  $A_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right)$ untuk $n = 1, 2, \cdots$ maka

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1\right) = (0,1)$$

- Kejadian membentuk sekuens turun monoton dengan

  $B_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ untuk $n = 1, 2, \cdots$ maka

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = 0$$

Dalil Kekontinuan Peluang

Misalkan $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suatu ruang ukuran peluang,

- Jika $\{A_n\}_1^\infty \in \mathcal{F}$ sekuens naik monoton, maka $P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$
- Jika $\{B_n\}_1^\infty \in \mathcal{F}$ sekuens turun monoton, maka $P\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$
- Sifat keaditifan lengkap dapat diturunkan dari sifat kekontinuan, sehingga sifat keaditifan lengkap setara dengan sifat kekontinuan.

Link website tentang medan-σ dan Ukuran Peluang

- https://encyclopediaofmath.org/wiki/Algebra_of_sets
- https://mathworld.wolfram.com/Sigma-Algebra.html
- https://en.wikipedia.org/wiki/Probability_space

LATIHAN

1. Tunjukkan bahwa selang(a, b) merupakan anggota medan sigma Borel, dengan a,b ∈ R.
2. Misalkan suatu percobaan yaitu sebuah dadu setimbang digulirkan dan diamati angka yang muncul. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \ \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\ \}$ adalah medan-σ pada Ω, dengan Ω adalah himpunan ruang contoh. Peubah Acak: $Y: \Omega \to \mathcal{R}$ dengan ketentuan:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{bila sisi dadu} = 1,2,4 \\ 1 & \text{bila sisi dadu} = 3,5,6 \end{cases}$$

Apakah $\mathcal{F}$ merupakan medan -σ

2.16 Let $S = \Re$ and, for $n = 1, 2, \ldots,$ define the events A_n and B_n by:

$$A_n = \left\{x \in \Re; \ -5 + \frac{1}{n} < x < 20 - \frac{1}{n}\right\}, \qquad B_n \left\{x \in \Re; 0 < x < 7 + \frac{3}{n}\right\}.$$

(i) Show that the sequence $\{A_n\}$ is increasing and the sequence $\{B_n\}$ is decreasing.

(ii) Identify the limits, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ and $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

LATIHAN

Misalkan $S = (0, \infty)$ dan didefinisikan kejadian $\mathrm{A_n} = \left(0{,}1 - \frac{2}{\mathrm{n}}\right)$ dengan $n = 1{,}2, \ldots$; $\mathrm{A} = (0{,}1)$; dan peluang $P(\mathrm{A_n}) = \frac{2n-1}{4n}$

a) Tunjukkan sekuens $\{\mathrm{A_n}\}$ merupakan sekuens monoton naik sehingga $\lim_{n\to\infty} \mathrm{A_n} = \mathrm{A}$
b) Gunakan hasil butir (a) untuk menghitung $P(\mathrm{A})$


what you
DO TODAY
CAN
IMPROVE
ALL YOUR
tomorrows
RALPH MARSTON

PELUANG SUATU KEJADIAN

1. Dalam sebuah wadah terdapat 5 Bola Hitam (H) dan 3 Bola Kuning (K)

   Tindakan I: Ambil secara acak sebuah bola berulang-ulang dari wadah itu sampai terambil empat bola, pada setiap kali ambilan bola dikembalikan lagi ke dalam wadah sebelum ambilan berikutnya

   Tindakan II: Ambil secara acak sebuah bola berulang-ulang dari wadah itu sampai terambil 4 bola, tetapi pada setiap ambilan bola tidak dikembalikan lagi ke dalam wadah

Pertanyaan :

a. Bila urutan bola yang terambil diperhatikan, berikan ruang contoh untuk semua peristiwa (urutan 4 bola yang terambil) yang mungkin ditimbulkan dari tindakan I.

Jawab :

Pengambilan 4 buah bola secara berulang-ulang dengan ***pemulihan*** dan urutan diperhatikan dari sebuah wadah yang berisi 5 Bola Hitam (H) dan 3 Bola Kuning (K) sama dengan melakukan pengambilan 4 buah bola secara berulang dari 2 bola yang berbeda dengan pemulihan.

Banyaknya bola untuk masing-masing warna tidak diperhatikan karena adanya pemulihan sehingga setiap bola dalam wadah bisa terambil sebanyak n kali. Sehingga *banyaknya kemungkinan susunan yang terambil sebanyak:* $n^r = 2^4=16$. Dengan n adalah banyaknya jenis bola, r adalah banyaknya ambilan.

Ruang contoh untuk semua peristiwa

Banyaknya Bola H	Banyak Cara Menyusun Bola Hitam dengan Bola Kuning	Pengambilan Bola Ke-			
		1	2	3	4
4	$\binom{4}{4}=1$	H	H	H	H
3	$\binom{4}{3}=4$	H	H	H	K
		H	H	K	H
		H	K	H	H
		K	H	H	H
2	$\binom{4}{2}=6$	H	H	K	K
		H	K	H	K
		H	K	K	H
		K	H	H	K
		K	H	K	H
		K	K	H	H
1	$\binom{4}{1}=4$	H	K	K	K
		K	H	K	K
		K	K	H	K
		K	K	K	H
0	$\binom{4}{0}=1$	K	K	K	K
Total	16 Cara				

b. Bila urutan bola yang terambil diperhatikan, berikan ruang contoh untuk semua peristiwa (urutan 4 bola yang terambil) yang mungkin ditimpulkan dari tindakan II.

Jawab :

Pada tindakan II, bola yang terambil tidak dikembalikan. Sehingga jika diambil sebanyak 4 bola maka ruang contoh pada kasus ini sama dengan kasus di atas dikurangi dengan kejadian {KKKK} karena kejadian ini tidak mungkin terjadi dikarenakan banyaknya bola kuning hanya ada 3. (Namun jika bola kuning ada lebih dari 3 maka ruang contohnya sama dengan di atas).

Jadi akan ada sebanyak 15 peristiwa yang mungkin yaitu :

Banyaknya Bola H	Banyak Cara Menyusun Bola Hitam dengan Bola Kuning	Pengambilan Bola Ke-			
		1	2	3	4
4	$\binom{4}{4}=1$	H	H	H	H
3	$\binom{4}{3}=4$	H	H	H	K
		H	H	K	H
		H	K	H	H
		K	H	H	H
2	$\binom{4}{2}=6$	H	H	K	K
		H	K	H	K
		H	K	K	H
		K	H	H	K
		K	H	K	H
		K	K	H	H
1	$\binom{4}{1}=4$	H	K	K	K
		K	H	K	K
		K	K	H	K
		K	K	K	H
Total	15 Cara				

c. Berapa peluang untuk memperoleh 2 bola H dan 2 Bola Kuning dari tindakan I? Tunjukkan bagaimana cara memperolehnya.

Jawaban :

Bila urutan bola diperhatikan, banyaknya peristiwa terambilnya 2 bola H dan 2 bola K yang mungkin ditimbulkan dalam pengambilan 4 bola secara berulang dengan pemulihan adalah: $\binom{4}{2} = 6$.

Peluang terambilnya bola H dan Kuning untuk setiap pengambilan selalu tetap karena adanya pemulihan. P(H) = 5/8 dan P(K) =3/8.

Ruang contoh dari Kejadian terambil 2 bola H dan 2 Bola kuning untuk tidakan pertama adalah:

Banyakny Bola H	Banyak Cara Menyusun Bola Hitam dengan Bola Kuning	Pengambilan Bola Ke-			
		1	2	3	4
2	$\binom{4}{2} = 6$	H	H	K	K
		H	K	H	K
		H	K	K	H
		K	H	H	K
		K	H	K	H
		K	K	H	H
Total	6 Cara				

Sehingga *peluangnya adalah* : $P_I(2H + 2K) = \binom{4}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{675}{2048} = 0.3296$

d. Berapa peluang untuk memperoleh 2 Bola H dan 2 Bola K dari tindakan II? Tunjukkan cara memperolehnya.

Jawaban :

Bila urutan bola diperhatikan, banyaknya peristiwa terambilnya 2 bola H dan 2 Bola K yang mungkin ditimbulkan dalam pengambilan 4 bola secara berulang dengan tanpa pemulihan sama dengan banyaknya peristiwa dengan pemulihan karena banyaknya bola untuk setiap warna > 2. Sehingga banyaknya peritiwa adalah $\binom{4}{2} = 6$.

Ruang contoh dari Kejadian terambil 2 bola H dan 2 Bola kuning untuk tidakan pertama adalah :

Banyakny Bola H	Banyak Cara Menyusun Bola Hitam dengan Bola Kuning	Pengambilan Bola Ke-			
		1	2	3	4
		K	H	H	H
2	$\binom{4}{2} = 6$	H	H	K	K
		H	K	H	K
		H	K	K	H
		K	H	H	K
		K	H	K	H
		K	K	H	H
Total	6 Cara				

Peluang terambilnya bola H dan K untuk setiap pengambilan <u>selalu berubah</u> karena diambil tanpa pemulihan.

- Peluang terambil bola H pada ambilan pertama adalah $P(H_1)=5/8$.
- Peluang terambil bola H pada ambilan kedua setelah ambilan pertama terambil bola H adalah $P(H_2)=4/7$
- Peluang terambil bola H pada ambilan kedua setelah ambilan pertama terambil bola K adalah $P(H_2)=5/7$

Dan begitu seterusnya.

Sehingga *peluangnya dapat dihitung* :

$P(\text{HHKK}) = P(H_1)P(H_2)P(K_3)P(K_4)$

$$\left.\begin{array}{l}
P(HHKK)=P(H_1)P(H_2)P(K_3)P(K_4)=\frac{5}{8}x\frac{4}{7}x\frac{3}{6}x\frac{2}{5} \\
P(HKHK)=P(H_1)P(K_2)P(H_3)P(K_4)=\frac{5}{8}x\frac{3}{7}x\frac{4}{6}x\frac{2}{5} \\
P(HKKH)=P(H_1)P(K_2)P(K_3)P(H_4)=\frac{5}{8}x\frac{3}{7}x\frac{2}{6}x\frac{4}{5} \\
P(KHHK)=P(K_1)P(H_2)P(H_3)P(K_4)=\frac{3}{8}x\frac{5}{7}x\frac{4}{6}x\frac{2}{5} \\
P(KHKH)=P(K_1)P(H_2)P(K_3)P(H_4)=\frac{3}{8}x\frac{5}{7}x\frac{2}{6}x\frac{4}{5} \\
P(KKHH)=P(K_1)P(K_2)P(H_3)P(H_4)=\frac{3}{8}x\frac{2}{7}x\frac{5}{6}x\frac{4}{5}
\end{array}\right\}\binom{4}{2}\frac{5}{8}x\frac{4}{7}x\frac{3}{6}x\frac{2}{5}=\frac{3}{7}$$

2. Ada 5 pasang sepatu (jadi ada 10 belah sepatu) yaitu $(1_a,1_b)$, $(2_a,2_b)$, $(3_a,3_b)$, $(4_a,4_b)$, dan $(5_a,5_b)$. Catatan i_a = belahan sepatu yang kiri dari pasangan ke-i , dan i_b = belahan sepatu yang kanan dari pasangan ke-i (i = 1, 2, ..., 5). ***Dari 10 belah sepatu itu diambil secara acak (tanpa pemulihan) 4 belah sepatu***.

Pertanyaan :

a. Berapa besarnya peluang bahwa 4 belah sepatu yang terambil itu tidak ada yang berpasangan? Tunjukkan bagaimana cara memperolehnya.

Jawab:

Terdapat 5 pasang sepatu (10 belah), yaitu:

1a	2a	3a	4a	5a
1b	2b	3b	4b	5b

Tindakan : Ambil secara acak tanpa pemulihan 4 belah sepatu

- Total susunan yang mungkin dari pengambilan 4 belah sepatu dari 10 belah sepatu adalah ${}^{10}C_4$

$$ {}^{10}C_4 = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(6!)} = \frac{(7)(8)(9)(10)}{(1)(2)(3)(4)} = 210 $$

Kejadian A: Tidak ada belahan yang berpasangan.

- pertama-tama ambil empat pasang sepatu dari 5 pasang. Kemungkinan sepatu yang terpilih adalah {1,2,3,4},{1,2,3,5}, {1,2,4,5}, {1,3,4,5}, {2,3,4,5}.
- selanjutnya dari setiap pasang sepatu yang terambil diambil satu belah sehingga tidak akan ada belah sepatu yang berpasangan. Ilustrasi ini dapat dihitung sebagai berikut :

Total susunan yang mungkin dari 4 belah sepatu yang tidak berpasangan adalah:

$$ n(A) = \binom{5}{4}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 5(2)(2)(2)(2) = 80 $$

Sehingga peluang kejadian A adalah : $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{80}{210} = \dfrac{8}{21}$

b. Berapa besarnya peluang bahwa dari 4 belah sepatu yang terambil itu hanya ada dua belah yang berpasangan? Tunjukkan bagaimana caranaya memperolehnya.

Jawab :

Kejadian B: Hanya ada dua belah yang berpasangan.

- pertama-tama ambil 1 pasang sepatu dari 5 pasang sepatu
- kemudian ambil 2 pasang sepatu dari 4 pasang sepatu sisa ambilan pertama.
- selanjutnya ambil satu belah dari 2 pasang pada ambilan kedua.

Total susunan sepatu yang mungkin dari 4 belah sepatu yang terambil hanya ada dua belah sepatu yang berpasangan adalah: $n(B)=\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{1}=(5)(6)(2)(2)=120$

atau

Jika terdapat 2 belah sepatu yang berpasangan, maka jika diambil empat buah sepatu akan terdiri dari 3 jenis sepatu.

- pertama-tama ambil 3 pasang sepatu dari 5 pasang
- kemudian dari 3 pasang yang terambil, 1 pasang diambil dua-duanya
- kemudian dari sisa dua pasang yang lain diambil masing-masing satu belah.

Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut: $n(B)=\binom{5}{3}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}=(10)(3)(2)(2)=120$

Sehingga peluang kejadian B adalah: $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{120}{210}=\dfrac{4}{7}$

c. Berapa besarnya peluang bahwa empat belah sepatu yang terambil merupakan dua pasang sepatu?

<u>*Jawab :*</u>

Kejadian C: Empat belah sepatu yang terambil merupakan dua pasang sepatu

- pertama-tama ambil 2 pasang sepatu dari 5 pasang sepatu
- kemudian dari kedua pasang sepatu tersebut diambil kedua-duanya.

Total susunan sepatu yang mungkin dari 4 belah sepatu yang terambil merupakan dua pasang sepatu adalah: $n(C) = \binom{5}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{2} = (10)(1)(1) = 10$

Sehingga dalam hal ini peluang terjadinya kejadian C adalah: $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{10}{210} = \dfrac{1}{21}$

2. Dalam satu tahun terdapat 12 bulan. Setiap bulan memiliki jumlah hari yang berbeda-beda. Jika diinginkan memiliki 180 hari dalam 1 tahun, hitunglah peluang bahwa 180 hari itu terambil dari setiap bulan sebanyak 15 hari.

Jawab :

Misalkan A : Kejadian terambilnya 180 hari dalam satu tahun dengan banyaknya hari pada setiap bulan sebanyak 15 hari.

	Bulan ke-												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
	JAN	FEB	MAR	APR	MEI	JUN	JUL	AGS	SEP	OKT	NOP	DES	
Jml Hari	31	29	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	366

Sehingga peluang kejadian A adalah:

$$P(A)=\frac{\binom{31}{15}\binom{29}{15}\binom{31}{15}\binom{30}{15}\binom{31}{15}\binom{30}{15}\binom{31}{15}\binom{31}{15}\binom{30}{15}\binom{31}{15}\binom{30}{15}\binom{31}{15}}{\binom{366}{180}}=\frac{\binom{31}{15}^7\binom{30}{15}^4\binom{29}{15}}{\binom{366}{180}}=0.00000000167$$

4. Tiga bola berwarna merah, kuning , dan kuning akan dibagikan kepada 5 anak (A, B, C, D, E)

<u>Pertanyaan :</u>

a. Jika 3 bola itu berbeda (m, b, k) berapa banyak kemungkinan hasil pembagian bola tersebut.

<u>Jawab :</u>

Sehingga kasus ini serupa dengan sebaran 3 bola yang berbeda pada 5 wadah (anak).

Sehingga *banyaknya kemungkinan pembagian tiga bola berbeda ke pada 5 anak adalah* :

$$n^r = 5^3 = 125 \text{ kemungkinan}$$

Banyaknya kemungkinan hasil pembagian bola tersebut adalah :

No.	Bola			Bola			Bola			Bola			Bola		
	m	b	k	m	b	k	m	b	k	m	b	k	m	b	k
1	A	A	A	B	A	A	C	A	A	D	A	A	E	A	A
2	A	A	B	B	A	B	C	A	B	D	A	B	E	A	B
3	A	A	C	B	A	C	C	A	C	D	A	C	E	A	C
4	A	A	D	B	A	D	C	A	D	D	A	D	E	A	D
5	A	A	E	B	A	E	C	A	E	D	A	E	E	A	E
6	A	B	A	B	B	A	C	B	A	D	B	A	E	B	A
7	A	B	B	B	B	B	C	B	B	D	B	B	E	B	B
8	A	B	C	B	B	C	C	B	C	D	B	C	E	B	C
9	A	B	D	B	B	D	C	B	D	D	B	D	E	B	D
10	A	B	E	B	B	E	C	B	E	D	B	E	E	B	E
11	A	C	A	B	C	A	C	C	A	D	C	A	E	C	A
12	A	C	B	B	C	B	C	C	B	D	C	B	E	C	B
13	A	C	C	B	C	C	C	C	C	D	C	C	E	C	C
14	A	C	D	B	C	D	C	C	D	D	C	D	E	C	D
15	A	C	E	B	C	E	C	C	E	D	C	E	E	C	E
16	A	D	A	B	D	A	C	D	A	D	D	A	E	D	A
17	A	D	B	B	D	B	C	D	B	D	D	B	E	D	B
18	A	D	C	B	D	C	C	D	C	D	D	C	E	D	C
19	A	D	D	B	D	D	C	D	D	D	D	D	E	D	D
20	A	D	E	B	D	E	C	D	E	D	D	E	E	D	E
21	A	E	A	B	E	A	C	E	A	D	E	A	E	E	A
22	A	E	B	B	E	B	C	E	B	D	E	B	E	E	B
23	A	E	C	B	E	C	C	E	C	D	E	C	E	E	C
24	A	E	D	B	E	D	C	E	D	D	E	D	E	E	D
25	A	E	E	B	E	E	C	E	E	D	E	E	E	E	E

b. Jika 3 bola itu persis sama segalanya, berapa banyak kemungkinan hasil pembagian bola tersebut.

Jawab :

Karena ketiga bola tersebut persis sama misalkan saja bola tersebut ketiganya kita beri huruf a. Sehingga pembagian dalam hal ini tidak memperhatikan jenis bola yang dibagikan.

Banyaknya kemungkinan adalah: $\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{3+5-1}{5-1} = \frac{7!}{4!(3)!} = \frac{(5)(6)(7)}{(6)} = 35\,Kemungkinan$

No.	Bola			Bola			Bola			Bola			Bola		
	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
1	A	A	A	B	A	A	C	A	A	D	A	A	E	A	A
2	A	A	B	B	A	B	C	A	B	D	A	B	E	A	B
3	A	A	C	B	A	C	C	A	C	D	A	C	E	A	C
4	A	A	D	B	A	D	C	A	D	D	A	D	E	A	D
5	A	A	E	B	A	E	C	A	E	D	A	E	E	A	E
6	A	B	A	B	B	A	C	B	A	D	B	A	E	B	A
7	A	B	B	B	B	B	C	B	B	D	B	B	E	B	B
8	A	B	C	B	B	C	C	B	C	D	B	C	E	B	C
9	A	B	D	B	B	D	C	B	D	D	B	D	E	B	D
10	A	B	E	B	B	E	C	B	E	D	B	E	E	B	E
11	A	C	A	B	C	A	C	C	A	D	C	A	E	C	A
12	A	C	B	B	C	B	C	C	B	D	C	B	E	C	B
13	A	C	C	B	C	C	C	C	C	D	C	C	E	C	C
14	A	C	D	B	C	D	C	C	D	D	C	D	E	C	D
15	A	C	E	B	C	E	C	C	E	D	C	E	E	C	E
16	A	D	A	B	D	A	C	D	A	D	D	A	E	D	A
17	A	D	B	B	D	B	C	D	B	D	D	B	E	D	B
18	A	D	C	B	D	C	C	D	C	D	D	C	E	D	C
19	A	D	D	B	D	D	C	D	D	D	D	D	E	D	D
20	A	D	E	B	D	E	C	D	E	D	D	E	E	D	E
21	A	E	A	B	E	A	C	E	A	D	E	A	E	E	A
22	A	E	B	B	E	B	C	E	B	D	E	B	E	E	B
23	A	E	C	B	E	C	C	E	C	D	E	C	E	E	C
24	A	E	D	B	E	D	C	E	D	D	E	D	E	E	D
25	A	E	E	B	E	E	C	E	E	D	E	E	E	E	E

Kombinasi yang dihitamkan berarti kombinasi yang dihilangkan karena bola tidak berbeda.
Contoh :

ABC = ACB = BAC = BCA = CAB = CBA

Sehingga banyaknya kemungkinan secara lebih jelas ditunjukkan di bawah ini :

No	Bola		
	A	a	a
1	A	A	A
2	A	A	B
3	A	A	C
4	A	A	D
5	A	A	E
6	A	B	B
7	A	B	C
8	A	B	D
9	A	B	E
10	A	C	C
11	A	C	D
12	A	C	E
13	A	D	D
14	A	D	E
15	A	E	E
16	B	B	B
17	B	B	C
18	B	B	D
19	B	B	E

No	Bola		
	a	a	a
20	B	C	C
21	B	C	D
22	B	C	E
23	B	D	D
24	B	D	E
25	B	E	E
26	C	C	C
27	C	C	D
28	C	C	E
29	C	D	D
30	C	D	E
31	C	E	E
32	D	D	D
33	D	D	E
34	D	E	E
35	E	E	E

c. Jika bola itu berbeda (m, b, k), berapa peluang setiap anak tidak boleh mendapat lebih dari 2 bola.

<u>*Jawab :*</u>

- Banyaknya kemungkinan setiap anak *tidak boleh mendapat lebih dari 2 bola*:
  - Misalkan kejadian C= setiap anak tidak boleh mendapat lebih dari 2 bola
  - Kasus ini serupa dengan kasus nomor 4(a) namun dengan batasan bahwa seorang anak tidak boleh mendapatkan bola lebih dari 2.
  - Ini berarti tidak ada anak yang mendapatkan tiga bola.
  - Sehingga banyaknya kemungkinan pada kaus 4(a) harus dikurangi dengan kemungkinan anak yang mendapat tiga bola yaitu ada sebanyak 5 kemungkinan yaitu :

    AAA BBB CCC DDD EEE

  - Sehingga total kemungkinan hasil pengambilan tersebut jika bola itu berbeda (m, b, k) dan setiap anak tidak boleh mendapat lebih dari 2 bola adalah: 125 – 5= 120 kemungkinan.
- *Peluang setiap anak tidak boleh mendapat lebih dari 2 bola adalah*:

  P(C) =120/125

d. Bila 3 bola tersebut sama, berapa peluang setiap anak tidak boleh mendapat lebih dari 2 bola.

Jawab :

- Banyaknya kemungkinan setiap anak tidak boleh mendapat lebih dari 2 bola:
  - Misalkan kejadian D= setiap anak tidak boleh mendapat lebih dari 2 bola
  - Kasus ini serupa dengan kasus nomor (b) namun dengan batasan bahwa seorang anak tidak boleh mendapatkan bola lebih dari 2.
  - Ini berarti tidak ada anak yang mendapatkan tiga bola.
  - Sehingga banyaknya kemungkinan pada kaus (b) harus dikurangi dengan kemungkinan anak yang mendapat tiga bola yaitu ada sebanyak 5 kemungkinan yaitu :

    AAA BBB CCC DDD EEE
  - Sehingga total kemungkinan hasil pengambilan tersebut jika bola itu sama (a, a, a) dan setiap anak tidak boleh mendapat lebih dari 2 bola adalah 35 – 5= 30 kemungkinan.
- *Peluang setiap anak tidak boleh mendapat lebih dari 2 bola adalah*:

$$P(C) = 30/35$$

5. Tujuh bola yang persis sama segalanya akan dibagikan semuanya kepada 5 anak (A, B, C, D, E)

Pertanyaan :

a. Jika seorang anak dapat memperoleh 0, 1, 2, …, 7 bola berapa banyak kemungkinan hasil pembagian bola tersebut.

Jawab :

Kasus ini sama dengan kasus pada 4(b). Dari cerita di atas diketahui :

Wadah (anak) sebanyak r = 5 dan obyek (bola yang sama) sebanyak n = 7

Sehingga *banyaknya cara pembagian bola tersebut adalah*:

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{7+5-1}{5-1} = \frac{11!}{4!\ 7!} = \frac{(8)(9)(10)(11)}{24} = 330$$

Jadi ada sebanyak 330 kemungkinan cara pembagian bola.

b. Berapa peluang setiap anak harus paling sedikit mendapat satu bola.

Jawab :

- Banyaknya kemungkinan membagi bola bila setiap anak paling sedikit mendapat satu bola:
  - Jika setiap anak harus mendapatkan paling sedikit satu bola maka dari tujuh bola pertama-tama ambil 5 bola dan bagikan pada setiap anak. Karena bolanya sama maka ada 1 kemungkinan pembagian satu bola pada 5 anak.
  - Selanjutnya sisa 2 bola dua dibagikan lagi kepada 5 anak. Pembagian 2 bola ke lima anak ini sama dengan kasus 4(b).
  - Sehingga total kemungkinan pembagian adalah : $1\times\binom{2+5-1}{5-1}=\frac{6!}{2!4!}=\frac{(5)(6)}{2}=15$

Atau cara kedua :

- Jika setiap anak harus mendapat minimal satu bola maka akan ada sebanyak 2 ketentuan jumlah bola yang diperoleh masing-masing anak yaitu :

  1) 3 1 1 1 1 : 1 anak 3 bola, 4 anak 1 bola
  2) 2 2 1 1 1 : 2 anak 2 bola, 3 anak 1 bola

- banyak cara pembagian dilakukan dengan banyaknya bola yang dibagikan sesuai dengan ketentuan (1), dan (2).

  Banyak kemungkinan pembagian sesuai ketentuan pertama: $\frac{5!}{1!4!}=5$

  Banyak kemungkinan ketentuan kedua: $\frac{5!}{2!3!}=\frac{4x5}{2}=10$

- Jadi banyak cara : 5 + 10 = 15 cara pembagian

- *Peluang setiap anak setiap anak harus mendapat minimal satu bola* (misalkan kejadian A)adalah:

  P(A) =15/330

c. Berapa peluang setiap anak tidak boleh mendapat lebih dari 3 bola.

<u>*Jawab :*</u>

- Banyaknya kemungkinan membagi bola bila setiap tidak boleh mendapat lebih dari 3 bola:
  - Terdapat enam ketentuan jumlah bola yang diperoleh masing-masing anak :
    1) 3 3 1 0 0 : 2 anak 3 bola, 1 anak 1 bola dan 2 anak 0 bola
    2) 3 2 2 0 0 : 2 anak 3 bola, 2 anak 2 bola dan 2 anak 0 bola
    3) 3 2 1 1 0 : 1 anak 3 bola, 1 anak 2 bola, 2 anak 1 bola dan 1 nak 0 bola
    4) 3 1 1 1 1 : 1 anak 3 bola, dan 4 anak 1 bola
    5) 2 2 2 1 0 : 3 anak 2 bola, 1 anak mendapat 1 bola dan 1 anak 0 bola
    6) 2 2 1 1 1 : 2 anak 2 bola, dan 3 anak 1 bola
  - Cara pembagian sesuai dengan ketentuan masing-masing di diatas:
    1) Banyak kemungkinan pembagian sesuai ketentuan pertama: $\frac{5!}{2!2!1!} = \frac{3\times4\times5}{2} = 30$
    2) Banyak kemungkinan pembagian sesuai ketentuan kedua: $\frac{5!}{1!2!2!} = \frac{3\times4\times5}{2} = 30$
    3) Banyak kemungkinan pembagian sesuai ketentuan ketiga: $\frac{5!}{1!1!2!1!} = 3\times4\times5 = 60$
    4) Banyak kemungkinan pembagian sesuai ketentuan kempat: $\frac{5!}{1!4!} = 5$
    5) Banyak kemungkinan pembagian sesuai ketentuan kelima: $\frac{5!}{3!1!1!} = 4\times5 = 20$
    6) Banyak kemungkinan pembagian sesuai ketentuan keenam: $\frac{5!}{2!3!} = \frac{4\times5}{2} = 10$

- Jadi banyak cara pembagian 7 bola yang sama kepada 5 orang anak dengan ketentuan setiap anak tidak bola mendapat lebih dari 3 bola adalah: 30 + 30 + 60 + 5 + 20 + 10 = 155 cara

Atau cara kedua*:*

- Jika setiap anak maksimal memperoleh tiga bola maka total kemungkinan dari pembagian 7 bola identik kepada 5 anak dikurangi total kemungkinan setiap anak dapat memperoleh lebih dari 3 bola.
- Kemungkinan seorang anak memperoleh *lebih dari tiga bola*:
  1) Kemungkinan salah seorang anak memperoleh 4 bola maka sisanya ada 3 bola yang dibagikan kepada 4 anak. Banyaknya kemungkinan adalah: $5\,anak \times \binom{3+4-1}{4-1} = 5 \times \frac{6!}{3!3!} = 100$
  2) Kemungkinan salah seorang anak memperoleh 5 bola maka sisanya ada 2 bola yang dibagikan kepada 4 anak. Banyaknya kemungkinan adalah: $5\,anak \times \binom{2+4-1}{4-1} = 5 \times \frac{5!}{2!3!} = 50$
  3) Kemungkinan salah seorang anak memperoleh 6 bola maka sisanya ada 1 bola yang dibagikan kepada 4 anak. Banyaknya kemungkinan adalah: $5\,anak \times \binom{1+4-1}{4-1} = 5 \times \frac{4!}{1!3!} = 20$
  4) Kemungkinan salah seorang anak memperoleh 7 bola maka dan 4 yang lain tidak mendapatkan bola. Banyaknya kemungkinan adalah : $5\,anak \times \binom{0+4-1}{4-1} = 5 \times \frac{3!}{0!3!} = 5$
- Total kemungkinan seorang anak mendapatkan lebih dari tiga bola adalah:100 + 50 + 20 + 5 = 175
- Sehingga banyaknya kemungkinan seorang memperoleh tidak lebih dari 3 bola dari 7 bola yang dibagikan kepada 5 orang anak adalah: 330 – 175 = 155

➢ *Peluang setiap anak setiap anak tidak bola mendapat lebih dari 3 bola (misalkan kejadian B) adalah*: P(B) =155/330

NILAI HARAPAN, RAGAM, DAN MOMEN

Nilai Harapan=Titik Keseimbangan=Rataan

Nilai Harapan dari peubah acak X **didefinisikan** sebagai berikut:

- Jika X p.a. diskret

$$\mu_X = E(X) = \sum_{\forall x} xP(X = x)$$

- Jika X p.a. kontinu

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

Nilai Harapan fungsi dari peubah acak: Misalkan $g(X)$ adalah fungsi dari p.a. X, maka nilai harapan dari $g(X)$ adalah

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{\forall x} g(x)P(X = x) & jika\ X\ diskret \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx & jika\ X\ kontinu \end{cases}$$

Ragam

Ragam dari peubah acak X **didefinisikan** sebagai berikut:

- Jika X p.a. diskret

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \sum_{x} (x-\mu)^2 P(x)$$

- Jika X p.a. kontinu

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

Alternatif formula nilai **ragam** suatu sebaran:

$$\sigma^2 = E(X^2) - (\mu)^2$$

Simpangan baku p.a. diskret/kontinu:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Sifat Nilai Harapan dan Ragam

Misalkan a dan b adalah suatu konstanta

Nilai Harapan:

- $E(a) = a$
- $E(aX) = aE(X)$
- $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$
- $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

Ragam:

- $Var(a) = 0$
- $Var(aX) = a^2 Var(X)$
- $Var(aX \pm b) = a^2 Var(X)$
- $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X,Y)$

Momen

Momen ke-*k* dari p.a. X didefinisikan sebagai:

$$\mu'_k = E[X^k], \quad k = 1,2,3,\cdots$$

Momen pusat ke-k dari p.a. X didefinisikan sebagai:

$$\mu^k = E[(X-\mu)^k], \quad k = 2,3,4,\cdots$$

Kemiringan (skewness): momen ketiga yang dibakukan terhadap rataan, digunakan untuk mengukur **kesimetrikan** suatu fungsi sebaran terhadap rataannya

$$a_3 = \frac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{\mu^3}{\mu_2^{3/2}}$$

- Jika $a_3 = 0$ → sebaran simetrik terhadap rataannya
- Jika $a_3 > 0$ → sebaran mempunyai ekor yang panjang di bagian ekor kanan
- Jika $a_3 < 0$ → sebaran mempunyai ekor yang panjang di bagian ekor kiri

Kurtosis: momen keempat yang dibakukan terhadap rataan, digunakan untuk mengukur **lancip atau landainya** suatu fungsi sebaran disbanding sebaran normal.

$$a_4 = \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{\mu^4}{\mu_2^2}$$

- Kurtosis **positif** → sebaran memiliki sedikit pengamatan di ekor sebaran
- Kurtosis **negatif** → sebaran memiliki banyak pengamatan di ekor sebaran
- ○ Leptokurtik: sebaran dengan ekor yang relatif panjang
- ○ Platokurtik: sebaran dengan ekor yang relatif pendek
- ○ Mesokurtik: sebaran dengan kurtosis yang sama dengan sebaran normal $(a_4 = 3)$

Fungsi Pembangkit Momen (FPM)

Fungsi pembangkit momen p.a. X didefinisikan sebagai:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_{\forall x} e^{tX} P(X=x) & jika\ X\ diskret \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x)\, dx & jika\ X\ kontinu \end{cases}$$

Sifat FPM:

1. $M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$
2. $M_{aX}(t) = M_X(at)$
3. Jika $X_1, \cdots, X_n$ merupakan p.a. bebas stokastik dengan FPM masing-masing $M_{X_1}(t), \cdots, M_{X_n}(t)$ dan $Y = X_1 + \cdots + X_n$ → $M_Y(t) = M_{X_1}(t) + \cdots + M_{X_n}(t)$

Latihan Soal

1. Misalkan dua butir dadu sisi enam yang seimbang dilemparkan dan peubah acak X menyatakan nilai minimum dari banyaknya mata yang muncul pada kedua dadu tersebut. Tentukan fungsi massa peluang, nilai harapan dan ragam dari X.
2. Misalkan X adalah peubah acak dengan E(X) = E(X(X-2)) = 2. Tentukan Var(-3X + 7).
3. Jika diketahui E(X)=2 dan Var(X)=6. Tentukan:
   a. $E[(X+2)^2]$
   b. $Var(4+7X)$
4. Diketahui fungsi kepekatan dari X sebagai berikut:
$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,x\ lainnya \end{cases}$$
   a. Tentukan nilai c
   b. Tentukan nilai harapan dan ragam
   c. Tentukan momen ke-3 dari X
5. Diketahui fungsi pembangkit momen peubah acak X
$$M_x(t) = \frac{1}{(1-2500t)^4}$$
   Tentukan simpangan baku dari fpm di atas

STA202 – TEORI PELUANG

NILAI HARAPAN

Oleh: Anik Djuraidah

Program Studi Sarjana Statistika dan Sains Data
Departemen Statistika - FMIPA

IPB University
Bogor Indonesia

Outline

1. Nilai Harapan
2. Ragam
3. Nilai Harapan fungsi dari Peubah Acak
4. Sifat Nilai Harapan dan Ragam
5. Momen
6. Fungsi Pembangkit Momen

REFERENSI:

1. *Ross SM. 2010. A first course in probability. 8th ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall.*
2. *Wackerly DD, Mendenhall W, Scheaffer RL. 2008. Mathematical Statistics with Applications. Seventh Edition. California: Thomson Learning, Inc*

1. NILAI HARAPAN

- Salah satu konsep yang sering digunakan dalam teori statistika adalah nilai harapan suatu peubah acak.
- Nilai harapan dapat dipandang sebagai titik keseimbangan dari suatu fungsi peluang dalam satu garis riil (absis nilai peubah acak x) , dan secara umum disebut dengan rataan.

Definisi:

Misalkan peubah acak X yang mempunyai fungsi massa (kepekatan) peluang $f(x)$.

Rataan atau nilai harapan dari X didefinisikan sebagai:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{\forall x} x\, P(X = x)$$ jika X p.a. diskret

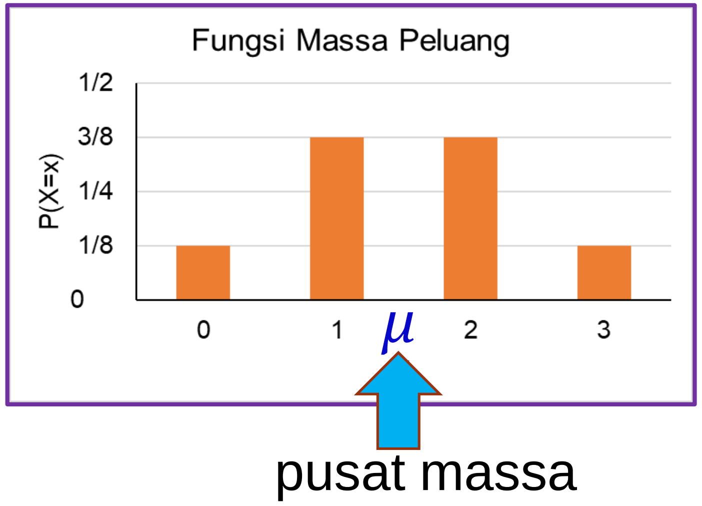
dan

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$$ jika X p.a. kontinu

Ilustrasi: Nilai Harapan p.a. diskret

Perhatikan pada Ilustrasi-fmp

x	0	1	2	3
P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8



- Nilai Harapan peubah acak X:

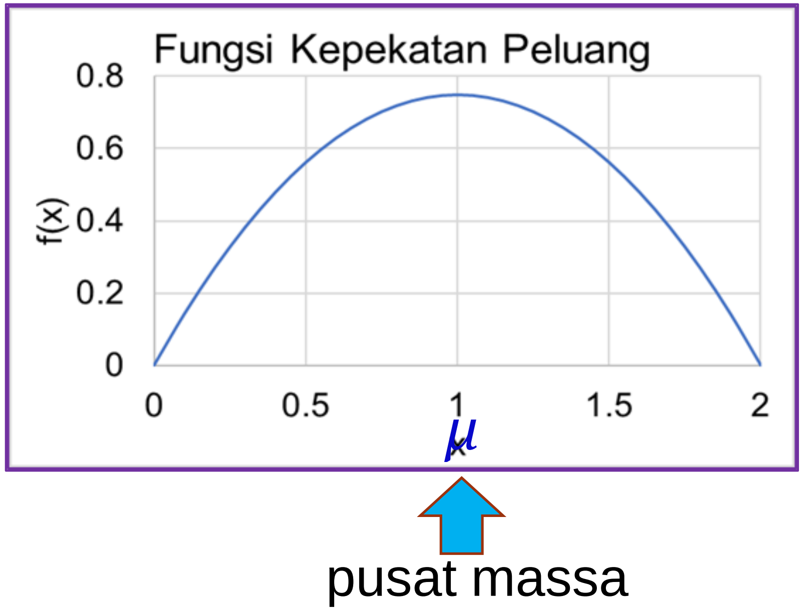
$$E(X) = \mu = \left(0 \times \frac{1}{8}\right) + \left(1 \times \frac{3}{8}\right) + \left(2 \times \frac{3}{8}\right) + \left(3 \times \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{2}$$

Ilustrasi: Nilai Harapan p.a kontinu

Perhatikan pada Ilustrasi-fkp

Peubah acak X mempunyai fkp:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(4x - 2x^2) & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{lainnya} \end{cases}$$



- Nilai Harapan peubah acak X:

$$E(X) = \int_0^2 x \times \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx = \int_0^2 \frac{3}{8}(4x^2 - 2x^3)dx$$

$$\leftrightarrow E(X) = \frac{3}{8}\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right)\Big|_{x=0}^{x=2}$$

$$\leftrightarrow E(X) = \frac{3}{8}\left[\left(\frac{32}{3} - 8\right) - (0 - 0)\right] = \frac{3}{8}\left[\left(\frac{8}{3}\right)\right] = 1$$

2. RAGAM

- Ragam peubah acak diskret X

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \sum_x (x-\mu)^2 P(x)$$

- Ragam peubah acak kontinu X

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

- Alternatif formula dalam perhitungan nilai ragam suatu sebaran

$$\sigma^2 = E(X^2) - (\mu)^2$$

- Simpangan baku peubah acak diskret/kontinu

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Ilustrasi: Ragam p.a Diskret

Perhatikan Ilustrasi-fmp

Fungsi massa peluang X adalah:

x	0	1	2	3
P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8

- $\mu = E(X) = \frac{3}{2}$
- $E(X^2) = \sum_{x=0}^{3} x^2 f(x)$

$$= 0^2\left(\frac{1}{8}\right) + 1^2\left(\frac{3}{8}\right) + 2^2\left(\frac{3}{8}\right) + 3^2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{24}{8} = 3$$

- maka $\sigma^2(X) = E(X^2) - \mu^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$
- Simpangan baku: $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Ilustrasi: Ragam p.a. kontinu

Misalkan peubah acak Y menyebar sesuai fungsi kepekatan peluang berikut :

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{64}y^2(4-y) & \text{untuk} \quad 0 \le y \le 4 \\ 0 & \text{untuk} \quad \text{lainnya} \end{cases}$$

- $\mu_Y = E(Y) = \int_0^4 \frac{3}{64}y^3(4-y)\,dy$

$$= \frac{3}{64}\int_0^4 (4y^3 - y^4)\,dy = \frac{3}{64}\left(y^4 - \frac{1}{5}y^5\right)\Bigg|_0^4 = 2.4$$

- $E(Y^2) = \int_0^4 \frac{3}{64}y^4(4-y)\,dy$

$$= \frac{3}{64}\int_0^4 (4y^4 - y^5)\,dy = \frac{3}{64}\left(\frac{4}{5}y^5 - \frac{1}{6}y^6\right)\Bigg|_0^4 = 6.4$$

- $\sigma^2(Y) = E(Y^2) - \mu_Y{}^2 = 6.4 - 2.4^2 = 0.64$

3. NILAI HARAPAN FUNGSI PEUBAH ACAK

Misalkan $g(\mathrm{X})$ adalah fungsi dari peubah acak X, maka nilai harapan dari $g(\mathrm{X})$ adalah:

$$\mu_{g(\mathrm{X})} = \mathrm{E}[g(\mathrm{X})] = \begin{cases} \sum_{\forall x} g(x)\, P(X = x) & \text{bila X diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x) dx & \text{bila X kontinu} \end{cases}$$

bila jumlah atau integralnya ada.

Ilustrasi: nilai harapan fungsi p.a. diskret

- Misalkan peubah acak X menyatakan banyaknya mobil yang dicuci antara jam 16:00 sampai 17:00 pada suatu tempat pencucian mobil mempunyai fungsi massa peluang sebagai berikut:

x	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$P(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Peubah acak g(X) = 2X-1 menyatakan honor pencuci mobil
- rataan pendapatan pencuci mobil pada jam tersebut adalah:

$$E[g(X)] = E[2\,X - 1\,] = \sum_{x=4}^{9} [2\,X - 1]\; f(x)$$

$$= (7)(1/12 + (9)(1/12) + 11(1/4) + 13(1/4) + 15(1/6) + 17(1/6) = \; 12\,\tfrac{2}{3}$$

Ilustrasi: nilai harapan fungsi p.a. kontinu

Misalkan peubah acak X menyebar sesuai fungsi kepekatan peluang berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2 & \text{untuk} \quad -1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{untuk} \quad \text{lainnya} \end{cases}$$

Nilai harapan $g(X) = 4\,X + 3$:

$$E[4\,X+3] = \int_{-1}^{2} (4\,x+3)\left(\tfrac{1}{3}x^2\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} (4\,x^3 + 3x^2)\,dx = 8$$

4. SIFAT NILAI HARAPAN DAN RAGAM

Misalkan a dan b adalah suatu konstanta dan peubah acak X mempunyai mean μ_X dan ragam σ^2_X

a) $E(a) = a \quad \text{and} \quad Var(a) = 0$

b) $E(bX) = b\mu_X \quad \text{and} \quad Var(bX) = b^2\sigma^2_X$

c) Misalkan $Y = a + bX$

- Mean peubah acak Y adalah: $\mu_Y = E(a+bX) = a + b\mu_X$
- ragam peubah acak Y adalah: $\sigma^2_Y = Var(a+bX) = b^2\sigma^2_X$
- Sehingga simpangan baku Y adalah: $\sigma_Y = |b|\sigma_X$

Ilustrasi: Sifat Nilai Harapan dan Ragam p.a Diskret

Perhatikan Ilustrasi-ragam Diskret:

- Dari ilustrasi diketahui: $\mu = E(X) = \frac{3}{2}$ dan $\sigma^2(X) = \frac{3}{4}$
- Tentukan nilai harapan dan ragam dari $g(\mathrm{X}) = -6\,X + 4$

Solusi:

- $E[g(X)] = E[-6\,X + 4\,] = -6E[X] + 4 = -6\left(\frac{3}{2}\right) + 4 = -5$
- $\sigma^2[g(X)] = \sigma^2[-6\,X + 4\,] = 36\,\sigma^2[X] + 0 = 36\left(\frac{3}{4}\right) = 27$

Ilustrasi: Sifat Nilai Harapan dan Ragam p.a Kontinu

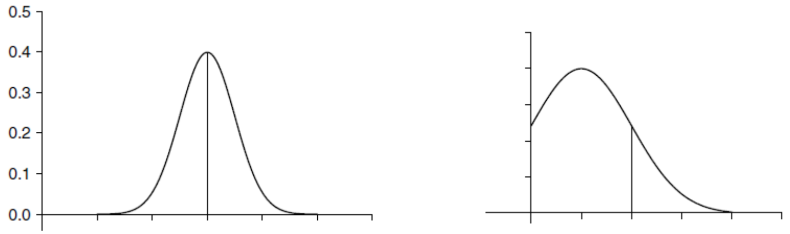
- Perhatikan Ilustrasi-ragam Kontinu:
- Dari ilustrasi diketahui: $\mu_{\mathrm{Y}} = 2.4$ dan $\sigma^2(Y) = 0.64$
- Tentukan nilai harapan dan ragam dari $g(Y) = 4\,Y + 3$

<u>Solusi:</u>

- $E[g(Y)] = E[4\,Y + 3\,] = 4E[Y] + 3 = 4(2.4) + 3 = 12.6$
- $\sigma^2[g(Y)] = \sigma^2[4\,Y + 3\,] = 16\sigma^2[Y] + 0 = 16(0.64) = 3.84$

5. MOMEN

- Meskipun rataan μ dan simpangan baku σ merupakan ukuran deskripsi tentang lokasi pusat dan sebaran atau dispersi dari suatu fungsi peluang $f(x)$, tetapi keduanya tidak memberikan karakteristik unik dari suatu sebaran.
- Dua sebaran yang mempunyai rataan dan ragam yang sama, tetapi bentuknya dapat berbeda seperti pada Gambar berikut:



- Kedua sebaran mempunyai rataan dan ragam yang sama $\mu = 1$, $\sigma^2 = 1$

- Untuk mendapatkan pendekatan yang baik terhadap suatu sebaran peluang diperlukan momen derajat yang lebih tinggi.
- Momen ke-k dari peubah acak X didefinisikan sebagai:

$$\mu'_k = E[X^k] \quad \text{untuk } k = 1,2,3,,\cdots.$$

- Momen pusat ke-k dari peubah acak X didefinisikan sebagai:

$$\mu^k = E[(X-\mu)^k] \quad \text{untuk } k = 2,3,4,\cdots$$

Momen (lanjt)

- Momen ketiga yang dibakukan terhadap rataan

$$\alpha_3 = \frac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{\mu^3}{\mu_2^{3/2}}$$

  disebut kemiringan (*skewness*) dari sebaran
- Kemiringan digunakan untuk mengukur kesimetrikan suatu fungsi sebaran terhadap rataannya.
- Sebaran disebut simetrik bila bagian kanan dan kiri terhadap pusatnya sama.
- Jika $\alpha_3 = 0$ maka sebaran simetrik terhadap rataannya
- jika $\alpha_3 > 0$ maka sebaran mempunyai ekor yang panjang di bagian ekor kanan
- jika $\alpha_3 < 0$ maka sebaran mempunyai ekor yang panjang di kiri ekor sebaran.
- Sebaran normal memiliki koefisien kemiringan nol.

Momen (lanjt)

- Momen keempat yang dibakukan terhadap rataan

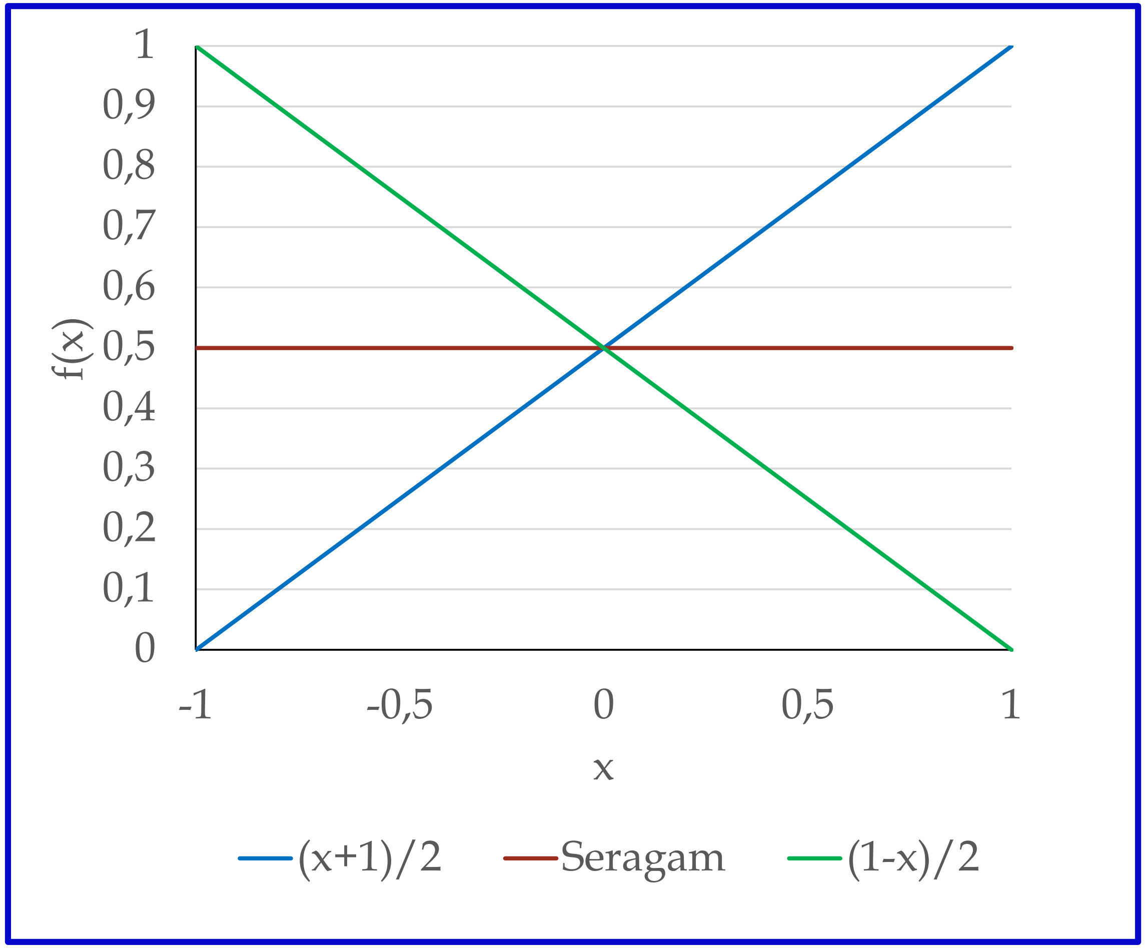
$$\alpha_4 = \frac{\mathrm{E}[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{\mu^4}{\mu_2^2}$$

  disebut dengan kurtosis dari sebaran
- Kurtosis mengukur lancip atau landainya suatu sebaran dibanding sebaran normal.
- Kurtosis diukur dari besarnya ekor suatu sebaran.
- Kurtosis positif menunjukkan sebaran memiliki sedikit pengamatan di ekor sebaran
- Kurtosis negatif menunjukkan terdapat banyak pengamatan di ekor sebaran.
- Sebaran dengan ekor yang relatif panjang disebut *leptokurtik*, dan sebaliknya untuk ekor pendek disebut *platokurtik*.
- Sebaran dengan kurtosis yang sama dengan sebaran normal disebut *mesokurtik*. Sebaran normal mempunyai nilai kurtosis $\alpha_4 = 3$.

Ilustrasi: **Kemiringan (*skewness*)**

Misalkan peubah acak X mempunyai fungsi kepekatan peluang:

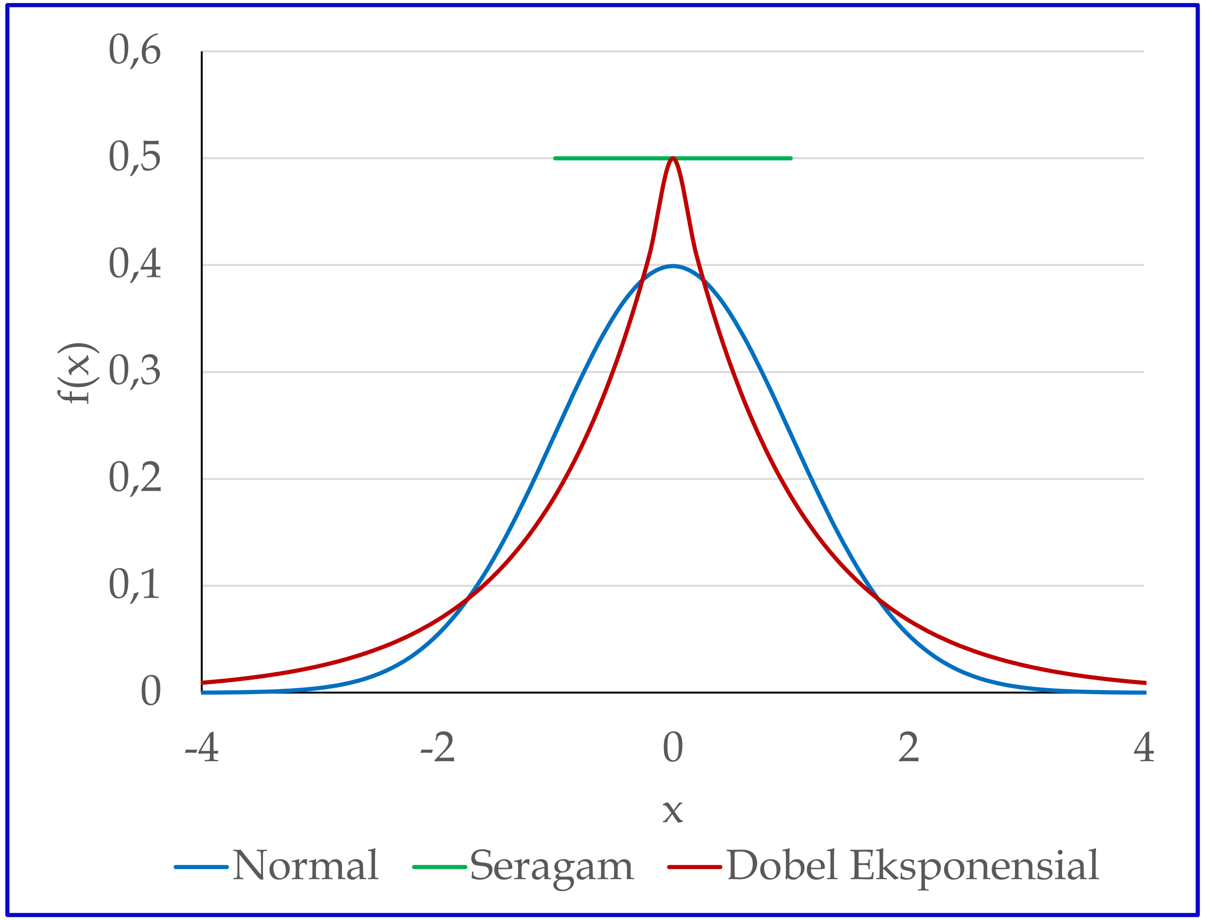
- $f(x) = (x+1)/2$ untuk $-1 < x < 1$, nol untuk lainnya
- $f(x) = 1/2$ untuk $-1 < x < 1$, nol untuk lainnya
- $f(x) = (1-x)/2$ untuk $-1 < x < 1$, nol untuk lainnya
- Tentukan nilai *skewness* sebaran tersebut !!!



Ilustrasi: Kelancipan (*Kurtosis*)

Misalkan peubah acak X mempunyai fungsi kepekatan peluang:

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ untuk $-\infty < x < \infty$, nol untuk lainnya
- $f(x) = 1/2$ untuk $-1 < x < 1$, nol untuk lainnya
- $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ untuk $-\infty < x < \infty$, nol untuk lainnya
- Tentukan nilai kurtosis sebaran tersebut !!!



6. FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN

- Misalkan X merupakan peubah acak, ada h merupakan bilangan bulat positif sehingga nilai harapan $\mathrm{E}[e^{t\mathrm{X}}]$ ada untuk $-h < t < h$.
- Fungsi pembangkit momen peubah acak X didefinisikan sebagai:

$$\mathrm{M_X}(t) = \mathrm{E}[e^{t\mathrm{X}}] = \begin{cases} \sum_{\forall x} e^{t\mathrm{X}} f(x) & \text{bila X diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\mathrm{X}} f(x)dx & \text{bila X kontinu} \end{cases}$$

- $e^{t\mathrm{X}} = 1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \cdots + \frac{(tx)^n}{n!} + \cdots$
- $\mathrm{M_X}(t) = \mathrm{E}[e^{t\mathrm{X}}] = \mathrm{E}\left[1 + t\mathrm{X} + \frac{(t\mathrm{X})^2}{2!} + \frac{(t\mathrm{X})^3}{3!} + \cdots + \frac{(t\mathrm{X})^n}{n!} + \cdots\right]$

$$= 1 + t\,\mathrm{E}[\mathrm{X}] + \frac{t^2}{2!}\mathrm{E}[\mathrm{X}^2] + \frac{t^3}{3!}\mathrm{E}[\mathrm{X}^3] + \cdots + \frac{t^n}{n!}\mathrm{E}[\mathrm{X}^n] + \cdots$$

Fungsi Pembangkit Momen (lanjt)

$$\mathrm{M_X}(t) = \mathrm{E[X]} + \frac{t^2}{2!}\mathrm{E[X^2]} + \frac{t^3}{3!}\mathrm{E[X^3]} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\mathrm{E[X^n]} + \cdots$$

- Turunan pertama $\mathrm{M_X}(t)$ terhadap t diperoleh

$$\frac{d\mathrm{M_X}(t)}{dt} = \mathrm{M'_X}(t) = \mathrm{E[X]} + t\mathrm{E[X^2]} + \frac{t^2}{2}\mathrm{E[X^3]} + \cdots + \frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}\mathrm{E[X^n]} + \cdots$$

- Evaluasi turunan tersebut pada nilai $t = 0$, semua suku kecuali $\mathrm{E[X]}$ bernilai nol. Sehingga $\mathrm{M'_X}(0) = \mathrm{E[X]}$
- Dengan cara yang sama, turunan kedua $\mathrm{M_X}(t)$ akan diperoleh $\mathrm{M''_X}(0) = \mathrm{E[X^2]}$
- Bila dilanjutkan sampai turunan ke- k pada $\mathrm{M_X}(t)$ akan diperoleh:

$$\left.\frac{d^k\mathrm{M_X}(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = \mathrm{M_X^{(k)}}(0) = \mu'_k \qquad \text{untuk } k = 1,2,\cdots$$

Ilustrasi: Fungsi Pembangkit Momen p.a Diskret

Misalkan X menyebar binomial dengan fungsi massa peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ untuk } x = 0,1,2,\cdots,n$$

Fungsi pembangkit momen sebagai berikut:

$$\mathrm{M_X}(t) = \mathrm{E}[e^{t\mathrm{X}}] = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} = [pe^t + (1-p)]^n$$

untuk $-\infty < t < \infty$

Ilustrasi: Fungsi Pembangkit Momen p.a Diskret (lanjt)

- Turunan pertama dan kedua $\mathrm{M_X}(t)$ terhadap t diperoleh:
  - $\mathrm{M'_X}(t) = n(pe^t)[pe^t + (1-p)]^{n-1}$
  - $\mathrm{M''_X}(t) = n(n-1)(pe^t)^2[pe^t + (1-p)]^{n-2} + n(pe^t)[pe^t + (1-p)]^{n-1}$
- Maka:
  - $\mathrm{E[X]} = \mathrm{M'_X}(0) = np$
  - $\mathrm{E[X^2]} = \mathrm{M''_X}(0) = n(n-1)p + np$
  - Ragam:

$$\sigma^2 = \mathrm{E[X^2]} - (\mathrm{E[X]})^2 = n(n-1)p + np - (np)^2 = np(1-p)$$

Ilustrasi: Fungsi Pembangkit Momen p.a Kontinu

Misalkan X menyebar normal baku dengan fungsi kepekatan peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad ; -\infty < x < \infty$$

Fungsi pembangkit momennya adalah:

$$\mathrm{M_X}(t) = \mathrm{E}[e^{t\mathrm{X}}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx)}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx+t^2)+\frac{t^2}{2}}\, dx = e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}\, dx = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Sifat Fungsi Pembangkit Momen

1. $\mathrm{M_{X+a}(t) = e^{at}M_X(t)}$
2. $\mathrm{M_{aX}(t) = M_X(at)}$
3. Jika $\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n$ merupakan peubah acak bebas stokastik dengan fungsi pembangkit momennya masing-masing adalah $\mathrm{M}_{\mathrm{X}_1}(t), \cdots, \mathrm{M}_{\mathrm{X}_n}(t)$ dan $\mathrm{Y} = \mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ maka $\mathrm{M_Y}(t) = \mathrm{M}_{\mathrm{X}_1}(t) \cdots \mathrm{M}_{\mathrm{X}_n}(t)$

Ilustrasi: Sifat Fungsi Pembangkit Momen

- Menentukan fungsi pembangkit momen $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Misalkan $Z \sim N(0,1)$, maka Fpm sebaran normal baku: $M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$
- Maka Fpm untuk $Y = \mu + \sigma Z$ adalah:

$$M_Y(t) = M_{\mu+\sigma Z}(t) = \mathrm{E}\left(e^{t(\mu+\sigma Z)}\right) = e^{t\mu} M_Z(\sigma t)$$

$$= \left(e^{t\mu}\right)\left(e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\right) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + t\mu}$$

- Sehingga $Y = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$

SOAL

IPB University — Bogor Indonesia

4.38. If $E[X] = 1$ and $\mathrm{Var}(X) = 5$, find
(a) $E[(2 + X)^2]$;
(b) $\mathrm{Var}(4 + 3X)$.

5.7. The density function of X is given by

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

If $E[X] = \frac{3}{5}$, find a and b.

5.4. The probability density function of X, the lifetime of a certain type of electronic device (measured in hours), is given by

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{x^2} & x > 10 \\ 0 & x \leq 10 \end{cases}$$

(a) Find $P\{X > 20\}$.
(b) What is the cumulative distribution function of X?
(c) What is the probability that, of 6 such types of devices, at least 3 will function for at least 15 hours? What assumptions are you making?

SOAL

IPB University
Bogor Indonesia

6.4 **Basketball shots** To win a basketball game, two competitors play three rounds of one three-point shot each. The series ends if one of them scores in a round but the other misses his shot or if both get the same result in each of the three rounds. Assume competitors A and B have 30% and 20% of successful attempts, respectively, in three-point shots and that the outcomes of the shots are independent events.

a. Verify the probability that the series ends in the second round is 23.56%. (*Hint:* Sketch a tree diagram and write out the sample space of all possible sequences of wins and losses in the three rounds of the series, find the probability for each sequence and then add up those for which the series ends within the second round).

b. Find the probability distribution of X = number of rounds played to end the series.

c. Find the expected number of rounds to be played in the series.

6.10 **Ideal number of children** Let X denote the response of a randomly selected person to the question, "What is the ideal number of children for a family to have?" The probability distribution of X in the United States is approximately as shown in the table, according to the gender of the person asked the question.

TRY

Probability Distribution of X = Ideal Number of Children

x	P(x) Females	P(x) Males
0	0.01	0.02
1	0.03	0.03
2	0.55	0.60
3	0.31	0.28
4	0.11	0.08

Note that the probabilities do not sum to exactly 1 due to rounding error.

a. Show that the means are similar, 2.50 for females and 2.39 for males.

b. The standard deviation for the females is 0.770 and 0.758 for the males. Explain why a practical implication of the values for the standard deviations is that males hold slightly more consistent views than females about the ideal family size.

SOAL

3.153 Find the distributions of the random variables that have each of the following moment-generating functions:

a $m(t) = [(1/3)e^t + (2/3)]^5$.

b $m(t) = \dfrac{e^t}{2 - e^t}$.

c $m(t) = e^{2(e^t - 1)}$.

3.156 Suppose that Y is a random variable with moment-generating function $m(t)$.

a What is $m(0)$?

b If $W = 3Y$, show that the moment-generating function of W is $m(3t)$.

c If $X = Y - 2$, show that the moment-generating function of X is $e^{-2t}m(t)$.


thank you

SEBARAN PEUBAH ACAK DISKRET

Sebaran Seragam Diskret

Ciri-ciri: Peubah acak yang memiliki **nilai peluang yang sama** dengan selang antara a dengan b.

Fungsi Massa Peluang

$$p(y) = \frac{1}{b-(a-1)} \; ; untuk \; y = a, a+1, \dots, b$$

Nilai Harapan

$$E(Y) = \frac{b(b+1) - a(a-1)}{2(b-(a-1))}$$

Ragam

$$Var(\mathrm{Y}) = \frac{b(b+1)(2b+1) - a(a-1)(2a-1)}{6\big(b-(a-1)\big)} - \left(\frac{b(b+1) - a(a-1)}{2\big(b-(a-1)\big)}\right)^2$$

Jika a=1 dan b=n, maka

$$E(Y) = \frac{n+1}{2}$$

$$Var(\mathrm{Y}) = \frac{(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}-1)}{12}$$

Fungsi Pembangkit Momen

Jika a=1 dan b=n, maka

$$M_Y(t) = \frac{e^t}{n}\left(\frac{e^{tn}-1}{e^t-1}\right)$$

Sebaran Bernoulli

Ciri-ciri

- Sebuah percobaan terdiri dari satu ulangan (trial).
- Hasilnya terdiri atas dua: sukses dan gagal.
- Peluang "sukses" adalah p ($0 < p < 1$) dan q peluang "gagal", dengan $p + q = 1$
- Nilai peubah acak: $y = 1$ untuk kejadian sukses dan $y = 0$ jika kejadiannya gagal

Fungsi Massa Peluang

$$p(y) = \begin{cases} p & ; y = 1 \\ 1-p & ; y = 0 \end{cases}$$

Nilai Harapan

$$E(Y) = p$$

Ragam

$$Var(\mathrm{Y}) = p(1-p)$$

Fungsi Pembangkit Momen

$$M_Y(t) = pe^t + q$$

Sebaran Binomial

Ciri-ciri

- Percobaan terdiri dari n ulangan identik
- Setiap ulangan menghasilkan dua hasil: gagal atau sukses
- Ulangan bersifat bebas (hasil satu ulangan tidak dipengaruhi ulangan lainnya)
- Peluang sukses, p, bernilai sama untuk setiap ulangan

Fungsi Massa Peluang

$$p(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}; y = 0,1,2, \dots, n$$

Nilai Harapan

$$E(Y) = np$$

Ragam

$$Var(\mathrm{Y}) = \mathrm{n}p(1-p)$$

Fungsi Pembangkit Momen

$$M_Y(t) = (pe^t + q)^n$$

Sebaran Poisson

Ciri-ciri

- Memodelkan peristiwa langka (peluang p kecil) dengan jumlah kejadian yang diharapkan atau rata-rata (μ) diketahui.
- Sering digunakan untuk memodelkan kejadian dengan karakteristik dalam waktu atau ruang

Fungsi Massa Peluang

$$p(Y = y) = \frac{\lambda^y e^{-y}}{y!}\ ; untuk\ y = 0,1,2,3, \dots$$

Nilai Harapan dan Ragam

$$E(Y) = Var(\mathrm{Y}) = \lambda$$

Fungsi Pembangkit Momen

$$M_Y(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Sebaran Hipergeometrik

Ciri-ciri: Generalisasi populasi terbatas untuk sebaran Binom

Populasi: N
Sukses : K
Gagal : N-K

Contoh : n
Sukses : y
Gagal : n-y

Fungsi Massa Peluang

$$p(y) = \frac{\binom{K}{y}\binom{N-K}{n-y}}{\binom{N}{n}}; y = 0,1,2, \dots, \min(n, K)$$

Nilai Harapan

$$E(Y) = n\left(\frac{K}{N}\right)$$

Ragam

$$Var(\mathrm{Y}) = n\left(\frac{K}{N}\right)\left(\frac{N-K}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N}\right)$$

Sebaran Geometrik

Ciri-ciri: memodelkan banyaknya ulangan Bernoulli yang diperlukan sampai **kejadian sukses pertama muncul**

Fungsi Massa Peluang

$$p(y) = p(1-p)^{y-1}; y = 1,2, \dots$$

Nilai Harapan

$$E(Y) = \frac{1}{p}$$

Ragam

$$Var(\mathrm{Y}) = \frac{1-p}{p^2}$$

Fungsi Pembangkit Momen

$$M_Y(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

Sebaran Binomial Negatif

Ciri-ciri: memodelkan banyaknya ulangan Bernoulli yang diperlukan sampai diperoleh **hasil sukses sebanyak r kali, dengan ulangan terakhir sukses** (perluasan dari sebaran Geometrik)

Fungsi Massa Peluang

$$p(y) = \binom{y-1}{r-1}p^r(1-p)^{y-r} \quad ; y = r, r+1, \dots$$

Nilai Harapan

$$E(Y) = \frac{r}{p}$$

Ragam

$$Var(\mathrm{Y}) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Fungsi Pembangkit Momen

$$M_Y(t) = \left(\frac{pe^t}{1 - qe^t}\right)^r$$

Latihan Soal

1. Misalkan seseorang dipilih secara acak, dari 10 staf yang tersedia, untuk mengawasi suatu proyek tertentu. Setiap orang tersebut mempunyai peluang terpilih yang sama, yaitu 1/10. Tentukan sebaran peluang, nilai harapan dan ragamnya!
2. Sebuah dadu setimbang dilemparkan sebanyak satu kali. Misalkan, jika diperoleh angka 4 atau 6, maka dikatakan "berhasil", sedangkan sisanya dikatakan "gagal". Tentukan fungsi massa peluang bagi peubah acak X, yaitu munculnya angka 4 atau 6 beserta nilai tengah dan ragamnya.
3. Peluang seseorang sembuh dari suatu penyakit darah adalah 0.4. Jika 15 orang diketahui menderita penyakit ini, berapa peluang bahwa
   a. Sekurang-kurangnya 10 orang dapat sembuh
   b. Ada 3 sampai 8 orang yang sembuh
   c. Tepat 5 orang yang sembuh
4. Sebuah panitia yang terdiri atas 5 orang dipilih secara acak dari 3 perempuan dan 5 laki-laki. Carilah sebaran peluang, nilai harapan, dan ragam bagi banyaknya perempuan dalam panitia itu!
5. Dua buah dadu dilempar 6 kali. Berapa peluang mendapatkan jumlah bilangan yang muncul berjumlah 7 atau 11 sebanyak dua kali, bilangan yang sama pada kedua dadu sekali, dan kemungkinan lainnya tiga kali?
6. Suatu kumpulan pompa terdapat 20% pompa yang perlu diperbaiki. Pekerja dikirim ke *stockpile* dengan tiga kit perbaikan. Dia memilih pompa secara acak dan mengujinya satu per satu. Jika pompa berfungsi, dia menyisihkannya untuk digunakan di massa mendatang. Namun, jika pompa tidak berfungsi, dia menggunakan salah satu kit perbaikannya. Misalkan diperlukan waktu 10 menit untuk menguji pompa yang dalam kondisi berfungsi dan 30 menit untuk menguji dan memperbaiki pompa yang tidak berfungsi. Hitung rata-rata dan ragam dari total waktu yang dibutuhkan pekerja untuk menggunakan tiga kit perbaikannya.
7. Diketahui p.a. X mempunyai fungsi pembangkit momen seperti berikut
$$M_X(t) = \frac{0.25e^t}{1 - 0.75e^t}$$
   Tentukan $P(X = 3), P(X \geq 2)$, nilai harapan dan ragamnya!
8. 10% mesin pada suatu pabrik mengalami kerusakan. Jika mesin dipilih secara acak hingga mesin terakhir yang dipilih mengalami kerusakan. Berapa peluang 3 mesin yang dipilih rusak pada 5 kali pemilihan?
9. Rata-rata banyaknya kecelakaan dari pesawat komersial per bulan adalah sebanyak 3.5. Carilah:
   a. Berapa peluang terjadi kecelakaan paling sedikit adalah 2 kejadian untuk bulan depan?
   b. Berapa nilai harapan banyaknya kecelakaan dalam 1 tahun?

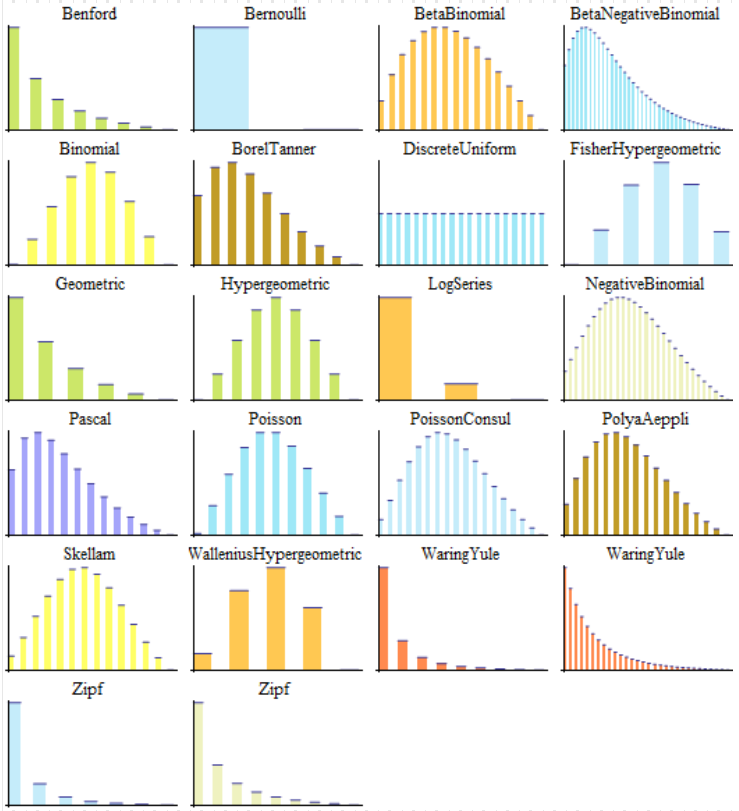
10. Suatu contoh atau sampel diambil secara acak sebanyak 3 barang dari suatu box yang berisi 20 barang, dimana terdapat 4 barang yang rusak. Carilah:
    a. Peluang sedikitnya 1 barang yang terambil rusak?
    b. Nilai harapan dari banyaknya barang yang rusak terambil?

TEORI PELUANG

Sebaran Peubah Acak Diskret

Anik Djuraidah

1. Sebaran Seragam
2. Sebaran Bernoulli
3. Sebaran Binomial
4. Sebaran Poisson
5. Sebaran Hipergeometrik
6. Sebaran Multinomial
7. Sebaran Geometrik
8. Sebaran Binomial Negatif



1. SEBARAN SERAGAM DISKRET

Definisi:

Misalkan peubah acak Y bernilai bilangan bulat antara a dan b dengan peluang yang sama pada setiap nilai tersebut.

- Fungsi massa peluang:

$$f(y) = \frac{1}{b-(a-1)} \text{ untuk } y = a, a+1, \cdots b$$

- Nilai Harapan: $E(Y) = \frac{b(b+1)-a(a-1)}{2(b-(a-1))}$
- Ragam:

$$\sigma^2 = \frac{b(b+1)(2b+1)-a(a-1)(2a-1)}{6(b-(a-1))} - \left(\frac{b(b+1)-a(a-1)}{2(b-(a-1))}\right)^2$$

- Bila $a = 1$ dan $b = n$, maka:

$$E(Y) = \frac{n+1}{2} \text{ dan } \sigma^2 = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

Ilustrasi:

- Percobaan: Sebuah dadu dingulirkan
- Peubah Acak X menyatakan sisi yang muncul
- Fungsi massa peluang:

X	1	2	3	4	5	6
P(X)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

- $E(Y) = \frac{6+1}{2} = 3.5$ dan

$$\sigma^2 = \frac{(6+1)(6-1)}{12} = \frac{35}{12}$$

2. SEBARAN BERNOULLI

Definisi:

Penemunya adalah Jacob Bernoulli, ahli matematika Swiss

a. Sebuah percobaan terdiri dari satu ulangan (*trial*).
b. Hasilnya terdiri atas dua: sukses dan gagal.
c. Peluang sukses adalah p $(0 < p < 1)$
d. Nilai peubah acak: $y = 1$ untuk kejadian sukses dan $y = 0$ jika kejadiannya gagal

- Fungsi Massa Peluang:

$$p(y) = \begin{cases} p & , y = 1 \\ 1 - p & , y = 0 \end{cases}$$

- Nilai Harapan: $E(Y) = p$
- Ragam: $\sigma^2 = p(1 - p)$

Ilustrasi:

- Soal ujian pilihan ganda dengan empat pilihan jawaban dan hanya satu jawaban yang benar.

➢ Bila peubah acak X menyatakan jawaban yang benar, maka $p = 0.25$ dan $q = 1 - 0.25 = 0.75$

- Dalam suatu permainan sebuah dadu digulirkan, pemain dianggap menang bila dadu yang muncul menunjukkan angka tiga atau lima.

➢ Bila Y menyatakan pemain menang, maka $p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ dan $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

3. SEBARAN BINOMIAL

Sebaran Binomial merupakan sebaran untuk suatu sekuens ulangan Bernoulli

- Percobaan terdiri dari n ulangan identik
- Setiap ulangan menghasilkan dua hasil: gagal atau sukses
- Ulangan bersifat bebas (hasil satu ulangan tidak dipengaruhi ulangan lainnya)
- Peluang sukses, p, bernilai sama untuk setiap ulangan
- Peubah acak Y, menyatakan banyaknya kejadian sukses dari n ulangan mengikuti sebaran Binomial dengan parameter n dan p
- Y mempunyai nilai $y = 0,1, \ldots, n$
- Dinotasikan: $Y \sim Bin(n, p)$

Ilustrasi :

- Percobaan: sebuah koin dilempar sebanyak 10 kali dan diamati banyaknya sisi angka yang muncul.
  - ✓ Sebaran peubah ini adalah sebaran binomial dengan $n = 10$ dan $p = ½$
- Percobaan: Tiga buah dadu digulirkan dan diamati banyaknya angka empat yang muncul.
  - ✓ Sebaran peubah acaknya adalah sebaran binomial dengan $n = 3$ dan $p = 1/6$

Sebaran Binomial (lanjt)

- **Fungsi massa peluang:**

$$p(Y=y)=\binom{n}{y}p^y(1-p)^{n-y} \text{ untuk } y=0,1,2,\dots,n$$

- Nilai Harapan:

$$E(Y)=\sum_{y=0}^{n} y\,p(y)=\sum_{y=0}^{n} y\binom{n}{y}p^y(1-p)^{n-y}=np$$

- Ragam: $\sigma^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2=npq$

Ilustrasi:

Sebuah permainan dilakukan dengan menggulirkan dadu yang setimbang sebanyak lima belas kali. Permainan dianggap menang bila dadu menunjukkan angka tiga atau lima. Berapa peluangnya untuk menang 5 kali dari 15 kali lemparan tersebut?

- Penyelesaian:
- Satu kali lemparan, peluang di anggap berhasil bila angka tiga atau lima, maka peluang berhasil adalah $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
- Peluang gagal adalah $q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
- Diulang sebanyak $n=15$
- $P(Y=5)=\binom{15}{5}(1/3)^5(2/3)^{10}$

$$=\frac{15!}{5!\,10!}\left(1/3\right)^5\left(2/3\right)^{10}$$

$$=\frac{11\times 12\times 13\times 14\times 15}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}(0.004115)\,(0.017342)$$

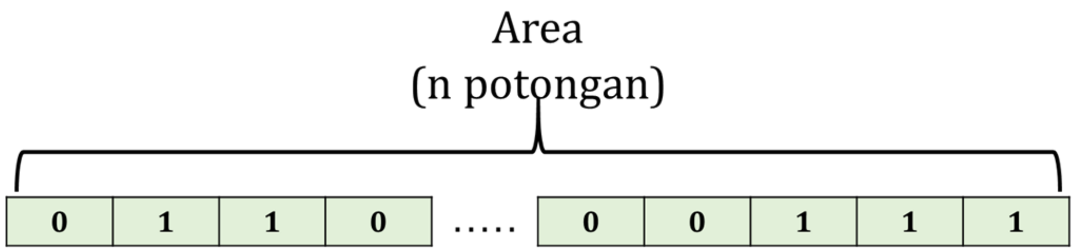
$$=(0.004115)\,(0.017342)=\ 0.214307$$

4. SEBARAN POISSON

Definisi Empirik:

- Sebaran Poisson (1838), dinamai menurut penemunya Simeon Poisson yang merupakan ahli matematika Prancis.
- Sebaran Poisson digunakan untuk memodelkan peristiwa langka (dengan peluang *p* kecil) dengan jumlah kejadian yang diharapkan atau rata-rata (μ) diketahui.
- Sebaran ini sering digunakan untuk memodelkan kejadian dengan karakteristik dalam waktu atau ruang:
  - Kedatangan pelanggan dalam antrian per jam
  - Jumlah cacat dalam gulungan kain
  - Jumlah kesalahan ketik per halaman teks.

- Sebaran Poisson diperoleh sebagai berikut:
  - Memecah "*area*" menjadi *n* "*potongan*" kecil
  - Setiap "*potongan*" hanya bernilai 0 atau 1 kejadian (peluang kejadian sukses: $p = P(1)$)
  - Misalkan $\lambda = np$ ≡ Jumlah rata-rata kejadian sukses pada "*area*"
  - *X* ≡ banyaknya kejadian sukses pada "*area*" yaitu jumlah dari kejadian 1 pada "*potongan*".
  - $X \sim Bin(n, p)$ dengan $p = \lambda/n$
  - Limit dari sebaran Binomial untuk n →∞ dengan $p = \lambda/n$ merupakan sebaran Poisson



Sebaran Poisson (lanjt)

- Fungsi massa peluang:

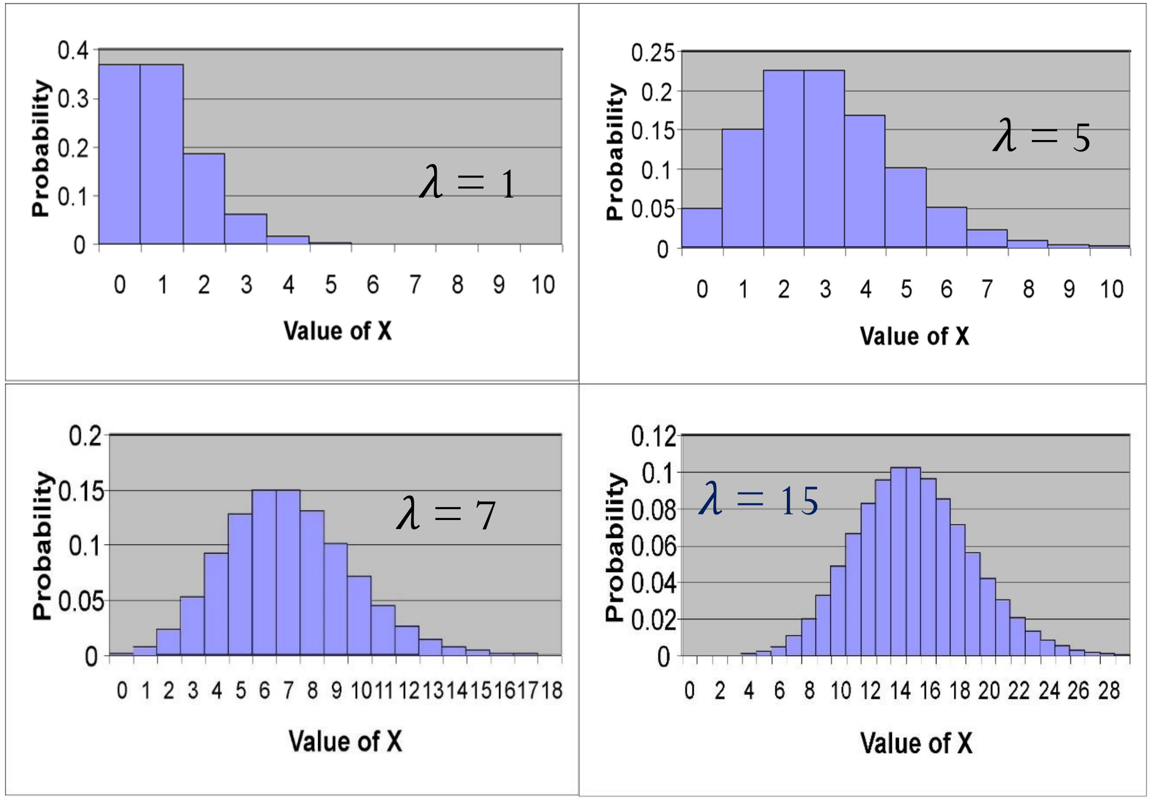
$$p(Y=y)=\frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} \text{ untuk } y=0,1,2,\cdots$$

- Nilai harapan:

$$E(Y)=\sum_{y=0}^{\infty} y\left(\frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}\right)=\lambda$$

- Ragam:
  - $E\big(Y(Y-1)\big)=\lambda^2$
  - $E(Y^2)=E\big(Y(Y-1)\big)+E(Y)=\lambda^2+\lambda$
  - $\sigma^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$

Sebaran Poisson pada beberapa nilai λ



Sebaran Poisson (lanjt)

Ilustrasi:

- Jumlah kesalahan ketik dalam edisi baru buku teks sangat bervariasi dari satu buku ke buku lainnya. Setelah dilakukan analisis disimpulkan bahwa jumlah kesalahan menyebar Poisson dengan rata-rata 1.5 kesalahan ketik per 100 halaman. Seseorang memilih secara acak 100 halaman buku baru tersebut. Berapa peluang tidak ada kesalahan ketik?
- <u>Penyelesaian:</u> $P(Y=0)$ dengan $\lambda = 1.5$?

$$P(Y=0) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} = \frac{1.5^0 e^{-1.5}}{0!} = 0.2231$$

(*"sekitar 22% peluang untuk menemukan kesalahan nol "*)

- **Peluang keberhasilan sebanding dengan ukuran interval**

Ilustrasi:

✓ Dengan demikian, nilai rata-rata untuk buku 400 halaman adalah:

$\mu = 1.5\ (4) = 6$ kesalahan ketik / 400 halaman.

✓ Untuk buku 400 halaman, berapa peluang **tidak ada kesalahan** ketik?

$$P(X=0) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} = 0.02479$$

(*"peluang sangat kecil untuk mendapatkan tidak ada kesalahan ketik pada 400 halaman)*

Sebaran Poisson (lanjt)

- Penggunakan Sebaran Poisson untuk Perkiraan peluang Binomial

Fungsi sebaran Poisson dapat digunakan untuk memperkirakan peluang binomial asalkan jumlah amatan n> 100 dan np <10. Dengan kata lain, jumlah amatan independen dari percobaan binomial harus

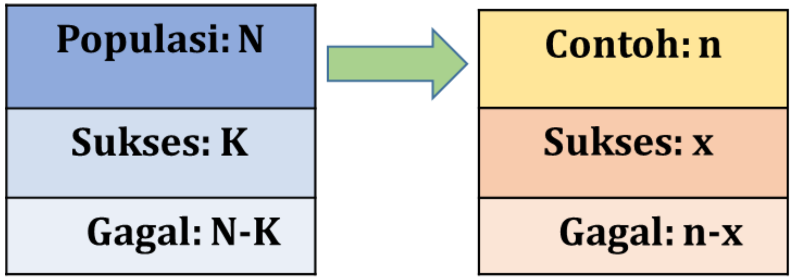
Ilustrasi:

Misalkan penyakit langka memiliki insiden 1 dalam 1000 orang/tahun. Diasumsikan bahwa anggota populasi dipengaruhi secara independen, tentukan peluang terdapat *k* kasus dalam populasi 10.000 untuk $k = 0, 1, 2.$

- Nilai rata-rata $\lambda = 0.001\ (10.000) = 10$
- Peluang k kasus baru diharapkan pada populasi ini per tahun:
  - ✓ $P(X=0) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{10^0 e^{-10}}{0!} = 0.000454$
  - ✓ $P(X=1) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{10^1 e^{-10}}{1!} = 0.00454$
  - ✓ $P(X=2) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{10^2 e^{-10}}{2!} = 0.00227$

5. SEBARAN HIPERGEOMETRIK

- Generalisasi populasi terbatas untuk sebaran Binomial
- Populasi:
  - *N* Elemen
  - *K* Sukses (elemen dengan karakteristik yang menjadi perhatian)
- Contoh:
  - *n* Elemen
  - *X* = # sukses dalam contoh
    $(x = \ 0,1,\cdots,\min(n,K))$



- Fungsi massa peluang:

$$p(X=x)=\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{untuk } x=0,1,\cdots,\min(n,K)$$

- Nilai harapan: $E(X)=n\left(\frac{K}{N}\right)$

$\Uparrow$
p pada sebaran binomial

- Ragam: $\sigma^2 = n\left(\frac{K}{N}\right)\left(\frac{N-K}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N}\right)$

$\Uparrow$ $1-p$ pada sebaran binomial

$\Uparrow$ Faktor koreksi

Sebaran Hipergeometrik (lanjt)

Ilustrasi:

Karton berisi 24 bola lampu, tiga di antaranya rusak.

Berapa peluang dalam contoh yang dipilih secara acak enam bola lampu terdapat bola lampu rusak sebanyak 0 dan 3?

- Penyelesaian:

- Misalkan X menyatakan bola lampu rusak

$$P(X=x)=\frac{\binom{3}{x}\binom{24-3}{6-x}}{\binom{24}{6}}$$

- Peluang tidak ada lampu rusak:

$$P(X=0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{21}{6-0}}{\binom{24}{6}}=0.40316$$

- Peluang terdapat 3 lampu rusak:

$$P(X=3)=\frac{\binom{3}{3}\binom{21}{6-3}}{\binom{24}{6}}=0.00988$$

Sebaran Hipergeometrik (lanjt)

- Pengambilan contoh dengan pemulihan

  Jika pengambilan contoh dengan pemulihan dan antar ulangan bersifat bebas, maka digunakan sebaran binomial.
- Pengambilan contoh tanpa pemulihan

  Jika pengambilan contoh tanpa pemulihan maka digunakan sebaran hipergeometrik

Ilustrasi:

Dalam sebuah kotak terdapat 3 bola putih dan 2 bola merah

1. Ambil 2 bola tanpa pemulihan, peubah acak X=# bola putih
2. Ambil 2 bola dengan pemulihan, peubah acak Y=# bola putih

Tentukan sebaran X dan Y?

Tentukan mean dan ragamnya?

Hampiran (*APPROXİMATİONS*)

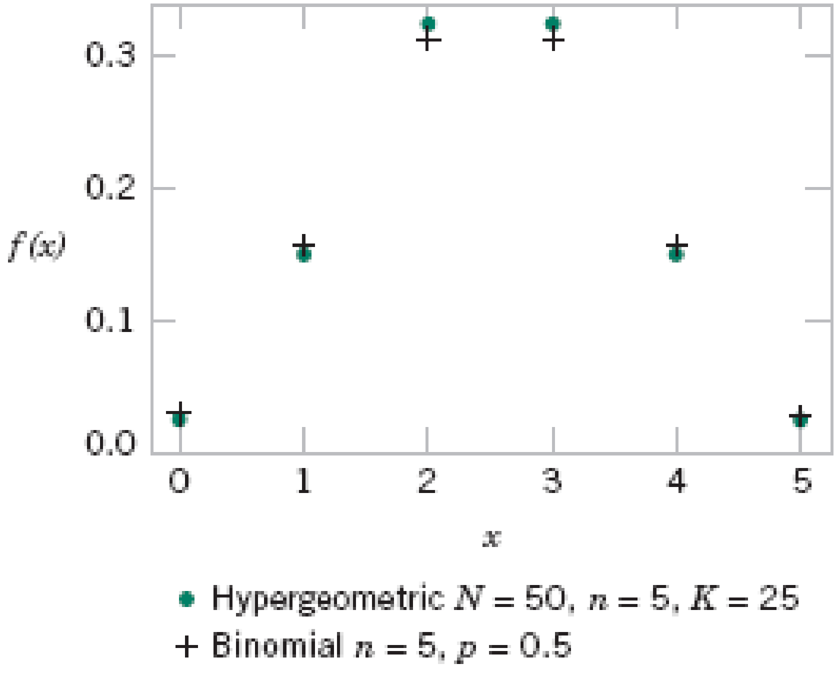
Persyaratan hampiran Binomial:

Jika n ≤0.05N , Binomial dapat digunakan sebagai pengganti sebaran hipergeometrik

Persyaratan hampiran Poisson:

Jika n ≤0.05N , n≥20, dan $p = \frac{K}{N} \leq 0.05$, Poisson dapat digunakan sebagai pengganti sebaran hipergeometrik

Sebaran Hipergeometrik (lanjt)



	0	1	2	3	4	5
Hypergeometric probability Binomial probability	0.025 0.031	0.149 0.156	0.326 0.321	0.326 0.312	0.149 0.156	0.025 0.031

Gambar. Perbandingan antara sebaran hipergeometrik dan binomial

6. SEBARAN MULTINOMIAL

- Sebaran multinomial merupakan generalisasi dari sebaran binomial.
- Pada multinomial hasil percobaan lebih dari dua.
- Misalkan hasil percobaannya ada tiga dengan peluang masing-masing sebesar $p_1, p_2, \text{dan } p_3$ dan $p_1 + p_2 + p_3 = 1$
- Formula umum untuk 3 hasil:

$$P(X = x, Y = y, Z = z) = \frac{n!}{x!\ y!\ z!} p_1^x p_2^y (1 - p_1 - p_2)^z$$

Ilustrasi:

Misalkan dalam suatu seminar dipilih secara acak 8 orang dari peserta yang terdiri dari 50% bekerja sebagi PNS, 30% dari BUMN, dan 20% dari swasta.

- ✓ Tentukan peluang terpilihnya 4 orang PNS, 3 orang BUMN, dan 1 swasta.

$$P(X = 4, Y = 3, Z = 1) = \frac{8!}{4!\,3!\,1!} (0.5)^4 (0.3)^3 (0.2)^1$$

7. SEBARAN GEOMETRIK

- Digunakan untuk memodelkan banyaknya ulangan Bernoulli yang diperlukan sampai **kejadian sukses pertama muncul** ($P(S)=p$)
  - Ulangan pertama sukses 1 $\Rightarrow S$, $x = 1$

    $\Rightarrow P(X = 1) = p$
  - Sukses pertama pada ulangan ke-2 $\Rightarrow FS$, $x = 2 \Rightarrow P(X = 2) = p(1 - p)$
  - Sukses pertama pada ulangan-k $\Rightarrow F\ldots FS$, $x = k \Rightarrow P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$
- Fungsi massa peluang:

  $f(x) = P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p$ untuk $x = 1,2,\cdots$
- Nilai Harapan: $E(X) = \frac{1}{p}$
- Ragam: $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$

Ilustrasi:

Pada "waktu sibuk" kedatangan telepon pada call center sangat banyak, sehingga penelepon mengalami kesulitan melakukan panggilan. Sangat menarik untuk mengetahui jumlah upaya yang diperlukan untuk mendapatkan koneksi. Misalkan peluang keberhasilan koneksi pada jam sibuk sebesar p = 0.05.

Berapa peluang sambungan berhasil pada 5 upaya?

- Peubah acak X adalah banyaknya upaya untuk satu panggilan sukses, maka X~Geometrik (0.05).
- Sehingga untuk x = 5 and p = 0.05 peluangnya $P(X=x) = (0.05)(0.95)^4 = 0.041$
- nilai harapannya $\mu = \frac{1}{0.05} = 20$

8. SEBARAN BINOMIAL NEGATIF

- Digunakan untuk memodelkan banyaknya ulangan Bernoulli yang diperlukan sampai diperoleh **hasil sukses sebanyak r kali, dengan ulangan terakhir sukses** (perluasan dari sebaran Geometrik)
- Perhatikan gambar di bawah ini, terdapat (r-1) sukses pada (y-1) ulangan, dan diikuti sukses (terakhir)

$$\underbrace{\overbrace{S\ S\ G\ S\ G\ G\ S \cdots}^{(r-1)\text{ kejadian } S}}_{(y-1)\text{ ulangan}}\ \underset{\text{Sukses ke-r}}{\underset{\Uparrow}{S}}$$

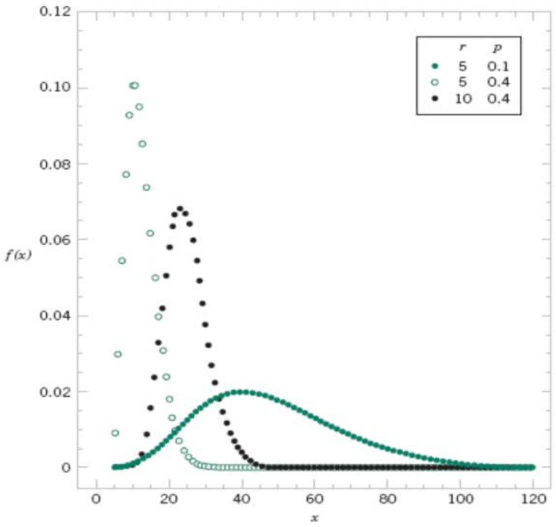
- Fungsi massa peluang:

$$p(Y=y)=\binom{y-1}{r-1}p^r(1-p)^{y-r}$$

untuk $y=r,(r+1),\cdots$

- Nilai Harapan: $E(Y)=\frac{r}{p}$
- Ragam: $\sigma^2=\frac{r(1-p)}{p^2}$

Gambar Sebaran binomial negatif untuk beberapa parameter *r* dan *p*



Sebaran Binomial Negatif (lanjt)

Ilustrasi:

Tentukan peluang seseorang yang melempar tiga koin yang setimbang mendapatkan semua sisinya gambar atau angka sebanyak dua kali pada lemparan yang kelima.

<u>Penyelesaian:</u>

- $p = P(\text{Sukses}) = P(GGG \text{ atau } AAA) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$
- Banyaknya kemungkinan sukses yang kedua pada lima lemparan adalah:

1	2	3	4	5
S	F	F	F	S
F	S	F	F	S
F	F	S	F	S
F	F	F	S	S

Masing-masing Peluang:

$(1/4)^2 * (3/4)^3 = \frac{27}{1024}$

- Sehingga peluang sukses yang kedua pada lima lemparan adalah: $4 * \frac{27}{1024} = \frac{27}{56}$

Ringkasan sebaran peubah acak diskret

Sebaran	Fungsi massa peluang	Nilai-tengah	ragam	Fungsi pembangkit momen
Seragam	$p(x) = \frac{1}{n}$ untuk y $= 1,2,\cdots n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{e^t}{n}\left(\frac{e^{tn}-1}{e^t-1}\right)$
Bernoulli	$p(x) = \begin{cases} p & ,x=1 \\ q=1-p & ,x=0 \end{cases}$	p	pq	$pe^t + q$
Binomial	$p(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ untuk $x = 0, 1,2, \dots, n$	np	npq	$(pe^t+q)^n$
Geometrik	$p(X=x) = q^{x-1}p$ untuk $x = 1,2,\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-qe^t}$
Binomial negatif	$p(X=x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$ untuk $x = r,(r+1),\cdots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$
Poisson	$p(X=x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ untuk $x = 0,1,2,\cdots$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
Hipergeometrik	$p(X=x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ untuk $x = 0,1,\cdots,\min(n,K)$	$n\left(\frac{K}{N}\right)$	$n\left(\frac{K}{N}\right)\left(\frac{N-K}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N}\right)$	Tidak perlu

SOAL-SOAL LATIHAN

3.184 A city commissioner claims that 80% of the people living in the city favor garbage collection by contract to a private company over collection by city employees. To test the commissioner's claim, 25 city residents are randomly selected, yielding 22 who prefer contracting to a private company.

a If the commissioner's claim is correct, what is the probability that the sample would contain at least 22 who prefer contracting to a private company?

b If the commissioner's claim is correct, what is the probability that exactly 22 would prefer contracting to a private company?

c Based on observing 22 in a sample of size 25 who prefer contracting to a private company, what do you conclude about the commissioner's claim that 80% of city residents prefer contracting to a private company?

3.189 A starter motor used in a space vehicle has a high rate of reliability and was reputed to start on any given occasion with probability .99999. What is the probability of at least one failure in the next 10,000 starts?

SOAL-SOAL LATIHAN

3.197 The number of bacteria colonies of a certain type in samples of polluted water has a Poisson distribution with a mean of 2 per cubic centimeter (cm^3).

a If four 1-cm^3 samples are independently selected from this water, find the probability that at least one sample will contain one or more bacteria colonies.

b How many 1-cm^3 samples should be selected in order to have a probability of approximately .95 of seeing at least one bacteria colony?

3.205 An experiment consists of tossing a fair die until a 6 occurs four times. What is the probability that the process ends after exactly ten tosses with a 6 occurring on the ninth and tenth tosses?

***3.202** The number of cars driving past a parking area in a one-minute time interval has a Poisson distribution with mean λ. The probability that any individual driver actually wants to park his or her car is p. Assume that individuals decide whether to park independently of one another.

a If one parking place is available and it will take you one minute to reach the parking area, what is the probability that a space will still be available when you reach the lot? (Assume that no one leaves the lot during the one-minute interval.)

b Let W denote the number of drivers who wish to park during a one-minute interval. Derive the probability distribution of W.

SOAL-SOAL LATIHAN

3.108 A shipment of 20 cameras includes 3 that are defective. What is the minimum number of cameras that must be selected if we require that $P(\text{at least 1 defective}) \geq .8$?

3.97 A geological study indicates that an exploratory oil well should strike oil with probability .2.

a What is the probability that the first strike comes on the third well drilled?

b What is the probability that the third strike comes on the seventh well drilled?

c What assumptions did you make to obtain the answers to parts (a) and (b)?

d Find the mean and variance of the number of wells that must be drilled if the company wants to set up three producing wells.

SOAL LATIHAN

Bus. **4.47** Over a long period of time in a large multinational corporation, 10% of all sales trainees are rated as outstanding, 75% are rated as excellent/good, 10% are rated as satisfactory, and 5% are considered unsatisfactory. Find the following probabilities for a sample of ten trainees selected at random:

- **a.** Two are rated as outstanding.
- **b.** Two or more are rated as outstanding.
- **c.** Eight of the ten are rated either outstanding or excellent/good.
- **d.** None of the trainees is rated as unsatisfactory.

Med. **4.49** A prescription drug firm claims that only 12% of all new drugs shown to be effective in animal tests ever make it through a clinical testing program and onto the market. If a firm has 15 new compounds that have shown effectiveness in animal tests, find the following probabilities:

- **a.** None reach the market.
- **b.** One or more reach the market.
- **c.** Two or more reach the market.

4.50 Does Exercise 4.49 satisfy the properties of a binomial experiment? Why or why not?


"Success is
99% attitude
and 1% aptitude."
~ Celestine Chua

Discrete Random Variables and Probability Distributions

Random Variables

- Random Variable (RV): A numeric outcome that results from an experiment
- For each element of an experiment's sample space, the random variable can take on exactly one value
- Discrete Random Variable: An RV that can take on only a finite or countably infinite set of outcomes
- Continuous Random Variable: An RV that can take on any value along a continuum (but may be reported "discretely")
- Random Variables are denoted by upper case letters (Y)
- Individual outcomes for RV are denoted by lower case letters (y)

Probability Distributions

- Probability Distribution: Table, Graph, or Formula that describes values a random variable can take on, and its corresponding probability (discrete RV) or density (continuous RV)
- Discrete Probability Distribution: Assigns probabilities (masses) to the individual outcomes
- Continuous Probability Distribution: Assigns density at individual points, probability of ranges can be obtained by integrating density function
- Discrete Probabilities denoted by: $p(y) = P(Y=y)$
- Continuous Densities denoted by: $f(y)$
- Cumulative Distribution Function: $F(y) = P(Y \leq y)$

Discrete Probability Distributions

Probability (Mass) Function :

$$p(y) = P(Y = y)$$

$$p(y) \geq 0 \quad \forall y$$

$$\sum_{\text{all } y} p(y) = 1$$

Cumulative Distribution Function (CDF) :

$$F(y) = P(Y \leq y)$$

$$F(b) = P(Y \leq b) = \sum_{y=-\infty}^{b} p(y)$$

$$F(-\infty) = 0 \quad F(\infty) = 1$$

$F(y)$ is monotonically increasing in y

Example – Rolling 2 Dice (Red/Green)

Y = Sum of the up faces of the two die. Table gives value of *y* for all elements in *S*

Red\Green	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

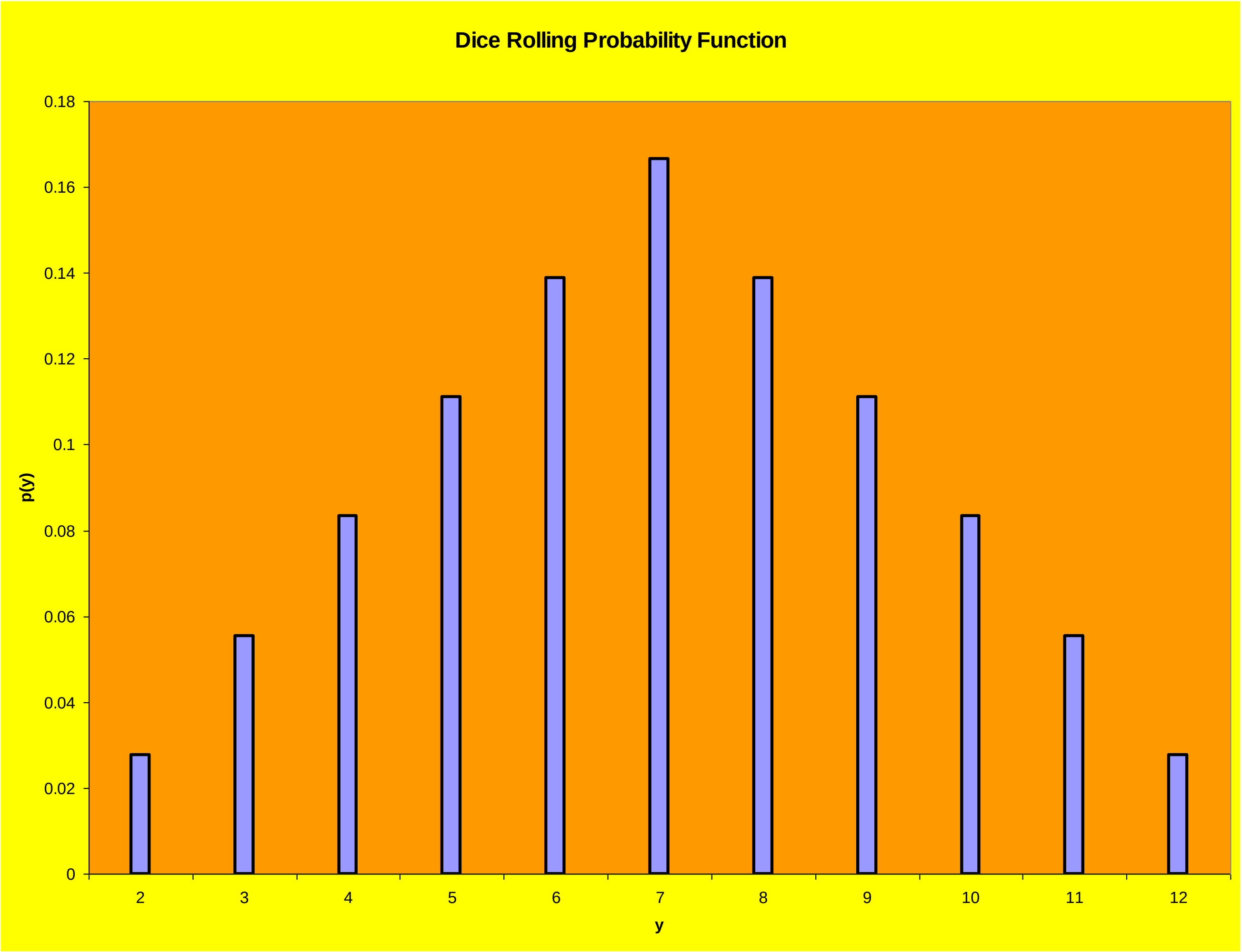
Rolling 2 Dice – Probability Mass Function & CDF

y	p(y)	F(y)
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/36	6/36
5	4/36	10/36
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	36/36

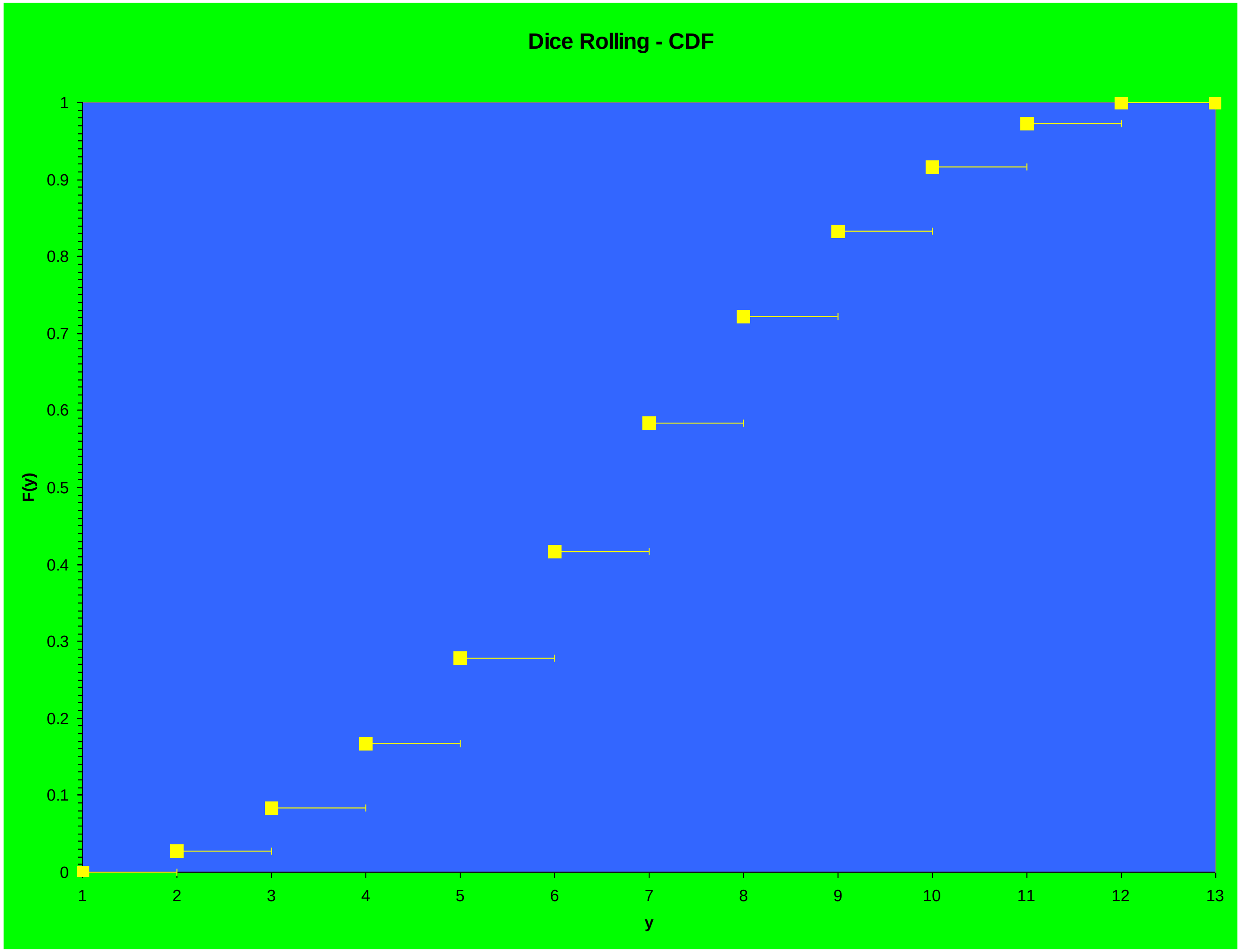
$$p(y) = \frac{\#\text{ of ways 2 die can sum to } y}{\#\text{ of ways 2 die can result in}}$$

$$F(y) = \sum_{t=2}^{y} p(t)$$

Rolling 2 Dice – Probability Mass Function



Rolling 2 Dice – Cumulative Distribution Function



Expected Values of Discrete RV's

- Mean (aka Expected Value) – Long-Run average value an RV (or function of RV) will take on
- Variance – Average squared deviation between a realization of an RV (or function of RV) and its mean
- Standard Deviation – Positive Square Root of Variance (in same units as the data)
- Notation:
  - Mean: $E(Y) = \mu$
  - Variance: $V(Y) = \sigma^2$
  - Standard Deviation: σ

Expected Values of Discrete RV's

$$\text{Mean}: \; E(Y) = \mu = \sum_{\text{all } y} y p(y)$$

$$\text{Mean of a function } g(Y): \quad E[g(Y)] = \sum_{\text{all } y} g(y) p(y)$$

$$\text{Variance}: \; V(Y) = \sigma^2 = E\left[(Y - E(Y))^2\right] = E\left[(Y-\mu)^2\right] =$$

$$= \sum_{\text{all } y} (y-\mu)^2 p(y) = \sum_{\text{all } y} \left(y^2 - 2y\mu + \mu^2\right) p(y) =$$

$$= \sum_{\text{all } y} y^2 p(y) - 2\mu \sum_{\text{all } y} y p(y) + \mu^2 \sum_{\text{all } y} p(y) =$$

$$= E\left[Y^2\right] - 2\mu(\mu) + \mu^2(1) = E\left[Y^2\right] - \mu^2$$

$$\text{Standard Deviation}: \sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

Expected Values of Linear Functions of Discrete RV's

$$\text{Linear Functions}: \; g(Y) = aY + b \quad (a, b \equiv \text{constants})$$

$$E[aY+b] = \sum_{\text{all } y} (ay+b)\,p(y) =$$

$$= a\sum_{\text{all } y} y p(y) + b\sum_{\text{all } y} p(y) = a\mu + b$$

$$V[aY+b] = \sum_{\text{all } y} \left((ay+b)-(a\mu+b)\right)^2 p(y) =$$

$$\sum_{\text{all } y} \left(ay - a\mu\right)^2 p(y) = \sum_{\text{all } y} \left[a^2 \left(y-\mu\right)^2\right] p(y) =$$

$$= a^2 \sum_{\text{all } y} (y-\mu)^2 p(y) = a^2\sigma^2$$

$$\sigma_{aY+b} = |a|\sigma$$

Example – Rolling 2 Dice

y	p(y)	yp(y)	y^2p(y)
2	1/36	2/36	4/36
3	2/36	6/36	18/36
4	3/36	12/36	48/36
5	4/36	20/36	100/36
6	5/36	30/36	180/36
7	6/36	42/36	294/36
8	5/36	40/36	320/36
9	4/36	36/36	324/36
10	3/36	30/36	300/36
11	2/36	22/36	242/36
12	1/36	12/36	144/36
Sum	36/36= 1.00	252/36= 7.00	1974/36= 54.833

$$\mu = E(Y) = \sum_{y=2}^{12} yp(y) = 7.0$$

$$\sigma^2 = E\left[Y^2\right] - \mu^2 = \sum_{y=2}^{12} y^2 p(y) - \mu^2$$

$$= 54.8333 - (7.0)^2 = 5.8333$$

$$\sigma = \sqrt{5.8333} = 2.4152$$

Tchebysheff's Theorem/Empirical Rule

- Tchebysheff: Suppose Y is any random variable with mean μ and standard deviation σ. Then:
  $P(\mu-k\sigma \le Y \le \mu+k\sigma) \ge 1-(1/k^2)$ for $k \ge 1$
  - $k=1$: $P(\mu-1\sigma \le Y \le \mu+1\sigma) \ge 1-(1/1^2) = 0$ (trivial result)
  - $k=2$: $P(\mu-2\sigma \le Y \le \mu+2\sigma) \ge 1-(1/2^2) = 3/4$
  - $k=3$: $P(\mu-3\sigma \le Y \le \mu+3\sigma) \ge 1-(1/3^2) = 8/9$
- Note that this is a very conservative bound, but that it works for any distribution

- Empirical Rule (Mound Shaped Distributions)
  - $k=1$: $P(\mu-1\sigma \le Y \le \mu+1\sigma) \approx 0.68$
  - $k=2$: $P(\mu-2\sigma \le Y \le \mu+2\sigma) \approx 0.95$
  - $k=3$: $P(\mu-3\sigma \le Y \le \mu+3\sigma) \approx 1$

Proof of Tchebysheff's Theorem

Breaking real line into 3 parts:

$i)\ \ (-\infty, (\mu\text{-}k\sigma)^{-}]$

$ii)\ \ [(\mu\text{-}k\sigma), (\mu + k\sigma)]$

$iii)\ [(\mu + k\sigma)^{+}, \infty)$

Making use of the definition of Variance:

$$V(Y) = \sigma^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} (y-\mu)^2 p(y) =$$

$$\sum_{-\infty}^{(\mu\text{-}k\sigma)^{-}} (y-\mu)^2 p(y) + \sum_{(\mu\text{-}k\sigma)}^{(\mu+k\sigma)} (y-\mu)^2 p(y) + \sum_{(\mu+k\sigma)^{+}}^{\infty} (y-\mu)^2 p(y)$$

Proof of Tchebysheff's Theorem

$$\text{In Region } i): \; y-\mu \le -k\sigma \Rightarrow (y-\mu)^2 \ge k^2\sigma^2$$

$$\text{In Region } iii): \; y-\mu \ge k\sigma \Rightarrow (y-\mu)^2 \ge k^2\sigma^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 \ge k^2\sigma^2 P(Y < \mu - k\sigma) + \sum_{(\mu\text{-}k\sigma)}^{(\mu+k\sigma)} (y-\mu)^2 p(y) + k^2\sigma^2 P(Y > \mu + k\sigma)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 \ge k^2\sigma^2 P(Y < \mu - k\sigma) + k^2\sigma^2 P(Y > \mu + k\sigma) =$$

$$= k^2\sigma^2 \left[1 - P(\mu - k\sigma \le Y \le \mu + k\sigma)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2} \ge \left[1 - P(\mu - k\sigma \le Y \le \mu + k\sigma)\right]$$

$$\Rightarrow P(\mu - k\sigma \le Y \le \mu + k\sigma) \ge 1 - \frac{1}{k^2}$$

Discrete Uniform Distribution

- Suppose *Y* can take on any integer value between *a* and *b* inclusive, each equally likely (e.g. rolling a dice, where *a*=1 and *b*=6). Then *Y* follows the discrete uniform distribution.

$$f(y) = \frac{1}{b-(a-1)} \qquad a \le y \le b$$

$$F(y) = \begin{cases} 0 & y < a \\ \dfrac{\text{int}(y)-(a-1)}{b-(a-1)} & a \le y < b \\ 1 & y \ge b \end{cases} \qquad \text{int}(y) \equiv \text{integer portion of } y$$

$$E(Y) = \sum_{y=a}^{b} y\left(\frac{1}{b-(a-1)}\right) = \frac{1}{b-(a-1)}\left[\sum_{y=1}^{b} y - \sum_{y=1}^{a-1} y\right]$$

$$= \frac{1}{b-(a-1)}\left[\frac{b(b+1)}{2} - \frac{(a-1)a}{2}\right] = \frac{b(b+1)-a(a-1)}{2(b-(a-1))}$$

Discrete Uniform Distribution

$$E(Y^2)=\sum_{y=a}^{b} y^2\left(\frac{1}{b-(a-1)}\right)=\frac{1}{b-(a-1)}\left[\sum_{y=1}^{b} y^2-\sum_{y=1}^{a-1} y^2\right]$$

$$=\frac{1}{b-(a-1)}\left[\frac{b(b+1)(2b+1)}{6}-\frac{(a-1)a(2a-1)}{6}\right]$$

$$=\frac{b(b+1)(2b+1)-a(a-1)(2a-1)}{6(b-(a-1))}$$

$$\Rightarrow V(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{b(b+1)(2b+1)-a(a-1)(2a-1)}{6(b-(a-1))}-\left[\frac{b(b+1)-a(a-1)}{2(b-(a-1))}\right]^2$$

Note: When $a=1$ and $b=n$:

$$E(Y)=\frac{n+1}{2} \qquad V(Y)=\frac{(n+1)(n-1)}{12} \qquad \sigma=\sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{12}}$$

Discrete Uniform Distribution

Example: rolling one die

X = outcome of rolling one die

X	1	2	3	4	5	6
P(X)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$E(Y) = \frac{1+6}{2} = 3.5 \qquad V(Y) = \frac{(6+1)(6-1)}{12} = \frac{35}{12}$$

Bernoulli Distribution

- Based on work of Jakob Bernoulli, a Swiss mathematician
- Refused a church appointment and instead studied mathematics
- Early use was for games of chance but now used in every human endeavour

a. An experiment consists of one trial. It can result in one of 2 outcomes: Success or Failure (or a characteristic being Present or Absent).
b. Probability of Success is p ($0<p<1$)
c. Y = 1 if Success (Characteristic Present), 0 if not

$$p(y) = \begin{cases} p & y = 1 \\ 1-p & y = 0 \end{cases}$$

Bernoulli Distribution- Expectation & Var

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{1} yp(y) = 0(1-p) + 1p = p$$

$$E\left(Y^2\right) = 0^2(1-p) + 1^2 p = p$$

$$\Rightarrow V(Y) = E\left(Y^2\right) - \left[E(Y)\right]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{p(1-p)}$$

Binomial Experiment

Binomial distribution is distribution for a series of Bernoulli trials

- Experiment consists of a series of n identical trials
- Each trial can end in one of 2 outcomes: Success or Failure
- Trials are independent (outcome of one has no bearing on outcomes of others)
- Probability of Success, p, is constant for all trials
- Random Variable Y, is the number of Successes in the n trials is said to follow Binomial Distribution with parameters n and p
- Y can take on the values $y=0,1,\ldots,n$
- Notation: $Y \sim Bin(n,p)$

EXAMPLE Identifying Binomial Experiments

Which of the following are binomial experiments?

a) A player rolls a pair of fair die 10 times. The number *Y* of 7's rolled is recorded.

b) The 11 largest airlines had an on-time percentage of 84.7% in November, 2001 according to the Air Travel Consumer Report. In order to assess reasons for delays, an official with the FAA randomly selects flights until she finds 10 that were not on time. The number of flights *Y* that need to be selected is recorded.

c) In a class of 30 students, 55% are female. The instructor randomly selects 4 students. The number *Y* of females selected is recorded.

Binomial Distribution [formula]

- The binomial random variable (# of successes in n trials) can take on values 0, 1, 2, …, **n**. Thus, its a ***discrete*** random variable.
- Once we know a random variable is binomial, we can calculate the probability associated with each value of the random variable from the binomial distribution:

$$\boxed{P(Y=y)=\binom{n}{y}p^{y}(1-p)^{n-y}} \qquad \text{for } y=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

- y = # successes and n-y = # failures

Binomial Distribution [formula]

EXCEL Functions:

$p(y)$ is obtained by function: $=\text{BINOMDIST}(y, n, p, 0)$

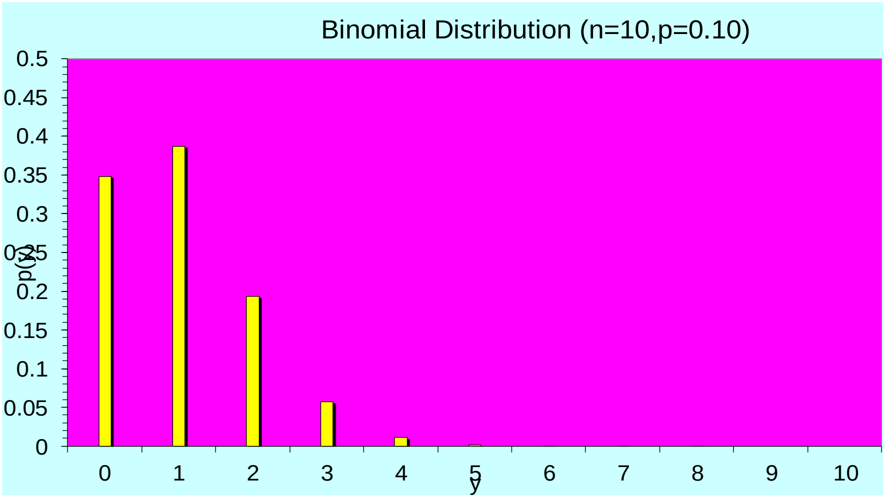
$F(y)$ is obtained by function: $=\text{BINOMDIST}(y, n, p, 1)$

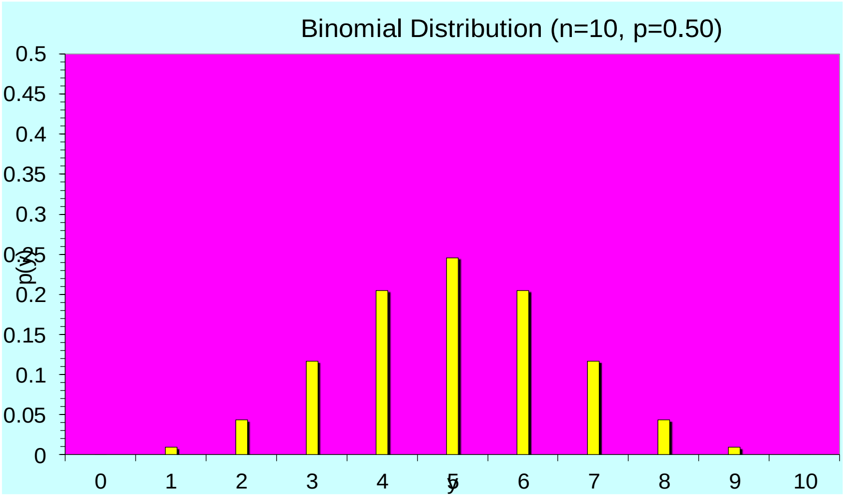
$$\text{Binomial Expansion:}\quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

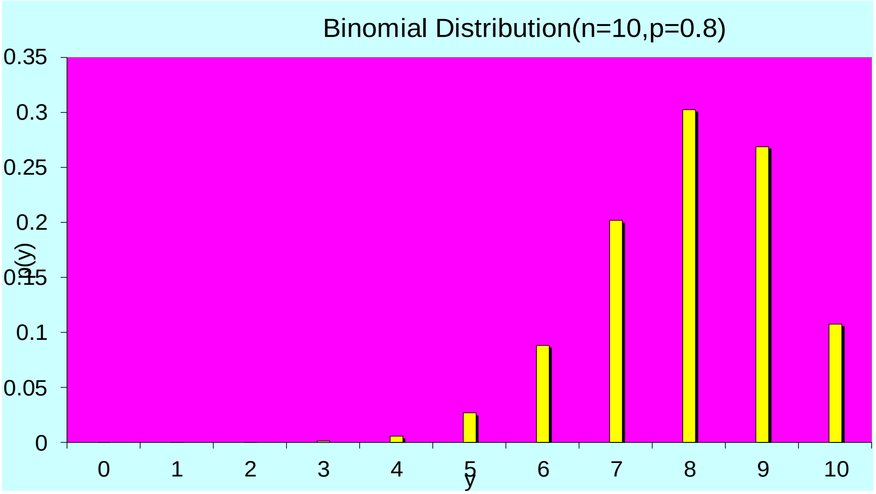
$$\Rightarrow \sum_{y=0}^{n} p(y) = \sum_{y=0}^{n} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = \left(p + (1-p)\right)^n = 1$$

$\Rightarrow$ "Legitimate" Probability Distribution

Binomial Distribution pmf







Binomial Distribution – Expected Value

$$f(y) = \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y q^{n-y} \qquad y = 0,1,\ldots,n \quad q = 1-p$$

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{n} y\left[\frac{n!}{y!(n-y)!} p^y q^{n-y}\right] = \sum_{y=1}^{n} y\left[\frac{n!}{y!(n-y)!} p^y q^{n-y}\right]$$

$$\text{(Summand} = 0 \text{ when } y = 0)$$

$$\Rightarrow E(Y) = \sum_{y=1}^{n}\left[\frac{yn!}{y(y-1)!(n-y)!} p^y q^{n-y}\right] = \sum_{y=1}^{n}\left[\frac{n!}{(y-1)!(n-y)!} p^y q^{n-y}\right]$$

$$\text{Let } y^* = y-1 \Rightarrow y = y^* + 1 \qquad \text{Note: } y = 1,\ldots,n \Rightarrow y^* = 0,\ldots,n-1$$

$$\Rightarrow E(Y) = \sum_{y^*=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{y^*!\left(n-(y^*+1)\right)!} p^{y^*+1} q^{n-(y^*+1)} = np\sum_{y^*=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y^*!\left((n-1)-y^*\right)!} p^{y^*} q^{(n-1)-y^*} =$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np\left(p+(1-p)\right)^{n-1} = np(1) = np$$

Binomial Distribution – Variance and S.D.

$$\text{Note: } E\left(Y^2\right) \text{is difficult (impossible?) to get, but } E\left(Y(Y-1)\right) = E\left(Y^2\right) - E(Y) \text{ is not:}$$

$$E\left(Y(Y-1)\right) = \sum_{y=0}^{n} y(y-1)\left[\frac{n!}{y!(n-y)!}p^y q^{n-y}\right] = \sum_{y=2}^{n} y(y-1)\left[\frac{n!}{y!(n-y)!}p^y q^{n-y}\right]$$

$$(\text{Summand} = 0 \text{ when } y = 0,1)$$

$$\Rightarrow E\left(Y(Y-1)\right) = \sum_{y=2}^{n} \frac{n!}{(y-2)!(n-y)!} p^y q^{n-y}$$

$$\text{Let } y^{**} = y-2 \Rightarrow y = y^{**}+2 \qquad \text{Note: } y = 2,\ldots,n \Rightarrow y^{**} = 0,\ldots,n-2$$

$$\Rightarrow E\left(Y(Y-1)\right) = \sum_{y^{**}=0}^{n-2} \frac{n(n-1)(n-2)!}{y^{**}!\left(n-(y^{**}+2)\right)!} p^{y^{**}+2} q^{n-(y^{**}+2)}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{y^{**}=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{y^{**}!\left((n-2)-y^{*}\right)!} p^{y^{**}} q^{(n-2)-y^{**}} =$$

$$= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = n(n-1)p^2\left(p+(1-p)\right)^{n-2} = n(n-1)p^2$$

Binomial Distribution – Variance and S.D.

$$\Rightarrow E\left(Y^2\right) = E\left(Y(Y-1)\right) + E(Y) = n(n-1)p^2 + np$$

$$= np[(n-1)p+1] = n^2p^2 - np^2 + np = n^2p^2 + np(1-p)$$

$$\Rightarrow V(Y) = E\left(Y^2\right) - [E(Y)]^2 = n^2p^2 + np(1-p) - (np)^2 = np(1-p)$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Binomial example

Take the example of 5 coin tosses. What's the probability that you flip exactly 3 heads in 5 coin tosses?

Solution:

- One way to get exactly 3 heads: HHHTT
- What's the probability of this <u>exact</u> arrangement?

  P(heads)xP(heads) xP(heads)xP(tails)xP(tails) $=(1/2)^3 \times (1/2)^2$

- Another way to get exactly 3 heads: THHHT
- Probability of this exact outcome = $(1/2)^1 \times (1/2)^3 \times (1/2)^1 = (1/2)^3 \times (1/2)^2$

Binomial example 1

- In fact, $(1/2)^3 \times (1/2)^2$ is the probability of each unique outcome that has exactly 3 heads and 2 tails.

- So, the overall probability of 3 heads and 2 tails is: $(1/2)^3 \times (1/2)^2 + (1/2)^3 \times (1/2)^2 + (1/2)^3 \times (1/2)^2 +$ ….. for as many unique arrangements as there are—but how many are there??

Binomial example 1

$\binom{5}{3}$ ways to arrange 3 heads in 5 trials

Outcome	Probability
THHHT	$(1/2)^3$ x $(1/2)^2$
HHHTT	$(1/2)^3$ x $(1/2)^2$
TTHHH	$(1/2)^3$ x $(1/2)^2$
HTTHH	$(1/2)^3$ x $(1/2)^2$
HHTTH	$(1/2)^3$ x $(1/2)^2$
THTHH	$(1/2)^3$ x $(1/2)^2$
HTHTH	$(1/2)^3$ x $(1/2)^2$
HHTHT	$(1/2)^3$ x $(1/2)^2$
THHTH	$(1/2)^3$ x $(1/2)^2$
HTHHT	$(1/2)^3$ x $(1/2)^2$

10 arrangements x $(1/2)^3$ x $(1/2)^2$

The probability of each unique outcome (note: they are all equal)

$_5C_3 = 5!/3!2! = 10$

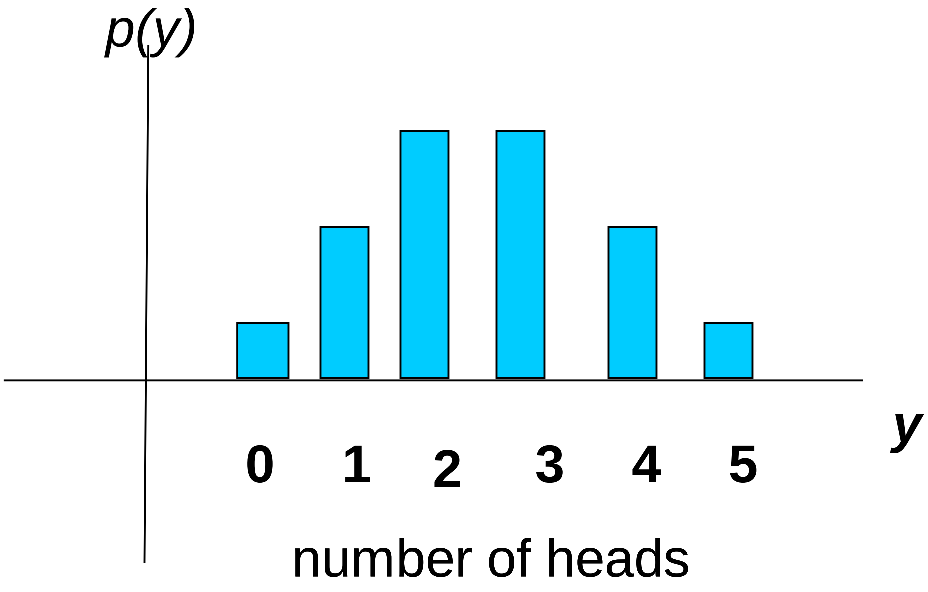
Binomial example 1

$\therefore P(\text{3 heads and 2 tails}) = \binom{5}{3} \times P(\text{heads})^3 \times P(\text{tails})^2$

$= 10 \times (½)^{5} = 31.25\%$

Binomial distribution function:

Y= the number of heads tossed in 5 coin tosses



Pascal's Triangle

Edges are all 1's

To get the coefficient for expanding to the 5th power, use the row that starts with 5.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Add the two numbers in the row above to get the number below, e.g.:
3+1=4;
5+10=15

$$(p + q)^5 = \mathbf{1}p^5 + \mathbf{5}p^4q^1 + \mathbf{10}p^3q^2 + \mathbf{10}p^2q^3 + \mathbf{5}p^1q^4 + \mathbf{1}q^5$$

Relationship between binomial probability distribution and binomial expansion

If $p + q = 1$ (which is the case if they are binomial probabilities)

then: $(p + q)^5 = (1)^5 = 1$ or, equivalently:

$$1q^5 + 5q^4p^1 + 10q^3p^2 + 10q^2p^3 + 5q^1p^4 + 1p^5 = 1$$

(the probabilities sum to 1, making it a probability distribution!)

P(X=0)	P(X=1)	P(X=2)	P(X=3)	P(X=4)	P(X=5)

Binomial example 2

If the probability of being a smoker among a group of cases with lung cancer is .6, what's the probability that in a group of 8 cases you have less than 2 smokers? More than 5?

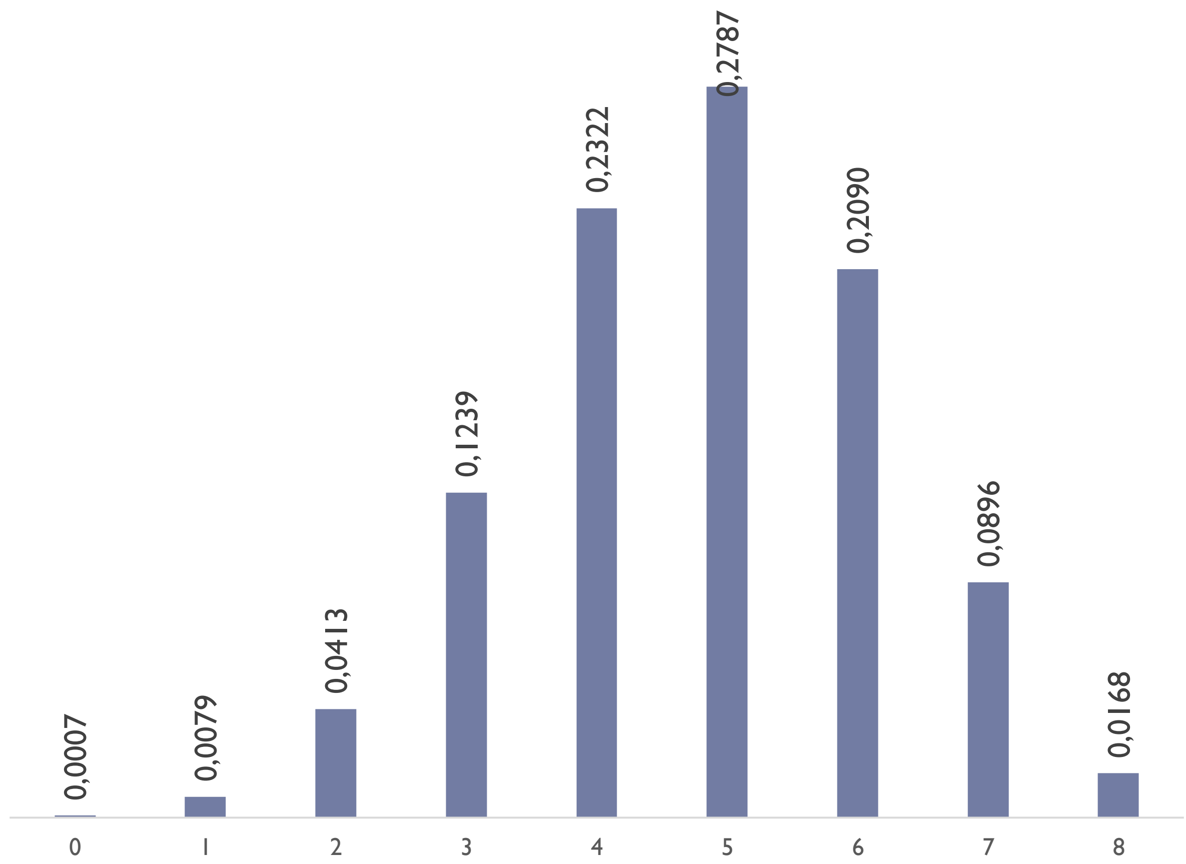
What are the expected value and variance of the number of smokers?

Answer

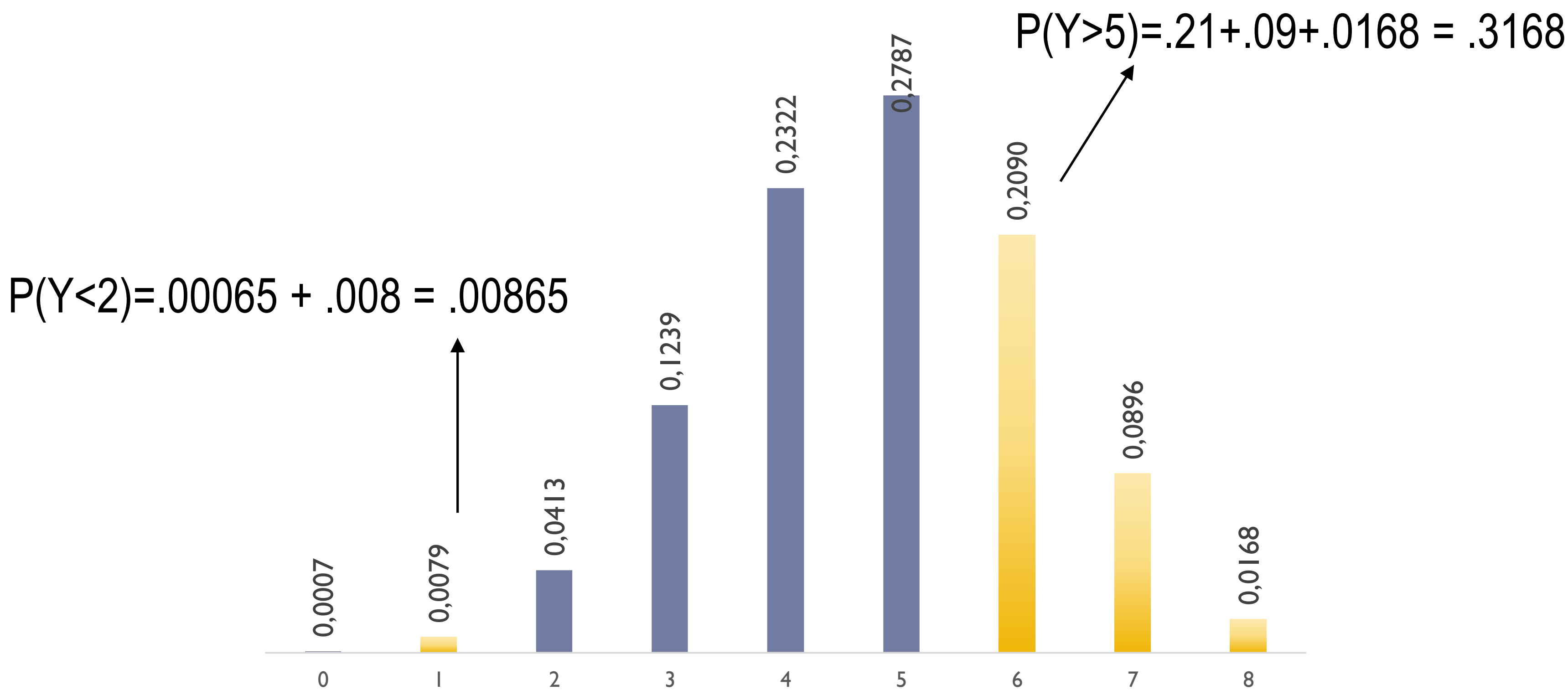
Y	P(Y)
0	$1(.4)^8 = .00065$
1	$8(.6)^1 (.4)^7 = .008$
2	$28(.6)^2 (.4)^6 = .04$
3	$56(.6)^3 (.4)^5 = .12$
4	$70(.6)^4 (.4)^4 = .23$
5	$56(.6)^5 (.4)^3 = .28$
6	$28(.6)^6 (.4)^2 = .21$
7	$8(.6)^7 (.4)^1 = .090$
8	$1(.6)^8 = .0168$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Answer, continued



Answer, continued



E(Y) = 8 (.6) = 4.8

Var(Y) = 8 (.6) (.4) =1.92

StdDev(Y) = 1.38

Terima kasih

Discrete Random Variables and Probability Distributions

Multinomial distribution

The multinomial is a generalization of the binomial. It is used when there are more than 2 possible outcomes (for ordinal or nominal, rather than binary, random variables).

- Instead of partitioning n trials into 2 outcomes (yes with probability p / no with probability 1-p), you are partitioning n trials into 3 or more outcomes (with probabilities: $p_1, p_2, p_3, ..$)
  - General formula for 3 outcomes:

$$P(X = x, Y = y, Z = z) = \frac{n!}{x!\,y!\,z!} p_1^x p_2^y (1 - p_1 - p_2)^z$$

Multinomial example

Specific Example: if you are randomly choosing 8 people from an audience that contains 50% democrats (p_1), 30% republicans (p_2), and 20% green party (p_3), what's the probability of choosing exactly 4 democrats (x), 3 republicans (y), and 1 green party (z) member?

$$P(X=4, Y=3, Z=1) = \frac{8!}{4!\,3!\,1!}(.5)^4(.3)^3(.2)^1$$

Geometric Distribution

- Used to model the number of Bernoulli trials needed until the first Success occurs ($P(S)=p$)
  - First Success on Trial 1 $\Rightarrow S$, $y = 1 \Rightarrow p(1)=p$
  - First Success on Trial 2 $\Rightarrow FS$, $y = 2 \Rightarrow p(2)=(1-p)p$
  - First Success on Trial k $\Rightarrow F\ldots FS$, $y = k \Rightarrow p(k)=(1-p)^{k-1}\,p$

$$p(y) = (1-p)^{y-1}p \qquad y = 1,2,\ldots$$

$$\sum_{y=1}^{\infty} p(y) = \sum_{y=1}^{\infty}(1-p)^{y-1}p = p\sum_{y=1}^{\infty}(1-p)^{y-1}$$

Setting $y^* = y-1$ and noting that $y = 1,2,\ldots \Rightarrow y^* = 0,1,\ldots$

$$\Rightarrow \sum_{y=1}^{\infty} p(y) = p\sum_{y^*=0}^{\infty}(1-p)^{y^*} = p\left[\frac{1}{1-(1-p)}\right] = \frac{p}{p} = 1$$

Geometric Distributions

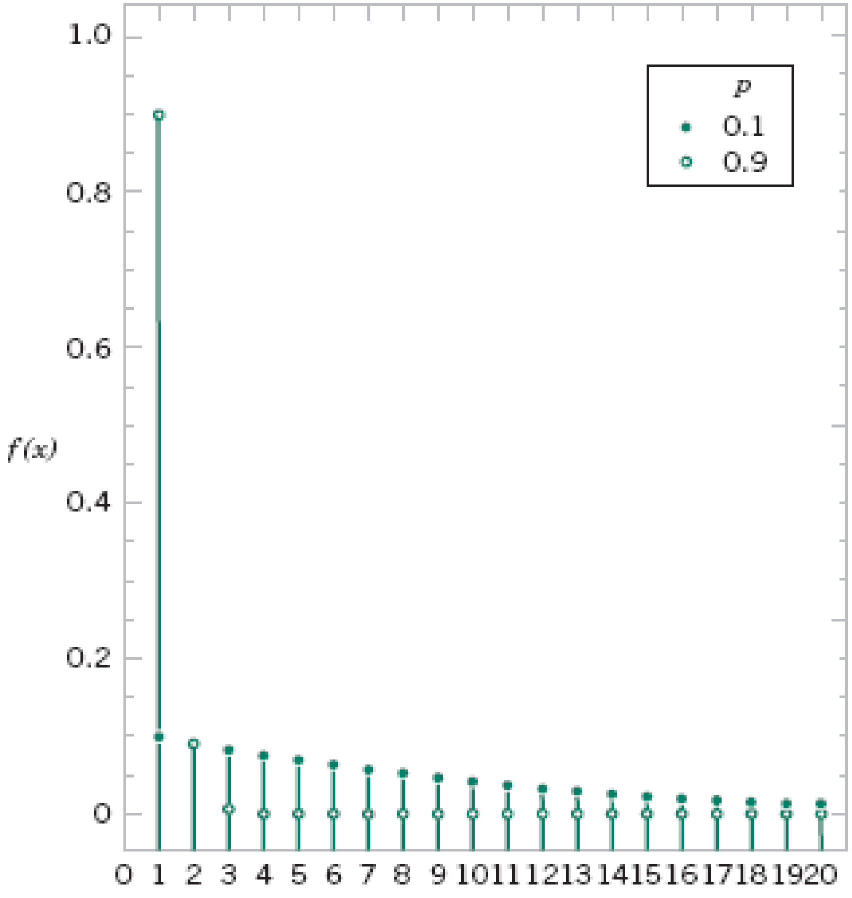


Figure . Geometric distributions for selected values of the parameter *p*.

Geometric Distribution - Expectations

$$E(Y)=\sum_{y=1}^{\infty} y\left[q^{y-1}p\right]=p\sum_{y=1}^{\infty}\frac{dq^{y}}{dq}=p\frac{d}{dq}\sum_{y=1}^{\infty}q^{y}=p\frac{d}{dq}\left[q\sum_{y=1}^{\infty}q^{y-1}\right]$$

$$=p\frac{d}{dq}\left[\frac{q}{1-q}\right]=p\left[\frac{(1-q)(1)-q(-1)}{(1-q)^{2}}\right]=\frac{p\left((1-q)+q\right)}{(1-q)^{2}}$$

$$=\frac{p}{p^{2}}=\frac{1}{p}$$

Geometric Distribution - Variance

$$E\big(Y(Y-1)\big)=\sum_{y=1}^{\infty} y(y-1)\left[q^{y-1}p\right]=pq\sum_{y=1}^{\infty}\frac{d^2q^y}{dq^2}=pq\frac{d^2}{dq^2}\sum_{y=1}^{\infty}q^y$$

$$=pq\frac{d^2}{dq^2}\left[q\sum_{y=1}^{\infty}q^{y-1}\right]=pq\frac{d^2}{dq^2}\left[\frac{q}{1-q}\right]=pq\frac{d}{dq}\frac{1}{(1-q)^2}$$

$$=pq\big(-2(1-q)^{-3}(-1)\big)=\frac{2pq}{(1-q)^3}=\frac{2pq}{p^3}=\frac{2q}{p^2}$$

$$\Rightarrow E\big(Y^2\big)=E\big(Y(Y-1)\big)+E(Y)=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}=\frac{2(1-p)+p}{p^2}=\frac{2-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow V(Y)=E\big(Y^2\big)-[E(Y)]^2=\frac{2-p}{p^2}-\left[\frac{1}{p}\right]^2=\frac{2-p-1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}=\frac{q}{p^2}$$

$$\Rightarrow \sigma=\sqrt{\frac{q}{p^2}}$$

The Geometric Distribution - Example

At “busy time” a telephone exchange is very near capacity, so callers have difficulty placing their calls. It may be on interest to know the number of attempts necessary in order to gain a connection. Suppose that we let p = 0.05 be the probability of a connection during a busy time. We are interested in knowing the probability that 5 attempts are necessary for a successful call.

The Geometric Distribution - Example

The random variable X is the number of attempts for a successful call. Then

X~Geometric (0.05),

So that for with x = 5 and p = 0.05 yields:

$$P(X=x) = g(5;0.05)$$
$$= (0.05)(0.95)^4$$
$$= 0.041$$

And the expected number of attempts is $\mu = \frac{1}{0.05} = 20$

Negative Binomial Distribution

- Used to model the number of trials needed until the r^{th} Success (extension of Geometric distribution)
- Based on there being *r*-1 Successes in first *y*-1 trials, followed by a Success

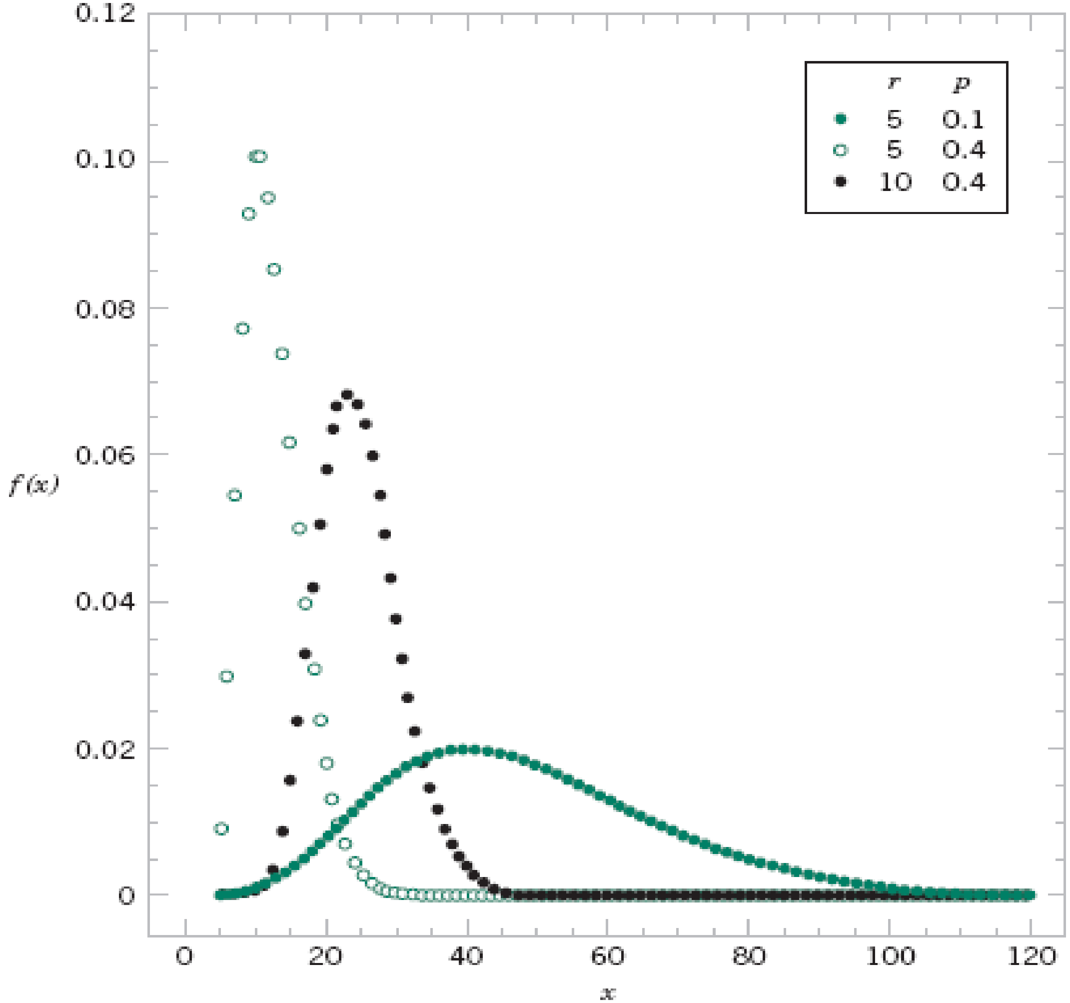
$$p(y) = \binom{y-1}{r-1} p^r (1-p)^{y-r} \qquad y = r, r+1, \ldots$$

$$E(Y) = \frac{r}{p}$$

$$V(Y) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Negative Binomial Distributions

Figure . Negative binomial distributions for selected values of the parameters *r* and *p*.



The Negative Binomial: Example 1

Find the probability that a person tossing three coins will get either all heads or all tails for the second time on the fifth toss.

Solution

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p} &= P(\text{success}) \\
&= P[(HHH)or(TTT)] \\
&= \frac{1}{8}+\frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

The Negative Binomial : Example 1

Since a success must occur on the fifth toss of the 3 coins, the following outcomes are possible:

Toss

1	2	3	4	5
S	F	F	F	S
F	S	F	F	S
F	F	S	F	S
F	F	F	S	S

probability

$$\frac{27}{1024}$$

Therefore, the probability of obtaining all heads or all tails for the second time on the fifth toss is

$$4.\frac{27}{1024} = \frac{27}{256}$$

The Negative Binomial : Example 1

Or, using the Negative Binomial Distribution with r = 2, p = 0.25, and x = 3 gives

$$NB(3;2,0.25) = \binom{4}{1} 0.25^2 (0.75)^3 = \frac{27}{256} = 0.105$$

The Negative Binomial : Example 2

The drilling records for an oil company suggest that the probability the company will hit oil in productive quantities at a certain offshore location is 0.3 . Suppose the company plans to drill a series of wells looking for three successful wells.

$$P(x) = {}_{x-1}C_{r-1}\, p^r(1-p)^{x-r}$$

$$p = 0.3$$

a) What is the probability that the third success will be achieved with the 8th well drilled?

$$P(8) = {}_{8-1}C_{3-1}\, p^3(1-p)^{8-3} = {}_7C_2\,(0.3)^3(0.7)^5$$

$$= (21)(0.027)(0.16807) = 0.0953$$

b) What is the probability that the third success will be achieved with the 20th well drilled?

$$P(20) = {}_{20-1}C_{3-1}\, p^3(1-p)^{20-3} = {}_{19}C_2\,(0.3)^3(0.7)^{17}$$

$$= (171)(0.027)(0.00233) = 0.0107$$

The Negative Binomial : Example 2

The drilling records for an oil company suggest that the probability the company will hit oil in productive quantities at a certain offshore location is 0.3 . Suppose the company plans to drill a series of wells looking for three successful wells.

c) Find the mean and standard deviation of the number of wells that must be drilled before the company hits its third productive well.

Mean $\mu_x = r/p$ $= 3 / 0.3 = 10$

Standard Deviation $\sigma_x = \sqrt{r(1-p)/p^2}$ $= \sqrt{3(0.7)/(0.3)^2}$

$= 4.8305$

Poisson Distribution

Poisson distribution (1838), named after its inventor Simeon Poisson who was a French mathematician. He found that if we have a rare event (i.e. p is small) and we know the expected or mean (or μ) number of occurrences

Poisson Distribution

- Distribution often used to model the number of incidences of some characteristic in time or space:
  - Arrivals of customers in a queue
  - Numbers of flaws in a roll of fabric
  - Number of typos per page of text.
- Distribution obtained as follows:
  - Break down the "area" into many small "pieces" (n pieces)
  - Each "piece" can have only 0 or 1 occurrences (p=P(1))
  - Let $\lambda = np \equiv$ Average number of occurrences over "area"
  - $Y \equiv$ # occurrences in "area" is sum of 0^s & 1^s over "pieces"
  - $Y \sim \text{Bin}(n,p)$ with $p = \lambda/n$
  - Take limit of Binomial Distribution as $n \to \infty$ with $p = \lambda/n$

Poisson Distribution - Derivation

$$p(y)=\frac{n!}{y!(n-y)!}p^y(1-p)^{n-y}=\frac{n!}{y!(n-y)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^y\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-y}$$

Taking limit as $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}p(y)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{y!(n-y)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^y\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-y}$$

$$=\frac{\lambda^y}{y!}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-y+1)(n-y)!}{n^y(n-y)!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{-y}$$

$$=\frac{\lambda^y}{y!}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-y+1)}{(n-\lambda)^y}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$=\frac{\lambda^y}{y!}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-\lambda}\right)\left(\frac{n-1}{n-\lambda}\right)\ldots\left(\frac{n-y+1}{n-\lambda}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

Poisson Distribution - Derivation

$$\text{Note}: \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-\lambda}\right) = \ldots = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-y+1}{n-\lambda}\right) = 1 \text{ for all fixed } y$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p(y) = \frac{\lambda^y}{y!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$\text{From Calculus, we get}: \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p(y) = \frac{\lambda^y}{y!}e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \qquad y = 0,1,2,\ldots$$

$$\text{Series expansion of exponential function}: e^x = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$$

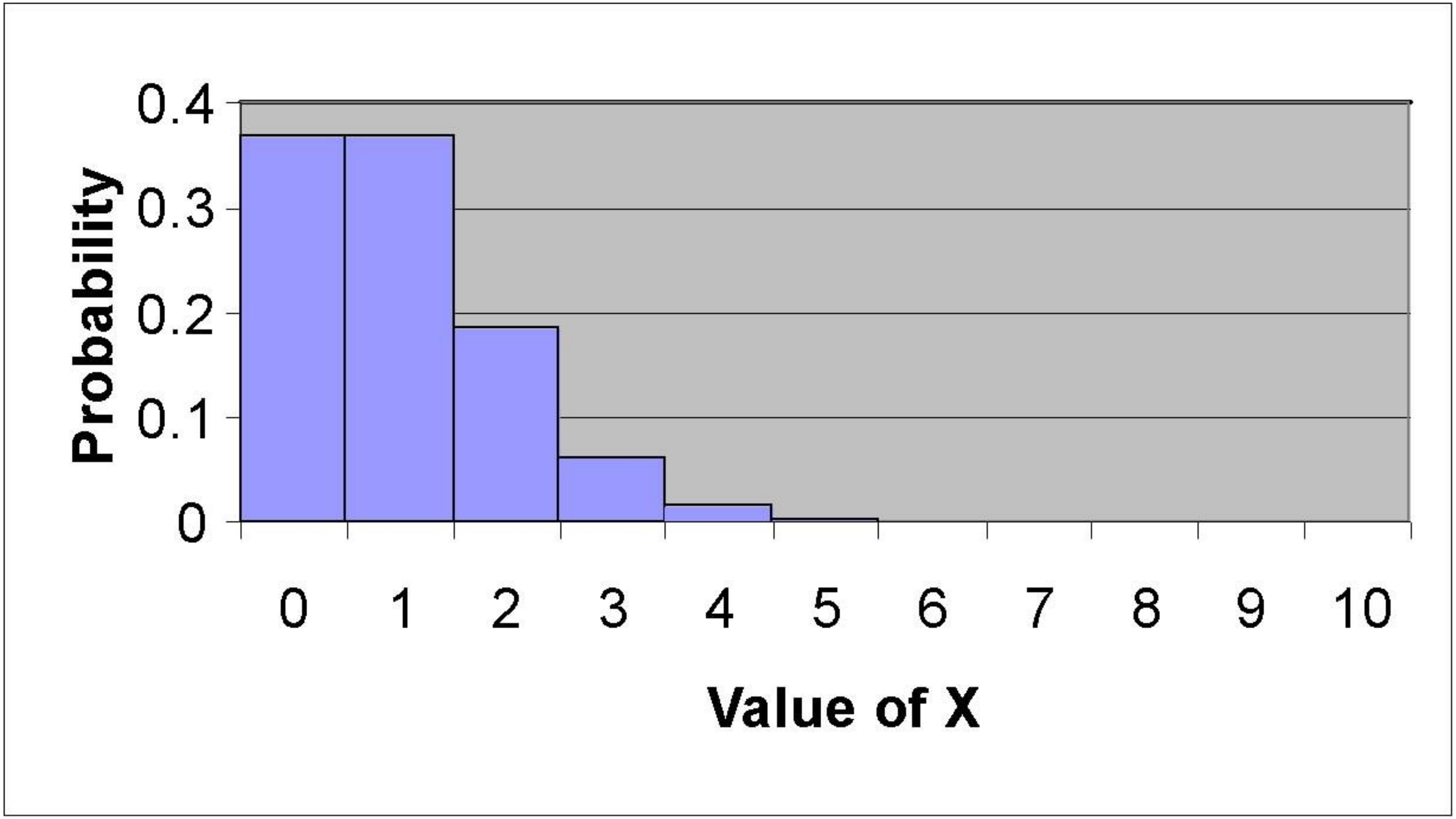
$$\Rightarrow \sum_{y=0}^{\infty} p(y) = \sum_{y=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1 \Rightarrow \text{"Legitimate" Probability Distribution}$$

EXCEL Functions:

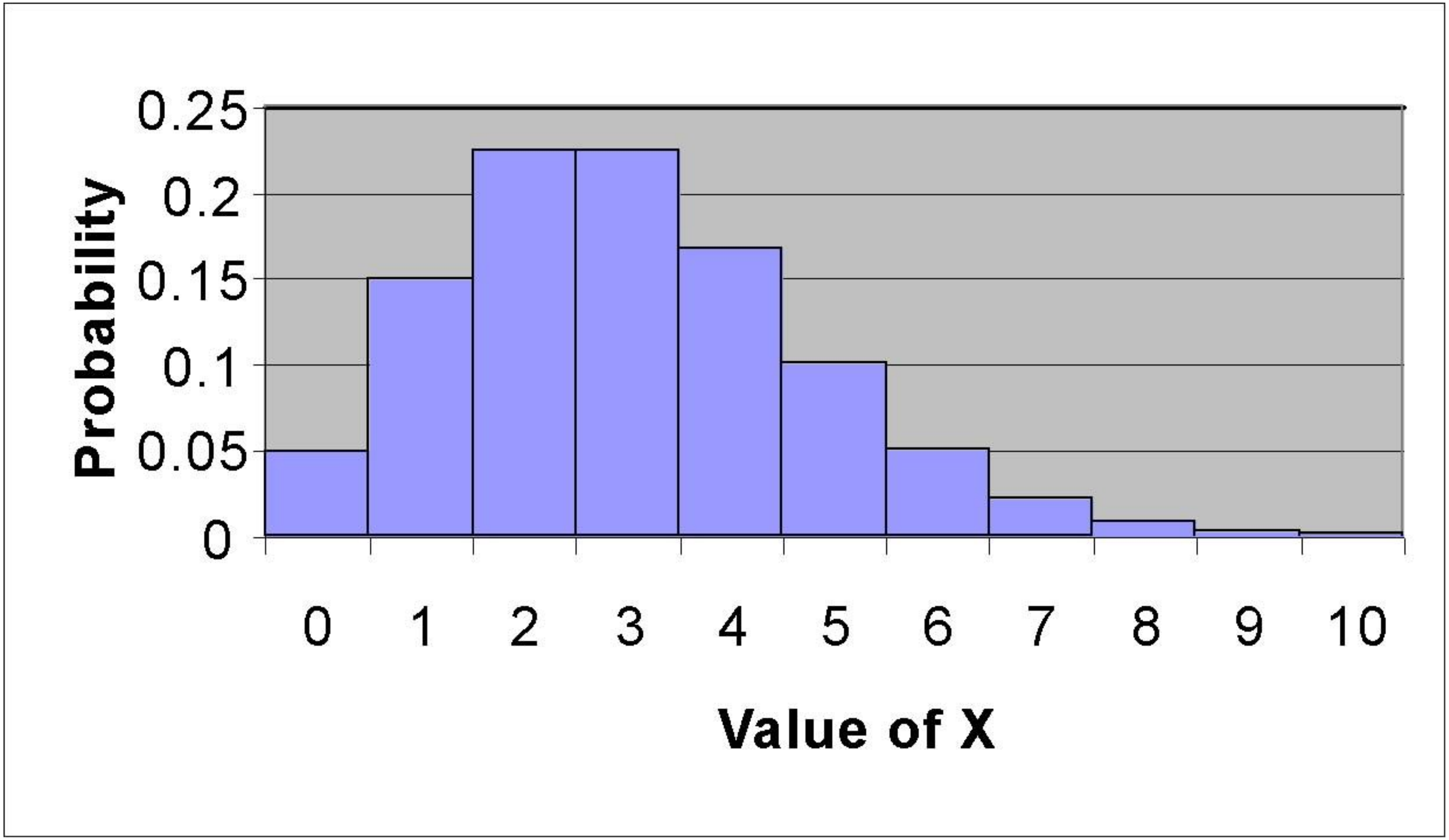
$p(y)$: $=$ POISSON(y, λ,0)

$F(y)$: $=$ POISSON(y, λ,1)

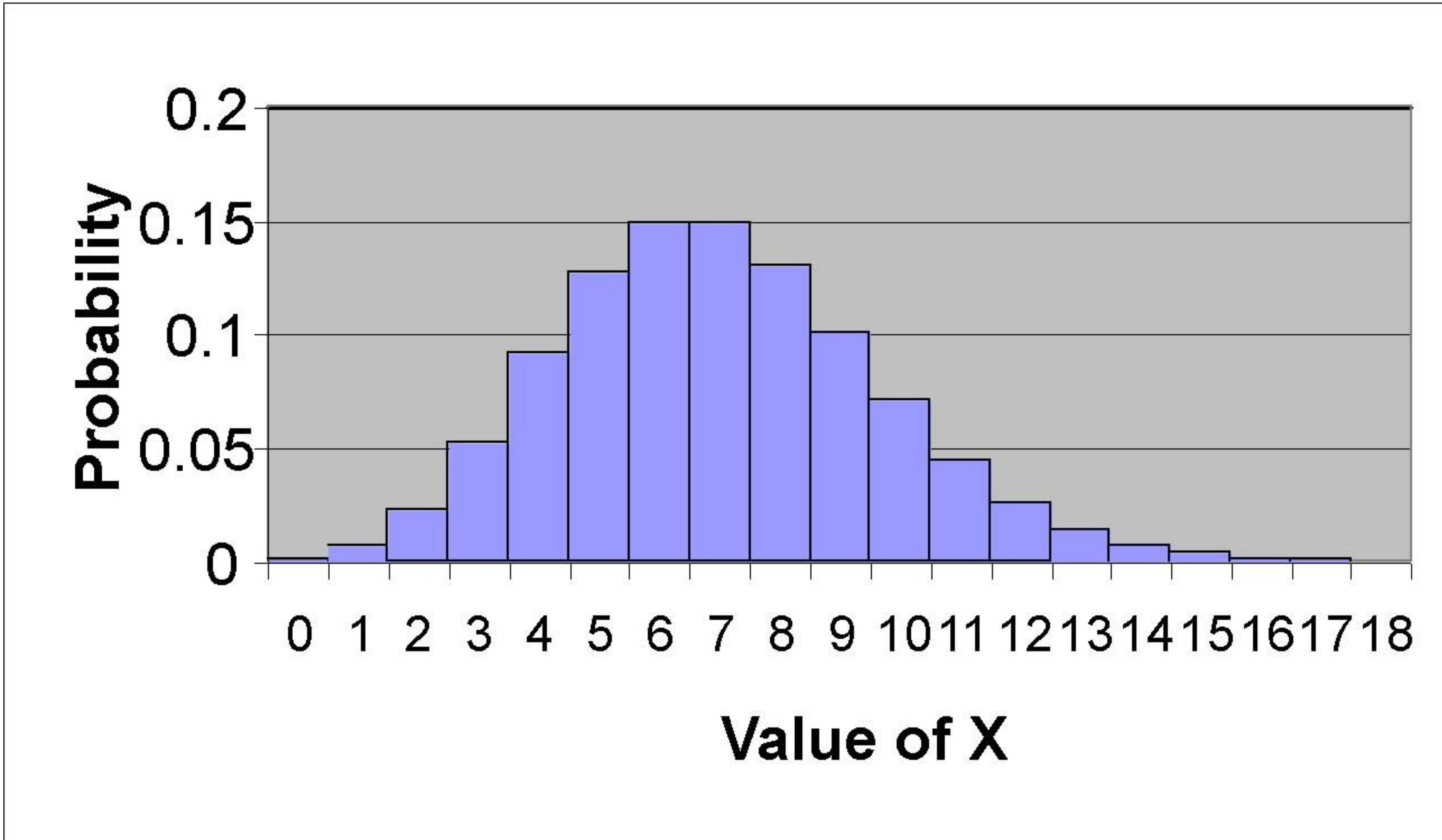
Probability Histogram of a Poisson Distribution with $\mu = 1$



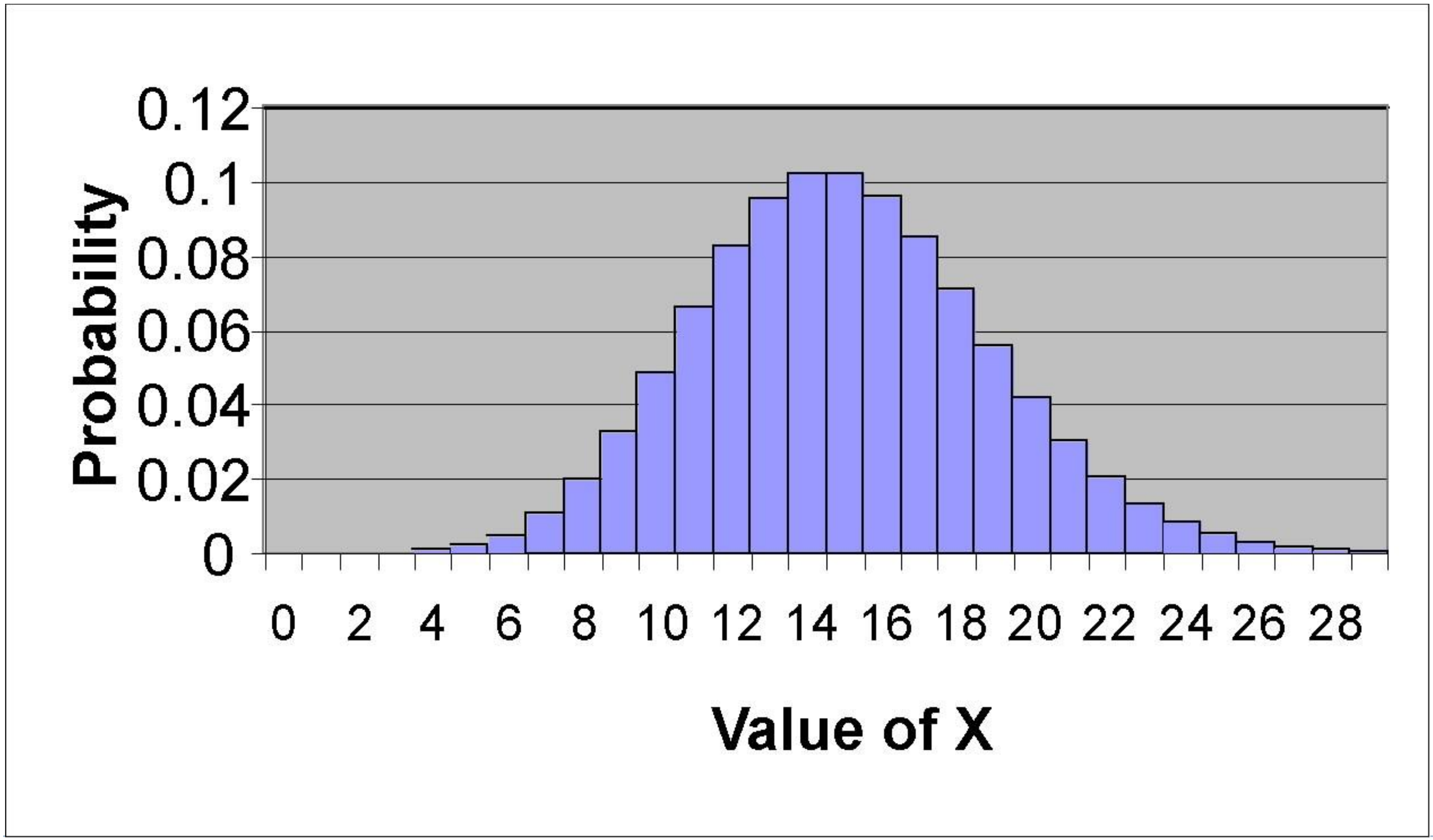
Probability Histogram of a Poisson Distribution with $\mu = 3$



Probability Histogram of a Poisson Distribution with $\mu = 7$



Probability Histogram of a Poisson Distribution with $\mu = 15$



Poisson Distribution – Expectations &Variance

$$f(y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!} \qquad y = 0,1,2,\ldots$$

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} y\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}\right] = \sum_{y=1}^{\infty} y\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}\right] = \sum_{y=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{(y-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{\lambda^{y-1}}{(y-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

$$E\big(Y(Y-1)\big) = \sum_{y=0}^{\infty} y(y-1)\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}\right] = \sum_{y=2}^{\infty} y(y-1)\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}\right] = \sum_{y=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{(y-2)!} =$$

$$= \lambda^{2}e^{-\lambda}\sum_{y=2}^{\infty}\frac{\lambda^{y-2}}{(y-2)!} = \lambda^{2}e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^{2}$$

$$\Rightarrow E\left(Y^{2}\right) = E\big(Y(Y-1)\big) + E(Y) = \lambda^{2} + \lambda$$

$$\Rightarrow V(Y) = E\left(Y^{2}\right) - [E(Y)]^{2} = \lambda^{2} + \lambda - [\lambda]^{2} = \lambda$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\lambda}$$

Poisson Distribution Example 1

- The number of typographical errors in new editions of textbooks varies considerably from book to book. After some analysis he concludes that the number of errors is Poisson distributed with a mean of 1.5 typos per 100 pages. The instructor randomly selects 100 pages of a new book. What is the probability that there are no typos?

- That is, what is P(X=0) given that μ = 1.5?

$$P(0) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = \frac{e^{-1.5}1.5^{0}}{0!} = .2231$$

"There is about a 22% chance of finding zero errors"

Poisson Distribution…

- As mentioned on the Poisson experiment slide:

- ***The probability of a success is proportional to the size of the interval***

- Thus, knowing an error rate of 1.5 typos per 100 pages, we can determine a mean value for a 400 page book as:

$$\mu = 1.5(4) = 6 \text{ typos / 400 pages.}$$

Poisson Distribution Example 1

- For a 400 page book, what is the probability that there are
- **no** typc

$$P(0) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = \frac{e^{-6}6^{0}}{0!} = .002479$$

- P(X=0) =

"there is a very small chance there are no typos"

Poisson Distribution Example 1

- For a 400 page book, what is the probability that there are **five or less** typos?

- P(X≤5) = P(0) + P(1) + … + P(5) $= \frac{e^{-6}6^0}{0!} + \frac{e^{-6}6^1}{1!} + \ldots + \frac{e^{-6}6^5}{5!}$

  = .446

"there is about a 45% chance there are 5 or less typos"

more on Poisson…

"Poisson Process" (rates)

Note that the Poisson parameter λ can be given as the mean number of events that occur in a defined time period OR, equivalently, λ can be given as a rate, such as λ=2/month (2 events per 1 month) that must be multiplied by *t*=time (called a "Poisson Process") →

X ~ Poisson (λ)

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

E(X) = λt

Var(X) = λt

Poisson Distribution Example 2

For example, if new cases of West Nile in New England are occurring at a rate of about 2 per month, then what's the probability that exactly 4 cases will occur in the next 3 months?

X ~ Poisson (λ=2/month)

$$P(X = 4 \text{ in } 3 \text{ months}) = \frac{(2*3)^4 e^{-(2*3)}}{4!} = \frac{6^4 e^{-(6)}}{4!} = 13.4\%$$

Exactly 6 cases?

$$P(X = 6 \text{ in } 3 \text{ months}) = \frac{(2*3)^6 e^{-(2*3)}}{6!} = \frac{6^6 e^{-(6)}}{6!} = 16\%$$

Using the Poisson Distribution to Approximate Binomial Probabilities

The Poisson probability distribution function can be used to approximate binomial probabilities provided the number of trials **$n \geq 100$ and $np \leq 10$**. In other words, the number of independent trials of the binomial experiment should be large and the probability of success should be small.

EXAMPLE *Using the Poisson Distribution to Approximate Binomial Probabilities*

- Suppose that a rare disease has an incidence of 1 in 1000 person-years. Assuming that members of the population are affected independently, find the probability of k cases in a population of 10,000 (followed over 1 year) for k=0,1,2.

- The expected value (mean) =λ = .001*10,000 = 10
- 10 new cases expected in this population per year→

$$P(X=0)=\frac{(10)^0 e^{-(10)}}{0!}=.0000454$$

$$P(X=1)=\frac{(10)^1 e^{-(10)}}{1!}=.000454$$

$$P(X=2)=\frac{(10)^2 e^{-(10)}}{2!}=.00227$$

Hypergeometric Distribution

- Finite population generalization of Binomial Distribution
- Population:
  - *N* Elements
  - *K* Successes (elements with characteristic if interest)
- Sample:
  - *n* Elements
  - *Y* = # of Successes in sample (*y* = 0,1,,,,,min(*n*,*k*)

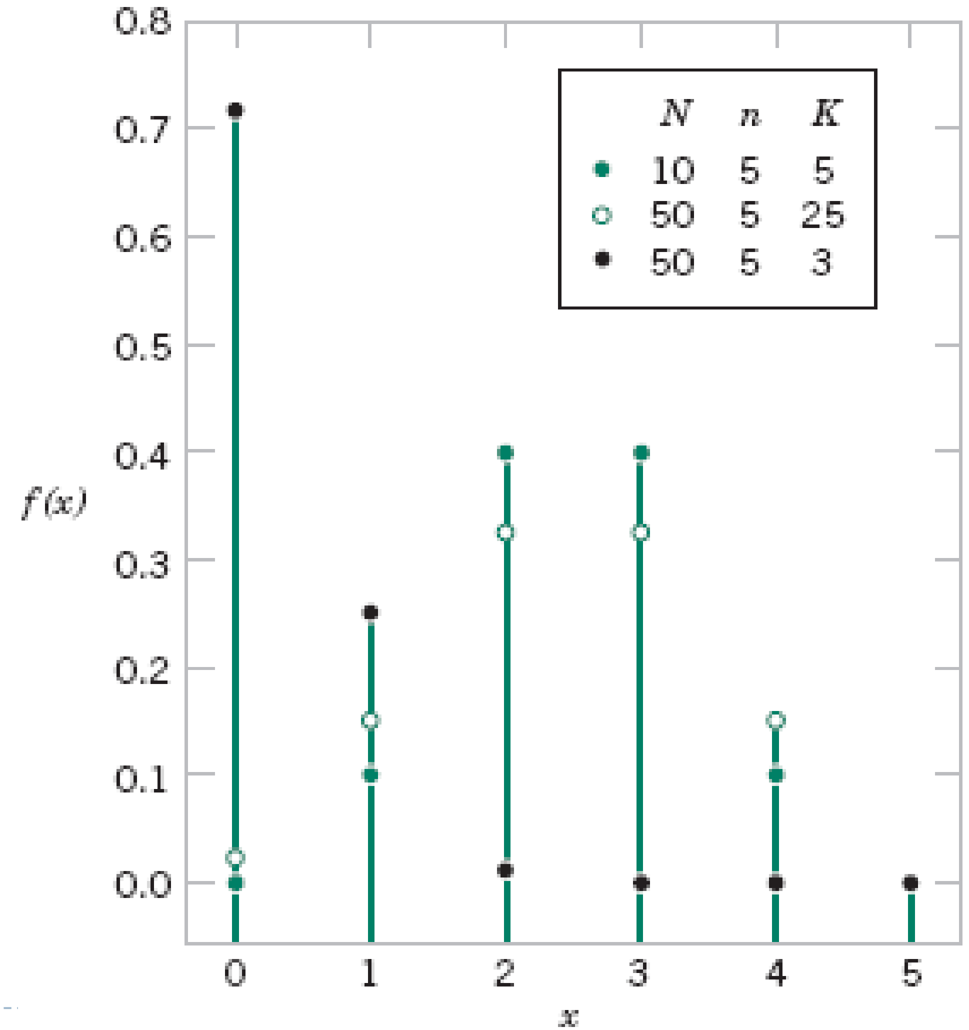
$$p(y) = \frac{\binom{K}{y}\binom{N-K}{n-y}}{\binom{N}{n}} \qquad y = 0,1,\ldots,\min(n,k)$$

$$E(Y) = n\left(\frac{K}{N}\right)$$

$$V(Y) = n\left(\frac{K}{N}\right)\left(\frac{N-K}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Hypergeometric Distribution

Figure 3-12. Hypergeometric distributions for selected values of parameters *N*, *K*, and *n*.



Hypergeometric distribution: Example1

A carton contains 24 light bulbs, three of which are defective. What is the probability that, if a sample of six is chosen at random from the carton of bulbs, x will be defective?

$$P(X = x) = \frac{\binom{3}{x} \cdot \binom{21}{6-x}}{\binom{24}{6}}$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{21}{6}}{\binom{24}{6}} = 0{,}40316$$

That is no defective

$$P(X = 3) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{21}{3}}{\binom{24}{6}} = 0{,}00988$$

That is 3 will be defective.

Hypergeometric distribution: Example 2

Suppose that 7 balls are selected at random without replacement from a box containing 5 red balls and 10 blue balls .If X denotes the proportion of red balls in the sample, what are the mean and the variance of X ?

K=5 red N-K=10 blue N =15 n=7

$$E(X) = \frac{n \cdot K}{N} = \frac{7 \cdot 5}{15} = 2{,}33$$

$$Var(X) = \frac{n \cdot K \cdot (N-K)}{N^2} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

$$= \frac{7 \cdot 5 \cdot 10}{15^2} \cdot \frac{15-7}{15-1} = 0{,}8888$$

Hypergeometric distribution: Example 3

:Suppose that a shipment contains 5 defective items and 10 non defective items .If 7 items are selected at random without replacement , what is the probability that at least 3 defective items will be obtained?

N=15 (5 defective , 10 nondefective) n=7

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left[P(0) + P(1) + P(2)\right] = 0{,}4267$$

$$P(0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{10}{7}}{\binom{15}{7}} = 0{,}0186$$

$$P(1) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{10}{6}}{\binom{15}{7}} = 0{,}1631$$

$$P(2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{10}{5}}{\binom{15}{7}} = 0{,}3916$$

Hypergeometric distribution

- Sampling with replacement

  If we sample with replacement and the trials are all independent, the binomial distribution applies.

- Sampling without replacement

  If we sample without replacement, a different probability distribution applies.

Difference between Binomial and Hypergeometric distributions

- A box contains 3 white balls & 2 red balls

1. Pick up 2 without replacement

   X=# of white balls

2. Pick up 2 with replacement

   Y=# of white balls

Distributions for X & Y?

Means and variances?

Hypergeometric distribution

APPROXİMATİONS

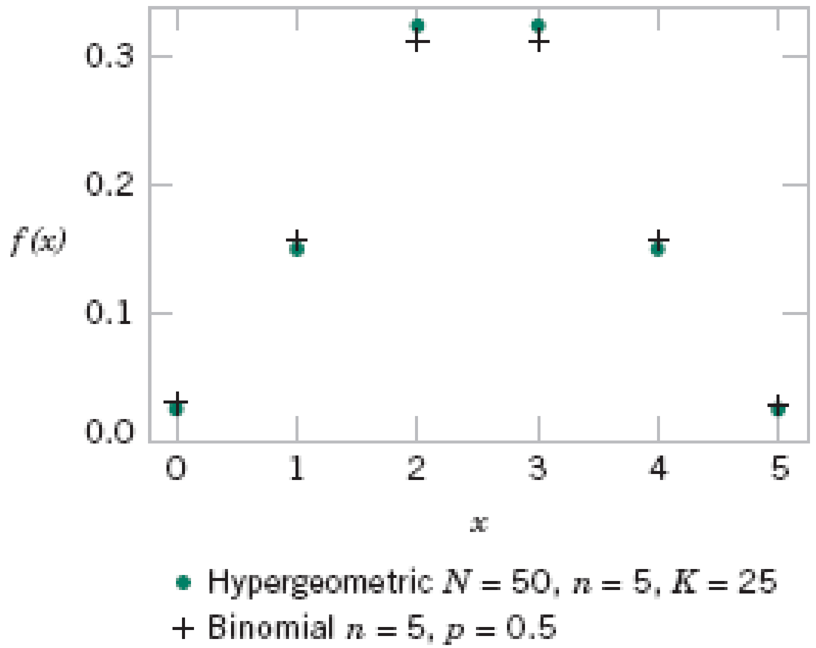
Binomial Approximation Requariments :

If n $\leq 0{,}05N$, Binomial can be used instead of hypergeometric distribution

Poisson Approximation Requariments:

If n $\leq 0{,}05N$, $n \geq 20$, and $p \leq 0.05$, Poisson can be used instead of hypergeometric distribution

Hypergeometric distribution



	0	1	2	3	4	5
Hypergeometric probability	0.025	0.149	0.326	0.326	0.149	0.025
Binomial probability	0.031	0.156	0.321	0.312	0.156	0.031

Figure. Comparison of hypergeometric and binomial distributions.

Catatan

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$