PERTEMUAN 11

TEKNIK NUMERIK UNTUK PENYELESAIAN INTEGRAL (INTEGRASI NUMERIK)

TUJUAN PRAKTIKUM

Mahasiswa mampu menerapkan teknik-teknik penyelesaian integral menggunakan Program R.

TEORI PENUNJANG

Perhitungan integral adalah perhitungan dasar kalkulus yang digunakan untuk menghitung luas daerah yang dibatasi fungsi y=f(x) dan sumbu x. Tidak semua fungsi dapat diintegralkan secara analitik, oleh karena itu aproksimasi integral dibutuhkan. Aproksimasi integral itu disebut pengintegralan numerik. Teknik pengintegralan numerik yaitu metode Newton-Cotes.

Metode Newton-Cotes

Metode Newton-Cotes adalah metode menurunkan kaidah integrasi numerik. Ide dasarnya adalah menghampiri fungsi f(x) dengan polinom interpolasi $f_n(x)$ seperti pada persamaan 1.

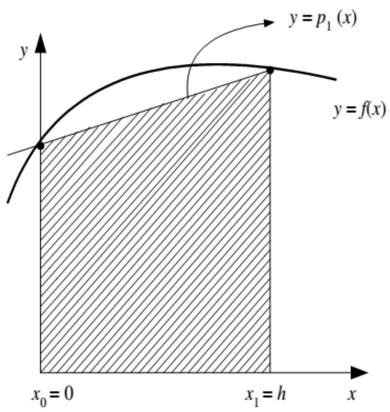
$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx \tag{1}$$

dengan $f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$. Untuk memperoleh rumus integral numerik, fungsi f(x) dapat diganti dengan fungsi interpolasi seperti deret Taylor, Newton forward, Lagrange dan lain-lain. Pada praktikum ini digunakan formulasi beda maju Newton.

Metode ini memiliki kelebihan yaitu mudah digunakan. Namun untuk n yang besar, metode ini kurang stabil, karena menggunakan jarak partisi yang sama serta belum memberikan derajat (akurasi) tertinggi. Terdapat beberapa aturan integrasi numerik yang diturunkan dari metode Newton-Cotes ini, diantaranya aturan trapesium dan aturan Simpson.

Aturan Trapesium

Interpolasi dari 2 titik (polinom ordo 1) menghasilkan interpolasi linear yang membentuk daerah trapesium seperti pada Gambar 1.



Gambar 1 Daerah trapesium dari interpolasi linear

Sehingga kaidah trapesium bernilai

$$\int_0^h f(x)\ dx \approx \tfrac{h}{2}(f_0 + f_1) \tag{2}$$

Persamaan 2, dapat dilakukan perluasan untuk mengaproksimasi nilai integral menjadi:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \tfrac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right) \tag{3}$$

Contoh 1:

Cari solusi integral berikut menggunakan aturan trapezoidal, jika diketahui N=8.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

Penyelesaian:

Diketahui, N=8 maka h=1/8=0.125. Kemudian hitung nilai f(x_i)

i	x_i	f(x_i)
0	0	1
1	0.125	0.888
2	0.25	0.8
3	0.375	0.7272
4	0.5	0.666
5	0.625	0.6153
6	0.75	0.571
7	0.875	0.533
8	1	0.5

Nilai-nilai tersebut kemudian disubstitusi ke persamaan 3.

$$I = \tfrac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right)$$

$I = \frac{0.125}{2}(1 + 2\,(0.888 + 0.8 + 0.272 + 0.66 + 0.6153 + 0.571 + 0.533) + 0.5)$

$I = \frac{0.125}{2}\,(11.101) = 0.6941218504$

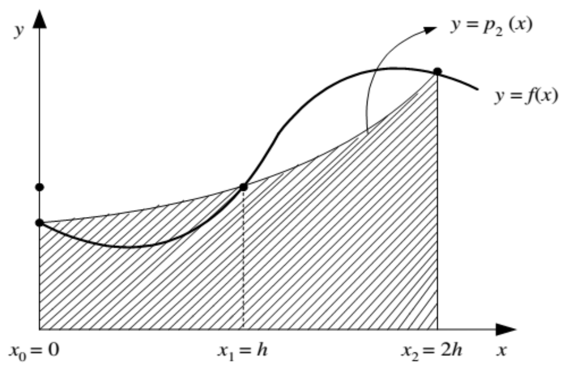
Aturan Simpson

Polinom berderajat lebih tinggi dapat menghasilkan hampiran nilai integrasi yang lebih baik. Misal, fungsi f(x) dihampiri dengan polinom interpolasi derajat 2 yang grafiknya berbentuk parabola. Maka luas daerah yang dihitung sebagai hampiran nilai integrasi adalah daerah di bawah parabola seperti pada Gambar 2. Untuk itu, dibutuhkan 3 titik data, misal (0,f(0)), (h,f(h)) dan (2h,f(2h)), maka aturan Simpson bernilai

$$I \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

Perluasan formula aturan Simpson untuk mengaproksimasi nilai:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f_i + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f_i + f_n\right)$$



Gambar 2 Polinom interpolasi derajat 2

Contoh 2:
Untuk Contoh 1, cari solusinya menggunakan aturan Simpson jika diketahui N=8.

Penyelesaian:
$I = \frac{0{,}125}{3}\,(1 + 4\,(0.888 + 0.7272 + 0.6153) + 2\,(0.8 + 0.666 + 0.571) + 0.5)$

$I = 0.04166\,(16.624) = 0.6931545307$

LAPORAN PENDAHULUAN

1. Jelaskan secara singkat mengapa kita membutuhkan integrasi numerik!
2. Apakah kelebihan dan kekurangan metode Newton-Cones untuk integrasi numerik?

3. Bagaimana proses integrasi numerik dengan aturan trapesium?
4. Bagaimana proses integrasi numerik dengan aturan Simpson?

MATERI PRAKTIKUM

1. Metode Newton-Cotes, aturan trapesium dan aturan Simpson
2. Buatlah program menggunakan R untuk aturan trapesium dan aturan Simpson untuk menyelesaikan contoh 1 dan 2.

DAFTAR PUSTAKA

1. Atkinson K. 1994. Elementary Numerical Analysis, Second edition. Wiley
2. Victor A. Bloomfield. 2014. *Using R for Numerical Analysis in Science and Engineering*. 1 edition. Chapman and Hall/CRC
3. Steven C. 2011. *Applied Numerical Methods W/MATLAB: for Engineers & Scientists*. 3 edition. McGraw-Hill