## PERTEMUAN 4

# DERET TAYLOR, MACLAURIN, DAN BINOMIAL SERTA IMPLEMENTASINYA DENGAN MENGGUNAKAN R

### TUJUAN PRAKTIKUM

Mahasiswa mampu memahami pemanfaatan Bahasa R untuk menjelaskan solusi dari problem-problem matematika komputasi terutama untuk Barisan dan Deret tak hingga untuk kasus Deret taylor, maclaurin dan binomial.

### TEORI PENUNJANG

**Teorema Ketunggalan**

Jika suatu fungsi mempunyai penyajian deret pangkat:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

untuk semua *x* dalam selang di sekitar *a*, maka koefisiennya ditentukan oleh:

$$c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Suatu fungsi tidak dapat digambarkan oleh lebih dari satu deret pangkat dari ($x - a$). Bentuk koefisien $c_n$ serupa dengan koefisien yang terdapat dalam *formulasi ekspansi taylor*. Oleh karena itu, deret pangkat dari ($x - a$) yang menggambarkan kombinasi linear dengan koefisien fungsi dinamakan ***deret Taylor***. Apabila ***a* = 0**, maka deret tersebut dinamakan ***deret McLaurin***.

**Deret taylor**

Bentuk umum deret taylor dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

**Contoh 1:**

Gunakan fungsi ***cosinus*** untuk mengaproksimasi cos(1.6) menggunakan deret **Taylor hingga suku ke-3** untuk $f(x) = \cos(x)$, di sekitar *x* pada = π/2 (**a diaproksimasi $\frac{3.14}{2}$ = 1.57**).

Dari informasi di atas diketahui bahwa ***f*(*x*) = cos(*x*)** dan **a= π/2.** Kemudian masukkan nilai tersebut ke dalam bentuk:

$$\frac{f^{(0)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^0}{0!} + \frac{f^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^1}{1!} + \frac{f^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}$$

Selanjutnya fungsi tersebut diturunkan dalam bentuk penurunan ($n = 0$ sampai $n = 2$) kemudian dievaluasi pada titik **x=π/2.**

**Definisi 1**: $f^0(a)$ adalah fungsi itu sendiri, pada kasus ini yaitu $cos(a)$ dan $a = \frac{\pi}{2}$

**Definisi 2**: 0! = 1

$$f^{(0)}(a) = cos(a) \rightarrow f^{(0)}(\pi/2) = cos(\pi/2) = 0$$

$$f^{(1)}(a) = -sin(a) \rightarrow f^{(1)}(\pi/2) = -sin(\pi/2) = -1$$

$$f^{(2)}(a) = -cos(a) \rightarrow f^{(2)}(\pi/2) = -cos(\pi/2) = 0$$

Dengan demikian deret Taylor dari fungsi tersebut adalah sebagai berikut:

$$\frac{0(1.6-\pi/2)^0}{0!} + \frac{-1(1.6-\pi/2)^1}{1!} + \frac{0(1.6-\pi/2)^2}{2!} = 0 - (1.6 - \pi/2) + 0 = -0.0292036732051034$$

Hasil $-0.0292036732051034$ tersebut merupakan aproksimasi dari $cos(1.6) = -0.029199522301$ (nilai sesungguhnya), dan dapat dituliskan dengan deret taylor dengan order 3 (dari $n = 0$ sampai $n = 2$) , $cos(1.6) \approx -0.0292036732051034$ (aproksimasi), dengan selisih aproksimasi (galat/*error*) adalah $|0.029203673205 - 0.029199522301| = 0.0584031955$.

Bagaimana jika diteruskan sampai dengan order 5 (dari $n = 0$ sampai $n = 2$)? Apakah hasil aproksimasinya akan lebih baik dengan galat yang lebih kecil?

Untuk menjustifikasi penghitungan di atas, kita dapat gunakan implementasi R dengan bantuan pustaka **DERIV** untuk hitung diferensiasi fungsi. Silahkan dapat mengunduh package tersebut terlebih dahulu dan gunakan library Pustaka tersebut

```
> install.packages("Deriv")
> library(Deriv)

# misalkan kita ingin menurunkan fungsi f(x) = cos(x), yaitu -sin(x)
# buat fungsi cos(x) di dalam R

> fx <- function(x){
        cos(x)
        }

> Deriv(fx)
function (x)
-sin(x)
```

Untuk fungsi $f(x) = x^4$

```
> fx <- function(x){
        x^4
        }

> Deriv(fx)
function (x)
4 * x^3
```

Selanjutnya lakukan implementasi ke script R untuk kasus pada contoh di atas. Pertama definisikan fungsi awal `cos(x)` ke dalam R:

```
fx <- function(x) {cos(x)}
```

Kemudian dengan bantuan pustaka Deriv, kita akan membuat turunan fungsi sesuai dengan order (turunan ke-) dengan bentuk rekursif berikut ini (ingat! Pelajaran struktur diskret mengenai konsep rekursifitas deklarasi fungsi di dalam fungsi):

```
# fungsi Diferensiasi dengan Order n
turunan <- function(fungsi, order=1){
  if(order == 1){
    Deriv(fungsi)
  }
  else {
    turunan(Deriv(fungsi), order-1)
  }
}
```

Misalnya untuk funsi $f(x) = x^4$, lihat hasilnya:

```
> ff <- function(x) x^4
> turunan(ff, 1)
> turunan(ff, 2)
> turunan(ff, 3)(2)
```

Selanjutnya kita akan mendefinisikan fungsi taylor dengan menggunakan konsep perulangan for-loop, dengan perulangan sebanyak 3 kali(menghitung turunan sebanyak 3 kali). Fungsi taylor ini menerima 4 parameter, yaitu:

`fungsi`: fungsi awal pada kasus ini adalah f(x) = cos(x)

`x`: nilai x yang dicari untuk fungsi fx, pada kasus ini adalah 1.6

`a`: titik yang dinilai disekitar x, pada kasus ini pi/2

`n`: order turunan pada fungsi taylor pada kasus ini 3

```
taylor <- function(fungsi,x,a,n){
  fx <- fungsi(a)
  for (i in 1:(n-1)){
    cn <- turunan(fungsi,i)(a)
    fx <- fx + (cn*(x-a)^i/factorial(i))
  } return(fx)
}
```

Coba hitung cos(x), dengan mendefinisikan variable x, a, dan n terlebih dahulu:

```
x = 1.6
a = pi/2
n = 3
> taylor(fx, x,a,n)
[1] -0.02920367
```

**Deret Maclaurin**

Bentuk umum deret Maclaurin dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

**Contoh 2**:

Gunakan deret cosinus untuk mengaproksimasi $sin(0.1)$, menggunakan deret McLaurin hingga suku ke-4 untuk $f(x) = sin(x)$. Selanjutnya fungsi tersebut diturunkan dalam bentuk penurunan ($n = 0\ sampai\ n = 3$).

**Definisi 1**: $f^{(0)}$ (a) adalah fungsi itu sendiri, pada kasus ini yaitu sin(a).

**Definisi 2**: 0! = 1.

$$f^{(0)}(a) = sin(a) \rightarrow f^{(0)}(0) = sin(0) = 0$$

$$f^{(1)}(a) = cos(a) \rightarrow f^{(1)}(0) = cos(0) = 1$$

$$f^{(2)}(a) = -sin(a) \rightarrow f^{(2)}(0) = -sin(0) = 0$$

$$f^{(3)}(a) = -cos(a) \rightarrow f^{(3)}(0) = -cos(0) = -1$$

Dengan demikian deret Taylor dari fungsi tersebut adalah sebagai berikut.

$0 + 0.1^1 + 0 - \frac{0.1^3}{6} = 0.0998333333333333$

Hasil tersebut merupakan aproksimasi dari $sin(0.1) \approx 0.0998333333333333$, dengan nilai sesungguhnya adalah : 0.099833416647.

Untuk implementasi R mclaurin dapat memodifikasi bentuk implementasi R dari deret taylor!

**Deret Binomial**

Untuk setiap bilangan nyata $p$ dan $x$ dengan $|x| < 1$ berlaku

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots$$

dengan

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}.$$

**Contoh 3**:

Gunakan teorema binomial untuk mengekspansi $(2x-3)^4$

$$(2x-3)^4 = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} (2x)^{4-i} (-3)^i$$

$$= 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$$

| MATERI PRAKTIKUM UNTUK MENCAPAI LEARNING OUTCOME |
|---|

1. Praktikan dapat mencobakan untuk mencari bentuk deret taylor, deret mclaurin, atau deret binomial dari suatu fungsi:
   a. Tentukan deret Taylor untuk $f(x) = \frac{1}{x^2}$ di sekitar $x = -1$
   b. Tentukan deret Taylor untuk $f(x) = x^3 + 10x^2 + 6$ di sekitar $x = 3$
   c. Tentukan deret Taylor untuk $f(x) = e^x \cos x$ di sekitar $x = 0$
   d. Hitung $\sqrt{1.02}$ dengan ketelitian sampai 5 desimal

2. Praktikan dapat menggunakan deret taylor/mclaurin/binomial untuk mengaproksimasi solusi dari fungsi:
   a. Gunakan $f(x) = x^3 + 10x^2 + 6$ untuk mengaproksimasi $f(0.9)$ menggunakan deret **Taylor hingga suku ke-3** di sekitar *x* pada = 3 (a=3)
   b. Gunakan $f(x) = \mathbf{e}^x \cos x$ untuk mengaproksimasi $f(1.9)$ menggunakan deret **Mclaurin hingga suku ke-5** di sekitar *x* pada = 0 (a=0)

3. Memahami dan menjelaskan pemanfaatan R untuk menjustifikasi nilai dari deret taylor dan deret mclaurin.

   Gunakan **implementasi script R** yang sudah dipelajari untuk mengevaluasi $f(0.9)$ dengan deret taylor untuk fungsi $f(x) = x^3 + 10x^2 + 6$.

| TUGAS PRAKTIKUM |
|---|

1. Tentukan deret Taylor untuk $f(x) = \frac{1}{x^4}$ di sekitar $x = 1$
2. Tentukan deret Taylor untuk $f(x) = e^x \sin x$ di sekitar $x = 0$
3. Gunakan teorema binomial untuk mengekspansi $(1+2x)^{3/2}$
4. Gunakan modifikasi implementasi kode R, untuk menghitung nilai $f(1.7)$ untuk soal nomor 2 $f(x) = e^x \sin x$

Mekanisme pengerjaan Tugas adalah sebagai berikut:

- Pengerjaan tugas berkelompok, anggota dan **pembagian kelompok ditetapkan oleh asisten**, dan **setiap pekan kelompok akan diacak**.

- Tugas di atas pengumpulannya dibuka mulai dari Jumat 8 September 2023 pukul 13.00 wib s.d minggu 10 September 23.59 wib (melalui **class.ipb.ac.id** dan dikumpulkan via **google form**

  https://forms.gle/8PMquv7XJ8wxraSW7
- Jumlah soal dalam penugasan bervariasi 3-4 nomor soal bergantung pada jumlah anggota kelompok (3-4). Jika jumlah anggota kelompok hanya 3 orang, maka **bebas memilih 3 dari 4 soal**
- **Strategi pengerjaan tugas: Wajib diskusi di zoom** untuk masing-masing nomor **dikerjakan per-orang**, atau bisa bersama-sama untuk menjawab pertanyaan dari penugasan yang diberikan.

  Sebagai contoh: 1 nomor sudah dicoba dicari jawabannya terlebih dahulu, kemudian di zoom dibahas bersama. Atau langsung membahas dan dikerjakan langsung di zoom dengan melihat slide kuliah, searching internet, atau video tutorial youtube (sumber informasi dan referensi untuk mengerjakan tugas dibebaskan asalkan tidak menjiplak/plagiat).

## DAFTAR PUSTAKA

1. Verberg *et al*. 2006. *Calculus*. 2 edition. Pearson Education Inc.
2. Victor A. Bloomfield. 2014. *Using R for Numerical Analysis in Science and Engineering*. 1 edition. Chapman and Hall/CRC