Metode Transformasi Peubah Acak Ganda 2

Peubah Acak Diskret

Misalkan p.a. Y_1 dan Y_2 mempunyai fmp $p_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$ untuk daerah S. Diketahui pula p.a. $U_1 = g_1(y_1,y_2)$ dan $U_2 = g_2(y_1,y_2)$ untuk daerah T.

- $U_1 = g_1(y_1,y_2) \rightarrow Y_1 = g_1^{-1}(u_1,u_2)$
- $U_2 = g_2(y_1,y_2) \rightarrow Y_2 = g_2^{-1}(u_1,u_2)$

Fmp bagi U_1 dan U_2

$$p_{U_1,U_2}(u_1,u_2) = \begin{cases} p_{Y_1,Y_2}\left(g_1^{-1}(u_1,u_2), g_2^{-1}(u_1,u_2)\right) & ;(u_1,u_2) \in T \\ 0 & ;(u_1,u_2)\ lainnya \end{cases}$$

Peubah Acak Kontinu

Misalkan p.a. Y_1 dan Y_2 mempunyai fkp $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$ untuk daerah S. Diketahui pula p.a. $U_1 = g_1(y_1,y_2)$ dan $U_2 = g_2(y_1,y_2)$ untuk daerah T.

- $U_1 = g_1(y_1,y_2) \rightarrow Y_1 = g_1^{-1}(u_1,u_2)$
- $U_2 = g_2(y_1,y_2) \rightarrow Y_2 = g_2^{-1}(u_1,u_2)$

Fkp bagi U_1 dan U_2

$$f_{U_1,U_2}(u_1,u_2) = \begin{cases} f_{Y_1,Y_2}\left(g_1^{-1}(u_1,u_2), g_2^{-1}(u_1,u_2)\right)|J| & ;(u_1,u_2) \in T \\ 0 & ;(u_1,u_2)\ lainnya \end{cases}$$

Dengan J adalah Jacobi

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1^{-1}(u_1,u_2)}{\partial u_1} & \dfrac{\partial g_1^{-1}(u_1,u_2)}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial g_2^{-1}(u_1,u_2)}{\partial u_1} & \dfrac{\partial g_2^{-1}(u_1,u_2)}{\partial u_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Metode Fungsi Pembangkit Momen

Peubah Tunggal

Misalkan p.a. X mempunyai FPM $M_X(t)$. Diketahui p.a $Y = h(x)$, maka

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left(e^{t(h(x))}\right)$$
$$= E\left(e^{g(t)X}\right) = M_X(g(t))$$

Fmp/fkp bagi Y diidentifikasi dari FPM bagi Y (jika ada).

Peubah Ganda

Misalkan p.a. $X_1,\dots,X_n$ mempunyai FPM $M_{X_1,\dots,X_n}(t)$. Diketahui p.a $Y_i = h_i(x_1,\dots,x_n), i = 1,2,\cdots,p$, maka

$$M_{Y_1,\dots,Y_p}(t_1,\dots,t_p) = E(e^{t_1Y_1+\cdots+t_pY_p})$$
$$= E\left(e^{t_1(h_1(x_1,\dots,x_n))+\cdots+t_p(h_p(x_1,\dots,x_n))}\right)$$
$$= E\left(e^{(g_1(t_1,\dots,t_p))X_1+\cdots+(g_n(t_1,\dots,t_p))X_n}\right)$$
$$= M_{X_1}\left(g_1(t_1,\dots,t_p)\right) \times \cdots \times M_{X_n}\left(g_n(t_1,\dots,t_p)\right)$$

Fmp/fkp bersama bagi $Y_i = h_i(x_1,\dots,x_n), i = 1,2,\cdots,p$ diidentifikasi dari FPM bagi $Y_i = h_i(x_1,\dots,x_n), i = 1,2,\cdots,p$ (jika ada).

Statistik Tataan

Definisi:

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ merupakan contoh acak dari suatu sebaran yang mempunyai fmp/fkp $f_X(x)$ untuk $a < x < b$. Misalkan Y_1 adalah yang terkecil dari X_i, kemudian Y_2 adalah urutan terkecil kedua dari X_i, ..., dan Y_n adalah yang terbesar dari X_i sedemikian rupa sehingga

$$Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_n$$

Maka Y_i, $i = 1,2,\cdots,n$, disebut sebagai statistik tataan (*order statistic*) ke-i dari contoh acak $X_1, X_2, \dots, X_n$. Notasi lain dari statistik tataan bagi contoh acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ atau $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

- Minimum dari X_i yaitu: $Y_1 = min\,(X_1, X_2, \dots, X_n)$
- Maksimum dari X_i yaitu: $Y_n = max\,(X_1, X_2, \dots, X_n)$
- Fungsi kepekatan peluang bersama dari $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ adalah

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = n!\, f(y_1) f(y_2) \dots f(y_n) = n!\,[f_x(x)]^n$$

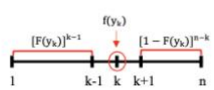
dimana $a < y_1 < y_2 \dots < y_n < b$

- Fungsi kepekatan peluang marginal salah satu statistik tataan Y_k adalah

$$g_k(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}[F(y_k)]^{k-1} f(y_k)[1 - F(y_k)]^{n-k}$$

dimana $a < y_k < b$

konsep:



Maka fungsi kepekatan peluang marginal $Y_1 = min\,(X_i)$ dan $Y_n = max\,(X_i)$ adalah

$$g_1(y_1) = nf(y_1)[1 - F(y_1)]^{n-1}, a < y_1 < b$$
$$g_n(y_n) = n[F(y_n)]^{n-1} f(y_n) \quad , a < y_n < b$$

Latihan Soal

Soal 1

Misalkan p.a X mempunyai fkp sebagai berikut

$$f(x) = 2e^{-x}, x \geq 0$$

Sedangkan X_1 dan X_2 merupakan contoh acak saling bebas dan identik dari fkp tersebut. Tentukan fkp $Y = \frac{X1}{X1+X2}$

Soal 2

Diketahui X~Gamma(2,4). Tentukan fungsi kepekatan peluang dari $Z = \frac{X}{2}$

Soal 3

Jika diketahui $X_1, X_2, \dots, X_7 \sim \exp(\theta)$. Tentukan fkp untuk

a. $X_{(4)}$
b. X *maksimum*

Soal 4

Diketahui peubah acak X menyatakan waktu kedatangan antara dua panggilan telepon (menit) dan X menyebar seragam(0,20). Jika terdapat 5 panggilan telepon, tentukan fungsi kepekatan peluang untuk M dengan M adalah median contoh!

Soal 5

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_7 \overset{bsi}{\sim}$ Eksponensial (β). Tentukan fungsi kepekatan peluang untuk

a. $X_{(3)}$ dan nilaitengahnya,
b. Nilai maksimum $X_{(7)}$.

Contoh Dua Untuk Peubah Acak Tunggal

1. Peubah acak X mempunyai fungsi kepekatan peluang :

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{untuk} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{untuk} \quad x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Tentukan fungsi kepekatan peluang untuk peubah acak $Y = X^3$

Fungsi sebaran Y yaitu

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^3 \le y) = P(X \le y^{1/3})$$
$$= \int_0^{y^{\frac{1}{3}}} 6x(1-x)\, dx = \int_0^{y^{\frac{1}{3}}} (6x - 6x^2)\, dx$$
$$= (3x^2 - 2x^3)\Big|_{x=0}^{x=y^{\frac{1}{3}}} = 3y^{\frac{2}{3}} - 2y$$

Daerah fungsi sebaran peubah acak Y adalah

$D_{F_X} : 0 \le x \le 1$ maka $0 \le x^3 \le 1$ sehingga $D_{F_Y} : 0 \le y \le 1$.

Fungsi sebaran peubah acak Y adalah :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{untuk} \quad y < 0 \\ 3y^{\frac{2}{3}} - 2y & \text{untuk} \quad 0 \le y < 1 \\ 1 & \text{untuk} \quad y > 1 \end{cases}$$

Fungsi kepektan peluang pebah acak Y diperoleh dengan mendiferensialkan $F_Y(y)$ dan diperoleh :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y^{-\frac{1}{3}} - 2 & \text{untuk} \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{untuk} \quad y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Contoh Peubah Acak Ganda

Peubah acak Z_1, Z_2 bebas stokastik identik menyebar Normal (0,1)

Tentukan fungsi kepekatan peluang $Y = Z_1^2 + Z_2^2$

Fungsi kepekatan peluang bersama Z_1, Z_2 adalah

$$f_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z_1^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z_2^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-(z_1^2+z_2^2)}{2}} \quad \text{untuk } 0 < z1 < \infty \text{ dan } 0 < z2 < \infty$$

Fungsi sebaran peubah acak Y

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Z_1^2 + Z_2^2 \le y) = \iint_{z_1^2+z_2^2 \le y} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2)}\, dz_1\, dz_2$$

(diselesaikan dengan transformasi ke koordinat polar yaitu $z_1^2 + z_1^2 = r^2 \rightarrow \begin{cases} z_1 = r\sin\theta \\ z_2 = r\cos\theta \end{cases}$

$$|J| = \left\| \begin{matrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{matrix} \right\| = \left|-r\sin^2\theta - r\cos^2\theta\right| = \left|-r(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\right| = |-r| = r\,)$$

sehingga $F_Y(y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{r^2}{2}} r\, dr\, d\theta$ (diselesaikan dengan $w = \frac{r^2}{2}$ dengan $dw = r\, dr$ dan

batas $r = \sqrt{y}$ maka batas $r = \sqrt{y} \rightarrow w = \frac{y}{2}$

maka $F_Y(y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{y}{2}} \frac{1}{2\pi} e^{-w}\, dw\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2\pi} e^{-w}\Big|_{w=0}^{w=\frac{y}{2}}\right) d\theta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y}{2}} + \frac{1}{2\pi}\right) d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\left(1 - e^{-\frac{y}{2}}\right) d\theta = -\frac{1}{2\pi}\left(1 - e^{-\frac{y}{2}}\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(1 - e^{-\frac{y}{2}}\right) 2\pi = \left(1 - e^{-\frac{y}{2}}\right)$$

Fungsi kepekatan peluang pebah acak Y diperoleh dengan mendiferensialkan $F_Y(y)$ dan diperoleh :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} & \text{untuk} \quad y > 0 \\ 0 & \text{untuk} \quad y \text{ lainnya} \end{cases}$$

$f_Y(y)$ merupakan sebaran Eksponensial (λ=2) atau Gamma (α=1, β=2) atau $\chi^2_{(2)}$

Contoh dengan Peubah Acak Tunggal

. Peubah acak X mempunyai fungsi kepekatan peluang :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{untuk} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{untuk} \quad x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Tentukan fungsi kepekatan peluang $Y = 3X - 1$.

Fungsi $Y = 3X - 1$ merupakan fungsi yang monoton naik dengan fungsi kebalikannya adalah $X = \frac{Y+1}{3}$

Daerah fungsi sebaran peubah acak Y adalah :

$D_{f_X} : 0 \le x \le 1$ maka $-1 \le 3x - 1 \le 2$ sehingga $D_{f_Y} : -1 \le y \le 2$

Turunan pertama peubah acak Y terhadap X adalah $\frac{dx}{du} = \frac{1}{3}$

Sehingga fungsi kepekatan peubah acak Y adalah

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y+1}{3}\right)\left|\frac{dx}{dy}\right| = 2\left(\frac{y+1}{3}\right)\frac{1}{3}$$

Secara lengkap fungsi kepekatan peubah acak Y adalah

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2(y+1)}{9} & \text{untuk} \quad -1 \le y \le 2 \\ 0 & \text{untuk} \quad y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Metode Fungsi Pembangkit Momen

Peubah Tunggal

Misalkan p.a. X mempunyai FPM $M_X(t)$. Diketahui p.a $Y = h(x)$, maka

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{tY}) = E\left(e^{t(h(x))}\right) \\ &= E\left(e^{g(t)X}\right) = M_X(g(t)) \end{aligned}$$

Fmp/fkp bagi Y diidentifikasi dari FPM bagi Y (jika ada).

Peubah Ganda

Misalkan p.a. $X_1, \dots, X_n$ mempunyai FPM $M_{X_1,\dots,X_n}(t)$. Diketahui p.a $Y_i = h_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, 2, \cdots, p$, maka

$M_{Y_1,\dots,Y_p}(t_1, \dots, t_p) = E(e^{t_1Y_1+\cdots+t_pY_p})$

$= E\left(e^{t_1(h_1(x_1,\dots,x_n))+\cdots+t_p\left(h_p(x_1,\dots,x_n)\right)}\right)$

$= E\left(e^{\left(g_1(t_1,\dots,t_p)\right)X_1+\cdots+\left(g_n(t_1,\dots,t_p)\right)X_n}\right)$

$= M_{X_1}\left(g_1(t_1, \dots, t_p)\right) \times \cdots \times M_{X_n}\left(g_n(t_1, \dots, t_p)\right)$

Fmp/fkp bersama bagi $Y_i = h_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, 2, \cdots, p$ diidentifikasi dari FPM bagi $Y_i = h_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, 2, \cdots, p$ (jika ada).

Statistik Tataan

Definisi:

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ merupakan contoh acak dari suatu sebaran yang mempunyai fmp/fkp $f_X(x)$ untuk $a < x < b$. Misalkan Y_1 adalah yang terkecil dari X_i, kemudian Y_2 adalah urutan terkecil kedua dari X_i, ..., dan Y_n adalah yang terbesar dari X_i sedemikian rupa sehingga

$$Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_n$$

Maka Y_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, disebut sebagai statistik tataan (*order statistic*) ke-i dari contoh acak $X_1, X_2, \dots, X_n$. Notasi lain dari statistik tataan bagi contoh acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ atau $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

- Minimum dari X_i yaitu: $Y_1 = min\,(X_1, X_2, \dots, X_n)$
- Maksimum dari X_i yaitu: $Y_n = max\,(X_1, X_2, \dots, X_n)$

- Fungsi kepekatan peluang bersama dari $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ adalah

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = n!\, f(y_1)f(y_2) \dots f(y_n) = n!\, [f_x(x)]^n$$

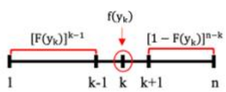
dimana $a < y_1 < y_2 \dots < y_n < b$

- Fungsi kepekatan peluang marginal salah satu statistik tataan Y_k adalah

$$g_k(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}[F(y_k)]^{k-1}f(y_k)[1 - F(y_k)]^{n-k}$$

dimana $a < y_k < b$

konsep:



Maka fungsi kepekatan peluang marginal $Y_1 = min\,(X_i)$ dan $Y_n = max\,(X_i)$ adalah

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= nf(y_1)[1 - F(y_1)]^{n-1}, a < y_1 < b \\ g_n(y_n) &= n[F(y_n)]^{n-1}f(y_n) \quad, a < y_n < b \end{aligned}$$

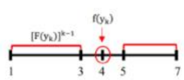
Contoh 1

Jika diketahui $X_1, X_2, \dots, X_7 \sim \exp(\theta)$. Tentukan fkp untuk

a. $X_{(4)}$
b. $X\ maksimum$

Jawab:

a. X_4



$$\begin{aligned} g_4(x) &= \frac{7!}{(4-1)!\,(7-4)!}[F(x)]^{4-1}f(x)[1 - F(x)]^{7-4} \\ &= \frac{7!}{3!\,3!}\left[1 - e^{-x/\theta}\right]^3\left[\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\right]\left[1 - (1 - e^{-x/\theta})\right]^3 \\ &= \frac{105}{\theta}\left[1 - e^{-x/\theta}\right]^3\left[e^{-4x/\theta}\right] \end{aligned}$$

b. $X_{(n)} = X_{(7)}$

$$\begin{aligned} g_7(x) &= \frac{7!}{(7-1)!\,(7-7)!}[F(x)]^{7-1}f(x)[1 - F(x)]^{7-7} \\ &= \frac{7!}{6!\,0!}\left[1 - e^{-x/\theta}\right]^6\left[\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\right]\left[1 - (1 - e^{-x/\theta})\right]^0 \\ &= \frac{7}{\theta}\left[1 - e^{-x/\theta}\right]^6\left[e^{-x/\theta}\right] \end{aligned}$$

Contoh 2

Diketahui peubah acak X menyatakan waktu kedatangan antara dua panggilan telepon (menit) dan X menyebar seragam(0,20). Jika terdapat 5 panggilan telepon, tentukan fungsi kepekatan peluang untuk M dengan M adalah median contoh!

Jawab:

Fkp bagi X adalah

$$f(x) = \frac{1}{20}, 0 < x < 20$$

Fungsi sebaran kumulatif bagi X adalah

$$F(x) = \frac{1}{20}x, 0 < x < 20$$

Jika terdapat 5 panggilan, maka n=5 dan median pada saat $M = X_{(3)}$

Formula umumnya sbb:

$$g_k(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}[F(y_k)]^{k-1}f(y_k)[1 - F(y_k)]^{n-k}$$

Maka

$$\begin{aligned} g_3(x) &= \frac{5!}{(3-1)!\,(5-3)!}[F(x)]^{3-1}f(x)[1 - F(x)]^{5-3} = \frac{5!}{2!\,2!}\left|\frac{1}{20}x\right|^2\frac{1}{20}\left[1 - \frac{1}{20}x\right]^2 \\ &= \frac{3}{2}\frac{1}{400}x^2\left[1 - \frac{2}{20}x + \frac{1}{400}x^2\right] = \frac{3}{800}x^2\left[1 - \frac{1}{10}x + \frac{1}{400}x^2\right]; 0 < x < 20 \end{aligned}$$

Sehingga

$$f(m) = \frac{3}{800}m^2\left[1 - \frac{1}{10}m + \frac{1}{400}m^2\right]; 0 < m < 20$$

Contoh 3

Diketahui peubah acak X menyebar Gamma dengan alpha=2 dan beta=β. Tentukan FKP dari $Z = 2X/\beta$

- Fungsi pembangkit momen dari X adalah $M_X(t) = E(e^{tx}) = \frac{1}{(1-\beta t)^2}$
- Fungsi pembangkit momen dari Z adalah:

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = E\left(e^{t\left(\frac{2X}{\beta}\right)}\right) = E\left(e^{\left(\frac{2t}{\beta}\right)x}\right) = \frac{1}{\left(1 - \beta\left(\frac{2t}{\beta}\right)\right)^2} = \frac{1}{(1-2t)^2}$$

$M_Z(t)$ adalah fungsi pembangkit momen dari sebaran $Gamma(\alpha = 2, \beta = 2)$ atau $\chi^2_{(v=4)}$, maka $Z \sim Gamma(\alpha = 2, \beta = 2) = \chi^2_{(db=4)}$

Contoh 4

Peubah acak X_1, X_2 bebas stokastik menyebar $N(0,1)$. Tentukan FKP bersama dari $Y = X_1 + X_2$ dan $Y_2 = X_1 - X_2$

- Fungsi pembangkit momen X_i adalah $M_{X_i}(t_i) = e^{\frac{t_i^2}{2}}$ untuk $i = 1,2$.
- Fungsi pembangkit momen Y_1, Y_2 adalah:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{Y_1,Y_2}(t_1, t_2) &= \boldsymbol{E}\left[e^{t_1Y_1+t_2Y_2}\right] = \boldsymbol{E}\left[e^{t_1(X_1+X_2)+t_2(X_1-X_2)}\right] \\ &= \boldsymbol{E}\left[e^{X_1(t_1+t_2)+X_2(t_1-t_2)}\right] = \boldsymbol{E}\left[e^{X_1(t_1+t_2)}\right]\boldsymbol{E}\left[e^{X_2(t_1-t_2)}\right] = \boldsymbol{M}_{X_1}(t_1 + t_2)\boldsymbol{M}_{X_2}(t_1 - t_2) \\ &= \left(e^{\frac{(t_1+t_2)^2}{2}}\right)\left(e^{\frac{(t_1-t_2)^2}{2}}\right) = e^{\frac{1}{2}(t_1^2+2t_1t_2+t_2^2-2t_1t_2+t_2^2)} = e^{\frac{2(t_1)^2}{2}+\frac{2(t_2)^2}{2}} = \left(e^{\frac{2(t_1)^2}{2}}\right)\left(e^{\frac{2(t_2)^2}{2}}\right) \end{aligned}$$

$e^{\frac{2(t_1)^2}{2}}$ dan $e^{\frac{2(t_2)^2}{2}}$ masing-masing merupakan fungsi pembangkit momen sebaran $N(0,2)$, maka fungsi kepakatan bersama Y_1, Y_2 adalah

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{2}\right)}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_2^2}{2}\right)}\right) = \frac{1}{4\pi}e^{\frac{-(y_1^2+y_2^2)}{4}}$$

Definisi: PDF Marginal Salah Satu Statistik Tataan

Misalkan Y_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$, merupakan statistik tataan ke-i dari sampel acak bebas dan identik $X_1, X_2, \dots, X_n$. Fungsi kepekatan peluang marginal salah satu statistik tataan, misalnya Y_k, yaitu

$$g_k(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}[F(y_k)]^{k-1}[1 - F(y_k)]^{n-k}f(y_k),\ a < y_k < b$$

Contoh

Misalkan $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ merupakan statistik tataan dari sampel acak berukuran 4 dari sebaran yang memiliki fungsi kepekatan peluang (pdf):

$$f(x) = 2x,\ 0 < x < 1$$

Tentukan peluang $P(Y_3 > 1/2)$.

Pembahasan:

Karena $F(x) = x^2$ untuk $0 < x < 1$, maka

$$g_3(y_3) = \frac{4!}{(2!)(1!)}(y_3^2)^2(1 - y_3^2)^1(2y_3),\ 0 < y_3 < 1$$

$$P(Y_3 > 1/2) = \int_{1/2}^{1} g_3(y_3)\, dy_3 = 243/256$$

Contoh

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah peubah acak yang menyebar acak dan identik sebagai $U(0, 1)$. Jika didefinisikan suatu peubah acak $Z = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, tentukan fungsi kepekatan peluang bagi Z.

Pembahasan:

Peubah acak Z merupakan statistik tataan, yaitu $Z = Y_n$, sehingga berdasarkan Teorema di atas dapat dinyatakan bahwa:

$$\begin{aligned} g_n(y_n) &= \frac{n!}{(n-1)!(n-n)!}[F(y_n)]^{n-1}[1 - F(y_n)]^{n-n}f(y_n) \\ &= n[F(y_n)]^{(}n-1)f(y_n);\ 0 < y_n < 1 \end{aligned}$$

Karena $f(x) = 1,\ 0 < x < 1$, maka,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x 1\ dx = x \\ g_n(y_n) &= n[F(y_n)]^{n-1}f(y_n) \\ &= n[y_n]^{n-1} \cdot 1 \\ &= n(y_n)^{n-1},\ 0 < y_n < 1 \end{aligned}$$

Jadi, fungsi kepekatan peluang peubah acak $Z = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$f(z) = n(z)^{n-1},\ 0 < z < 1$$

Contoh acak $X_1, \dots, X_n$ bersifat bebas stokastik identik (*independent and identically distributed/iid*) dengan fungsi massa (atau kepekatan) peluang $f(x_i|\theta)$. Maka $f(x_1, \dots x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$.

Contoh Acak dari Peubah Acak Normal

Teorema 1

Misalkan $X_1, \dots, X_n$ dengan $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ bebas stokastik untuk $i = 1, \dots, n$. Misalkan $a_1, \dots, a_n$ suatu konstanta dinamakan faktor pembobot (penimbang), maka sebaran dari kombinasi linear $Y = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i$ adalah sebaran normal dengan nilai tengah $\mu_Y = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i$ dan ragam $\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2$

Corollary 1

a. Jika $\mu_i = \mu$ dan $\sigma_i^2 = \sigma^2$, maka $Y = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i \sim N(\mu_Y = \mu\sum_{i=1}^{n} a_i, \sigma_Y^2 = \sigma^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2)$

b. Jika $\mu_i = \mu$, $\sigma_i^2 = \sigma^2$ dan $a_i = \frac{1}{n}$, maka $Y = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

Dari corollary 1(b), jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ maka $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ sehingga transformasi Z baku adalah

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Jumlah Kuadrat dari Peubah Acak Normal

Misalkan $X_1, \dots, X_n \overset{bsi}{\sim} N(\mu_i, \sigma_i^2)$, maka jumlah kuadratnya $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)^2/\sigma_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$. Namun jika $\mu_i = \mu$, $\sigma_i^2 = \sigma^2$, maka jumlah kuadratnya berubah menjadi$\sum_{i=1}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)}$

Sebaran Khi-Kuadrat

- Sebaran Khi-kuadrat digunakan dalam banyak masalah inferensia, misalnya, dalam masalah inferensia untuk ragam.
- Fungsi kepekatan peluang Khi-kuadrat:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)2^{v/2}} y^{v/2}e^{-y/2}, & untuk\ y \geq 0 \\ 0, & untuk\ x < 0 \end{cases}$$

- Merupakan kasus khusus dari sebaran gamma dengan $\alpha = \frac{n}{2}\ dan\ \beta = 2$.
- Fungsi pembangkit momen dari sebaran Khi-kuadrat adalah $(1 - 2t)^{-n/2}$
- μ=n dan $\sigma^2 = 2n$ (rataannya sama dengan derajat bebas dan ragamnya dua kali derajat bebas)

Teorema 2

Misalkan $X_1, \dots, X_k$ bebas stokastik menyebar χ^2 dengan derajat bebas masing-masing $n_1, \dots, n_k$. Maka $V = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \chi^2_{(n_1,\dots,n_k)}$

Teorema 3

Jika $X_1, \dots, X_n \overset{bsi}{\sim} N(\mu_i, \sigma_i^2)$, maka:

- $\frac{n(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{db=1}$
- $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{db=n-1}$

Sebaran t

- Misalkan peubah acak $X_1, \dots, X_n \overset{bsi}{\sim} N(\mu_i, \sigma_i^2)$
- Jika σ diketahui, maka $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma \sim N(0,1)$.
- Pada umumnya σ tidak diketahui, maka diganti dengan simpangan baku contoh S. Jika ukuran contohnya besar, bisa menerapkan Teorema Limit Pusat dan memperoleh bahwa $s \approx \sigma$ dan $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/s$ dapat didekati dengan sebaran $N(0,1)$
- Namun, jika ukuran contoh acak kecil, maka sebaran dari $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/s$ mempunyai sebaran t-student.

Definisi

Misalkan peubah acak X dan Z bersifat bebas stokastik. $X \sim \chi^2_{(v)}$ dan $Z \sim N(0,1)$ maka

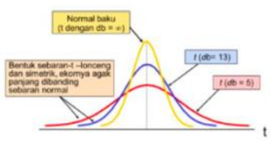
$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{v}}}$$

Mempunyai sebaran t-student dengan derajat bebas r dan dinotasikan $T \sim T_{(r)}$

Fungsi kepekatan T adalah

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \quad untuk - \infty < t < \infty$$

Nilai tengah sebaran-t adalah $\mu_T = 0$ dan ragamnya adalah $\sigma_T^2 = \frac{v}{v-2}$ dengan $v \geq 2\ atau\ n \geq 3$.



Gambar 1 Ilustrasi sebaran-t untuk n = 5, dan 13

- Sebaran-t cenderung ke sebaran normal baku bila derajat bebas cenderung tak terbatas. Sebaran normal baku memberikan hampiran yang baik pada sebaran-t untuk ukuran contoh 30 atau lebih.

Teorema 4

Misalkan peubah acak $\bar{X}$ dan S^2 adalah rataan dan ragam dari contoh acak berukuran n dari populasi yang menyebar normal yang mempunyai rataan μ dan ragam σ^2 maka

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

Sebaran F

Sebaran F dapat digunakan untuk mengetahui apakah ragam kedua populasi sama atau tidak, berdasarkan nilai amatan dari contoh acak dari dua populasi.

Definisi

Misalkan peubah acak X dan Y bersifat bebas stokastik. $X \sim \chi^2_{(m)}$ dan $Y \sim \chi^2_{(n)}$ maka

$$F = \frac{X/m}{Y/n} \sim F_{(m,n)}$$

Fungsi kepekatan adalah:

$$f(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} v^{\frac{m}{2}-1}\left(1 + \frac{m}{n}v\right)^{-\frac{m+n}{2}} \quad untuk\ 0 < v < \infty$$

Nilai harapan sebaran F adalah $\left(\frac{n}{m}\right)m\left(\frac{1}{n-2}\right) = \frac{n}{n-2}$ untuk $n \geq 3$

Ragam dari sebaran F adalah $\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$

Soal 5

Diketahui $X_1, \dots, X_n$ adalah contoh acak dari distribusi eksponensial dengan parameter θ. Buktikan bahwa peubah acak $2\theta^{-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i) \sim \chi^2_{(2n)}$

Latihan Soal

Soal 1

Suatu mesin pengisi sirup dapat diatur sehingga mengeluarkan rata-rata μ ml per botol. Misalkan peubah acak X menyatakan isi sirup pada setiap botol. Berdasarkan hasil amatan, diketahui bahwa isi yang dikeluarkan oleh mesin menyebar Normal dengan σ = 20 ml. Berapa banyak ukuran contoh, jika diinginkan $\overline{X}$ berada dalam 10 ml dari μ dengan peluang 0.95?

Jawab:

Diketahui

$\sigma = 20$

$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n} = \frac{400}{n}\right)$

$P(|\overline{X} - \mu| \leq 10) = 0.95$

$\Leftrightarrow P(-10 \leq \overline{X} - \mu \leq 10) = 0.95$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{-10}{\sqrt{400/n}} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{400/n}} \leq \frac{10}{\sqrt{400/n}}\right) = 0.95$

$\Leftrightarrow P(-0.5\sqrt{n} \leq Z \leq 0.5\sqrt{n}) = 0.95$

Dari Tabel sebaran normal diketahui: $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$

$0.5\sqrt{n} = 1.96$ sehingga $n = \left(\frac{1.96}{0.5}\right)^2 = 15.3664$

Dalam prakteknya tidak mungkin ukuran contoh merupakan bilangan pecahan sehingga bisa dibulatkan ke 15 atau 16, namun peluangnya tidak persis sama dengan 0.95.

Soal 2

Suatu perusahaan biskuit ingin mengetahui keragaman pada biskuit dalam kemasan yang berukuran 80 gram. Dari pengalaman masa lalu, diketahui bahwa $\sigma^2 = 4$. Ahli statistik perusahaan memutuskan untuk mengambil contoh 20 kemasan dari jalur produksi dan menghitung ragam pada contoh. Diasumsikan bahwa amatan pada contoh berasal dari populasi normal, tentukan nilai m dan n sedemikian agar $P(m \leq S^2 \leq n) = 0.9$

Jawab:

Berdasarkan Teorema 3 bahwa $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{db=n-1}$ dengan $n = 20$

$$P(m \leq S^2 \leq n) = P\left(\frac{(n-1)m}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)n}{\sigma^2}\right) = P\left(\frac{19m}{4} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \frac{19n}{4}\right)$$

$\frac{19m}{4} = \chi^2_{0.05(19)} = 10.117 \Rightarrow m = \frac{10.117(4)}{19} = 2.129$

$\frac{19n}{4} = \chi^2_{0.95(19)} = 30.143 \Rightarrow n = \frac{30.143(4)}{19} = 6.346$

Jadi, $P(2.129 \leq S^2 \leq 6.346) = 0.9$

Soal 3

Misalkan contoh acak $X_1, \dots, X_8$ berasal dari sebaran $N(\mu = 1, \sigma^2 = 2)$. Tentukan bilangan positif a dan b sehingga $P(S^2 < a) = 0.9$.

Jawab:

Berdasarkan Teorema 3 bahwa $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{db=n-1}$ dengan $n = 8$

$$P(S^2 < a) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)a}{\sigma^2}\right) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{7a}{2}\right)$$

$3.5a = \chi^2_{0.9(7)} = 12.017 \Rightarrow a = \frac{12.217}{3.5} = 3.491$

Sehingga $P(S^2 < 3.491) = 0.9$

Soal 4

Waktu kegagalan dari sebuah oven mempunyai distribusi eksponensial dengan fkp:

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}, t > 0$$

Jika empat contoh oven dipilih dan $\bar{x}$ menyatakan rata-rata waktu kegagalan, tentukan distribusi dari $\bar{X}$!

Jawab:

$f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow X \sim \exp(\theta = 2)$

$M_X(t) = \frac{1}{1 - 2t}$

Misalkan $Y = \bar{X} = \frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left(e^{\frac{1}{4}t(X_1+X_2+X_3+X_4)}\right) = E\left(e^{\frac{1}{4}tX_1}\right)E\left(e^{\frac{1}{4}tX_2}\right)E\left(e^{\frac{1}{4}tX_3}\right)E\left(e^{\frac{1}{4}tX_4}\right)$$

$$= \left[E\left(e^{\frac{1}{4}tX}\right)\right]^4 = \left[M_X\left(\frac{1}{4}t\right)\right]^4 = \left[\frac{1}{1 - \frac{2}{4}t}\right]^4 \longrightarrow Y = \bar{X} \sim Gamma(4{,}0.5)$$

Catatan:

FPM gamma= $(1 - \beta t)^{-\alpha}$

Soal 5

Diketahui $X_1, \dots, X_n$ adalah contoh acak dari distribusi eksponensial dengan parameter θ. Buktikan bahwa peubah acak $2\theta^{-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i) \sim \chi^2_{(2n)}$

Jawab

Akan dibuktikan $Y = 2\theta^{-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i) \sim \chi^2_{(2n)}$

Dengan menggunakan fungsi pembangkit momen, diperoleh

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left(e^{t\left(2\theta^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right)}\right) = \left[E\left(e^{2\theta^{-1}t}\right)\right]^n = [M_X(2\theta^{-1}t)]^n = \left[\frac{1}{1 - \theta(2\theta^{-1}t)}\right]^n$$

$$= \left[\frac{1}{1 - 2t}\right]^n$$

Sehingga $Y \sim Gamma(n, 2) = \sim \chi^2_{(2n)}$

Catatan:

Sebaran khi kuadrat merupakan kasus khusus dari sebaran gamma dengan $\alpha = \frac{n}{2}\ dan\ \beta = 2$.