PERTEMUAN 14

TEKNIK NUMERIK UNTUK PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

TUJUAN PRAKTIKUM

Mahasiswa mampu menerapkan metode Euler dan Runge-Kutta menggunakan Program R.

TEORI PENUNJANG

Masalah Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Persamaan diferensial (PD) adalah persamaan yang melibatkan suatu fungsi yang tidak diketahui dan turunannya. Biasanya digunakan pada pemodelan matematika di berbagai bidang terapan. PDB adalah persamaan diferensial yang hanya mempunyai satu peubah bebas. Peubah bebas ini biasanya disimbolkan dengan *x*. Berikut adalah contoh dari PDB

(ii) $\frac{dx}{dy} = x + y$

(iii) $y' = x^2 + y^2$

(iv) $y''' = y\,cosx - 3y = \sin sin\,2x$

(v) $2y - 23y = 1 - y''$

Bentuk baku PDB orde satu adalah $y'=f(x,y)$ dengan nilai awal $y(x_0)=y_0$. Kadang ditulis dengan dy/dx. PDB yang tidak mengikuti bentuk baku harus ditulis ulang menjadi persamaan baku. Hal ini dilakukan agar PDB tersebut dapat diselesaikan secara numerik.

Contoh 1

Ubahlah PDB berikut menjadi bentuk baku PDB orde 1

$2y' + xy = 100\,; y(0) = 1$

Penyelesaian

Bentuk baku: $y' = \frac{(100-xy)}{2}; y(0) = 1$

contoh lain

$2y' - xy = 100x \qquad y(0) = 1$

$2\frac{dy}{dx} - xy = 100x$

$2\frac{dy}{dx} = 100x + xy$

$2\frac{dy}{dx} = (100 + y)x$

$\int \frac{2}{100+y}\, dy = \int x\, dx$

$2 \ln(100+y) = \frac{x^2}{2} + c$

$\ln(100+y) = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{2}$

$e^{\ln(100+y)} = e^{(\frac{x^2}{4} + c)}$

$100 + y = e^{\frac{x^2}{4} + c}$

$y = e^{(\frac{x^2}{4} + c)} - 100$

$y = e^{\frac{x^2}{4}} . e^{c} - 100$

$y = c . e^{\frac{x^2}{4}} - 100$

$y(0) = 1$

$y(x_0) = y_0$

$1 = c . e^{0} - 100$

$1 = c - 100$

$c = 101$

$y = c . e^{\frac{x^2}{4}} - 100$

$y = 101 . e^{\frac{x^2}{4}} - 100$

Metode Euler

Metode Numerik ini adalah metode umum untuk menurunkan rumus-rumus solusi PDB. Misal, diberikan PDB

$y'(x) = f(x, y)$ dengan kondisi awal $y(x_0) = y_0$

Misalkan $y_r = y(x_r)$, $r = 0, 1, ..., n$ adalah hampiran nilai y di x_r yang dihitung dengan metode euler, dalam hal ini: $x_r = x_0 + rh$ dan $r = 0, 1, ..., n$

Maka secara iteratif, hampiran numerik terhadap Solusi PDB dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + hf(x_r, y_r) \text{ atau } y_{r+1} = y_r + hf_r$$

dengan , $r = 0, 1, ..., n$

Metode Euler ini diperoleh dengan menguraikan y_{r+1} di sekitar x_r sebagai berikut:

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)}{1!}\, y'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!}\, y''(x_r) + \ \ldots$$

Bila persamaan tersebut dipotong sampai suku orde tiga, diperoleh

$$y(x_{r+1}) \approx \ y(x_r) + \ \frac{(x_{r+1} - x_r)}{1!}\, y'(x_r) \ + \ \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!}\, y''(t) \ \ , x_r < t < x_{r+1}$$

Berdasarkan bentuk baku,

$$y'(x_r) = f(x_r, y_r) \quad \text{dan} \qquad x_{r+1} - x_r = h$$

maka persamaan diatas dapat ditulis menjadi:

$$y(x_{r+1}) \approx y(x_r) + hf(x_r, y_r) + O(h^2)$$

atau dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$y_{r+1} \ \approx \ y_r \ + hf(x_r, y_r) \ + \ O(h^2)$$

Contoh 2

Diketahui PDB

dy/dx = ½ x - ½ y ; $y(0) = 1$

Tentukan $y(0.50)$ dengan metode euler (h = 0.25).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \quad ; y(0) = 1$$

$a: x_0 = 0 \ , \ y_0 = 1$

$b = 0{,}5 \ , \ h = 0{,}25$

$x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 1$

$x_1 = 0{,}25 \rightarrow y_1 = y_0 + 0{,}25\left(\frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{2}y_0\right)$

$= 1 + 0{,}25\left(\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot 1\right)$

$= 0{,}875$

$x_2 = 0{,}5 \rightarrow y_2 = y_1 + 0{,}25\left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_1\right)$

$= 0{,}875 + 0{,}25\left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}25 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}875\right)$

$= 0{,}7969$

$y(0{,}5) \approx 0{,}7969$

Penyelesaian.. (Dikerjakan saat praktikum)

Metode Heun

Metode Euler mengandung dua macam galat, yaitu galat pemotongan (truncation error) dan galat kumulatif (cumulative error).

Galat pemotongan dapat langsung ditentukan dari persamaan:

$$E_p \approx \frac{1}{2} h^2 y''(t) = O(h^2)$$

Jika diperhatikan Perhatikan bahwa nilai pada setiap langkah (y_r) dipakai lagi pada langkah berikutnya (y_{r+1}). Hal ini berimplikasi Galat solusi pada langkah ke-r adalah tumpukan galat dari langkah-langkah sebelumnya. Galat yang terkumpul pada akhir langkah ke-r ini disebut **galat longgokan** (*cumulative error*). Jika langkah dimulai dari $x_0 = a$ dan berakhir di $x_n = b$ maka total galat yang terkumpul pada solusi akhir (y_n) adalah:

$$E_{total} = \sum_{r=1}^{n} (1/2) h^2 y''(t) = n \frac{h^2}{2} y''(t) = \frac{(b-a)}{2h} h^2 y''(t) = \frac{(b-a)}{2} y''(t) h$$

Jadi, galat longgokan sebanding dengan O(h). Ini berarti metode Euler memberikan hampiran solusi yang kurang baik, sehingga dalam praktek metode ini kurang disukai, namun metode ini membantu untuk memahami gagasan dasar metode penyelesaian PDB dengan orde yang lebih tinggi.

Metode Euler mempunyai ketelitian yang rendah karena galatnya besar (sebanding dengan h). Buruknya galat ini dapat dikurangi dengan menggunakan metode Heun, yang merupakan perbaikan metode Euler (*modified Euler's method*). Pada metode Heun, solusi dari metode Euler dijadikan sebagai solusi perkiraan awal (*predictor*). Selanjutnya, solusi perkiraan awal ini diperbaiki dengan metode Heun (*corrector*).

Persamaan Heun:

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{2} \left[f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y_{r+1}) \right]$$

Dalam persaman di atas, suku ruas kanan mengandung y_{r+1}. Nilai y_{r+1} ini adalah solusi perkiraan awal (*predictor*) yang dihitung dengan metode Euler.

Karena itu, persamaan Heun dapat ditulis sebagai

Predictor : $y_{r+1}^{(0)} = y_r + hf(x_r, y_r)$

Corrector : $y_{r+1} = y_r + \frac{h}{2}\left[f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y_{r+1}^{(0)})\right]$

atau ditulis dalam satu kesatuan,

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{2}\left[f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y_r + hf(x_r, y_r))\right]$$

Contoh 3
Diketahui PDB

$dy/dx = ½\, x - ½\, y$; $y(0) = 1$

Tentukan $y(0.50)$ dengan metode **Heun** (h = 0.25).

•) $x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 1$

•) $x_1 = 0.25 \rightarrow y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0.875$ (dari contoh metode euler)

$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(0)})\right]$

$= 1 + \frac{0.25}{2}\left[\left(\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(1)\right) + \left(\frac{1}{2}(0.25) - \frac{1}{2}(0.875)\right)\right]$

$= 0.898438$

•) $x_2 = 0.5 \rightarrow y_2^{(0)} = 0.797$

$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(0)})\right]$

$= 0.898438 + \frac{0.25}{2}\left[\left(\frac{1}{2}(0.25) - \frac{1}{2}(0.898438)\right) + \left(\frac{1}{2}(0.5) - \frac{1}{2}(0.797)\right)\right]$

$= 0.839398$

Penyelesaian.. (Dikerjakan saat praktikum)

LAPORAN PENDAHULUAN

1. Apa itu PDB?
2. Bagaimana bentuk umum PDB?
3. Jelaskan apa perbedaan dan persamaan dari mengenai metode Euler dan Metode Heun untuk solusi PDB?
4. Apakah kekurangan metode Heun untuk Solusi PDB, dan kenapa Metode Heun dianggap dapat mengatasi kekurangan tersebut?

TUGAS PRAKTIKUM

1. Tentukan bentuk baku dari masing-masing bentuk PDB di bawah ini, dan hitung nilai untuk $\boldsymbol{y(0) = 1}$ untuk masing-masing PDB
   a) $y'' + 5y' + 6y = 0$
   b) $2yy'=x+1$
   c) $y'+y/x=x+5$
   d) $y'+2y/x=0$

2. Pilih 2 soal dari pertanyaan nomor 1 untuk diselesaikan dengan menggunakan metode Euler dan Heun. Gunakan nilai **y(0)=1** yang sudah didapatkan dan secara iterative dan rekursif untuk mendapatkan nilai y=f(0.1) dengan ukuran langkah h = 0.05. Selanjutnya bandingkan dengan hasil perhitungan yang **didapat secara manual.**