Fungsi Massa Peluang

Fungsi massa peluang (fmp): suatu fungsi (dari peubah acak diskret) yang memberikan nilai peluang $p(x_i)$ pada saat peubah acak X bernilai x_i:

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

Fmp memenuhi:

1. $0 < p(x_i) < 1$
2. $\sum_i p(x_i) = 1$

Fungsi Kepekatan Peluang

- **Fungsi kepekatan peluang** (fkp) dari peubah acak kontinu: suatu fungsi yang dapat diintegralkan, yang digunakan untuk peluang peubah acak dalam suatu selang.
- Notasi fkp peubah acak X: $f(x)$
- $f(x)$: turunan pertama dari fungsi sebaran kumulatif $F(x)$
- Peluang pada p.a. kontinu = luas di bawah kurva
- Pada peubah acak kontinu, karena $F(x_0) = P(X \leq x_0)$, maka

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Fkp memenuhi:

1. $f(x) \geq 0$ untuk x dalam $D_{f(x)}$
2. $\int_{\forall x} f(x)dx = 1$
3. $f(x) = 0$ untuk x yang tidak ada pada $D_{f(x)}$

Fungsi Sebaran Kumulatif

Fungsi sebaran kumulatif (notasi: $F(x_0)$): nilai peluang X kurang atau sama dengan x_0.

$$F(x_0) = P(X \leq x_0)$$

$$F(x) = \sum_{X \leq x} P(x)$$

diskret

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

kontinu

Sifat-sifat fungsi sebaran kumulatif :

- $F(x) \geq 0$
- $0 \leq F(x) \leq 1$
- Fungsi monoton tak turun

Nilai Harapan=Titik Keseimbangan=Rataan

Nilai Harapan dari peubah acak X **didefinisikan** sebagai berikut:

- Jika X p.a. diskret

$$\mu_X = E(X) = \sum_{\forall x} xP(X = x)$$

- Jika X p.a. kontinu

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

Nilai Harapan fungsi dari peubah acak: Misalkan $g(X)$ adalah fungsi dari p.a. X, maka nilai harapan dari $g(X)$ adalah

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{\forall x} g(x)P(X = x) & jika\ X\ diskret \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx & jika\ X\ kontinu \end{cases}$$

Ragam

Ragam dari peubah acak X **didefinisikan** sebagai berikut:

- Jika X p.a. diskret

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \sum_x (x - \mu)^2 P(x)$$

- Jika X p.a. kontinu

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\,dx$$

Alternatif formula nilai **ragam** suatu sebaran:

$$\sigma^2 = E(X^2) - (\mu)^2$$

Simpangan baku p.a. diskret/kontinu:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Sifat Nilai Harapan dan Ragam

Misalkan a dan b adalah suatu konstanta

Nilai Harapan:

- $E(a) = a$
- $E(aX) = aE(X)$
- $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$
- $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

Ragam:

- $Var(a) = 0$
- $Var(aX) = a^2 Var(X)$
- $Var(aX \pm b) = a^2 Var(X)$
- $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X,Y)$

Momen

Momen ke-*k* dari p.a. X didefinisikan sebagai:

$$\mu'_k = E[X^k], \quad k = 1,2,3,\cdots$$

Momen pusat ke-k dari p.a. X didefinisikan sebagai:

$$\mu^k = E[(X - \mu)^k], \quad k = 2,3,4,\cdots$$

Kemiringan (skewness): momen ketiga yang dibakukan terhadap rataan, digunakan mengukur **kesimetrikan** suatu fungsi sebaran terhadap rataannya

$$a_3 = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{\mu^3}{\mu_2^{3/2}}$$

- Jika $a_3 = 0$ → sebaran simetrik terhadap rataannya
- Jika $a_3 > 0$ → sebaran mempunyai ekor yang panjang di bagian ekor kanan
- Jika $a_3 < 0$ → sebaran mempunyai ekor yang panjang di bagian ekor kiri

Kurtosis: momen keempat yang dibakukan terhadap rataan, digunakan untuk mengukur **lancip atau landainya** suatu fungsi sebaran disbanding sebaran normal.

$$a_4 = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{\mu^4}{\mu_2^2}$$

- Kurtosis **positif** → sebaran memiliki sedikit pengamatan di ekor sebaran
- Kurtosis **negatif** → sebaran memiliki banyak pengamatan di ekor sebaran
  - Leptokurtik: sebaran dengan ekor yang relatif panjang
  - Platokurtik: sebaran dengan ekor yang relatif pendek
  - Mesokurtik: sebaran dengan kurtosis yang sama dengan sebaran normal ($a_4 = 3$)

Fungsi Pembangkit Momen (FPM)

Fungsi pembangkit momen p.a. X didefinisikan sebagai:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_{\forall x} e^{tX} f(x) & jika\ X\ diskret \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x)\,dx & jika\ X\ kontinu \end{cases}$$

Sifat FPM:

1. $M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$
2. $M_{aX}(t) = M_X(at)$
3. Jika $X_1, \cdots, X_n$ merupakan p.a. bebas stokastik dengan FPM masing-masing $M_{X_1}(t), \cdots, M_{X_n}(t)$ dan $Y = X_1 + \cdots + X_n$ → $M_Y(t) = M_{X_1}(t) + \cdots + M_{X_n}(t)$

Ringkasan sebaran peubah acak diskret

Sebaran	Fungsi massa peluang	Nilai-tengah	ragam	Fungsi pembangkit momen
Seragam	$p(x) = \frac{1}{n}$ untuk $y = 1,2,\cdots n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{e^t}{n}\left(\frac{e^{tn}-1}{e^t-1}\right)$
Bernoulli	$p(x) = \begin{cases} p & ,x=1 \\ q = 1-p & ,x=0 \end{cases}$	p	pq	$pe^t + q$
Binomial	$p(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ untuk $x = 0, 1,2, \dots, n$	np	npq	$(pe^t + q)^n$
Geometrik	$p(X = x) = q^{x-1}p$ untuk $x = 1,2, \cdots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-qe^t}$
Binomial negatif	$p(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$ untuk $x = r, (r+1), \cdots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$
Poisson	$p(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ untuk $x = 0,1,2, \cdots$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
Hipergeometrik	$p(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ untuk $x = 0,1, \cdots, \min(n, K)$	$n\left(\frac{K}{N}\right)$	$n\left(\frac{K}{N}\right)\left(\frac{N-K}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N}\right)$	Tidak perlu

Sebaran Seragam Diskret

Ciri-ciri: Peubah acak yang memiliki **nilai peluang yang sama** dengan selang antara a dengan b.

Sebaran Bernoulli

Ciri-ciri

- Sebuah percobaan terdiri dari satu ulangan (trial).
- Hasilnya terdiri atas dua: sukses dan gagal.
- Peluang "sukses" adalah p $(0 < p < 1)$ dan q peluang "gagal", dengan $p + q = 1$
- Nilai peubah acak: $y = 1$ untuk kejadian sukses dan $y = 0$ jika kejadiannya gagal

Sebaran Binomial

Ciri-ciri

- Percobaan terdiri dari n ulangan identik
- Setiap ulangan menghasilkan dua hasil: gagal atau sukses
- Ulangan bersifat bebas (hasil satu ulangan tidak dipengaruhi ulangan lainnya)
- Peluang sukses, p, bernilai sama untuk setiap ulangan

Sebaran Poisson

Ciri-ciri

- Memodelkan peristiwa langka (peluang p kecil) dengan jumlah kejadian yang diharapkan atau rata-rata (μ) diketahui.
- Sering digunakan untuk memodelkan kejadian dengan karakteristik dalam waktu atau ruang

Sebaran Hipergeometrik

Ciri-ciri: Generalisasi populasi terbatas untuk sebaran Binom

Populasi: N	→	Contoh : n
Sukses : K		Sukses : y
Gagal : N-K		Gagal : n-y

Sebaran Geometrik

Ciri-ciri: memodelkan banyaknya ulangan Bernoulli yang diperlukan sampai **kejadian sukses pertama muncul**

Sebaran Binomial Negatif

Ciri-ciri: memodelkan banyaknya ulangan Bernoulli yang diperlukan sampai diperoleh **hasil sukses sebanyak r kali, dengan ulangan terakhir sukses** (perluasan dari sebaran Geometrik)

6. SEBARAN MULTINOMIAL

- Sebaran multinomial merupakan generalisasi dari sebaran binomial.
- Pada multinomial hasil percobaan lebih dari dua.
- Misalkan hasil percobaannya ada tiga dengan peluang masing-masing sebesar p_1, p_2, dan p_3 dan $p_1 + p_2 + p_3 = 1$
- Formula umum untuk 3 hasil:

$$P(X = x, Y = y, Z = z) = \frac{n!}{x!\ y!\ z!} p_1^x p_2^y (1 - p_1 - p_2)^z$$

Ilustrasi:

Misalkan dalam suatu seminar dipilih secara acak 8 orang dari peserta yang terdiri dari 50% bekerja sebagi PNS, 30% dari BUMN, dan 20% dari swasta.

- Tentukan peluang terpilihnya 4 orang PNS, 3 orang BUMN, dan 1 swasta.

$$P(X = 4, Y = 3, Z = 1) = \frac{8!}{4!\,3!\,1!}(0.5)^4(0.3)^3(0.2)^1$$