

1 INTRODUCTION

Le but de cette manipulation est d'illustrer la modélisation d'un système non linéaire par linéarisation autour d'un point de fonctionnement et de mettre en œuvre les techniques d'analyse et de synthèse de lois de commande sur un modèle de représentation d'état.

Les fonctionnalités de MATLAB et de MATLAB-SIMULINK seront exploitées au mieux lors de la séance de Travaux Pratiques.

2 PRESENTATION DU PROCEDE TROIS BACS D'EAU

2.1 Le procédé

Le système représenté sur la figure 1 est composé de trois bacs cylindriques en plexiglas de section S . Ces trois bacs sont disposés en série (de gauche à droite, on trouve les bacs numéro 1, numéro 3 et numéro 2) et sont reliés par des tuyaux d'écoulement de section S_n . Le dernier bac (numéro 2) se vide par un cylindre – également de section S_n – dans un réservoir situé sous les bacs.

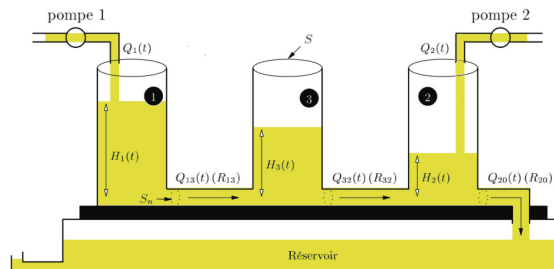


FIGURE 1 – Procédé trois bacs

Deux pompes de débit $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$ permettent de remplir respectivement les bacs numéro 1 et numéro 2 avec l'eau récupérée dans le réservoir, le système fonctionnant en circuit fermé.

Lors de cette manipulation, nous allons nous intéresser à la régulation de niveau d'eau dans les bacs. Les niveaux, notés $H_1(t)$, $H_3(t)$ et $H_2(t)$ ne peuvent excéder la valeur de $0,6m$.

Les valeurs données par le constructeur sont : $S = 0,0154m^2$ et $S_n = 5.10^{-5}m^2$.

Une armoire de commande, reliée au procédé, permet de commander (en tension) les deux pompes et de mesurer (en tension) les trois hauteurs d'eau dans les bacs par l'intermédiaire de capteurs de niveau ; ces capteurs sont basés sur la mesure de la pression dans les bacs.

L'armoire de commande est à son tour pilotée par une carte DSPACE (type DS1102) équipée de Convertisseurs Analogique-Numérique et Numérique-Analogique, ainsi que de processeurs DSP (*Digital Signal Processing*) ; cette carte est interfacée avec SIMULINK.

2.2 Actionneurs et capteurs

2.2.1 Actionneurs des pompes

Les pompes peuvent être alimentées par une tension dans l'intervalle $[-10V + 10V]$. Le débit (exprimé en m^3/s) en fonction de la tension appliquée sur la pompe est supposé linéaire dans cet intervalle. Un identification a conduit à la caractéristique reportée sur la figure numéro 2.

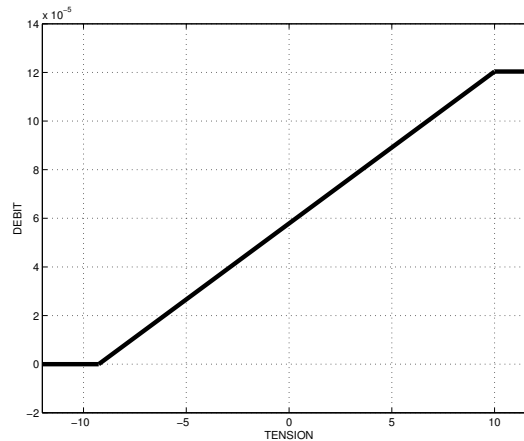


FIGURE 2 – Caractéristique des actionneurs des pompes

Les pompes obéissent à la relation :

$$V_{qi}(t) = k Q_i(t) + b \quad \text{avec} \quad k = 1,6.10^5 \quad \text{et} \quad b = -9.2592$$

où $V_{qi}(t)$ et $Q_i(t)$ représentent respectivement la tension appliquée à la pompe i et le débit correspondant.

Nous noterons $Q_{max} = 12.10^{-5} m^3/s$ le débit maximal que peuvent fournir les pompes lorsque la tension appliquée est de +10V.

2.2.2 Les capteurs de niveau d'eau

Les capteurs de niveau, basés sur la mesure de la pression dans les bacs, sont légèrement sensibles aux variations climatiques. Afin de réaliser la partie mise en œuvre dans de bonnes conditions, il convient de réaliser une identification de leurs caractéristiques avant de procéder à la commande réelle.

Nous supposons toutefois que les trois capteurs sont linéaires dans la zone de fonctionnement (autour du point de fonctionnement) qui sera décrite plus loin. La caractéristique de chacun des capteurs sera modélisée par l'équation :

$$H_i(t) = k_i V_{hi}(t) + b_i.$$

$H_i(t)$ sera exprimé en mètres ; les paramètres k_i et b_i seront identifiés pour chaque bac.

3 L'ETAPE DE MODELISATION

3.1 Lois de la physique pour un système d'écoulement

Un système d'écoulement entre deux bacs reliés par un tuyau de section S_n obéit à la loi de Torricelli :

$$q = a_z S_n \sqrt{2g |\bar{h}|} \text{sign}(\bar{h})$$

où q représente le débit, \bar{h} la différence de niveau entre les deux bacs et g l'accélération terrestre. Le coefficient a_z , appelé coefficient d'écoulement, a une valeur réelle comprise entre 0 et 1.

En posant $a = a_z S_n \sqrt{2g}$, l'expression de q se simplifie comme suit :

$$q = a \sqrt{|\bar{h}|} \text{sign}(\bar{h}) \quad (1)$$

La résistance R d'un flux de liquide (ou restriction d'écoulement) est définie comme étant la variation $\delta\bar{h}$ sur \bar{h} nécessaire à une variation unitaire de débit entre les deux bacs considérés. Elle s'écrit donc

$$R = \frac{\delta\bar{h}}{\delta q}$$

et s'exprime en s/m^2 .

La dérivation de q par rapport à \bar{h} est immédiate dans l'équation 1 :

$$R = \frac{2\sqrt{|\bar{h}|}}{a}$$

3.2 Modélisation du procédé trois bacs

3.2.1 Notation

Nous considérons le procédé trois bacs avec les débits d'entrées variables $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$ vérifiant $0 \leq Q_i(t) \leq Q_{max}$, $i = 1, 2$.

Les différentes hauteurs $H_1(t)$, $H_3(t)$ et $H_2(t)$ respectent par conséquent l'inégalité $H_1(t) \geq H_3(t) \geq H_2(t) \geq 0$.

Nous noterons a_{zij} le coefficient d'écoulement entre le bac i et le bac j (j prendra la valeur 0 pour spécifier qu'il s'agit du réservoir). De la même manière, nous noterons respectivement a_{ij} , R_{ij} et $Q_{ij}(t)$ les coefficients de l'équation 1, les résistances d'écoulement et les débits considérés entre deux bacs voisins.

Un logiciel, fourni avec le procédé, nous a permis d'identifier les trois coefficients d'écoulement : $a_{z13} = 0.4753$, $a_{z32} = 0.4833$ et $a_{z20} = 0.9142$.

3.2.2 Equations différentielles – Linéarisation

1. A partir de l'équation de Torricelli, donner les trois équations différentielles qui régissent les hauteurs $H_1(t)$, $H_3(t)$ et $H_2(t)$ dans les différents bacs en fonction des coefficients a_{ij} , des niveaux $H_i(t)$, des débits d'entrée $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ et de la section des S des bacs.
2. Ecrire ces équations au point d'équilibre forcé pour une commande constante $Q_1(t) = Q_{10}$, $Q_2(t) = Q_{20}$. A ce point d'équilibre, nous noterons $H_1(t) = H_{10}$, $H_3(t) = H_{30}$ et $H_2(t) = H_{20}$. Déterminer le point d'équilibre lorsque $Q_{10} = 3.10^{-5}$ et $Q_{20} = 0.5.10^{-5}$.

Nous souhaitons travailler sur des légères variations autour du point d'équilibre H_0 ; nous noterons par des lettres minuscules les variations des signaux autour de ce point de telle sorte que :

$$\begin{cases} Q_1(t) = q_1(t) + Q_{10} \\ H_1(t) = h_1(t) + H_{10} \\ H_3(t) = h_3(t) + H_{30} \\ H_2(t) = h_2(t) + H_{20} \end{cases}$$

1. Que deviennent les équations différentielles autour du point d'équilibre sous l'hypothèse $h_1(t) \geq h_3(t) \geq h_2(t)$?

Montrer que pour de faibles variations autour de ce point, nous pouvons obtenir un modèle linéaire en utilisant l'approximation :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{1 + \varepsilon} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ecrire les équations différentielles linéaires de $h_1(t)$, $h_3(t)$ et $h_2(t)$ en fonction de $q_1(t)$, de S et des restrictions R_{ij} d'écoulement.

En considérant $y(t) = h_1(t)$ la sortie du système, montrer que la représentation d'état du système autour du point d'équilibre s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{SR_{13}} & \frac{1}{SR_{13}} & 0 \\ \frac{1}{SR_{13}} & -\frac{1}{S} \left(\frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{32}} \right) & \frac{1}{SR_{32}} \\ 0 & \frac{1}{SR_{32}} & -\frac{1}{S} \left(\frac{1}{R_{32}} + \frac{1}{R_{20}} \right) \end{bmatrix} h(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} h(t) \end{cases} \quad (2)$$

avec $h(t) = [h_1(t) \quad h_3(t) \quad h_2(t)]^T$.

De manière conventionnelle, les matrices dynamique, de commande et d'observation seront notées A , B et C .

4 Analyse du procédé autour du point d'équilibre H_0

4.1 Stabilité, commandabilité et observabilité

On considère le modèle autour de l'état d'équilibre H_0 représenté dans l'espace d'état par les équations 2.

1. Montrer que le vecteur d'état d'équilibre $h(t) = 0$ du système en fonctionnement autonome ($q_1(t) = 0, q_2(t) = 0$) est asymptotiquement stable. A partir des considérations physiques sur le procédé réel, indiquer pourquoi ce résultat était prévisible.
2. Le modèle (2) est-il commandable avec une entrée, les deux entrées ?
3. Déterminer les indices de commandabilité pour le système à deux entrées.
4. Les résultats obtenus vous semblent-ils cohérents ?

5. Que pensez vous de la modélisation proposée ? Vous semble-t-elle assez précise pour les objectifs que nous nous fixons ?
6. En faisant abstraction des contraintes physiques du système (saturation, ...), a-t-on le choix des valeurs propres du système asservi par un retour d'état ? Justifier votre réponse.
7. Déterminer le grammien de commandabilité et conclure sur la commandabilité du système à deux entrées.
8. Déterminer une loi de commande permettant de faire passer le système des conditions initiales à une condition finale exprimée à l'aide de la sortie $h_r(t) = 3cm$ en moins de $5sec$.

4.2 Etude de la Fonction de transfert

1. Déterminer la matrice de fonction de transfert.
2. Calculer les pôles du système en utilisant la forme de Smith-Mac Millan. On pourra à cet effet utiliser l'environnement de calcul formel de Matlab mupad.
3. Le système est-il stable entrée-sortie ?
4. Quelle est la valeur des zéros.
5. Déterminer la valeur du gain statique.

On notera π_1 , π_2 et π_3 les pôles du système ; π_1 sera le pôle dominant et π_3 le pôle le plus rapide.

1. Donner les valeurs de π_1 , π_2 et π_3 en justifiant votre réponse. Le système est-il stable entrée-sortie ?
2. Que peut-on dire en terme de caractéristiques temporelles (temps de réponse, temps de montée, dépassement) pour chacune des fonctions de transfert lorsque une commande de type échelon de débit ($q_1(t) = q_{10}$, $q_2(t) = q_{20}$) est appliquée sur le procédé initialement au repos. Tracer et commenter les réponses $h_1(t)$, $h_3(t)$ et $h_2(t)$ pour $q_{10} = 5.10^{-5}$ et $q_{20} = 2.10^{-5}$.

5 Asservissement du procédé

On s'intéresse à la commande du niveau d'eau dans le bac numéro 1.

5.1 Cahier des charges

Les spécifications désirées sur le système sont :

1. le temps de réponse t_r de la sortie doit respecter $t_r \leq 90s$,
2. l'erreur doit être nulle en régime permanent,
3. le système doit rester dans le cadre d'une étude linéaire, c'est à dire que les vannes ne doivent pas saturer : $0 \leq Q_1(t), Q_2(t) \leq Q_{max}$.

La consigne, notée $w(t)$, est un échelon de niveau exprimé en m . On pose $w(t) = 0,05 \mathcal{U}(t)$.

5.2 Première approche par retour d'état - méthode de Bass-Gura

La première commande que nous souhaitons étudier est un retour d'état utilisant la méthode de Bass-Gura.

1. Déterminer les valeurs propres désirées du système en boucle fermée.
2. On choisit un gain $K = qk$ de rang 1. Choisissez un vecteur q permettant de satisfaire les propriétés de commandabilité. Avons nous plusieurs possibilités ?
3. Déterminer le gain k permettant d'assurer les spécifications souhaitées.
4. En déduire le gain du pré-compensateur N permettant d'assurer une erreur de position nulle.
5. Simuler la réponse et vérifier que les spécifications sont respectées. Relevez également les caractéristiques temporelles.
6. Simuler plusieurs choix du paramètre q . Obtient-on les mêmes caractéristiques temporelles ?
7. Montrer que asservir le système à l'aide de la première pompe uniquement correspond à un choix particulier de q .

On souhaite utiliser uniquement la seconde pompe pour réaliser l'asservissement.

1. Décrivez brièvement votre méthode.
2. Discutez de la validité du modèle utilisé.

5.3 Seconde approche par retour d'état - Mise sous forme commandable par blocs

1. Calculer la matrice de commandabilité C_0 .
2. A l'aide la matrice C_0 , calculer la matrice C_{0b} .
3. En déduire la matrice P , la matrice de changement de base permettant de calculer la forme compagne par blocs.
4. Déterminer la forme compagne de commande par blocs.
5. Déterminer la matrice R qui diagonalise par bloc la matrice de commande.
6. Déterminer la matrice de retour d'état \tilde{K} permettant d'obtenir les valeurs propres désirées en boucle fermée.
7. En déduire la valeur du gain de retour d'état dans la base initiale.
8. Déterminer le gain matricielle du pré-compensateur N permettant d'assurer une erreur de position nulle.
9. Simuler la réponse et vérifier que les spécifications sont respectées. Relevez également les caractéristiques temporelles.
10. Comparer les deux résultats, la méthode avec une seule entrée et celle avec deux entrées.
11. Comparer votre méthode avec la méthode proposée par Matlab (commande *place*).