Omówienie – zestaw 5.[1]

Ad. 1. Losowa sieć przepływowa

Sieć przepływowa G jest digrafem, którego każda krawędź (u, v) ma przypisaną nieujemną **przepustowość** $c(u, v)$ (z ang. *capacity*). W sieci przepływowej dwa wierzchołki są szczególnie wyróżnione: wierzchołek **źródła**, oznaczany często literą s (ang. *source*), oraz **ujście** t (ang. *sink*, t – skrót od *target*). Każdy z pozostałych wierzchołków leży na ścieżce z s do t. Na krawędzie sieci przepływowej jest nałożonych kilka dodatkowych warunków:

- nie może istnieć krawędź wchodząca do źródła,
- nie może istnieć krawędź wychodząca z ujścia,
- żadna krawędź nie może być pętlą,
- może istnieć tylko jedna krawędź (u, v),
- jeśli w sieci istnieje krawędź (u, v), to w sieci nie może być krawędzi skierowanej przeciwnie, tj. krawędzi (v, u).

Dla każdej z krawędzi sieci definiujemy jeszcze jeden parametr: **przepływ** $f(u, v)$ (ang. *flow*), który może przyjmować dowolne wartości, o ile spełniają dwa warunki:

- **warunek przepustowości**:
$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v), \tag{1}$$
- **warunek zachowania przepływu**:
$$\sum_v f(v, u) = \sum_v f(u, v) \text{ dla każdego wierzchołka } u \notin \{s, t\}. \tag{2}$$

Sieć przepływowa może symbolizować sieć elektryczną, telefoniczną, komputerową, drogową lub sieć transportową danego produktu, itd. Na przykład: wierzchołek źródła s symbolizuje producenta maseczek ochronnych w Chinach, natomiast ujściem t jest Szpital Uniwersytecki w Krakowie. Pozostałe wierzchołki są punktami przeładunkowymi/magazynami. Krawędź (u, v) oznacza kanał transportu między punktami u i v o **przepustowości** $c(u, v)$ (np. maksymalnie tyle kontenerów z maseczkami można przetransportować danym kanałem). Liczbę kontenerów z maseczkami, które faktycznie są transportowane danym kanałem, określa **przepływ** $f(u, v)$ przez tę krawędź.

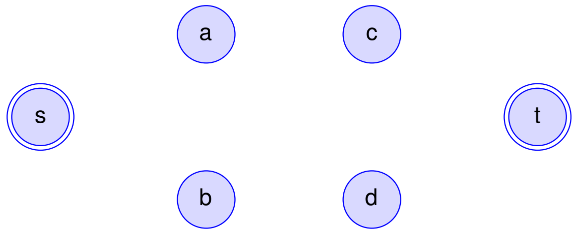
Z tą wiedzą łatwo jest zrozumieć wymienione wcześniej warunki, nałożone na przepływ. Nierówność (1) mówi, że daną krawędzią nie może przepłynąć więcej jednostek (np. kontenerów maseczek), niż pozwala na to przepustowość. Z kolei wzór (2) oznacza, że do każdego punktu pośredniego powinno wpływać tyle jednostek, ile z niego wypływa dalej.

Wartością przepływu $|f|$ nazywamy sumę przepływów wszystkich krawędzi wychodzących ze źródła/wchodzących do ujścia (z warunku zachowania przepływu wynika, że muszą być równe):

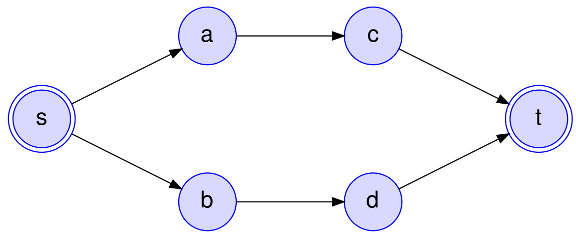
$$|f| = \sum_v f(s, v) = \sum_v f(v, t). \tag{3}$$

[1] W razie jakichkolwiek uwag do niniejszego dokumentu (choćby literówek) proszę o kontakt: `Elzbieta.Strzalka@fis.agh.edu.pl`

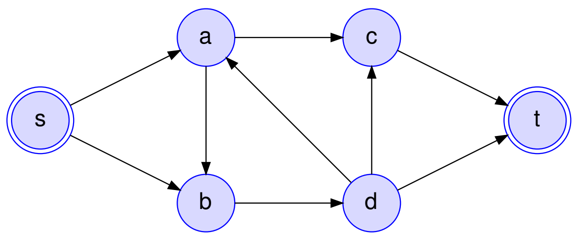
Typowym zagadnieniem rozpatrywanym w kontekście sieci przepływowych jest **problem maksymalnego przepływu**, czym zajmiemy się w 2. zadaniu. Pierwsze zadanie polega na wygenerowaniu losowej sieci przepływowej wraz z przepustowością – tak, aby sieć spełniała wszystkie opisane wyżej warunki[2]. Przepis losowania został dokładnie opisany w treści zadania. Omówienie poszczególnych kroków generowania sieci przedstawiono również za pomocą rysunków 1(a)-1(d).



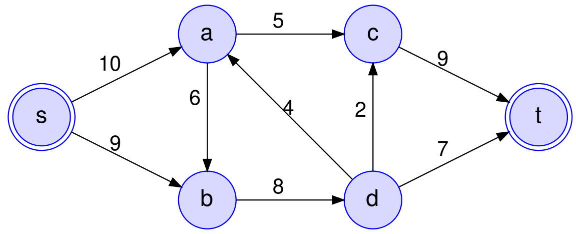
(a) **1. krok**: **tworzenie warstw**. W sieci początkowo znajdują się **dwa wierzchołki**, tj. s w warstwie o numerze 0 oraz t w warstwie o numerze $N+1$ (tu: t znajduje się w warstwie 3.). Następnie **dodajemy** N **warstw pośrednich**; dla każdej z nich losujemy od dwóch do N wierzchołków (więc dla $N = 2$ zawsze "wylosujemy" 2 wierzchołki, dlatego do warstwy numer 1 dodano wierzchołki a i b, natomiast do warstwy nr 2 dodano c oraz d).



(b) **2. krok**: **losujemy krawędzie** skierowane od warstwy nr $i \in \{0, N\}$ do warstwy o numerze $i+1$ tak, aby **z każdego wierzchołka** warstwy i **wychodziła co najmniej jedna krawędź** oraz **do każdego wierzchołka** warstwy $i+1$ **wchodziła co najmniej jedna krawędź**. Ten etap losowania zapewnia, że z dowolnego wierzchołka sieci będzie istniała ścieżka prowadząca do ujścia.



(c) **3. krok**: do powstałej sieci przepływowej dodajemy w sposób losowy $2N$ **dowolnych łuków**, zachowując jednak warunki wynikające z definicji sieci przepływowej (brak pętli, brak krawędzi wielokrotnej lub zwróconej przeciwnie do istniejącej, brak krawędzi wchodzącej do s/wychodzącej z t). *Uwaga: na potrzeby niniejszego dokumentu w tym kroku wylosowano tylko 3 krawędzie (zamiast 4), żeby rysunki były bardziej czytelne.*



(d) **4. krok**: każdej krawędzi przypisujemy **losową przepustowość** z przedziału $[1, 10]$. Losowa sieć przepływowa jest gotowa.

Rysunek 1: Kolejne kroki **losowania sieci przepływowej** na potrzeby projektu. Rysunki ilustrują przykład dla zadanego parametru $N = 2$ (sieć będzie miała dwie warstwy pomiędzy s a t).

[2]W projekcie zajmujemy się tylko sieciami spełniającymi warunki opisane w niniejszym dokumencie. Definicję sieci przepływowej można jednak uogólnić np. na więcej źródeł (producentów), więcej ujść (rynków zbytu), itd. Ewentualną pętlę (np. w danym punkcie produkt musi przejść przez biuro celne, które spowalnia transport) można zastąpić poprzez rozdzielenie danego wierzchołka na dwa, pomiędzy którymi znajduje się krawędź o przepustowości takiej, jaką należałoby przypisać tej pętli. Krawędzie wielokrotne zawsze można sprowadzić do jednej krawędzi odpowiednio sumując przepustowości.

Ad. 2. Algorytm Forda-Fulkersona (*udostępniony w osobnym pliku: “Algorytmy do projektu nr 5”*)

Naszym celem jest znalezienie **wartości maksymalnego przepływu** przez wylosowaną w pierwszym zadaniu sieć przepływową (np. ile maksymalnie kontenerów z maseczkami da się przetransportować z fabryki producenta do szpitala i przy użyciu których kanałów transportu).

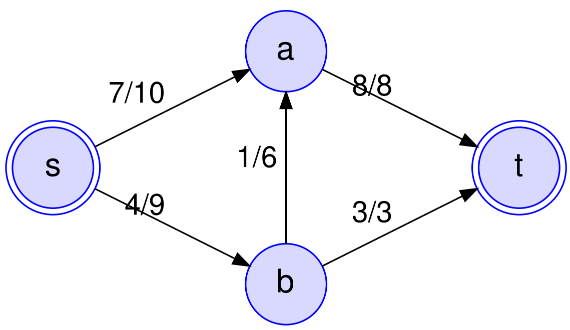
Algorytm Forda-Fulkersona wymaga znajomości pojęcia sieci rezydualnej. Dla danej sieci przepływowej G **sieć rezydualna** G_f jest grafem skierowanym powstałym ze wszystkich wierzchołków sieci przepływowej G. Wierzchołki sieci rezydualnej są połączone krawędziami, którym przypisujemy **przepustowość rezydualną** $c_f(u,v)$, zdefiniowaną wzorem:

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & \text{jeśli } (u,v) \text{ należy do } G, \\ f(v,u) & \text{jeśli } (v,u) \text{ należy do } G, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} \tag{4}$$

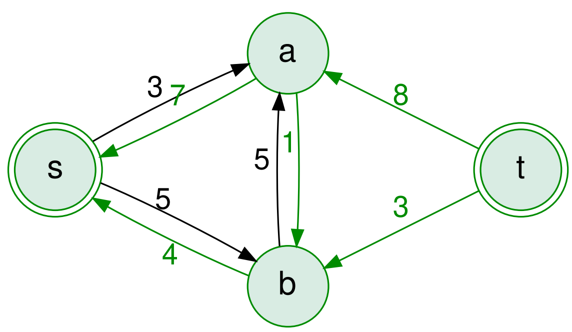
Przepustowość rezydualną możemy rozumieć jako:

- w przypadku, gdy w sieci przepływowej G istnieje krawędź (u,v): $c_f(u,v)$ jest odpowiedzią na pytanie, ile jednostek można jeszcze przetransportować przez krawędź (u,v) w sieci G;
- w przypadku, gdy w sieci przepływowej G istnieje krawędź (v,u): $c_f(u,v)$ jest odpowiedzią na pytanie, ile jednostek można by “wycofać” krawędzią (v,u) w sieci G;
- w przypadku, gdy w sieci przepływowej G nie ma ani krawędzi (u,v), ani krawędzi (v,u), przepustowość rezydualna $c_f(u,v)$ wynosi 0, co jest równoznaczne z brakiem krawędzi (u,v) w sieci rezydualnej G_f.

Na rysunku 2(b) zaprezentowano przykładową sieć rezydualną dla sieci G, której przepływy oraz przepustowości są zamieszczone na rys 2(a). Zerowa przepustowość rezydualna oznacza brak danej krawędzi w sieci rezydualnej, stąd na rys. 2(b) brak niektórych krawędzi sieci G.



(a) **Sieć przepływowa** G. Przepływy i przepustowości krawędzi oznaczono ich etykietami w kolejności odpowiednio: $f(u,v)/c(u,v)$.



(b) **Sieć rezydualna** G_f. Czarnym kolorem oznaczono krawędzie, które należą również do sieci G, wraz z etykietami reprezentującymi przepustowość rezydualną $c_f(u,v)$. Zielonym kolorem wyróżniono krawędzie, które są zwrócone przeciwnie do istniejących w sieci G, i ich przepustowości rezydualne.

Rysunek 2: Przykład tworzenia sieci rezydualnej (b) na podstawie zadanej sieci przepływowej (a). Dodatkowo można zauważyć, że zadany na rys. (a) przepływ jest już maksymalny: jego wartość $|f| = 11$.

Wejściem **algorytmu Forda-Fulkersona** jest wylosowana w 1. zadaniu sieć przepływowa. Początkowo należy wyzerować wszystkie przepływy $f(u, v)$ (jeszcze ich nie znamy). W każdej sieci iteracji algorytmu:

- sprawdzamy, czy **w aktualnej sieci rezydualnej** istnieje **ścieżka rozszerzająca** p prowadząca z s do t – jeśli nie, to algorytm kończy działanie;
- powiększamy przepływ sieci G wzdłuż znalezionej **ścieżki rozszerzającej** p.

Drugi krok iteracji zmienia przepływy niektórych krawędzi sieci przepływowej, w związku z czym należy jednocześnie zaktualizować przepustowości rezydualne w sieci rezydualnej.

Ścieżka rozszerzająca p to ścieżka złożona z krawędzi sieci rezydualnej, z których każda ma przepustowość rezydualną większą od 0. **Przepustowością rezydualną** $c_f(p)$ ścieżki rozszerzającej p nazywamy minimalną z przepustowości rezydualnych krawędzi należących do p.

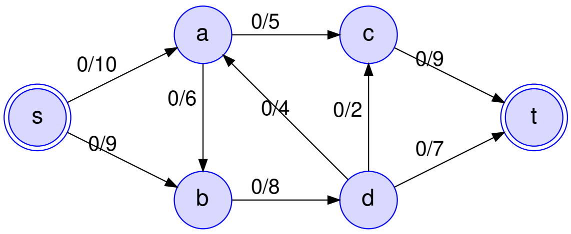
Algorytm Forda-Fulkersona pozwala na dowolny wybór ścieżek rozszerzających (i tak doprowadzi do znalezienia maksymalnego przepływu), aczkolwiek treść zadania każe wybierać konkretnie te ścieżki, które mają **najmniejszą liczbę krawędzi** (najmniej punktów pośrednich pomiędzy źródłem a ujściem). W wyszukiwaniu takich ścieżek pomoże **przeszukiwanie wszerz** (*algorytm również został zamieszczony na UPeL-u w pliku "Algorytmy do projektu nr 5"*).

Przeszukiwanie wszerz polega na odwiedzaniu wierzchołków w takiej kolejności, żeby odwiedzić ich jak najwięcej zanim zagłębimy się dalej: odwiedzamy wszystkich sąsiadów wierzchołka startowego i dopiero wtedy zaczynamy odwiedzanie dalszych sąsiadów, itd. Wygodnie jest skorzystać z implementacji z dodawaniem wierzchołków do **kolejki** (FIFO) – na początku do pustej kolejki dodajemy wierzchołek s i inicjalizujemy dwie tablice: odległości d_s oraz poprzedników p_s[3]. Następnie w każdej iteracji przeszukiwania (dopóki kolejka nie jest pusta) ściągamy z początku kolejki jeden wierzchołek i odwiedzamy jego nieodwiedzonych sąsiadów. Każdy z odwiedzanych wierzchołków u dodajemy do kolejki oraz odpowiednio modyfikujemy jego atrybuty $d_s(u)$ i $p_s(u)$.

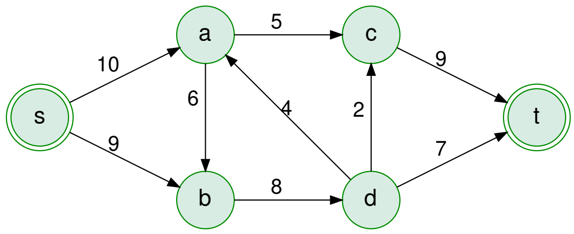
Przeszukiwanie wszerz na potrzeby algorytmu Forda-Fulkersona można zakończyć, gdy znajdziemy pierwszą możliwą ścieżkę z s do t (na pewno będzie najkrótsza w sensie liczby zawartych w niej krawędzi) – nawet, jeśli nie odwiedzono jeszcze wszystkich wierzchołków sieci rezydualnej. Na podstawie tabeli poprzedników odtwarzamy kolejne krawędzie tworzące ścieżkę p i wyznaczamy jej przepustowość rezydualną $c_f(p)$.

Rysunki 3. oraz 4. przedstawiają poszczególne kroki działania algorytmu Forda-Fulkersona z wyborem najkrótszych ścieżek poprzez przeszukiwanie wszerz dla wejściowej sieci przepływowej, którą jest sieć z rys. 1(d). Działanie przeszukiwania wszerz na tym przykładzie omówiono w podpisie do rys. 3(c).

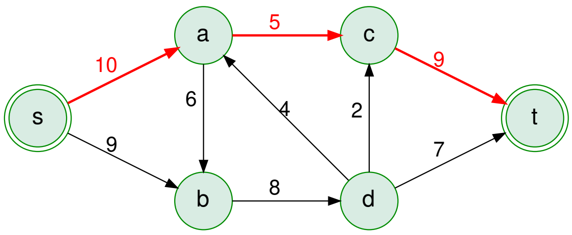
[3] Inicjalizacja odbywa się identycznie, jak w poprzednich projektach (algorytm $\textsc{Init}(G, s)$), gdzie rozważaliśmy problem najkrótszych ścieżek; tym razem długość ścieżki rozumiemy jako liczbę krawędzi, a nie sumę wag.



(a) **Sieć przepływowa** G z zaznaczonymi odpowiednio przepływami/przepustowościami krawędzi: $f(u,v)/c(u,v)$. Początkowo wszystkie przepływy są wyzerowane.



(b) **Sieć rezydualna** G_f dla sieci z rys. (a). Zgodnie z wzorem (4): przepustowości rezydualne dla krawędzi skierowanych odwrotnie do krawędzi z sieci G są zerowe, dlatego ich nie zaznaczono.



(c) **Sieć rezydualna** G_f z rys. (b) z zaznaczoną na czerwono **ścieżką rozszerzającą** p **o najmniejszej liczbie krawędzi**, znalezioną poprzez przeszukiwanie wszerz, której **przepustowość rezydualna** wynosi $c_f(p) = 5$. Działanie algorytmu **przeszukiwania wszerz**:

- Do kolejki dodajemy s.
- Ściągamy s i dodajemy jego sąsiadów, aktualna zawartość kolejki: $[a, b]$ (s zapisujemy jako poprzednika: $p_s(a) = p_s(b) = s$).
- Ściągamy wierzchołek a i dodajemy jego nieodwiedzonych sąsiadów; zawartość kolejki: $[b, c]$ (jednocześnie $p_s(c) = a$).
- Ściągamy b i dodajemy sąsiadów, kolejka: $[c, d]$, zapisujemy $p_s(d) = b$.
- Ściągamy c i dodajemy do kolejki jego jedynego nieodwiedzonego sąsiada: t. Zapisujemy $p_s(t) = c$. Na tym etapie można zakończyć przeszukiwanie wszerz, ponieważ znaleziono już najkrótszą ścieżkę z s to t, a tylko to nas interesowało.

Rysunek 3: Początek działania algorytmu Forda-Fulkersona dla sieci przepływowej G z rys. 1(d).

Po znalezieniu ścieżki rozszerzającej p **powiększamy przepływ sieci** G **wzdłuż tej ścieżki**, tj. dla każdej krawędzi (u, v) należącej do ścieżki p wykonujemy jedną z dwóch operacji:

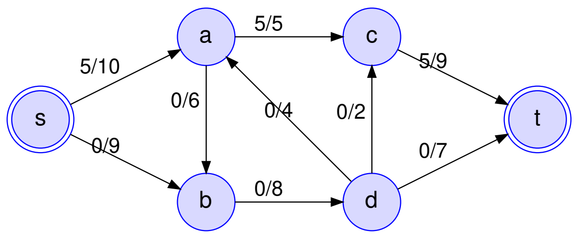
- jeżeli (u, v) należy także do sieci przepływowej G, to **zwiększamy przepływ**:

$$f(u, v) = f(u, v) + c_f(p) \tag{5}$$

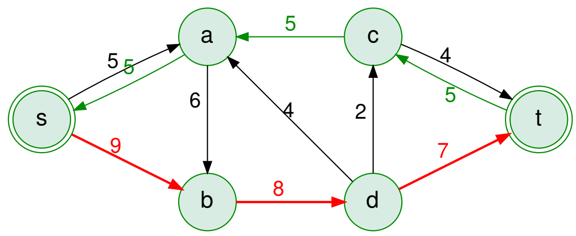
- jeżeli (u, v) nie należy do sieci przepływowej G (tzn. należy do niej tylko (v, u)), to **kasujemy przepływ**:

$$f(v, u) = f(v, u) - c_f(p) \tag{6}$$

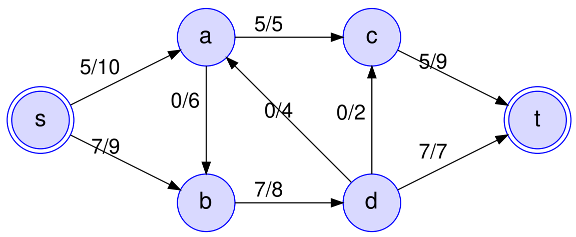
Zwiększanie przepływu sieci G wzdłuż ścieżki p znalezionej na rys. 3(c) zaprezentowano na rys. 4(a).



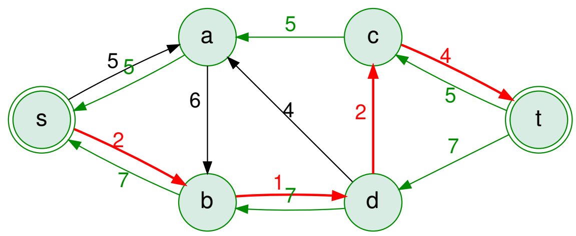
(a) **Sieć przepływowa** G po zwiększeniu przepływów krawędzi (s, a), (a, c), (c, t) o przepustowość rezydualną ścieżki p: $c_f(p) = 5$ (zgodnie z rysunkiem 3(c) i wzorem (5)).



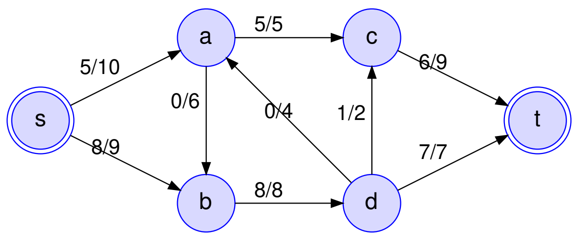
(b) Zaktualizowana **sieć rezydualna** G_f dla sieci z rys. (a). Przepustowość rezydualna $c_f(a, c)$ wynosi teraz 0, więc krawędzi (a, c) nie zaznaczono. Czerwonym kolorem narysowano nową ścieżkę p.



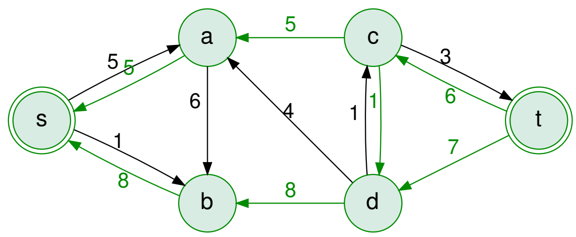
(c) **Sieć przepływowa** G po zwiększeniu przepływów odpowiednich krawędzi o $c_f(p) = 7$ dla ścieżki rozszerzającej z rys. (b).



(d) **Sieć rezydualna** G_f po aktualizacji zgodnie z siecią z rys. (c). Zaznaczono nową ścieżkę rozszerzającą p $(c_f(p) = 1)$.



(e) **Sieć przepływowa** G po kolejnym zwiększeniu przepływów (wzdłuż ścieżki rozszerzającej z rys. (d)).

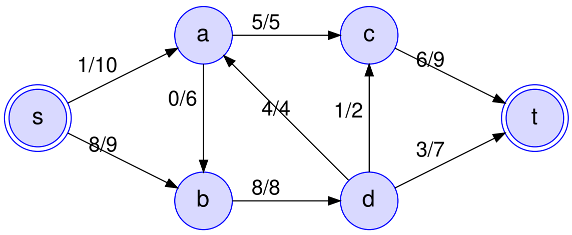


(f) **Sieć rezydualna** G_f dla sieci przepływowej w stanie z rys. (e). W G_f nie istnieje ścieżka rozszerzająca z s do t $\Rightarrow$ koniec algorytmu.

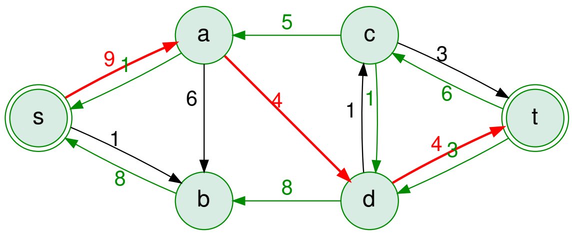
Rysunek 4: Dalsze działanie **algorytmu Forda-Fulkersona** dla sieci przepływowej G z rys. 3. Rysunki po lewej stronie obrazują sieć przepływową G z zaznaczonymi aktualnymi przepływami (etykiety oznaczają przepływ/przepustowość krawędzi). Po prawej: odpowiadające jej sieci rezydualne. Algorytm doprowadził sieć przepływową do stanu, w którym w jej sieci rezydualnej (f) nie istnieje już ścieżka z s do t. Oznacza to koniec algorytmu: przepływy zaznaczone na rys. (e) odpowiadają **maksymalnemu przepływowi** zadanej sieci.

Z rys. 4(e) wynika, że **wartością maksymalnego przepływu** dla zadanej sieci jest $|f_{\max}| = 13$.

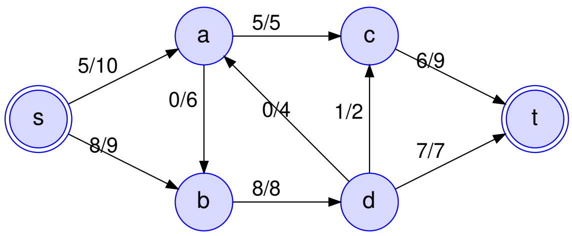
W zaprezentowanym przykładzie nie wykorzystano **kasowania (cofania) przepływu**, ponieważ warunek użycia wzoru (6) nie był spełniony dla żadnej ścieżki rozszerzającej. Przy generowaniu losowych sieci przepływowych – szczególnie dla niewielu warstw N – prawdopodobieństwo spełnienia tego warunku jest niewielkie, ale nie jest zerowe – wzór musi być **koniecznie zaimplementowany**. Przykład konieczności cofania przepływu: rys. 5. Sieć przepływowa z rys. 5(a) jest identyczna co do połączeń i przepustowości z siecią z omawianego w dokumencie przypadku losowej sieci, różni się jednak aktualnie oznaczonymi przepływami (aktualna wartość przepływu dla rys. 5(a) wynosi $|f| = 9$). Z poprzednich rozważań wiemy, że wartością maksymalnego przepływu tej sieci powinno być 13, jednak w aktualnym stanie pozornie nie da się już zwiększyć przepływu, ponieważ jedyne krawędzie łączące warstwę nr 1 z warstwą o numerze 2 mają już wykorzystaną całą przepustowość (krawędzie (a, c) oraz (b, d)). Mimo to w sieci rezydualnej (rys. 5(b)) dla tego stanu sieci istnieje ścieżka rozszerzająca p, w której skład wchodzi krawędź (a, d) **niewystępująca w sieci przepływowej** G. W związku z tym rozszerzając przepływ sieci G o przepustowość ścieżki $c_f(p) = 4$ w rzeczywistości **kasujemy przepływ** z krawędzi (d, a) (cofanie przepływu bywa opłacalne!). W ten sposób otrzymujemy znaną z wcześniejszych rozważań maksymalną wartość przepływu $|f_{\max}| = 13$ (por. rys. 4(e) i 5(c)).



(a) **Sieć przepływowa** G z zaznaczonymi odpowiednio przepływami/przepustowościami krawędzi: $f(u, v)/c(u, v)$.



(b) **Sieć rezydualna** G_f dla sieci z rys. (a) wraz z zaznaczoną na czerwono ścieżką rozszerzającą o przepustowości rezydualnej $c_f(p) = 4$.



(c) **Sieć przepływowa** G po powiększeniu przepływu wzdłuż ścieżki p z rys. (b): przepływy $f(s, a)$ i $f(d, t)$ zostały zwiększone, natomiast przepływ $f(d, a)$: **zmniejszony**.

Rysunek 5: Działanie algorytmu Forda-Fulkersona dla sieci przepływowej G w stanie przepływów oznaczonych na rysunku (a), dla której istnieje konieczność **cofania przepływu**.