Hleb Shypula
286720
3 maja 2020

Sprawozdanie 9

Aproksymacja Pade funkcji sin(x)

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Aproksymacja Padego

Aproksymacja Padego – metoda aproksymacji funkcji za pomocą funkcji wymiernych danego rzędu. Często daje lepszy wynik niż szereg Taylora dla tej samej liczby współczynników, kiedy funkcja posiada bieguny.

Funkcję aproksymowaną przybliżamy funkcją wymierną tj. ilorazu dwóch wielomianów:

$$R_{n,k}(x) = \frac{L_n(x)}{M_k(x)}$$

gdzie: N = n+k.

Zadanie polega na znalezieniu N+1 współczynników L_n oraz M_k

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

$$M_k(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_kx^k, \qquad b_0 \neq 0$$

tak aby w $x_0 = 0$ funkcje aproksymowana i aproksymująca miały jak najwięcej równych pochodnych.

Rozwijamy f(x) w szereg Maclaurina:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

Liczymy błąd aproksymacji (w celu otrzymania zależności współczynniki a_i oraz b_i):

$$f(x) - \frac{L_n(x)}{M_k(x)} == \frac{\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{k} b_i x^i\right) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{k} b_i x_i}$$

Wykorzystujemy warunki z ciągłością pochodnych w x=0:

$$f^{(m)}(x)\Big|_{x=0} - R_{n,k}^{(m)}(x)\Big|_{x=0} = 0, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, k+n$$

Powyższy warunek będzie spełniony, gdy licznik zapiszemy jako

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{k} b_i x^i\right) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{j=1}^{\infty} d_{N+j} x^{N+j}$$

Dla warunku:

$$f(0) - R_{n,k} = 0$$

dostajemy równanie

$$(b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k)(c_0 + c_1 x + \ldots) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)$$

z którego wydobywamy następujące zależności:

$$\begin{array}{ccl} a_0 & = & b_0 c_0 \\ a_1 & = & b_0 c_1 + b_1 c_0 \\ a_2 & = & b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

i ostatecznie wzór ogólny:

$$a_r = \sum_{j=0}^{r} c_{r-j} b_j, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Wykorzystujemy też założenie o równości pochodnych (do rzędu n+k+1) co daje dodatkową zależność:

$$\sum_{j=0}^{k} c_{n+k-s-j} b_j = 0, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, k-1$$

Ogólny sposób postępowania:

1) Wyznaczamy współczynniki szeregu McLaurina. Numerycznie dokładnie – tylko przy użyciu liczb dualnych, ilorazy różnicowe są niedokładne. W niektórych przypadkach (rzadko) możliwe jest wykorzystanie wzoru analitycznego na pochodne.

2) Tworzymy układ równań, którego rozwiązanie to współczynniki b_i:

$$\begin{bmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \cdots & c_n \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{n+1} \\ -c_{n+2} \\ \vdots \\ -c_{n+m} \end{bmatrix}$$

3) Teraz możemy wyznaczyć kolejno współczynniki a_j:

$$a_i = \sum_{j=0}^{i} c_{i-j} \cdot b_j, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

1.2 Aproksymacja Pade funkcji sin(x)

Rozważmy taką funkcję:

$$f(x) = \sin(x), \quad x \in [-2\pi,\, 2\pi]$$

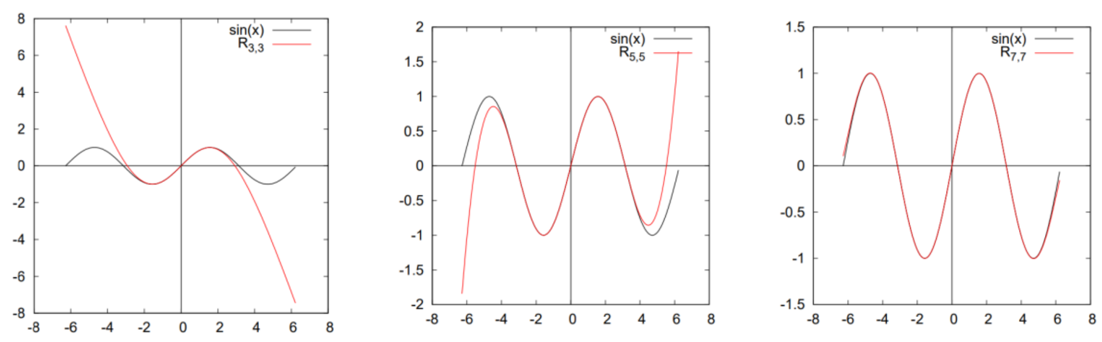
Funkcja aproksymowana jest nieparzysta – niezerowe współczynniki wielmianu L to te stojące przy jednomianach o wyładnikach nieparzystych.

$$R_{3,3}(x) = \frac{x - \frac{7}{60}x^3}{1 + \frac{x^2}{20}}$$

$$R_{5,5}(x) = \frac{x - \frac{53}{396}x^3 + \frac{551}{166320}x^5}{1 + \frac{13}{396}x^2 + \frac{5}{11088}x^4}$$

$$R_{7,7}(x) = \frac{x - \frac{29593}{207636}x^3 + \frac{34911}{7613320}x^5 - \frac{479249}{11511339840}x^7}{1 + \frac{1671}{69212}x^2 + \frac{97}{351384}x^4 + \frac{2623}{1644477120}x^6}$$

Rysunek 1: Przykładowe wykresy f(x) oraz $R_{N,M}(x)$ na jednym rysunku w zakresie $x \in [-2\pi, 2\pi]$. Źródło: https://bit.ly/2yUN9KN, [dostęp: 28.04.2020].



1.3 Aproksymacja Pade funkcji exp(-x^2)

Rozważmy taką funkcję:

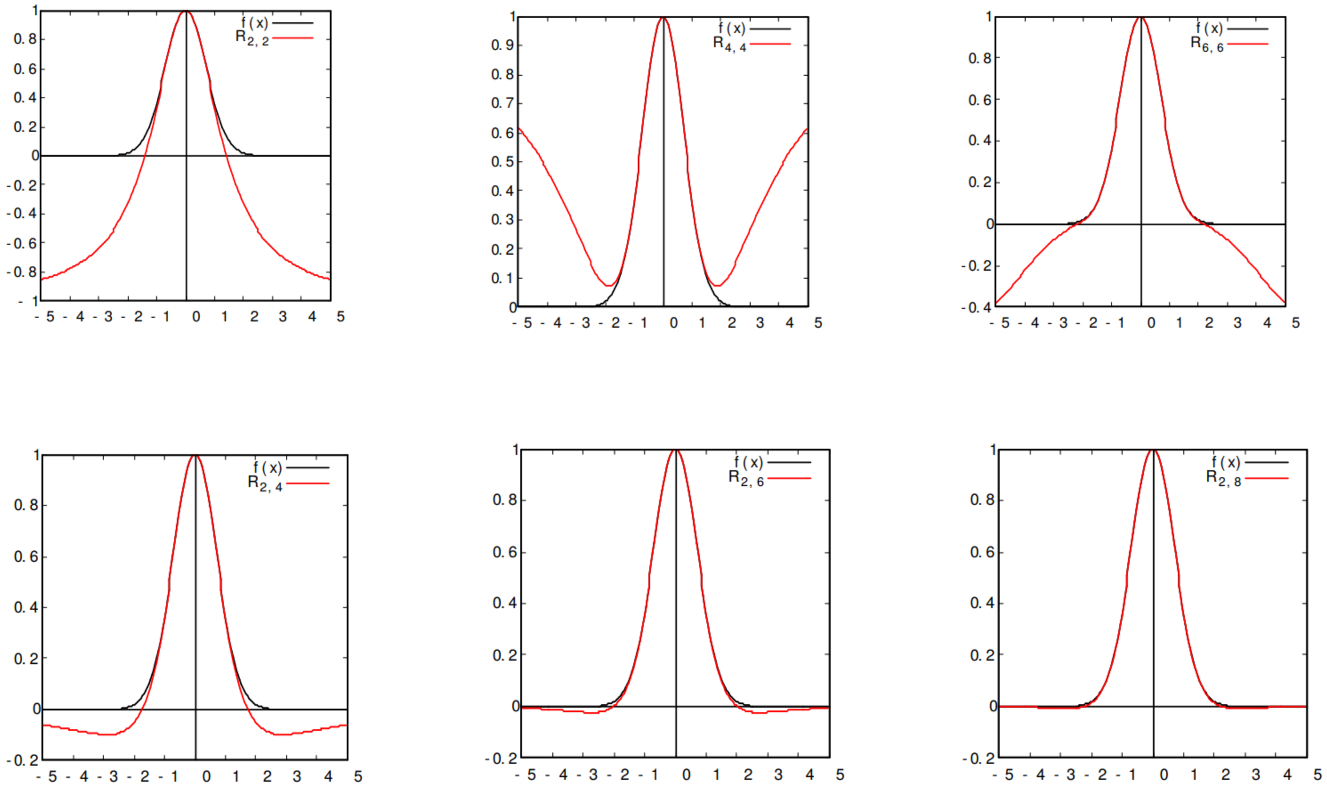
$$f(x) = exp(-x^2), \quad x \in [-5, 5]$$

Funkcja jest parzysta, więc wielomiany w liczniku i w mianowniku $R_{n,k}$ będą miały niezerowe współczynniki tylko przyjednomianach o wykładnikach parzystych.

$$T_{12}\{f(x)\} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^{12}}{720}$$

$$R_{6,6}(x) = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{10} - \frac{x^6}{120}}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{10} + \frac{x^6}{120}}$$

Rysunek 2: Przykładowe wykresy f(x) oraz $R_{N,M}(x)$ na jednym rysunku w zakresie $x \in [-5, 5]$.
Źródło: https://bit.ly/35j9q0F, [dostęp: 28.04.2020].



2. Problem

Naszym zadaniem było wykonanie aproksymacji Padego funkcji

$$f(x) = \sin(x)$$

kolejno dla N = M = 3, 5, 7.

Przybliżenie wykonywaliśmy przy pomocy funkcji wymiernej

$$R_{N,M}(x) = \frac{P_N(x)}{Q_M(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{M} b_i x^i}$$

z $b_0 = 1$. W tym celu wykonałem następujące kroki:

1) Ustalamy n = N + M i liczymy pochodne $f^{(k)}(0)$, k = 0, 1, 2, . . . , n

$$\left.\frac{d^k \sin(x)}{dx^k}\right|_{x=0} = \begin{cases} f^{(2p)}(0) = 0, & p = 0,1,2,3,\ldots \\ f^{(2p+1)}(0) = (-1)^p, & p = 0,1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Obliczyłem współczynniki c_k

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

i wartości zapisałem w wektorze **c** = $[c_0, c_1, \ldots, c_n]$.

2) Rozwiązałem opisany we wstępie teoretycznym macierzowy układ równań:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= c_{N-M+i+j+1}, \quad & i,j = 0,1,\ldots,M-1 \\ y_i &= -c_{N+1+i}, \quad & i = 0,1,\ldots,M-1 \end{aligned}$$

Do rozwiązania użyłem funkcji GSL'a

```
gsl_linalg_LU_decomp (A, p, &signum);
gsl_linalg_LU_solve (A, p, y, x);
```

Po rozwiązaniu powyższego układu równań zachowałem współczynniki wielomianu $Q_M(x)$ w wektorze **b** = $[b_0, b_1, \ldots, b_M]$.

gdzie: $b_0 = 1$; $b_{M-i} = x_i$; $i = 0, 1, \ldots, M-1$.

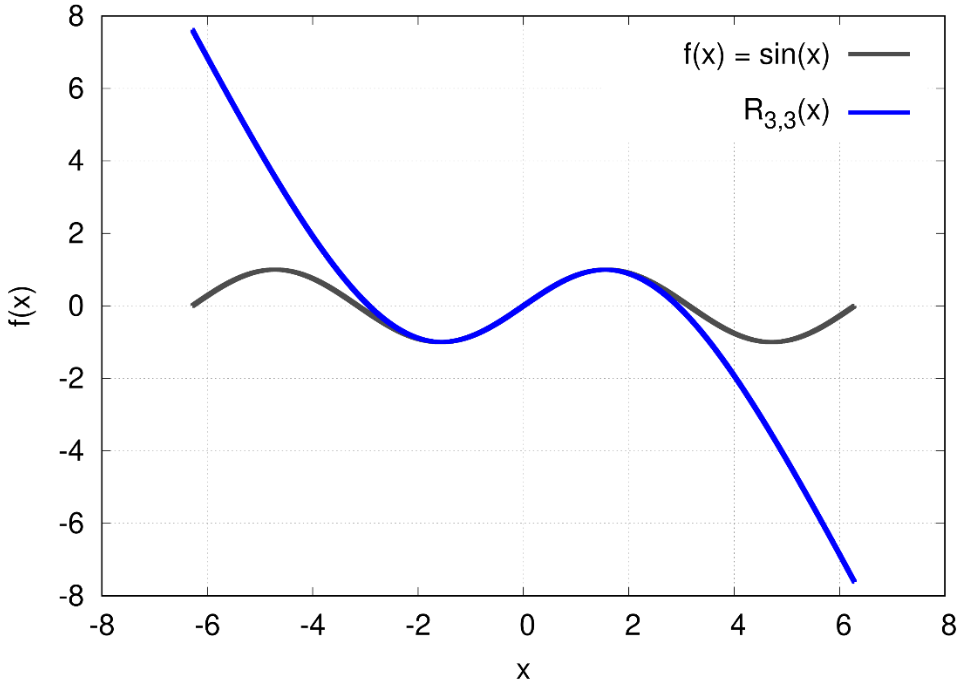
3) Wyznaczyłem współczynniki wielomianu $P_N(x)$ i zapisałem do wektora **a** = $[a_0, a_1, \ldots, a_N]$, gdzie:

$$a_i = \sum_{j=0}^{i} c_{i-j} \cdot b_j, \quad i = 0,1,\ldots,N$$

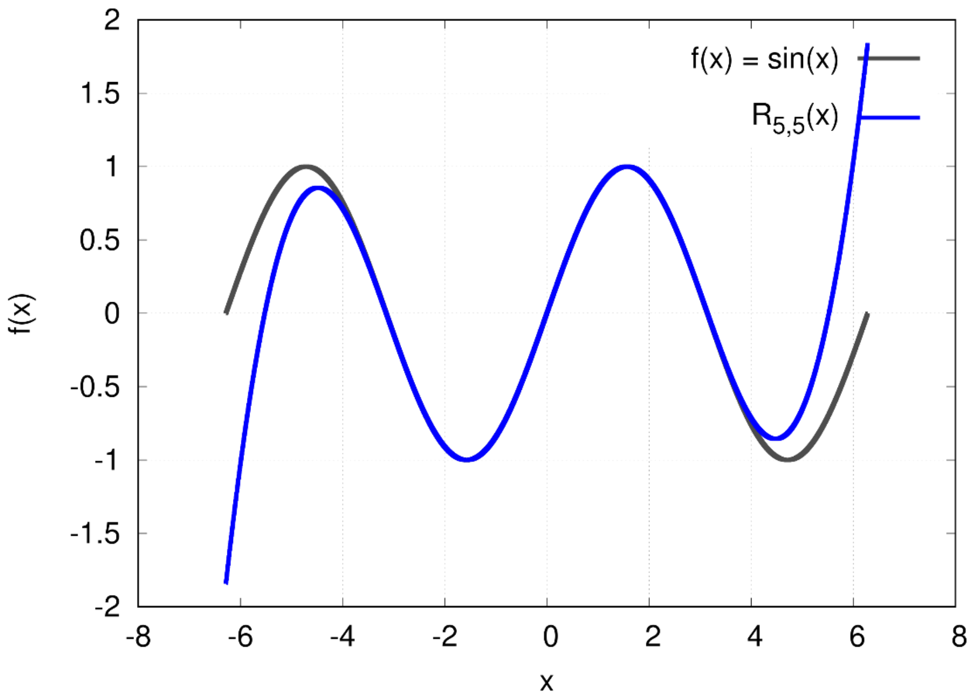
4) Dla ustalonego n utworzyłem wykresy f(x) oraz $R_{N,M}(x)$ na jednym rysunku w zakresie $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

3. Wyniki

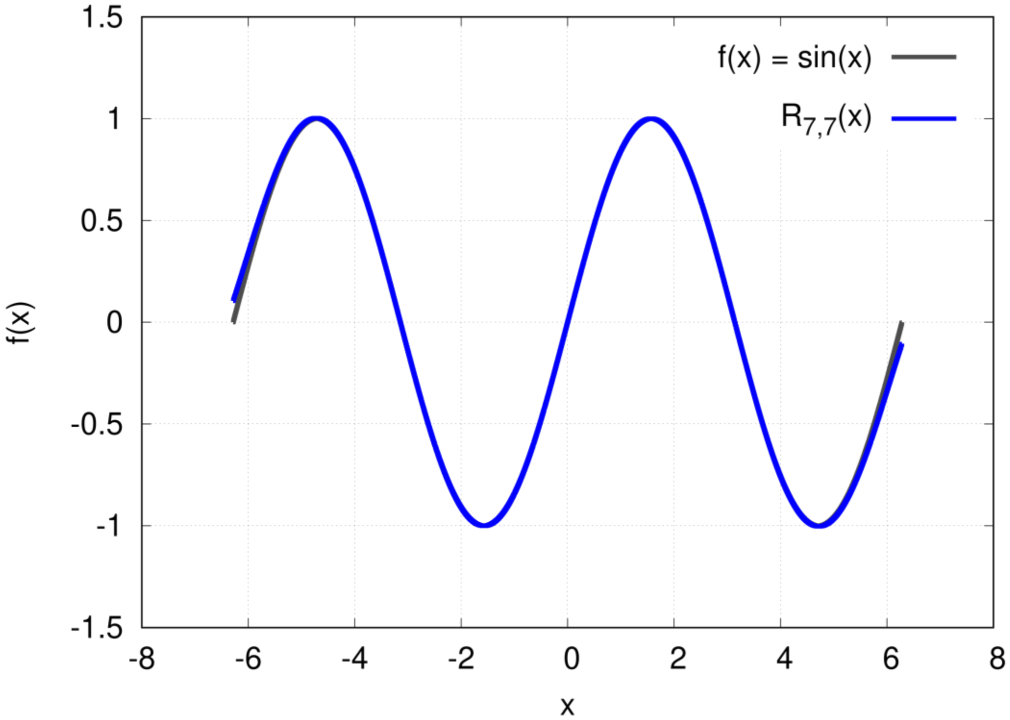
Wykres 1: Wykres f(x) = sin(x) oraz $R_{3,3}(x)$ na jednym rysunku w zakresie $x \in [-2\pi, 2\pi]$.



Wykres 2: Wykres $f(x) = \sin(x)$ oraz $R_{5,5}(x)$ na jednym rysunku w zakresie $x \in [-2\pi, 2\pi]$.



Wykres 3: Wykres $f(x) = \sin(x)$ oraz $R_{7,7}(x)$ na jednym rysunku w zakresie $x \in [-2\pi, 2\pi]$.



4. Wnioski

Metoda aproksymacji Pade pozwala na uzyskanie funkcji zbliżonej do funkcji oryginalnyej przy jednym warunku: im wieksze są stopnie wielomianów N oraz M, tym bardziej dokładne przybliżenie dostaniemy.

Na wykresach przedstawionych w wynikach wyraźnie widać, że dokładność się wzrasta wraz z zwiększeniem N oraz M od 3 do 7. Na *wykresie 3* dla N = M = 7 można nawet stwierdzić, że przybliżenie oraz oryginał się pokrywają.

Jak i oczekiwano z założeń teoretycznuch, zaletą takiego typu przybliżenia (w problemie aproksymacji jednostajnej) są mniejsze błedy niż w aproksymacji wielomianem stopnia N (otrzymanych np. z rozwinięć Taylora czy Maclaurina).