Hleb Shypula
286720
10 maja 2020

Sprawozdanie 10

Minimalizacja wartości funkcji metodą złotego podziału

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Optymalizacja

Zadaniem optymalizacji jest poszukiwanie minimum lub maksimum funkcji. W naszym przypadku zajmowaliśmy się minimalizacją.

W praktyce problem sprowadza się do poszukiwania minimum czyli takiego punktu dla którego zachodzi:

$$f : R^n \to R$$

$$min\ f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x^*}) \Leftrightarrow \bigwedge_{\boldsymbol{x} \in R^n} f(\boldsymbol{x^*}) < f(\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$$

z następnymi warunkami:

$$g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$h_j(\boldsymbol{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, r$$

gdzie: funkcje f(x), g(x), h(x) są funkcjami skalarnymi takimi, że

- f(x) – funkcja celu, celem jest znalezienie jej minimum (optymalizacja)
- g(x) i h(x) – funkcje określające warunki jakie musi spełniać rozwiązanie (więzy) – ograniczają przestrzeń dopuszczalnych rozwiązań

1.2 Metoda złotego podziału

To jest numeryczna metoda bezgradientowa służąca do optymalizacji jednowymiarowej funkcji celu. Algorytm ten może być używany przy minimalizacji kierunkowej razem z innymi metodami optymalizacji funkcji wielowymiarowych, takich jak metody gradientowe lub bezgradientowe.

Schemat działania jest następujący:

1) Wstępnie wyznaczamy przedział [a, b] w którym spodziewamy się minimum wartości funkcji.
2) W przedziale [a,b] wyznaczamy dwa punkty λ_1 i λ_2.
3) Jeżeli $F(\lambda_2) > F(\lambda_1)$
   to zmieniamy granice przedziału na [a, λ_2].
4) Jeżeli $F(\lambda_2) < F(\lambda_1)$
   to zmieniamy granice przedziału na [λ_1, b].
5) Proces podziału prowadzimy iteracyjnie aż do spełnienia warunku: $|a^i - b^i| < \varepsilon$

   a jako przybliżenie minimum możemy przyjąć: $\lambda^* = \dfrac{b^i - a^i}{2}$

Pozostaje tylko kwestia jak wyznaczyć punkty tak aby wybór był optymalny tzn. chcemy wykonać jak najmniejszą ilość podziałów.

Punktem wyjścia jest złota proporcja, czyli **złoty podział**.

$$\frac{(\lambda_1 - a) + (b - \lambda_1)}{b - \lambda_1} = \frac{b - \lambda_1}{\lambda_1 - a} = \varphi$$

Uzależniamy b od a:

$$b - a = L \quad \Rightarrow \quad b = L + a$$

Po wstawieniu do równania otrzymujemy:

$$\frac{L}{L + a - \lambda_1} = \frac{L + a - \lambda_1}{\lambda_1 - a}$$

$$L(\lambda_1 - a) = (L - (\lambda_1 - a))^2$$

$$(\lambda_1 - a) = L \underbrace{\left(1 - \frac{(\lambda_1 - a)}{L}\right)^2}_{=r^2} = Lr^2$$

Otrzymaliśmy dwie zależności:

$$(\lambda_1 - a) = Lr^2 \qquad (b - \lambda_1) = Lr$$

Po wstawieniu ich do równania wyjściowego dostajemy równanie kwadratowe na „r”:

$$\frac{Lr^2 + Lr}{Lr} = \frac{Lr}{Lr^2} = \frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \qquad r^2 + r - 1 = 0$$

Znajdujemy jego pierwiastki i zachowujemy tylko ten, który wyszedł dodatni:

$$r = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618034 > 0$$

Dalej możemy określić wartości λ_1 i λ_2 zakładając ponadto, że oba punkty powinny być symetryczne względem krańców przedziału:

$$\lambda_1 = a + r^2 L \quad \lambda_2 = a + rL$$

2. Problem

W pierwszym etapie jako zadanie mieliśmy znaleźć minimum wartości funkcji

$$f(x) = ln\left(x^5 + 3x^2 + x + 9\right)$$

metodą złotego podziału. Przyjęłem $x_1 = x_a + \lambda_1(x_b - x_a)$ i $x_2 = x_a + \lambda_2(x_b - x_a)$, gdzie: $\lambda_1 = r^2$, $\lambda_2 = r$, $r = (\sqrt{5} - 1)/2$ i odpowiednio zawężyłem przedział. Jako krańce przedziału startowego przyjęłem: $x_a = -0.5$, $x_b = 1.0$. Do warunku stopu przyjęłem wartość parametru $\varepsilon = 10^{-6}$. Jako warunek STOP-u przyjęłem $|x1 - x2| < \varepsilon$. Oraz przyjęłem że minimum znajduje się w punkcie $x_{min} = (x_1 + x_2)/2$.

Do pliku zapisałem numer iteracji, położenie aktualnego przybliżenia minimum oraz moduł różnicy rozwiązania dokładnego ($x_{dok} = -0.1673198$) i aktualnego przybliżenia.

W kolejnym kroku powtórzyłem całą procedurę poszukiwania minimum f(x) stosując podział na 3 równe odcinki tzn. przyjęłem $\lambda_1 = 1/3$ i $\lambda_2 = 2/3$.

Na jednym rysunku narysowałem moduł różnicy rozwiązania dokładnego i przybliżonego w funkcji numeru iteracji dla obu powyższych przypadków tj. dla $(\lambda_1, \lambda_2) = (r^2, r)$ i $(\lambda_1, \lambda_2) = (1/3, 2/3)$. Skala osi OY ma być logarytmiczna (w gnuplocie ustawiłem ją komedą ”set logscale y”).

W drugim etapie zadaniem było przeprowadzenie minimalizacji złotego podziału i z podziałem na trzy równe części do znalezienia minimum funkcji

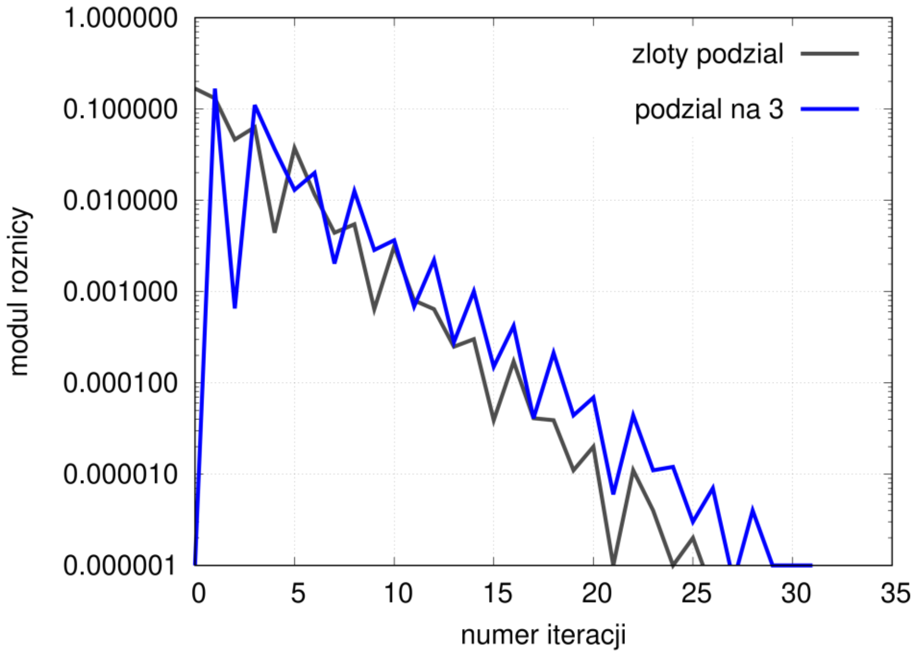
$$g(x) = x^6$$

Jako punkty startowe przyjęłem: $x_a = -4.0$, $x_b = 1.0$, do warunku STOP-u przyjęłem $\varepsilon = 10^{-6}$ oraz jako minimum dokładne przyjęto $x_{min} = 0$.

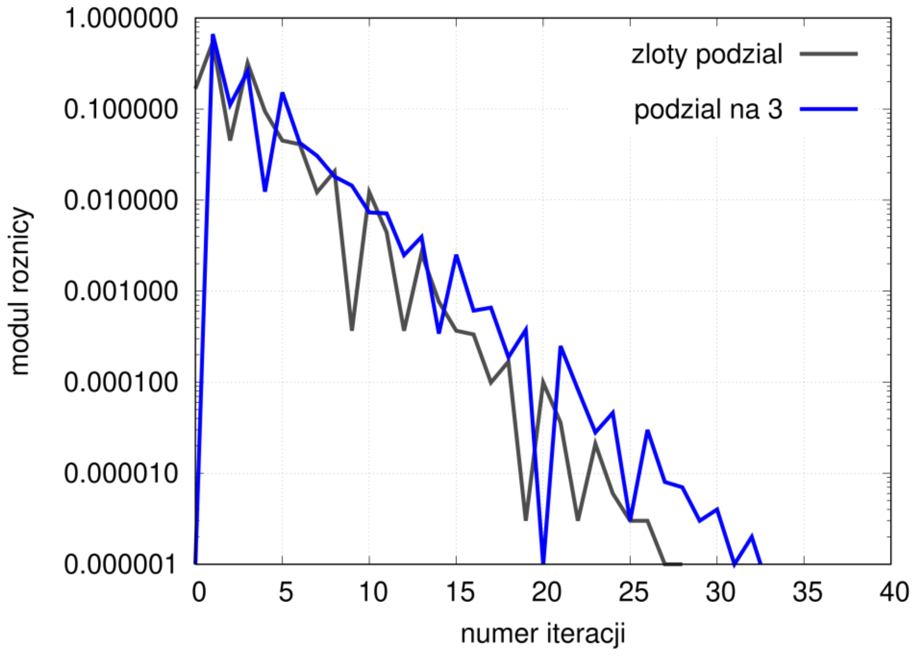
Jak w poprzednim etapie wyprowadziłem dane do pliku i sporządziłem rysunek modułu różnicy rozwiązania dokładnego i przybliżonego w funkcji numeru iteracji dla złotego podziału i podziału na trzy równe części. Skala osi OY ma być logarytmiczna.

3. Wyniki

Wykres 1: moduł różnicy rozwiązania dokładnego i przybliżonego w funkcji numeru iteracji dla f(x)



Wykres 2: moduł różnicy rozwiązania dokładnego i przybliżonego w funkcji numeru iteracji dla g(x)



4. Wnioski

Analizując wyniki, metoda złotego podziału pozwoliła na znalezienie minimum funkcji z zadaną dokładnością.

Jak widać na wykresach 1-2 metoda złotego podziału jest szybsza od metody podziału na trzy części i dochodzi do przybliżonego rozwiązania z wykorzystaniem mniejszej ilości iteracji.