

Sprawozdanie 7

Interpolacja Lagrange'a z optymalizacją położenia węzłów.

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Idea interpolacji wielomianowej

Twierdzenie:

Istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny stopnia co najwyżej n ($n \geq 0$), który w punktach $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ przyjmuje wartości $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$.

Dowód:

$n+1$ węzłów rozmieszczonych jest w dowolny sposób w $[a,b]$. Szukamy wielomianu interpolacyjnego w postaci:

$$W_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Podstawiając do $W_n(x)$ kolejno $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ dostajemy układ $n+1$ równań na współczynniki a_i :

$$\begin{array}{rcl} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n & = & y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n & = & y_1 \\ \cdots \cdots \cdots & = & \cdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n & = & y_n \end{array}$$

Macierz współczynników układu to macierz Vandermode'a:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

Wyznacznik jest wyznacznikiem Vandermode'a:

$$D = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \neq 0$$

Wniosek:

układ ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$a_i = \frac{1}{D} \sum_{j=0}^n y_j D_{ij}$$

gdzie: D_{ij} – wyznacznik macierzy dopełnień algebraicznych.

I opisuje to rozwiązanie wielomian interpolacyjny (Lagrange'a).

1.2 Interpolacja Lagrange'a

Korzystając z poprzedniego wyniku, tj. podstawiając

$$a_i = \frac{1}{D} \sum_{j=0}^n y_j D_{ij}$$

do

$$W_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

i grupujemy składniki przy y_i

$$W_n(x) = y_0\Phi_0(x) + y_1\Phi_1(x) + \dots + y_n\Phi_n(x)$$

funkcje $\Phi_i(x)$ są wielomianami co najwyżej stopnia n . Można zauważyć, że dla dowolnego x_i zachodzi zależność:

$$W_n(x_i) = y_0\Phi_0(x_i) + y_1\Phi_1(x_i) + \dots + y_n\Phi_n(x_i) = y_i$$

skąd wynika warunek

$$\Phi_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{gdzie } j \neq i \\ 1 & \text{gdzie } j = i \end{cases}$$

Wniosek:

aby określić funkcje $\Phi_i(x)$ należy znaleźć taki wielomian, który zeruje się w węzłach $x_i \neq x_j$ oraz przyjmuje wartość 1 w węźle x_j .

Taką funkcją mógłby być np. wielomian:

$$\Phi_j(x) = \lambda(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)$$

który w x_j przyjmuje wartość 1:

$$1 = \lambda(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)$$

Otrzymaliśmy **wielomian węzłowy Lagrange'a**:

$$\Phi_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}$$

Szukany wielomian czynnikowy przyjmuje postać:

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

A pochodna wielomianu czynnikowego (stopnia n) liczonego w punkcie x_j wygląda tak:

$$\omega'_n(x_j) = (x_j - x_0) \cdot (x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a ma postać:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j) \left\{ \frac{\omega_n(x)}{x - x_j} \right\} \Big|_{x=x_j}} = \sum_{j=0}^n y_j \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j) \omega'_n(x_j)}$$

W zadaniu wyznaczenie wartości interpolowanej w położeniu międzywęzłowym wykonana przy użyciu następnego pseudokodu:

inicjalizacja :

$x = \dots$ – wartość argumentu dla którego liczymy $W_n(x)$

wielomian=0 – zerujemy zmienną w której zachowujemy sumę $W_n(x)$

for (j=0; j<=n; j++){

licznik=1.0 // wartość 1 jest neutralna dla iloczynu
mianownik=1.0

// pętla w której obliczamy iloczyny (licznik i mianownik)
// pojedynczy wyraz sumy

for (i=0; i<=n; i++){

licznik = licznik * (x - x_j)

if (i != j) mianownik = mianownik * (x_i - x_j) // pomijamy element (x_j - x_j)

}

// sumowanie wkładów od poszczególnych węzłów y_j

wielomian = wielomian + $\frac{y_j}{x - x_j} \cdot \frac{\text{licznik}}{\text{mianownik}}$

}

1.3 Wielomiany Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa – układ wielomianów ortogonalnych tworzący bazę przestrzeni wielomianów.

Optymalizację położenia węzłów dokonano przy obliczeniu zer wielomianów Czebyszewa:

$$x_m = \frac{1}{2} \left[(x_{max} - x_{min}) \cos \left(\pi \frac{2m+1}{2n+2} \right) + (x_{min} + x_{max}) \right]$$

gdzie: $m = 0, 1, \dots, n$;

x_{min} i x_{max} to krańce przedziału interpolacji.

2. Problem

Naszym zadaniem było znalezienie wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a ($W_n(x)$) dla funkcji:

$$y(x) = \exp(-x^2)$$

w przedziale $x \in [-5, 5]$.

Czyli dla wektora położenia węzłów interpolacji $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ oraz wartości funkcji interpolowanej $\mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_n]$ wykorzystujemy wzór **interpolacyjny Lagrange'a**.

Mieliśmy zaprogramować na komputerze metodę wyznaczającą przybliżoną wartość funkcji w położeniu międzywęzłowym wykorzystując wielomian interpolacyjny Lagrange'a za pomocą pseudokodu ze wstępu teoretycznego.

Argumentami metody były: wektor węzłów (\mathbf{x}), wektor wartości funkcji w węzłach (\mathbf{y}), stopień wielomianu n (zawsze o jeden niższy niż całkowita liczba węzłów) oraz wartość argumentu x dla którego wyliczamy wartość funkcji (wielomianu).

Interpolację przeprowadzaliśmy dla $n = 5, 10, 15, 20$.

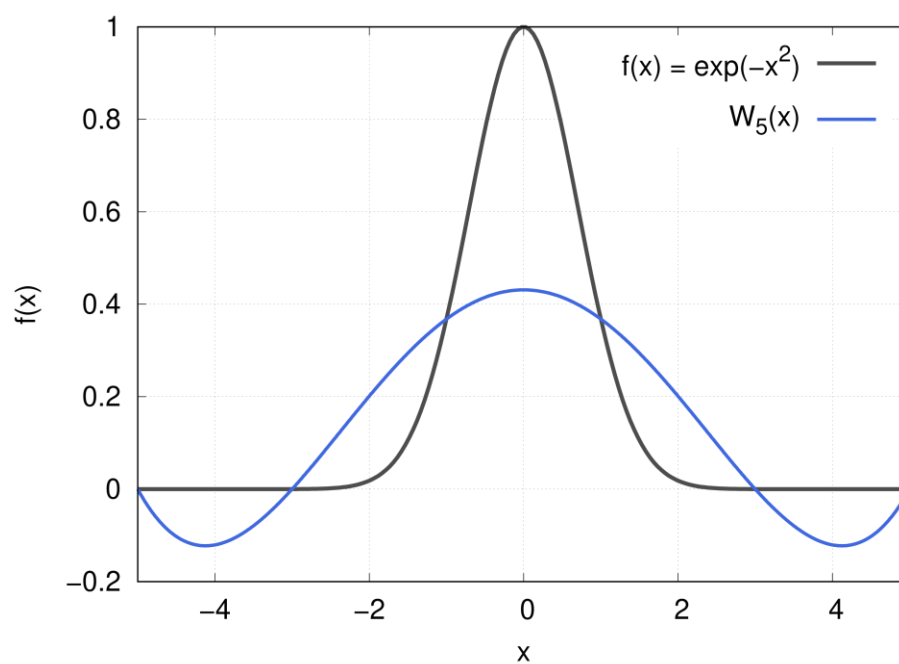
Dla każdego n mieliśmy sporządzić wykresy interpolowanej funkcji oraz wielomianu interpolacyjnego na jednym rysunku.

W drugim etapie zadania przeprowadzona była optymalizacja położenia węzłów. Określaliśmy położenia węzłów jako zera wielomianów Czebyszewa.

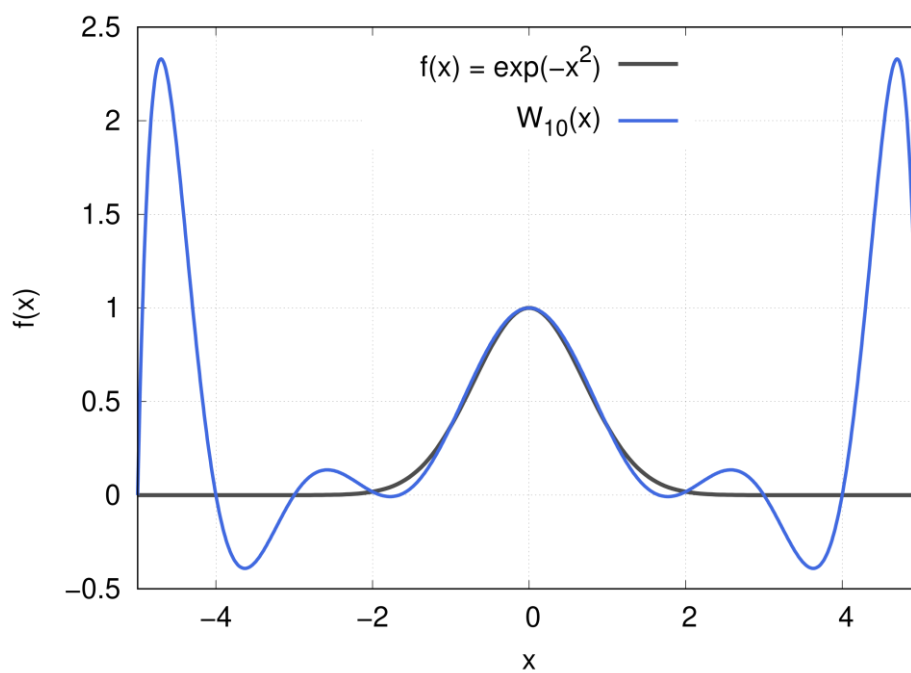
Po optymalizacji powtórzyliśmy interpolację dla tych samych wartości n a także wygenerowaliśmy kolejne 4 wykresy $f(x)$ oraz $W_n(x)$ na jednym rysunku.

3. Wyniki

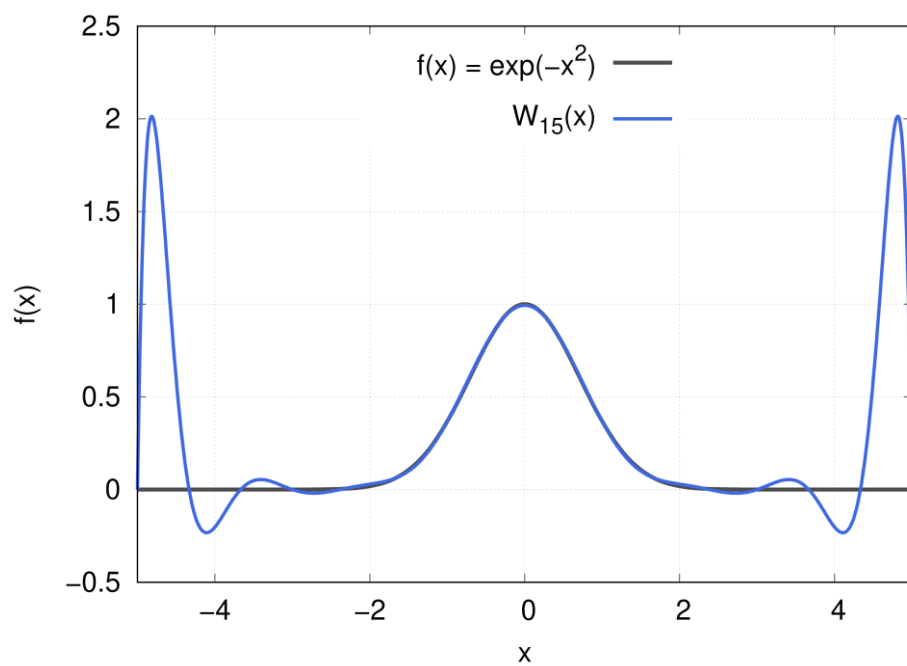
Wykres 1: Wykres reprezentujący interpolację Lagrange'a dla węzłów równoległych dla $n = 5$.



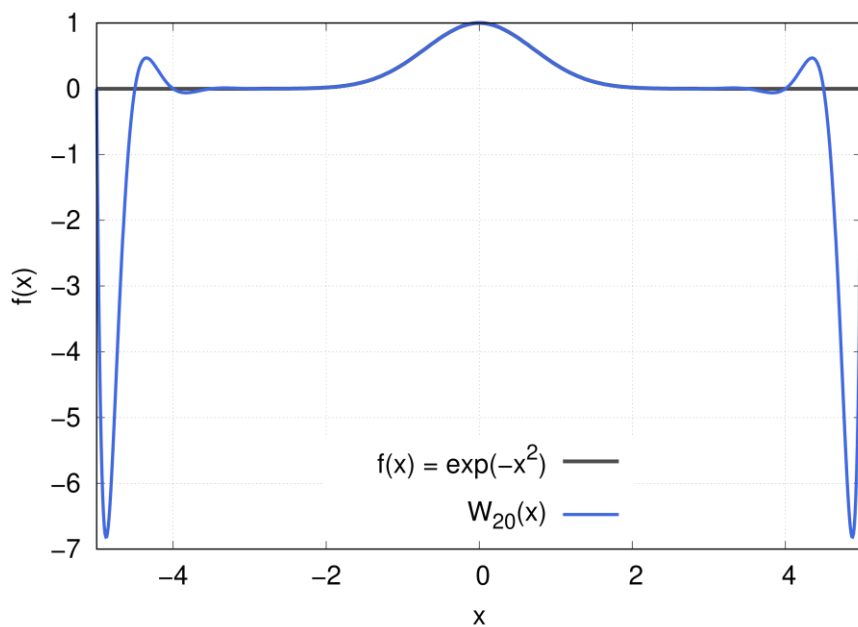
Wykres 2: Wykres reprezentujący interpolację Lagrange'a dla węzłów równoległych dla $n = 10$.



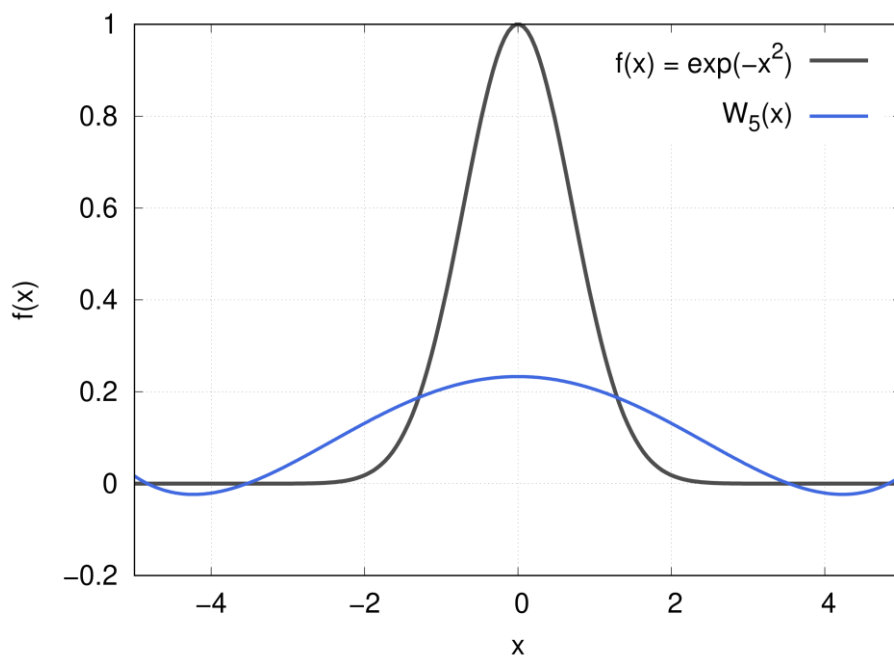
Wykres 3: Wykres reprezentujący interpolację Lagrange'a dla węzłów równoległych dla $n = 15$.



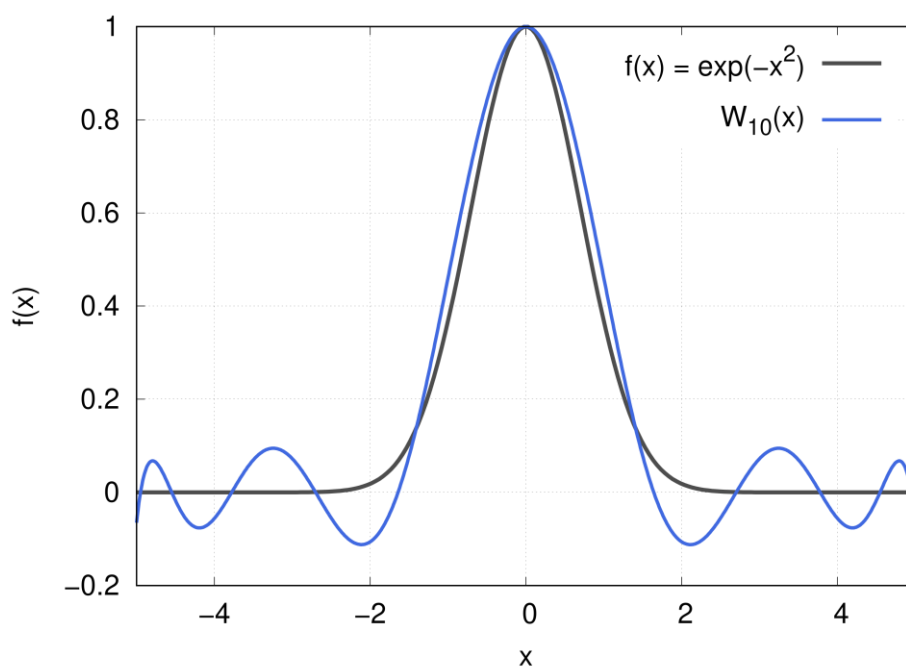
Wykres 4: Wykres reprezentujący interpolację Lagrange'a dla węzłów równoległych dla $n = 20$.



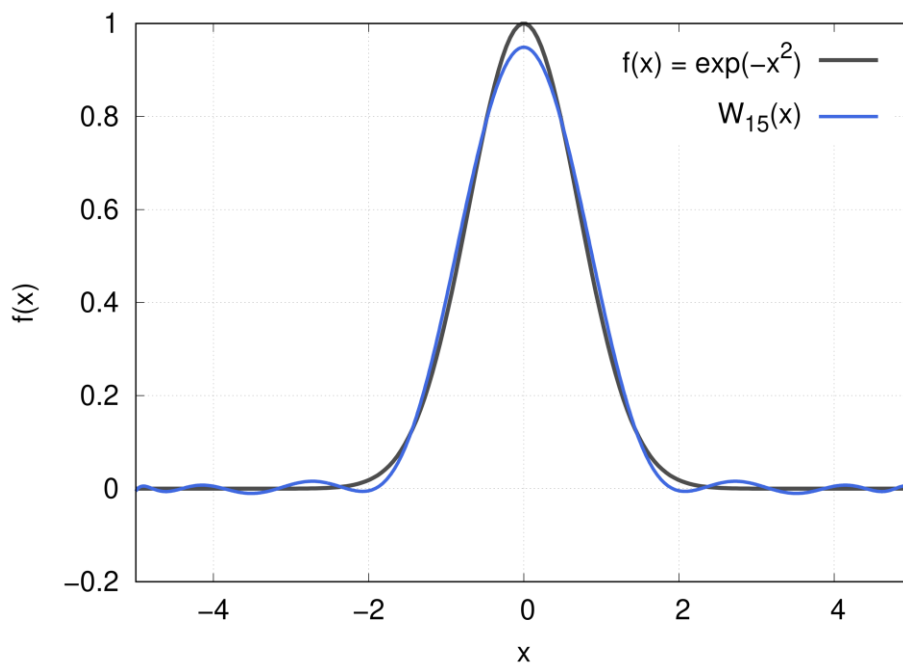
Wykres 5: Wykres reprezentujący interpolację Lagrange'a dla węzłów zoptymalizowanych dla $n = 5$.



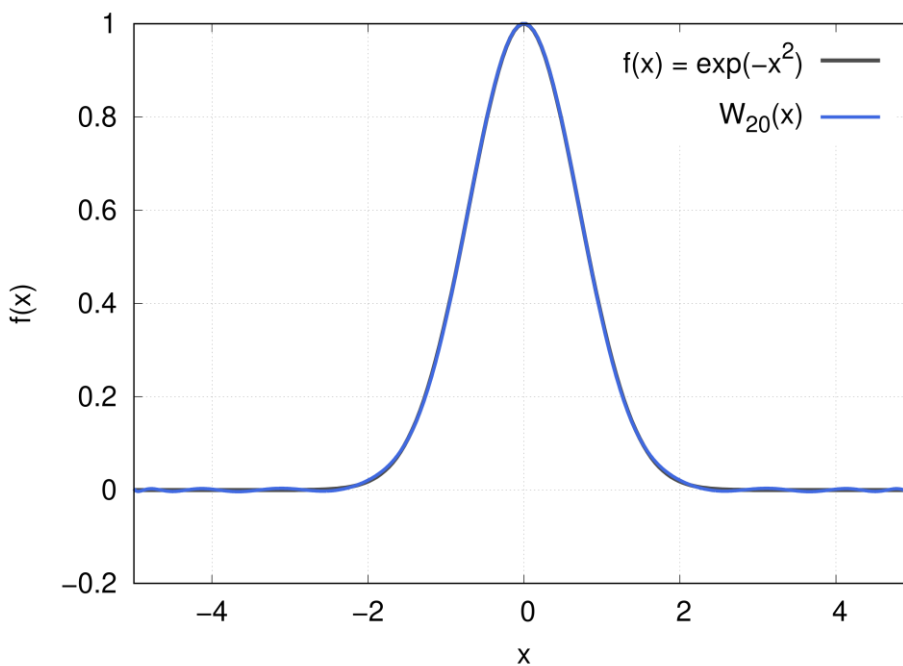
Wykres 6: Wykres reprezentujący interpolację Lagrange'a dla węzłów zoptymalizowanych dla $n = 10$.



Wykres 7: Wykres reprezentujący interpolację Lagrange'a dla węzłów zoptymalizowanych dla $n = 15$.



Wykres 8: Wykres reprezentujący interpolację Lagrange'a dla węzłów zoptymalizowanych dla $n = 20$.



4. Wnioski

Na wykresach 1-4 można zaobserwować jawne zintensyfikowanie interpolacji wraz ze wzrostem liczby węzłów n . Zwiększanie liczby węzłów interpolacji (przy stałych odległościach) nie zawsze prowadzi do mniejszego oszacowania błędu. Wpływ na to mają oscylacje wielomianów wyższych rzędów. Jest to **efekt Rungego** - zadanie jest źle uwarunkowane.

Interpolacja funkcji, której przebieg znacznie różni się od przebiegu wielomianu interpolacyjnego, może nie dawać dobrych wyników przy dużej liczbie węzłów. Wpływ na to mają pojawiające się ekstrema w funkcji interpolującej.

Natomiast na wykresach 5-8 (po optymalizacji) można zauważyć, że przy dobrym doborze węzłów można unieważnić efekt Rungego. Jak widać na wykresie 8, dla $n = 20$ wartości praktycznie nakładają się z wartościami dokładnymi.

Podsumowując można powiedzieć, że interpolacja pozwala na wyznaczenie przybliżonych wartości funkcji w punktach nie będących węzłami, której postać funkcyjna może nawet nie być znana.