Hleb Shypula
286720
26 kwietnia 2020

Sprawozdanie 8

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Interpolacja funkcjami sklejanymi

W przedziale [a, b] mamy n+1 punktów takich że:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Punkty te określają podział przedziału [a, b] na n podprzedziałów tj. $[x_i, x_{i+1}]$.

Funkcję s(x) określoną na przedziale [a, b] nazywamy funkcją sklejaną stopnia m (m≥1) jeżeli:

1) s(x) jest wielomianem stopnia co najwyżej m na każdym podprzedziale $(x_i; x_{i+1})$, i=0, 1, ... , n-1;
2) $s(x) \in C^m$

Punkty x_i nazywamy węzłami funkcji sklejanej. W każdym przedziale (x_i, x_{i+1}) funkcja s(x) jest wielomianem stopnia conajwyżej m:

$$s_i(x) = c_{im}x^m + c_{im-1}x^{m-1} + \cdots + c_{i1}x + c_{i0}, \qquad x \in (x_i; x_{i+1})$$

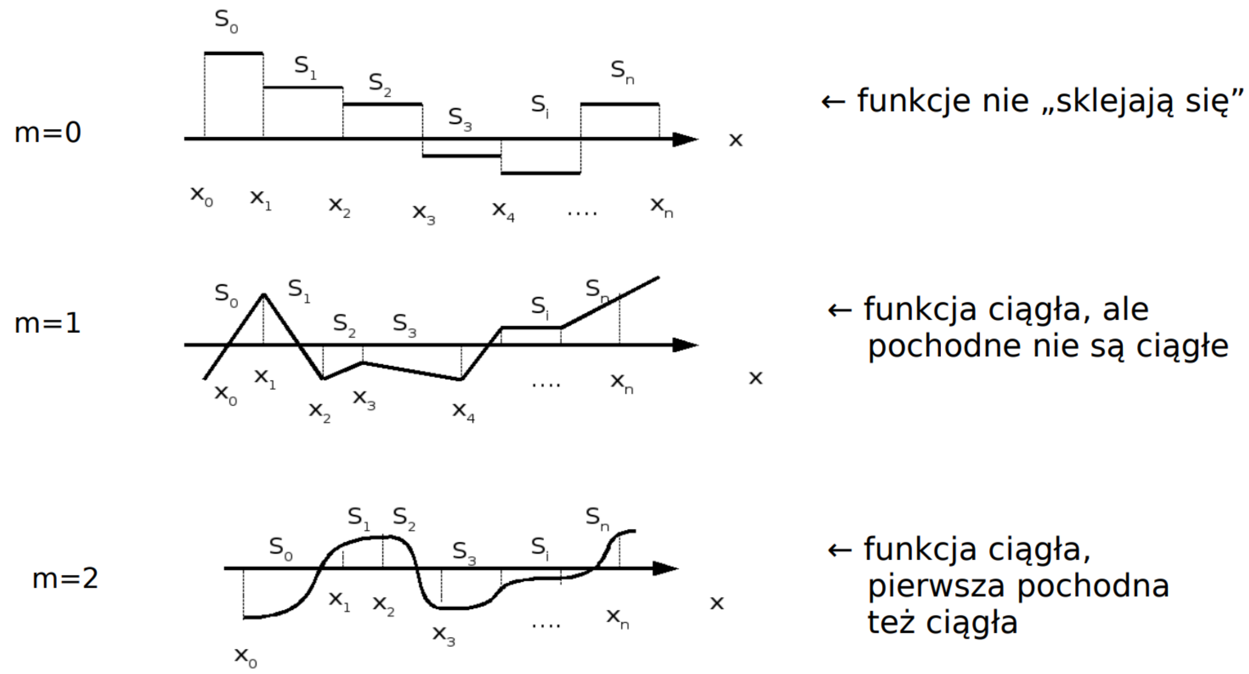
Funkcja interpolująca jest kombinacją liniową elementów bazy $\{s_i(x)\}$:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x), \qquad x \in [a, b]$$

W każdym z n podprzedziałów aby określić s(x) należałoby wyznaczyć m+1 stałych.

Ale żądamy ciągłości pochodnych rzędu 0, 1, 2, ... , m-1 w każdym z węzłów (sklejamy rozwiązania) co daje nam m(n-1) warunków.

Ostatecznie funkcja s(x) zależy jedynie od n(m+1)-m(n-1) = **n+m** parametrów które należy wyznaczyć.



Rysunek 1: Ilustracja metody interpolacji funkcjami sklejanymi dla m = 0, 1, 2.
Źródło: https://bit.ly/2XTKNGq, [dostęp: 21.04.2020].

1.2 Funkcje sklejane trzeciego stopnia (m=3)

Funkcję s(x) nazywamy interpolacyjną funkcją sklejaną stopnia trzeciego dla funkcji f(x), jeżeli

$$s(x_i) = f(x_i) = y_i,\ \ i = 0, 1, \ldots, n;\ \ n \geq 2$$

Do określenia funkcji s(x) stopnia trzeciego konieczne jest wyznaczenie (n+3) parametrów. Ponieważ ilość węzłów jest równa n+1, pozostają 2 stopnie swobody. Musimy nałożyć dwa dodatkowe warunki. Rodzaj tych warunków zależy od funkcji f(x) lub od znajomości jej zachowania w pobliżu końców przedziału [a, b]:

1) 1 rodzaj warunków (1 pochodna)

$$s^{(1)}(a+0) = \alpha_1$$

$$s^{(1)}(b-0) = \beta_1$$

2) 2 rodzaj warumków (2 pochodna)

$$s^{(2)}(a+0) = \alpha_2$$

$$s^{(2)}(b-0) = \beta_2$$

gdzie: α_1, α_2, β_1, β_2 są ustalonymi liczbami.

3) 3 rodzaj warunków stosuje się dla funkcji okresowych.

1.3 Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Oznaczmy

$$M_j = s^{(2)}(x_j), \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

Zgodnie z założeniem druga pochodna funkcji s(x) jest ciągła i liniowa w każdym z podprzedziałów $[x_{i-1}, x_i]$.

Możemy wtedy zapisać:

$$\begin{aligned} s^{(2)}_{i-1}(x) &= M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \\ x &\in [x_{i-1}, x_i] \\ h_i &= x_i - x_{i-1} \end{aligned}$$

Całkując powyższe wyrażenie 2 razy:

$$s^{(1)}_{i-1}(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{h_i} + A_i$$

$$s_{i-1}(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_j} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i$$

Widzimy, że brakuje nam 4 wielkości: M_{i-1}, M_i, A_i, B_i.

Stałe A_i oraz B_i wyznaczamy korzystając z warunku interpolacji:

$$B_i = y_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}$$

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1})$$

W punkcie x_i pochodna musi być ciągła:

$$s^{(1)}_{i-1}(x_i - 0) = \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{3}M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

$$s^{(1)}_{i}(x_i + 0) = -\frac{h_{i+1}}{3}M_i - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$$

Porównując prawe strony dwóch powyższych równań dla każdego z węzłów uzyskamy (n-1) równań, które można zapisać w postaci:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i$$

gdzie:

$$i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) = 6f(x_{i-1}; x_i; x_{i+1})$$

Do układu równań należy dołączyć jeszcze 2 równania wynikające z dodatkowych warunków.

1) Dla warunków z pierwszą pochodną:

$$2M_0 + M_1 = d_0$$

$$d_0 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \alpha_1\right)$$

$$M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

$$d_n = \frac{6}{h_1}\left(\beta_1 - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$$

2) Dla warunków z drugą pochodną:

$$M_0 = \alpha_2 \qquad M_n = \beta_2$$

Po wprowadzeniu warunków brzegowych do układu równań, zapisujemy go w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

Macierz współczynników układu, jest macierzą silnie diagonalnie dominująca. Moduły elementów na diagonali są większe od sumy modułów pozostałych elementów leżących w tym samym wierszu. Układy te mają więc jednoznaczne rozwiązanie – istnieje dokładnie jedna interpolacyjna funkcja sklejana stopnia trzeciego spełniająca przyjęte warunki dodatkowe.

Po rozwiązaniu układu wartość funkcji interpolującej dla x ∈ $[x_{i-1}, x_i]$ (numer podprzedziału: i-1) wyznaczamy według poniższego wzoru:

$$s_{i-1}(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i$$

2. Problem

Naszym zadaniem było napisanie programu do interpolacji przy pomocy funkcji sklejanych będących wielomianami 3 stopnia poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Aby rozwiązać problem, należy rozwiązać układ równań liniowych:

$$A\vec{m} = \vec{d}$$

którego generatorem jest:

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i$$

Mieliśmy napisać –
procedurę do wyznaczania wartości drugich pochodnych w węzłach:

```
void wyznacz_M(double *x_w, double *y_w, double *m,
               int n, double alfa, double beta)
```

gdzie argumentami są:
a) wektor z położeniami węzłów **x_w**,
b) wektor z wartościami funkcji **y_w**,
c) liczbę węzłów **n**,
d) wektor do którego procedura zapisze wartości drugich pochodnych **m**,
e) wartości drugich pochodnych w skrajnych węzłach (**alfa** i **beta**)

procedurę do wyznaczania wartości funkcji w położeniu międzywęzłowym:

```
double wyznacz_Sx(double *x_w, double *y_w, double *m, int n, double x){
        znajdz pierwszy podprzedział (i-1):    x_w[i-1] <= x <= x_w[i]
        Sx=wzór(8)
        return Sx;
}
```

gdzie w porównaniu z poprzednią metodą do argumentow dodano jeszcze aktualną wartość argumentu **x**.

a także program do interpolacji funkcjami sklejanymi, który będzie korzystał z dwóch powyższych procedur.

Przy użyciu programu przeprowadzaliśmy interpolację dwóch funkcji:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad\qquad f_2(x) = cos(2x)$$

Przyjęliśmy warunki z drugą pochodną równą 0 na obu krańcach przedziału interpolacji: $\alpha = \beta = 0$ Interpolację wykonaliśmy w przedziale $x \in [-5, 5]$ dla liczby węzłów n = 5, 8, 21.

Sporządziliśmy wykresy funkcji interpolowanej f(x) i interpolującej s(x) dla każdego przypadku na jednym rysunku.

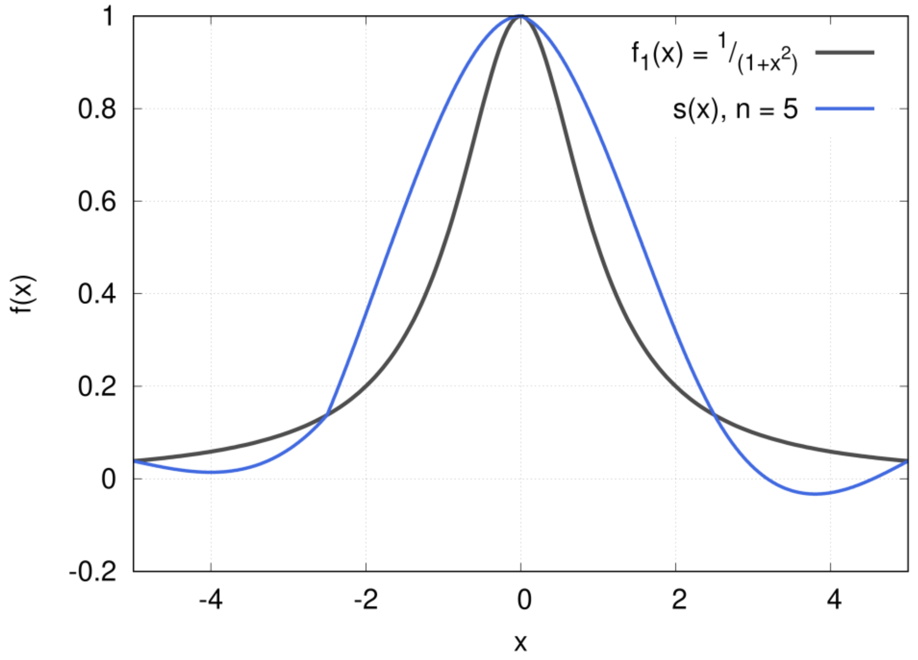
A także mieliśmy dla a funkcji $f_1(x)$ oraz n = 10 węzłów w przedziale $x \in [-5, 5]$ wyznaczyć wartości drugich pochodnych, porównać je z ”dokładniejszymi” wartościami oraz sporządzić odpowiedni wykres. Wartości dokładne liczyliśmy zgodnie z wzorem:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x-\delta x) - 2f(x) + f(x+\delta x)}{(\delta x)^2}$$

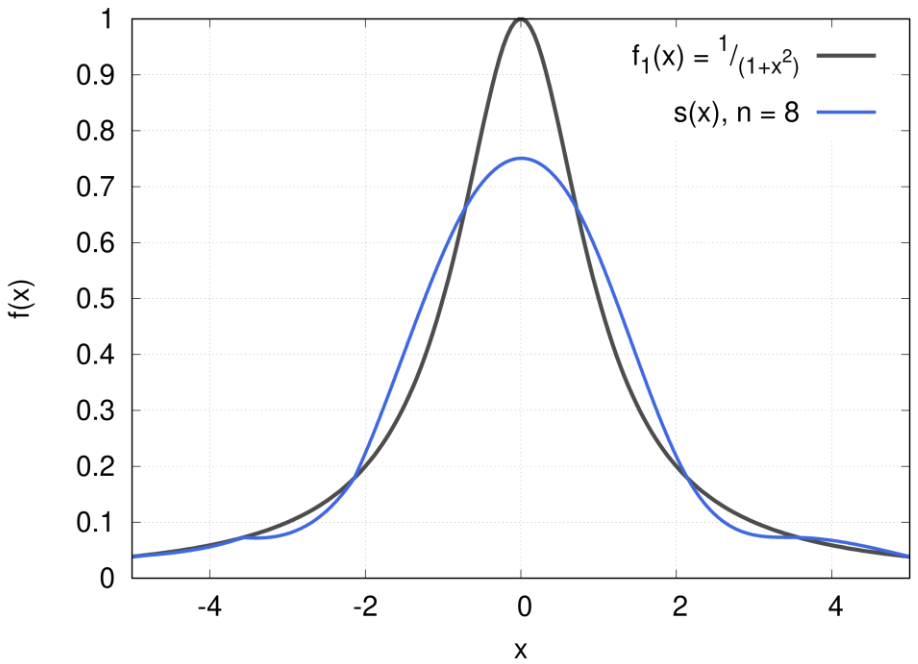
gdzie: $\delta x = 0.01$

3. Wyniki

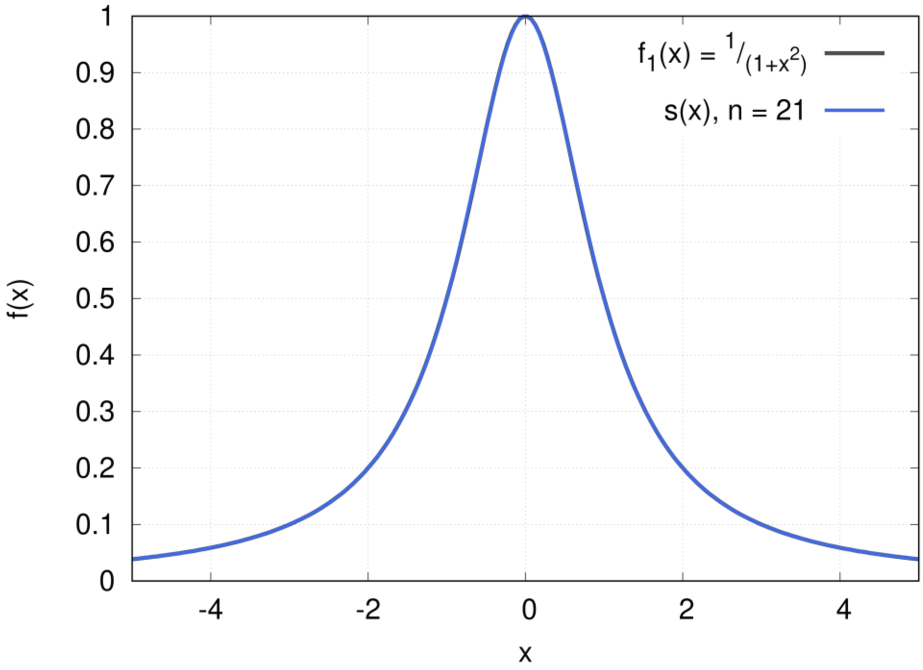
Wykres 1: Wykres funkcji f_1 oraz jej interpolacji dla liczby węzłów n = 5.



Wykres 2: Wykres funkcji f_1 oraz jej interpolacji dla liczby węzłów n = 8.

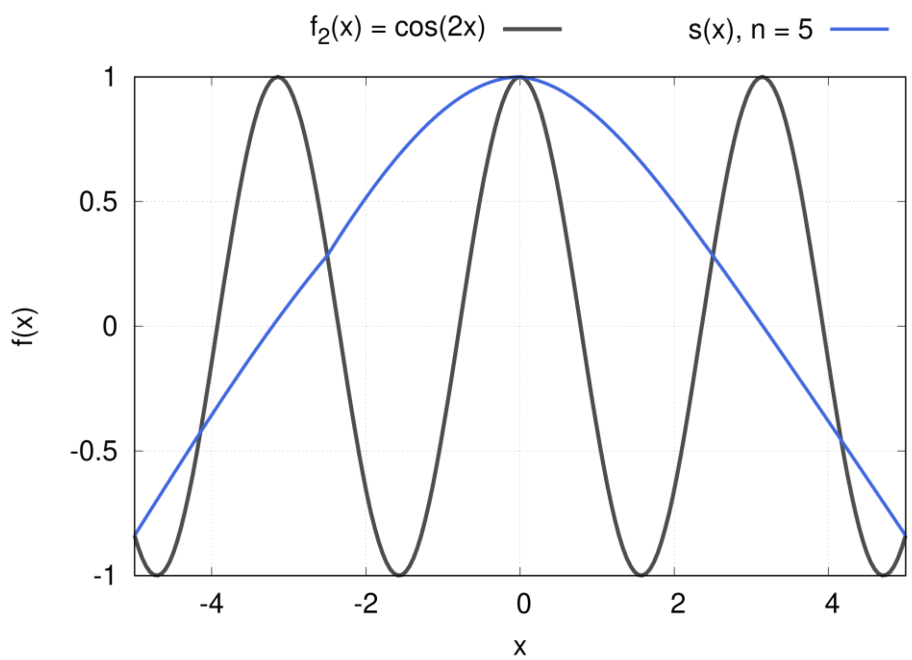


Wykres 3: Wykres funkcji f_1 oraz jej interpolacji dla liczby węzłów n = 21.

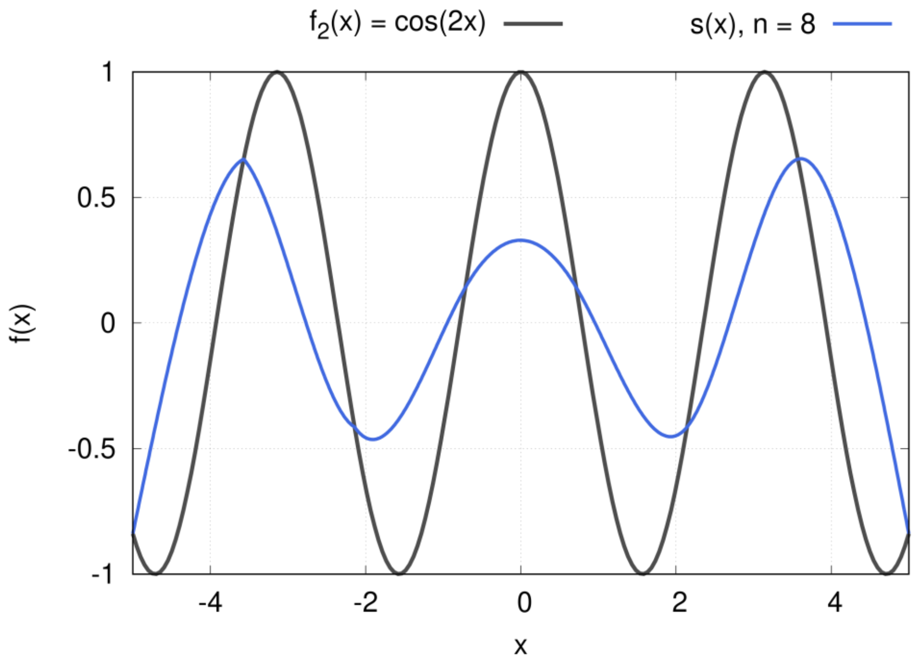


Jak widać dla funkcji f_1, im większe jest n, tym bardziej dokładne jest dopasowanie interpolacji do funkcji.

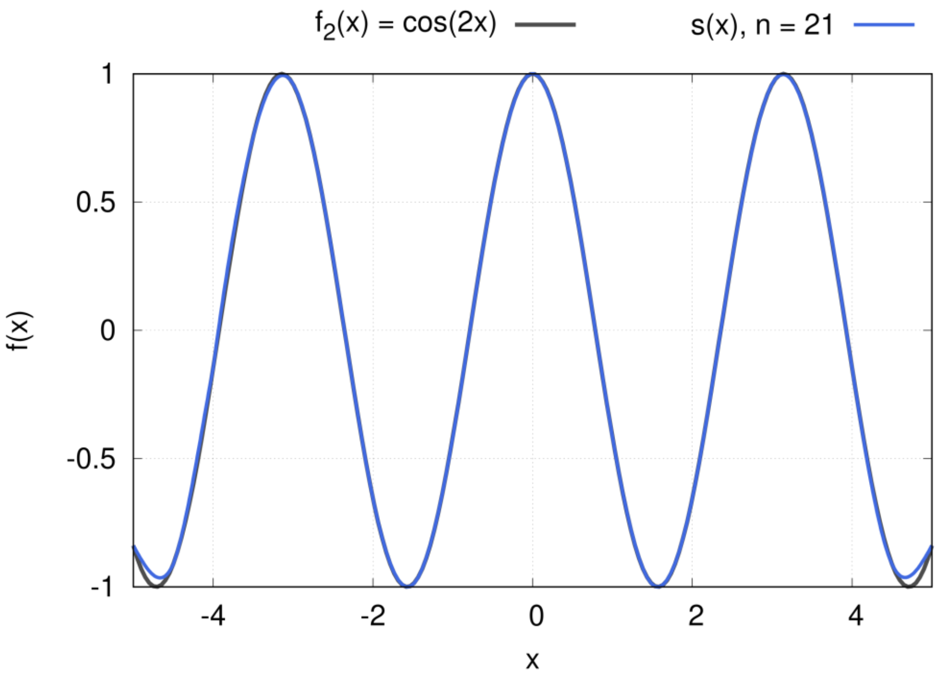
Wykres 4: Wykres funkcji f_2 oraz jej interpolacji dla liczby węzłów n = 5.



Wykres 5: Wykres funkcji f_2 oraz jej interpolacji dla liczby węzłów n = 8.

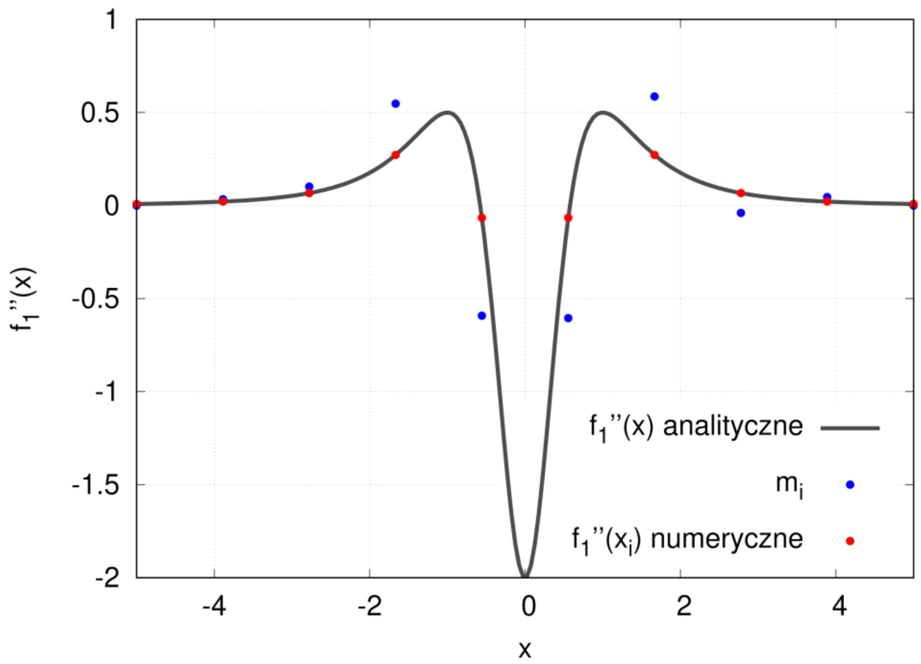


Wykres 6: Wykres funkcji f_2 oraz jej interpolacji dla liczby węzłów n = 21.



Jak widać dla funkcji f_2, dla n = 5 interpolacja jest bardzo niedokładna, natomiast przy zwiększeniu liczby węzłów sytuacja się polepsza, i dla n = 21 dopasowanie pokrywa się z funkcją.

Wykres 7: Wartości drugich pochodnych wyznaczone analityczne oraz numeryczn dla liczby węzłów n = 10.



4. Wnioski

Na wykresach 1-3 można zaobserwować jawne polepszenie interpolacji wraz ze wzrostem liczby węzłów n. Jak już wyznaczono w sprawozdaniu 7, zwiększanie liczby węzłów interpolacji nie zawsze prowadzi do mniejszego oszacowania błędu. Ale w naszym przypadku nie zaobserwowano efektu Rungego.

Na wykresach 4-6 sytuacja wygląda podobnie. Przy zwiększeniu liczby węzłów zauważono polepszenie jakości interpolacji i nie zachodzi efekt Rungego.

Na wykresie pochodnych widzimy niewielkie rozchodzenia wartości numerycznych oraz analitycznych.

Podsumowując można powiedzieć, że interpolacja pozwala na wyznaczenie przybliżonych wartości funkcji w punktach nie będących węzłami, której postać funkcyjna może nawet nie być znana.