Modelos e Aplicações - Aula 12

Caio Lopes, Henrique Lecco

ICMC - USP

6 de agosto de 2020

Tipos

Seja $\mathcal{M}$ um modelo para o vocabulário L.
Dado $A \subset M$, considere o vocabulário L_A a extensão simples de L em que cada elemento de A é adicionado como uma constante.

Tipos

Seja $\mathcal{M}$ um modelo para o vocabulário L.
Dado $A \subset M$, considere o vocabulário L_A a extensão simples de L em que cada elemento de A é adicionado como uma constante.
Dizemos que um tipo $p(x)$ é uma coleção de L_A-fórmulas com x livre tal que $Th(\mathcal{M}) \cup p(x)$ é consistente, em que $Th(\mathcal{M})$ é o conjunto das sentenças satisfeitas por $\mathcal{M}$.

Tipos

Seja $\mathcal{M}$ um modelo para o vocabulário L.
Dado $A \subset M$, considere o vocabulário L_A a extensão simples de L em que cada elemento de A é adicionado como uma constante.
Dizemos que um tipo $p(x)$ é uma coleção de L_A-fórmulas com x livre tal que $Th(\mathcal{M}) \cup p(x)$ é consistente, em que $Th(\mathcal{M})$ é o conjunto das sentenças satisfeitas por $\mathcal{M}$.

Por exemplo, seja $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ um modelo para o vocabulário de ordens.
Considere o tipo $p(x) = \{\varphi_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, em que $\varphi_n(x) \equiv n < x$.

Tipos

Seja $\mathcal{M}$ um modelo para o vocabulário L.
Dado $A \subset M$, considere o vocabulário L_A a extensão simples de L em que cada elemento de A é adicionado como uma constante.
Dizemos que um tipo $p(x)$ é uma coleção de L_A-fórmulas com x livre tal que $Th(\mathcal{M}) \cup p(x)$ é consistente, em que $Th(\mathcal{M})$ é o conjunto das sentenças satisfeitas por $\mathcal{M}$.

Por exemplo, seja $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ um modelo para o vocabulário de ordens.
Considere o tipo $p(x) = \{\varphi_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, em que $\varphi_n(x) \equiv n < x$.
Isto é, $p(x)$ contém as fórmulas "n é menor que x", para cada $n \in \mathbb{N}$.

Tipos

Seja $\mathcal{M}$ um modelo para o vocabulário L.
Dado $A \subset M$, considere o vocabulário L_A a extensão simples de L em que cada elemento de A é adicionado como uma constante.
Dizemos que um tipo $p(x)$ é uma coleção de L_A-fórmulas com x livre tal que $Th(\mathcal{M}) \cup p(x)$ é consistente, em que $Th(\mathcal{M})$ é o conjunto das sentenças satisfeitas por $\mathcal{M}$.

Por exemplo, seja $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ um modelo para o vocabulário de ordens.
Considere o tipo $p(x) = \{\varphi_n(x) \, : \, n \in \mathbb{N}\}$, em que $\varphi_n(x) \equiv n < x$.
Isto é, $p(x)$ contém as fórmulas "n é menor que x", para cada $n \in \mathbb{N}$.

Esse tipo não é realizado em $\mathbb{N}$, pois não há nenhum elemento que é maior que todos os outros.

Tipos completos

Dizemos que um tipo $p(x)$ é completo quando é maximal, ou seja, para toda fórmula $\varphi(x)$, ou $\varphi(x) \in p(x)$ ou $\neg\varphi(x) \in p(x)$.
Em geral, quando dizemos "tipo", referimo-nos a um tipo completo.
Caso contrário, especifica-se que se trata de um tipo parcial.

Tipos completos

Dizemos que um tipo $p(x)$ é completo quando é maximal, ou seja, para toda fórmula $\varphi(x)$, ou $\varphi(x) \in p(x)$ ou $\neg\varphi(x) \in p(x)$.
Em geral, quando dizemos "tipo", referimo-nos a um tipo completo. Caso contrário, especifica-se que se trata de um tipo parcial.

Denota-se por $\mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}(A)$ o conjunto de todos os n-tipos (isto é, com n variáveis livres) completos de L_A.

Espaços de Stone

Podemos definir uma topologia sobre $\mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}(A)$.
Defina, para uma fórmula φ,

$$[\varphi] = \{p \in \mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}(A) \,:\, \varphi \in p\}$$

Veja que

- $[\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \cap [\psi]$;
- $[\varphi \vee \psi] = [\varphi] \cup [\psi]$.

Espaços de Stone

Podemos definir uma topologia sobre $\mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}(A)$.
Defina, para uma fórmula φ,

$$[\varphi] = \{p \in \mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}(A) \, : \, \varphi \in p\}$$

Veja que

- $[\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \cap [\psi]$;
- $[\varphi \vee \psi] = [\varphi] \cup [\psi]$.

A topologia é gerada tomando os $[\varphi]$ como os abertos básicos.

Espaços de Stone

Podemos definir uma topologia sobre $\mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}(A)$.
Defina, para uma fórmula φ,

$$[\varphi] = \{p \in \mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}(A) \,:\, \varphi \in p\}$$

Veja que

- $[\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \cap [\psi]$;
- $[\varphi \vee \psi] = [\varphi] \cup [\psi]$.

A topologia é gerada tomando os $[\varphi]$ como os abertos básicos.

Veja que os abertos básicos são fechados, pois os tipos são completos, logo, o complementar de $[\varphi]$ é $[\neg\varphi]$.

O espaço $\mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}(A)$ é:

- Compacto: seja $\{[\varphi_i]\}_{i\in I}$ uma cobertura que não admite subcobertura finita. Então, para todo conjunto finito de φ_i's, existirá um tipo que não contém nenhum deles, portanto, contém as negações (pois é completo).
  Assim, todo subconjunto finito de $\neg\varphi_i$'s admite modelo, e pelo Teorema da Compacidade obtemos uma contradição.

O espaço $\mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}(A)$ é:

- Compacto: seja $\{[\varphi_i]\}_{i\in I}$ uma cobertura que não admite subcobertura finita. Então, para todo conjunto finito de φ_i's, existirá um tipo que não contém nenhum deles, portanto, contém as negações (pois é completo).
  Assim, todo subconjunto finito de $\neg\varphi_i$'s admite modelo, e pelo Teorema da Compacidade obtemos uma contradição.
- Totalmente desconexo: dados dois tipos $p \neq q$, existe uma fórmula ψ que pertence a p e cuja negação pertence a q. Assim, $[\psi]$ é um aberto e fechado separando p e q.

Relações entre lógica e topologia

O espaço de Stone nos permite caracterizar propriedades de lógica em termos de topologia.
Por exemplo:

Definição

Dado um espaço topológico X, p é um ponto isolado se $\{p\}$ é aberto.

Relações entre lógica e topologia

O espaço de Stone nos permite caracterizar propriedades de lógica em termos de topologia.
Por exemplo:

Definição

Dado um espaço topológico X, p é um ponto isolado se $\{p\}$ é aberto.

Definição

Dizemos que um tipo p é isolado se existe uma L_A-fórmula ϕ tal que para todo $\psi \in p$, $\mathcal{M} \models \forall x\,(\phi(x) \to \psi(x))$

Seja p um ponto isolado no espaço de Stone.
Então, $\{p\} = [\varphi]$, para alguma fórmula φ.

Seja p um ponto isolado no espaço de Stone.
Então, $\{p\} = [\varphi]$, para alguma fórmula φ.

Vamos mostrar que φ é a fórmula tal qual na definição de tipo isolado.

Seja p um ponto isolado no espaço de Stone.
Então, $\{p\} = [\varphi]$, para alguma fórmula φ.

Vamos mostrar que φ é a fórmula tal qual na definição de tipo isolado.
p é o único tipo que contém a fórmula φ.
Desse modo, dada uma fórmula $\psi \in p$, um tipo contendo $\neg\psi$ não pode conter φ, isto é, deve conter $\neg\varphi$.
Assim, não pode existir um modelo que satisfaz $\varphi \wedge \neg\psi$.

Por outro lado, seja p um tipo isolado.
Então, para toda fórmula $\psi \in p$, $\mathcal{M} \models \forall x\,(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$.

Por outro lado, seja p um tipo isolado.
Então, para toda fórmula $\psi \in p$, $\mathcal{M} \models \forall x\,(\varphi(x) \to \psi(x))$.

Suponha que $[\varphi] \neq \{p\}$.
Então, deve haver mais de um tipo em $[\varphi]$. Sejam $p \neq q$ tipos de $[\varphi]$.

Por outro lado, seja p um tipo isolado.
Então, para toda fórmula $\psi \in p$, $\mathcal{M} \models \forall x\,(\varphi(x) \to \psi(x))$.

Suponha que $[\varphi] \neq \{p\}$.
Então, deve haver mais de um tipo em $[\varphi]$. Sejam $p \neq q$ tipos de $[\varphi]$.

Seja ψ uma fórmula que pertence a p mas não a q. Então $\neg\psi \in q$.
Mas temos que ψ é uma consequência de φ, logo é uma contradição que φ e $\neg\psi$ estejam simultaneamente no tipo q, pois um tipo deve ser consistente.

Tipos em ACF

Queremos mostrar que os tipos em um corpo algebricamente fechado são unicamente determinados pelos ideiais primos do anel de polinômios.
Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathbb{L}$ um subconjunto de $\mathbb{K}$.

Tipos em ACF

Queremos mostrar que os tipos em um corpo algebricamente fechado são unicamente determinados pelos ideiais primos do anel de polinômios.
Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathbb{L}$ um subconjunto de $\mathbb{K}$.
Assumimos que $\mathbb{L}$ é um corpo. Essa hipótese não traz nenhuma perda de generalidade, mas não vamos provar isso.

Tipos em ACF

Queremos mostrar que os tipos em um corpo algebricamente fechado são unicamente determinados pelos ideiais primos do anel de polinômios.
Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathbb{L}$ um subconjunto de $\mathbb{K}$.
Assumimos que $\mathbb{L}$ é um corpo. Essa hipótese não traz nenhuma perda de generalidade, mas não vamos provar isso.

Dado $p \in \mathcal{S}_n^{\mathbb{L}}(\mathbb{K})$, definimos:

$$I_p = \{f(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{L}[x_1, ..., x_n] \,:\, (f(\overline{x}) = 0) \in p\}$$

I_p é um ideal.

Tipos em ACF

Queremos mostrar que os tipos em um corpo algebricamente fechado são unicamente determinados pelos ideiais primos do anel de polinômios.
Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathbb{L}$ um subconjunto de $\mathbb{K}$.
Assumimos que $\mathbb{L}$ é um corpo. Essa hipótese não traz nenhuma perda de generalidade, mas não vamos provar isso.

Dado $p \in \mathcal{S}_n^{\mathbb{L}}(\mathbb{K})$, definimos:

$$I_p = \{f(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{L}[x_1, ..., x_n] : (f(\overline{x}) = 0) \in p\}$$

I_p é um ideal.
Além disso, se $fg(x) = 0$, então $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$, logo, se $fg \in I_p$, então $f \in I_p$ ou $g \in I_p$.

Vamos mostrar que, se p e q são tipos distintos, então $I_p \neq I_q$.

Vamos mostrar que, se p e q são tipos distintos, então $I_p \neq I_q$.
Seja φ uma fórmula tal que $\varphi \in p$ e $\neg\varphi \in q$.
Como ACF elimina quantificadores, φ é uma fórmula do tipo:

$$\bigvee_i \left(\bigwedge_j f_{ij}(\overline{x}) = 0 \wedge \bigwedge_l g_{il}(\overline{x}) \neq 0 \right)$$

com f_{ij} e g_{il} polinômios de $\mathbb{K}[\overline{x}]$

Vamos mostrar que, se p e q são tipos distintos, então $I_p \neq I_q$.
Seja φ uma fórmula tal que $\varphi \in p$ e $\neg\varphi \in q$.
Como ACF elimina quantificadores, φ é uma fórmula do tipo:

$$\bigvee_i \left(\bigwedge_j f_{ij}(\overline{x}) = 0 \wedge \bigwedge_l g_{il}(\overline{x}) \neq 0 \right)$$

com f_{ij} e g_{il} polinômios de $\mathbb{K}[\overline{x}]$

Se $I_p = I_q$, então, para cada f_{ij} e g_{il} aparecendo na fórmula acima, temos:

- $f_{ij}(\overline{x}) = 0 \in p \Leftrightarrow f_{ij}(\overline{x}) = 0 \in q$;
- $g_{il}(\overline{x}) = 0 \in p \Leftrightarrow g_{il}(\overline{x}) = 0 \in q$.

Mas, desse modo, $\varphi \in p \Leftrightarrow \varphi \in q$, uma contradição.

Por outro lado, seja $I \in Spec(\mathbb{L}[\overline{x}])$.
Então, existe um ideal $J \in Spec(\mathbb{K}[\overline{x}])$ tal que $J \cap \mathbb{L}[\overline{x}] = I$.

Por outro lado, seja $I \in Spec(\mathbb{L}[\overline{x}])$.
Então, existe um ideal $J \in Spec(\mathbb{K}[\overline{x}])$ tal que $J \cap \mathbb{L}[\overline{x}] = I$.

Seja $\mathbb{F}$ o fecho algébrico do corpo de frações de $\frac{\mathbb{K}[\overline{x}]}{J}$.
Se $p = \{\varphi(\overline{x}) \,:\, \mathbb{F} \models \varphi(\overline{x})\}$, então $I_p = I$.
Isso constitui, então, uma bijeção entre os tipos e os ideais primos.

Topologia de Zariski

Dado um anel A, podemos tomar uma topologia sobre $\text{Spec}(A)$ definindo os fechados como uniões finitas e interseções de conjuntos da seguinte forma:
$\{I \in \text{Spec}(A) \ : \ a_1, ..., a_m \in I\}$, para cada $a_1, ..., a_m \in I$

Topologia de Zariski

Dado um anel A, podemos tomar uma topologia sobre $\text{Spec}(A)$ definindo os fechados como uniões finitas e interseções de conjuntos da seguinte forma:
$\{I \in \text{Spec}(A) \, : \, a_1, ..., a_m \in I\}$, para cada $a_1, ..., a_m \in I$
Essa é a topologia de Zariski em $\text{Spec}(A)$.

Topologia de Zariski

Dado um anel A, podemos tomar uma topologia sobre $\mathrm{Spec}(A)$ definindo os fechados como uniões finitas e interseções de conjuntos da seguinte forma:
$\{I \in \mathrm{Spec}(A) \ : \ a_1, ..., a_m \in I\}$, para cada $a_1, ..., a_m \in I$
Essa é a topologia de Zariski em $\mathrm{Spec}(A)$.

A função $f : \mathcal{S}_n^{\mathbb{K}}(\mathbb{L}) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{L}[\overline{x}])$ que leva $p \mapsto I_p$ é contínua.

Topologia de Zariski

Dado um anel A, podemos tomar uma topologia sobre Spec(A) definindo os fechados como uniões finitas e interseções de conjuntos da seguinte forma:
$\{I \in \mathrm{Spec}(A) \,:\, a_1, ..., a_m \in I\}$, para cada $a_1, ..., a_m \in I$
Essa é a topologia de Zariski em Spec(A).

A função $f : \mathcal{S}_n^{\mathbb{K}}(\mathbb{L}) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{L}[\overline{x}])$ que leva $p \mapsto I_p$ é contínua.
Basta ver que $f^{-1}(\{I \in \mathrm{Spec}(\mathbb{L}[\overline{x}]) \,:\, f_1, ..., f_m \in I\}) = \{p \in \mathcal{S}_n^{\mathbb{K}}(\mathbb{L}) \,:\, f_1(\overline{x}) = 0 \wedge ... \wedge f_m(\overline{x}) = 0 \in p\}$
Esse conjunto é fechado. Como a imagem inversa de um fechado é fechado, a função é contínua.

Consequência:
$\mathrm{Spec}(\mathbb{K}[\overline{x}])$ é compacto, com a topologia de Zariski.

No entanto, quando falamos de topologia de Zariski, geralmente não estamos nos referindo ao espaço de ideais primos, mas sim às variedades afins.

No entanto, quando falamos de topologia de Zariski, geralmente não estamos nos referindo ao espaço de ideais primos, mas sim às variedades afins.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo.
Seja $S \subset \mathbb{K}[\overline{x}]$. Consideramos $V(S) = \{\overline{x} \in \mathbb{K}^n \, : \, \forall f \in S \, f(\overline{x}) = 0\}$.

No entanto, quando falamos de topologia de Zariski, geralmente não estamos nos referindo ao espaço de ideais primos, mas sim às variedades afins.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo.
Seja $S \subset \mathbb{K}[\overline{x}]$. Consideramos $V(S) = \{\overline{x} \in \mathbb{K}^n : \forall f \in S\, f(\overline{x}) = 0\}$.

Damos atenção especial aos casos em que S é um ideal de $\mathbb{K}[\overline{x}]$. Mas, de qualquer forma, $V(S) = V(\langle S \rangle)$, em que $\langle S \rangle$ é o ideal gerado pelo conjunto S.

Observe as seguintes propriedades, dados $I, J \lhd \mathbb{K}[\overline{x}]$:

- $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$;
- $V(I) \cap V(J) = V(I + J)$.

Observe as seguintes propriedades, dados $I, J \lhd \mathbb{K}[\overline{x}]$:

- $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$;
- $V(I) \cap V(J) = V(I + J)$.

Os conjuntos da forma $V(I)$, em que I é um ideal do anel de polinômios, serão, então, os fechados da Topologia de Zariski sobre $\mathbb{K}^n$.

Conjuntos algébricos

Então, conjuntos fechados na topologia de Zariski são, simplesmente, conjuntos de soluções para um sistema de polinômios em n variáveis. Chamamos esses conjuntos de conjuntos algébricos.

Conjuntos algébricos

Então, conjuntos fechados na topologia de Zariski são, simplesmente, conjuntos de soluções para um sistema de polinômios em n variáveis. Chamamos esses conjuntos de conjuntos algébricos.

Há uma interpretação em termos de modelos para esses conjuntos: são conjuntos *definíveis*

Conjuntos algébricos

Então, conjuntos fechados na topologia de Zariski são, simplesmente, conjuntos de soluções para um sistema de polinômios em n variáveis. Chamamos esses conjuntos de conjuntos algébricos.

Há uma interpretação em termos de modelos para esses conjuntos: são conjuntos *definíveis*

Definição

Um conjunto $X \subset M^n$ é definível quando $\overline{x} \in X \Leftrightarrow \varphi(\overline{x})$, para alguma fórmula φ com n variáveis livres.

Conjuntos definíveis

Os conjuntos definíveis são, portanto, fechados por:

- Interseções finitas, uniões finitas e complementar;
- Projeções (*i.e.* escolher uma determinada coordenada);

Conjuntos definíveis

Os conjuntos definíveis são, portanto, fechados por:

- Interseções finitas, uniões finitas e complementar;
- Projeções (*i.e.* escolher uma determinada coordenada);

Façamos o exemplo de interseções finitas: sejam X e Y dois subconjuntos definíveis de M. Então $x \in X \Leftrightarrow \varphi(x)$ e $y \in Y \Leftrightarrow \psi(y)$.

Conjuntos definíveis

Os conjuntos definíveis são, portanto, fechados por:

- Interseções finitas, uniões finitas e complementar;
- Projeções (*i.e.* escolher uma determinada coordenada);

Façamos o exemplo de interseções finitas: sejam X e Y dois subconjuntos definíveis de M. Então $x \in X \Leftrightarrow \varphi(x)$ e $y \in Y \Leftrightarrow \psi(y)$.
Portanto, $x \in X \cap Y \Leftrightarrow \varphi(x) \wedge \psi(x)$.
Isso conclui que $X \cap Y$ é definível.

Exemplos

Ideais finitamente gerados:
Seja $I \lhd A$, $I = \{a_1, ..., a_r\}$.
Então, $x \in I$ se e somente se existem $x_1, ..., x_r \in A$ tais que
$x = x_1 a_1 + ... + x_r a_r$.

Exemplos

Ideais finitamente gerados:
Seja $I \lhd A$, $I = \{a_1, ..., a_r\}$.
Então, $x \in I$ se e somente se existem $x_1, ..., x_r \in A$ tais que $x = x_1 a_1 + ... + x_r a_r$.
A fórmula $\varphi(x) \equiv \exists x_1 ... \exists x_r \, x = x_1 a_1 + ... + x_r a_r$ define I.

Exemplos

Ideais finitamente gerados:
Seja $I \lhd A$, $I = \{a_1, ..., a_r\}$.
Então, $x \in I$ se e somente se existem $x_1, ..., x_r \in A$ tais que
$x = x_1 a_1 + ... + x_r a_r$.
A fórmula $\varphi(x) \equiv \exists x_1 ... \exists x_r \, x = x_1 a_1 + ... + x_r a_r$ define I.

O conjunto $\{0\}$ em $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$.
É definido pela fórmula $\varphi(x) \equiv \forall y \, x \leq y$.

Conjuntos interpretáveis

Expandimos, agora, a definição para conjuntos interpretáveis.
Definimos indutivamente:

- Todo conjunto definível é interpretável;
- Se $A \subset M^n$ é interpretável e $E \subset A^2$ é uma relação de equivalência definível, então $\frac{A}{E}$ é interpretável.

Conjuntos interpretáveis

Expandimos, agora, a definição para conjuntos interpretáveis.
Definimos indutivamente:

- Todo conjunto definível é interpretável;
- Se $A \subset M^n$ é interpretável e $E \subset A^2$ é uma relação de equivalência definível, então $\frac{A}{E}$ é interpretável.

Veja que, assim, podemos fazer quocientes de anéis por ideais.
Seja A um anel e I um ideal finitamente gerado.

Conjuntos interpretáveis

Expandimos, agora, a definição para conjuntos interpretáveis.
Definimos indutivamente:

- Todo conjunto definível é interpretável;
- Se $A \subset M^n$ é interpretável e $E \subset A^2$ é uma relação de equivalência definível, então $\frac{A}{E}$ é interpretável.

Veja que, assim, podemos fazer quocientes de anéis por ideais.
Seja A um anel e I um ideal finitamente gerado.
A é definível (por $x = x$).
Seja $\varphi(x)$ a função que define I. Se tomarmos a relação $R(x, y) \equiv \varphi(x - y)$, então:

$$\frac{A}{I} = \frac{A}{R}$$

Modelos estáveis

Estabilidade é um conceito importante em Teoria de Modelos.
É uma medida que limita a quantidade máxima de tipos em um modelo.

Definição

Dizemos que um modelo é κ-estável, para um cardinal κ, se para qualquer subconjunto $A \subset M^n$, existem no máximo κ tipos completos sobre A.

Modelos estáveis

Estabilidade é um conceito importante em Teoria de Modelos.
É uma medida que limita a quantidade máxima de tipos em um modelo.

Definição

Dizemos que um modelo é κ-estável, para um cardinal κ, se para qualquer subconjunto $A \subset M^n$, existem no máximo κ tipos completos sobre A.

Também precisamos definir saturação:

Definição

Dizemos que um modelo é κ-saturado, para um cardinal κ, se para qualquer subconjunto $A \subset M^n$ de cardinalidade no máximo κ. $\mathcal{M}$ realiza todos os tipos completos sobre A.

Rank de Morley

Seja $\mathcal{M}$ um modelo ω-saturado.
Dizmos que o rank de Morley de um subconjunto definível $X \subset M$ é:

- $MR(X) \geq 0$ se X é não vazio;
- $MR(X) \geq k+1$ se X contém enumeráveis subconjuntos definíveis disjuntos cujos ranks são no mínimo k;
- $MR(X) \geq \alpha$, com α um ordinal limite, se $MR(X) \geq \xi$, para todo $\xi < \alpha$.

Rank de Morley

Seja $\mathcal{M}$ um modelo ω-saturado.
Dizmos que o rank de Morley de um subconjunto definível $X \subset M$ é:

- $MR(X) \geq 0$ se X é não vazio;
- $MR(X) \geq k+1$ se X contém enumeráveis subconjuntos definíveis disjuntos cujos ranks são no mínimo k;
- $MR(X) \geq \alpha$, com α um ordinal limite, se $MR(X) \geq \xi$, para todo $\xi < \alpha$.

$MR(X) = k$ se $MR(X) \geq k$ mas $MR(X) \ngeq k+1$.

Exemplos

Geralmente se buscam casos em que estruturas têm rank finito.

- Grupos finitos (rank 0);

Exemplos

Geralmente se buscam casos em que estruturas têm rank finito.

- Grupos finitos (rank 0);
- Corpos algebricamente fechados (um corpo é algebricamente fechado se e só se o seu rank é finito);

Exemplos

Geralmente se buscam casos em que estruturas têm rank finito.

- Grupos finitos (rank 0);
- Corpos algebricamente fechados (um corpo é algebricamente fechado se e só se o seu rank é finito);
- Grupos algébricos (variedades algébricas, isto é, fechados na topologia de Zariski);

Exemplos

Geralmente se buscam casos em que estruturas têm rank finito.

- Grupos finitos (rank 0);
- Corpos algebricamente fechados (um corpo é algebricamente fechado se e só se o seu rank é finito);
- Grupos algébricos (variedades algébricas, isto é, fechados na topologia de Zariski);
- Grupos livres.

Exemplos

Geralmente se buscam casos em que estruturas têm rank finito.

- Grupos finitos (rank 0);
- Corpos algebricamente fechados (um corpo é algebricamente fechado se e só se o seu rank é finito);
- Grupos algébricos (variedades algébricas, isto é, fechados na topologia de Zariski);
- Grupos livres.

Mas será que a volta vale?

Problema em aberto

Conjectura de Cherlin-Zil'ber

Grupos simples de rank de Morley finito são algébricos sobre corpos algebricamente fechados

A conjectura data de 1977 e 1979 (formulações de Zil'ber e Cherlin). Ainda não foi resolvida, mas existem algumas ferramentas para se trabalhar com ela.

Universo interpretável

Primeiro, uma caracterização para grupos de rank de Morley finito:

Seja $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ o conjunto de todos os subconjuntos interpretáveis de M. Uma função f que leva cada um desses subconjuntos em um natural é uma *função rank* se satisfaz as seguintes propriedades:

- $f(A) \geq k+1$ se existem infinitos subconjuntos definíveis de A que sejam disjuntos e cujos ranks sejam no máximo k;
- Para cada k, o conjunto $F_k = \{a \in A : f(g^{-1}(a)) = k\}$ é definível, com g uma função definível entre subconjuntos definíveis de M;
- Se uma função g' como acima é uma sobrejeção $A' \to B'$, com $B' = F_k$, então $f(A') = k + f(B')$;
- Existe um natural m tal que para todo $b \in B$, ou $g^{-1}(b)$ tem no máximo m elementos ou é infinito.

Se $\mathcal{M}$ é um grupo, então $\mathcal{M}$ tem rank de Morley finito se e somente se $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ admite uma função rank.

Estado da arte

Atualmente, investiga-se a possibilidade de que a conjectura seja falsa para os ranks 4 e 5.

Definição

Um grupo é dito ruim se não é nilpotente mas todos os seus subgrupos que sejam definíveis, conexos (no senso da topologia de Zariski) e solúveis são nilpotentes.

Estado da arte

Atualmente, investiga-se a possibilidade de que a conjectura seja falsa para os ranks 4 e 5.

Definição

Um grupo é dito ruim se não é nilpotente mas todos os seus subgrupos que sejam definíveis, conexos (no senso da topologia de Zariski) e solúveis são nilpotentes.

Um grupo com essas propriedades estragaria a conjectura.

Estado da arte

Atualmente, investiga-se a possibilidade de que a conjectura seja falsa para os ranks 4 e 5.

Definição

Um grupo é dito ruim se não é nilpotente mas todos os seus subgrupos que sejam definíveis, conexos (no senso da topologia de Zariski) e solúveis são nilpotentes.

Um grupo com essas propriedades estragaria a conjectura.

Já foi provado que não existem grupos ruins de rank de Morley 3. Os casos 4 e 5 são difíceis.

Estado da arte

Atualmente, investiga-se a possibilidade de que a conjectura seja falsa para os ranks 4 e 5.

Definição

Um grupo é dito ruim se não é nilpotente mas todos os seus subgrupos que sejam definíveis, conexos (no senso da topologia de Zariski) e solúveis são nilpotentes.

Um grupo com essas propriedades estragaria a conjectura.

Já foi provado que não existem grupos ruins de rank de Morley 3. Os casos 4 e 5 são difíceis.

Sabemos que a Conjectura de Cherlin-Zil'ber é equivalente a "não existem subgrupos ruins".

Até amanhã!

Até amanhã!
Ih, mas acabou

Obrigado!