Modelos e Aplicações - Aula 4

Caio Lopes, Henrique Lecco

ICMC - USP

23 de julho de 2020

Definições

Submodelo

$\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ se $M \subset N$ e

- $\mathbf{c}^{\mathcal{M}} = \mathbf{c}^{\mathcal{N}}$;
- $\mathbf{R}^{\mathcal{M}} = \mathbf{R}^{\mathcal{N}}\Big|_{M}$;
- $\mathbf{f}^{\mathcal{M}} = \mathbf{f}^{\mathcal{N}}\Big|_{M}$;

Definições

Submodelo

$\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ se $M \subset N$ e

- $\mathbf{c}^{\mathcal{M}} = \mathbf{c}^{\mathcal{N}}$;
- $\mathbf{R}^{\mathcal{M}} = \mathbf{R}^{\mathcal{N}}\Big|_{M}$;
- $\mathbf{f}^{\mathcal{M}} = \mathbf{f}^{\mathcal{N}}\Big|_{M}$;

Submodelo elementar

$\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ se $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ e para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ e $m_1, \ldots, m_n \in M$:

$$\mathcal{M} \models \varphi(m_1, \ldots, m_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(m_1, \ldots, m_n)$$

Adicionando constantes

Suponha que você tenha um grafo $\mathcal{G}$ com um vértice que está ligado a todos os outros.

Adicionando constantes

Suponha que você tenha um grafo $\mathcal{G}$ com um vértice que está ligado a todos os outros.
Agora, imagine que você queira garantir que todo submodelo desse grafo tenha necessariamente essa propriedade.
Nós poderíamos acrescentar à teoria a seguinte sentença:
$\exists x \forall y (x = y) \vee E(x, y)$.

Adicionando constantes

Suponha que você tenha um grafo $\mathcal{G}$ com um vértice que está ligado a todos os outros.
Agora, imagine que você queira garantir que todo submodelo desse grafo tenha necessariamente essa propriedade.
Nós poderíamos acrescentar à teoria a seguinte sentença:
$\exists x \forall y (x = y) \vee E(x, y)$.

Mas se não quisermos mexer com a teoria, podemos mexer com a linguagem. Podemos acrescentar ao vocabulário de grafos uma constante $\mathbf{c}$ e determinar que $\mathbf{c}^{\mathcal{G}}$ é esse elemento ligado a todos os outros.

Adicionando constantes

Suponha que você tenha um grafo $\mathcal{G}$ com um vértice que está ligado a todos os outros.
Agora, imagine que você queira garantir que todo submodelo desse grafo tenha necessariamente essa propriedade.
Nós poderíamos acrescentar à teoria a seguinte sentença:
$\exists x \forall y (x = y) \vee E(x, y)$.

Mas se não quisermos mexer com a teoria, podemos mexer com a linguagem. Podemos acrescentar ao vocabulário de grafos uma constante $\mathbf{c}$ e determinar que $\mathbf{c}^{\mathcal{G}}$ é esse elemento ligado a todos os outros.
Seja, então, $\mathcal{G}'$ um submodelo de $\mathcal{G}$.

Como $\mathcal{G}'$ é um modelo, deve existir o elemento $\mathbf{c}^{\mathcal{G}'}$.
Além disso, para todo elemento $v \in G'$, temos que $v \in G$. Portanto, $\mathcal{G} \models v = \mathbf{c} \vee E(v, \mathbf{c})$

Como $\mathcal{G}'$ é um modelo, deve existir o elemento $\mathbf{c}^{\mathcal{G}'}$.
Além disso, para todo elemento $v \in G'$, temos que $v \in G$. Portanto, $\mathcal{G} \models v = \mathbf{c} \vee E(v, \mathbf{c})$

Como essa é uma fórmula sem variáveis livres, teremos que $\mathcal{G}' \models v = \mathbf{c} \vee E(v, \mathbf{c})$.
Isso significa que para qualquer $\mathcal{G}'$-valoração α, temos que

$$\mathcal{G}' \models x = \mathbf{c} \vee E(x, \mathbf{c})[\alpha]$$

Como $\mathcal{G}'$ é um modelo, deve existir o elemento $\mathbf{c}^{\mathcal{G}'}$.
Além disso, para todo elemento $v \in G'$, temos que $v \in G$. Portanto, $\mathcal{G} \models v = \mathbf{c} \vee E(v, \mathbf{c})$

Como essa é uma fórmula sem variáveis livres, teremos que $\mathcal{G}' \models v = \mathbf{c} \vee E(v, \mathbf{c})$.
Isso significa que para qualquer $\mathcal{G}'$-valoração α, temos que

$$\mathcal{G}' \models x = \mathbf{c} \vee E(x, \mathbf{c})[\alpha]$$

Que é o mesmo que dizer que:

$$\mathcal{G}' \models \forall x(x = \mathbf{c} \vee E(x, \mathbf{c}))$$

E se colocarmos um monte?

Considere T a teoria de corpos, sobre o vocabulário L de anéis.
$\mathbb{Q}$ é um modelo para essa teoria.

E se colocarmos um monte?

Considere T a teoria de corpos, sobre o vocabulário L de anéis.
$\mathbb{Q}$ é um modelo para essa teoria.

Seja κ um cardinal não enumerável.
Considere $L' = L \cup \left(\bigcup_{\xi \in \kappa} \{\mathbf{c}_\xi\} \right)$.

E se colocarmos um monte?

Considere T a teoria de corpos, sobre o vocabulário L de anéis.
$\mathbb{Q}$ é um modelo para essa teoria.

Seja κ um cardinal não enumerável.
Considere $L' = L \cup \left(\bigcup_{\xi \in \kappa} \{\mathbf{c}_\xi\} \right)$.
Isto é, acrescentamos infinitas constantes ao vocabulário L.

Também criamos infinitas novas sentenças sobre esse novo vocabulário L':
Para cada par $i < j < \kappa$, definimos a sentença $\varphi_{ij} \equiv \mathbf{c}_i \neq \mathbf{c}_j$.

Também criamos infinitas novas sentenças sobre esse novo vocabulário L':
Para cada par $i < j < \kappa$, definimos a sentença $\varphi_{ij} \equiv \mathbf{c}_i \neq \mathbf{c}_j$.

Criamos, então, uma nova teoria T', composta por:

- Todos os axiomas de T;
- Todas as sentenças φ_{ij}.

Também criamos infinitas novas sentenças sobre esse novo vocabulário L':
Para cada par $i < j < \kappa$, definimos a sentença $\varphi_{ij} \equiv \mathbf{c}_i \neq \mathbf{c}_j$.

Criamos, então, uma nova teoria T', composta por:

- Todos os axiomas de T;
- Todas as sentenças φ_{ij}.

Certamente, não há nenhuma interpretação que possamos dar a $\mathbb{Q}$ que torne isso verdade.
$\mathbb{Q}$ é enumerável e a teoria exige que existam não enumeráveis elementos distintos.

Mas, seja $\Sigma \subset T'$ um subconjunto finito dessa teoria.
Então, a interpretação usual de $\mathbb{Q}$, interpretando as constantes que aparecerem em Σ como qualquer elemento, é um modelo para essa teoria.

Mas, seja $\Sigma \subset T'$ um subconjunto finito dessa teoria.
Então, a interpretação usual de $\mathbb{Q}$, interpretando as constantes que aparecerem em Σ como qualquer elemento, é um modelo para essa teoria.

Teorema (Compacidade)

Se todo subconjunto finito de uma teoria admite modelo, então a teoria admite modelo.

Mas, seja $\Sigma \subset T'$ um subconjunto finito dessa teoria.
Então, a interpretação usual de $\mathbb{Q}$, interpretando as constantes que aparecerem em Σ como qualquer elemento, é um modelo para essa teoria.

Teorema (Compacidade)

Se todo subconjunto finito de uma teoria admite modelo, então a teoria admite modelo.

Veja bem:

- $\mathbb{Q}$ é um modelo para qualquer subconjunto finito de T';
- $\mathbb{Q}$ não é um modelo para T'.

Mas, seja $\Sigma \subset T'$ um subconjunto finito dessa teoria.
Então, a interpretação usual de $\mathbb{Q}$, interpretando as constantes que aparecerem em Σ como qualquer elemento, é um modelo para essa teoria.

Teorema (Compacidade)

Se todo subconjunto finito de uma teoria admite modelo, então a teoria admite modelo.

Veja bem:

- $\mathbb{Q}$ é um modelo para qualquer subconjunto finito de T';
- $\mathbb{Q}$ não é um modelo para T'.

Existem corpos tão grandes quanto se queira.

O Teorema da Compacidade

Vamos supor que não soubéssemos que existem os corpos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

O Teorema da Compacidade

Vamos supor que não soubéssemos que existem os corpos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Aliás, que não existem corpos de característica zero.
Mas suponhamos, também, que saibamos que existem os corpos $\mathbb{F}_p$, para todo p primo.

O Teorema da Compacidade

Vamos supor que não soubéssemos que existem os corpos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Aliás, que não existem corpos de característica zero.
Mas suponhamos, também, que saibamos que existem os corpos $\mathbb{F}_p$, para todo p primo.

Como podemos escrever “a característica é zero”?

O Teorema da Compacidade

Vamos supor que não soubéssemos que existem os corpos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Aliás, que não existem corpos de característica zero.
Mas suponhamos, também, que saibamos que existem os corpos $\mathbb{F}_p$, para todo p primo.

Como podemos escrever "a característica é zero"?
Não dá. Mas conseguimos dizer "a característica é n", para qualquer n.

O Teorema da Compacidade

Vamos supor que não soubéssemos que existem os corpos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Aliás, que não existem corpos de característica zero.
Mas suponhamos, também, que saibamos que existem os corpos $\mathbb{F}_p$, para todo p primo.

Como podemos escrever "a característica é zero"?
Não dá. Mas conseguimos dizer "a característica é n", para qualquer n. Certamente, podemos dizer, então, "a característica não é n":

$$1 + 1 + 1 + ... + 1 = 0$$

$$1 + 1 + 1 + ... + 1 \neq 0$$

O Teorema da Compacidade

Considere, então, η_n a sentença "a característica não é n".
Seja, então T' a seguinte teoria:

- Todos os axiomas de corpo (axiomas de T);
- Todos os η_n.

O Teorema da Compacidade

Considere, então, η_n a sentença "a característica não é n".
Seja, então T' a seguinte teoria:

- Todos os axiomas de corpo (axiomas de T);
- Todos os η_n.

Veja que um corpo $\mathbb{F}_p$ não pode ser modelo de T', pois $\mathbb{F}_p \not\models \eta_p$.

O Teorema da Compacidade

Considere, então, η_n a sentença "a característica não é n".
Seja, então T' a seguinte teoria:

- Todos os axiomas de corpo (axiomas de T);
- Todos os η_n.

Veja que um corpo $\mathbb{F}_p$ não pode ser modelo de T', pois $\mathbb{F}_p \not\models \eta_p$.
Mas, dado um subconjunto finito $\Sigma \subset T'$, tome k como $\max\{n \in \mathbb{N} \ : \ \eta_n \in \Sigma\}$.
Se q é um primo maior que k, então $\mathbb{F}_q \models \Sigma$.

O Teorema da Compacidade

Considere, então, η_n a sentença "a característica não é n".
Seja, então T' a seguinte teoria:

- Todos os axiomas de corpo (axiomas de T);
- Todos os η_n.

Veja que um corpo $\mathbb{F}_p$ não pode ser modelo de T', pois $\mathbb{F}_p \not\models \eta_p$.
Mas, dado um subconjunto finito $\Sigma \subset T'$, tome k como
$\max\{n \in \mathbb{N} \ : \ \eta_n \in \Sigma\}$.
Se q é um primo maior que k, então $\mathbb{F}_q \models \Sigma$.

Ou seja, todo subconjunto finito de T' admite modelo, portanto, T' admite modelo também.

Um modelo para T' não pode ter característica positiva. Portanto, obtivemos um corpo de característica zero.

Axiomas de Peano

Considere a linguagem $\{0, +, \times, +, s\}$, suficientes para fazer a aritmética de Peano.
Será que é possível definir unicamente os naturais em primeira ordem, nessa teoria?

Axiomas de Peano

Considere a linguagem $\{0, +, \times, +, s\}$, suficientes para fazer a aritmética de Peano.
Será que é possível definir unicamente os naturais em primeira ordem, nessa teoria?

$$\forall X \subset \mathbb{N}[0 \in X \wedge (\forall x \; x \in X \rightarrow s(x) \in X)] \rightarrow X = \mathbb{N}$$

Axiomas de Peano

Considere a linguagem $\{0, +, \times, +, s\}$, suficientes para fazer a aritmética de Peano.
Será que é possível definir unicamente os naturais em primeira ordem, nessa teoria?

$$\forall X \subset \mathbb{N}[0 \in X \wedge (\forall x\ x \in X \to s(x) \in X)] \to X = \mathbb{N}$$

Isso não é permitido. Usamos, então, um esquema: para cada fórmula $\varphi(x)$, acrescentamos:

$$\varphi(0) \wedge (\varphi(x) \implies \varphi(s(x))) \to \forall x\ \varphi(x)$$

Axiomas de Peano

Considere a linguagem $\{0, +, \times, +, s\}$, suficientes para fazer a aritmética de Peano.
Será que é possível definir unicamente os naturais em primeira ordem, nessa teoria?

$$\forall X \subset \mathbb{N}[0 \in X \wedge (\forall x \; x \in X \to s(x) \in X)] \to X = \mathbb{N}$$

Isso não é permitido. Usamos, então, um esquema: para cada fórmula $\varphi(x)$, acrescentamos:

$$\varphi(0) \wedge (\varphi(x) \implies \varphi(s(x))) \to \forall x \; \varphi(x)$$

Isso é suficiente?

Acrescentamos à linguagem uma constante **c** e à teoria as seguintes sentenças, para cada n:

$$\mathbf{c} \neq n$$

Veja que n é o termo $s(s(\ldots s(0))\ldots)$

Acrescentamos à linguagem uma constante $\mathbf{c}$ e à teoria as seguintes sentenças, para cada n:

$$\mathbf{c} \neq n$$

Veja que n é o termo $s(s(\ldots s(0))\ldots)$

Seja Σ um subconjunto finito dessa teoria.
Seja k o maior elemento que aparece em sentenças do tipo $\mathbf{c} \neq n$.

Acrescentamos à linguagem uma constante **c** e à teoria as seguintes sentenças, para cada n:

$$\mathbf{c} \neq n$$

Veja que n é o termo $s(s(...s(0))...)$

Seja Σ um subconjunto finito dessa teoria.
Seja k o maior elemento que aparece em sentenças do tipo $\mathbf{c} \neq n$.

Defina, então $\mathbf{c}^{\mathbb{N}} = s(k)$.
Veja que, com essa interpretação, $\mathbb{N}$ é um modelo para Σ.

Acrescentamos à linguagem uma constante $\mathbf{c}$ e à teoria as seguintes sentenças, para cada n:

$$\mathbf{c} \neq n$$

Veja que n é o termo $s(s(...s(0))...)$

Seja Σ um subconjunto finito dessa teoria.
Seja k o maior elemento que aparece em sentenças do tipo $\mathbf{c} \neq n$.

Defina, então $\mathbf{c}^{\mathbb{N}} = s(k)$.
Veja que, com essa interpretação, $\mathbb{N}$ é um modelo para Σ.

Veja que, então, a teoria admite modelo: um modelo para os axiomas de Peano tal que existe um elemento maior que infinitos outros.

Construindo modelos com compacidade

Teorema (Löwenheim-Skolem-Tarski para cima

Seja $\mathcal{M}$ um L-modelo infinito e $\kappa \geq |M|, |L|$. Então, existe um L-modelo $\mathcal{N}$ tal que $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ e $|N| = \kappa$.

Construindo modelos com compacidade

Teorema (Löwenheim-Skolem-Tarski para cima

Seja $\mathcal{M}$ um L-modelo infinito e $\kappa \geq |M|, |L|$. Então, existe um L-modelo $\mathcal{N}$ tal que $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ e $|N| = \kappa$.

Para cada $x \in M$, considere $\mathbf{c}_x$ uma nova constante, com $\mathbf{c}_x^{\mathcal{M}} = x$.

Seja L' o vocabulário $L \cup \left(\bigcup_{x \in M} \{\mathbf{c}_x\} \right)$.

Construindo modelos com compacidade

Teorema (Löwenheim-Skolem-Tarski para cima

Seja $\mathcal{M}$ um L-modelo infinito e $\kappa \geq |M|, |L|$. Então, existe um L-modelo $\mathcal{N}$ tal que $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ e $|N| = \kappa$.

Para cada $x \in M$, considere $\mathbf{c}_x$ uma nova constante, com $\mathbf{c}_x^{\mathcal{M}} = x$.

Seja L' o vocabulário $L \cup \left(\bigcup_{x \in M} \{\mathbf{c}_x\} \right)$.

Considere, então, Γ o conjunto de todas as L'-sentenças φ tais que $\mathcal{M} \models \varphi$.

Agora, introduza no vocabulário κ novas constantes $\mathbf{c}_i$, $i < \kappa$. Considere L'' o vocabulário L' com essas novas constantes adicionadas.

Agora, introduza no vocabulário κ novas constantes $\mathbf{c}_i$, $i < \kappa$. Considere L'' o vocabulário L' com essas novas constantes adicionadas.

Defina Γ' como $\Gamma \cup \left(\bigcup_{i \neq j} \{\mathbf{c}_i \neq \mathbf{c}_j\} \right)$.

Agora, introduza no vocabulário κ novas constantes $\mathbf{c}_i$, $i < \kappa$. Considere L'' o vocabulário L' com essas novas constantes adicionadas.

Defina Γ' como $\Gamma \cup \left(\bigcup_{i \neq j} \{\mathbf{c}_i \neq \mathbf{c}_j\} \right)$.

Assim como fizemos anteriormente, veja que $\mathcal{M}$ é um modelo para qualquer subconjunto finito de Γ'. Portanto, Γ' admite um modelo $\mathcal{N}$. Veja que $\mathcal{N}$ também é um L-modelo.

Basta provarmos que $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.
Seja $\varphi(x)$ uma L-fórmula. Precisamos mostrar que $\mathcal{M} \models \varphi(a) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(b)$.

Basta provarmos que $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.
Seja $\varphi(x)$ uma L-fórmula. Precisamos mostrar que
$\mathcal{M} \models \varphi(a) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(b)$.

$\mathcal{M} \models \varphi(x)[\alpha_x^a] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(\mathbf{c}_a)$
Que é o mesmo que dizer que $\varphi(\mathbf{c}_a) \in \Gamma$.
Como $\mathcal{N}$ é modelo para Γ', então é modelo para Γ e portanto
$\mathcal{N} \models \varphi(\mathbf{c}_a)$.

Basta provarmos que $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.
Seja $\varphi(x)$ uma L-fórmula. Precisamos mostrar que
$\mathcal{M} \models \varphi(a) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(b)$.

$\mathcal{M} \models \varphi(x)[\alpha_x^a] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(\mathbf{c}_a)$
Que é o mesmo que dizer que $\varphi(\mathbf{c}_a) \in \Gamma$.
Como $\mathcal{N}$ é modelo para Γ', então é modelo para Γ e portanto
$\mathcal{N} \models \varphi(\mathbf{c}_a)$.

O mergulho $a \mapsto \mathbf{c}_a^{\mathcal{N}}$ é elementar.

Reduzindo o modelo

Mas ainda não temos que $|N| = \kappa$, apenas que $|N| \geq \kappa$.

Reduzindo o modelo

Mas ainda não temos que $|N| = \kappa$, apenas que $|N| \geq \kappa$.

Teorema (Löwenheim-Skolem-Tarski para baixo)

Se $\mathcal{N}$ é um L-modelo e $X \subset N$, então para todo cardinal κ tal que $\aleph_0, |L|, |X| \leq \kappa \leq |N|$, existe um modelo $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ tal que $X \subset M$ e $|M| = \kappa$.

Prova do teorema

Observe o seguinte: seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.
Seja $\psi = \forall x \ \varphi(x)$, em que $\varphi(x)$ é livre de quantificadores. Então:

$$\mathcal{B} \models \psi \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi$$

Prova do teorema

Observe o seguinte: seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.
Seja $\psi = \forall x \ \varphi(x)$, em que $\varphi(x)$ é livre de quantificadores. Então:

$$\mathcal{B} \models \psi \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi$$

Mas isso não ocorre com fórmulas existenciais.

Prova do Teorema

Vamos usar uma técnica conhecida como Skolemização.
Considere:

1. $L_0 = L$;

Prova do Teorema

Vamos usar uma técnica conhecida como Skolemização.
Considere:

1. $L_0 = L$;
2. $L_1 = L \cup F_0$, em que F_0 é um conjunto de símbolos de funções da seguinte maneira:
   Para cada L_0-fórmula $\varphi \equiv \varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv \exists y \ \psi(y, x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{f}_\varphi$ é um símbolo de função n-ária de F_0;
3. $L_{i+1} = L_i \cup F_i$.

Prova do Teorema

Vamos usar uma técnica conhecida como Skolemização.
Considere:

1. $L_0 = L$;
2. $L_1 = L \cup F_0$, em que F_0 é um conjunto de símbolos de funções da seguinte maneira:
   Para cada L_0-fórmula $\varphi \equiv \varphi(x_1, ..., x_n) \equiv \exists y \ \psi(y, x_1, ..., x_n)$, $\mathbf{f}_\varphi$ é um símbolo de função n-ária de F_0;
3. $L_{i+1} = L_i \cup F_i$.

Considere que $\mathbf{f}_\varphi^{\mathcal{N}}(x_1, ..., x_n) = a$, com $\mathcal{N} \models \psi(a, x_1, ..., x_n)$, no caso de $\mathcal{N} \models \varphi(x_1, ..., x_n)$. Caso contrário, pode ser qualquer elemento.
Defina $L' = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$. Olhe para $\mathcal{N}$ como L'-modelo.

Veja que, a cada passo no slide anterior, adicionamos apenas $\max\{\aleph_0, |L|\}$ símbolos, de modo que $|L'| = \max\{\aleph_0, |L|\}$. Tome, agora, M_0 um conjunto de cardinalidade κ contendo X e todas as constantes como interpretadas por $\mathcal{N}$.

Veja que, a cada passo no slide anterior, adicionamos apenas $\max\{\aleph_0, |L|\}$ símbolos, de modo que $|L'| = \max\{\aleph_0, |L|\}$. Tome, agora, M_0 um conjunto de cardinalidade κ contendo X e todas as constantes como interpretadas por $\mathcal{N}$.

Agora, considere M_1 o conjunto
$M_0 \cup \{\mathbf{f}^{\mathcal{N}}(m_1, ..., m_n) \ : \mathbf{f} \in L',\ m_1, ..., m_n \in M_0\}$
Mais geralmente, M_{i+1} o conjunto
$M_i \cup \{\mathbf{f}^{\mathcal{N}}(m_1, ..., m_n) \ : \ \mathbf{f} \in L',\ m_1, ..., m_n \in M_i\}$

Veja que, a cada passo no slide anterior, adicionamos apenas $\max\{\aleph_0, |L|\}$ símbolos, de modo que $|L'| = \max\{\aleph_0, |L|\}$.
Tome, agora, M_0 um conjunto de cardinalidade κ contendo X e todas as constantes como interpretadas por $\mathcal{N}$.

Agora, considere M_1 o conjunto
$M_0 \cup \{\mathbf{f}^{\mathcal{N}}(m_1, ..., m_n) \ : \mathbf{f} \in L',\ m_1, ..., m_n \in M_0\}$
Mais geralmente, M_{i+1} o conjunto
$M_i \cup \{\mathbf{f}^{\mathcal{N}}(m_1, ..., m_n) \ : \ \mathbf{f} \in L',\ m_1, ..., m_n \in M_i\}$

Defina, então $M = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} M_i$.
$\mathcal{M}$ sendo o modelo cujo universo é M e a interpretação é a restrição de $\cdot^{\mathcal{N}}$ a M é um submodelo elementar de $\mathcal{N}$.

Considere $\theta(x) = \exists y \ \varphi(x, y)$.

$$\mathcal{M} \models \theta(x) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(x, \mathbf{f}_\theta(x)) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(x, \mathbf{f}_\theta(x)) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \theta(x)$$

Considere $\theta(x) = \exists y \ \varphi(x, y)$.

$$\mathcal{M} \models \theta(x) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(x, \mathbf{f}_\theta(x)) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(x, \mathbf{f}_\theta(x)) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \theta(x)$$

Além disso, $|M| = \kappa$ como queríamos (a cardinalidade dele não aumentou desde M_0).

Uma aplicação

Veja que $\mathbb{C}$ é uma extensão algebricamente fechada de $\mathbb{Q}$. Portanto, podemos conseguir um corpo algebricamente fechado enumerável contendo $\mathbb{Q}$.

Uma aplicação

Veja que $\mathbb{C}$ é uma extensão algebricamente fechada de $\mathbb{Q}$. Portanto, podemos conseguir um corpo algebricamente fechado enumerável contendo $\mathbb{Q}$.

- O fecho algébrico de $\mathbb{Q}$ é enumerável;
- Existem mais elementos transcendentes que algébricos sobre $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

Até semana que vem!