Introdução à Teoria de Modelos e aplicações

Caio Lopes e Henrique Lecco

1 Introdução

A Teoria de Modelos é uma área que visa estudar estruturas dos mais diversos tipos, como grupos, grafos e universos de Teoria de Conjuntos, usando ferramentas da Lógica. Estudar modelos pode se traduzir em diversas abordagens diferentes, muitas com certos denominadores comuns.

Essas notas focam em uma visão mais ligada à Álgebra, mas buscando comentar de outras áreas quando apropriado. De qualquer modo, boa parte da teoria que será formulada é usada em contextos diferentes, a quais muitos dos resultados se aplicam. Em particular, os conceitos básicos com os quais começaremos são fundamentais para se usar a Teoria de Modelos.

2 Conceitos básicos

Iniciaremos a construção da teoria com o conceito de linguagem, seguido da definição de termo e finalizando com introdução a *semântica*, onde definiremos interpretação, valoração, satisfação de fórmula e, finalmente, modelos.

É esperado do leitor um certo conhecimento prévio de lógica. Caso o leitor não tenha este acúmulo, não se acanhe: sugerimos a leitura da página `https://sites.icmc.usp.br/aurichi/modelos/doku.php?id=pagina:logica`.

2.1 Linguagem e Termos

Toda estrutura matemática possui uma coleção distinta de sujeitos fundamentais a ela. Esses sujeitos podem ser funções, relações ou constantes. Por exemplo, é impossível falar de grupo sem falar de uma função binária, muitas vezes chamada de "soma" ou "produto", e um elemento constante que é neutro em relação a essa função, chamado de "identidade".

Da necessidade de termos alguns símbolos pré-fixados para falarmos sobre uma teoria, surge o conceito de *Linguagem*, que é uma coleção de símbolos lógicos e não-lógicos em que os primeiros são os usuais da lógica de primeira ordem e os demais são os símbolos particulares daquela teoria. Mais formalmente:

Definição 2.1. Uma relação R é dita n-ária sobre um conjunto A se $R \subset A^n$. Ou seja, para todos $a_1, ..., a_n \in A$, está determinado se $R(a_1, ..., a_n)$ é verdadeiro ou falso. Analogamente, uma função é dita n-ária se

$$f : A^n \to A$$

isto é, para todos $a_1, ..., a_n \in A$, $f(a_1, ..., a_n) \in A$.

Definição 2.2. Uma **Linguagem** $\mathcal{L}$ consiste de:

- Símbolos lógicos de primeira ordem:
  - $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, =$;
  - Quantificadores: $\forall$, $\exists$;
  - Enumeráveis variáveis: $x_1, x_2, x_3, ...$
- Símbolos não-lógicos:
  - Uma coleção de símbolos de constante;
  - Uma coleção de símbolos de relações com quaisquer *aridades*;
  - Uma coleção de símbolos de funções com quaisquer *aridades*;

Observação 2.1. As coleções de símbolos não-lógicos não precisam ser todos não vazios, como exemplificado logo abaixo.

Exemplo 2.1. Os exemplos abaixo serão importantes no decorrer do texto:

- $\mathcal{L}_{ring} = \{e_\oplus, e_\odot, \oplus, \odot\}$ é a linguagem da teoria de anéis [1], onde $e_\oplus$, $e_\odot$ são símbolos de constantes (que na prática serão as identidades das operações do anel), enquanto $\oplus, \odot$ são símbolos de funções binárias.
- $\mathcal{L}_{graphs} = \{R\}$ é a linguagem da teoria de grafos, onde R é um símbolo de relação binária (que na prática será a relação que diz se dois vértices estão ligados por uma aresta ou não).
- $\mathcal{L}_{group} = \{e_\odot, \odot\}$ é a linguagem da teoria de grupos, em que $\odot$ é um símbolo de função binária e $e_\odot$ um símbolo de constante (que na prática será a identidade da operação do grupo)
- $\mathcal{L}_{or} = \mathcal{L}_{ring} \cup \{<\}$ é a linguagem da teoria de anéis ordenados, em que $<$ é um símbolo de relação binária.

A linguagem de uma teoria será o que teremos em mãos para escrever as fórmulas desta. Daremos a definição de $\mathcal{L}-$fórmula em breve.

[1] não confundir com Quenya

Antes de prosseguirmos, é necessário fazermos algumas considerações que a princípio não são claras e só serão discutidas a fundo em um futuro próximo.

A primeira delas é que, utilizando a linguagem de teoria de grupos como exemplo, a operação e seu elemento neutro varia de grupo pra grupo. O leitor pode ter se perguntado como símbolos abstratos destituídos de quaisquer estruturas representarão toda essa gama de possibilidades. A solução para isso está no conceito de *interpretação*, que será discutido logo mais.

A segunda consideração, ainda no exemplo de teoria de grupos, é a seguinte: note que poderíamos descrever o elemento neutro como um x tal que $\forall y(x \odot y = y)$. Mas veja que essa fórmula, formalmente, é dada por $\exists x \forall y(x \odot y = y)$. Ou seja, precisamos de dois quantificadores para isso. Mais pra frente, veremos que, em alguns casos, esse tipo de "atalho" pode trazer mais complicações do que benefícios.

A terceira e última consideração é que, por motivos práticos, a partir daqui omitiremos a palavra "símbolo" quando falarmos dos símbolos de constantes, relações e funções de uma linguagem, a menos que o contexto peça tal precisão teórica. Portanto, sempre que falarmos de constantes, funções ou relações de uma linguagem, o leitor deve entender que trata-se dos símbolos, e não um objeto matemático concreto.

Finalizaremos essa seção com o conceito de *termo*:

Definição 2.3. Termos são todos os objetos que podem ser construídos a partir de constantes, variáveis e funções de uma linguagem, da seguinte maneira:

- Se t é uma variável ou uma constante, então t é um termo.
- Se t é um termo, então $f(t)$ é um termo.

Mais precisamente, se $t_1, ..., t_n$ são termos e f é um símbolo de função n-ária, então $f(t_1, ..., t_n)$ é um termo.

Ou seja, termo é um elemento do menor conjunto que contém todas as constantes e variáveis de uma linguagem e é fechado pelas funções desta.

Observação 2.2. Note que essa definição é indutiva. Construções e argumentações como essa serão recorrentes e extremamente necessárias ao longo do texto.

Para finalizar essa seção, daremos a definição de $\mathcal{L}$-fórmulas (de primeira ordem).

Definição 2.4. *$\mathcal{L}$-fórmulas* são expressões de uma das seguintes formas:

1. $s = t$, em que s e t são termos;
2. $R(t_1, ..., t_n)$, em que R é uma relação n-ária da linguagem $\mathcal{L}$ e $t_1, ..., t_n$ são termos;
3. Se φ, ψ são $\mathcal{L}$-fórmulas das formas anteriores e x é uma variável, então também são fórmulas: $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi), \forall x\varphi, \exists x\varphi$;
4. Qualquer combinação das fórmulas anteriores é uma fórmula.

Observação 2.3. Note que esta é mais uma definição indutiva.

As fórmulas das duas primeiras formas acima são chamadas de *atômicas*. Note que uma coleção de $\mathcal{L}-$fórmulas contendo todas as fórmulas atômicas e fechada pelas operações lógicas (negação, conjunção, disjunção, implicação, equivalências e quantificadores) contém todas as $\mathcal{L}-$fórmulas, por indução.

Definição 2.5. Uma $\mathcal{L}-$*sentença* é uma $\mathcal{L}-$fórmula sem variáveis livres, isto é, todas as variáveis estão "presas" a um quantificador.

Quando for claro, omitiremos a linguagem a qual uma fórmula está relacionada com o intuito de deixar o texto mais limpo.

2.2 Semântica

Na gramática, semântica é o estudo do significado, da significação de palavras, frases, símbolos etc. É exatamente o que faremos nessa sessão: falaremos sobre *interpretação*, *satisfação* de fórmulas e, finalmente, *modelos*. Estes conceitos servirão para a "concretização" das abstrações que falamos até agora, isto é, daremos significado ao abstrato. Comecemos com uma ideia mais intuitiva:

Considere uma linguagem composta apenas por uma função binária $\odot$. Consideremos também dois conjuntos A e B formados pelos números inteiros, que serão os nossos *universos*. Suponha que no universo A a função $\odot$ é entendida, ou interpretada, como a operação multiplicação $\cdot$, enquanto no universo B será vista como a soma $+$. Agora observe a seguinte fórmula:

$$\forall x \forall p \exists q (p \odot q = x)$$

O que esta fórmula diz é: dado um elemento x qualquer, tomado um outro elemento p do universo em questão, deve existir um elemento q tal que p operado com q resulta em x. Mas o que ela quer dizer em cada um dos universos, que veem a função $\odot$ de formas distintas?

Veja que, no universo A, tal sentença diz que dados x e p, existe um q tal que $p \cdot q = x$, o que não é verdade uma vez que dados $x = 9$ e $p = 2$, não existe um número inteiro q tal que $2 \cdot q = 9$. Já no caso do universo B ocorre o fenômeno oposto, uma vez que a sentença é verdadeira pois basta tomar $q = x - p$.

Ou seja, dependendo do universo e de como ele "vê" os símbolos de uma linguagem, uma fórmula pode ser verdadeira ou falsa. Formalizando essa ideia intuitiva, temos a definição de um *Modelo*:

Definição 2.6. (Modelo) Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem. Um $\mathcal{L}$-*modelo* é um par $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}}$ em que M é um conjunto não vazio, chamado de *universo*, e $\cdot^{\mathcal{M}}$ é a *função de interpretação* ou simplesmente *interpretação* de $\mathcal{M}$, que satisfazem as seguintes condições:

- Se $R \in \mathcal{L}$ é um símbolo de relação $n-$ária, então $R^{\mathcal{M}}$ é uma relação $n-$ária sobre M;
- Se $f \in \mathcal{L}$ é um símbolo de função $n-$ária, então $f^{\mathcal{M}}$ é uma função $n-$ária sobre M;
- Se $c \in \mathcal{L}$ é um símbolo de constante, então $c^{\mathcal{M}} \in M$.

Além disso, a *cardinalidade* de um modelo é a cardinalidade do seu universo. Ou seja, um modelo é um par formado por um conjunto que determina onde os termos "moram" e pela "tradução" dos símbolos da linguagem em objetos concretos nesse conjunto.

Observação 2.4. Dado um símbolo σ qualquer da linguagem, $\sigma^{\mathcal{M}}$ é dito a *interpretação* ou *significado* de σ em $\mathcal{M}$. Chamamos σ do *nome* de $\sigma^{\mathcal{M}}$.

Definição 2.7. (valoração) Seja $\mathcal{M}$ um modelo. Uma $\mathcal{M}-$valoração é uma função do conjunto de variáveis para o universo M de $\mathcal{M}$. Usualmente denotaremos valorações por letras gregas minúsculas, como α e β.

A valoração nada mais é que fornecer um valor temporário a uma variável. Tal valoração será necessária para que a interpretação por um modelo de fórmulas com variáveis livres seja possível.

Para as definições abaixo, considere sempre que $\mathcal{L}$ é uma linguagem, $\mathcal{M}$ um $\mathcal{L}-$modelo e α é uma $\mathcal{M}-$valoração.

Definição 2.8. (Valor de um termo) Para cada termo t, o elemento $t^{\mathcal{M}}[\alpha] \in M$ é dito o *valor* de t em M e é definido da seguinte forma:

- Se t é uma variável x: $t^{\mathcal{M}}[\alpha] = \alpha(x)$;
- Se t é um símbolo de constante c: $t^{\mathcal{M}}[\alpha] = c^{\mathcal{M}}$;
- Se t é da forma $f(t_1, ..., t_n)$, em que f é um símbolo de função e $t_1, ..., t_n$ são termos: $t^{\mathcal{M}}[\alpha] = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\alpha], ..., t_n^{\mathcal{M}}[\alpha])$.

A definição abaixo será feita indutivamente nos tipos possíveis de fórmulas, conforme a definição 2.4. Tal construção será frequente daqui pra frente.

Definição 2.9. (Satisfação de fórmula) Para cada fórmula φ, dizemos que φ é satisfeita por α em $\mathcal{M}$, denotado por $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha]$, quando:

- Caso φ é atômica:
  - Se φ é da forma $s = t$, em que s e t são termos, então $\mathcal{M} \vDash (s = t)[\alpha] \Leftrightarrow s^{\mathcal{M}}[\alpha] = t^{\mathcal{M}}[\alpha]$;
  - Se φ é da forma $R(t_1, ..., t_n)$, em que R é um símbolo de relação de $\mathcal{L}$ e $t_1, ..., t_n$ são termos, então $\mathcal{M} \vDash R(t_1, ..., t_n)[\alpha] \Leftrightarrow R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\alpha], ..., t_n^{\mathcal{M}}[\alpha])$.
- Caso φ não é atômica:
  - Se φ é a negação de uma fórmula ψ, portanto $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha] \Leftrightarrow \mathcal{M} \nvDash \psi[\alpha]$;
  - Se φ é da forma $\psi \wedge \xi$, em que ψ, ξ são fórmulas, então $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha] \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \psi[\alpha]$ e $\mathcal{M} \vDash \xi[\alpha]$;
  - Se φ é da forma $\psi \vee \xi$, em que ψ, ξ são fórmulas, então $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha] \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \psi[\alpha]$ ou $\mathcal{M} \vDash \xi[\alpha]$;
  - Se φ é da forma $\exists x \psi(x)$, em que ψ é fórmula, então $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha] \Leftrightarrow$ existe um $a \in M$ tal que $\mathcal{M} \vDash \varphi(x)[\alpha_x^a]$, com α_x^a a valoração α porém levando x em a
  - Se φ é da forma $\forall x \psi(x)$, em que ψ é fórmula, então $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha] \Leftrightarrow$ para todo $a \in M$, temos que $\mathcal{M} \vDash \varphi(x)[\alpha_x^a]$, com α a valoração α porém levando x em a

Observação 2.5. Com essa definição indutiva, satisfação de fórmulas está bem definida para todas as fórmulas da linguagem. Note também que dado um modelo qualquer e uma sentença sobre a sua linguagem, sempre está determinado se tal sentença é satisfeita no modelo ou não, o que é diferente de perguntar se, dada uma sentença, existe um modelo que a satisfaz. Esta última é a noção de completude, que iremos falar mais tarde.

Definição 2.10. Se $\mathcal{M}$ satisfaz uma fórmula φ para todas as valorações possíveis, diremos que $\mathcal{M}$ *satisfaz* φ ou que $\mathcal{M}$ *é um modelo para* φ. Denotaremos isso por $\mathcal{M} \vDash \varphi$.

Outro conceito central é o de **Teoria**:

Definição 2.11. (Teoria) Uma $\mathcal{L}$-teoria é uma coleção T de $\mathcal{L}$-sentenças. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um modelo de T e escrevemos $\mathcal{M} \vDash T$ se $\mathcal{M} \vDash \phi$ para todas as sentenças $\phi \in T$.

Considere T a teoria composta pelas duas sentenças

$$\forall x x = 0 \text{ e } \exists x x \neq 0$$

Note que elas são contraditórias, portanto não existe um modelo para essa teoria. Isto é, não há um conjunto contendo um elemento diferente de zero tal que todo elemento é igual a zero. Assim:

Definição 2.12. Uma teoria é satisfazível se existe um modelo para ela.

Também é comum chamarmos uma teoria de *consistente* se ela admitir modelo.

2.3 Exemplos

Essa seção será composta exclusivamente de exemplos de Teorias e alguns de seus modelos.

Exemplo 2.2. (Conjuntos infinitos) Seja $\mathcal{L} = \emptyset$. Considere a $\mathcal{L}-$teoria composta pelas sentenças

$$\phi_n = \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n \bigwedge_{i<j\leq n} x_i \neq x_j$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que essas sentenças querem dizer "existem ao menos n elementos distintos". Portanto como a linguagem é vazia, qualquer conjunto infinito define um modelo para essa teoria.

Exemplo 2.3. (Teoria de Grafos) Seja $\mathcal{L}_{graph} = \{R\}$ uma relação binária. Os axiomas dessa teoria são:

- $\forall x \neg R(x, x)$;
- $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$.

Portanto os modelos dessa teoria são formados por um conjunto de pontos e uma relação binária entre esses pontos, chamada de arestas, que satisfaz as duas propriedades acima. Ou seja, um grafo.

Exemplo 2.4. (Anéis e Corpos) Seja $\mathcal{L}_{ring} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ como já definimos anteriormente. Os axiomas de anéis são:

- $\forall x \forall y \forall z\ (x - y = z \leftrightarrow x = y + z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\ (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$;
- $\forall x\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$;
- $\forall x \forall y \forall z\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\ (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.

Exemplo 2.5. (Aritmética de Peano) Considere a linguagem $\mathcal{L} = \{+, \cdot, s, 0\}$, com os símbolos $+$ e $\cdot$ sendo funções binárias, s função unitária e 0 constante.

Exemplo 2.6. ZFC O caso da teoria ZFC é interessante: trata-se de uma teoria para a linguagem de conjuntos $\mathcal{L} = \{\in\}$. O que há de curioso é que não se pode exibir um modelo para essa teoria: isso violaria o Teorema da Incompletude de Gödel.

A impossibilidade segue do fato de que construiríamos um conjunto, portanto usaríamos ZFC, para provar que ZFC é consistente. Mas, retirando certos axiomas, é possível conseguir alguns modelos que trazem propriedades interessantes.

O exemplo de ZFC também é interessante porque nos mostra certos atalhos para se escrever fórmulas. Veja que a linguagem é apenas o símbolo de "pertence", mas frequentemente usamos $\subset$, $\cup$ e *cap*, por exemplo. Mas esses são atalhos:

- $X \cup Y = Z$: $\forall x\ x \in Z \leftrightarrow (x \in X \vee x \in Y)$;
- $X \cap Y = Z$: $\forall x\ x \in Z \leftrightarrow (x \in X \wedge x \in Y)$;
- $X \subset Y$: $\forall x\ x \in X \rightarrow x \in Y$.

Para o leitor que quiser ver os axiomas de ZFC, recomendamos a página da Wikipedia: `https://pt.wikipedia.org/wiki/Axiomas_de_Zermelo-Fraenkel#Os_Axiomas`.

Exemplo 2.7. DLO Sobre o vocabulário de ordens ($\mathcal{L} = \{<\}$), costuma-se chamar DLO a teoria de ordens totais densas sem máximo e mínimo. Ela contém as sentenças:

- Dois elementos sempre são comparáveis: $\forall x \forall y\ x < y \vee y < x \vee x = y$;
- Nenhum elemento é maior que si mesmo: $\forall x\ \neg(x < x)$;
- A ordem é transitiva: $\forall x \forall y \forall z\ x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$;
- Entre dois elementos, sempre tem outro: $\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z\ x < z \wedge z < y)$;
- Não há maior elemento: $\forall x \exists y\ x < y$;
- Não há menor elemento: $\forall x \exists y\ y < x$.

Algo interessante sobre essa teoria é que todos os modelos são equivalentes e que não há modelo finito.

Exemplos de modelos são $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e intervalos abertos. Em termos de lógica de primeira ordem, todos são indistinguíveis.

2.4 Exercícios

1) Mostre que o valor de um termo e o significado de uma fórmula dependem apenas dos valores que são atribuídos às variáveis livres destes. Ou seja, mostre que: dados $\mathcal{A}$ um modelo, α e β $\mathcal{A}-$valorações, t um termo e φ uma fórmula, se para todas as variáveis x que ocorrem em t e são livres em φ temos que $\alpha(x) = \beta(x)$, então:

- $t^{\mathcal{A}}[\alpha] = t^{\mathcal{A}}[\beta]$;
- $\mathcal{A} \vDash \varphi[\alpha] \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi[\beta]$.

Dica: Faça indução nos termos e nas fórmulas, respectivamente.

3 Relações entre modelos

Em muitas áreas, estudar como se relacionam diferentes objetos é fundamental. Nota-se a centralidade do conceitos de morfismo, seja de anéis, grupos ou corpos, transformação linear, homeomorfismo e outros similares. Semelhantemente, na Teoria de Modelos haverão conceitos igualmente importantes. Veja que, tratando-se dessas relações, sempre haverão propriedades que serão preservadas. Vejamos como o conceito se aplica nas diferentes áreas:

- Dois grupos são isomorfos se existe uma bijeção $f : G \to H$ tal que $f(g_1 +_G g_2) = f(g_1) +_H f(g_2)$ e cuja inversa tem a mesma propriedade.
- Dois grafos G e H são isomorfos se existe uma bijeção $f : G \to H$ tal que há uma aresta entre os vértices g_1 e $g_2 \in G$ se e só se há uma aresta ligando $f(g_1)$ e $f(g_2)$.
- Dois anéis são isomorfos com a mesma condição para grupos, adicionando-se a mesma exigência para as duas operações.

Veja, então, que, dependendo da situação, as propriedades que desejamos manter são diferentes. Você pode observar que, acima, trata-se de *relações* e *funções*. De fato, esses conceitos podem, então, ser traduzidos em termos da Teoria de Modelos. O que desejamos preservar, então, quando relacionamos dois modelos distintos, é a interpretação e as sentenças satisfeitas por eles. Vamos começar com um exemplo:

Exemplo 3.1. Se dois modelos finitos são isomorfos, então eles têm a mesma quantidade de elementos.

Demonstração. Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ dois modelos. Suponha que $M = \{a_1, ..., a_m\}$ e $N = \{b_1, ..., b_n\}$.

Então, $\mathcal{M} \models \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_m \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$. Isto é, $\mathcal{M}$ satisfaz a sentença "existem m elementos distintos". Vamos chamar essa sentença de φ_m.

Semelhantemente, trocando m por n, temos que $\mathcal{N} \models \varphi_n$, isto é, $\mathcal{N}$ satisfaz "existem n elementos distintos". Mas então, se $m > n$, temos que $\mathcal{N} \not\models \varphi_m$ e, se $n > m$, então $\mathcal{M} \not\models \varphi_n$. Portanto, há necessariamente uma sentença que testemunha que os dois modelos são diferentes. □

Definimos precisamente, então, isomorfismos entre modelos:

Definição 3.1. Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ dois modelos para um mesmo vocabulário $\mathcal{L}$. Dizemos que $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são isomorfos, e denotamos $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$, se existir uma bijeção $f : M \to N$ tal que para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ e para todos $m_1, ..., m_n \in M$,

$$\mathcal{M} \models \varphi(m_1, ..., m_n) \text{ se e só se } \mathcal{N} \models \varphi(f(m_1), ..., f(m_n)).$$

Veja que isso significa que os dois modelos "concordam"em suas interpretações de constantes, também:

1. $f(\mathbf{c}^{\mathcal{M}}) = \mathbf{c}^{\mathcal{N}}$, para todo símbolo de constante $\mathbf{c}$;
2. $\mathbf{R}^{\mathcal{M}}(m_1, ..., m_n) \Leftrightarrow \mathbf{R}^{\mathcal{N}}(f(m_1), ..., f(m_n))$, para todo símbolo de relação $\mathbf{R}$ e todo $m_1, ..., m_n \in M$;
3. $f(\mathbf{g}^{\mathcal{M}}(m_1, .., m_n)) = \mathbf{g}^{\mathcal{N}}(f(m_1), ..., f(m_n))$, para todo símbolo de função $\mathbf{g}$ e todo $m_1, ..., m_n \in M$.

Na realidade:

Proposição 3.1. *Se $f : M \to N$ é uma bijeção satisfazendo as três propriedades acima, então f é um isomorfismo.*

A ideia de isomorfismo, no entanto, é um pouco forte. Podemos introduzir uma noção que nos permite afirmar que "em termos de lógica de primeira ordem, dois modelos são indistinguíveis". Essa é a definição de equivalência. Observe o seguinte problema:

Exemplo 3.2. Considere a linguagem de grafos $(\{E\})$ e a seguinte teoria:

- φ_1, φ_2, ... Em que cada φ_n é a sentença "existem n elementos distintos";
- $\forall x \forall y \ E(x, y)$, isto é, quaisquer dois vértices distintos estão ligados por uma aresta.
- $\forall x \ \neg E(x, x)$.

Dados $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ modelos para essa teoria, se $f : G_1 \to G_2$ é uma bijeção, então f é um isomorfismo entre $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$.

Observe (e talvez prove) que, mesmo que dois modelos para a teoria anterior não sejam isomorfos, não é possível exibir uma sentença que é satisfeita por apenas um deles. Assim, definimos:

Definição 3.2. Dois modelos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, para um mesmo vocabulário, são ditos equivalentes se, para toda sentença φ, $\mathcal{M} \models \varphi \leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi$.

Exercício 3.1. Mostre que quaisquer dois modelos da teoria acima são equivalentes.

A não ser que estejamos falando sobre a teoria ZFC, em geral, a lógica de primeira ordem não distingue cardinalidades infinitas distintas. Um exemplo clássico dessa afirmação é a equivalência entre os modelos $\{\mathbb{Q}, <\}$ e $\{\mathbb{R}, <\}$, ainda que não sejam isomorfos.

Mas veja, também, que a noção de isomorfismo não significa "dois modelos de mesma cardinalidade que sejam equivalentes". Vamos construir um exemplo que prova essa afirmação.

Exemplo 3.3. Considere o vocabulário $\{\prec\}$. Defina sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a seguinte ordem: $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2)$ se $a_1 < a_2$ ou se $a_1 = a_2$ e $b_1 < b_2$.

Essa é a ordem lexicográfica sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Vamos mostrar que $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}$, em termos de ordem. Isso significa mostrar que não existe uma bijeção $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \times \mathbb{R}$ tal que $f(x) < f(y) \Leftrightarrow x < y$.

Suponha, então, que f seja uma função com essas propriedades. Veja que, dado $a \in \mathbb{R}$, $f(\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}, x \leq a\}) = (-\infty, m) \subset \mathbb{Q}$, para algum m, pois trata-se de um segmento inicial sem elementos máximo e mínimo.

No entanto, como f é bijeção, deve existir algum $(p,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $f((p,q)) = m$, com $p > a$. Mas, dado $q' < q$, teremos que $(p,q') \prec (p,q)$ e, portanto, $f((p,q')) < m$, pois f preserva a ordem.

Como f é injetiva, precisamos ter que $(p,q') \in f^{-1}((-\infty,m)) = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}, x \leq a\}$, mas isso é uma contradição.

No entanto, tanto $\mathbb{R}$ quanto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ são modelos para a teoria de ordens totais densas sem máximo e mínimo. É possível provar, mas foge do escopo dessas notas, que tal teoria é completa, isto é, que todos os modelos para essa teoria são equivalentes.

Quando se estuda relações entre modelos, merecem atenção especial os casos em que um modelo está contido no outro.

Definição 3.3. Dado um vocabulário $L = \{\mathbf{c}_i, \mathbf{f}_i, \mathbf{R}_i\}$ e $\mathcal{M}$ um modelo para esse vocabulário, dizemos que $\mathcal{N}$ é um submodelo de $\mathcal{M}$ se $N \subset M$, $\mathcal{N}$ é um L-modelo e, para todo i:

- $\mathbf{c}_i^{\mathcal{N}} = \mathbf{c}_i^{\mathcal{M}}$;
- Para todo $x_1, ..., x_r \in N$, $\mathbf{f}^{\mathcal{N}}(x_1, ..., x_r) = \mathbf{f}^{\mathcal{M}}(x_1, ..., x_r)$;
- Para todo $x_1, ..., x_r \in N$, $\mathcal{N} \models \mathbf{R}(x_1, ..., x_r) \leftrightarrow \mathcal{M} \models \mathbf{R}(x_1, ..., x_r)$;

Veja, então, que submodelos não são simplesmente "modelos contidos um no outro", mas também é necessário que as interpretações sejam as mesmas, dada a restrição de elementos do modelo menor.

Subanéis e subgrupos são exemplos de submodelos: nas definições, exige-se que os elementos neutro sejam os mesmos, além de que os resultados sejam preservados. Subgrafos também são exemplos de submodelos, desde que mantidas as arestas entre os vértices.

Existem submodelos que são muito semelhantes aos modelos em que estão contidos.

Definição 3.4. Dizemos que um submodelo $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ é elementar quando, dada uma fórmula $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $a_1, ..., a_n \in N$, então

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(a_1, ..., a_n)$$

Denota-se $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$.

Naturalmente, se $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$, então, dada uma sentença φ, $\mathcal{M} \models \varphi \leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi$, o que significa que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

Mas não basta que $N \subset M$ e $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ para que $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$. Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 3.4. Seja $L = \{\prec\}$ a linguagem de ordens. Considere $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, <)$ e $\mathcal{B} = ((0,1), >)$. Veja que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são modelos para a teoria de ordens totais densas sem máximo e mínimo. Portanto, como todo modelo para essa teoria é equivalente, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Além disso, $(0,1) \subset \mathbb{R}$. Porém, não se pode afirmar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, pois as interpretações de $\prec$ são incompatíveis: dados $a, b \in (0,1)$, como $a < b \Rightarrow a \not> b$, então $a \prec^{\mathcal{A}} b \Rightarrow a \not\prec^{\mathcal{B}} b$.

Exercício 3.2. Considere os vocabulários e modelos abaixo. Diga se $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

- $L = \{*, e\}$, $\mathcal{A} = (\mathbb{Q}, +, 0)$, $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, +, 0)$;
- $L = \{*, e\}$, $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_{2n}, +, \overline{0})$, $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}_n, +, \overline{0})$;
- $L = \{*, e\}$, $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, +, 0)$, $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, \times, 0)$;
- $L = \{*, e\}$, $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_p, +, 0)$, $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}_p^\times, \times, 1)$ ($\mathbb{Z}_p$ é o grupo cujos multiplicativo de $\mathbb{Z}_p$;
- $L = \{*, \cdot\}$, $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_p, +, \times)$, $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}_p^\times, +, \times)$ ($\mathbb{Z}_p$ é o grupo cujos multiplicativo de $\mathbb{Z}_p$;

4 Os Teoremas de Löwenheim-Skolem-Tarski

Nessa seção voltaremos a discutir submodelos elementares, introduzidos ao final da seção anterior, com a apresentação de dois teoremas centrais da Teoria de Modelos. Daremos início retomando a discussão sobre submodelos, não necessariamente elementares.

Lema 4.1. *Sejam $\mathcal{M}$ um submodelo de $\mathcal{N}$ e α uma $\mathcal{M}-$valoração. Então:*

1. *para todo termo $t, t^{\mathcal{M}}[\alpha] = t^{\mathcal{N}}[\alpha]$,*
2. *para toda fórmula livre de quantificadores, $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha] \leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi[\alpha]$.*

Demonstração. As duas demonstrações serão feitas por indução.

1. Se t for uma variável x, então $t^{\mathcal{M}}[\alpha] = \alpha(x) = t^{\mathcal{N}}[\alpha]$. Se t for um símbolo de constante c, então segue da definição de submodelo que $t^{\mathcal{M}}[\alpha] = c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}} = t^{\mathcal{N}}[\alpha]$. Por último, se $t = f(t_1, ..., t_n)$, então temos que:

   $$t^{\mathcal{M}}[\alpha] = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\alpha], ..., t_n^{\mathcal{M}}[\alpha])$$

   Já mostramos que nos casos em que os termos são variáveis ou constantes, temos a igualdade das interpretações dos termos, portanto

   $$f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\alpha], ..., t_n^{\mathcal{M}}[\alpha]) = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{N}}[\alpha], ..., t_n^{\mathcal{N}}[\alpha])$$

   Pela definição de submodelo, concluímos que

   $$f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{N}}[\alpha], ..., t_n^{\mathcal{N}}[\alpha]) = f^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}[\alpha], ..., t_n^{\mathcal{N}}[\alpha]),$$

   o que conclui a demonstração desse item.

2. Se φ for uma igualdade entre termos, digamos $t = s$, então

   $$\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha] \leftrightarrow \mathcal{M} \vDash (s = t)[\alpha] \leftrightarrow s^{\mathcal{M}}[\alpha] = t^{\mathcal{M}}[\alpha]$$

   Mas no item anterior já mostramos que a interpretação dos termos é a mesma em ambos os modelos. Logo, temos que

   $$s^{\mathcal{M}}[\alpha] = t^{\mathcal{M}}[\alpha] \leftrightarrow s^{\mathcal{N}}[\alpha] = t^{\mathcal{N}}[\alpha] \leftrightarrow \mathcal{N} \vDash (s = t)[\alpha] = \varphi[\alpha]$$

   Se φ for da forma $R(t_1, ..., t_n)$, onde R é um símbolo de relação e $t_1, ..., t_n$ são termos, então

   $$\mathcal{M} \vDash R(t_1, ..., t_n) \leftrightarrow R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\alpha], ..., t_n^{\mathcal{M}}[\alpha]),$$

   por definição de satisfação de fórmula. Já mostramos que $t_i^{\mathcal{M}}[\alpha] = t_i^{\mathcal{N}}[\alpha]$ para todo i, portanto por indução temos que

   $$R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\alpha], ..., t_n^{\mathcal{M}}[\alpha]) \leftrightarrow R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{N}}[\alpha], ..., t_n^{\mathcal{N}}[\alpha]).$$

Da definição de submodelos segue que

$$R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{N}}[\alpha], ..., t_n^{\mathcal{N}}[\alpha]) \leftrightarrow R^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}[\alpha], ..., t_n^{\mathcal{N}}[\alpha]) \leftrightarrow \mathcal{N} \vDash R(t_1, ..., t_n).$$

Isso conclui o caso em que φ é uma fórmula atômica. Restam os casos em que φ é uma combinação proposicional de fórmulas. Faremos apenas o caso em que φ é do tipo $\eta \wedge \psi$, onde η, ψ são fórmulas, deixando os demais casos a cargo do leitor devido a semelhança entre eles:

Por definição de satisfação de fórmula, temos que

$$\mathcal{M} \vDash (\eta \wedge \psi)[\alpha] \leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \eta[\alpha] \text{ e } \mathcal{M} \vDash \psi[\alpha].$$

Por indução, temos que $\mathcal{M} \vDash \eta[\alpha] \leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \eta[\alpha]$ e $\mathcal{M} \vDash \psi[\alpha] \leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \psi[\alpha]$, o que, novamente pela definição de satisfação de fórmula, é equivalente a $\mathcal{N} \vDash (\eta \wedge \psi)[\alpha]$

□

Considere os modelos $(\mathbb{N} - 0, <) \subset (\mathbb{N}, <)$. Note que a fórmula $\exists y (y < x)$ é satisfeita pelo número 1 no modelo maior, já que $0 < 1$, mas o mesmo não é válido no modelo menor, uma vez que ele não contém o 0. Isso mostra que a hipótese de φ ser livre de quantificadores é necessária. Para que o resultado acima seja generalizado para qualquer fórmula, não basta que o modelo menor seja um submodelo: é preciso que ele seja elementar.

Proposição 4.1. *(Critério de Tarski) Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ modelos tais que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Se, para toda fórmula $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_k)$ e todos $m_0, ..., m_k \in M$, temos que*

$$\mathcal{B} \vDash \exists x_k \; \varphi[m_0, ..., m_k] \Rightarrow \exists m \in M \; \mathcal{N} \vDash \varphi[m_0, ..., m_{k-1}, m],$$

então $\mathcal{M}$ é um submodelo elementar de $\mathcal{N}$.

Demonstração. Mais uma vez usaremos indução. Observe que para mostrarmos que $\mathcal{M}$ é submodelo elementar de $\mathcal{N}$, basta repetir a demonstração do lema anterior e adicionar a demonstração de que $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha] \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi[\alpha]$ quando φ não é livre de quantificadores. É isso que faremos.

Suponha que $\mathcal{N} \vDash \exists x_k \varphi[m_0, ..., m_{k-1}]$. Por hipótese, temos que $\exists m \in M$ tal que $\mathcal{N} \vDash \varphi[m_0, ..., m_{k-1}, m]$. Note que reduzimos o problema a uma fórmula que já sabemos provar. Portanto, por indução, segue que $\mathcal{M} \vDash \varphi[m_0, ..., m_{k-1}, m]$, o que conclui um lado da equivalência.

Por outro lado, se $\mathcal{M} \vDash \exists x_k \varphi[m_0, ..., m_{k-1}]$, então pela definição de satisfação de fórmula existe $m \in M$ tal que $\mathcal{M} \vDash \varphi[m_0, ..., m_{k-1}, m]$. Utilizando nossa hipótese de indução, segue que $\mathcal{N} \vDash \varphi[m_0, ..., m_{k-1}, m]$. Como $M \subset N$, então $m \in N$. Utilizando novamente a definição de satisfação de fórmula, concluímos que $\mathcal{N} \vDash \exists x_k \varphi[m_0, ..., m_{k-1}]$. □

Lema 4.2. *Seja $\mathcal{N}$ um $\mathcal{L}$-modelo. Sejam $X \subset N$ e μ um cardinal de forma que*

$$|\mathbb{N}|, |\mathcal{L}|, |X| \leq \mu \leq |N|.$$

Então existe um submodelo $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ tal que $X \subset M$ e $|M| = \mu$.

Demonstração. Como $\mu \leq |\mathcal{N}|$, existe $M_0 \subset N$ tal que $|M_0| = \mu$ e $X \subset M_0$. Seja M_1 a união de M_0 com o conjunto formado pelas constantes de $\mathcal{N}$ e todos os valores das funções de $\mathcal{N}$ com argumentos em M_0, isto é, $M_1 = M_0 \cup \{c^{\mathcal{N}} : c \text{ é um símbolo de constante de } \mathcal{L}\} \cup \{f^{\mathcal{N}}(t_1, ..., t_n) : t_1, ..., t_n \in M_0, f \text{ é um símbolo de função}\}$. Repita o mesmo procedimento para todo n natural e tome $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$.

Note que, por construção, temos que M contém todas as constantes de $\mathcal{N}$ e é fechado pelas funções de $\mathcal{N}$. De fato, seja $f^{\mathcal{N}}$ uma função de aridade k. Sejam $m_1, ..., m_k \in M$. Existe $M_n \subset M$ de tal forma que $m_1, ..., m_k \in M_n$. Disso segue que $f^{\mathcal{N}}(m_1, ..., m_k) \in M_{n+1} \subset M$. Portanto M é o universo de um submodelo de $\mathcal{N}$.

Agora observe que, por indução nos índices, segue que todos os M_n tem cardinalidade μ. No caso de M_0, segue por definição. Vamos assumir que $|M_n| = \mu$. Temos que M_{n+1} é formado pela união de M_n, constantes de $\mathcal{N}$ e todos os valores das funções de $\mathcal{N}$ com argumentos em M_n. Por hipótese, temos que $|\mathcal{L}| \leq \mu$, portanto a quantidade de constantes e funções é no máximo μ. Por hipótese de indução segue que $|M_n| = \mu$, logo, existem no máximo μ argumentos possíveis para as funções de $\mathcal{N}$, o que limite a quantidade de valores possíveis em μ.

Como M é formado pela união enumerável de conjuntos de cardinalidade μ, segue que a cardinalidade de M é μ. Resta mostrarmos que M é modelo. $\square$

Com algumas modificações na demonstração acima, obtemos um resultado muito mais poderoso.

Teorema 4.1. *(Löwenheim-Skolem-Tarski para baixo) Seja $\mathcal{N}$ um $\mathcal{L}$-modelo. Sejam $X \subset N$ e μ um cardinal de forma que*

$$|\mathbb{N}|, |\mathcal{L}|, |X| \leq \mu \leq |N|.$$

Então existe um submodelo elementar $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ tal que $X \subset M$ e $|M| = \mu$.

Demonstração. Seja $M_0 \subset N$ tal que $|M_0| = \mu, X \subset M_0$ e que contém todas as constantes de $\mathcal{L}$. Seja A_0 o conjunto formado pelos seguintes elementos m_φ:

Para cada fórmula $\varphi(x_1, ..., x_k)$ e cada $m_1, ..., m_{k-1} \in M_0$ tais que $\mathcal{N} \vDash \exists x_k \varphi[m_1, ..., m_{k-1}]$, tome $m_\varphi \in N$ de forma que $\mathcal{N} \vDash \varphi[m_1, ..., m_{k-1}, m_\varphi]$.

Defina $M_1 = M_0 \cup A_0$. Agora defina M_2 da mesma forma, isto é, $M_2 = M_1 \cup A_1$. Continuando o processo, iremos obter a cadeia de conjuntos

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset ... \subset N.$$

Tome $M =_{n \in \mathbb{N}} M_n$. Note que $|M| = \mu$, pois $|M_0| = \mu$ e foram adicionados no máximo μ elementos em cada iteração, enumeráveis vezes. Note também que $X \subset M$.

Tome $\mathcal{M}$ o modelo cujo universo é M e sua interpretação é a restrição da interpretação de $\mathcal{N}$. Portanto, por construção, segue que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Por último, observe que todos os requisitos do critério de Tarski estão sendo cumpridos pelo que temos até agora, o que nos permiti concluir que $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$. $\square$

Demonstração. Para cada $x \in M$, considere $\mathbf{c}_x$ uma nova constante, com $\mathbf{c}_x^{\mathcal{M}} = x$.

Seja L' o vocabulário $L \cup \left(\bigcup_{x \in M} \{\mathbf{c}_x\} \right)$. Considere, então, Γ o conjunto de todas as L'-sentenças φ tais que $\mathcal{M} \models \varphi$.

Agora, introduza no vocabulário κ novas constantes $\mathbf{c}_i$, $i < \kappa$. Considere L'' o vocabulário L' com essas novas constantes adicionadas.

Defina Γ' como $\Gamma \cup \left(\bigcup_{i \neq j} \{\mathbf{c}_i \neq \mathbf{c}_j\} \right)$.

Assim como fizemos anteriormente, veja que $\mathcal{M}$ é um modelo para qualquer subconjunto finito de Γ'. Portanto, Γ' admite um modelo $\mathcal{N}$. Veja que $\mathcal{N}$ também é um L-modelo. Basta provarmos que $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

Seja $\varphi(x)$ uma L-fórmula. Precisamos mostrar que $\mathcal{M} \models \varphi(a) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(a)$.

$\mathcal{M} \models \varphi(x)[\alpha_x^a] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(\mathbf{c}_a)$

Que é o mesmo que dizer que $\varphi(\mathbf{c}_a) \in \Gamma$. Como $\mathcal{N}$ é modelo para Γ', então é modelo para Γ e portanto $\mathcal{N} \models \varphi(\mathbf{c}_a)$.

O mergulho $a \mapsto \mathbf{c}_a^{\mathcal{N}}$ é elementar.

Mas ainda não temos que $|N| = \kappa$, apenas que $|N| \geq \kappa$. Então, basta aplicar o Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski para baixo para obter um submodelo elementar de cardinalidade exatamente κ. $\square$

5 Eliminação de quantificadores

Podemos pensar nos quantificadores ($\forall$, $\exists$) como meios que introduzem certa complexidade às fórmulas.c Isso é especialmente verdade ao observarmos certas relações entre modelos: considere $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ e $\varphi(x)$ uma fórmula livre de quantificadores.

- $\mathcal{M} \models \exists\, x\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{N} \models \exists x\ \varphi(x)$;
- $\mathcal{N} \models \forall\, x\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{M} \models \forall x\ \varphi(x)$;

Mas agora, observe que, se nos restringirmos a fórmulas livres de quantificadores, teremos que $\mathcal{M} \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \psi$, sendo ψ uma fórmula livre de quantificadores. Seria vantajoso, então, se conseguíssemos, para uma dada teoria, exibir todas as suas propriedades em termos de fórmulas livres de quantificadores. Dessa maneira, teríamos que todo submodelo seria automaticamente elementar.

Na verdade, essa é uma definição bastante importante:

Definição 5.1. Uma teoria T é dita modelo-completa se, dados $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ modelos de T, então $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Podemos, também, introduzir uma noção mais forte: a de eliminação de quantificadores.

Definição 5.2. Uma teoria T admite eliminação de quantificadores se, para toda fórmula $\varphi(x) \in T$ existe uma fórmula $\chi(x)$ tal que todo modelo $\mathcal{M}$ é tal que:

$$\mathcal{M} \models \forall x \ (\varphi(x) \leftrightarrow \chi(x))$$

Veja que o que torna a eliminação de quantificadores mais forte é a dependência do vocabulário. A pergunta é: o que devemos adicionar à hipótese de uma teoria ser modelo completa de modo que admita eliminação de quantificadores?

A resposta é: devemos exigir que a classe dos submodelos de T tenha uma propriedade conhecida como *propriedade de amalgamação*, isto é: dado um modelo $\mathcal{A}$ e mergulhos $\mathcal{A} \underset{f_1}{\rightarrow} \mathcal{B}_1$ e $\mathcal{A} \underset{f_1}{\rightarrow} \mathcal{B}_2$, então existe um modelo $\mathcal{C}$ e mergulhos $g_1 : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{C}$ e $g_2 : \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{C}$ tais que $g_1 f_1 = g_2 f_2$. Em outras palavras, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}_1 \arrow[dr] & \\
\mathcal{A} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathcal{C} \\
& \mathcal{B}_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Teorema 5.1. *Se T é uma teoria modelo-completa e a classe dos submodelos de T tem a propriedade de amalgamação, então para toda fórmula existencial $\varphi(x)$, temos*

$$T \models \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$$

para alguma ψ livre de quantificadores.

Demonstração. Considere K o conjunto dos pares $(\mathcal{A}, a)$ tais que $\mathcal{A}$ é um modelo para T e $\mathcal{A} \models \varphi(a)$. Assim, para cada um desses pares em K, considere

$$\eta_{(\mathcal{A},a)}(x) = \bigwedge \{\theta(x) \ : \ \theta(x) \text{ é livre de quantificadores e } \mathcal{A} \models \theta(a)\}$$

Defina, agora,

$$\chi(x) = \bigvee_{(\mathcal{A},a) \in K} \eta_{(\mathcal{A},a)}(x)$$

Esqueça, por um momento, que essas fórmulas são infinitas (lembre que isso é proibido) e note que $T \models \forall x \ (\varphi(x) \leftrightarrow \chi(x))$. Isso ocorre pois:

- Se $M \models \varphi(m)$, então $(M, m) \in K$ e portanto $M \models \eta_{(M,m)}(m)$. Portanto, $M \models \chi(m)$;

- Se $M \models \chi(m)$, então $M \models \eta_{(\mathcal{A},a)}$, para algum $(\mathcal{A}, a) \in K$. Logo, o submodelo gerado por m mergulha tanto em M quando em $\mathcal{A}$. Seja $\mathcal{C}$ o modelo obtido a partir da AP. Como φ é uma fórmula existencial, é preservada por extensões. Assim sendo, $\mathcal{C} \models \varphi(g_1 f_1(m))$, pois é uma extensão de $\mathcal{A}$. Mas $\mathcal{C}$ é uma extensão de M, que é fechado por extensão. Logo, $M \models \varphi(m)$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A} \arrow[dr] & \\ \langle m \rangle \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathcal{C} \\ & M \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\square$

Veja que temos um problema acima, que é: a fórmula χ é uma disjunção possivelmente infinita de conjunções possivelmente infinitas. Veremos, depois, como contornar esse problema. Por ora, vamos nos concentrar em terminar a caracterização que desejamos fazer.

Precisamos mostrar que a teoria de corpos algebricamente fechados é modelo-completa, isto é, que todo corpo algebricamente fechado é fechado por extensão. Na linguagem algébrica, isso significa que, ao tomar um polinômio no anel de polinômios de um corpo algebricamente fechado, se alguma extensão desse corpo contém uma raiz para o polinômio, então o corpo inicial também tem alguma raiz do polinômio.

E isso é basicamente provar o Nullstellensatz.

Lembre-se do que foi dito a respeito da quantidade de quantificadores ser um indicador da complexidade de uma fórmula. Além da quantidade de quantificadores, há um outro parâmetro que indica melhor a complexidade, intuitivamente. Trata-se da quantidade de quantificadores alternados.

As seguintes fórmulas estão, então, em grau de complexidade crescente:

- $\forall x \forall y \forall z \varphi(x, y, z)$;
- $\forall x \forall y \exists z \varphi(x, y, z)$;
- $\exists x \forall y \exists z \varphi(x, y, z)$;

Veja, então, que todas as fórmulas da teoria de corpos podem ser escritas como "para todos $x_1, x_2, ..., x_n$ existem $y_1, y_2, ..., y_m$ tais que..."Isso significa dizer que essa é uma teoria $\forall_2$, pois as fórmulas podem ser escritas adicionando quantificadores universais a fórmulas existenciais.

Além disso, precisamos usar o fato de que dois corpos algebricamente fechados de mesma cardinalidade e mesma característica são sempre isomorfos. Quando todo modelo de uma teoria T de cardinalidade κ é isomorfo, então dizemos que a teoria T é κ-categórica.

Vamos associar, agora, todos esses conceitos:

Teorema 5.2. *Toda teoria $\forall_2$ λ-categórica é modelo-completa.*

Demonstração. Suponha que não.

Sejam $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ modelos tais que $\mathcal{B} \models \varphi(a)$ e $\mathcal{A} \models \neg\varphi(a)$.

Inserimos uma nova relação P, unária, no vocabulário. Defina $P^{\mathcal{B}} = A$. Ou seja, P identifica, em B, o subconjunto A.

Isso é como um atalho para fazer argumentos de segunda ordem "localmente". Assim:

$$\mathcal{B}^+ \models \exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi^P(x))$$

Acima, o modelo $\mathcal{B}^+$ é $\mathcal{B}$ para o novo vocabulário, com a interpretação $P^{\mathbb{B}^+} = A$.

Tome, agora, $\mathcal{D}^+$ uma extensão de $\mathcal{B}^+$ tal que a cardinalidade de $|P^{\mathcal{D}^+}|$ seja λ. Podemos fazer isso introduzindo uma quantidade infinita de constantes no vocabulário.

Defina, agora, $C = P^{\mathcal{D}^+}$. Teremos, então, que $\mathcal{C}$ será um modelo para T de cardinalidade λ. Agora, como T é uma teoria $\forall_2$, será fechada por uniões de cadeias ascendentes e veremos a seguir que isso significa que existe um modelo fechado por extensões de cardinalidade λ. Agora, como a teoria é λ-categórica, $\mathcal{C}$ será isomorfo a esse modelo e, portanto, será fechado por extensões.

Isso significa, então, que não é possível ter $\mathcal{D}^+ \models \exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi^P(x))$. □

Resta, então, provar que se uma classe de modelos é fechada por uniões de cadeias ascendentes, então todo modelo admite uma extensão que é fechada por extensões.

Para isso, liste todos os pares $(\varphi(x)_i, x_i)_{i<\lambda}$, com φ uma fórmula existencial e $x \in A$. Defina, então:

- $A_0 = A$;
- $A_{i+1} = \begin{cases} C \supset A & \text{existe um } C \models \varphi_i(x_i) \\ A_i, & \text{caso contrário} \end{cases}$;
- $A_\delta = \bigcup_{\xi<\delta} A_\xi$, se $\delta < \lambda$ é ordinal limite.

O modelo $A^* = A_\lambda$ ainda não será fechado por extensão, ou pelo menos não necessariamente. Mas, se fizermos isso ω vezes então o modelo obtido será fechado por extensão. Ou seja, o modelo $A^{***\cdots}$ é fechado por extensão.

Suponha que não. Então, existe $C \supset A$ tal que para alguma fórmula φ e algum elemento $a \in A^{**\cdots}$, temos que $C \models \varphi(a)$ mas $A^{**\cdots} \not\models \varphi(a)$

Mas esse elemento a pertence a algum $A' = A^{**\cdots*}$, ou seja, é alcançado aplicando finitas vezes o processo. Mas então, (φ, a) é um dos elementos da lista de pares de fórmulas e elementos de A'. Quando fazemos A'^*, então, teremos que, como C é a extensão tal que $C \models \varphi(a)$, $C \subset A'^*$.

Como dito acima, no entanto, há o problema de estarmos lidando com fórmulas infinitas, o que não existe em lógica de primeira ordem. Devemos, então, mostrar que existe um conjunto finito de fórmulas $\Phi \subset \{\eta_{(A,a)} : (\mathcal{A}, a) \in K\}$ tal que $T \models \forall x\ (\varphi(x) \leftrightarrow \bigvee \Phi)$.

Suponha que não. Então, para todo subconjunto finito Φ, temos que $\mathcal{M} \models \neg\forall x\ (\varphi(x) \leftrightarrow \bigvee \Phi)$, para algum $\mathcal{M}$ modelo para T. Ou seja, $\mathcal{M} \models \exists x\ \neg(\varphi(x) \leftrightarrow \bigvee \Phi)$.

Pelo teorema da compacidade, deve existir um modelo $\mathcal{N}$ tal que, para qualquer subconjunto finito de fórmulas Φ, $\mathcal{N} \models \exists x\ \neg(\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(x))$