Modelos e Aplicações - Aula 2

Caio Lopes, Henrique Lecco

ICMC - USP

21 de julho de 2020

Um pequeno resumo

Na aula de ontem, vimos:

- Vocabulários: símbolos lógicos e não lógicos;
- Termos e fórmulas;
- Teorias;

Um pequeno resumo

Na aula de ontem, vimos:

- Vocabulários: símbolos lógicos e não lógicos;
- Termos e fórmulas;
- Teorias;

Terminamos discutindo um pouco sobre a teoria DLO.

Modelos

Isso nos leva, então, à semântica.
Precisamos definir o que é um modelo.

Modelos

Isso nos leva, então, à semântica.
Precisamos definir o que é um modelo.

Definição

Um modelo é um conjunto munido de uma função, chamada interpretação, que leva:

- Símbolos de constantes em constantes;
- Símbolos de relações em relações;
- Símbolos de funções em funções.

Exemplos

A maneira mais fácil de compreender a definição talvez seja por meio de exemplos.
Considere a linguagem de grupos: $L = \{*, \mathbf{e}\}$.
Um modelo para essa linguagem será um conjunto com um elemento destacado (e) e munido de uma operação ($*$).

Exemplos

A maneira mais fácil de compreender a definição talvez seja por meio de exemplos.
Considere a linguagem de grupos: $L = \{*, \mathbf{e}\}$.
Um modelo para essa linguagem será um conjunto com um elemento destacado (e) e munido de uma operação ($*$).

Descrevemos um modelo como:

$$\mathcal{M} = \{M, \cdot^{\mathcal{M}}\}$$

Em que M é o universo e $\cdot^{\mathcal{M}}$ é a interpretação.

Vamos buscar modelos para o vocabulário de anéis.

Exemplos

Considere o modelo $\mathcal{Z} = \{\mathbb{Z}, \cdot^{\mathcal{Z}}\}$, em que:

$$\mathbf{e}^{\mathcal{Z}} = 0$$

$$*^{\mathcal{Z}} = +$$

Exemplos

Considere o modelo $\mathcal{Z} = \{\mathbb{Z}, \cdot^{\mathcal{Z}}\}$, em que:

$$\mathbf{e}^{\mathcal{Z}} = 0$$
$$*^{\mathcal{Z}} = +$$

Isto é, o modelo $\mathcal{Z}$ é o conjunto $\mathbb{Z}$ com o elemento 0 destacado e a operação de soma $(+)$.
Observe: $\mathcal{Z}$ é um grupo abeliano. Mas nem todo grupo é abeliano.

Exemplos

Considere o modelo $\mathcal{Z} = \{\mathbb{Z}, \cdot^{\mathcal{Z}}\}$, em que:

$$\mathbf{e}^{\mathcal{Z}} = 0$$
$$*^{\mathcal{Z}} = +$$

Isto é, o modelo $\mathcal{Z}$ é o conjunto $\mathbb{Z}$ com o elemento 0 destacado e a operação de soma $(+)$.
Observe: $\mathcal{Z}$ é um grupo abeliano. Mas nem todo grupo é abeliano.

Dependendo do modelo para esse vocabulário, teremos propriedades diferentes.

Exemplos

Seja, agora, $\mathcal{S} = \{S_5, \cdot^{\mathcal{S}}\}$ com

- $\mathbf{e}^{\mathcal{S}} = Id$;
- $*^{\mathcal{S}} = \circ$.

Isto é, $\mathcal{S}$ é o conjunto das permutações de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ munido da operação de composição.

Exemplos

Seja, agora, $\mathcal{S} = \{S_5, \cdot^{\mathcal{S}}\}$ com

- $\mathbf{e}^{\mathcal{S}} = Id$;
- $*^{\mathcal{S}} = \circ$.

Isto é, $\mathcal{S}$ é o conjunto das permutações de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ munido da operação de composição.

Veja que $(1\ 2) \circ (1\ 3) \neq (1\ 3) \circ (1\ 2)$, ou seja, $\mathcal{S}$ não é abeliano.

Exemplos

Seja, agora, $\mathcal{S} = \{S_5, \cdot^{\mathcal{S}}\}$ com

- $\mathbf{e}^{\mathcal{S}} = Id$;
- $*^{\mathcal{S}} = \circ$.

Isto é, $\mathcal{S}$ é o conjunto das permutações de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ munido da operação de composição.

Veja que $(1\ 2) \circ (1\ 3) \neq (1\ 3) \circ (1\ 2)$, ou seja, $\mathcal{S}$ não é abeliano.

Usando apenas o vocabulário L, a fórmula que diz ser abeliano é:

$$\forall x \forall y \ \ *(x, y) = *(y, x)$$

Como $*$ é um símbolo de função binária, também podemos escrever:

$$\forall x \forall y \ x * y = y * x$$

Exemplos

Veja, então, como a interpretação dos modelos $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{S}$ faz diferença. Em um dos casos, faz a sentença que descreve a comutatividade ser falsa e, em outro, ser verdadeira.

Exemplos

Veja, então, como a interpretação dos modelos $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{S}$ faz diferença. Em um dos casos, faz a sentença que descreve a comutatividade ser falsa e, em outro, ser verdadeira.

Só podemos saber se uma sentença é verdadeira ou falsa se conhecermos a interpretação! Por isso dizemos que o modelo dá "sentido"ou "significado".

Exemplos

Veja, então, como a interpretação dos modelos $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{S}$ faz diferença. Em um dos casos, faz a sentença que descreve a comutatividade ser falsa e, em outro, ser verdadeira.

Só podemos saber se uma sentença é verdadeira ou falsa se conhecermos a interpretação! Por isso dizemos que o modelo dá "sentido"ou "significado".

Mas e se quisermos fazer um modelo um pouco diferente?

Um grupo que nem é grupo

Considere, também para o vocabulário de grupos, o seguinte modelo: $\mathcal{M} = \{\mathbb{Z}, \cdot^{\mathcal{M}}\}$, tal que:

- $\mathbf{e}^{\mathcal{M}} = 0$;

Um grupo que nem é grupo

Considere, também para o vocabulário de grupos, o seguinte modelo: $\mathcal{M} = \{\mathbb{Z}, \cdot^{\mathcal{M}}\}$, tal que:

- $\mathbf{e}^{\mathcal{M}} = 0$;
- $*^{\mathcal{M}} = \times$.

Ou seja, $\mathbb{Z}$ com a operação de multiplicação e o elemento destacado 0.

É claro que isso não vai ser um grupo, mas vamos analisar as sentenças da teoria de grupos uma por uma...

Um grupo que nem é grupo

1. Associatividade: $\forall x \forall y \forall z \ \ *(*(x, y), z) = *(x, *(y, z));$
2. Elemento neutro: $\forall x \ x * \mathbf{e} = x;$
3. Elemento inverso: $\forall x \exists y \ x * y = \mathbf{e};$

Um grupo que nem é grupo

1. Associatividade: $\forall x \forall y \forall z \; *(*(x,y),z) = *(x,*(y,z))$;
2. Elemento neutro: $\forall x \; x * \mathbf{e} = x$;
3. Elemento inverso: $\forall x \exists y \; x * y = \mathbf{e}$;

Veja que $\mathcal{M}$ não satisfaz a propriedade de elemento neutro com o elemento destacado 0.
Sim, existe o 1 que é um elemento neutro para a multiplicação, mas o modelo interpreta como o elemento destacado **e** o inteiro 0.

Um grupo que nem é grupo

1. Associatividade: $\forall x \forall y \forall z \; *(*(x,y),z) = *(x,*(y,z))$;
2. Elemento neutro: $\forall x \; x * \mathbf{e} = x$;
3. Elemento inverso: $\forall x \exists y \; x * y = \mathbf{e}$;

Veja que $\mathcal{M}$ não satisfaz a propriedade de elemento neutro com o elemento destacado 0.
Sim, existe o 1 que é um elemento neutro para a multiplicação, mas o modelo interpreta como o elemento destacado **e** o inteiro 0.

Mas se $\mathcal{M}$ não é um grupo, como pode ser um modelo para a lingugagem de grupos?

Um grupo que nem é grupo

1. Associatividade: $\forall x \forall y \forall z \ \ *(*(x,y),z) = *(x,*(y,z))$;
2. Elemento neutro: $\forall x \ x * \mathbf{e} = x$;
3. Elemento inverso: $\forall x \exists y \ x * y = \mathbf{e}$;

Veja que $\mathcal{M}$ não satisfaz a propriedade de elemento neutro com o elemento destacado 0.
Sim, existe o 1 que é um elemento neutro para a multiplicação, mas o modelo interpreta como o elemento destacado **e** o inteiro 0.

Mas se $\mathcal{M}$ não é um grupo, como pode ser um modelo para a linguagem de grupos?
Ele não é um modelo para a *teoria* de grupos.

Verdade ou ~~consequência~~ falsidade

Falamos sobre sentenças serem verdadeiras e falsas em determinados modelos e, embora isso bastante intuitivo, não demos um tratamento formal a essa noção.

Denotamos $\mathcal{M} \models \varphi$ para "o modelo $\mathcal{M}$ satisfaz a sentença φ", ou "a sentença φ é verdadeira no modelo $\mathcal{M}$"

Verdade ou ~~consequência~~ falsidade

Falamos sobre sentenças serem verdadeiras e falsas em determinados modelos e, embora isso bastante intuitivo, não demos um tratamento formal a essa noção.
Denotamos $\mathcal{M} \models \varphi$ para "o modelo $\mathcal{M}$ satisfaz a sentença φ", ou "a sentença φ é verdadeira no modelo $\mathcal{M}$"

Para fórmulas atômicas, temos:

$$\mathcal{M} \models \mathbf{R}(t_1, ..., t_n) \Leftrightarrow \mathbf{R}^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, ..., t_n^{\mathcal{M}})$$
$$\mathcal{M} \models t = s \Leftrightarrow t^{\mathcal{M}} = s^{\mathcal{M}}$$

Interpretação, mais a fundo

Considere, então, o vocabulário $L = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{R}\}$.
Consideramos dois modelos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$:

- $M = \mathbb{Z}$;
- $\mathbf{c}_1^{\mathcal{M}} = 1$
- $\mathbf{c}_2^{\mathcal{M}} = 2$
- $\mathbf{R}^{\mathcal{M}} =<$

- $N = \mathbb{Z}$;
- $\mathbf{c}_1^{\mathcal{N}} = 1$
- $\mathbf{c}_2^{\mathcal{N}} = 2$
- $\mathbf{R}^{\mathcal{N}} =>$

Diferentes interpretações...

Considere, agora, a L-fórmula φ como $\mathbf{R}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$.

Sabemos que $1 < 2$, portanto: $\mathbf{R}^{\mathcal{M}}(\mathbf{c}_1^{\mathcal{M}}, \mathbf{c}_2^{\mathcal{M}}) \equiv 1 < 2$ e $\mathbf{R}^{\mathcal{N}}(\mathbf{c}_1^{\mathcal{N}}, \mathbf{c}_2^{\mathcal{N}}) \equiv 1 > 2$

Diferentes interpretações...

Considere, agora, a L-fórmula φ como $\mathbf{R}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$.

Sabemos que $1 < 2$, portanto: $\mathbf{R}^{\mathcal{M}}(\mathbf{c}_1^{\mathcal{M}}, \mathbf{c}_2^{\mathcal{M}}) \equiv 1 < 2$ e $\mathbf{R}^{\mathcal{N}}(\mathbf{c}_1^{\mathcal{N}}, \mathbf{c}_2^{\mathcal{N}}) \equiv 1 > 2$

Portanto, $\mathcal{M} \models \varphi$ e $\mathcal{N} \not\models \varphi$.

Não apenas constantes...

Mas além de constantes, temos também variáveis nos termos do vocabulário.
Se esses termos têm variáveis, como fica a interpretação?

Devemos introduzir o conceito de valoração:

Definição

Uma valoração α é uma função que leva os termos da linguagem em elementos do universo do modelo.

Valorações

Sobre as valorações, há dois comentários a serem feitos:

- A valoração de uma constante depende somente da interpretação;
- A valoração de um termo depende somente da valoração de variáveis e constantes.

Valorações

Sobre as valorações, há dois comentários a serem feitos:

- A valoração de uma constante depende somente da interpretação;
- A valoração de um termo depende somente da valoração de variáveis e constantes.

As valorações conferem sentido a fórmulas com variáveis livres.
Considere o mesmo vocabulário do exemplo anterior e o mesmo modelo $\mathcal{M}$.
Sendo x uma variável, não faz sentido afirmar se $\mathcal{M} \models \mathbf{R}(x, \mathbf{c}_1)$.

Valoração

Considere, então, as valorações α e β, que levam variáveis de L a elementos de M e suponha que $\alpha(x) = 5$ e $\beta(x) = -1$.
Seja $\psi(x)$ a fórmula $\mathbf{R}(x, \mathbf{c}_1)$. Lembre que $\mathbf{c}_1^{\mathcal{M}} = 1$.

Valoração

Considere, então, as valorações α e β, que levam variáveis de L a elementos de M e suponha que $\alpha(x) = 5$ e $\beta(x) = -1$.
Seja $\psi(x)$ a fórmula $\mathbf{R}(x, \mathbf{c}_1)$. Lembre que $\mathbf{c}_1^{\mathcal{M}} = 1$.
Podemos afirmar, então, que:

$$\mathcal{M} \not\models \psi(x)[\alpha]$$

$$\mathcal{M} \models \psi(x)[\beta]$$

Valoração

Considere, então, as valorações α e β, que levam variáveis de L a elementos de M e suponha que $\alpha(x) = 5$ e $\beta(x) = -1$.
Seja $\psi(x)$ a fórmula $\mathbf{R}(x, \mathbf{c}_1)$. Lembre que $\mathbf{c}_1^{\mathcal{M}} = 1$.
Podemos afirmar, então, que:

$$\mathcal{M} \not\models \psi(x)[\alpha]$$

$$\mathcal{M} \models \psi(x)[\beta]$$

Ou, por simplicidade, podemos suprimir a valoração:

$$\mathcal{M} \not\models \psi(5)$$

$$\mathcal{M} \not\models \psi(-1)$$

Satisfação de fórmulas

De acordo com o que falamos, veja que sentenças são independentes da valoração, pois nenhuma variável ocorre livremente. Por isso, fórmulas são passos intermediários para chegar às sentenças.
Mas, daremos a noção de satisfação usando a valoração para sermos mais gerais.

Satisfação de fórmulas

De acordo com o que falamos, veja que sentenças são independentes da valoração, pois nenhuma variável ocorre livremente. Por isso, fórmulas são passos intermediários para chegar às sentenças.
Mas, daremos a noção de satisfação usando a valoração para sermos mais gerais.

Seja L uma linguagem, $\mathcal{M}$ um L-modelo e α uma valoração.
Definimos satisfação indutivamente:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} \models t = s[\alpha] &\Leftrightarrow \alpha(t) = \alpha(s) \\
\mathcal{M} \models \mathbf{R}(t_1, ..., t_n)[\alpha] &\Leftrightarrow \mathbf{R}^{\mathcal{M}}(\alpha(t_1), ..., \alpha(t_n)) \\
\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi[\alpha] &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[\alpha] \text{ e } \mathcal{M} \models \psi[\alpha] \\
\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi[\alpha] &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[\alpha] \text{ ou } \mathcal{M} \models \psi[\alpha] \\
\mathcal{M} \models \neg\varphi[\alpha] &\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \varphi[\alpha]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} \models t = s[\alpha] &\Leftrightarrow \alpha(t) = \alpha(s) \\
\mathcal{M} \models \mathbf{R}(t_1, ..., t_n)[\alpha] &\Leftrightarrow \mathbf{R}^{\mathcal{M}}(\alpha(t_1), ..., \alpha(t_n)) \\
\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi[\alpha] &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[\alpha] \text{ e } \mathcal{M} \models \psi[\alpha] \\
\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi[\alpha] &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[\alpha] \text{ ou } \mathcal{M} \models \psi[\alpha] \\
\mathcal{M} \models \neg\varphi[\alpha] &\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \varphi[\alpha]
\end{aligned}
$$

Faltam os quantificadores. Dado um elemento $m \in M$, uma variável x e uma valoração α, dizemos que α_x^m é a valoração α substituindo-se $\alpha(x)$ por m.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x) &\Leftrightarrow \text{existe um elemento } m \text{ em } M \text{ tal que } \mathcal{M} \models \varphi(x)[\alpha_x^m] \\
\mathcal{M} \models \forall x \varphi(x) &\Leftrightarrow \text{para todo elemento } m \text{ em } M,\ \mathcal{M} \models \varphi(x)[\alpha_x^m]
\end{aligned}
$$

Verificação

Considere $\mathcal{M}$ um modelo. Dada uma fórmula relativa a esse modelo, se não for atômica ou negação de atômica, podemos reduzi-la da seguinte maneira:

Verificação

Considere $\mathcal{M}$ um modelo. Dada uma fórmula relativa a esse modelo, se não for atômica ou negação de atômica, podemos reduzi-la da seguinte maneira:

- $\varphi \wedge \psi$ se reduz a φ ou a ψ;

Verificação

Considere $\mathcal{M}$ um modelo. Dada uma fórmula relativa a esse modelo, se não for atômica ou negação de atômica, podemos reduzi-la da seguinte maneira:

- $\varphi \wedge \psi$ se reduz a φ ou a ψ;
- $\varphi \vee \psi$ se reduz a φ ou a ψ;

Verificação

Considere $\mathcal{M}$ um modelo. Dada uma fórmula relativa a esse modelo, se não for atômica ou negação de atômica, podemos reduzi-la da seguinte maneira:

- $\varphi \wedge \psi$ se reduz a φ ou a ψ;
- $\varphi \vee \psi$ se reduz a φ ou a ψ;
- Para cada $m \in M$, $\forall x\, \varphi(x)$ se reduz a $\varphi(m)$;

Verificação

Considere $\mathcal{M}$ um modelo. Dada uma fórmula relativa a esse modelo, se não for atômica ou negação de atômica, podemos reduzi-la da seguinte maneira:

- $\varphi \wedge \psi$ se reduz a φ ou a ψ;
- $\varphi \vee \psi$ se reduz a φ ou a ψ;
- Para cada $m \in M$, $\forall x\, \varphi(x)$ se reduz a $\varphi(m)$;
- Para cada $m \in M$, $\exists x\, \varphi(x)$ se reduz a $\varphi(m)$;

Agora, note que:

- Se φ e ψ são verdadeiras em $\mathcal{M}$, então $\varphi \wedge \psi$ é verdadeira em $\mathcal{M}$;

Verificação

Indutivamente...

Agora, note que:

- Se φ e ψ são verdadeiras em $\mathcal{M}$, então $\varphi \wedge \psi$ é verdadeira em $\mathcal{M}$;
- Se uma dentre φ e ψ é verdadeira em $\mathcal{M}$, então $\varphi \vee \psi$ é verdadeira em $\mathcal{M}$;

Agora, note que:

- Se φ e ψ são verdadeiras em $\mathcal{M}$, então $\varphi \wedge \psi$ é verdadeira em $\mathcal{M}$;
- Se uma dentre φ e ψ é verdadeira em $\mathcal{M}$, então $\varphi \vee \psi$ é verdadeira em $\mathcal{M}$;
- Se para qualquer elemento m de M, $\varphi(m)$ é verdadeira em $\mathcal{M}$, então $\forall x\, \varphi(x)$ é verdadeira em $\mathcal{M}$;

Agora, note que:

- Se φ e ψ são verdadeiras em $\mathcal{M}$, então $\varphi \wedge \psi$ é verdadeira em $\mathcal{M}$;
- Se uma dentre φ e ψ é verdadeira em $\mathcal{M}$, então $\varphi \vee \psi$ é verdadeira em $\mathcal{M}$;
- Se para qualquer elemento m de M, $\varphi(m)$ é verdadeira em $\mathcal{M}$, então $\forall x\, \varphi(x)$ é verdadeira em $\mathcal{M}$;
- Se existe um elemento m de M tal que $\varphi(m)$ é verdadeira em $\mathcal{M}$, então $\exists x\, \varphi(x)$ é verdadeira em $\mathcal{M}$.

Agora, note que:

- Se φ e ψ são verdadeiras em $\mathcal{M}$, então $\varphi \wedge \psi$ é verdadeira em $\mathcal{M}$;
- Se uma dentre φ e ψ é verdadeira em $\mathcal{M}$, então $\varphi \vee \psi$ é verdadeira em $\mathcal{M}$;
- Se para qualquer elemento m de M, $\varphi(m)$ é verdadeira em $\mathcal{M}$, então $\forall x\, \varphi(x)$ é verdadeira em $\mathcal{M}$;
- Se existe um elemento m de M tal que $\varphi(m)$ é verdadeira em $\mathcal{M}$, então $\exists x\, \varphi(x)$ é verdadeira em $\mathcal{M}$.

Ou seja, para verificar uma fórmula, temos que “abri-la”.

Suponha que tenhamos a fórmula $\varphi \vee \psi$

Se quisermos mostrar que $\varphi \vee \psi$ é *verdadeira*, basta mostrar que alguma dentre φ e ψ é verdadeira.

Suponha que tenhamos a fórmula $\varphi \vee \psi$

Se quisermos mostrar que $\varphi \vee \psi$ é *verdadeira*, basta mostrar que alguma dentre φ e ψ é verdadeira. Ou seja, precisamos "escolher"qual é a verdadeira:

Verificação

Estratégias

Suponha que tenhamos a fórmula $\varphi \lor \psi$

Se quisermos mostrar que $\varphi \lor \psi$ é *verdadeira*, basta mostrar que alguma dentre φ e ψ é verdadeira. Ou seja, precisamos "escolher"qual é a verdadeira:

$$\begin{tikzcd} & \varphi \lor \psi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \varphi & & \psi \end{tikzcd}$$

Qual das duas escolher?

Verificação
Estratégias

Suponha que tenhamos a fórmula $\varphi \vee \psi$
Se quisermos mostrar que $\varphi \vee \psi$ é *verdadeira*, basta mostrar que alguma dentre φ e ψ é verdadeira. Ou seja, precisamos "escolher" qual é a verdadeira:

$$\begin{tikzcd} & \varphi \vee \psi \arrow[dl, blue] \arrow[dr] & \\ {\color{blue}\varphi} & & \psi \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \varphi \vee \psi \arrow[dl] \arrow[dr, blue] & \\ \varphi & & {\color{blue}\psi} \end{tikzcd}$$

Se $\mathcal{M} \models \varphi$ | Se $\mathcal{M} \models \psi$

Da mesma forma, se tivermos $\varphi \wedge \psi$ e quisermos mostrar que é *falsa*, basta exibir que *uma delas é falsa*.

Verificação
Estratégias

Da mesma forma, se tivermos $\varphi \wedge \psi$ e quisermos mostrar que é *falsa*, basta exibir que *uma delas é falsa*.

$$
\begin{tikzcd}
 & \varphi \wedge \psi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\varphi & & \psi
\end{tikzcd}
$$

Qual das duas escolher?

Verificação
Estratégias

Da mesma forma, se tivermos $\varphi \wedge \psi$ e quisermos mostrar que é *falsa*, basta exibir que *uma delas é falsa*.

$$\begin{tikzcd} & \varphi \wedge \psi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \varphi & & \psi \end{tikzcd}$$

Se $\mathcal{M} \not\models \varphi$

$$\begin{tikzcd} & \varphi \wedge \psi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \varphi & & \psi \end{tikzcd}$$

Se $\mathcal{M} \not\models \psi$

Verificação por jogos

Há um processo natural de “escolha”para se verificar uma fórmula.
Podemos introduzir um argumento de *jogo* para trabalhar com isso.

Verificação por jogos

Há um processo natural de "escolha"para se verificar uma fórmula. Podemos introduzir um argumento de *jogo* para trabalhar com isso.

Teremos dois jogadores:

Verificação por jogos

Há um processo natural de “escolha”para se verificar uma fórmula. Podemos introduzir um argumento de *jogo* para trabalhar com isso.

Teremos dois jogadores:

Phoenix quer mostrar que a fórmula é verdadeira

Miles quer mostrar que a fórmula é falsa

Começamos com uma fórmula escrita na forma normal e um modelo (escopo) M. A cada rodada, os jogadores vão “abrindo” a fórmula, da seguinte maneira:

Verificação por jogos
Regra do jogo

Começamos com uma fórmula escrita na forma normal e um modelo (escopo) M. A cada rodada, os jogadores vão “abrindo” a fórmula, da seguinte maneira:

> Se a fórmula é do tipo $\varphi \vee \psi$,
> Phoenix escolhe φ ou ψ.

Verificação por jogos

Regra do jogo

Começamos com uma fórmula escrita na forma normal e um modelo (escopo) M. A cada rodada, os jogadores vão "abrindo" a fórmula, da seguinte maneira:

Se a fórmula é do tipo $\varphi \vee \psi$, Phoenix escolhe φ ou ψ.

Se a fórmula é do tipo $\varphi \wedge \psi$, Miles escolhe φ ou ψ.

Começamos com uma fórmula escrita na forma normal e um modelo (escopo) M. A cada rodada, os jogadores vão “abrindo” a fórmula, da seguinte maneira:

Se a fórmula é do tipo $\varphi \vee \psi$, Phoenix escolhe φ ou ψ.

Se a fórmula é do tipo $\varphi \wedge \psi$, Miles escolhe φ ou ψ.

Se a fórmula é do tipo $\exists x \varphi(x)$, Phoenix escolhe uma fórmula $\varphi(m)$, para algum elemento m de M.

Verificação por jogos
Regra do jogo

Começamos com uma fórmula escrita na forma normal e um modelo (escopo) M. A cada rodada, os jogadores vão "abrindo" a fórmula, da seguinte maneira:

Se a fórmula é do tipo $\varphi \vee \psi$, Phoenix escolhe φ ou ψ.

Se a fórmula é do tipo $\varphi \wedge \psi$, Miles escolhe φ ou ψ.

Se a fórmula é do tipo $\exists x \varphi(x)$, Phoenix escolhe uma fórmula $\varphi(m)$, para algum elemento m de M.

Se a fórmula é do tipo $\forall x \varphi(x)$, Miles escolhe uma fórmula $\varphi(m)$, para algum elemento m de M.

Começamos com uma fórmula escrita na forma normal e um modelo (escopo) M. A cada rodada, os jogadores vão "abrindo" a fórmula, da seguinte maneira:

Se a fórmula é do tipo $\varphi \vee \psi$, Phoenix escolhe φ ou ψ.

Se a fórmula é do tipo $\varphi \wedge \psi$, Miles escolhe φ ou ψ.

Se a fórmula é do tipo $\exists x \varphi(x)$, Phoenix escolhe uma fórmula $\varphi(m)$, para algum elemento m de M.

Se a fórmula é do tipo $\forall x \varphi(x)$, Miles escolhe uma fórmula $\varphi(m)$, para algum elemento m de M.

A próxima rodada continua da fórmula que algum dos jogadores escolheu na rodada anterior.

Verificação por jogos

Quando acaba?

O jogo termina quando um dos jogadores escolher uma *fórmula atômica*, isto é, irredutível.

Verificação por jogos

Quando acaba?

O jogo termina quando um dos jogadores escolher uma *fórmula atômica*, isto é, irredutível.

- Phoenix ganhará a partida se essa fórmula for verdadeira;
- Miles ganhará a partida se essa fórmula for falsa.

Exemplo

$\forall x \exists y\ x < y$, $M = \mathbb{N}$

$$\forall x \exists y\ x < y$$

Exemplo

$\forall x \exists y \; x < y$, $M = \mathbb{N}$

$$\forall x \exists y \, x < y$$

Exemplo

$\forall x \exists y \; x < y$, $M = \mathbb{N}$

$$\forall x \exists y \, x < y$$

Exemplo

$\forall x \exists y \; x < y$, $M = \mathbb{N}$

$$\forall x \exists y \, x < y$$

$$\downarrow$$

$$x = 0?$$

Exemplo

$\forall x \exists y \; x < y$, $M = \mathbb{N}$

$$\forall x \exists y \, x < y$$

$$\downarrow$$

$$x = 7?$$

Exemplo

$\forall x \exists y \; x < y$, $M = \mathbb{N}$

$$\forall x \exists y \, x < y$$

$$\downarrow$$

$$x = 2993813?$$

Exemplo

$\forall x \exists y \; x < y$, $M = \mathbb{N}$

$$\forall x \exists y \; x < y$$

$$\downarrow$$

$$x = 16997543776?$$

Exemplo

$\forall x \exists y \; x < y, \; M = \mathbb{N}$

$$\forall x \exists y \, x < y$$

$$\downarrow$$

$$x = 700$$

Exemplo

$\forall x \exists y \; x < y$, $M = \mathbb{N}$

$$\forall x \exists y \; x < y$$

$$\downarrow$$

$$\exists y \; 700 < y$$

Exemplo

$\forall x \exists y \; x < y$, $M = \mathbb{N}$

$$\forall x \exists y \, x < y$$

$$\downarrow$$

$$\exists y \, 700 < y$$

$$\downarrow$$

$$y = 500?$$

Exemplo

$\forall x \exists y \; x < y$, $M = \mathbb{N}$

$$\forall x \exists y \; x < y$$

$$\downarrow$$

$$\exists y \; 700 < y$$

$$\downarrow$$

$$y = 552$$

Exemplo

$\forall x \exists y \; x < y$, $M = \mathbb{N}$

$$\forall x \exists y \, x < y$$

$$\downarrow$$

$$\exists y \, 700 < y$$

$$\downarrow$$

$$700 < 552$$

Miles ganha.

Exemplo

$\forall x \exists y \; x < y$, $M = \mathbb{N}$

$$\forall x \exists y \, x < y$$

$$\downarrow$$

$$\exists y \, 700 < y$$

$$\downarrow$$

$$y = 701$$

Exemplo

$\forall x \exists y\ x < y$, $M = \mathbb{N}$

$$\forall x \exists y\, x < y$$

$$\downarrow$$

$$\exists y\, 700 < y$$

$$\downarrow$$

$$700 < 701$$

Phoenix ganha.

Se Miles escolher um número n, basta que Phoenix escolha $n + 1$.

Exemplo

Uma estratégia

Se Miles escolher um número n, basta que Phoenix escolha $n + 1$.
Essa é uma *estratégia* que garante que Phoenix *sempre ganha* nesse jogo específico (para essa fórmula e nesse modelo).

Além disso, veja que $\mathbb{N} \models \forall x \exists y \, x < y$.

Exemplo

Uma estratégia

Se Miles escolher um número n, basta que Phoenix escolha $n + 1$. Essa é uma *estratégia* que garante que Phoenix *sempre ganha* nesse jogo específico (para essa fórmula e nesse modelo).

Além disso, veja que $\mathbb{N} \models \forall x \exists y \, x < y$.

Será que existe uma relação?

Exemplo

$M = \{a, b, c\}$

$$\forall x(\psi(x) \land \varphi(x)) \lor \eta(x)$$

Exemplo

$M = \{a, b, c\}$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \forall x(\psi(x) \land \varphi(x)) \lor \eta(x) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
(\psi(a) \land \varphi(a)) \lor \eta(a) & (\psi(b) \land \varphi(b)) \lor \eta(b) & (\psi(c) \land \varphi(c)) \lor \eta(c)
\end{tikzcd}
$$

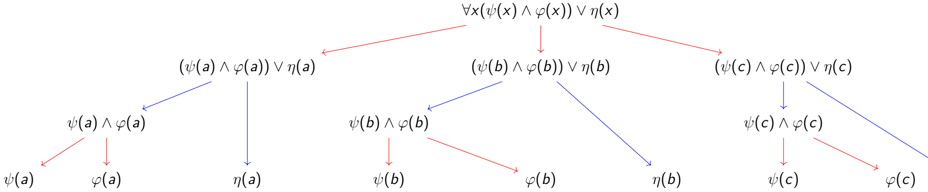
Exemplo

$M = \{a, b, c\}$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \forall x(\psi(x) \wedge \varphi(x)) \vee \eta(x) \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & & \\
 & (\psi(a) \wedge \varphi(a)) \vee \eta(a) \arrow[dl] \arrow[dd] & & (\psi(b) \wedge \varphi(b)) \vee \eta(b) \arrow[dl] \arrow[ddr] & & (\psi(c) \wedge \varphi(c)) \vee \eta(c) \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
\psi(a) \wedge \varphi(a) & & \psi(b) \wedge \varphi(b) & & & \psi(c) \wedge \varphi(c) & \\
 & \eta(a) & & & \eta(b) & & \eta(c)
\end{tikzcd}
$$

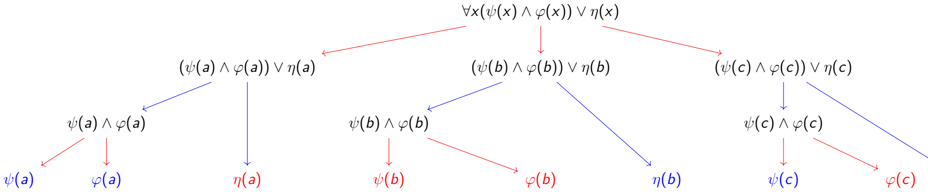
Exemplo

$M = \{a, b, c\}$



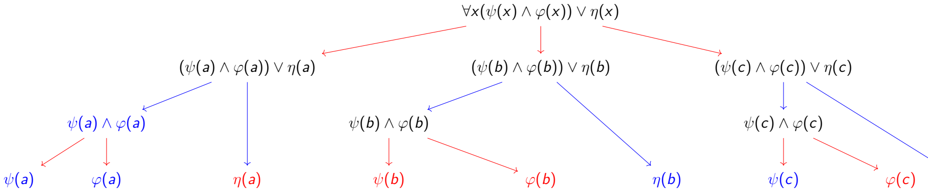
Exemplo

$M = \{a, b, c\}$



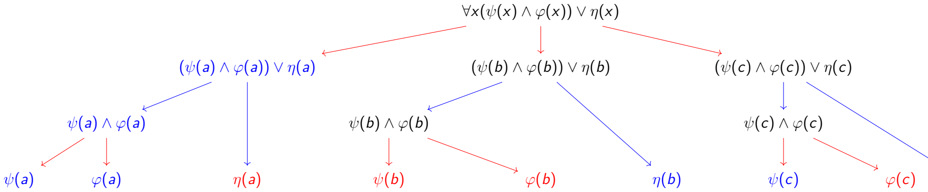
Exemplo

$M = \{a, b, c\}$



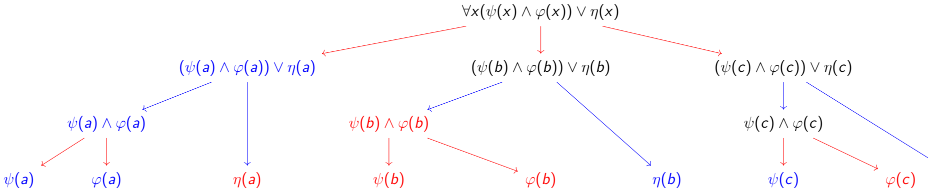
Exemplo

$M = \{a, b, c\}$



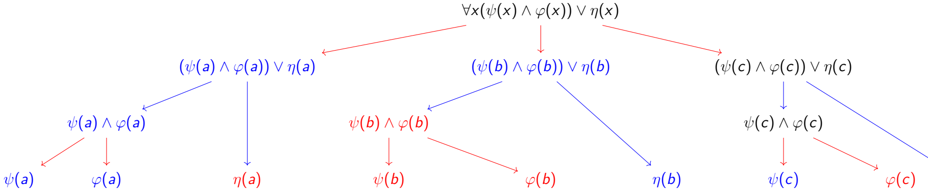
Exemplo

$M = \{a, b, c\}$



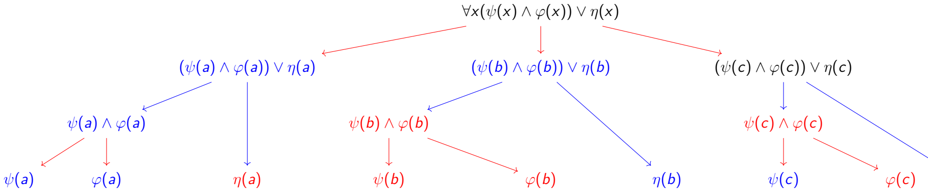
Exemplo

$M = \{a, b, c\}$



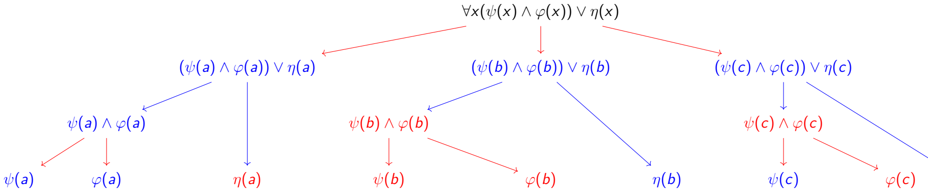
Exemplo

$M = \{a, b, c\}$



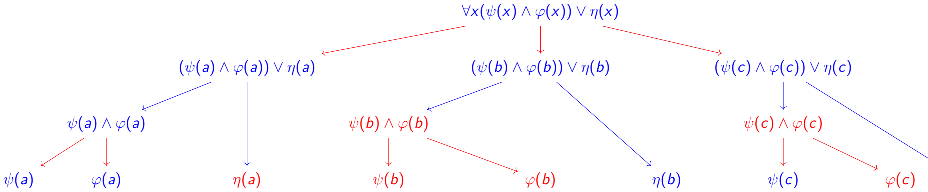
Exemplo

$M = \{a, b, c\}$



Exemplo

$M = \{a, b, c\}$



Teorema. Phoenix tem estratégia vencedora se, e somente se, a fórmula é verdadeira.

Teorema. Phoenix tem estratégia vencedora se, e somente se, a fórmula é verdadeira.

A prova é feita por indução.

- Se Phoenix pode escolher uma fórmula para a qual ele *sabe que vence*, então basta que ele a escolha.
- Se Miles só consegue escolher fórmulas para as quais é sabido que Phoenix vence, então ele não tem muito o que fazer.

Até amanhã!