Modelos e Aplicações - Aula 1

Caio Lopes, Henrique Lecco

ICMC - USP

20 de julho de 2020

Lógica de primeira ordem

Em geral, quando se fala de Teoria de Modelos, restringimo-nos a tratar da lógica de primeira ordem.

Isso significa apenas um certo conjunto de regras para escrever fórmulas matemáticas nos mais diversos contextos. Essa escolha impõe certas limitações no que podemos escrever.

Lógica de primeira ordem

Em geral, quando se fala de Teoria de Modelos, restringimo-nos a tratar da lógica de primeira ordem.
Isso significa apenas um certo conjunto de regras para escrever fórmulas matemáticas nos mais diversos contextos. Essa escolha impõe certas limitações no que podemos escrever.

- Não é possivel escrever fórmulas infinitas;
- Em geral, não é possível falar sobre subconjuntos de elementos.

Mesmo com essas limitações, ainda dá pra fazer muita coisa.

Fórmulas

Fórmulas

O que são?

Fórmulas

O que são?
Onde vivem?

Fórmulas

O que são?
Onde vivem?
O que comem?

Fórmulas

O que são?
Onde vivem?
O que comem?

Procuraremos responder essas perguntas hoje.
Mas, essencialmente, são maneiras formais de se escrever uma "frase", de dizer algo sobre alguém em Matemática.

Fórmulas

O que são?
Onde vivem?
O que comem?

Procuraremos responder essas perguntas hoje.
Mas, essencialmente, são maneiras formais de se escrever uma "frase", de dizer algo sobre alguém em Matemática.

x é menor que y: $x < y$
A adição é comutativa: $\forall x \forall y \; x + y = y + x$
Existe um elemento maior que todos os outros: $\exists x \forall y \; x = y \vee x > y$

Para escrever as fórmulas, usamos certos símbolos: $\forall, \exists, +, =, \vee$ e assim por diante.
Tais símbolos serão o que chamaremos de *vocabulário* ou *linguagem*.
Veja que, dependendo do contexto, usaremos símbolos diferentes:

- Para conjuntos, usamos $\in$ e $\subset$;
- Para anéis, usamos $+$, $\cdot$, 0 e 1;
- Para grafos, usamos a relação de aresta E.

Para escrever as fórmulas, usamos certos símbolos: $\forall, \exists, +, =, \vee$ e assim por diante.
Tais símbolos serão o que chamaremos de *vocabulário* ou *linguagem*.
Veja que, dependendo do contexto, usaremos símbolos diferentes:

- Para conjuntos, usamos $\in$ e $\subset$;
- Para anéis, usamos $+$, $\cdot$, 0 e 1;
- Para grafos, usamos a relação de aresta E.

Precisamos, então, definir vocabulário de uma maneira ampla o suficiente que nos permita escrever fórmulas para as mais variadas ocasiões.
Assim, é razoável definir alguns símbolos que serão fixos para todos os vocabulários e outros que variam entre um e outro.

Chamaremos, então, os símbolos “fixos”de *símbolos lógicos*. São eles:

- $=$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$;
- Quantificadores: $\forall$ e $\exists$;
- Enumeráveis variáveis: $x_1, x_2, \ldots$

Chamaremos, então, os símbolos "fixos"de *símbolos lógicos*. São eles:

- $=, \vee, \wedge, \neg$;
- Quantificadores: $\forall$ e $\exists$;
- Enumeráveis variáveis: $x_1, x_2, \dots$

Além desses, cada vocabulário também contém os símbolos específicos, que são chamados de "símbolos não lógicos":

- Símbolos de constantes, normalmente denotados **c**;
- Símbolos de relações, normalmente denotados **R**;
- Símbolos de funções, normalmente denotados **f**.

Costumamos denotar o vocabulário por L.

Exemplos

Assim, cada vocabulário tem suas especificidades, por exemplo:

- Conjuntos: $L = \{\in\}$, apenas a relação de "pertence";
- Grupos: $L = \{*, e\}$, a função e o elemento neutro;
- Ordens: $L = \{<\}$, a relação de ordem.

Exemplos

Assim, cada vocabulário tem suas especificidades, por exemplo:

- Conjuntos: $L = \{\in\}$, apenas a relação de "pertence";
- Grupos: $L = \{*, e\}$, a função e o elemento neutro;
- Ordens: $L = \{<\}$, a relação de ordem.

O vocabulário, então, são menores blocos que compõem as fórmulas.

Termos

Veja que os exemplos que demos anteriormente já podem ser escritos a partir dessas regras:

- $x < y$ no vocabulário de ordens;
- $\forall x \forall y \; x + y = y + x$ no vocabulário de anéis;
- $\exists x \forall y \; x = y \vee x > y$ também no vocabulário de ordens.

Termos

Veja que os exemplos que demos anteriormente já podem ser escritos a partir dessas regras:

- $x < y$ no vocabulário de ordens;
- $\forall x \forall y \; x + y = y + x$ no vocabulário de anéis;
- $\exists x \forall y \; x = y \vee x > y$ também no vocabulário de ordens.

Acima, temos que x e y são variáveis. Mas quem são $x + y$ e $y + x$? Esses são *termos*. Resumidamente, termos são "de quem se fala"em uma fórmula.
Todas as variáveis e constantes são termos e todos os termos são construídos a partir delas.

Anatomia de um termo

Definiremos termos indutivamente, mas primeiro, definiremos intuitivamente.

Anatomia de um termo

Definiremos termos indutivamente, mas primeiro, definiremos intuitivamente.

Voltemos ao vocabulário de anéis.

É razoável dizer que, se em uma fórmula podemos falar sobre as constantes 0 e 1 e todas as váriáveis, então existirão também fórmulas falando sobre:

- Elementos do tipo $x + y$;
- Elementos do tipo $x \times y$.

Anatomia de um termo

Definiremos termos indutivamente, mas primeiro, definiremos intuitivamente.
Voltemos ao vocabulário de anéis.
É razoável dizer que, se em uma fórmula podemos falar sobre as constantes 0 e 1 e todas as váriáveis, então existirão também fórmulas falando sobre:

- Elementos do tipo $x + y$;
- Elementos do tipo $x \times y$.

Assim, também teremos elementos do tipo $x \times (y + z)$ e assim por diante. Mas não podemos falar do elemento $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ...$, isto é, uma soma infinita.
Assim, os termos da linguagem de anéis são:

- Somas finitas de variáveis e constantes;
- Produtos finitos de variáveis e constantes;
- Mistos de soma e produto de variáveis e constantes.

Anatomia de um termo

Para construir um termo, como visto acima, podemos, então, tomar termos já existentes e fazer operações com eles. Os termos mais simples são variáveis e constantes.

Anatomia de um termo

Para construir um termo, como visto acima, podemos, então, tomar termos já existentes e fazer operações com eles. Os termos mais simples são variáveis e constantes.
Seja, então, L um vocabulário. Dizemos que:

- Toda variável é um L-termo;
- Se **c** é um símbolo de constante de L, então **c** é um L-termo;
- Se $t_1, \ldots, t_n$ são L-termos e **f** é um símbolos de função n-ária, então $\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)$ é um L-termo.

Fórmulas

Agora, temos tudo o que precisamos para definir com precisão o que são fórmulas. Lembre que, tal qual os termos, as fórmulas também são dependentes do vocabulário.

Assim como variáveis e constantes são os termos mais simples, para fórmulas também temos os blocos essenciais a partir de quais todas as outras serão construídas. São as *fórmulas atômicas*.

São elas:

- $t = s$, com t e s termos;
- $\mathbf{R}(t_1, ..., t_n)$, com $\mathbf{R}$ um símbolo de relação n-ária e $t_1, ..., t_n$ termos.

Fórmulas

A partir das fórmulas atômicas, contruímos novas fórmulas:
Se φ, ψ são fórmulas atômicas então também são fórmulas:
$\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Fórmulas

A partir das fórmulas atômicas, contruímos novas fórmulas:
Se φ, ψ são fórmulas atômicas então também são fórmulas:
$\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$.
Podemos ter fórmulas com variávies livres, por exemplo, a fórmula atômica $x = \mathbf{c}$. Assim, serão também fórmulas: $\forall x \; x = \mathbf{c}$ e $\exists x \; x = \mathbf{c}$.
Indicamos por $\varphi(x)$ que a fórmula φ depende de x.
Mas até agora construímos poucas fórmulas: apenas combinamos fórmulas atômicas e lhes demos quantificadores. A realidade é que podemos fazer a mesma coisa com quaisquer fórmulas.

Anatomia de uma fórmula

Definimos, então, indutivamente, as fórmulas (ou L-fórmulas):

- Para todos os L-termos t, s, $t = s$ é uma fórmula;
- Para todo n e cada símbolo de relação n-ária $\mathbf{R} \in L$, para todo conjunto de L-termos $t_1, \ldots, t_n$, $\mathbf{R}(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula;
- Dadas L-fórmulas φ e ψ, são L-fórmulas:
  - $\varphi \wedge \psi$;
  - $\varphi \vee \psi$;
  - $\neg\varphi$.
  - Se $\varphi(x)$ é uma fórmula, com x uma variável, são fórmulas:
  - $\exists x \; \varphi(x)$;
  - $\forall x \; \varphi(x)$.

Claro, temos também o símbolo $\rightarrow$: $\varphi \rightarrow \psi$ é apenas um atalho para escrever $\neg\varphi \vee \psi$.

Fórmulas e sentenças

Definição

Dizemos que uma fórmula é uma sentença quando ela não tem variáveis livres.

Veja os exemplos:

$$x < y$$

$$\forall x \; x < y$$

$$\forall x \exists y \; x < y$$

Fórmulas e sentenças

Definição

Dizemos que uma fórmula é uma sentença quando ela não tem variáveis livres.

Veja os exemplos:

$$x < y$$

$$\forall x \; x < y$$

$$\forall x \exists y \; x < y$$

Em geral, sentenças carregam maior “significado”.
Fórmulas são passos intermediários para chegar às sentenças.

Equivalências

Muitas vezes, podemos falar de fórmulas em termos de outras que são equivalentes. Existem certas propriedades que parecem, à primeira vista, impossíveis de serem escritas de certa maneira, mas que na verdade são equivalentes a certas propriedades, ou são consequência.

Por exemplo, suponha que queremos mostrar que um grupo é uma soma direta de subgrupos cíclicos de ordem prima.
Escrever isso com essas ferramentas que temos à disposição é um pouco complicado (lembre que não podemos falar de subconjuntos).

Equivalências

Muitas vezes, podemos falar de fórmulas em termos de outras que são equivalentes. Existem certas propriedades que parecem, à primeira vista, impossíveis de serem escritas de certa maneira, mas que na verdade são equivalentes a certas propriedades, ou são consequência.

Por exemplo, suponha que queremos mostrar que um grupo é uma soma direta de subgrupos cíclicos de ordem prima.
Escrever isso com essas ferramentas que temos à disposição é um pouco complicado (lembre que não podemos falar de subconjuntos).
No entanto, temos o Teorema dos Grupos Abelianos Finitos. Assim, sabemos que isso é apenas dizer que o grupo é abeliano e finito.

Equivalências

Muitas vezes, podemos falar de fórmulas em termos de outras que são equivalentes. Existem certas propriedades que parecem, à primeira vista, impossíveis de serem escritas de certa maneira, mas que na verdade são equivalentes a certas propriedades, ou são consequência.

Por exemplo, suponha que queremos mostrar que um grupo é uma soma direta de subgrupos cíclicos de ordem prima.
Escrever isso com essas ferramentas que temos à disposição é um pouco complicado (lembre que não podemos falar de subconjuntos).
No entanto, temos o Teorema dos Grupos Abelianos Finitos. Assim, sabemos que isso é apenas dizer que o grupo é abeliano e finito.
Mas isso ainda é um problema...

Cardinalidades em lógica de primeira ordem

Não conseguimos dizer "existem infinitos elementos", em geral.
Em alguns casos, isso pode ser consequência de outras propriedades, como é o caso da teoria de ordens totais densas sem máximo e mínimo (sobre o vocabulário $\{<\}$):

- Dois elementos sempre são comparáveis:
  $\forall x \forall y \; x < y \vee y < x \vee x = y$;

Cardinalidades em lógica de primeira ordem

Não conseguimos dizer "existem infinitos elementos", em geral.
Em alguns casos, isso pode ser consequência de outras propriedades, como é o caso da teoria de ordens totais densas sem máximo e mínimo (sobre o vocabulário $\{<\}$):

- Dois elementos sempre são comparáveis: $\forall x \forall y\ x < y \vee y < x \vee x = y$;
- Nenhum elemento é maior que si mesmo: $\forall x\ \neg(x < x)$;

Cardinalidades em lógica de primeira ordem

Não conseguimos dizer "existem infinitos elementos", em geral.
Em alguns casos, isso pode ser consequência de outras propriedades, como é o caso da teoria de ordens totais densas sem máximo e mínimo (sobre o vocabulário $\{<\}$):

- Dois elementos sempre são comparáveis: $\forall x \forall y\ x < y \lor y < x \lor x = y$;
- Nenhum elemento é maior que si mesmo: $\forall x\ \neg(x < x)$;
- A ordem é transitiva: $\forall x \forall y \forall z\ x < y \land y < z \rightarrow x < z$;

Cardinalidades em lógica de primeira ordem

Não conseguimos dizer "existem infinitos elementos", em geral.
Em alguns casos, isso pode ser consequência de outras propriedades, como é o caso da teoria de ordens totais densas sem máximo e mínimo (sobre o vocabulário $\{<\}$):

- Dois elementos sempre são comparáveis: $\forall x \forall y \; x < y \vee y < x \vee x = y$;
- Nenhum elemento é maior que si mesmo: $\forall x \; \neg(x < x)$;
- A ordem é transitiva: $\forall x \forall y \forall z \; x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$;
- Entre dois elementos, sempre tem outro: $\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z \; x < z \wedge z < y)$;

Cardinalidades em lógica de primeira ordem

Não conseguimos dizer "existem infinitos elementos", em geral.
Em alguns casos, isso pode ser consequência de outras propriedades, como é o caso da teoria de ordens totais densas sem máximo e mínimo (sobre o vocabulário $\{<\}$):

- Dois elementos sempre são comparáveis: $\forall x \forall y \; x < y \vee y < x \vee x = y$;
- Nenhum elemento é maior que si mesmo: $\forall x \; \neg(x < x)$;
- A ordem é transitiva: $\forall x \forall y \forall z \; x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$;
- Entre dois elementos, sempre tem outro: $\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z \; x < z \wedge z < y)$;
- Não há maior elemento: $\forall x \exists y \; x < y$;

Cardinalidades em lógica de primeira ordem

Não conseguimos dizer “existem infinitos elementos”, em geral.
Em alguns casos, isso pode ser consequência de outras propriedades, como é o caso da teoria de ordens totais densas sem máximo e mínimo (sobre o vocabulário $\{<\}$):

- Dois elementos sempre são comparáveis: $\forall x \forall y \; x < y \lor y < x \lor x = y$;
- Nenhum elemento é maior que si mesmo: $\forall x \; \neg(x < x)$;
- A ordem é transitiva: $\forall x \forall y \forall z \; x < y \land y < z \rightarrow x < z$;
- Entre dois elementos, sempre tem outro: $\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z \; x < z \land z < y)$;
- Não há maior elemento: $\forall x \exists y \; x < y$;
- Não há menor elemento: $\forall x \exists y \; y < x$.

Cardinalidades em lógica de primeira ordem

Não conseguimos dizer "existem infinitos elementos", em geral.
Em alguns casos, isso pode ser consequência de outras propriedades, como é o caso da teoria de ordens totais densas sem máximo e mínimo (sobre o vocabulário $\{<\}$):

- Dois elementos sempre são comparáveis: $\forall x \forall y \; x < y \vee y < x \vee x = y$;
- Nenhum elemento é maior que si mesmo: $\forall x \; \neg(x < x)$;
- A ordem é transitiva: $\forall x \forall y \forall z \; x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$;
- Entre dois elementos, sempre tem outro: $\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z \; x < z \wedge z < y)$;
- Não há maior elemento: $\forall x \exists y \; x < y$;
- Não há menor elemento: $\forall x \exists y \; y < x$.

Com essas condições...

Podem existir finitos elementos?

Com essas condições...

Podem existir finitos elementos?
Não, pois temos que não pode existir um elemento maior que todos os outros!
Como a ordem é total e transitiva, não podem ocorrer aberrações do tipo $x < y < x$.

Com essas condições...

Podem existir finitos elementos?
Não, pois temos que não pode existir um elemento maior que todos os outros!
Como a ordem é total e transitiva, não podem ocorrer aberrações do tipo $x < y < x$.
Aliás, veja que não precisamos escrever essa propriedade na teoria, pois é uma consequência dos outros axiomas:
$\forall x \forall y \ \neg(x < y \wedge y < x)$.

Axiomas, teorias...

O que queremos fazer com essas coisas?
Vamos ver que tudo isso depende muito do escopo em que analisamos se essas fórmulas são verdadeiras ou não.

Axiomas, teorias...

O que queremos fazer com essas coisas?
Vamos ver que tudo isso depende muito do escopo em que analisamos se essas fórmulas são verdadeiras ou não.

Quando começamos a olhar para as sentenças em universos específicos, é aí que começa a Teoria de Modelos.

Com esse tratamento formal, seremos capazes de olhar para as fórmulas a partir das estruturas e vice-versa.

Exemplo

Por exemplo, pense em um conjunto totalmente ordenado, sem maior ou menor elemento e tal que entre dois elementos distintos sempre haja outro.

Exemplo

Por exemplo, pense em um conjunto totalmente ordenado, sem maior ou menor elemento e tal que entre dois elementos distintos sempre haja outro.

Alguns exemplos mais fáceis são $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$.
Mas é possível provar que qualquer conjunto ordenado que satisfaça essas propriedades é completamente indistinguível por sentenças em lógica de primeira ordem.
Isto é, não existe uma sentença que seja verdade em um e falsa em outro.

Exemplo

Por exemplo, pense em um conjunto totalmente ordenado, sem maior ou menor elemento e tal que entre dois elementos distintos sempre haja outro.

Alguns exemplos mais fáceis são $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$.
Mas é possível provar que qualquer conjunto ordenado que satisfaça essas propriedades é completamente indistinguível por sentenças em lógica de primeira ordem.
Isto é, não existe uma sentença que seja verdade em um e falsa em outro.

Assim, podemos compreender essa teoria olhando para $\mathbb{Q}$, sabendo que todas as propriedades adicionais de $\mathbb{R}$ não são descritíveis em primeira ordem.

Até amanhã!