Introdução à Teoria de Modelos e aplicações

Caio Lopes e Henrique Lecco

1 Introdução

A Teoria de Modelos é uma área que visa estudar estruturas dos mais diversos tipos, como grupos, grafos e universos de Teoria de Conjuntos, usando ferramentas da Lógica. Estudar modelos pode se traduzir em diversas abordagens diferentes, muitas com certos denominadores comuns.

Essas notas focam em uma visão mais ligada à Álgebra, mas buscando comentar de outras áreas quando apropriado. De qualquer modo, boa parte da teoria que será formulada é usada em contextos diferentes, a quais muitos dos resultados se aplicam. Em particular, os conceitos básicos com os quais começaremos são fundamentais para se usar a Teoria de Modelos.

2 Conceitos básicos

Iniciaremos a construção da teoria com o conceito de linguagem, seguido da definição de termo e finalizando com introdução a *semântica*, onde definiremos interpretação, valoração, satisfação de fórmula e, finalmente, modelos.

É esperado do leitor um certo conhecimento prévio de lógica. Caso o leitor não tenha este acúmulo, não se acanhe: sugerimos a leitura da página `https://sites.icmc.usp.br/aurichi/modelos/doku.php?id=pagina:logica`.

2.1 Linguagem e Termos

Toda estrutura matemática possui uma coleção distinta de sujeitos fundamentais a ela. Esses sujeitos podem ser funções, relações ou constantes. Por exemplo, é impossível falar de grupo sem falar de uma função binária, muitas vezes chamada de “soma” ou “produto”, e um elemento constante que é neutro em relação a essa função, chamado de ”identidade”.

Da necessidade de termos alguns símbolos pré-fixados para falarmos sobre uma teoria, surge o conceito de *Linguagem*, que é uma coleção de símbolos lógicos e não-lógicos em que os primeiros são os usuais da lógica de primeira ordem e os demais são os símbolos particulares daquela teoria. Mais formalmente:

Definição 2.1. Uma relação R é dita n-ária sobre um conjunto A se $R \subset A^n$. Ou seja, para todos $a_1, ..., a_n \in A$, está determinado se $R(a_1, ..., a_n)$ é verdadeiro ou falso. Analogamente, uma função é dita n-ária se

$$f : A^n \to A$$

isto é, para todos $a_1, ..., a_n \in A$, $f(a_1, ..., a_n) \in A$.

Definição 2.2. Uma **Linguagem** $\mathcal{L}$ consiste de:

- Símbolos lógicos de primeira ordem:
  - $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, =$;
  - Quantificadores: $\forall$, $\exists$;
  - Enumeráveis variáveis: $x_1, x_2, x_3, ...$
- Símbolos não-lógicos:
  - Uma coleção de símbolos de constante;
  - Uma coleção de símbolos de relações com quaisquer *aridades*;
  - Uma coleção de símbolos de funções com quaisquer *aridades*;

Observação 2.1. As coleções de símbolos não-lógicos não precisam ser todos não vazios, como exemplificado logo abaixo.

Exemplo 2.1. Os exemplos abaixo serão importantes no decorrer do texto:

- $\mathcal{L}_{ring} = \{e_\oplus, e_\odot, \oplus, \odot\}$ é a linguagem da teoria de anéis [1], onde $e_\oplus$, $e_\odot$ são símbolos de constantes (que na prática serão as identidades das operações do anel), enquanto $\oplus, \odot$ são símbolos de funções binárias.
- $\mathcal{L}_{graphs} = \{R\}$ é a linguagem da teoria de grafos, onde R é um símbolo de relação binária (que na prática será a relação que diz se dois vértices estão ligados por uma aresta ou não).
- $\mathcal{L}_{group} = \{e_\odot, \odot\}$ é a linguagem da teoria de grupos, em que $\odot$ é um símbolo de função binária e $e_\odot$ um símbolo de constante (que na prática será a identidade da operação do grupo)
- $\mathcal{L}_{or} = \mathcal{L}_{ring} \cup \{<\}$ é a linguagem da teoria de anéis ordenados, em que $<$ é um símbolo de relação binária.

A linguagem de uma teoria será o que teremos em mãos para escrever as fórmulas desta. Daremos a definição de $\mathcal{L}-$fórmula em breve.

[1] não confundir com Quenya

Antes de prosseguirmos, é necessário fazermos algumas considerações que a princípio não são claras e só serão discutidas a fundo em um futuro próximo.

A primeira delas é que, utilizando a linguagem de teoria de grupos como exemplo, a operação e seu elemento neutro varia de grupo pra grupo. O leitor pode ter se perguntado como símbolos abstratos destituídos de quaisquer estruturas representarão toda essa gama de possibilidades. A solução para isso está no conceito de *interpretação*, que será discutido logo mais.

A segunda consideração, ainda no exemplo de teoria de grupos, é a seguinte: note que poderíamos descrever o elemento neutro como um x tal que $\forall y(x \odot y = y)$. Mas veja que essa fórmula, formalmente, é dada por $\exists x \forall y(x \odot y = y)$. Ou seja, precisamos de dois quantificadores para isso. Mais pra frente, veremos que, em alguns casos, esse tipo de "atalho" pode trazer mais complicações do que benefícios.

A terceira e última consideração é que, por motivos práticos, a partir daqui omitiremos a palavra "símbolo" quando falarmos dos símbolos de constantes, relações e funções de uma linguagem, a menos que o contexto peça tal precisão teórica. Portanto, sempre que falarmos de constantes, funções ou relações de uma linguagem, o leitor deve entender que trata-se dos símbolos, e não um objeto matemático concreto.

Finalizaremos essa seção com o conceito de *termo*:

Definição 2.3. Termos são todos os objetos que podem ser construídos a partir de constantes, variáveis e funções de uma linguagem, da seguinte maneira:

- Se t é uma variável ou uma constante, então t é um termo.
- Se t é um termo, então $f(t)$ é um termo.

Mais precisamente, se $t_1, ..., t_n$ são termos e f é um símbolo de função n-ária, então $f(t_1, ..., t_n)$ é um termo.

Ou seja, termo é um elemento do menor conjunto que contém todas as constantes e variáveis de uma linguagem e é fechado pelas funções desta.

Observação 2.2. Note que essa definição é indutiva. Construções e argumentações como essa serão recorrentes e extremamente necessárias ao longo do texto.

Para finalizar essa seção, daremos a definição de $\mathcal{L}$-fórmulas (de primeira ordem).

Definição 2.4. *$\mathcal{L}$-fórmulas* são expressões de uma das seguintes formas:

1. $s = t$, em que s e t são termos;

2. $R(t_1, ..., t_n)$, em que R é uma relação n-ária da linguagem $\mathcal{L}$ e $t_1, ..., t_n$ são termos;

3. Se φ, ψ são $\mathcal{L}$-fórmulas das formas anteriores e x é uma variável, então também são fórmulas: $\neg\varphi, (\varphi \land \psi), (\varphi \lor \psi), (\varphi \to \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi), \forall x\varphi, \exists x\varphi$;

4. Qualquer combinação das fórmulas anteriores é uma fórmula.

Observação 2.3. Note que esta é mais uma definição indutiva.

As fórmulas das duas primeiras formas acima são chamadas de *atômicas*. Note que uma coleção de $\mathcal{L}-$fórmulas contendo todas as fórmulas atômicas e fechada pelas operações lógicas (negação, conjunção, disjunção, implicação, equivalências e quantificadores) contém todas as $\mathcal{L}-$fórmulas, por indução.

Definição 2.5. Uma $\mathcal{L}-$*sentença* é uma $\mathcal{L}-$fórmula sem variáveis livres, isto é, todas as variáveis estão "presas" a um quantificador.

Quando for claro, omitiremos a linguagem a qual uma fórmula está relacionada com o intuito de deixar o texto mais limpo.

2.2 Semântica

Na gramática, semântica é o estudo do significado, da significação de palavras, frases, símbolos etc. É exatamente o que faremos nessa sessão: falaremos sobre *interpretação*, *satisfação* de fórmulas e, finalmente, *modelos*. Estes conceitos servirão para a "concretização" das abstrações que falamos até agora, isto é, daremos significado ao abstrato. Comecemos com uma ideia mais intuitiva:

Considere uma linguagem composta apenas por uma função binária $\odot$. Consideremos também dois conjuntos A e B formados pelos números inteiros, que serão os nossos *universos*. Suponha que no universo A a função $\odot$ é entendida, ou interpretada, como a operação multiplicação $\cdot$, enquanto no universo B será vista como a soma $+$. Agora observe a seguinte fórmula:

$$\forall x \forall p \exists q (p \odot q = x)$$

O que esta fórmula diz é: dado um elemento x qualquer, tomado um outro elemento p do universo em questão, deve existir um elemento q tal que p operado com q resulta em x. Mas o que ela quer dizer em cada um dos universos, que veem a função $\odot$ de formas distintas?

Veja que, no universo A, tal sentença diz que dados x e p, existe um q tal que $p \cdot q = x$, o que não é verdade uma vez que dados $x = 9$ e $p = 2$, não existe um número inteiro q tal que $2 \cdot q = 9$. Já no caso do universo B ocorre o fenômeno oposto, uma vez que a sentença é verdadeira pois basta tomar $q = x - p$.

Ou seja, dependendo do universo e de como ele "vê" os símbolos de uma linguagem, uma fórmula pode ser verdadeira ou falsa. Formalizando essa ideia intuitiva, temos a definição de um *Modelo*:

Definição 2.6. (Modelo) Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem. Um $\mathcal{L}$-*modelo* é um par $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}}$ em que M é um conjunto não vazio, chamado de *universo*, e $\cdot^{\mathcal{M}}$ é a *função de interpretação* ou simplesmente *interpretação* de $\mathcal{M}$, que satisfazem as seguintes condições:

- Se $R \in \mathcal{L}$ é um símbolo de relação $n-$ária, então $R^{\mathcal{M}}$ é uma relação $n-$ária sobre M;
- Se $f \in \mathcal{L}$ é um símbolo de função $n-$ária, então $f^{\mathcal{M}}$ é uma função $n-$ária sobre M;
- Se $c \in \mathcal{L}$ é um símbolo de constante, então $c^{\mathcal{M}} \in M$.

Além disso, a *cardinalidade* de um modelo é a cardinalidade do seu universo. Ou seja, um modelo é um par formado por um conjunto que determina onde os termos "moram" e pela "tradução" dos símbolos da linguagem em objetos concretos nesse conjunto.

Observação 2.4. Dado um símbolo σ qualquer da linguagem, $\sigma^{\mathcal{M}}$ é dito a *interpretação* ou *significado* de σ em $\mathcal{M}$. Chamamos σ do *nome* de $\sigma^{\mathcal{M}}$.

Definição 2.7. (valoração) Seja $\mathcal{M}$ um modelo. Uma $\mathcal{M}-$valoração é uma função do conjunto de variáveis para o universo M de $\mathcal{M}$. Usualmente denotaremos valorações por letras gregas minúsculas, como α e β.

A valoração nada mais é que fornecer um valor temporário a uma variável. Tal valoração será necessária para que a interpretação por um modelo de fórmulas com variáveis livres seja possível.

Para as definições abaixo, considere sempre que $\mathcal{L}$ é uma linguagem, $\mathcal{M}$ um $\mathcal{L}-$modelo e α é uma $\mathcal{M}-$valoração.

Definição 2.8. (Valor de um termo) Para cada termo t, o elemento $t^{\mathcal{M}}[\alpha] \in M$ é dito o *valor* de t em M e é definido da seguinte forma:

- Se t é uma variável x: $t^{\mathcal{M}}[\alpha] = \alpha(x)$;
- Se t é um símbolo de constante c: $t^{\mathcal{M}}[\alpha] = c^{\mathcal{M}}$;
- Se t é da forma $f(t_1, ..., t_n)$, em que f é um símbolo de função e $t_1, ..., t_n$ são termos: $t^{\mathcal{M}}[\alpha] = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\alpha], ..., t_n^{\mathcal{M}}[\alpha])$.

A definição abaixo será feita indutivamente nos tipos possíveis de fórmulas, conforme a definição 2.4. Tal construção será frequente daqui pra frente.

Definição 2.9. (Satisfação de fórmula) Para cada fórmula φ, dizemos que φ é satisfeita por α em $\mathcal{M}$, denotado por $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha]$, quando:

- Caso φ é atômica:
  - Se φ é da forma $s = t$, em que s e t são termos, então $\mathcal{M} \vDash (s = t)[\alpha] \Leftrightarrow s^{\mathcal{M}}[\alpha] = t^{\mathcal{M}}[\alpha]$;
  - Se φ é da forma $R(t_1, ..., t_n)$, em que R é um símbolo de relação de $\mathcal{L}$ e $t_1, ..., t_n$ são termos, então $\mathcal{M} \vDash R(t_1, ..., t_n)[\alpha] \Leftrightarrow R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\alpha], ..., t_n^{\mathcal{M}}[\alpha])$.
- Caso φ não é atômica:
  - Se φ é a negação de uma fórmula ψ, portanto $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha] \Leftrightarrow \mathcal{M} \nvDash \psi[\alpha]$;
  - Se φ é da forma $\psi \wedge \xi$, em que ψ, ξ são fórmulas, então $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha] \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \psi[\alpha]$ e $\mathcal{M} \vDash \xi[\alpha]$;
  - Se φ é da forma $\psi \vee \xi$, em que ψ, ξ são fórmulas, então $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha] \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \psi[\alpha]$ ou $\mathcal{M} \vDash \xi[\alpha]$;
  - Se φ é da forma $\exists x \psi(x)$, em que ψ é fórmula, então $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha] \Leftrightarrow$ existe um $a \in M$ tal que $\mathcal{M} \vDash \varphi(x)[\alpha_x^a]$, com α_x^a a valoração α porém levando x em a
  - Se φ é da forma $\forall x \psi(x)$, em que ψ é fórmula, então $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha] \Leftrightarrow$ para todo $a \in M$, temos que $\mathcal{M} \vDash \varphi(x)[\alpha_x^a]$, com α a valoração α porém levando x em a

Observação 2.5. Com essa definição indutiva, satisfação de fórmulas está bem definida para todas as fórmulas da linguagem. Note também que dado um modelo qualquer e uma sentença sobre a sua linguagem, sempre está determinado se tal sentença é satisfeita no modelo ou não, o que é diferente de perguntar se, dada uma sentença, existe um modelo que a satisfaz. Esta última é a noção de completude, que iremos falar mais tarde.

Definição 2.10. Se $\mathcal{M}$ satisfaz uma fórmula φ para todas as valorações possíveis, diremos que $\mathcal{M}$ *satisfaz* φ ou que $\mathcal{M}$ *é um modelo para* φ. Denotaremos isso por $\mathcal{M} \vDash \varphi$.

Outro conceito central é o de **Teoria**:

Definição 2.11. (Teoria) Uma $\mathcal{L}$-teoria é uma coleção T de $\mathcal{L}$-sentenças. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um modelo de T e escrevemos $\mathcal{M} \vDash T$ se $\mathcal{M} \vDash \phi$ para todas as sentenças $\phi \in T$.

Considere T a teoria composta pelas duas sentenças

$$\forall x x = 0 \text{ e } \exists x x \neq 0$$

Note que elas são contraditórias, portanto não existe um modelo para essa teoria. Isto é, não há um conjunto contendo um elemento diferente de zero tal que todo elemento é igual a zero. Assim:

Definição 2.12. Uma teoria é satisfazível se existe um modelo para ela.

Também é comum chamarmos uma teoria de *consistente* se ela admitir modelo.

2.3 Exemplos

Essa seção será composta exclusivamente de exemplos de Teorias e alguns de seus modelos.

Exemplo 2.2. (Conjuntos infinitos) Seja $\mathcal{L} = \emptyset$. Considere a $\mathcal{L}-$teoria composta pelas sentenças

$$\phi_n = \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n \bigwedge_{i<j\leq n} x_i \neq x_j$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que essas sentenças querem dizer "existem ao menos n elementos distintos". Portanto como a linguagem é vazia, qualquer conjunto infinito define um modelo para essa teoria.

Exemplo 2.3. (Teoria de Grafos) Seja $\mathcal{L}_{graph} = \{R\}$ uma relação binária. Os axiomas dessa teoria são:

- $\forall x \neg R(x,x)$;
- $\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$.

Portanto os modelos dessa teoria são formados por um conjunto de pontos e uma relação binária entre esses pontos, chamada de arestas, que satisfaz as duas propriedades acima. Ou seja, um grafo.

Exemplo 2.4. (Anéis e Corpos) Seja $\mathcal{L}_{ring} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ como já definimos anteriormente. Os axiomas de anéis são:

- $\forall x \forall y \forall z\ (x - y = z \leftrightarrow x = y + z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\ (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$;
- $\forall x\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$;
- $\forall x \forall y \forall z\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\ (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.

Exemplo 2.5. (Aritmética de Peano) Considere a linguagem $\mathcal{L} = \{+, \cdot, s, 0\}$, com os símbolos $+$ e $\cdot$ sendo funções binárias, s função unitária e 0 constante.

Exemplo 2.6. ZFC O caso da teoria ZFC é interessante: trata-se de uma teoria para a linguagem de conjuntos $\mathcal{L} = \{\in\}$. O que há de curioso é que não se pode exibir um modelo para essa teoria: isso violaria o Teorema da Incompletude de Gödel.

A impossibilidade segue do fato de que construiríamos um conjunto, portanto usaríamos ZFC, para provar que ZFC é consistente. Mas, retirando certos axiomas, é possível conseguir alguns modelos que trazem propriedades interessantes.

O exemplo de ZFC também é interessante porque nos mostra certos atalhos para se escrever fórmulas. Veja que a linguagem é apenas o símbolo de "pertence", mas frequentemente usamos $\subset$, $\cup$ e cap, por exemplo. Mas esses são atalhos:

- $X \cup Y = Z$: $\forall x\ x \in Z \leftrightarrow (x \in X \vee x \in Y)$;
- $X \cap Y = Z$: $\forall x\ x \in Z \leftrightarrow (x \in X \wedge x \in Y)$;
- $X \subset Y$: $\forall x\ x \in X \to x \in Y$.

Para o leitor que quiser ver os axiomas de ZFC, recomendamos a página da Wikipedia: `https://pt.wikipedia.org/wiki/Axiomas_de_Zermelo-Fraenkel#Os_Axiomas`.

Exemplo 2.7. DLO Sobre o vocabulário de ordens ($\mathcal{L} = \{<\}$), costuma-se chamar DLO a teoria de ordens totais densas sem máximo e mínimo. Ela contém as sentenças:

- Dois elementos sempre são comparáveis: $\forall x \forall y\ x < y \vee y < x \vee x = y$;
- Nenhum elemento é maior que si mesmo: $\forall x\ \neg(x < x)$;
- A ordem é transitiva: $\forall x \forall y \forall z\ x < y \wedge y < z \to x < z$;
- Entre dois elementos, sempre tem outro: $\forall x \forall y (x < y \to \exists z\ x < z \wedge z < y)$;
- Não há maior elemento: $\forall x \exists y\ x < y$;
- Não há menor elemento: $\forall x \exists y\ y < x$.

Algo interessante sobre essa teoria é que todos os modelos são equivalentes e que não há modelo finito.

Exemplos de modelos são $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e intervalos abertos. Em termos de lógica de primeira ordem, todos são indistinguíveis.

2.4 Exercícios

1) Mostre que o valor de um termo e o significado de uma fórmula dependem apenas dos valores que são atribuídos às variáveis livres destes. Ou seja, mostre que: dados $\mathcal{A}$ um modelo, α e β $\mathcal{A}-$valorações, t um termo e φ uma fórmula, se para todas as variáveis x que ocorrem em t e são livres em φ temos que $\alpha(x) = \beta(x)$, então:

- $t^{\mathcal{A}}[\alpha] = t^{\mathcal{A}}[\beta]$;
- $\mathcal{A} \vDash \varphi[\alpha] \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi[\beta]$.

Dica: Faça indução nos termos e nas fórmulas, respectivamente.

3 Relações entre modelos

Em muitas áreas, estudar como se relacionam diferentes objetos é fundamental. Nota-se a centralidade do conceitos de morfismo, seja de anéis, grupos ou corpos, transformação linear, homeomorfismo e outros similares. Semelhantemente, na Teoria de Modelos haverão conceitos igualmente importantes. Veja que, tratando-se dessas relações, sempre haverão propriedades que serão preservadas. Vejamos como o conceito se aplica nas diferentes áreas:

- Dois grupos são isomorfos se existe uma bijeção $f : G \to H$ tal que $f(g_1 +_G g_2) = f(g_1) +_H f(g_2)$ e cuja inversa tem a mesma propriedade.
- Dois grafos G e H são isomorfos se existe uma bijeção $f : G \to H$ tal que há uma aresta entre os vértices g_1 e $g_2 \in G$ se e só se há uma aresta ligando $f(g_1)$ e $f(g_2)$.
- Dois anéis são isomorfos com a mesma condição para grupos, adicionando-se a mesma exigência para as duas operações.

Veja, então, que, dependendo da situação, as propriedades que desejamos manter são diferentes. Você pode observar que, acima, trata-se de *relações* e *funções*. De fato, esses conceitos podem, então, ser traduzidos em termos da Teoria de Modelos. O que desejamos preservar, então, quando relacionamos dois modelos distintos, é a interpretação e as sentenças satisfeitas por eles. Vamos começar com um exemplo:

Exemplo 3.1. Se dois modelos finitos são isomorfos, então eles têm a mesma quantidade de elementos.

Demonstração. Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ dois modelos. Suponha que $M = \{a_1, ..., a_m\}$ e $N = \{b_1, ..., b_n\}$.

Então, $\mathcal{M} \models \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_m \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$. Isto é, $\mathcal{M}$ satisfaz a sentença "existem m elementos distintos". Vamos chamar essa sentença de φ_m.

Semelhantemente, trocando m por n, temos que $\mathcal{N} \models \varphi_n$, isto é, $\mathcal{N}$ satisfaz "existem n elementos distintos". Mas então, se $m > n$, temos que $\mathcal{N} \not\models \varphi_m$ e, se $n > m$, então $\mathcal{M} \not\models \varphi_n$. Portanto, há necessariamente uma sentença que testemunha que os dois modelos são diferentes. $\square$

Definimos precisamente, então, isomorfismos entre modelos:

Definição 3.1. Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ dois modelos para um mesmo vocabulário $\mathcal{L}$. Dizemos que $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são isomorfos, e denotamos $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$, se existir uma bijeção $f : M \to N$ tal que para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ e para todos $m_1, ..., m_n \in M$,

$$\mathcal{M} \models \varphi(m_1, ..., m_n) \text{ se e só se } \mathcal{N} \models \varphi(f(m_1), ..., f(m_n)).$$

Veja que isso significa que os dois modelos "concordam" em suas interpretações de constantes, também:

1. $f(\mathbf{c}^{\mathcal{M}}) = \mathbf{c}^{\mathcal{N}}$, para todo símbolo de constante $\mathbf{c}$;

2. $\mathbf{R}^{\mathcal{M}}(m_1, ..., m_n) \Leftrightarrow \mathbf{R}^{\mathcal{N}}(f(m_1), ..., f(m_n))$, para todo símbolo de relação $\mathbf{R}$ e todo $m_1, ..., m_n \in M$;

3. $f(\mathbf{g}^{\mathcal{M}}(m_1, .., m_n)) = \mathbf{g}^{\mathcal{N}}(f(m_1), ..., f(m_n))$, para todo símbolo de função $\mathbf{g}$ e todo $m_1, ..., m_n \in M$.

Na realidade:

Proposição 3.1. *Se $f : M \to N$ é uma bijeção satisfazendo as três propriedades acima, então f é um isomorfismo.*

A ideia de isomorfismo, no entanto, é um pouco forte. Podemos introduzir uma noção que nos permite afirmar que "em termos de lógica de primeira ordem, dois modelos são indistinguíveis". Essa é a definição de equivalência. Observe o seguinte problema:

Exemplo 3.2. Considere a linguagem de grafos ($\{E\}$) e a seguinte teoria:

- φ_1, φ_2, ... Em que cada φ_n é a sentença "existem n elementos distintos";
- $\forall x \forall y \ E(x, y)$, isto é, quaisquer dois vértices distintos estão ligados por uma aresta.
- $\forall x \ \neg E(x, x)$.

Dados $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ modelos para essa teoria, se $f : G_1 \to G_2$ é uma bijeção, então f é um isomorfismo entre $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$.

Observe (e talvez prove) que, mesmo que dois modelos para a teoria anterior não sejam isomorfos, não é possível exibir uma sentença que é satisfeita por apenas um deles. Assim, definimos:

Definição 3.2. Dois modelos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, para um mesmo vocabulário, são ditos equivalentes se, para toda sentença φ, $\mathcal{M} \models \varphi \leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi$.

Exercício 3.1. Mostre que quaisquer dois modelos da teoria acima são equivalentes.

A não ser que estejamos falando sobre a teoria ZFC, em geral, a lógica de primeira ordem não distingue cardinalidades infinitas distintas. Um exemplo clássico dessa afirmação é a equivalência entre os modelos $\{\mathbb{Q}, <\}$ e $\{\mathbb{R}, <\}$, ainda que não sejam isomorfos.

Mas veja, também, que a noção de isomorfismo não significa "dois modelos de mesma cardinalidade que sejam equivalentes". Vamos construir um exemplo que prova essa afirmação.

Exemplo 3.3. Considere o vocabulário $\{\prec\}$. Defina sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a seguinte ordem: $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2)$ se $a_1 < a_2$ ou se $a_1 = a_2$ e $b_1 < b_2$.

Essa é a ordem lexicográfica sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Vamos mostrar que $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}$, em termos de ordem. Isso significa mostrar que não existe uma bijeção $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \times \mathbb{R}$ tal que $f(x) < f(y) \Leftrightarrow x < y$.

Suponha, então, que f seja uma função com essas propriedades. Veja que, dado $a \in \mathbb{R}$, $f(\{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}, x \leq a\}) = (-\infty, m) \subset \mathbb{Q}$, para algum m, pois trata-se de um segmento inicial sem elementos máximo e mínimo.

No entanto, como f é bijeção, deve existir algum $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $f((p, q)) = m$, com $p > a$. Mas, dado $q' < q$, teremos que $(p, q') \prec (p, q)$ e, portanto, $f((p, q')) < m$, pois f preserva a ordem.

Como f é injetiva, precisamos ter que $(p, q') \in f^{-1}((-\infty, m)) = \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}, x \leq a\}$, mas isso é uma contradição.

No entanto, tanto $\mathbb{R}$ quanto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ são modelos para a teoria de ordens totais densas sem máximo e mínimo. É possível provar, mas foge do escopo dessas notas, que tal teoria é completa, isto é, que todos os modelos para essa teoria são equivalentes.

Quando se estuda relações entre modelos, merecem atenção especial os casos em que um modelo está contido no outro.

Definição 3.3. Dado um vocabulário $L = \{\mathbf{c}_i, \mathbf{f}_i, \mathbf{R}_i\}$ e $\mathcal{M}$ um modelo para esse vocabulário, dizemos que $\mathcal{N}$ é um submodelo de $\mathcal{M}$ se $N \subset M$, $\mathcal{N}$ é um L-modelo e, para todo i:

- $\mathbf{c}_i^{\mathcal{N}} = \mathbf{c}_i^{\mathcal{M}}$;
- Para todo $x_1, ..., x_r \in N$, $\mathbf{f}^{\mathcal{N}}(x_1, ..., x_r) = \mathbf{f}^{\mathcal{M}}(x_1, ..., x_r)$;
- Para todo $x_1, ..., x_r \in N$, $\mathcal{N} \models \mathbf{R}(x_1, ..., x_r) \leftrightarrow \mathcal{M} \models \mathbf{R}(x_1, ..., x_r)$;

Veja, então, que submodelos não são simplesmente "modelos contidos um no outro", mas também é necessário que as interpretações sejam as mesmas, dada a restrição de elementos do modelo menor.

Subanéis e subgrupos são exemplos de submodelos: nas definições, exige-se que os elementos neutro sejam os mesmos, além de que os resultados sejam preservados. Subgrafos também são exemplos de submodelos, desde que mantidas as arestas entre os vértices.

Existem submodelos que são muito semelhantes aos modelos em que estão contidos.

Definição 3.4. Dizemos que um submodelo $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ é elementar quando, dada uma fórmula $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $a_1, ..., a_n \in N$, então

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(a_1, ..., a_n)$$

Denota-se $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$.

Naturalmente, se $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$, então, dada uma sentença φ, $\mathcal{M} \models \varphi \leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi$, o que significa que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

Mas não basta que $N \subset M$ e $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ para que $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$. Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 3.4. Seja $L = \{\prec\}$ a linguagem de ordens. Considere $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, <)$ e $\mathcal{B} = ((0,1), >)$. Veja que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são modelos para a teoria de ordens totais densas sem máximo e mínimo. Portanto, como todo modelo para essa teoria é equivalente, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Além disso, $(0,1) \subset \mathbb{R}$. Porém, não se pode afirmar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, pois as interpretações de $\prec$ são incompatíveis: dados $a, b \in (0,1)$, como $a < b \Rightarrow a \not> b$, então $a \prec^{\mathcal{A}} b \Rightarrow a \not\prec^{\mathcal{B}} b$.

Exercício 3.2. Considere os vocabulários e modelos abaixo. Diga se $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

- $L = \{*, e\}$, $\mathcal{A} = (\mathbb{Q}, +, 0)$, $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, +, 0)$;
- $L = \{*, e\}$, $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_{2n}, +, \overline{0})$, $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}_n, +, \overline{0})$;
- $L = \{*, e\}$, $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, +, 0)$, $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, \times, 0)$;
- $L = \{*, e\}$, $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_p, +, 0)$, $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}_p^{\times}, \times, 1)$ ($\mathbb{Z}_p$ é o grupo cujos multiplicativo de $\mathbb{Z}_p$;
- $L = \{*, \cdot\}$, $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_p, +, \times)$, $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}_p^{\times}, +, \times)$ ($\mathbb{Z}_p$ é o grupo cujos multiplicativo de $\mathbb{Z}_p$;