Modelos e Aplicações - Aula 7

Caio Lopes, Henrique Lecco

ICMC - USP

29 de julho de 2020

Objetivo de hoje

Vamos provar um resultado que usamos muitas vezes:

Objetivo de hoje

Vamos provar um resultado que usamos muitas vezes: DLO é completo.

Objetivo de hoje

Vamos provar um resultado que usamos muitas vezes: DLO é completo.

Além disso, compreenderemos melhor a diferença entre *completo* e *modelo-completo*.

Completo, modelo-completo

Será que completo implica modelo-completo?
Será que modelo-completo implica completo?

Completo, modelo-completo

Será que completo implica modelo-completo?
Será que modelo-completo implica completo?

Definição

Uma teoria T é dita completa se dados $\mathcal{M} \models T$ e $\mathcal{N} \models T$, então $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.
Uma teoria T é dita modelo-completa se dados $\mathcal{M} \models T$ e $\mathcal{N} \models T$ e $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, então $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

Complexidade de fórmulas

Vamos introduzir uma noção mais fraca de equivalência. Trata-se da n-equivalência.

Definição

Uma fórmula ϕ tem rank n se apresenta no máximo n quantificadores encadeados, sejam repetidos ou não.
Dois modelos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são ditos n-equivalentes ($\mathcal{M} \equiv_n \mathcal{N}$) se satisfazem as mesmas sentenças de rank no máximo n.

Complexidade de fórmulas

Vamos introduzir uma noção mais fraca de equivalência. Trata-se da n-equivalência.

Definição

Uma fórmula ϕ tem rank n se apresenta no máximo n quantificadores encadeados, sejam repetidos ou não.
Dois modelos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são ditos n-equivalentes ($\mathcal{M} \equiv_n \mathcal{N}$) se satisfazem as mesmas sentenças de rank no máximo n.

- $\text{rank}(\phi) = 0$, quando ϕ é livre de quantificadores;
- $\text{rank}(\exists x\ \phi) = \text{rank}(\forall x\ \phi) = \text{rank}(\phi) + 1$;
- $\text{rank}(\neg\phi) = \text{rank}(\phi)$;
- $\text{rank}(\phi \wedge \psi) = \max\{\text{rank}(\phi), \text{rank}(\psi)\}$.

Mais um jogo

Introduzimos o jogo de Ehrenfeucht-Fraïssé.
Seja L um vocabulário com finitos símbolos não-lógicos e sem símbolos de função. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ L-modelos.

Mais um jogo

Introduzimos o jogo de Ehrenfeucht-Fraïssé.
Seja L um vocabulário com finitos símbolos não-lógicos e sem símbolos de função. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ L-modelos.

O jogo é jogado da seguinte maneira: define-se uma quantidade de rodadas n. A cada rodada i:

1. Alice escolhe um elemento $a_i \in A$ ou $b_i \in B$;
2. Se Alice escolheu um elemento de A, Bob escolhe um elemento $b_i \in B$. Caso contrário, Bob escolhe um elemento a_i de A.

Mais um jogo

Introduzimos o jogo de Ehrenfeucht-Fraïssé.
Seja L um vocabulário com finitos símbolos não-lógicos e sem símbolos de função. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ L-modelos.

O jogo é jogado da seguinte maneira: define-se uma quantidade de rodadas n. A cada rodada i:

1. Alice escolhe um elemento $a_i \in A$ ou $b_i \in B$;
2. Se Alice escolheu um elemento de A, Bob escolhe um elemento $b_i \in B$. Caso contrário, Bob escolhe um elemento a_i de A.

Bob ganha se a função f que mapeia $a_i \mapsto b_i$ é um isomorfismo local.

Isomorfimos locais

Um isomorfismo local é uma função que indica que um pedaço de um modelo é idêntico a um pedaço de outro modelo.

Isomorfimos locais

Um isomorfismo local é uma função que indica que um pedaço de um modelo é idêntico a um pedaço de outro modelo.

Considere $\{a_1, ..., a_n\} \subset A$ e $\{b_1, ..., b_n\} \subset B$.
Seja f uma função que leva a_i em b_i, para todo i.

Isomorfimos locais

Um isomorfismo local é uma função que indica que um pedaço de um modelo é idêntico a um pedaço de outro modelo.

Considere $\{a_1, ..., a_n\} \subset A$ e $\{b_1, ..., b_n\} \subset B$.
Seja f uma função que leva a_i em b_i, para todo i.

f é um isomorfismo local se, para todo i e toda fórmula $\varphi(x)$ livre de quantificadores,

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_i) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(b_i)$$

Modelos finitos

Se $\mathcal{A}$ é um modelo com $n+1$ elementos e $\mathcal{B}$ é um modelo com n elementos, então Alice tem estratégia vencedora no jogo $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n+1)$.

Modelos finitos

Se $\mathcal{A}$ é um modelo com $n+1$ elementos e $\mathcal{B}$ é um modelo com n elementos, então Alice tem estratégia vencedora no jogo $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n+1)$.

Basta que Alice sempre escolha elementos distintos de A na sua jogada. Olho no lance:

Alice	Bob
a_1	b_1
$a_2 \neq a_1$	b_2

Alice	Bob
a_1	b_1
$a_2 \neq a_1$	b_2

Se $b_2 = b_1$, então $\mathcal{B} \models (b_1 = b_2)$, mas $\mathcal{A} \not\models (a_1 = a_2)$.

Alice	Bob
a_1	b_1
$a_2 \neq a_1$	b_2

Se $b_2 = b_1$, então $\mathcal{B} \models (b_1 = b_2)$, mas $\mathcal{A} \not\models (a_1 = a_2)$.
Então Bob já perderia de cara.

Alice	Bob
a_1	b_1
$a_2 \neq a_1$	b_2

Se $b_2 = b_1$, então $\mathcal{B} \models (b_1 = b_2)$, mas $\mathcal{A} \not\models (a_1 = a_2)$.
Então Bob já perderia de cara. Como Bob não é Bobo, ele vai escolher $b_2 \neq b_1$.

Assim, em todas as rodadas, Alice segue sua estratégia: escolher qualquer elemento de A, desde que seja diferente de todos os anteriores.
Quando acabar a n-ésima rodada, o jogo estará assim:

Assim, em todas as rodadas, Alice segue sua estratégia: escolher qualquer elemento de A, desde que seja diferente de todos os anteriores.
Quando acabar a n-ésima rodada, o jogo estará assim:

Alice	Bob
a_1	b_1
a_2	b_2
...	...
a_n	b_n

Assim, em todas as rodadas, Alice segue sua estratégia: escolher qualquer elemento de A, desde que seja diferente de todos os anteriores.
Quando acabar a n-ésima rodada, o jogo estará assim:

Alice	Bob
a_1	b_1
a_2	b_2
...	...
a_n	b_n

Não sabemos exatamente quem são esses elementos, mas sabemos que:

- Para todos i, j distintos, $a_i \neq a_j$;
- Para todos i, j distintos, $b_i \neq b_j$.

Na jogada $n+1$, Alice segue sua estratégia e escolhe o elemento restante de A (que tinha $n+1$ elementos).
Esse elemento vai ser diferente de todos os anteriores que ela escolheu.

Na jogada $n + 1$, Alice segue sua estratégia e escolhe o elemento restante de A (que tinha $n + 1$ elementos).
Esse elemento vai ser diferente de todos os anteriores que ela escolheu.

Mas o conjunto B só tem n elementos, então Bob será forçado a repetir uma escolha anterior. Isto é, existe um i menor que $n + 1$ tal que $b_i = b_{n+1}$.

Na jogada $n+1$, Alice segue sua estratégia e escolhe o elemento restante de A (que tinha $n+1$ elementos).
Esse elemento vai ser diferente de todos os anteriores que ela escolheu.

Mas o conjunto B só tem n elementos, então Bob será forçado a repetir uma escolha anterior. Isto é, existe um i menor que $n+1$ tal que $b_i = b_{n+1}$.

Assim, $\mathcal{B} \models (b_i = b_{n+1})$, mas $\mathcal{A} \not\models (a_i = a_{n+1})$.

Na jogada $n+1$, Alice segue sua estratégia e escolhe o elemento restante de A (que tinha $n+1$ elementos).
Esse elemento vai ser diferente de todos os anteriores que ela escolheu.

Mas o conjunto B só tem n elementos, então Bob será forçado a repetir uma escolha anterior. Isto é, existe um i menor que $n+1$ tal que $b_i = b_{n+1}$.

Assim, $\mathcal{B} \models (b_i = b_{n+1})$, mas $\mathcal{A} \not\models (a_i = a_{n+1})$.
Isso significa que Alice ganhou a partida.

Jogos mais fáceis e mais difíceis

Veja que, quanto maior o número de rodadas, mais difícil o jogo fica para Bob.

Proposição

Se Alice tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)$, então Alice também tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n+1)$.

Jogos mais fáceis e mais difíceis

Veja que, quanto maior o número de rodadas, mais difícil o jogo fica para Bob.

Proposição

Se Alice tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)$, então Alice também tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n+1)$.

Basta que Alice jogue da mesma maneira.
Ela consegue garantir que ganha já na rodada n.

Jogos mais fáceis e mais difíceis

Veja que, quanto maior o número de rodadas, mais difícil o jogo fica para Bob.

Proposição

Se Alice tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)$, então Alice também tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n+1)$.

Basta que Alice jogue da mesma maneira.
Ela consegue garantir que ganha já na rodada n.

Similarmente, Bob garante estratégia vencedora se um jogo é mais curto que um jogo para o qual ele sabe que ganha, com os mesmos modelos.

Colocando constantes

Existe uma outra maneira de interpretar os isomorfismos locais, que é por meio de extensões simples do vocabulário. Uma extensão simples consiste em adicionar novos símbolos de constantes a um dado vocabulário.
Sejam $a_1, ..., a_n \in A$, $b_1, ..., b_n \in B$, com $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ L-modelos.

Colocando constantes

Existe uma outra maneira de interpretar os isomorfismos locais, que é por meio de extensões simples do vocabulário. Uma extensão simples consiste em adicionar novos símbolos de constantes a um dado vocabulário.
Sejam $a_1, \ldots, a_n \in A$, $b_1, \ldots, b_n \in B$, com $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ L-modelos.

Considere $L^+ = L \cup \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$.

Colocando constantes

Existe uma outra maneira de interpretar os isomorfismos locais, que é por meio de extensões simples do vocabulário. Uma extensão simples consiste em adicionar novos símbolos de constantes a um dado vocabulário.

Sejam $a_1, \ldots, a_n \in A$, $b_1, \ldots, b_n \in B$, com $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ L-modelos.

Considere $L^+ = L \cup \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$.
Defina novos modelos $\mathcal{A}^+$ e $\mathcal{B}^+$, idênticos a $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ respectivamente, mas com uma interpretação para as novas constantes:
$\mathbf{c}_i^{\mathcal{A}^+} = a_i$ e $\mathbf{c}_i^{\mathcal{B}^+} = b_i$.

Dizemos que uma função f que mapeia $a_i \mapsto b_i$ é um isomorfismo local se $\mathcal{A}^+$ e $\mathcal{B}^+$ satisfazem as mesmas L^+-sentenças livres de quantificadores

Dizemos que uma função f que mapeia $a_i \mapsto b_i$ é um isomorfismo local se $\mathcal{A}^+$ e $\mathcal{B}^+$ satisfazem as mesmas L^+-sentenças livres de quantificadores

Podemos denotar $\mathcal{A}^+$ como $\langle \mathcal{A}, a_1, ..., a_n \rangle$.

“Back-and-forth”

Bob tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n+1)$ se e somente se ambas as condições são válidas:

1. Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que Bob tem estratégia vencedora em $E(\langle \mathcal{A}, a \rangle, \langle \mathcal{B}, b \rangle, n)$;
2. Para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que Bob tem estratégia vencedora em $E(\langle \mathcal{A}, a \rangle, \langle \mathcal{B}, b \rangle, n)$.

“Back-and-forth”

Bob tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n+1)$ se e somente se ambas as condições são válidas:

1. Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que Bob tem estratégia vencedora em $E(\langle \mathcal{A}, a \rangle, \langle \mathcal{B}, b \rangle, n)$;
2. Para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que Bob tem estratégia vencedora em $E(\langle \mathcal{A}, a \rangle, \langle \mathcal{B}, b \rangle, n)$.

Basta enxergar a primeira jogada de Alice e a Resposta de Bob no jogo de $n+1$ rodadas como os elementos a e b, claro, dependendo se Alice escolheu a ou b e Bob escolhendo outro.

“Back-and-forth”

Bob tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n+1)$ se e somente se ambas as condições são válidas:

1. Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que Bob tem estratégia vencedora em $E(\langle \mathcal{A}, a \rangle, \langle \mathcal{B}, b \rangle, n)$;
2. Para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que Bob tem estratégia vencedora em $E(\langle \mathcal{A}, a \rangle, \langle \mathcal{B}, b \rangle, n)$.

Basta enxergar a primeira jogada de Alice e a Resposta de Bob no jogo de $n+1$ rodadas como os elementos a e b, claro, dependendo se Alice escolheu a ou b e Bob escolhendo outro.
As n jogadas restantes no jogo com $n+1$ rodadas e o jogo com n rodadas serão iguais.

Sentido do jogo

Teorema

Bob tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)$ se e somente se $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$.

Sentido do jogo

Teorema

Bob tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)$ se e somente se $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$.

O caso $n = 0$ segue da definição:
Bob tem estratégia vencedora para $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 0)$ quando a função vazia é um isomorfismo local entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, ou seja, quando $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ satisfazem as mesmas sentenças de rank 0, com nenhuma constante adicional no vocabulário.

Sentido do jogo

Teorema

Bob tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)$ se e somente se $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$.

O caso $n = 0$ segue da definição:
Bob tem estratégia vencedora para $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, 0)$ quando a função vazia é um isomorfismo local entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, ou seja, quando $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ satisfazem as mesmas sentenças de rank 0, com nenhuma constante adicional no vocabulário.

Isso é exatamente dizer que $\mathcal{A} \equiv_0 \mathcal{B}$

Suponha, então, que Bob tem estratégia para $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)$ se e somente se $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$. Essa é nossa hipótese de indução. Queremos provar que vale para $n + 1$.

Ida

Suponha que Bob tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n+1)$.

Ida

Suponha que Bob tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n+1)$.

Sabemos, por hipótese, que $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$. Precisamos mostrar que, dada uma sentença do tipo $\exists x\ \varphi(x)$, com $\text{rank}(\varphi) \leq n$, então:

$$\mathcal{A} \models \exists x\ \varphi(x) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \exists x\ \varphi(x)$$

Ida

Suponha que Bob tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n+1)$.

Sabemos, por hipótese, que $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$. Precisamos mostrar que, dada uma sentença do tipo $\exists x\ \varphi(x)$, com $\text{rank}(\varphi) \leq n$, então:

$$\mathcal{A} \models \exists x\ \varphi(x) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \exists x\ \varphi(x)$$

Suponha, então, que $\mathcal{A} \models \exists x\ \varphi(x)$. Isso significa que existe $a \in A$ tal que $\mathcal{A} \models \varphi(a)$.

Ida

Suponha que Bob tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n+1)$.

Sabemos, por hipótese, que $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$. Precisamos mostrar que, dada uma sentença do tipo $\exists x\ \varphi(x)$, com $\mathrm{rank}(\varphi) \leq n$, então:

$$\mathcal{A} \models \exists x\ \varphi(x) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \exists x\ \varphi(x)$$

Suponha, então, que $\mathcal{A} \models \exists x\ \varphi(x)$. Isso significa que existe $a \in A$ tal que $\mathcal{A} \models \varphi(a)$.
Como vimos, também podemos dizer que $\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(\mathbf{c})$, com **c** um novo símbolo de constante adicionado ao vocabulário.

Usando a técnica do back-and-forth, teremos que, como Bob tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n+1)$, então:

Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que Bob tem estratégia vencedora em $E(\langle \mathcal{A}, a \rangle, \langle \mathcal{B}, b \rangle, n)$.

Usando a técnica do back-and-forth, teremos que, como Bob tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n+1)$, então:

Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que Bob tem estratégia vencedora em $E(\langle \mathcal{A}, a \rangle, \langle \mathcal{B}, b \rangle, n)$.

Pela hipótese de indução, isso se traduz como:

Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv_n \langle \mathcal{B}, b \rangle$

Como $\varphi(\mathbf{c})$ é uma sentença de rank $\leq n$ e $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv_n \langle \mathcal{B}, b \rangle$, então:

$$\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(\mathbf{c}) \Leftrightarrow \langle \mathcal{B}, b \rangle \models \varphi(\mathbf{c})$$

Como $\varphi(\mathbf{c})$ é uma sentença de rank $\leq n$ e $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv_n \langle \mathcal{B}, b \rangle$, então:

$$\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(\mathbf{c}) \Leftrightarrow \langle \mathcal{B}, b \rangle \models \varphi(\mathbf{c})$$

Assim, como supomos que o lado esquerdo é verdade, então por consequência o lado direito também será.
Isso significa que existe um elemento $b \in B$ tal que $\mathcal{B} \models \varphi(b)$, ou seja:

Como $\varphi(\mathbf{c})$ é uma sentença de rank $\leq n$ e $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv_n \langle \mathcal{B}, b \rangle$, então:

$$\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(\mathbf{c}) \Leftrightarrow \langle \mathcal{B}, b \rangle \models \varphi(\mathbf{c})$$

Assim, como supomos que o lado esquerdo é verdade, então por consequência o lado direito também será.
Isso significa que existe um elemento $b \in B$ tal que $\mathcal{B} \models \varphi(b)$, ou seja:

$$\mathcal{B} \models \exists x \ \varphi(x)$$

As outras fórmulas (com $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\forall$) seguem como consequência desta, assim, temos a ida já feita.

Volta

Suponha, então, que $\mathcal{A} \equiv_{n+1} \mathcal{B}$.

Volta

Suponha, então, que $\mathcal{A} \equiv_{n+1} \mathcal{B}$.

Queremos mostrar que:

1. Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv_n \langle \mathcal{B}, b \rangle$;
2. Para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv_n \langle \mathcal{B}, b \rangle$.

Volta

Suponha, então, que $\mathcal{A} \equiv_{n+1} \mathcal{B}$.
Queremos mostrar que:

1. Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv_n \langle \mathcal{B}, b \rangle$;
2. Para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv_n \langle \mathcal{B}, b \rangle$.

Por hipótese de indução, ganharemos que:

1. Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que Bob tem estratégia vencedora em $E(\langle \mathcal{A}, a \rangle, \langle \mathcal{B}, b \rangle, n)$;
2. Para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que Bob tem estratégia vencedora em $E(\langle \mathcal{A}, a \rangle, \langle \mathcal{B}, b \rangle, n)$.

Volta

Suponha, então, que $\mathcal{A} \equiv_{n+1} \mathcal{B}$.
Queremos mostrar que:

1. Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv_n \langle \mathcal{B}, b \rangle$;
2. Para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv_n \langle \mathcal{B}, b \rangle$.

Por hipótese de indução, ganharemos que:

1. Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que Bob tem estratégia vencedora em $E(\langle \mathcal{A}, a \rangle, \langle \mathcal{B}, b \rangle, n)$;
2. Para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que Bob tem estratégia vencedora em $E(\langle \mathcal{A}, a \rangle, \langle \mathcal{B}, b \rangle, n)$.

E assim, pelo lema do back-and-forth, obteremos que Bob tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n+1)$.

Vamos mostrar, então, apenas que para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv_n \langle \mathcal{B}, b \rangle$.
O outro caso é análogo. Seja, então, $a \in A$.

Vamos mostrar, então, apenas que para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv_n \langle \mathcal{B}, b \rangle$.
O outro caso é análogo. Seja, então, $a \in A$.
Suponha que não exista tal b.
Assim, para cada $b \in B$, deve existir uma fórmula $\psi_b(x)$ tal que $\mathcal{A} \models \psi_b(a)$ mas $\mathcal{B} \not\models \psi_b(b)$.

Vamos mostrar, então, apenas que para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv_n \langle \mathcal{B}, b \rangle$.
O outro caso é análogo. Seja, então, $a \in A$.
Suponha que não exista tal b.
Assim, para cada $b \in B$, deve existir uma fórmula $\psi_b(x)$ tal que $\mathcal{A} \models \psi_b(a)$ mas $\mathcal{B} \not\models \psi_b(b)$.
Considere, então, a seguinte fórmula:

$$\exists x \bigwedge_{b \in B} \psi_b(x)$$

Vamos mostrar, então, apenas que para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv_n \langle \mathcal{B}, b \rangle$.
O outro caso é análogo. Seja, então, $a \in A$.
Suponha que não exista tal b.
Assim, para cada $b \in B$, deve existir uma fórmula $\psi_b(x)$ tal que $\mathcal{A} \models \psi_b(a)$ mas $\mathcal{B} \not\models \psi_b(b)$.
Considere, então, a seguinte fórmula:

$$\exists x \bigwedge_{b \in B} \psi_b(x)$$

Veja que $\mathcal{A}$ satisfaz todas as $\psi_b(x)$ com a valoração que leva x em a.
Portanto, $\mathcal{A} \models \bigwedge_{b \in B} \psi_b(a)$.

Como $\mathcal{A} \models \bigwedge_{b \in B} \psi_b(a)$, então:

$$\mathcal{A} \models \exists x \bigwedge_{b \in B} \psi_b(x)$$

Como $\mathcal{A} \models \bigwedge_{b \in B} \psi_b(a)$, então:

$$\mathcal{A} \models \exists x \bigwedge_{b \in B} \psi_b(x)$$

Mas

$$\mathcal{B} \not\models \exists x \bigwedge_{b \in B} \psi_b(x)$$

Pois, para cada elemento $b \in B$, $\mathcal{B} \not\models \psi_b(b)$.

Como $\mathcal{A} \models \bigwedge_{b \in B} \psi_b(a)$, então:

$$\mathcal{A} \models \exists x \bigwedge_{b \in B} \psi_b(x)$$

Mas

$$\mathcal{B} \not\models \exists x \bigwedge_{b \in B} \psi_b(x)$$

Pois, para cada elemento $b \in B$, $\mathcal{B} \not\models \psi_b(b)$.

Cada fórmula $\psi_b(x)$ tem rank $\leq n$.

$$\text{rank}\left(\bigwedge_{b \in B} \psi_b(x)\right) = \max\{\text{rank}(\psi_b(x)) \ : \ b \in B\} \leq n$$

Como $\mathcal{A} \models \bigwedge_{b \in B} \psi_b(a)$, então:

$$\mathcal{A} \models \exists x \bigwedge_{b \in B} \psi_b(x)$$

Mas

$$\mathcal{B} \not\models \exists x \bigwedge_{b \in B} \psi_b(x)$$

Pois, para cada elemento $b \in B$, $\mathcal{B} \not\models \psi_b(b)$.

Cada fórmula $\psi_b(x)$ tem rank $\leq n$.

$$\text{rank}\left(\bigwedge_{b \in B} \psi_b(x)\right) = \max\{\text{rank}(\psi_b(x)) \ : \ b \in B\} \leq n$$

Desse modo, $\exists x \bigwedge_{b \in B} \psi_b(x)$ tem rank $\leq n + 1$

Nossa hipótese era de que $\mathcal{A} \equiv_{n+1} \mathcal{B}$.
Tomamos um a qualquer e supomos que não havia nenhuma escolha de $b \in B$ de modo que $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv_n \langle \mathcal{B}, b \rangle$. Fazendo isso, conseguimos uma fórmula de rank $\leq n+1$ que é satisfeita por $\mathcal{A}$ mas não por $\mathcal{B}$.

Nossa hipótese era de que $\mathcal{A} \equiv_{n+1} \mathcal{B}$.
Tomamos um a qualquer e supomos que não havia nenhuma escolha de $b \in B$ de modo que $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv_n \langle \mathcal{B}, b \rangle$. Fazendo isso, conseguimos uma fórmula de rank $\leq n+1$ que é satisfeita por $\mathcal{A}$ mas não por $\mathcal{B}$.

Mas isso é uma contradição! Então deve existir tal b e o resultado segue como mostrado anteriormente.

Mas calma...

Será que $\bigwedge_{b \in B} \psi_b(x)$ é de fato uma fórmula?

B pode ser infinito, e conjunções infinitas não caracterizam fórmulas de primeira ordem!

Mas calma...

Será que $\bigwedge_{b \in B} \psi_b(x)$ é de fato uma fórmula?
B pode ser infinito, e conjunções infinitas não caracterizam fórmulas de primeira ordem!

É por isso que assumimos no começo que o vocabulário tem finitos símbolos não-lógicos e nenhum deles é um símbolo de função.

Mas calma...

Será que $\bigwedge_{b \in B} \psi_b(x)$ é de fato uma fórmula?
B pode ser infinito, e conjunções infinitas não caracterizam fórmulas de primeira ordem!

É por isso que assumimos no começo que o vocabulário tem finitos símbolos não-lógicos e nenhum deles é um símbolo de função.

Sob essas condições, temos apenas finitas fórmulas, a menos de equivalência, de rank $\leq n$ com no máximo k variáveis livres, para cada k e cada n.

O que provamos, mesmo?

Bob tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)$ se e somente se $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$

Estendendo para equivalência

Observe que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ se e somente se, para todo n, $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$.

Estendendo para equivalência

Observe que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ se e somente se, para todo n, $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$.
Ou seja, se para cada n, Bob tem uma estratégia vencedora para $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)$, então $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$

Estendendo para equivalência

Observe que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ se e somente se, para todo n, $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$.
Ou seja, se para cada n, Bob tem uma estratégia vencedora para $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)$, então $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$

Observações:

- Isso não significa que a estratégia é mesma para todo n;
- Isso não significa que Bob ganha na versão do jogo com infinitas rodadas.

Uma aplicação

Consideramos o vocabulário $\{<\}$ e a teoria DLO. Isto é, a teoria de ordens totais densas sem maior nem menor elemento.
Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois modelos para a teoria.

Uma aplicação

Consideramos o vocabulário $\{<\}$ e a teoria DLO. Isto é, a teoria de ordens totais densas sem maior nem menor elemento.
Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois modelos para a teoria.

Queremos mostrar que Bob tem uma estratégia vencedora para qualquer $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)$.
Nesse caso, a estratégia vai ser a mesma.

Considere que o jogo está na n-ésima rodada. Já foram escolhidos os elementos $a_1, ..., a_{n-1} \in A$ e $b_1, ..., b_{n-1} \in B$.

Considere que o jogo está na n-ésima rodada. Já foram escolhidos os elementos $a_1, ..., a_{n-1} \in A$ e $b_1, ..., b_{n-1} \in B$.
Suponha que Alice escolheu $a_n \in A$ (se ela tiver escolhido de B, é análogo).

Considere que o jogo está na n-ésima rodada. Já foram escolhidos os elementos $a_1, ..., a_{n-1} \in A$ e $b_1, ..., b_{n-1} \in B$.
Suponha que Alice escolheu $a_n \in A$ (se ela tiver escolhido de B, é análogo).
Então, ocorre uma das três opções:

1. $a_n > a_i$, para todo $i < n$;
2. $a_n < a_i$, para todo $i < n$;
3. Existem $r, s < n$ tais que $a_r < a_n < a_s$ e não há mais nenhum a_i entre a_r e a_s.

Considere que o jogo está na n-ésima rodada. Já foram escolhidos os elementos $a_1, ..., a_{n-1} \in A$ e $b_1, ..., b_{n-1} \in B$.
Suponha que Alice escolheu $a_n \in A$ (se ela tiver escolhido de B, é análogo).
Então, ocorre uma das três opções:

1. $a_n > a_i$, para todo $i < n$;
2. $a_n < a_i$, para todo $i < n$;
3. Existem $r, s < n$ tais que $a_r < a_n < a_s$ e não há mais nenhum a_i entre a_r e a_s.

Bob responde escolhendo b_n da seguinte maneira:

1. Qualquer b_n maior que todos os b_i (existe pois não há elemento máximo);
2. Qualquer b_n menor que todos os b_i (existe pois não há elemento mínimo);
3. Qualquer b_n entre b_r e b_s (existe pois a ordem é densa).

Fazendo isso, Bob sempre ganha o jogo.
Prova-se, por indução, que se $f : \{a_1, ..., a_n\} \to \{b_1, ..., b_n\}$ é um isomorfismo local, então, com a escolha adequada de Bob, $f : \{a_1, ..., a_{n+1}\} \to \{b_1, ..., b_{n+1}\}$ também é.

Fazendo isso, Bob sempre ganha o jogo.
Prova-se, por indução, que se $f : \{a_1, ..., a_n\} \rightarrow \{b_1, ..., b_n\}$ é um isomorfismo local, então, com a escolha adequada de Bob, $f : \{a_1, ..., a_{n+1}\} \rightarrow \{b_1, ..., b_{n+1}\}$ também é.

Por isso, quaisquer dois modelos de DLO são equivalentes, isto é, a teoria é completa.

Fazendo isso, Bob sempre ganha o jogo.
Prova-se, por indução, que se $f : \{a_1, ..., a_n\} \to \{b_1, ..., b_n\}$ é um isomorfismo local, então, com a escolha adequada de Bob, $f : \{a_1, ..., a_{n+1}\} \to \{b_1, ..., b_{n+1}\}$ também é.

Por isso, quaisquer dois modelos de DLO são equivalentes, isto é, a teoria é completa.
Vamos mostrar um exemplo de teoria que é completa mas não modelo-completa.

DLOE

Considere *DLOE* a teoria de ordens totais densas *com máximo e mínimo*.

DLOE

Considere *DLOE* a teoria de ordens totais densas *com máximo e mínimo*.
Exemplos de modelos para essa teoria são intervalos fechados nos reais.

DLOE

Considere *DLOE* a teoria de ordens totais densas *com máximo e mínimo*.
Exemplos de modelos para essa teoria são intervalos fechados nos reais.

Dados dois modelos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ para *DLOE* e um n qualquer, Bob tem estratégia vencedora em $E(\mathcal{M}, \mathcal{N}, n)$.

Basta que ele jogue de maneira similar ao que estava fazendo em *DLO*, mas com poucas diferenças:

- Se Alice escolhe o máximo de $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$, Bob escolhe o máximo do outro modelo;
- Se Alice escolhe o mínimo de $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$, Bob escolhe o mínimo do outro modelo;
- Se Alice escolhe um elemento maior que todos já escolhidos, mas menor que o máximo, Bob faz a mesma coisa no outro modelo;
- Se Alice escolhe um elemento menor que todos já escolhidos, mas maior que o mínimo, Bob faz a mesma coisa no outro modelo;
- Para elementos entre outros dois, joga-se da mesma forma.

Essa é uma estratégia vencedora, logo $DLOE$ é completo. Mas não é modelo-completo.

Essa é uma estratégia vencedora, logo $DLOE$ é completo. Mas não é modelo-completo.

Veja que $[0,1] \subset [0,2]$ (com as ordens usuais).
Seja $\varphi(x)$ a seguinte fórmula: $\forall y\ (y = x \vee y < x)$. Ou seja, $\varphi(x)$ diz "x é o maior elemento".

Essa é uma estratégia vencedora, logo $DLOE$ é completo. Mas não é modelo-completo.

Veja que $[0,1] \subset [0,2]$ (com as ordens usuais).
Seja $\varphi(x)$ a seguinte fórmula: $\forall y \ (y = x \vee y < x)$. Ou seja, $\varphi(x)$ diz "x é o maior elemento".

Assim, $[0,1] \models \varphi(1)$, mas $[0,2] \not\models \varphi(1)$.

Modelo-completo, completo

ACF é modelo completo, mas não é completo (características diferentes);
DLOE é completo, mas não é modelo-completo.