Teoria de Modelos e Aplicações

Caio Lopes, Henrique Lecco

ICMC - USP

27 de julho de 2020

Revisão

Revisão

Definição (Submodelo)

Um modelo $\mathcal{M}$ é dito submodelo de $\mathcal{N}$, denotado por $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, se:

- $M \subset N$;
- $\mathbf{f}^{\mathcal{M}} = \mathbf{f}^{\mathcal{N}}|_M$;
- $\mathbf{c}^{\mathcal{M}} = \mathbf{c}^{\mathcal{N}}$;
- $\mathbf{R}^{\mathcal{M}} = \mathbf{R}^{\mathcal{N}}|_M$.

Revisão

Definição (Submodelo)

Um modelo $\mathcal{M}$ é dito submodelo de $\mathcal{N}$, denotado por $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, se:

- $M \subset N$;
- $\mathbf{f}^{\mathcal{M}} = \mathbf{f}^{\mathcal{N}}|_M$;
- $\mathbf{c}^{\mathcal{M}} = \mathbf{c}^{\mathcal{N}}$;
- $\mathbf{R}^{\mathcal{M}} = \mathbf{R}^{\mathcal{N}}|_M$.

Definição (Submodelo Elementar)

$\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ é dito elementar, denotado por $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, se para toda fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ e $m_1, ..., m_n \in M$

$$\mathcal{M} \vDash \varphi(m_1, ..., m_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi(m_1, ..., m_n)$$

Definição (Teoria)

Uma L-teoria é uma coleção T de sentenças. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um modelo de T se para toda sentença φ de T, temos que $\mathcal{M} \vDash \varphi$.

Definição (Teoria)

Uma L-teoria é uma coleção T de sentenças. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um modelo de T se para toda sentença φ de T, temos que $\mathcal{M} \models \varphi$.

Definição (κ-categórica)

Uma teoria é κ-categórica se todo modelo de cardinalidade κ é isoformo.

Definição (Teoria)

Uma L-teoria é uma coleção T de sentenças. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um modelo de T se para toda sentença φ de T, temos que $\mathcal{M} \vDash \varphi$.

Definição (κ-categórica)

Uma teoria é κ-categórica se todo modelo de cardinalidade κ é isoformo.

Fim da revisão

Modelo-completo

Modelo-completo

Considere $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ dois modelos tais que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$.

Modelo-completo

Considere $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ dois modelos tais que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Seja $\varphi(x)$ uma fórmula sem quantificadores.

Modelo-completo

Considere $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ dois modelos tais que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Seja $\varphi(x)$ uma fórmula sem quantificadores.

Sabemos que para todo $m \in M$

$$\mathcal{M} \vDash \varphi(m) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi(m)$$

Modelo-completo

Considere $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ dois modelos tais que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Seja $\varphi(x)$ uma fórmula sem quantificadores.

Sabemos que para todo $m \in M$

$$\mathcal{M} \vDash \varphi(m) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi(m)$$

Observe o seguinte:

Modelo-completo

Considere $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ dois modelos tais que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Seja $\varphi(x)$ uma fórmula sem quantificadores.

Sabemos que para todo $m \in M$

$$\mathcal{M} \models \varphi(m) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(m)$$

Observe o seguinte:

- $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x) \Rightarrow \mathcal{N} \models \exists x \varphi(x)$

Modelo-completo

Considere $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ dois modelos tais que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Seja $\varphi(x)$ uma fórmula sem quantificadores.

Sabemos que para todo $m \in M$

$$\mathcal{M} \vDash \varphi(m) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi(m)$$

Observe o seguinte:

- $\mathcal{M} \vDash \exists x \varphi(x) \Rightarrow \mathcal{N} \vDash \exists x \varphi(x)$
- $\mathcal{N} \vDash \forall x \varphi(x) \Rightarrow \mathcal{M} \vDash \forall x \varphi(x)$

Modelo-completo

Considere $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ dois modelos tais que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Seja $\varphi(x)$ uma fórmula sem quantificadores.

Sabemos que para todo $m \in M$

$$\mathcal{M} \models \varphi(m) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(m)$$

Observe o seguinte:

- $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x) \Rightarrow \mathcal{N} \models \exists x \varphi(x)$
- $\mathcal{N} \models \forall x \varphi(x) \Rightarrow \mathcal{M} \models \forall x \varphi(x)$

Quantificadores *aumentam* a complexidade das fórmulas.

Modelo-completo

Definição

Uma teoria T é *modelo-completa* se,

Modelo-completo

Definição

Uma teoria T é *modelo-completa* se, dados $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ modelos de T,

Modelo-completo

Definição

Uma teoria T é *modelo-completa* se, dados $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ modelos de T, então $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Modelo-completo

Definição

Uma teoria T é *modelo-completa* se, dados $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ modelos de T, então $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Definição

A classe dos submodelos de uma teoria T é a coleção de todos os submodelos dos modelos de T.

Modelo-completo

Definição

Uma teoria T é *modelo-completa* se, dados $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ modelos de T, então $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Definição

A classe dos submodelos de uma teoria T é a coleção de todos os submodelos dos modelos de T. Esses submodelos não necessariamente são modelos para a teoria.

Complexidade de fórmula

Dissemos que quantificadores estão relacionados à complexidade de uma fórmula.

Complexidade de fórmula

Dissemos que quantificadores estão relacionados à complexidade de uma fórmula. Um parâmetro que indica a complexidade de uma fórmula é o número de quantificadores alternados.

Complexidade de fórmula

Dissemos que quantificadores estão relacionados à complexidade de uma fórmula. Um parâmetro que indica a complexidade de uma fórmula é o número de quantificadores alternados.

Considere as fórmulas abaixo:

Complexidade de fórmula

Dissemos que quantificadores estão relacionados à complexidade de uma fórmula. Um parâmetro que indica a complexidade de uma fórmula é o número de quantificadores alternados.

Considere as fórmulas abaixo:

- $\forall x \forall y \forall z \varphi(x, y, z)$;

Complexidade de fórmula

Dissemos que quantificadores estão relacionados à complexidade de uma fórmula. Um parâmetro que indica a complexidade de uma fórmula é o número de quantificadores alternados.

Considere as fórmulas abaixo:

- $\forall x \forall y \forall z \varphi(x, y, z)$;
- $\forall x \forall y \exists z \varphi(x, y, z)$;

Complexidade de fórmula

Dissemos que quantificadores estão relacionados à complexidade de uma fórmula. Um parâmetro que indica a complexidade de uma fórmula é o número de quantificadores alternados.

Considere as fórmulas abaixo:

- $\forall x \forall y \forall z \varphi(x, y, z)$;
- $\forall x \forall y \exists z \varphi(x, y, z)$;
- $\exists x \forall y \exists z \varphi(x, y, z)$;

Complexidade de fórmula

Dissemos que quantificadores estão relacionados à complexidade de uma fórmula. Um parâmetro que indica a complexidade de uma fórmula é o número de quantificadores alternados.

Considere as fórmulas abaixo:

- $\forall x \forall y \forall z \varphi(x, y, z)$;
- $\forall x \forall y \exists z \varphi(x, y, z)$;
- $\exists x \forall y \exists z \varphi(x, y, z)$;

O grau de complexidade delas é *crescente*.

Complexidade de fórmula

Dissemos que quantificadores estão relacionados à complexidade de uma fórmula. Um parâmetro que indica a complexidade de uma fórmula é o número de quantificadores alternados.

Considere as fórmulas abaixo:

- $\forall x \forall y \forall z \varphi(x, y, z)$;
- $\forall x \forall y \exists z \varphi(x, y, z)$;
- $\exists x \forall y \exists z \varphi(x, y, z)$;

O grau de complexidade delas é *crescente*. Daremos o nome da formalização dessa ideia de *hierarquia*.

Hierarquia

Definição

A hierarquia de uma teoria é:

Hierarquia

Definição

A hierarquia de uma teoria é:

- $\forall_0$ ou $\exists_0$ se suas fórmulas são livre de quantificadores;

Hierarquia

Definição

A hierarquia de uma teoria é:

- $\forall_0$ ou $\exists_0$ se suas fórmulas são livre de quantificadores;
- $\forall_n$ se suas fórmulas pertencem a menor classe de fórmulas que contém as fórmulas $\exists_{n-1}$ e é fechada por $\wedge, \vee$ e por adicionar $\forall$ na frente;

Hierarquia

Definição

A hierarquia de uma teoria é:

- $\forall_0$ ou $\exists_0$ se suas fórmulas são livre de quantificadores;
- $\forall_n$ se suas fórmulas pertencem a menor classe de fórmulas que contém as fórmulas $\exists_{n-1}$ e é fechada por $\wedge, \vee$ e por adicionar $\forall$ na frente;
- $\exists_n$ se suas fórmulas pertencem a menor classe de fórmulas que contém as fórmulas $\forall_{n-1}$ e é fechada por $\wedge, \vee$ e por adicionar $\exists$ na frente.

Hierarquia

Definição

A hierarquia de uma teoria é:

- $\forall_0$ ou $\exists_0$ se suas fórmulas são livre de quantificadores;
- $\forall_n$ se suas fórmulas pertencem a menor classe de fórmulas que contém as fórmulas $\exists_{n-1}$ e é fechada por $\wedge, \vee$ e por adicionar $\forall$ na frente;
- $\exists_n$ se suas fórmulas pertencem a menor classe de fórmulas que contém as fórmulas $\forall_{n-1}$ e é fechada por $\wedge, \vee$ e por adicionar $\exists$ na frente.

Portanto uma teoria é $\forall_2$ se suas fórmulas podem ser escritas na forma "para todos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ existem $y_1, y_2, \ldots, y_m$ tais que..."

Cadeia de modelos

Definição

Seja $(\mathcal{A}_i : i < \lambda)$ uma sequência de L-modelos, onde λ é um cardinal qualquer.

Cadeia de modelos

Definição

Seja $(\mathcal{A}_i : i < \lambda)$ uma sequência de L-modelos, onde λ é um cardinal qualquer. Suponha que $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_j$ se $i < j < \lambda$.

Cadeia de modelos

Definição

Seja $(\mathcal{A}_i : i < \lambda)$ uma sequência de L-modelos, onde λ é um cardinal qualquer. Suponha que $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_j$ se $i < j < \lambda$. Defina o modelo $\mathcal{B} = \bigcup_{i<\lambda} \mathcal{A}_i$ ponto a ponto, da seguinte forma:

Cadeia de modelos

Definição

Seja $(\mathcal{A}_i : i < \lambda)$ uma sequência de L-modelos, onde λ é um cardinal qualquer. Suponha que $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_j$ se $i < j < \lambda$. Defina o modelo $\mathcal{B} = \bigcup_{i<\lambda} \mathcal{A}_i$ ponto a ponto, da seguinte forma:

- O domínio de $\mathcal{B}$ é $\bigcup_{i<\lambda} A_i$;

Cadeia de modelos

Definição

Seja $(\mathcal{A}_i : i < \lambda)$ uma sequência de L-modelos, onde λ é um cardinal qualquer. Suponha que $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_j$ se $i < j < \lambda$. Defina o modelo $\mathcal{B} = \bigcup_{i<\lambda} \mathcal{A}_i$ ponto a ponto, da seguinte forma:

- O domínio de $\mathcal{B}$ é $\bigcup_{i<\lambda} A_i$;
- $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}_i}$;

Cadeia de modelos

Definição

Seja $(\mathcal{A}_i : i < \lambda)$ uma sequência de L-modelos, onde λ é um cardinal qualquer. Suponha que $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_j$ se $i < j < \lambda$. Defina o modelo $\mathcal{B} = \bigcup_{i<\lambda} \mathcal{A}_i$ ponto a ponto, da seguinte forma:

- O domínio de $\mathcal{B}$ é $\bigcup_{i<\lambda} A_i$;
- $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}_i}$;
- $f^{\mathcal{B}}(a) = f^{\mathcal{A}_i}(a)$, onde A_i é o primeiro conjunto da cadeia que contém a;

Cadeia de modelos

Definição

Seja $(\mathcal{A}_i : i < \lambda)$ uma sequência de L-modelos, onde λ é um cardinal qualquer. Suponha que $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_j$ se $i < j < \lambda$. Defina o modelo $\mathcal{B} = \bigcup_{i<\lambda} \mathcal{A}_i$ ponto a ponto, da seguinte forma:

- O domínio de $\mathcal{B}$ é $\bigcup_{i<\lambda} A_i$;
- $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}_i}$;
- $f^{\mathcal{B}}(a) = f^{\mathcal{A}_i}(a)$, onde A_i é o primeiro conjunto da cadeia que contém a;
- $a \in R^{\mathcal{B}}$ se $a \in R^{\mathcal{A}_i}$ para todos os A_i que contém a.

Cadeia de modelos

Definição

Uma classe de modelos é *fechada por uniões de cadeias ascendentes* quando a união de cadeias de modelos é modelo.

Cadeia de modelos

Definição

Uma classe de modelos é *fechada por uniões de cadeias ascendentes* quando a união de cadeias de modelos é modelo. Analogamente, uma teoria é dita fechada por cadeias ascendentes quando a união de cadeias de modelos da teoria é um modelo da teoria.

Lema maroto 1

Lemma

Se T é uma teoria $\forall_2$, então T é fechada por uniões de cadeias ascendentes.

Lema maroto 1

Lemma

Se T é uma teoria $\forall_2$, então T é fechada por uniões de cadeias ascendentes.

Prova: Seja

$$\mathcal{A}_0 \subset \ldots \subset \mathcal{A}_\xi \subset \ldots$$

Uma cadeia ascendente de modelos para a teoria T.

Lema maroto 1

Lemma

Se T é uma teoria $\forall_2$, então T é fechada por uniões de cadeias ascendentes.

Prova: Seja

$$\mathcal{A}_0 \subset \ldots \subset \mathcal{A}_\xi \subset \ldots$$

Uma cadeia ascendente de modelos para a teoria T.

Queremos mostrar que $\mathcal{A} = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathcal{A}_\xi$ é modelo para T.

Lema maroto 1

Lemma

Se T é uma teoria $\forall_2$, então T é fechada por uniões de cadeias ascendentes.

Prova: Seja

$$\mathcal{A}_0 \subset \ldots \subset \mathcal{A}_\xi \subset \ldots$$

Uma cadeia ascendente de modelos para a teoria T.

Queremos mostrar que $\mathcal{A} = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathcal{A}_\xi$ é modelo para T. Seja φ uma sentença de T.

Lema maroto 1

Lemma

Se T é uma teoria $\forall_2$, então T é fechada por uniões de cadeias ascendentes.

Prova: Seja

$$\mathcal{A}_0 \subset \ldots \subset \mathcal{A}_\xi \subset \ldots$$

Uma cadeia ascendente de modelos para a teoria T.

Queremos mostrar que $\mathcal{A} = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathcal{A}_\xi$ é modelo para T. Seja φ uma sentença de T.

Por T ser $\forall_2$, segue que φ é do tipo

$$\forall y((\exists z)\psi(y, z)),$$

com $\psi(y, z)$ sendo uma fórmula livre de quantificadores.

Lema maroto 1

Seja $a \in \bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi$.

Lema maroto 1

Seja $a \in \bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi$. Seja A_ξ o primeiro universo da cadeia de forma que $a \in A_\xi$.

Lema maroto 1

Seja $a \in \bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi$. Seja A_ξ o primeiro universo da cadeia de forma que $a \in A_\xi$.

Por $\mathcal{A}_\xi$ ser modelo de T, $A_\xi \models \exists z \psi(a, z)$.

Lema maroto 1

Seja $a \in \bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi$. Seja A_ξ o primeiro universo da cadeia de forma que $a \in A_\xi$.

Por $\mathcal{A}_\xi$ ser modelo de T, $A_\xi \models \exists z \psi(a, z)$. Seja $b \in A_\xi$ tal que $\mathcal{A}_\xi \models \psi(a, b)$

Lema maroto 1

Seja $a \in \bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi$. Seja A_ξ o primeiro universo da cadeia de forma que $a \in A_\xi$.

Por $\mathcal{A}_\xi$ ser modelo de T, $A_\xi \models \exists z \psi(a, z)$. Seja $b \in A_\xi$ tal que $\mathcal{A}_\xi \models \psi(a, b)$

Como $\mathcal{A}_\xi \models \psi(a, b), \forall \xi < \lambda$, segue que $\mathcal{A} \models \psi(a, b)$ e portanto $\mathcal{A} \models \varphi$ $\square$

Lema maroto 2

Lemma

Se uma classe de modelos é fechada por uniões de cadeias ascendentes, então todo modelo admite uma extensão que é fechada por extensões.

Lema maroto 2

Lemma

Se uma classe de modelos é fechada por uniões de cadeias ascendentes, então todo modelo admite uma extensão que é fechada por extensões.

Prova:

Lema maroto 2

Lemma

Se uma classe de modelos é fechada por uniões de cadeias ascendentes, então todo modelo admite uma extensão que é fechada por extensões.

Prova: :/

Teste de Lindström

Definição (Que na verdade é um teorema)

Sejam $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ e P uma relação unária da linguagem tal que $P^{\mathcal{N}} = M$.

Teste de Lindström

Definição (Que na verdade é um teorema)

Sejam $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ e P uma relação unária da linguagem tal que $P^{\mathcal{N}} = M$. Então para toda fórmula $\varphi(x)$, existe uma $\varphi^P(x)$ de forma que

Teste de Lindström

Definição (Que na verdade é um teorema)

Sejam $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ e P uma relação unária da linguagem tal que $P^{\mathcal{N}} = M$. Então para toda fórmula $\varphi(x)$, existe uma $\varphi^P(x)$ de forma que

$$\mathcal{N} \models \varphi^P(x) \leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(x).$$

Teste de Lindström

Definição (Que na verdade é um teorema)

Sejam $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ e P uma relação unária da linguagem tal que $P^{\mathcal{N}} = M$. Então para toda fórmula $\varphi(x)$, existe uma $\varphi^P(x)$ de forma que

$$\mathcal{N} \models \varphi^P(x) \leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(x).$$

Teorema (Teste de Lindström - Teorema 8.3.4 Model-Theory - Hodges)

Seja λ um cardinal não enumerável.

Teste de Lindström

Definição (Que na verdade é um teorema)

Sejam $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ e P uma relação unária da linguagem tal que $P^{\mathcal{N}} = M$. Então para toda fórmula $\varphi(x)$, existe uma $\varphi^P(x)$ de forma que

$$\mathcal{N} \models \varphi^P(x) \leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(x).$$

Teorema (Teste de Lindström - Teorema 8.3.4 Model-Theory - Hodges)

Seja λ um cardinal não enumerável. Se T é uma L-teoria $\forall_2$ e λ-categórica, então ela é modelo-completa.

Teste de Lindström

Prova:

Teste de Lindström

Prova: Suponha que não.

Teste de Lindström

Prova: Suponha que não.
Então existem $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ modelos e $\varphi(x)$ tais que $\mathcal{B} \models \varphi(x)$ e $\mathcal{A} \models \neg\varphi(x)$.

Teste de Lindström

Prova: Suponha que não.
Então existem $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ modelos e $\varphi(x)$ tais que $\mathcal{B} \models \varphi(x)$ e $\mathcal{A} \models \neg\varphi(x)$.

Seja $L^+ = L \cup \{P\}$, onde P é uma relação unária.

Teste de Lindström

Prova: Suponha que não.
Então existem $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ modelos e $\varphi(x)$ tais que $\mathcal{B} \models \varphi(x)$ e $\mathcal{A} \models \neg\varphi(x)$.

Seja $L^+ = L \cup \{P\}$, onde P é uma relação unária.

Defina $\mathcal{B}^+$ como $\mathcal{B}$ para o novo vocabulário, com a interpretação $P^{\mathcal{B}^+} = A$.

Teste de Lindström

Temos que $\mathcal{B}^+ \models \exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi^P(x))$, pois existe $x \in A$ tal que $\mathcal{B}^+ \models \varphi(x)$ e, como $\mathcal{A} \not\models \varphi(x)$ (por hipótese), então $\mathcal{B}^+ \not\models \varphi^P(x)$, portanto $\mathcal{B}^+ \models \neg\varphi^P(x)$

Teste de Lindström

Temos que $\mathcal{B}^+ \models \exists x(\varphi(x) \land \neg\varphi^P(x))$, pois existe $x \in A$ tal que $\mathcal{B}^+ \models \varphi(x)$ e, como $\mathcal{A} \not\models \varphi(x)$ (por hipótese), então $\mathcal{B}^+ \not\models \varphi^P(x)$, portanto $\mathcal{B}^+ \models \neg\varphi^P(x)$

Tome, agora, $\mathcal{D}^+$ uma extensão elementar de $\mathcal{B}^+$ tal que a cardinalidade de $|P^{\mathcal{D}^+}|$ seja λ.

Teste de Lindström

Temos que $\mathcal{B}^+ \models \exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi^P(x))$, pois existe $x \in A$ tal que $\mathcal{B}^+ \models \varphi(x)$ e, como $\mathcal{A} \not\models \varphi(x)$ (por hipótese), então $\mathcal{B}^+ \not\models \varphi^P(x)$, portanto $\mathcal{B}^+ \models \neg\varphi^P(x)$

Tome, agora, $\mathcal{D}^+$ uma extensão elementar de $\mathcal{B}^+$ tal que a cardinalidade de $|P^{\mathcal{D}^+}|$ seja λ. Podemos fazer isso introduzindo uma quantidade infinita de constantes no vocabulário.

Teste de Lindström

Temos que $\mathcal{B}^+ \models \exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi^P(x))$, pois existe $x \in A$ tal que $\mathcal{B}^+ \models \varphi(x)$ e, como $\mathcal{A} \not\models \varphi(x)$ (por hipótese), então $\mathcal{B}^+ \not\models \varphi^P(x)$, portanto $\mathcal{B}^+ \models \neg\varphi^P(x)$

Tome, agora, $\mathcal{D}^+$ uma extensão elementar de $\mathcal{B}^+$ tal que a cardinalidade de $|P^{\mathcal{D}^+}|$ seja λ. Podemos fazer isso introduzindo uma quantidade infinita de constantes no vocabulário.

Como $\mathcal{D}^+$ é equivalente a $\mathcal{B}^+$, é natural pensarmos que existe em $\mathcal{D}+$ um submodelo parecido com $\mathcal{A}$, uma vez que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}^+$.

Teste de Lindström

Temos que $\mathcal{B}^+ \models \exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi^P(x))$, pois existe $x \in A$ tal que $\mathcal{B}^+ \models \varphi(x)$ e, como $\mathcal{A} \not\models \varphi(x)$ (por hipótese), então $\mathcal{B}^+ \not\models \varphi^P(x)$, portanto $\mathcal{B}^+ \models \neg\varphi^P(x)$

Tome, agora, $\mathcal{D}^+$ uma extensão elementar de $\mathcal{B}^+$ tal que a cardinalidade de $|P^{\mathcal{D}^+}|$ seja λ. Podemos fazer isso introduzindo uma quantidade infinita de constantes no vocabulário.

Como $\mathcal{D}^+$ é equivalente a $\mathcal{B}^+$, é natural pensarmos que existe em $\mathcal{D}+$ um submodelo parecido com $\mathcal{A}$, uma vez que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}^+$. Seja $\mathcal{C}$ esse submodelo, onde $C = P^{\mathcal{D}^+}$.

Teste de Lindström

Temos que $\mathcal{C}$ é um modelo para T de cardinalidade λ, por construção.

Teste de Lindström

Temos que $\mathcal{C}$ é um modelo para T de cardinalidade λ, por construção.

Como T é $\forall_2$, então pelo Lema 1 segue que ela é fechada por uniões de cadeias ascendentes.

Teste de Lindström

Temos que $\mathcal{C}$ é um modelo para T de cardinalidade λ, por construção.

Como T é $\forall_2$, então pelo Lema 1 segue que ela é fechada por uniões de cadeias ascendentes.

Pelo Lema 2, existe um modelo $\mathcal{M}$ para a teoria T fechado por extensões e de cardinalidade λ.

Teste de Lindström

Como a teoria é por hipótese λ-categórica, segue que $\mathcal{C}$ será isomorfo a $\mathcal{M}$, e portanto fechado por extensão.

Teste de Lindström

Como a teoria é por hipótese λ-categórica, segue que $\mathcal{C}$ será isomorfo a $\mathcal{M}$, e portanto fechado por extensão.

Isso significa, então, que não é possível ter
$\mathcal{D}^+ \models \exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi^P(x))$,

Teste de Lindström

Como a teoria é por hipótese λ-categórica, segue que $\mathcal{C}$ será isomorfo a $\mathcal{M}$, e portanto fechado por extensão.

Isso significa, então, que não é possível ter $\mathcal{D}^+ \models \exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi^P(x))$, pois isso significa que existe uma fórmula que é satisfeita em $\mathcal{D}^+$ e não é em $\mathcal{C}$, o que não pode ocorrer pois $\mathcal{C}$ é fechado por extensão. $\square$

Corpos algebricamente fechados

Na próxima aula mostraremos que a teoria de corpos algebricamente fechados é modelo-completa.

Corpos algebricamente fechados

Na próxima aula mostraremos que a teoria de corpos algebricamente fechados é modelo-completa.

Na linguagem algébrica isso se traduz como:

Corpos algebricamente fechados

Na próxima aula mostraremos que a teoria de corpos algebricamente fechados é modelo-completa.

Na linguagem algébrica isso se traduz como: se L/K é uma extensão de corpos algebricamente fechados e $p(x)$ é um polinômio com coeficientes em K, é verdade que se $p(x)$ tem raiz em L, então ele tem raiz em K.

Acabou

Até amanhã!