

# Mathématiques

Henri LEFEBVRE

23 octobre 2017

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Analyse dans <math>\mathbb{R}</math> (MT90/MT91/MT12)</b>	<b>3</b>
1.1	Propriétés de $\mathbb{R}$ . . . . .	3
1.2	Suites réelles $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	3
1.3	Fonctions réelles $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (généralités) . . . . .	4
1.4	Dérivation . . . . .	5
1.5	Théorie de la mesure . . . . .	6
1.5.1	Généralités . . . . .	6
1.5.2	Exemples de mesures . . . . .	6
1.6	Intégration . . . . .	7
1.6.1	Définitions . . . . .	7
1.6.2	Propriétés . . . . .	7
1.6.3	Convergence . . . . .	9
1.6.4	Intégrale de Riemann-Stieltjes . . . . .	9
1.6.5	Fonctions définies par une intégrale . . . . .	10
1.6.6	Introduction au calcul des variations . . . . .	10
1.7	Séries dans $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.7.1	Généralités . . . . .	10
1.7.2	Séries de Taylor . . . . .	11
1.7.3	Séries de Fourier . . . . .	12
1.8	Le corps $\mathbb{C}$ . . . . .	13
1.9	Distributions . . . . .	14
1.9.1	Fonctions test ou de base : $\mathcal{D}$ . . . . .	14
1.9.2	Distributions : $\mathcal{D}'$ . . . . .	15
1.10	Convolution . . . . .	15
1.10.1	Convolution de fonction . . . . .	15
1.10.2	Convolution de suite . . . . .	16
1.10.3	Convolution de distribution et algèbre dans $\mathcal{D}'_+$ . . . . .	16
1.11	Transformées de Fourier . . . . .	17
1.11.1	Fonctions . . . . .	17
1.11.2	Distributions . . . . .	18
1.12	Transformées de Laplace . . . . .	19
1.12.1	Fonctions . . . . .	19
1.12.2	Distributions . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Analyse dans <math>\mathbb{R}^n</math> (MT22)</b>	<b>21</b>
2.1	Fonction de plusieurs variables $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	21
2.1.1	Généralités . . . . .	21
2.1.2	Dérivation . . . . .	21
2.1.3	Dérivées directionnelles . . . . .	22
2.2	Analyse vectorielle . . . . .	22
2.3	Courbes et surfaces . . . . .	23
2.3.1	Surfaces . . . . .	23
2.3.2	Courbes . . . . .	24
2.4	Intégrales dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	25
2.4.1	Intégrales doubles . . . . .	25

2.4.2	Intégrales triples . . . . .	25
2.4.3	Intégrales curvillignes . . . . .	26
2.4.4	Intégrales surfaciques . . . . .	27
2.5	Théorèmes intégraux . . . . .	28
2.5.1	Théorème de Stokes-Ampères . . . . .	28
2.5.2	Théorème de Gauss-Ostrogradski . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Algèbre linéaire (MT23)</b>	<b>29</b>
3.1	Espace vectoriels . . . . .	29
3.2	Applications linéaires et matrices . . . . .	29
3.3	Déterminants et systèmes linéaires . . . . .	29
3.4	Valeurs propres et diagonalisation . . . . .	29
3.5	Espaces euclidiens . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Analyse numérique (MT09)</b>	<b>30</b>
4.1	Systèmes linéaires . . . . .	30
4.2	Problèmes de moindres carrées . . . . .	30
4.3	Méthodes itératives . . . . .	30
4.4	Interpolation . . . . .	30
4.5	Intégration numérique . . . . .	30
4.6	Équations différentielles . . . . .	30
4.7	Valeurs propres . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Statistiques (SY02)</b>	<b>31</b>
<b>6</b>	<b>Optimisation (RO04)</b>	<b>32</b>
<b>7</b>	<b>Formulaires</b>	<b>33</b>

# Chapitre 1

## Analyse dans $\mathbb{R}$ (MT90/MT91/MT12)

### 1.1 Propriétés de $\mathbb{R}$

**Structure** :  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  est un corps ordonné

**Formule du binôme** :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ avec } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

**Produit scalaire** :  $\langle x, y \rangle = xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$

**Norme ( $\mathbb{R}$ ) (valeur absolue)** :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \rightarrow |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$

**Positivité** :  $|x| > 0$  et  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

**Homothétie** :  $|ax| = |a||x|$

**Inégalité triangulaire** :  $|x + y| \leq |x| + |y|$

**Convergence** :  $f(x) \rightarrow l \Leftrightarrow |f(x) - l| \rightarrow 0$

**Intervalles** :  $I$  est un intervalle si  $\forall a, b \in I, a < c < b \Rightarrow c \in I$

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \\ c \in [a, b] &\Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 1], c = \theta a + (1 - \theta)b \end{aligned}$$

**Densité de  $\mathbb{Q}$**  :

$$\forall a, b \neq \emptyset, \exists \alpha \in \mathbb{Q} \cap ]a, b[ \text{ et } \exists \beta \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap ]a, b[$$

**Ensembles bornés** : Soit  $A \subset \mathbb{R}$

**Majoration** :  $\forall x \in A, x \leq M$

**Minoration** :  $\forall x \in A, x \geq m$

**Encadrement** :  $\forall x \in A, |x| < M$

**Borne supérieure** : Plus petit des majorants (s'ils existent)

$$s = \sup A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A, x \leq s \\ \forall t < s, \exists x \in A \text{ tel que } t < x \end{array} \right.$$

**Droite numérique achevée** :  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

### 1.2 Suites réelles $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

**Définition** :  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto u_n$

**Convergence** :

$$(u_n) \rightarrow l, n \rightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

**Limite infinie :**

$$(U_n) \longrightarrow l, n \longrightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow u_n > \varepsilon)$$

**Convergences connues :**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{n!} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{k^n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln \beta)^\beta}{n^\alpha} = 0$$

**Propriétés de convergence :** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $u_n \longrightarrow l$  et  $v_n \longrightarrow l'$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Combinaison :**  $u_n + \lambda v_n \longrightarrow l + \lambda l'$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Produit :**  $u_n v_n \longrightarrow \infty$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Quotient :** Si  $l' \neq 0$ ,  $u_n / v_n \longrightarrow l / l'$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Vers zéro :** Si  $u_n \longrightarrow 0$  et  $v_n$  bornée, alors  $u_n v_n \longrightarrow 0$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Ordre :** Si  $u_n \leq v_n$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

**Suites adjacentes :**  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites adjacentes si et seulement si

$$(u_n) \text{ est croissante; } (v_n) \text{ est décroissante; } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$$

**Suite arithmétique :**

**Définition récursive :**  $u_{n+1} = u_n + r$

**Définition générale :**  $u_n = u_0 + nr$

**Somme des termes :**

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

**Suite géométrique :**

**Définition récursive :**  $u_{n+1} = q u_n$

**Définition générale :**  $u_n = q^n u_0$

**Somme des termes :**

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

**Suites récurrentes :**  $u_{n+1} = f(u_n)$

Si  $\exists l \in \mathbb{R}$  point fixe de  $f$  (i.e.  $f(l) = l$ ) et  $f$  contractante (i.e.  $f$   $k$ -lipschitzienne avec  $0 < k < 1$ ) alors  $(u_n) \longrightarrow l$

## 1.3 Fonctions réelles $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (généralités)

**Définition :**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$

**Image :**  $\forall A \subset \mathbb{R}, f(A) = \{y | \exists x \in A, y = f(x)\}$

**Image réciproque :**  $f^{-1}(B) = \{x \in D_f | f(x) \in B\}$

**Support :**  $\text{supp } \varphi = \overline{\{x | \varphi(x) \neq 0\}}$

**Correspondances :** Pour  $f : E \rightarrow F$

**Surjection :**  $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

**Injection :**  $\forall y \in F, \exists x \in E$  tel que  $y = f(x)$

**Bijection :**  $\forall y \in F, \exists ! x \in E$  tel que  $y = f(x)$  ( $f$  injective et surjective)

**Composée :**  $f \circ g(x) = f(g(x))$

**Fonction identité :**  $id : x \mapsto x$

**Bijection réciproque :** Si  $f$  bijective, alors  $\exists f^{-1}$  tel que  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$

**Convergence :**  $f(x) \longrightarrow l, x \longrightarrow a$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

**Limite à droite :**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, a < x < a + \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

**Caractérisation de la limite** (par les suites) :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \left( \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \Omega - \{a\} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = l \right)$$

**Continuité :**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**Théorème des valeurs intermédiaires** (TVI) : Soit  $f \in C^0([a, b])$  et  $y \in \mathbb{R}$

$$f(a) < y < f(b) \Rightarrow \exists x \in [a, b], f(x) = y$$

**Condition de Lipschitz :**

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

## 1.4 Dérivation

**Dérivabilité :**  $f$  est dérivable si et seulement si

$$\exists d \in \mathbb{R}, \text{ tel que } f(x + h) = f(x) + hd + |h|\epsilon(h)$$

**Taux de variation :**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

**Théorème de Rolle :** Soit  $f \in C^0([a, b])$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = 0$$

**Théorème des accroissements finis :** Soit  $f \in C^0([a, b])$

$$\exists c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Formule de Leibniz :**

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

**Opérations :**

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g', \lambda \in \mathbb{R}; \left( \frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}; (f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$$

**Fonction réciproque :**

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

**Dérivées connues :**

$$(x^q)' = qx^{q-1}, q \in \mathbb{Z}; (e^x)' = e^x; (\ln|x|)' = \frac{1}{x}; (\cos x)' = -\sin x; (\sin x)' = \cos x; (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Saut d'une fonction :**

$$\sigma_m = f^{(m)}(0^+) - f^{(m)}(0^-), m \geq 0$$

## 1.5 Théorie de la mesure

### 1.5.1 Généralités

**Fonction indicatrice** (ou caractéristique) :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

**$\sigma$ -algèbre** (tribu) : Une famille  $\mathcal{A}$  de sous-ensemble de  $X$  est une tribu si :

1.  $X \in \mathcal{A}$
2.  $A$  est stable par complémentarité
3.  $\mathcal{A}$  est stable par union dénombrable

**Espace mesurable** : Ensemble muni d'une tribu  $(X, \mathcal{A})$

**Tribu borélienne** : Plus petite tribu de  $\mathbb{R}$  contenant tous les intervalles

**Mesure** : Une mesure  $\mu$  sur  $(X, \mathcal{A})$  est une application de  $\mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  telle que

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si  $(A_n)_{n \geq 1}$  est une suite dénombrable de  $\mathcal{A}$  deux à deux disjointes alors :  $\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$  ( $\sigma$ -additivité)

**Espace mesuré** : Le triplet  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  est appelé un espace mesuré Proposition : soit  $\mathcal{A}$  une tribu de  $X$

1. Si  $A, B \in \mathcal{A}$  et  $A \subset B$  alors  $\mu(A) \leq \mu(B)$
2. Si  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ ,  $A_n \in \mathcal{A}$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_n A_n\right)$  et  $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$
3. Si  $A, B \in \mathcal{A}$  alors  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

**Ensemble négligeable** :  $A$  est dit négligeable si  $\mu(A) = 0$

**Proposition vraie presque partout** (pp) : Une proposition est dite vraie ( $\mu$ -)presque partout sur  $X$  si elle est vraie sur  $X \setminus E$  avec  $\mu(E) = 0$

**Ensemble de mesure nulle** : Un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  est dit de mesure nulle si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une suite d'intervalles ouverts et bornés  $(I_n)$  telle que :

1.  $A \subset \bigcup_{i \geq 1} I_i$
2.  $\sum_{i \geq 1} |I_i| < \varepsilon$

**Propositions** :

1. Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle
2. Si  $A$  est de mesure nulle et  $B \subset A$ , alors  $B$  est de mesure nulle
3. Si  $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$  avec chaque  $A_n$  de mesure nulle, alors  $A$  est de mesure nulle

**Fonction mesurable** :  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  est mesurable si  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

### 1.5.2 Exemples de mesures

**Mesure de Lebesgue** : Il existe une unique mesure  $\lambda$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  telle que  $\forall I = [a, b]$  borné,  $\lambda([a, b]) = \lambda([a, b[) = b - a$

**Mesure de Dirac** :  $\delta_a : T \rightarrow \{0, 1\}$  avec  $T$  une tribu et  $\delta_a = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$

**Mesure de comptage** (cardinal) : Pour un ensemble dénombrable de  $\mathbb{R}$ ,  $\forall n, \mu(\{n\}) = 1$

## 1.6 Intégration

### 1.6.1 Définitions

**Fonction en escalier** : Fonctions constantes sur des intervalles

**Intégrale de Riemann** : Soit

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{I_i}$$

une fonction en escalier, on définit l'intégrale de  $f$  par

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt = \sum \alpha_i (x_{i+1} - x_i)$$

Pour une fonction quelconque, s'il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$ , deux fonctions en escalier  $f_\varepsilon$  et  $F_\varepsilon$  telle que  $f_\varepsilon \leq f \leq F_\varepsilon$  et  $I(f_\varepsilon) - I(F_\varepsilon) < \varepsilon$ , alors  $f$  est dite Riemann-intégrable et on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \sup \{I(g) | g \text{ fonction en escalier et } g \leq f\}$$

**Fonction étagée** : Fonction dont l'image est constituée d'un nombre fini de valeurs réelles

**Théorème** : Toute fonction à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  est limite de fonctions étagées

**Intégrale de Lebesgue** : Soit

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$$

une fonction étagée, on définit l'intégrale de  $f$  par rapport à la mesure  $\mu$  par

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

et pour  $E \subset X$

$$\int_E f d\mu = \int_X f 1_E d\mu$$

Pour  $f$  une fonction positive,

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu | s \text{ étagée et } s \leq f \right\}$$

Enfin pour une fonction quelconque, on définit :  $f^+ = \max(0, f)$  et  $f^- = \max(0, -f)$  de sorte que :

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

### 1.6.2 Propriétés

**Lien Riemann-Lebesgue** : Si  $f$  est Riemann-Intégrable, alors  $f$  est Lebesgue-intégrable

**Ensemble de fonctions intégrables** (au sens de Lebesgue) :

$$L^p(A) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_A |f|^p < \infty \right\}$$

**Fonctions localement intégrables** :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-intégrable sur tout intervalle borné ( $L^1 \subset L^1_{loc}$ )

**Intégration et dérivation** :

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

**Egalité d'intégrales** :

$$f \stackrel{pp}{=} g \Leftrightarrow \int f(t)dt = \int g(t)dt$$



**Linéarité :**

$$\int (f(t) + \lambda g(t))dt = \int f(t)dt + \lambda \int g(t)dt$$

**Relation de Chasles :** Qui implique aussi  $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

**Relation d'ordre :**

$$f \leq g \Leftrightarrow \int f(t)dt \leq \int g(t)dt$$

**Fonction périodique :** Soit  $f$  une fonction  $T$ -périodique,

$$\int_0^T f(t)dt = \int_c^{c+T} f(t)dt$$

**Inégalité triangulaire :**

$$\left| \int f(t)dt \right| \leq \int |f(t)|dt$$

**Cauchy-Schwartz :**

$$\left| \int f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int f^2(t)dt \times \int g^2(t)dt}$$

**Inégalité de Holder :**

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \int f(t)g(t)dt \leq \left( \int |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

**Théorème de la moyenne :**

$$\forall x \in [a, b], m \leq f \leq M, \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M$$

**Inégalité de la moyenne :**

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \times \int_a^b |g(x)|dx$$

**Intégrale sur un ensemble négligable :** Soit  $\mu$  une mesure alors

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$$

**Théorème fondamental :**

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

**Intégration par partie (IPP) :**

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

**Changement de variable :**

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{x=u(t)}{=} \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t)dt$$

**Propositions sur l'intégrabilité :**

- $f$  monotone  $\Rightarrow f$  Riemann-intégrable
- $f$  continue  $\Rightarrow f$  Riemann-intégrable
- $f$  pp-continue et bornée  $\Rightarrow f$  Riemann-intégrable
- $f$  pp-continue  $\Rightarrow f$  Lebesgue-intégrable
- $|f| < g$ ,  $g$  Lebesgue-intégrable  $\Rightarrow f$  Lebesgue-intégrable
- $f$  Lebesgue-intégrable  $\Leftrightarrow |f|$  Lebesgue-intégrable

### 1.6.3 Convergence

**Convergence** (Riemann) :

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \Rightarrow \int f_n(t) dt \xrightarrow{\text{unif}} \int f(t) dt$$

**Théorème de convergence monotone** (Beppo-Levi) :

$$\begin{cases} (f_n) \text{ suite croissante de fonction} \\ f_n \rightarrow f, n \rightarrow \infty \end{cases} \Leftrightarrow \int f_n \rightarrow \int f, n \rightarrow \infty$$

**Théorème de convergence dominée** :

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{pp} f \\ |f_n| < g, g \in L^1 \end{cases} \Rightarrow \int f_n \rightarrow \int f \left( \text{et même : } \int |f_n - f| \rightarrow 0 \right)$$

**Inversion somme-intégrale** :

$$(f_n) \text{ suite de fonction positive} \Rightarrow \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x) dx$$

**Théorème de Fubini** :

$$f \in L^1 \Rightarrow \iint f(x, y) dx dy = \int \left( \int f(x, y) dx \right) dy$$

**Théorème de Fubini-Tonnelle** :

$$f \geq 0 \Rightarrow \iint f(x, y) dx dy = \int \left( \int f(x, y) dx \right) dy$$

**Définition** : intégrale de fonction discontinue, intégrale sur un intervalle non bornée, etc.

**Intégrales Riemann-impropre de références** :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si } \alpha < 1; \int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si } \alpha > 1; \int_0^1 \ln t dt = -1$$

**Riemann-impropre et Lebesgue** : Si  $f$  est Riemann-intégrable au sens impropre et de signe constant alors  $f$  est Lebesgue-intégrable

### 1.6.4 Intégrale de Riemann-Stieltjes

**Définition** : Si  $\alpha$  est une fonction croissante, alors elle définit une mesure. On appelle intégrale de Riemann-Stieltjes l'intégrale par rapport à cette mesure :  $\int f(x) d\alpha(x)$  et on a :

$$\alpha([a, b]) = \alpha(b^+) - \alpha(a^-)$$

$$\alpha([a, b[) = \alpha(b^-) - \alpha(a^-)$$

$$\alpha(]a, b]) = \alpha(b^-) - \alpha(a^+)$$

$$\alpha(]a, b[) = \alpha(b^+) - \alpha(a^+)$$

**Calcul** :

$$\int f(x) d\alpha(x) = \int f(x) \alpha'(x) dx$$

### 1.6.5 Fonctions définies par une intégrale

**Définition** : Soit  $f : (x, t) \rightarrow f(x, t)$ , si  $f$  est continue en  $t$  pour presque-tout  $x$  et  $|f(t, x)| \leq g(x), g \in L^1$  alors la fonction suivante est définie et est continue

$$F(t) = \int f(t, x) dx$$

**Dérivabilité** : Si  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$  existe et est continue et  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| < g(x), g \in L^1$  alors  $F$  est dérivable et

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$$

**Formule** :

$$F(t) = \int_{[u(t), v(t)]} f(x, t) dx$$
$$\frac{dF}{dt}(t) = f(t, v(t)) \frac{dv(t)}{dt} + f(t, u(t)) \frac{du(t)}{dt} + \int_{[u(t), v(t)]} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

### 1.6.6 Introduction au calcul des variations

**Problème de variation** : Trouver  $u^*$  telle que

$$u^* = \min_{u \in K} J(u) \text{ avec } J(u) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u, \dot{u}, t) dt$$

**Équation d'Euler-Lagrange** :  $u$  solution du problème de variation, alors

$$\frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, \dot{u}, t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u, \dot{u}, t) \right] = 0$$

**Intégrale première d'Euler-Lagrange** :  $\varphi(u, \dot{u}, t) = \varphi(u, \dot{u})$

$$\varphi(u, \dot{u}) = \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u, \dot{u}) \right] \dot{u} + k, k \in \mathbb{R}$$

**Condition aux limites** :

- Deux extrémités fixes :  $u(\alpha) = a$  et  $u(\beta) = b$
- Une extrémité libre :  $u(\alpha) = a$  et  $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u(\beta), \dot{u}(\beta), \beta) = 0$
- Deux extrémités libres :  $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u(\alpha), \dot{u}(\alpha), \alpha) = 0$  et  $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u(\beta), \dot{u}(\beta), \beta) = 0$

## 1.7 Séries dans $\mathbb{R}$

### 1.7.1 Généralités

**Condition nécessaire de convergence** :

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \Rightarrow u_n \rightarrow 0$$

**Espace vectoriel** : L'espace des séries convergentes est un espace vectoriel

**Critère de Cauchy** :

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$$

**Règle de Riemann** : Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$  et  $n^\alpha u_n$  majoré pour  $\alpha > 1$  alors  $\sum u_n$  converge

**Règle de d'Alembert** : Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$  et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l$  avec  $l < 1$  alors  $\sum u_n$  converge

**Séries géométrique** :

$$\sum_{n \geq 0} aq^n = a \frac{1}{1-q}$$

**Séries de Riemann** :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

**Série exponentielle** :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z, z \in \mathbb{C}$$

## 1.7.2 Séries de Taylor

**Formule générale** :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

**Formule de Taylor-Lagrange** :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}, \theta \in [0, 1]$$

**Formule de Taylor-Young** :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + h^n \epsilon(h), \epsilon(h) \longrightarrow 0, h \longrightarrow 0$$

**Séries connues** :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \cdots + \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{2p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

**Infiniment petit** :  $f$  est un infiniment petit au voisinage de  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

**Infiniment grand** :  $f$  est un infiniment grand au voisinage de  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$

**Ordre d'un infiniment petit** :  $f$  et  $g$  sont dit de même ordre si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}^*$

$f$  est d'ordre  $p$  si  $f$  et  $(x-a)^p$  sont du même ordre

**Équivalence** :

$$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

**Développements limités :**

$f$  admet un DL à l'ordre  $n$  au voisinage de  $a$  si

$$\exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \dots + \alpha_n h^n + h^n \epsilon(h), \epsilon(h) \longrightarrow 0, h \longrightarrow 0$$

$f$  admet un DL à l'ordre  $n$  au voisinage de  $+\infty$  si

$$\exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \dots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Le DL d'une fonction paire (resp. impaire) ne contient que des termes de puissances paire (resp. impaire).

**Opérations sur les DL :** Soient  $f$  et  $g$  avec 
$$\begin{cases} f(a+h) = P(h) + h^n \epsilon_1(h) \\ g(a+h) = Q(h) + h^n \epsilon_2(h) \end{cases}$$

**Combinaison :**  $f(a+h) + \lambda g(a+h) = P(h) + \lambda Q(h) + \epsilon(h)$

**Produit :**  $f g(a+h) = P Q(a+h) + h^n \epsilon(h)$  tronqué à l'ordre  $n$

**Quotient :**  $\frac{f(a+h)}{g(a+h)}$  = quotient de  $P(h)$  par  $Q(h)$  suivant les puissances croissantes

**Primitivisation :** Si  $F' = f$  avec  $f(a+h) = \sum \alpha_i h^i$  alors  $F(a+h) = \sum \alpha_i \frac{h^{i+1}}{i+1}$

**Étude locale d'une courbe :** Soit  $x_0$  tel que  $f'(x_0) = 0$

$f''(x_0) > 0$  alors la courbe est au dessus de la tangente et  $x_0$  réalise un minimum locale

$f''(x_0) < 0$  alors la courbe est en dessous de la tangente et  $x_0$  réalise un maximum locale

$f''(x_0) = 0$  alors  $x_0$  est un point d'inflexion

### 1.7.3 Séries de Fourier

**Dans la base**  $(e^{in\omega x})_{n \in \mathbb{Z}}$

**Série de Fourier :**  $(e^{in\omega x})_{n \in \mathbb{Z}}$  avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  est une base de l'espace des fonctions  $T$ -périodiques, alors pour tout  $f$ , fonction  $T$ -périodique, on a :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \text{ avec } c_n = (f|e^{in\omega \cdot}) = \frac{1}{T} \int f(x) e^{-in\omega x} dx$$

**Egalité de Parseval :** (égalité de la norme)

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

**Dans la base**  $(\cos n\omega x, \sin n\omega x)_{n \in \mathbb{N}}$

**Série de Fourier :** Soit  $f$  une fonction  $T$ -périodique, on a

$$f(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx; a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cos n\omega x dx; b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \sin n\omega x dx$$

**Egalité de Parseval :** (égalité de la norme)

$$\|f\|_2^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$$

Autres

Lien entre les coefficients : 
$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}$$

Convergence :

$$f \in L^2(0, T), f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{in\omega x}$$

$$f \in L^1(0, T), c_n(f) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$$

Théorème de Dirichlet (convergence ponctuelle) :

$$f \in C^1 \Rightarrow SF(f)(x_0) \xrightarrow{\text{unif}} f(x_0)$$

$$f \in CM^1 \Rightarrow SF(f)(x_0) \longrightarrow \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Série de Fourier d'une distribution

Définition :

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \text{ avec } c_n = \frac{1}{a} \langle T, e^{-in\omega s} \rangle$$

Convergence : La série de Fourier d'une distribution converge vers la distribution (au sens des distributions)

Convergence d'une série trigonométrique dans  $\mathcal{D}'$  :

$$\sum c_n e^{in\omega s} \text{ converge dans } \mathcal{D}' \Leftrightarrow |c_n| \leq A|n|^p \text{ (suite à croissance lente)}$$

## 1.8 Le corps $\mathbb{C}$

Définition :

$$\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$$

Partie réelle et imaginaire :

$$Re(a + ib) = a \text{ et } Im(a + ib) = b$$

Module et argument :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \arg z = \tan \frac{b}{a}$$

Écriture d'un nombre complexe :  $\forall z \in \mathbb{C}, \exists a, b, r, \theta \in \mathbb{R}$  tel que

$$z = a + ib = r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg z$$

Conjugaison : Soit  $z = a + ib$  alors  $\bar{z} = a - ib$  et

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}; \bar{\bar{z}} = z$$

$$z + \bar{z} = 2 \times Re(z); z - \bar{z} = 2i \times Im(z)$$

Calcul avec les modules :

$$z\bar{z} = |z|^2; \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; |z| = |\bar{z}|$$

Calcul avec les arguments :

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]; \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

**Formule de Moivre :**

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

**Formules d'Euler :**

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

**Théorème de D'Alembert-Gauss :** Toute équation algébrique de  $\mathbb{C}$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{C}$

**Racine  $n$ -ième :**

$$z^n = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |\alpha|^{\frac{1}{n}} \\ \arg z = \frac{\arg \alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in [0, n-1] \end{cases}$$

**Racine complexe d'une équation du second degré :**  $az^2 + bz + c = 0$

$$\delta^2 = b^2 - 4ac \text{ alors } z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

**Polynômes premiers :** Les seuls polynômes premiers de  $\mathbb{C}[X]$  sont les polynômes constants, ceux de degré 1 et ceux de degré 2 qui n'ont pas de racine réelles

**Multiplicité d'une racine :** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$

$$r \text{ de multiplicité } m \Leftrightarrow P(r) = P'(r) = \dots = P^{(n-1)}(r) = 0 \text{ et } P^{(m)}(r) \neq 0$$

**Partie entière d'une fraction rationnelle :** Soit  $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$  on peut décomposer  $F$  de façon unique tel que  $F = E + \frac{P_0}{Q}$  avec, ou  $P_0 = 0$  ou  $\deg(P_0) < \deg(Q)$

**Décomposition en élément simple dans  $\mathbb{C}(X)$  :** Soit  $F = P/Q$

Objectif : écrire  $F$  sous la forme  $F = P^* + S$  où  $P^*$  est un polynôme et  $S$  une somme d'éléments simples :

Si  $\deg(P) < \deg(Q)$  alors  $P^* = 0$

Sinon effectuer la division euclidienne

Décomposer  $Q$  en produit de facteur premier

Règles de décomposition dont les constantes  $a, b, c, d, \dots$  sont à déterminer :

$$\begin{aligned} \frac{N(x)}{(x-1)(x-2)} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \\ \frac{N(x)}{(x-1)^3(x-2)^2} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{d}{x-2} + \frac{e}{(x-2)^2} \\ \frac{N(x)}{(x-1)(x^2+1)} &= \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1} \end{aligned}$$

## 1.9 Distributions

### 1.9.1 Fonctions test ou de base : $\mathcal{D}$

**Définition :**  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite fonction test si elle est à support borné et  $\varphi \in C^\infty$

**Exemple :**  $\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

**Propriétés de  $\mathcal{D}$  :**

1.  $\mathcal{D}$  est un espace vectoriel (car  $\text{supp}(\varphi + \psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\psi)$ )
2.  $\varphi, \psi \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi\psi \in \mathcal{D}$  (car  $\text{supp}(\varphi\psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\psi)$ )
3.  $\varphi \in \mathcal{D}$  et  $f \in L^1 \Rightarrow \psi(x) = \varphi * f(x) \in \mathcal{D}$
4.  $\mathcal{D}$  ne peut pas être muni d'une norme de sorte qu'il soit complet (c-a-d où toute suite convergente est de Cauchy)

**Proposition :**  $f \in C_k^0$  peut-être approché par une fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}$  uniformément  
convergence dans  $\mathcal{D}$  :

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \text{supp } \varphi_n \subset K = [a, b], \forall n \geq 1 \\ \varphi_n^{(k)} \xrightarrow{\text{unif}} \varphi^{(k)} \end{cases}$$

**Proposition :**  $f \in L^1_{loc}$  et  $\forall \varphi \in \mathcal{D}$  on a  $\int f\varphi = 0 \Rightarrow f \stackrel{pp}{=} 0$

## 1.9.2 Distributions : $\mathcal{D}'$

**Définition** :  $T \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto T(\varphi) \stackrel{\text{notation}}{=} \langle T, \varphi \rangle$  tel que  $T$  soit

1. Linéaire :  $\langle T, \varphi + \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle T, \psi \rangle$
2. Continue :  $\varphi \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$

**Addition** :  $\langle T + S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle$

**Multiplication** :  $\langle \lambda T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$

**Convergence dans  $\mathcal{D}'$**  :

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Leftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Distribution régulière** :

$$f \in L^1_{loc}, \langle T_f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Distribution singulière** :

$$f \in L^1_{loc}, \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Peigne de Dirac** :  $\Delta_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na}$ ,  $a$  fixé

**Opérations** :

**Translation** :  $\tau_a f(x) = f(x - a), \langle T_{\tau_a f}, \varphi \rangle = \langle T_f, \tau_{-a} \varphi \rangle$

**Homothétie** :  $T_{f(a.)}, \langle T_{f(a.)}, \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T_f, \varphi(\frac{\cdot}{a}) \rangle$

**Transposition** :  $\check{f}(x) = f(-x), \langle T_{\check{f}}, \varphi \rangle = \langle T_f, \check{\varphi} \rangle$

**Produit** : On peut avoir  $T, S \in \mathcal{D}'$  sans  $TS \in \mathcal{D}'$ , en revanche,  
 $\forall f, g \in L^1_{loc}, \langle gf, \varphi \rangle = \langle f, g\varphi \rangle$

**Dérivation** :  $\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$

**Dérivation  $k$ -ième** :  $\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle$

**Dérivation d'une fonction discontinue à l'origine** :  $(T_f)' = \sigma_0 \delta + T_{f'}$

**Support d'une distribution** :  $\text{supp } T_f = \text{supp } f$

**Valeur principale de Cauchy** :

$$vp \int_{-A}^A \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^A \frac{dx}{x} \right\} = 0$$

**Distribution  $vp \frac{1}{x}$**  :

$$\langle vp \frac{1}{x}, \varphi \rangle = vp \int \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

## 1.10 Convolution

### 1.10.1 Convolution de fonction

**Définition sur  $\mathbb{R}$**  :

$$f * g(x) = \int f(x - t)g(t)dt$$

**Convolution sur  $\mathbb{R}_+$**  :

$$\begin{cases} \text{supp } f \subset \mathbb{R}_+ \\ \text{supp } g \subset \mathbb{R}_+ \end{cases} \Rightarrow f * g(x) = \int_0^x f(x - t)g(t)dt$$

**Support** :

$$\text{supp } f * g \subset \text{supp } f + \text{supp } g$$

**Propriétés** : Le produit de convolution est commutatif, distributif et associatif



**Convolution bornée :**

$$\begin{aligned} f, g \in L^1 &\Rightarrow \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \text{ et } f * g \text{ définit presque partout} \\ f, g \in L^2 &\Rightarrow \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \text{ et } f * g \text{ partout définit} \\ f \in L^1, g \in L^2 &\Rightarrow \|f * g\|_2 < \|f\|_1 \cdot \|g\|_2 \text{ et } f * g \text{ définit presque partout} \end{aligned}$$

**Valeur moyenne d'une fonction :**

$$m = \frac{1}{2h} f * 1_{[-h, h]}(x)$$

### 1.10.2 Convolution de suite

**Définition :**

$$u * v(n) = v * u(n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u(n-k)v(k), n \in \mathbb{N}$$

### 1.10.3 Convolution de distribution et algèbre dans $\mathcal{D}'_+$

**Produit tensoriel :** Pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$$

**Définition :** Soit  $T, S \in \mathcal{D}'$

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, \langle S, \tau_{-y} \varphi \rangle \rangle = \langle T \otimes S, \varphi(x+y) \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Dérivation :**

$$(T * S)' = T * S' = T' * S$$

**Existence :** Le produit  $T * S$  a un sens si les supports  $A$  et  $B$  de  $T$  et  $S$  sont tels que  $x \in A, y \in B, x + y$  ne puisse être borné que si  $x$  et  $y$  restent bornées tous les deux. Il est alors commutatif.

**Proposition :** Si l'une au moins de  $T$  et  $S$  est à support bornée alors  $T * S$  existe. L'ensemble des distributions à support bornée est noté  $\mathcal{E}'$

**Proposition :** Si  $T$  et  $S$  ont leur support limités à gauche (ou à droite) alors  $T * S$  existe (i.e.  $\exists a \in \mathbb{R}$ , tel que  $\text{supp } T \subset [a, \infty[$ )

$\mathcal{D}'_+$  : Ensemble des distributions à support dans  $\mathbb{R}_+$  est noté  $\mathcal{D}'_+$  ( $\subset \mathcal{D}$ )

$$T \in \mathcal{D}'_+ \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D} \text{ tel que } \text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}_-, \langle T, \varphi \rangle = 0$$

**Associativité :**

$$T, S \in \mathcal{D}'_+ \Rightarrow (T * S) * V = T * (S * V)$$

**Algèbre de convolution  $\mathcal{D}'_+$  :**

1. Le produit de convolution est une loi de composition interne

$$T, S \in \mathcal{D}'_+ \Rightarrow T * S \in \mathcal{D}'_+$$

2.  $\mathcal{D}'_+$  est un espace vectoriel
3.  $\delta$  élément neutre

$$T * \delta = T$$

4. Soit  $T \in \mathcal{D}'_+$ , on dit que  $S \in \mathcal{D}'_+$  est un élément inverse de  $T$  si  $T * S = \delta$  et on note  $S = t^{*-1}$

**Formule pour Heavyside :**  $Y^{*2} = xY(x)$  et pour  $n \geq 2$

$$Y^{*n} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} Y(x)$$

**Résolution d'équation différentielle à coefficient constant** : Soit  $D$  un opérateur différentiel tel que

$$D = a_n \frac{d^n}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$$

Alors pour résoudre l'équation  $DT = S$  :

1. Résoudre  $DE = \delta$
2. Solution générale :  $T = S * E$

**Inversion type** :

$$\left( \delta^{(n)} + a_1 \delta^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \delta' + a_n \delta \right)^{* -1} = Yz$$

avec  $z$  solution de

$$\begin{cases} z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = 0 \\ z(0) = z'(0) = \dots = z^{(n-2)}(0) = 0 \\ z^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

## 1.11 Transformées de Fourier

### 1.11.1 Fonctions

**Définition** :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

**Transformée conjuguée** :

$$(\overline{\mathcal{F}})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\xi x} dx$$

**Inversion** : Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  alors

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi, x - pp$$

**Propriétés sur  $\hat{f}$**  :

1.  $\hat{f}$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$
- 2.

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$$

**Propriétés** :

1.

3.

$$\begin{aligned} \widehat{(\tau_{x_0} f)} &= e^{-ix_0 \xi} \\ \widehat{(e^{i\xi_0 x} f)} &= \tau_{\xi_0} \hat{f} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)} &= \hat{f} \cdot \hat{g} \\ 2\pi \widehat{(f \cdot g)} &= \hat{f} * \hat{g} \end{aligned}$$

2.

4.

$$\begin{aligned} \widehat{(f^{(n)})} &= (i\xi)^n \hat{f} \\ \widehat{((-ix)^n f)} &= (\hat{f})^{(n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f &= \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = 2\pi f \text{ pour } x - pp \\ \widehat{\widehat{f}} &= 2\pi \check{f} \end{aligned}$$

### 1.11.2 Distributions

#### Distributions tempérées

**Décroissance rapide** ( $DR$ ) :  $f$  décroît plus vite que toute puissance de  $1/|x|$

$$f \in DR \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, x^p f(x) \longrightarrow 0, x \longrightarrow \pm\infty$$

**Proposition** :

$$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap DR \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}, x^p f(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

**Espace de fonction test** :  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tel que

1.  $f \in C^\infty$
2.  $f^{(n)} \in DR, \forall n \in \mathbb{N}$

**Propriétés de  $S$**  :

1.  $S$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel
2.  $\mathcal{D} \subset S \subset L^P$
3.  $\varphi \in S \Rightarrow \hat{\varphi} \in S$
4.  $\varphi \in S$  et  $P \in \mathcal{P}_n \Rightarrow \varphi P \in S$
5.  $f, g \in S \Rightarrow fg \in S$
6.  $\varphi \in S \Rightarrow \varphi' \in S$
7.  $f, g \in S \Rightarrow f * g \in S$
8.  $f \in S \Rightarrow x^p f^{(q)}$  bornée et sommable

**Convergence dans  $S$**  :

$$\varphi_n \xrightarrow{S} 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(p)} x^q| \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty, \forall p, q \in \mathbb{N}$$

**Propriétés de convergence** :

$$\varphi_n \xrightarrow{S} \Rightarrow \begin{cases} \varphi'_n \xrightarrow{S} 0 \\ P\varphi_n \xrightarrow{S} 0 \text{ avec } P \in \mathcal{P}_n \\ \varphi_n \xrightarrow{L^1} 0 \\ \widehat{\varphi_n} \xrightarrow{S} 0 \end{cases}$$

**Espace des distributions tempérées  $S'$**  :  $T : S \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$

1. linéaire :  $\langle T, \varphi + \mu\psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \mu \langle T, \psi \rangle$
2. continue :  $\varphi_n \xrightarrow{S} \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow 0$

**Convergence dans  $S'$**  :

$$T_n \xrightarrow{S'} T \Leftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle, \varphi \in S$$

**Fonction à croissance lente** ( $CL$ ) :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in CL \Leftrightarrow |f(x)| \leq A|x|^p, |x| \longrightarrow \infty$$

**Proposition** : Toute fonction à croissance lente définit une distribution tempérée

**Transformée de Fourier dans  $S$**

**Définition** :

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle, \forall \varphi \in S$$

**Propriétés** :

1.

$$\begin{aligned}(\widehat{T})^{(n)} &= ((-ix)^n T) \\ (\widehat{T^{(n)}}) &= (i\xi)^n \widehat{T}\end{aligned}$$

3.

$$\widehat{\widehat{T}} = 2\pi \check{T}$$

2.

$$\begin{aligned}\tau_a \widehat{T} &= (\widehat{e^{ixa} T}) \\ \widehat{(\tau_a T)} &= e^{-i\xi a} \widehat{T}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\widehat{1} &= 2\pi\delta \\ \widehat{t^n} &= \frac{1}{(-i)^n} \delta^{(n)} \\ \widehat{\delta_a(\xi)} &= e^{-ia\xi}\end{aligned}$$

## 1.12 Transformées de Laplace

### 1.12.1 Fonctions

**Définition :**

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

**Théorème :**  $\tilde{f}$  est holomorphe et

$$\frac{d^k}{ds^k} \tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(x)(-x)^k e^{-sx} dx, \forall k \in \mathbb{N}$$

**Théorème :** Si  $F$  est une fonction analytique dans le demi-plan complexe  $z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > \eta_0$ , et si, en tant que fonction de  $\eta = \operatorname{Im}(z)$ ,  $F$  est intégrable, alors elle est la transformée de Laplace d'une fonction continue telle que

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} F(z)e^{zx}dz$$

**Théorème :** Si les transformées de Laplace coïncident pour un  $\operatorname{Re}(s)$  assez grand alors  $f = g$

**Exemples :**

1.

$$\widetilde{Y(x)x^a} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

2.

$$\widetilde{Y(x)e^{ax}} = \frac{1}{s-a}$$

**Propriétés :**

1.

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = \tilde{f}(s+a)$$

5.

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_0^s \tilde{f}(p)dp$$

2.

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n \tilde{f}(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

6.

$$\mathcal{L}(f * g) = \tilde{f} \cdot \tilde{g}$$

3.

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{\tilde{f}(s)}{s}$$

7. Si  $f$  est  $T$ -périodique, alors

4.

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -\tilde{f}'(s)$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1 - e^{-sT}}$$

**Transformée inverse :**

1. Linéarité :  $\mathcal{L}^{-1}(a\tilde{f} + b\tilde{g}) = a\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}) + b\mathcal{L}^{-1}(\tilde{g}) = af + bg$ 2. Translation :  $\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}(s-a)) = e^{at}f(t)$ 3. Modulation :  $\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}\tilde{f}(s)) = \begin{cases} f(t-a), & \text{si } t > a \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

4. Changement d'échelle :  $\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}(ks)) = \frac{1}{k}f\left(\frac{1}{k}\right)$
5. Dérivée :  $\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}^{(k)}(s)) = (-1)^k t^k f(t)$
6. Intégrale :  $\mathcal{L}^{-1}\left(\int_0^\infty \tilde{f}(s)ds\right) = \frac{f(t)}{t}Y(t)$
7. Multiplication par  $s$  :  $\mathcal{L}^{-1}(sf(s)) = f'(t) + f(0)\delta$

**Théorèmes taubériens :**

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} f(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{f}(s) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{f}(s)\end{aligned}$$

### 1.12.2 Distributions

**Définition :**  $T \in \mathcal{D}'_+$

$$\mathcal{L}(T) = \tilde{T} = \langle T, e^{-st} \rangle$$

**Exemples :**

1.  $\tilde{\delta} = 1$
2.  $\tilde{\delta}_a = e^{-as}$
3.  $\tilde{\delta}' = s$
4.  $\widetilde{\delta^{(n)}} = s^n$

# Chapitre 2

## Analyse dans $\mathbb{R}^n$ (MT22)

### 2.1 Fonction de plusieurs variables $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

#### 2.1.1 Généralités

Disque ouvert de centre  $A$  et de rayon  $\rho$  :

$$B(A, \rho) = \{M \in \mathbb{R}^n, \|\overrightarrow{AM}\| < \rho\}$$

Limité :

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall M \in \mathbb{R}^n, \|\overrightarrow{M_0 M}\| < \eta \Rightarrow |f(M) - l| < \varepsilon$$

Continuité :

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$$

Condition suffisante de continuité :

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \end{cases}, \exists \varepsilon \text{ tel que } |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon(r) \text{ avec } \varepsilon \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \Rightarrow |f(M) - l| < \varepsilon$$

Condition suffisante de non-continuité : S'il existe un chemin  $C$  tel que

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \neq f(M_0) \Rightarrow f \text{ n'est pas continue}$$

#### 2.1.2 Dérivation

Différentiabilité :  $f$  différentiable si

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + Ah + Bh + \sqrt{h^2 + k^2} \varepsilon(h, k) \text{ avec } \varepsilon \longrightarrow 0$$

Condition suffisante de différentiabilité : Si  $f$  admet des dérivées partielles premières continues en  $M_0$  alors  $f$  est différentiable en  $M_0$

Théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \in C^0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Dérivation de composée de fonctions :

1.  $\Phi(t) = f(\alpha(t), \beta(t))$

$$\Phi'(t) = \alpha'(t) \frac{\partial}{\partial x} f(\alpha(t), \beta(t)) + \beta'(t) \frac{\partial}{\partial y} f(\alpha(t), \beta(t))$$

2.  $\psi(u, v) = f(a(u, v), b(u, v))$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial a}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(f(a(u, v)), b(u, v)) + \frac{\partial b}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(f(a(u, v)), b(u, v)) \\ \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial a}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(f(a(u, v)), b(u, v)) + \frac{\partial b}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(f(a(u, v)), b(u, v)) \end{aligned}$$

3.  $\zeta(x, y) = \alpha(f(x, y))$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \alpha'(f(x, y)) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \alpha'(f(x, y))\end{aligned}$$

**Différentielle :**

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

**Formule des accroissements finis :**

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \sqrt{h^2 + k^2}\varepsilon(h, k)$$

**Taylor à l'ordre 2 :**

$$\begin{aligned}f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk \right) + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)\end{aligned}$$

**Condition nécessaire d'optimalité :**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) = 0$$

Puis, repasser à Taylor :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk \right) + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)$$

### 2.1.3 Dérivées directionnelles

**Définition :**

$$Df(x, y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}$$

Remarque :

$$1. Df(x, \vec{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

$$2. \text{ Si } f \text{ est différentiable, alors } Df(x, y) = Df(x)y$$

**Théorème :**

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow Df(x^*, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$$

**Existence :** Si  $f$  est continue et  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  alors  $x^*$  existe

**Unicité :** Si  $f$  est une fonction convexe, alors  $x^*$ , s'il existe, est unique

## 2.2 Analyse vectorielle

**Produit scalaire :**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos \theta$$

**Produit vectoriel :**  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

**Produit mixte :**  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires}$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \text{volume du parallélépipède formé par } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w}$$

**Coordonnées cylindriques :**

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi[$$

**Coordonnées sphériques :**

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \cos \theta \\ y = \rho \cos \phi \sin \theta \\ z = \rho \sin \phi \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi[, \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

**Gradient :**

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}; \vec{\nabla}(fg) = f \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla} f$$

**Rotationnel :**

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}; \vec{\text{rot}} f \vec{V} = f \vec{\text{rot}} \vec{V} + \vec{\nabla} f \wedge \vec{V}$$

**Divergence :**

$$\text{div } f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}; \begin{cases} \text{div } f \vec{V} = f \text{div } \vec{V} + \vec{\nabla} f \cdot \vec{V} \\ \text{div } \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \vec{\text{rot}} \vec{V}_1 - \vec{V}_1 \vec{\text{rot}} \vec{V}_2 \end{cases}$$

**Laplacien :**

$$\Delta f = \text{div } \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

**Propositions :**

$$\begin{aligned} f &\in C^2 \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{\nabla} f = 0 \\ \vec{V} &= (P, Q, R)^T \text{ avec } P, Q, R \in C^1, \vec{\text{rot}} \vec{V} = 0 \Rightarrow \exists f \text{ tel que } \vec{\nabla} f = \vec{V} \\ \vec{V} &= (P, Q, R)^T \text{ avec } P, Q, R \in C^2, \text{div } \vec{\text{rot}} \vec{V} = 0 \\ \vec{V} &= (P, Q, R)^T \text{ avec } P, Q, R \in C^1, \text{div } \vec{V} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} \text{ tel que } \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{V} \end{aligned}$$

## 2.3 Courbes et surfaces

### 2.3.1 Surfaces

**Plan** (cartésien) : Plan passant par  $M_0$  et de normal  $\vec{N} = (a, b, c)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

**Plan** (paramétrique) : Plan passant par  $M_0$  et contenant  $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$  et  $\vec{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_0 + \beta t + \beta' t' \\ z = z_0 + \gamma t + \gamma' t' \end{cases}, (t, t') \in \mathbb{R}^2$$



**Distance d'un point à un plan** : Plan  $P$  de normal  $\vec{N}$  contenant  $M_0$

$$\delta(P, M) = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

**Surface** (cartésien) :

$$f(x, y, z) = 0 \text{ (implicite)} ; z = f(x, y) \text{ (explicite)}$$

**Surface** (paramétrique) :

$$\begin{cases} x = Q_1(t, t') \\ y = Q_2(t, t') \\ z = Q_3(t, t') \end{cases}, (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

**Surface de révolution** : ( $S$ ) est dite de révolution autour de ( $\Delta$ ) si l'intersection avec tout plan perpendiculaire à  $\Delta$  est vide ou un cercle centré sur ( $\Delta$ )

**Vecteur normal à une surface** :

Si la surface est définie par une équation cartésienne  $f(x, y, z) = 0$  alors  $\vec{\nabla} f$  est normal à  $S$

Si la surface est définie par une équation paramétrique en  $Q_1, Q_2, Q_3$  alors  $\vec{N} = \vec{\nabla}_u Q \wedge \vec{\nabla}_v Q$  est normal à  $S$

### 2.3.2 Courbes

**Droite** (cartésien) : Vu comme l'intersection de deux plans

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

**Droite** (paramétrique) : Droite de vecteur directeur  $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$  et passant par  $M_0$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

**Distance d'un point à une droite** : Droite ( $\Delta$ ) de vecteur directeur  $V$  et passant par  $M_0$

$$\delta(M, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{V}\|}{\|\vec{V}\|}$$

**Courbe** (cartésien) : Vu comme l'intersection de deux Surfaces

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

**Courbe** (paramétrique) :

$$\begin{cases} x = Q_1(t) \\ y = Q_2(t) \\ z = Q_3(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

**Vecteur tangent à une courbe** :

Si  $C$  est définie par des équations cartésiennes en  $f_1$  et  $f_2$  alors le vecteur  $\vec{v} = \vec{\nabla} f_1 \wedge \vec{\nabla} f_2$  est tangent à  $C$ . Si  $C$  est définie par un système d'équation paramétrique en  $Q_1, Q_2, Q_3$  alors le vecteur  $\vec{v} = \vec{\nabla} Q$  est tangent à  $C$ .

**Surfaces usuelles** :

TODO : sur scilab tracer

1. Ellipsoïde
2. Cylindre elliptique
3. hyperboloïde à une et deux nappes(s)
4. paraboloïde
5. cône

## 2.4 Intégrales dans $\mathbb{R}^n$

### 2.4.1 Intégrales doubles

**Théorème** : Si  $D = [a, b] \times [c, d]$

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \left( \int_a^b f(x)dx \right) \left( \int_c^d g(y)dy \right)$$

**Théorème de Fubini** : Si  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a < x < b, \Phi_1(x) < y < \Phi_2(x)\}$  alors

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left( \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx$$

**Aire d'un domaine** :

$$\iint_D dxdy = \text{Aire du domaine } D$$

**Masse d'un domaine** : Si on note  $\mu(x, y)$ , la masse surfacique du domaine alors la masse  $m$  du domaine est donnée par

$$\iint_D \mu(x, y)dxdy$$

**Centre de gravité** :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \iint_D x\mu(x, y)dxdy \\ y_G = \frac{1}{m} \iint_D y\mu(x, y)dxdy \end{cases}$$

**Matrice Jacobienne** :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

**Changement de variable** : (En coordonnées polaire :  $|J| = r$ )

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_D |J| f(\zeta(u, v), \eta(u, v)) du dv$$

**Moment d'inertie par rapport à une droite** :

$$\mathcal{J}_\Delta = \iint_D [\delta(M, \Delta)]^2 \mu(x, y)dxdy$$

**Moment d'inertie par rapport à un point** :

$$\mathcal{J}_A = \iint_D [\delta(M, A)]^2 \mu(x, y)dxdy = \iint_D [(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2] \mu(x, y)dxdy$$

### 2.4.2 Intégrales triples

**Théorème** : Si  $D = [a, b] \times [c, d] \times [e, i]$

$$\iiint_D f(x)g(y)h(z)dxdydz = \left( \int_a^b f(x)dx \right) \left( \int_c^d g(y)dy \right) \left( \int_e^i h(z)dz \right)$$

**Méthode des bâtons** : On note  $D_0$  la projection de  $V$  sur  $(xOy)$

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iint_{D_0} \left( \int_{\zeta(x, y)}^{\varphi(x, y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy$$

**Méthode des tranches :**

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \iint_{D(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

**Matrice Jacobienne :**

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

**Changement de variable :** (En sphérique :  $|J| = r^2 |\cos \varphi|$ )

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_\Lambda |J| f(\epsilon(u, v, w), \eta(u, v, w), \zeta(u, v, w)) du dv dw$$

**Masse d'un volume :**

$$\iiint_D \mu(x, y, z) dx dy dz$$

**Centre de gravité :**

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \iiint_V x \mu(x, y, z) dx dy dz \\ y_G = \frac{1}{m} \iiint_V y \mu(x, y, z) dx dy dz \\ z_G = \frac{1}{m} \iiint_V z \mu(x, y, z) dx dy dz \end{cases}$$

**Moment d'inertie par rapport à une droite :**

$$\mathcal{J}_\Delta = \iiint_V [\delta(M, \Delta)]^2 \mu(x, y, z) dx dy dz$$

**Moment d'inertie par rapport à un point :**

$$\mathcal{J}_A = \iiint_V [\delta(M, A)]^2 \mu(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V [(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2] \mu(x, y, z) dx dy dz$$

**Moment d'inertie par rapport à un plan :**

$$\mathcal{J}_P = \iiint_V [\delta(M, P)]^2 \mu(x, y, z) dx dy dz$$

**Théorème de Guldin :** Si  $S$  est un volume de révolution engendré par le domaine  $(D)$  autour de l'axe  $(Oz)$  alors :

$$V(S) = 2\pi x_G A(D)$$

### 2.4.3 Intégrales curvillignes

**Abscisse curvilligne :**

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

**Notation :**

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

**Longueur d'arc :**

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'(\theta)^2} d\theta$$

**Masse d'un fil :**

$$m = \left| \int_\Gamma \mu(s) ds \right|$$

**Circulation d'un champ de vecteur** : Soit  $C$  une courbe paramétrée d'extrémité  $A$  et  $B$  et d'équation  $\begin{cases} x(t), y(t), z(t) \end{cases}$ ,  
 $t \in [t_A, t_B]$  alors  $\forall \vec{V} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$ , on définit la circulation de  $\vec{V}$  le long de  $AB$  par

$$\mathcal{T}_{AB} = \int_{AB} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} (P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz) = \int_{t_A}^{t_B} (x'(t)P(M) + y'(t)Q(M) + z'(t)R(M))dt$$

**Circulation d'un champ de vecteur dérivant d'un potentiel scalaire** : Si  $\vec{\text{rot}} \vec{V} = 0$  alors  $\exists f$  telle que  $\vec{\nabla} f = \vec{V}$  et on a  $\mathcal{T}_{AB} = f(B) - f(A)$

**Formule de Green-Rieman** : Soit  $D \in \mathbb{R}^2$  limité par  $\Gamma$  et orienté dans le sens direct, sans point double.  $\forall P, Q$ ,

$$\int_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dxdy$$

**Aire d'un domaine avec Green-Rieman** : En prenant  $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$  et  $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$  on a  $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1$  d'où

$$A(D) = \iint_D dxdy = \int_{\Gamma} xdy = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} xdy - ydx$$

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2(\theta) d\theta \text{ (en polaire)}$$

## 2.4.4 Intégrales surfaciques

**Aire d'une surface paramétrée en  $(u, v)$  :**

$$A(S) = \iint_{\Delta} \|\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v\| dudv \text{ avec } \vec{T}_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{T}_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}, (u, v) \in \Delta$$

**Aire d'une surface explicité en  $z$  :**

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dxdy, (x, y) \in D$$

**Notation :**

$$d\sigma = \|\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v\| dudv$$

**Masse d'une surface :**

$$m = \iint_S \mu(M) d\sigma$$

**Centre de gravité :**

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \iint_S x \mu(M) d\sigma \\ y_G = \frac{1}{m} \iint_S y \mu(M) d\sigma \\ z_G = \frac{1}{m} \iint_S z \mu(M) d\sigma \end{cases}$$

**Moment d'inertie :**

$$\mathcal{J}_{\Delta} = \iint_S [\delta(M\Delta)]^2 \mu(M) d\sigma$$

**Vecteur normal à une surface (paramétrée) :**

$$\vec{n}_1 = -\vec{n}_2 = \frac{\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v\|}$$

**Vecteur normal à une surface** (explicitée en  $z$ ) :

$$\vec{n}_1 = -\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

**Orientation d'une surface** : L'orientation associée au vecteur  $\vec{n}$  est faite dans le même sens du mouvement d'un tire-bouchon qui s'enfonce dans la direction de  $\vec{n}$

**Flux d'un champ de vecteur** :

$$\Phi_S(\vec{V}) = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma$$

## 2.5 Théorèmes intégraux

### 2.5.1 Théorème de Stokes-Ampères

Soit  $S$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  et  $\Gamma$  le bord de  $S$  (courbe fermée), alors pour  $\vec{V} = (P(M), Q(M), R(M))^T$  on a

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

C'est-à-dire

$$\mathcal{T}_{\Gamma}(\vec{V}) = \Phi_S(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})$$

### 2.5.2 Théorème de Gauss-Ostrogradski

Soit  $V$  un volume de  $\mathbb{R}^3$  limité par une surface  $\Sigma$ , on a

$$\iiint_V \text{div } \vec{V} = \iint_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \Phi_{\Sigma}(\vec{V})$$

## Chapitre 3

# Algèbre linéaire (MT23)

3.1 Espace vectoriels

3.2 Applications linéaires et matrices

3.3 Déterminants et systèmes linéaires

3.4 Valeurs propres et diagonalisation

3.5 Espaces euclidiens

## Chapitre 4

# Analyse numérique (MT09)

4.1 Systèmes linéaires

4.2 Problèmes de moindres carrés

4.3 Méthodes itératives

4.4 Interpolation

4.5 Intégration numérique

4.6 Équations différentielles

4.7 Valeurs propres

## Chapitre 5

# Statistiques (SY02)



## Chapitre 6

# Optimisation (RO04)

## Chapitre 7

# Formulaires