

# Mathématiques

Henri LEFEBVRE

23 octobre 2017

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Analyse dans <math>\mathbb{R}</math> (MT90/MT91/MT12)</b>	<b>3</b>
1.1	Propriétés de $\mathbb{R}$ . . . . .	3
1.2	Suites réelles $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	3
1.3	Fonctions réelles $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (généralités) . . . . .	4
1.4	Dérivation . . . . .	5
1.5	Théorie de la mesure . . . . .	6
1.5.1	Généralités . . . . .	6
1.5.2	Exemples de mesures . . . . .	6
1.6	Intégration . . . . .	7
1.6.1	Définitions . . . . .	7
1.6.2	Propriétés . . . . .	7
1.6.3	Convergence . . . . .	9
1.6.4	Intégrale de Riemann-Stieltjes . . . . .	9
1.6.5	Fonctions définies par une intégrale . . . . .	10
1.6.6	Introduction au calcul des variations . . . . .	10
1.7	Séries dans $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.7.1	Généralités . . . . .	10
1.7.2	Séries de Taylor . . . . .	11
1.7.3	Séries de Fourier . . . . .	12
1.8	Le corps $\mathbb{C}$ . . . . .	13
1.9	Distributions . . . . .	14
1.9.1	Fonctions test ou de base : $\mathcal{D}$ . . . . .	14
1.9.2	Distributions : $\mathcal{D}'$ . . . . .	15
1.10	Convolution . . . . .	15
1.10.1	Convolution de fonction . . . . .	15
1.10.2	Convolution de suite . . . . .	16
1.10.3	Convolution de distribution et algèbre dans $\mathcal{D}'_+$ . . . . .	16
1.11	Transformées de Fourier . . . . .	17
1.11.1	Fonctions . . . . .	17
1.11.2	Distributions . . . . .	18
1.12	Transformées de Laplace . . . . .	19
1.12.1	Fonctions . . . . .	19
1.12.2	Distributions . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Analyse dans <math>\mathbb{R}^n</math> (MT22)</b>	<b>21</b>
2.1	Fonction de plusieurs variables $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	21
2.1.1	Généralités . . . . .	21
2.1.2	Dérivation . . . . .	21
2.1.3	Dérivées directionnelles . . . . .	22
2.2	Analyse vectorielle . . . . .	22
2.3	Courbes et surfaces . . . . .	23
2.3.1	Surfaces . . . . .	23
2.3.2	Courbes . . . . .	24
2.4	Intégrales dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	25
2.4.1	Intégrales doubles . . . . .	25

2.4.2	Intégrales triples . . . . .	25
2.4.3	Intégrales curvillignes . . . . .	26
2.4.4	Intégrales surfaciques . . . . .	27
2.5	Théorèmes intégraux . . . . .	28
2.5.1	Théorème de Stokes-Ampères . . . . .	28
2.5.2	Théorème de Gauss-Ostrogradski . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Algèbre linéaire (MT23)</b>	<b>29</b>
3.1	Espace vectoriels . . . . .	29
3.2	Applications linéaires et matrices . . . . .	29
3.3	Déterminants et systèmes linéaires . . . . .	29
3.4	Valeurs propres et diagonalisation . . . . .	29
3.5	Espaces euclidiens . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Analyse numérique (MT09)</b>	<b>30</b>
4.1	Systèmes linéaires . . . . .	30
4.2	Problèmes de moindres carrées . . . . .	30
4.3	Méthodes itératives . . . . .	30
4.4	Interpolation . . . . .	30
4.5	Intégration numérique . . . . .	30
4.6	Équations différentielles . . . . .	30
4.7	Valeurs propres . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Statistiques (SY02)</b>	<b>31</b>
5.1	Éléments de probabilités . . . . .	31
5.2	Échantillonnage . . . . .	31
5.3	Estimation . . . . .	31
5.4	Intervalle de confiance . . . . .	31
5.5	Estimation optimale . . . . .	31
5.6	Régression linéaire . . . . .	31
5.7	Tests d'hypothèses . . . . .	31
5.8	Tests de conformité . . . . .	31
5.9	Tests d'homogénéité . . . . .	31
5.10	Tests d'adéquation . . . . .	31
5.11	Tests d'indépendance . . . . .	31
5.12	Analyse de la variance . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Optimisation (RO03/RO04)</b>	<b>32</b>
6.1	Algorithmes de graphe . . . . .	32
6.2	Programmation linéaire . . . . .	32
6.3	Optimisation non-linéaire . . . . .	32
<b>7</b>	<b>Formulaires</b>	<b>33</b>
7.1	Équations différentielles . . . . .	33
7.2	Trigonométrie . . . . .	33

# Chapitre 1

## Analyse dans $\mathbb{R}$ (MT90/MT91/MT12)

### 1.1 Propriétés de $\mathbb{R}$

**Structure** :  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  est un corps ordonné

**Formule du binôme** :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ avec } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

**Produit scalaire** :  $\langle x, y \rangle = xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$

**Norme ( $\mathbb{R}$ ) (valeur absolue)** :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \rightarrow |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$

**Positivité** :  $|x| > 0$  et  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

**Homothétie** :  $|ax| = |a||x|$

**Inégalité triangulaire** :  $|x + y| \leq |x| + |y|$

**Convergence** :  $f(x) \rightarrow l \Leftrightarrow |f(x) - l| \rightarrow 0$

**Intervalles** :  $I$  est un intervalle si  $\forall a, b \in I, a < c < b \Rightarrow c \in I$

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \\ c \in [a, b] &\Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 1], c = \theta a + (1 - \theta)b \end{aligned}$$

**Densité de  $\mathbb{Q}$**  :

$$\forall a, b \neq \emptyset, \exists \alpha \in \mathbb{Q} \cap ]a, b[ \text{ et } \exists \beta \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap ]a, b[$$

**Ensembles bornés** : Soit  $A \subset \mathbb{R}$

**Majoration** :  $\forall x \in A, x \leq M$

**Minoration** :  $\forall x \in A, x \geq m$

**Encadrement** :  $\forall x \in A, |x| < M$

**Borne supérieure** : Plus petit des majorants (s'ils existent)

$$s = \sup A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A, x \leq s \\ \forall t < s, \exists x \in A \text{ tel que } t < x \end{array} \right.$$

**Droite numérique achevée** :  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

### 1.2 Suites réelles $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

**Définition** :  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto u_n$

**Convergence** :

$$(u_n) \rightarrow l, n \rightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

**Limite infinie :**

$$(U_n) \longrightarrow l, n \longrightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow u_n > \varepsilon)$$

**Convergences connues :**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{n!} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{k^n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln \beta)^\beta}{n^\alpha} = 0$$

**Propriétés de convergence :** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $u_n \longrightarrow l$  et  $v_n \longrightarrow l'$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Combinaison :**  $u_n + \lambda v_n \longrightarrow l + \lambda l'$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Produit :**  $u_n v_n \longrightarrow \infty$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Quotient :** Si  $l' \neq 0$ ,  $u_n / v_n \longrightarrow l / l'$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Vers zéro :** Si  $u_n \longrightarrow 0$  et  $v_n$  bornée, alors  $u_n v_n \longrightarrow 0$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Ordre :** Si  $u_n \leq v_n$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

**Suites adjacentes :**  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites adjacentes si et seulement si

$$(u_n) \text{ est croissante; } (v_n) \text{ est décroissante; } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$$

**Suite arithmétique :**

**Définition récursive :**  $u_{n+1} = u_n + r$

**Définition générale :**  $u_n = u_0 + nr$

**Somme des termes :**

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

**Suite géométrique :**

**Définition récursive :**  $u_{n+1} = q u_n$

**Définition générale :**  $u_n = q^n u_0$

**Somme des termes :**

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

**Suites récurrentes :**  $u_{n+1} = f(u_n)$

Si  $\exists l \in \mathbb{R}$  point fixe de  $f$  (i.e.  $f(l) = l$ ) et  $f$  contractante (i.e.  $f$   $k$ -lipschitzienne avec  $0 < k < 1$ ) alors  $(u_n) \longrightarrow l$

## 1.3 Fonctions réelles $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (généralités)

**Définition :**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$

**Image :**  $\forall A \subset \mathbb{R}, f(A) = \{y | \exists x \in A, y = f(x)\}$

**Image réciproque :**  $f^{-1}(B) = \{x \in D_f | f(x) \in B\}$

**Support :**  $\text{supp } \varphi = \overline{\{x | \varphi(x) \neq 0\}}$

**Correspondances :** Pour  $f : E \rightarrow F$

**Surjection :**  $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

**Injection :**  $\forall y \in F, \exists x \in E$  tel que  $y = f(x)$

**Bijection :**  $\forall y \in F, \exists ! x \in E$  tel que  $y = f(x)$  ( $f$  injective et surjective)

**Composée :**  $f \circ g(x) = f(g(x))$

**Fonction identité :**  $id : x \mapsto x$

**Bijection réciproque :** Si  $f$  bijective, alors  $\exists f^{-1}$  tel que  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$

**Convergence :**  $f(x) \longrightarrow l, x \longrightarrow a$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

**Limite à droite :**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, a < x < a + \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

**Caractérisation de la limite** (par les suites) :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \left( \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \Omega - \{a\} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = l \right)$$

**Continuité :**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**Théorème des valeurs intermédiaires** (TVI) : Soit  $f \in C^0([a, b])$  et  $y \in \mathbb{R}$

$$f(a) < y < f(b) \Rightarrow \exists x \in [a, b], f(x) = y$$

**Condition de Lipschitz :**

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

## 1.4 Dérivation

**Dérivabilité :**  $f$  est dérivable si et seulement si

$$\exists d \in \mathbb{R}, \text{ tel que } f(x + h) = f(x) + hd + |h|\epsilon(h)$$

**Taux de variation :**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

**Théorème de Rolle :** Soit  $f \in C^0([a, b])$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = 0$$

**Théorème des accroissements finis :** Soit  $f \in C^0([a, b])$

$$\exists c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Formule de Leibniz :**

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

**Opérations :**

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g', \lambda \in \mathbb{R}; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}; (f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$$

**Fonction réciproque :**

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

**Dérivées connues :**

$$(x^q)' = qx^{q-1}, q \in \mathbb{Z}; (e^x)' = e^x; (\ln|x|)' = \frac{1}{x}; (\cos x)' = -\sin x; (\sin x)' = \cos x; (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Saut d'une fonction :**

$$\sigma_m = f^{(m)}(0^+) - f^{(m)}(0^-), m \geq 0$$

## 1.5 Théorie de la mesure

### 1.5.1 Généralités

**Fonction indicatrice** (ou caractéristique) :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in /A \end{cases}$$

**$\sigma$ -algèbre** (tribu) : Une famille  $A$  de sous-ensemble de  $X$  est une tribu si :

1.  $X \in A$
2.  $A$  est stable par complémentarité
3.  $A$  est stable par union dénombrable

**Espace mesurable** : Ensemble muni d'une tribu  $(X, A)$

**Tribu borélienne** : Plus petite tribu de  $\mathbb{R}$  contenant tous les intervalles

**Mesure** : Une mesure  $\mu$  sur  $(X, A)$  est une application de  $A \rightarrow [0, \infty]$  telle que

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si  $(A_n)_{n \geq 1}$  est une suite dénombrable de  $A$  deux à deux disjointes alors :  $\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$  ( $\sigma$ -additivité)

**Espace mesuré** : Le triplet  $(X, A, \mu)$  est appelé un espace mesuré Proposition : soit  $\bar{x}$  une tribu de  $X$

1. Si  $A, B \in \bar{x}$  et  $A \subset B$  alors  $\mu(A) \leq \mu(B)$
2. Si  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ ,  $A_k \in \bar{x}$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_n A_n$  et  $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$
3. Si  $A, B \in \bar{x}$  alors  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

**Ensemble négligeable** :  $A$  est dit négligeable si  $\mu(A) = 0$

**Proposition vraie presque partout** (pp) : Une proposition est dite vraie ( $\mu$ -)presque partout sur  $X$  si elle est vrai sur  $X \setminus E$  avec  $\mu(E) = 0$

**Ensemble de mesure nulle** : Un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  est dit de mesure nulle si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une suite d'intervalles ouverts et bornés  $(I_n)$  telle que :

1.  $A \subset \bigcup_{i \geq 1} I_i$
2.  $\sum_{i \geq 1} |I_i| < \varepsilon$

**Propositions** :

1. Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle
2. Si  $A$  est de mesure nulle et  $B \subset A$ , alors  $B$  est de mesure nulle
3. Si  $A \bigcup_{n \geq 1} A_n$  avec chaque  $A_n$  de mesure nulle, alors  $A$  est de mesure nulle

**Fonction mesurable** :  $f : (X, \bar{x}) \rightarrow (\mathbb{R}, B)$  est mesurable si  $f^{-1}(B) \subset \bar{x}$

### 1.5.2 Exemples de mesures

**Mesure de Lebesgue** : Il existe une unique mesure  $\lambda$  sur  $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$  telle que  $\forall I = [a, b]$  borné,  $\lambda([a, b]) = \lambda(]a, b]) = b - a$

**Mesure de Dirac** :  $\delta_a : T \rightarrow \{0, 1\}$  avec  $T$  une tribu et  $\delta_a = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$

**Mesure de comptage** (cardinal) : Pour un ensemble dénombrable de  $\mathbb{R}$ ,  $\forall n, \mu(\{n\}) = 1$

## 1.6 Intégration

### 1.6.1 Définitions

**Fonction en escalier** : Fonctions constantes sur des intervalles

**Intégrale de Riemann** : Soit

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{I_i}$$

une fonction en escalier, on définit l'intégrale de  $f$  par

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt = \sum \alpha_i (x_{i+1} - x_i)$$

Pour une fonction quelconque, s'il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$ , deux fonctions en escalier  $f_\varepsilon$  et  $F_\varepsilon$  telle que  $f_\varepsilon \leq f \leq F_\varepsilon$  et  $I(F_\varepsilon) - I(f_\varepsilon) < \varepsilon$ , alors  $f$  est dite Riemann-intégrable et on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \sup \{I(g) | g \text{ fonction en escalier et } g \leq f\}$$

**Fonction étagée** : Fonction dont l'image est constituée d'un nombre fini de valeurs réelles

**Théorème** : Toute fonction à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  est limite de fonctions étagées

**Intégrale de Lebesgue** : Soit

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$$

une fonction étagée, on définit l'intégrale de  $f$  par rapport à la mesure  $\mu$  par

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

et pour  $E \subset X$

$$\int_E f d\mu = \int_X f 1_E d\mu$$

Pour  $f$  une fonction positive,

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu | s \text{ étagée et } s \leq f \right\}$$

Enfin pour une fonction quelconque, on définit :  $f^+ = \max(0, f)$  et  $f^- = \max(0, -f)$  de sorte que :

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

### 1.6.2 Propriétés

**Lien Riemann-Lebesgue** : Si  $f$  est Riemann-Intégrable, alors  $f$  est Lebesgue-intégrable

**Ensemble de fonctions intégrables** (au sens de Lebesgue) :

$$L^p(A) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_A |f|^p < \infty \right\}$$

**Fonctions localement intégrables** :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-intégrable sur tout intervalle borné ( $L^1 \subset L^1_{loc}$ )

**Intégration et dérivation** :

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

**Egalité d'intégrales** :

$$f \stackrel{pp}{=} g \Leftrightarrow \int f(t)dt = \int g(t)dt$$



**Linéarité :**

$$\int (f(t) + \lambda g(t))dt = \int f(t)dt + \lambda \int g(t)dt$$

**Relation de Chasles :** Qui implique aussi  $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

**Relation d'ordre :**

$$f \leq g \Leftrightarrow \int f(t)dt \leq \int g(t)dt$$

**Fonction périodique :** Soit  $f$  une fonction  $T$ -périodique,

$$\int_0^T f(t)dt = \int_c^{c+T} f(t)dt$$

**Inégalité triangulaire :**

$$\left| \int f(t)dt \right| \leq \int |f(t)|dt$$

**Cauchy-Schwartz :**

$$\left| \int f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int f^2(t)dt \times \int g^2(t)dt}$$

**Inégalité de Holder :**

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \int f(t)g(t)dt \leq \left( \int |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

**Théorème de la moyenne :**

$$\forall x \in [a, b], m \leq f \leq M, \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M$$

**Inégalité de la moyenne :**

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \times \int_a^b |g(x)|dx$$

**Intégrale sur un ensemble négligable :** Soit  $\mu$  une mesure alors

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$$

**Théorème fondamental :**

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

**Intégration par partie (IPP) :**

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

**Changement de variable :**

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{x=u(t)}{=} \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t)dt$$

**Propositions sur l'intégrabilité :**

- $f$  monotone  $\Rightarrow f$  Riemann-intégrable
- $f$  continue  $\Rightarrow f$  Riemann-intégrable
- $f$  pp-continue et bornée  $\Rightarrow f$  Riemann-intégrable
- $f$  pp-continue  $\Rightarrow f$  Lebesgue-intégrable
- $|f| < g$ ,  $g$  Lebesgue-intégrable  $\Rightarrow f$  Lebesgue-intégrable
- $f$  Lebesgue-intégrable  $\Leftrightarrow |f|$  Lebesgue-intégrable

### 1.6.3 Convergence

**Convergence** (Riemann) :

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \Rightarrow \int f_n(t) dt \xrightarrow{\text{unif}} \int f(t) dt$$

**Théorème de convergence monotone** (Beppo-Levi) :

$$\begin{cases} (f_n) \text{ suite croissante de fonction} \\ f_n \rightarrow f, n \rightarrow \infty \end{cases} \Leftrightarrow \int f_n \rightarrow \int f, n \rightarrow \infty$$

**Théorème de convergence dominée** :

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{pp} f \\ |f_n| < g, g \in L^1 \end{cases} \Rightarrow \int f_n \rightarrow \int f \left( \text{et même : } \int |f_n - f| \rightarrow 0 \right)$$

**Inversion somme-intégrale** :

$$(f_n) \text{ suite de fonction positive} \Rightarrow \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x) dx$$

**Théorème de Fubini** :

$$f \in L^1 \Rightarrow \iint f(x, y) dx dy = \int \left( \int f(x, y) dx \right) dy$$

**Théorème de Fubini-Tonnelé** :

$$f \geq 0 \Rightarrow \iint f(x, y) dx dy = \int \left( \int f(x, y) dx \right) dy$$

**Définition** : intégrale de fonction discontinue, intégrale sur un intervalle non bornée, etc.

**Intégrales Riemann-impropre de références** :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si } \alpha < 1; \int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si } \alpha > 1; \int_0^1 \ln t dt = -1$$

**Riemann-impropre et Lebesgue** : Si  $f$  est Riemann-intégrable au sens impropre et de signe constant alors  $f$  est Lebesgue-intégrable

### 1.6.4 Intégrale de Riemann-Stieltjes

**Définition** : Si  $\alpha$  est une fonction croissante, alors elle définit une mesure. On appelle intégrale de Riemann-Stieltjes l'intégrale par rapport à cette mesure :  $\int f(x) d\alpha(x)$  et on a :

$$\alpha([a, b]) = \alpha(b^+) - \alpha(a^-)$$

$$\alpha([a, b[) = \alpha(b^-) - \alpha(a^-)$$

$$\alpha(]a, b]) = \alpha(b^-) - \alpha(a^+)$$

$$\alpha(]a, b[) = \alpha(b^+) - \alpha(a^+)$$

**Calcul** :

$$\int f(x) d\alpha(x) = \int f(x) \alpha'(x) dx$$

### 1.6.5 Fonctions définies par une intégrale

**Définition** : Soit  $f : (x, t) \rightarrow f(x, t)$ , si  $f$  est continue en  $t$  pour presque-tout  $x$  et  $|f(t, x)| \leq g(x)$ ,  $g \in L^1$  alors la fonction suivante est définie et est continue

$$F(t) = \int f(t, x) dx$$

**Dérivabilité** : Si  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$  existe et est continue et  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| < g(x)$ ,  $g \in L^1$  alors  $F$  est dérivable et

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$$

**Formule** :

$$F(t) = \int_{[u(t), v(t)]} f(x, t) dx$$
$$\frac{dF}{dt}(t) = f(t, v(t)) \frac{dv(t)}{dt} + f(t, u(t)) \frac{du(t)}{dt} + \int_{[u(t), v(t)]} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

### 1.6.6 Introduction au calcul des variations

**Problème de variation** : Trouver  $u^*$  telle que

$$u^* = \min_{u \in K} J(u) \text{ avec } J(u) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u, \dot{u}, t) dt$$

**Équation d'Euler-Lagrange** :  $u$  solution du problème de variation, alors

$$\frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, \dot{u}, t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u, \dot{u}, t) \right] = 0$$

**Intégrale première d'Euler-Lagrange** :  $\varphi(u, \dot{u}, t) = \varphi(u, \dot{u})$

$$\varphi(u, \dot{u}) = \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u, \dot{u}) \right] \dot{u} + k, k \in \mathbb{R}$$

**Condition aux limites** :

- Deux extrémités fixes :  $u(\alpha) = a$  et  $u(\beta) = b$
- Une extrémité libre :  $u(\alpha) = a$  et  $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u(\beta), \dot{u}(\beta), \beta) = 0$
- Deux extrémités libres :  $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u(\alpha), \dot{u}(\alpha), \alpha) = 0$  et  $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u(\beta), \dot{u}(\beta), \beta) = 0$

## 1.7 Séries dans $\mathbb{R}$

### 1.7.1 Généralités

**Condition nécessaire de convergence** :

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \Rightarrow u_n \rightarrow 0$$

**Espace vectoriel** : L'espace des séries convergentes est un espace vectoriel

**Critère de Cauchy** :

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$$

**Règle de Riemann** : Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$  et  $n^\alpha u_n$  majoré pour  $\alpha > 1$  alors  $\sum u_n$  converge

**Règle de d'Alembert** : Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$  et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow l$  avec  $l < 1$  alors  $\sum u_n$  converge

**Séries géométrique** :

$$\sum_{n \geq 0} aq^n = a \frac{1}{1-q}$$

**Séries de Riemann** :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

**Série exponentielle** :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z, z \in \mathbb{C}$$

### 1.7.2 Séries de Taylor

**Formule générale** :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

**Formule de Taylor-Lagrange** :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}, \theta \in [0, 1]$$

**Formule de Taylor-Young** :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + h^n \epsilon(h), \epsilon(h) \rightarrow 0, h \rightarrow 0$$

**Séries connues** :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{2p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

**Infiniment petit** :  $f$  est un infiniment petit au voisinage de  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

**Infiniment grand** :  $f$  est un infiniment grand au voisinage de  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$

**Ordre d'un infiniment petit** :  $f$  et  $g$  sont dit de même ordre si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}^*$

$f$  est d'ordre  $p$  si  $f$  et  $(x-a)^p$  sont du même ordre

**Équivalence** :

$$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

**Développements limités :**

$f$  admet un DL à l'ordre  $n$  au voisinage de  $a$  si

$$\exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \dots + \alpha_n h^n + h^n \epsilon(h), \epsilon(h) \longrightarrow 0, h \longrightarrow 0$$

$f$  admet un DL à l'ordre  $n$  au voisinage de  $+\infty$  si

$$\exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \dots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Le DL d'une fonction paire (resp. impaire) ne contient que des termes de puissances paire (resp. impaire).

**Opérations sur les DL :** Soient  $f$  et  $g$  avec  $\begin{cases} f(a+h) = P(h) + h^n \epsilon_1(h) \\ g(a+h) = Q(h) + h^n \epsilon_2(h) \end{cases}$

**Combinaison :**  $f(a+h) + \lambda g(a+h) = P(h) + \lambda Q(h) + \epsilon(h)$

**Produit :**  $f g(a+h) = P Q(a+h) + h^n \epsilon(h)$  tronqué à l'ordre  $n$

**Quotient :**  $\frac{f(a+h)}{g(a+h)}$  = quotient de  $P(h)$  par  $Q(h)$  suivant les puissances croissantes

**Primitivisation :** Si  $F' = f$  avec  $f(a+h) = \sum \alpha_i h^i$  alors  $F(a+h) = \sum \alpha_i \frac{h^{i+1}}{i+1}$

**Étude locale d'une courbe :** Soit  $x_0$  tel que  $f'(x_0) = 0$

$f''(x_0) > 0$  alors la courbe est au dessus de la tangente et  $x_0$  réalise un minimum locale

$f''(x_0) < 0$  alors la courbe est en dessous de la tangente et  $x_0$  réalise un maximum locale

$f''(x_0) = 0$  alors  $x_0$  est un point d'inflexion

**1.7.3 Séries de Fourier**

**Dans la base**  $(e^{in\omega x})_{n \in \mathbb{Z}}$

**Série de Fourier :**  $(e^{in\omega x})_{n \in \mathbb{Z}}$  avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  est une base de l'espace des fonctions  $T$ -périodiques, alors pour tout  $f$ , fonction  $T$ -périodique, on a :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \text{ avec } c_n = (f|e^{in\omega \cdot}) = \frac{1}{T} \int f(x) e^{-in\omega x} dx$$

**Egalité de Parseval :** (égalité de la norme)

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

**Dans la base**  $(\cos n\omega x, \sin n\omega x)_{n \in \mathbb{N}}$

**Série de Fourier :** Soit  $f$  une fonction  $T$ -périodique, on a

$$f(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx; a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cos n\omega x dx; b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \sin n\omega x dx$$

**Egalité de Parseval :** (égalité de la norme)

$$\|f\|_2^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$$

Autres

Lien entre les coefficients : 
$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}$$

Convergence :

$$f \in L^2(0, T), f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{in\omega x}$$

$$f \in L^1(0, T), c_n(f) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$$

Théorème de Dirichlet (convergence ponctuelle) :

$$f \in C^1 \Rightarrow SF(f)(x_0) \xrightarrow{unif} f(x_0)$$

$$f \in CM^1 \Rightarrow SF(f)(x_0) \longrightarrow \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Série de Fourier d'une distribution

Définition :

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \text{ avec } c_n = \frac{1}{a} \langle T, e^{-in\omega s} \rangle$$

Convergence : La série de Fourier d'une distribution converge vers la distribution (au sens des distributions)

Convergence d'une série trigonométrique dans  $\mathcal{D}'$  :

$$\sum c_n e^{in\omega s} \text{ converge dans } \mathcal{D}' \Leftrightarrow |c_n| \leq A|n|^p \text{ (suite à croissance lente)}$$

## 1.8 Le corps $\mathbb{C}$

Définition :

$$\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$$

Partie réelle et imaginaire :

$$Re(a + ib) = a \text{ et } Im(a + ib) = b$$

Module et argument :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \arg z = \tan \frac{b}{a}$$

Écriture d'un nombre complexe :  $\forall z \in \mathbb{C}, \exists a, b, r, \theta \in \mathbb{R}$  tel que

$$z = a + ib = r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg z$$

Conjugaison : Soit  $z = a + ib$  alors  $\bar{z} = a - ib$  et

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}; \bar{\bar{z}} = z$$

$$z + \bar{z} = 2 \times Re(z); z - \bar{z} = 2i \times Im(z)$$

Calcul avec les modules :

$$z\bar{z} = |z|^2; \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; |z| = |\bar{z}|$$

Calcul avec les arguments :

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]; \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

**Formule de Moivre :**

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

**Formules d'Euler :**

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

**Théorème de D'Alembert-Gauss :** Toute équation algébrique de  $\mathbb{C}$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{C}$

**Racine  $n$ -ième :**

$$z^n = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |\alpha|^{\frac{1}{n}} \\ \arg z = \frac{\arg \alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in [0, n-1] \end{cases}$$

**Racine complexe d'une équation du second degré :**  $az^2 + bz + c = 0$

$$\delta^2 = b^2 - 4ac \text{ alors } z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

**Polynômes premiers :** Les seuls polynômes premiers de  $\mathbb{C}[X]$  sont les polynômes constants, ceux de degré 1 et ceux de degré 2 qui n'ont pas de racine réelles

**Multiplicité d'une racine :** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$

$$r \text{ de multiplicité } m \Leftrightarrow P(r) = P'(r) = \dots = P^{(n-1)}(r) = 0 \text{ et } P^{(m)}(r) \neq 0$$

**Partie entière d'une fraction rationnelle :** Soit  $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$  on peut décomposer  $F$  de façon unique tel que  $F = E + \frac{P_0}{Q}$  avec, ou  $P_0 = 0$  ou  $\deg(P_0) < \deg(Q)$

**Décomposition en élément simple dans  $\mathbb{C}(X)$  :** Soit  $F = P/Q$

Objectif : écrire  $F$  sous la forme  $F = P^* + S$  où  $P^*$  est un polynôme et  $S$  une somme d'éléments simples :

Si  $\deg(P) < \deg(Q)$  alors  $P^* = 0$

Sinon effectuer la division euclidienne

Décomposer  $Q$  en produit de facteur premier

Règles de décomposition dont les constantes  $a, b, c, d, \dots$  sont à déterminer :

$$\begin{aligned} \frac{N(x)}{(x-1)(x-2)} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \\ \frac{N(x)}{(x-1)^3(x-2)^2} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{d}{x-2} + \frac{e}{(x-2)^2} \\ \frac{N(x)}{(x-1)(x^2+1)} &= \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1} \end{aligned}$$

## 1.9 Distributions

### 1.9.1 Fonctions test ou de base : $\mathcal{D}$

**Définition :**  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite fonction test si elle est à support borné et  $\varphi \in C^\infty$

**Exemple :**  $\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

**Propriétés de  $\mathcal{D}$  :**

1.  $\mathcal{D}$  est un espace vectoriel (car  $\text{supp}(\varphi + \psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\psi)$ )
2.  $\varphi, \psi \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi\psi \in \mathcal{D}$  (car  $\text{supp}(\varphi\psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\psi)$ )
3.  $\varphi \in \mathcal{D}$  et  $f \in L^1 \Rightarrow \psi(x) = \varphi * f(x) \in \mathcal{D}$
4.  $\mathcal{D}$  ne peut pas être muni d'une norme de sorte qu'il soit complet (c-a-d où toute suite convergente est de Cauchy)

**Proposition :**  $f \in C_k^0$  peut-être approché par une fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}$  uniformément  
convergence dans  $\mathcal{D}$  :

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \text{supp } \varphi_n \subset K = [a, b], \forall n \geq 1 \\ \varphi_n^{(k)} \xrightarrow{\text{unif}} \varphi^{(k)} \end{cases}$$

**Proposition :**  $f \in L^1_{loc}$  et  $\forall \varphi \in \mathcal{D}$  on a  $\int f\varphi = 0 \Rightarrow f \stackrel{pp}{=} 0$

## 1.9.2 Distributions : $\mathcal{D}'$

**Définition** :  $T \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto T(\varphi) \stackrel{\text{notation}}{=} \langle T, \varphi \rangle$  tel que  $T$  soit

1. Linéaire :  $\langle T, \varphi + \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle T, \psi \rangle$
2. Continue :  $\varphi \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$

**Addition** :  $\langle T + S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle$

**Multiplication** :  $\langle \lambda T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$

**Convergence dans  $\mathcal{D}'$**  :

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Leftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Distribution régulière** :

$$f \in L^1_{loc}, \langle T_f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Distribution singulière** :

$$f \in L^1_{loc}, \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Peigne de Dirac** :  $\Delta_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na}$ ,  $a$  fixé

**Opérations** :

**Translation** :  $\tau_a f(x) = f(x - a), \langle T_{\tau_a f}, \varphi \rangle = \langle T_f, \tau_{-a} \varphi \rangle$

**Homothétie** :  $T_{f(a.)}, \langle T_{f(a.)}, \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T_f, \varphi(\frac{\cdot}{a}) \rangle$

**Transposition** :  $\check{f}(x) = f(-x), \langle T_{\check{f}}, \varphi \rangle = \langle T_f, \check{\varphi} \rangle$

**Produit** : On peut avoir  $T, S \in \mathcal{D}'$  sans  $TS \in \mathcal{D}'$ , en revanche,  
 $\forall f, g \in L^1_{loc}, \langle gf, \varphi \rangle = \langle f, g\varphi \rangle$

**Dérivation** :  $\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$

**Dérivation  $k$ -ième** :  $\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle$

**Dérivation d'une fonction discontinue à l'origine** :  $(T_f)' = \sigma_0 \delta + T_{f'}$

**Support d'une distribution** :  $\text{supp } T_f = \text{supp } f$

**Valeur principale de Cauchy** :

$$vp \int_{-A}^A \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^A \frac{dx}{x} \right\} = 0$$

**Distribution  $vp \frac{1}{x}$**  :

$$\langle vp \frac{1}{x}, \varphi \rangle = vp \int \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

## 1.10 Convolution

### 1.10.1 Convolution de fonction

**Définition sur  $\mathbb{R}$**  :

$$f * g(x) = \int f(x - t)g(t)dt$$

**Convolution sur  $\mathbb{R}_+$**  :

$$\begin{cases} \text{supp } f \subset \mathbb{R}_+ \\ \text{supp } g \subset \mathbb{R}_+ \end{cases} \Rightarrow f * g(x) = \int_0^x f(x - t)g(t)dt$$

**Support** :

$$\text{supp } f * g \subset \text{supp } f + \text{supp } g$$

**Propriétés** : Le produit de convolution est commutatif, distributif et associatif



**Convolution bornée :**

$$\begin{aligned} f, g \in L^1 &\Rightarrow \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \text{ et } f * g \text{ définit presque partout} \\ f, g \in L^2 &\Rightarrow \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \text{ et } f * g \text{ partout définit} \\ f \in L^1, g \in L^2 &\Rightarrow \|f * g\|_2 < \|f\|_1 \cdot \|g\|_2 \text{ et } f * g \text{ définit presque partout} \end{aligned}$$

**Valeur moyenne d'une fonction :**

$$m = \frac{1}{2h} f * 1_{[-h, h]}(x)$$

### 1.10.2 Convolution de suite

**Définition :**

$$u * v(n) = v * u(n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u(n-k)v(k), n \in \mathbb{N}$$

### 1.10.3 Convolution de distribution et algèbre dans $\mathcal{D}'_+$

**Produit tensoriel :** Pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$$

**Définition :** Soit  $T, S \in \mathcal{D}'$

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, \langle S, \tau_{-y} \varphi \rangle \rangle = \langle T \otimes S, \varphi(x+y) \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Dérivation :**

$$(T * S)' = T * S' = T' * S$$

**Existence :** Le produit  $T * S$  a un sens si les supports  $A$  et  $B$  de  $T$  et  $S$  sont tels que  $x \in A, y \in B, x + y$  ne puisse être borné que si  $x$  et  $y$  restent bornées tous les deux. Il est alors commutatif.

**Proposition :** Si l'une au moins de  $T$  et  $S$  est à support bornée alors  $T * S$  existe. L'ensemble des distributions à support bornée est noté  $\mathcal{E}'$

**Proposition :** Si  $T$  et  $S$  ont leur support limités à gauche (ou à droite) alors  $T * S$  existe (i.e.  $\exists a \in \mathbb{R}$ , tel que  $\text{supp } T \subset [a, \infty[$ )

$\mathcal{D}'_+$  : Ensemble des distributions à support dans  $\mathbb{R}_+$  est noté  $\mathcal{D}'_+$  ( $\subset \mathcal{D}$ )

$$T \in \mathcal{D}'_+ \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D} \text{ tel que } \text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}_-, \langle T, \varphi \rangle = 0$$

**Associativité :**

$$T, S \in \mathcal{D}'_+ \Rightarrow (T * S) * V = T * (S * V)$$

**Algèbre de convolution  $\mathcal{D}'_+$  :**

1. Le produit de convolution est une loi de composition interne

$$T, S \in \mathcal{D}'_+ \Rightarrow T * S \in \mathcal{D}'_+$$

2.  $\mathcal{D}'_+$  est un espace vectoriel
3.  $\delta$  élément neutre

$$T * \delta = T$$

4. Soit  $T \in \mathcal{D}'_+$ , on dit que  $S \in \mathcal{D}'_+$  est un élément inverse de  $T$  si  $T * S = \delta$  et on note  $S = t^{*-1}$

**Formule pour Heavyside :**  $Y^{*2} = xY(x)$  et pour  $n \geq 2$

$$Y^{*n} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} Y(x)$$

**Résolution d'équation différentielle à coefficient constant** : Soit  $D$  un opérateur différentiel tel que

$$D = a_n \frac{d^n}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$$

Alors pour résoudre l'équation  $DT = S$  :

1. Résoudre  $DE = \delta$
2. Solution générale :  $T = S * E$

**Inversion type** :

$$\left( \delta^{(n)} + a_1 \delta^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \delta' + a_n \delta \right)^{* - 1} = Yz$$

avec  $z$  solution de

$$\begin{cases} z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} z' + a_n z = 0 \\ z(0) = z'(0) = \cdots = z^{(n-2)}(0) = 0 \\ z^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

## 1.11 Transformées de Fourier

### 1.11.1 Fonctions

**Définition** :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

**Transformée conjuguée** :

$$(\overline{\mathcal{F}})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\xi x} dx$$

**Inversion** : Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  alors

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi, x - pp$$

**Propriétés sur  $\hat{f}$**  :

1.  $\hat{f}$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$
- 2.

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$$

**Propriétés** :

1.

3.

$$\begin{aligned} \widehat{(\tau_{x_0} f)} &= e^{-ix_0 \xi} \\ \widehat{(e^{i\xi_0 x} f)} &= \tau_{\xi_0} \hat{f} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)} &= \hat{f} \cdot \hat{g} \\ 2\pi \widehat{(f \cdot g)} &= \hat{f} * \hat{g} \end{aligned}$$

2.

4.

$$\begin{aligned} \widehat{(f^{(n)})} &= (i\xi)^n \hat{f} \\ \widehat{((-ix)^n f)} &= (\hat{f})^{(n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f &= \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = 2\pi f \text{ pour } x - pp \\ \widehat{\widehat{f}} &= 2\pi \check{f} \end{aligned}$$

### 1.11.2 Distributions

#### Distributions tempérées

**Décroissance rapide** ( $DR$ ) :  $f$  décroît plus vite que toute puissance de  $1/|x|$

$$f \in DR \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, x^p f(x) \longrightarrow 0, x \longrightarrow \pm\infty$$

**Proposition** :

$$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap DR \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}, x^p f(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

**Espace de fonction test** :  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tel que

1.  $f \in C^\infty$
2.  $f^{(n)} \in DR, \forall n \in \mathbb{N}$

**Propriétés de  $S$**  :

1.  $S$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel
2.  $\mathcal{D} \subset S \subset L^P$
3.  $\varphi \in S \Rightarrow \hat{\varphi} \in S$
4.  $\varphi \in S$  et  $P \in \mathcal{P}_n \Rightarrow \varphi P \in S$
5.  $f, g \in S \Rightarrow fg \in S$
6.  $\varphi \in S \Rightarrow \varphi' \in S$
7.  $f, g \in S \Rightarrow f * g \in S$
8.  $f \in S \Rightarrow x^p f^{(q)}$  bornée et sommable

**Convergence dans  $S$**  :

$$\varphi_n \xrightarrow{S} 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(p)} x^q| \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty, \forall p, q \in \mathbb{N}$$

**Propriétés de convergence** :

$$\varphi_n \xrightarrow{S} \Rightarrow \begin{cases} \varphi'_n \xrightarrow{S} 0 \\ P\varphi_n \xrightarrow{S} 0 \text{ avec } P \in \mathcal{P}_n \\ \varphi_n \xrightarrow{L^1} 0 \\ \widehat{\varphi_n} \xrightarrow{S} 0 \end{cases}$$

**Espace des distributions tempérées  $S'$**  :  $T : S \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$

1. linéaire :  $\langle T, \varphi + \mu\psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \mu \langle T, \psi \rangle$
2. continue :  $\varphi_n \xrightarrow{S} \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow 0$

**Convergence dans  $S'$**  :

$$T_n \xrightarrow{S'} T \Leftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle, \varphi \in S$$

**Fonction à croissance lente** ( $CL$ ) :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in CL \Leftrightarrow |f(x)| \leq A|x|^p, |x| \longrightarrow \infty$$

**Proposition** : Toute fonction à croissance lente définit une distribution tempérée

**Transformée de Fourier dans  $S$**

**Définition** :

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle, \forall \varphi \in S$$

**Propriétés** :

1.

$$\begin{aligned}(\widehat{T})^{(n)} &= ((-ix)^n T) \\ (\widehat{T^{(n)}}) &= (i\xi)^n \widehat{T}\end{aligned}$$

3.

$$\widehat{\widehat{T}} = 2\pi \check{T}$$

2.

$$\begin{aligned}\tau_a \widehat{T} &= (\widehat{e^{ixa} T}) \\ \widehat{(\tau_a T)} &= e^{-i\xi a} \widehat{T}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\widehat{1} &= 2\pi\delta \\ \widehat{t^n} &= \frac{1}{(-i)^n} \delta^{(n)} \\ \widehat{\delta_a}(\xi) &= e^{-ia\xi}\end{aligned}$$

## 1.12 Transformées de Laplace

### 1.12.1 Fonctions

**Définition :**

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

**Théorème :**  $\tilde{f}$  est holomorphe et

$$\frac{d^k}{ds^k} \tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(x)(-x)^k e^{-sx} dx, \forall k \in \mathbb{N}$$

**Théorème :** Si  $F$  est une fonction analytique dans le demi-plan complexe  $z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > \eta_0$ , et si, en tant que fonction de  $\eta = \operatorname{Im}(z)$ ,  $F$  est intégrable, alors elle est la transformée de Laplace d'une fonction continue telle que

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} F(z)e^{zx} dz$$

**Théorème :** Si les transformées de Laplace coïncident pour un  $\operatorname{Re}(s)$  assez grand alors  $f = g$

**Exemples :**

1.

$$\widetilde{Y(x)x^a} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

2.

$$\widetilde{Y(x)e^{ax}} = \frac{1}{s-a}$$

**Propriétés :**

1.

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = \tilde{f}(s+a)$$

5.

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_0^s \tilde{f}(p) dp$$

2.

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n \tilde{f}(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

6.

$$\mathcal{L}(f * g) = \tilde{f} \cdot \tilde{g}$$

3.

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u) du\right) = \frac{\tilde{f}(s)}{s}$$

7. Si  $f$  est  $T$ -périodique, alors

4.

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -\tilde{f}'(s)$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st} dt}{1 - e^{-sT}}$$

**Transformée inverse :**

1. Linéarité :  $\mathcal{L}^{-1}(a\tilde{f} + b\tilde{g}) = a\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}) + b\mathcal{L}^{-1}(\tilde{g}) = af + bg$ 2. Translation :  $\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}(s-a)) = e^{at}f(t)$ 3. Modulation :  $\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}\tilde{f}(s)) = \begin{cases} f(t-a), & \text{si } t > a \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

4. Changement d'échelle :  $\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}(ks)) = \frac{1}{k}f\left(\frac{1}{k}\right)$
5. Dérivée :  $\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}^{(k)}(s)) = (-1)^k t^k f(t)$
6. Intégrale :  $\mathcal{L}^{-1}\left(\int_0^\infty \tilde{f}(s)ds\right) = \frac{f(t)}{t}Y(t)$
7. Multiplication par  $s$  :  $\mathcal{L}^{-1}(sf(s)) = f'(t) + f(0)\delta$

**Théorèmes taubériens :**

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{f}(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{f}(s)$$

### 1.12.2 Distributions

**Définition :**  $T \in \mathcal{D}'_+$

$$\mathcal{L}(T) = \tilde{T} = \langle T, e^{-st} \rangle$$

**Exemples :**

$$1. \quad \tilde{\delta} = 1$$

$$2. \quad \tilde{\delta}_a = e^{-as}$$

$$3. \quad \tilde{\delta}' = s$$

$$4. \quad \widetilde{\delta^{(n)}} = s^n$$

# Chapitre 2

## Analyse dans $\mathbb{R}^n$ (MT22)

### 2.1 Fonction de plusieurs variables $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

#### 2.1.1 Généralités

Disque ouvert de centre  $A$  et de rayon  $\rho$  :

$$B(A, \rho) = \{M \in \mathbb{R}^n, \|\overrightarrow{AM}\| < \rho\}$$

Limité :

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall M \in \mathbb{R}^n, \|\overrightarrow{M_0 M}\| < \eta \Rightarrow |f(M) - l| < \varepsilon$$

Continuité :

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$$

Condition suffisante de continuité :

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \end{cases}, \exists \varepsilon \text{ tel que } |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon(r) \text{ avec } \varepsilon \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \Rightarrow |f(M) - l| < \varepsilon$$

Condition suffisante de non-continuité : S'il existe un chemin  $C$  tel que

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \neq f(M_0) \Rightarrow f \text{ n'est pas continue}$$

#### 2.1.2 Dérivation

Différentiabilité :  $f$  différentiable si

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + Ah + Bh + \sqrt{h^2 + k^2} \varepsilon(h, k) \text{ avec } \varepsilon \longrightarrow 0$$

Condition suffisante de différentiabilité : Si  $f$  admet des dérivées partielles premières continues en  $M_0$  alors  $f$  est différentiable en  $M_0$

Théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \in C^0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Dérivation de composée de fonctions :

1.  $\Phi(t) = f(\alpha(t), \beta(t))$

$$\Phi'(t) = \alpha'(t) \frac{\partial}{\partial x} f(\alpha(t), \beta(t)) + \beta'(t) \frac{\partial}{\partial y} f(\alpha(t), \beta(t))$$

2.  $\psi(u, v) = f(a(u, v), b(u, v))$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial a}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(f(a(u, v)), b(u, v)) + \frac{\partial b}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(f(a(u, v)), b(u, v)) \\ \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial a}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(f(a(u, v)), b(u, v)) + \frac{\partial b}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(f(a(u, v)), b(u, v)) \end{aligned}$$

3.  $\zeta(x, y) = \alpha(f(x, y))$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \alpha'(f(x, y)) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \alpha'(f(x, y))\end{aligned}$$

**Différentielle :**

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

**Formule des accroissements finis :**

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \sqrt{h^2 + k^2}\varepsilon(h, k)$$

**Taylor à l'ordre 2 :**

$$\begin{aligned}f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk \right) + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)\end{aligned}$$

**Condition nécessaire d'optimalité :**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) = 0$$

Puis, repasser à Taylor :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk \right) + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)$$

### 2.1.3 Dérivées directionnelles

**Définition :**

$$Df(x, y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}$$

Remarque :

$$1. Df(x, \vec{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

$$2. \text{ Si } f \text{ est différentiable, alors } Df(x, y) = Df(x)y$$

**Théorème :**

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow Df(x^*, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$$

**Existence :** Si  $f$  est continue et  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  alors  $x^*$  existe

**Unicité :** Si  $f$  est une fonction convexe, alors  $x^*$ , s'il existe, est unique

## 2.2 Analyse vectorielle

**Produit scalaire :**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos \theta$$

**Produit vectoriel :**  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

**Produit mixte :**  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires}$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \text{volume du parallélépipède formé par } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w}$$

**Coordonnées cylindriques :**

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi[$$

**Coordonnées sphériques :**

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \cos \theta \\ y = \rho \cos \phi \sin \theta \\ z = \rho \sin \phi \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi[, \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

**Gradient :**

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}; \vec{\nabla}(fg) = f \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla} f$$

**Rotationnel :**

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}; \vec{\text{rot}} f \vec{V} = f \vec{\text{rot}} \vec{V} + \vec{\nabla} f \wedge \vec{V}$$

**Divergence :**

$$\text{div } f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}; \begin{cases} \text{div } f \vec{V} = f \text{div } \vec{V} + \vec{\nabla} f \cdot \vec{V} \\ \text{div } \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \vec{\text{rot}} \vec{V}_1 - \vec{V}_1 \vec{\text{rot}} \vec{V}_2 \end{cases}$$

**Laplacien :**

$$\Delta f = \text{div } \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

**Propositions :**

$$\begin{aligned} f &\in C^2 \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{\nabla} f = 0 \\ \vec{V} &= (P, Q, R)^T \text{ avec } P, Q, R \in C^1, \vec{\text{rot}} \vec{V} = 0 \Rightarrow \exists f \text{ tel que } \vec{\nabla} f = \vec{V} \\ \vec{V} &= (P, Q, R)^T \text{ avec } P, Q, R \in C^2, \text{div } \vec{\text{rot}} \vec{V} = 0 \\ \vec{V} &= (P, Q, R)^T \text{ avec } P, Q, R \in C^1, \text{div } \vec{V} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} \text{ tel que } \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{V} \end{aligned}$$

## 2.3 Courbes et surfaces

### 2.3.1 Surfaces

**Plan** (cartésien) : Plan passant par  $M_0$  et de normal  $\vec{N} = (a, b, c)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

**Plan** (paramétrique) : Plan passant par  $M_0$  et contenant  $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$  et  $\vec{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_0 + \beta t + \beta' t' \\ z = z_0 + \gamma t + \gamma' t' \end{cases}, (t, t') \in \mathbb{R}^2$$



**Distance d'un point à un plan** : Plan  $P$  de normal  $\vec{N}$  contenant  $M_0$

$$\delta(P, M) = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

**Surface** (cartésien) :

$$f(x, y, z) = 0 \text{ (implicite)} ; z = f(x, y) \text{ (explicite)}$$

**Surface** (paramétrique) :

$$\begin{cases} x = Q_1(t, t') \\ y = Q_2(t, t') \\ z = Q_3(t, t') \end{cases}, (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

**Surface de révolution** : ( $S$ ) est dite de révolution autour de ( $\Delta$ ) si l'intersection avec tout plan perpendiculaire à  $\Delta$  est vide ou un cercle centré sur ( $\Delta$ )

**Vecteur normal à une surface** :

Si la surface est définie par une équation cartésienne  $f(x, y, z) = 0$  alors  $\vec{\nabla} f$  est normal à  $S$

Si la surface est définie par une équation paramétrique en  $Q_1, Q_2, Q_3$  alors  $\vec{N} = \vec{\nabla}_u Q \wedge \vec{\nabla}_v Q$  est normal à  $S$

### 2.3.2 Courbes

**Droite** (cartésien) : Vu comme l'intersection de deux plans

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

**Droite** (paramétrique) : Droite de vecteur directeur  $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$  et passant par  $M_0$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

**Distance d'un point à une droite** : Droite ( $\Delta$ ) de vecteur directeur  $V$  et passant par  $M_0$

$$\delta(M, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{V}\|}{\|\vec{V}\|}$$

**Courbe** (cartésien) : Vu comme l'intersection de deux Surfaces

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

**Courbe** (paramétrique) :

$$\begin{cases} x = Q_1(t) \\ y = Q_2(t) \\ z = Q_3(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

**Vecteur tangent à une courbe** :

Si  $C$  est définie par des équations cartésiennes en  $f_1$  et  $f_2$  alors le vecteur  $\vec{v} = \vec{\nabla} f_1 \wedge \vec{\nabla} f_2$  est tangent à  $C$ . Si  $C$  est définie par un système d'équation paramétrique en  $Q_1, Q_2, Q_3$  alors le vecteur  $\vec{v} = \vec{\nabla} Q$  est tangent à  $C$ .

**Surfaces usuelles** :

TODO : sur scilab tracer

1. Ellipsoïde
2. Cylindre elliptique
3. hyperboloïde à une et deux nappes(s)
4. paraboloïde
5. cône

## 2.4 Intégrales dans $\mathbb{R}^n$

### 2.4.1 Intégrales doubles

**Théorème** : Si  $D = [a, b] \times [c, d]$

$$\iint_D f(x)g(y)dx dy = \left( \int_a^b f(x)dx \right) \left( \int_c^d g(y)dy \right)$$

**Théorème de Fubini** : Si  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a < x < b, \Phi_1(x) < y < \Phi_2(x)\}$  alors

$$\iint_D f(x, y)dx dy = \int_a^b \left( \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx$$

**Aire d'un domaine** :

$$\iint_D dx dy = \text{Aire du domaine } D$$

**Masse d'un domaine** : Si on note  $\mu(x, y)$ , la masse surfacique du domaine alors la masse  $m$  du domaine est donnée par

$$\iint_D \mu(x, y)dx dy$$

**Centre de gravité** :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \iint_D x \mu(x, y)dx dy \\ y_G = \frac{1}{m} \iint_D y \mu(x, y)dx dy \end{cases}$$

**Matrice Jacobienne** :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

**Changement de variable** : (En coordonnées polaire :  $|J| = r$ )

$$\iint_D f(x, y)dx dy = \iint_D |J| f(\zeta(u, v), \eta(u, v)) du dv$$

**Moment d'inertie par rapport à une droite** :

$$\mathcal{J}_\Delta = \iint_D [\delta(M, \Delta)]^2 \mu(x, y)dx dy$$

**Moment d'inertie par rapport à un point** :

$$\mathcal{J}_A = \iint_D [\delta(M, A)]^2 \mu(x, y)dx dy = \iint_D [(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2] \mu(x, y)dx dy$$

### 2.4.2 Intégrales triples

**Théorème** : Si  $D = [a, b] \times [c, d] \times [e, i]$

$$\iiint_D f(x)g(y)h(z)dx dy dz = \left( \int_a^b f(x)dx \right) \left( \int_c^d g(y)dy \right) \left( \int_e^i h(z)dz \right)$$

**Méthode des bâtons** : On note  $D_0$  la projection de  $V$  sur  $(xOy)$

$$\iiint_V f(x, y, z)dx dy dz = \iint_{D_0} \left( \int_{\zeta(x, y)}^{\varphi(x, y)} f(x, y, z)dz \right) dx dy$$

**Méthode des tranches :**

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \iint_{D(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

**Matrice Jacobienne :**

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

**Changement de variable :** (En sphérique :  $|J| = r^2 |\cos \varphi|$ )

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_\Lambda |J| f(\epsilon(u, v, w), \eta(u, v, w), \zeta(u, v, w)) du dv dw$$

**Masse d'un volume :**

$$\iiint_D \mu(x, y, z) dx dy dz$$

**Centre de gravité :**

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \iiint_V x \mu(x, y, z) dx dy dz \\ y_G = \frac{1}{m} \iiint_V y \mu(x, y, z) dx dy dz \\ z_G = \frac{1}{m} \iiint_V z \mu(x, y, z) dx dy dz \end{cases}$$

**Moment d'inertie par rapport à une droite :**

$$\mathcal{J}_\Delta = \iiint_V [\delta(M, \Delta)]^2 \mu(x, y, z) dx dy dz$$

**Moment d'inertie par rapport à un point :**

$$\mathcal{J}_A = \iiint_V [\delta(M, A)]^2 \mu(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V [(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2] \mu(x, y, z) dx dy dz$$

**Moment d'inertie par rapport à un plan :**

$$\mathcal{J}_P = \iiint_V [\delta(M, P)]^2 \mu(x, y, z) dx dy dz$$

**Théorème de Guldin :** Si  $S$  est un volume de révolution engendré par le domaine  $(D)$  autour de l'axe  $(Oz)$  alors :

$$V(S) = 2\pi x_G A(D)$$

### 2.4.3 Intégrales curvillignes

**Abscisse curvilligne :**

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

**Notation :**

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

**Longueur d'arc :**

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'(\theta)^2} d\theta$$

**Masse d'un fil :**

$$m = \left| \int_\Gamma \mu(s) ds \right|$$

**Circulation d'un champ de vecteur** : Soit  $C$  une courbe paramétrée d'extrémité  $A$  et  $B$  et d'équation  $\begin{cases} x(t), y(t), z(t) \end{cases}$ ,  
 $t \in [t_A, t_B]$  alors  $\forall \vec{V} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$ , on définit la circulation de  $\vec{V}$  le long de  $AB$  par

$$\mathcal{T}_{AB} = \int_{AB} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} (P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz) = \int_{t_A}^{t_B} (x'(t)P(M) + y'(t)Q(M) + z'(t)R(M))dt$$

**Circulation d'un champ de vecteur dérivant d'un potentiel scalaire** : Si  $\vec{\text{rot}} \vec{V} = 0$  alors  $\exists f$  telle que  $\vec{\nabla} f = \vec{V}$  et on a  $\mathcal{T}_{AB} = f(B) - f(A)$

**Formule de Green-Rieman** : Soit  $D \in \mathbb{R}^2$  limité par  $\Gamma$  et orienté dans le sens direct, sans point double.  $\forall P, Q$ ,

$$\int_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dxdy$$

**Aire d'un domaine avec Green-Rieman** : En prenant  $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$  et  $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$  on a  $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1$  d'où

$$A(D) = \iint_D dxdy = \int_{\Gamma} xdy = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} xdy - ydx$$

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2(\theta) d\theta \text{ (en polaire)}$$

## 2.4.4 Intégrales surfaciques

**Aire d'une surface paramétrée en  $(u, v)$  :**

$$A(S) = \iint_{\Delta} \|\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v\| dudv \text{ avec } \vec{T}_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{T}_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}, (u, v) \in \Delta$$

**Aire d'une surface explicité en  $z$  :**

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dxdy, (x, y) \in D$$

**Notation :**

$$d\sigma = \|\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v\| dudv$$

**Masse d'une surface :**

$$m = \iint_S \mu(M) d\sigma$$

**Centre de gravité :**

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \iint_S x \mu(M) d\sigma \\ y_G = \frac{1}{m} \iint_S y \mu(M) d\sigma \\ z_G = \frac{1}{m} \iint_S z \mu(M) d\sigma \end{cases}$$

**Moment d'inertie :**

$$\mathcal{J}_{\Delta} = \iint_S [\delta(M\Delta)]^2 \mu(M) d\sigma$$

**Vecteur normal à une surface (paramétrée) :**

$$\vec{n}_1 = -\vec{n}_2 = \frac{\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v\|}$$

**Vecteur normal à une surface** (explicitée en  $z$ ) :

$$\vec{n}_1 = -\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

**Orientation d'une surface** : L'orientation associée au vecteur  $\vec{n}$  est faite dans le même sens du mouvement d'un tire-bouchon qui s'enfonce dans la direction de  $\vec{n}$

**Flux d'un champ de vecteur** :

$$\Phi_S(\vec{V}) = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma$$

## 2.5 Théorèmes intégraux

### 2.5.1 Théorème de Stokes-Ampères

Soit  $S$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  et  $\Gamma$  le bord de  $S$  (courbe fermée), alors pour  $\vec{V} = (P(M), Q(M), R(M))^T$  on a

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

C'est-à-dire

$$\mathcal{T}_{\Gamma}(\vec{V}) = \Phi_S(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})$$

### 2.5.2 Théorème de Gauss-Ostrogradski

Soit  $V$  un volume de  $\mathbb{R}^3$  limité par une surface  $\Sigma$ , on a

$$\iiint_V \text{div } \vec{V} = \iint_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \Phi_{\Sigma}(\vec{V})$$

## Chapitre 3

# Algèbre linéaire (MT23)

- 3.1 Espace vectoriels
- 3.2 Applications linéaires et matrices
- 3.3 Déterminants et systèmes linéaires
- 3.4 Valeurs propres et diagonalisation
- 3.5 Espaces euclidiens

## Chapitre 4

# Analyse numérique (MT09)

4.1 Systèmes linéaires

4.2 Problèmes de moindres carrés

4.3 Méthodes itératives

4.4 Interpolation

4.5 Intégration numérique

4.6 Équations différentielles

4.7 Valeurs propres

# Chapitre 5

## Statistiques (SY02)

5.1 Éléments de probabilités

5.2 Échantillonnage

5.3 Estimation

5.4 Intervalle de confiance

5.5 Estimation optimale

5.6 Régression linéaire

5.7 Tests d'hypothèses

5.8 Tests de conformité

5.9 Tests d'homogénéité

5.10 Tests d'adéquation

5.11 Tests d'indépendance

5.12 Analyse de la variance



## Chapitre 6

# Optimisation (RO03/RO04)

6.1 Algorithmes de graphe

6.2 Programmation linéaire

6.3 Optimisation non-linéaire

## Chapitre 7

# Formulaires

7.1 Équations différentielles

7.2 Trigonométrie