

# Mathématiques

Henri LEFEBVRE

7 mars 2018

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Analyse dans <math>\mathbb{R}</math> (MT90/MT91/MT12)</b>	<b>4</b>
1.1	Propriétés de $\mathbb{R}$	4
1.2	Suites réelles $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$	4
1.3	Fonctions réelles $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (généralités)	5
1.4	Dérivation	6
1.5	Théorie de la mesure	7
1.5.1	Généralités	7
1.5.2	Exemples de mesures	7
1.6	Intégration	8
1.6.1	Définitions	8
1.6.2	Propriétés	8
1.6.3	Convergence	10
1.6.4	Intégrale de Riemann-Stieltjes	10
1.6.5	Fonctions définies par une intégrale	11
1.6.6	Introduction au calcul des variations	11
1.7	Séries dans $\mathbb{R}$	11
1.7.1	Généralités	11
1.7.2	Séries de Taylor	12
1.7.3	Séries de Fourier	13
1.8	Le corps $\mathbb{C}$	14
1.9	Distributions	15
1.9.1	Fonctions test ou de base : $\mathcal{D}$	15
1.9.2	Distributions : $\mathcal{D}'$	16
1.10	Convolution	16
1.10.1	Convolution de fonction	16
1.10.2	Convolution de suite	17
1.10.3	Convolution de distribution et algèbre dans $\mathcal{D}'_+$	17
1.11	Transformées de Fourier	18
1.11.1	Fonctions	18
1.11.2	Distributions	19
1.12	Transformées de Laplace	20
1.12.1	Fonctions	20
1.12.2	Distributions	21
<b>2</b>	<b>Analyse dans <math>\mathbb{R}^n</math> (MT22)</b>	<b>22</b>
2.1	Fonction de plusieurs variables $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	22
2.1.1	Généralités	22
2.1.2	Dérivation	22
2.1.3	Dérivées directionnelles	23
2.2	Analyse vectorielle	23
2.3	Courbes et surfaces	24
2.3.1	Surfaces	24
2.3.2	Courbes	25
2.4	Intégrales dans $\mathbb{R}^n$	26
2.4.1	Intégrales doubles	26

2.4.2	Intégrales triples . . . . .	26
2.4.3	Intégrales curvillignes . . . . .	27
2.4.4	Intégrales surfaciques . . . . .	28
2.5	Théorèmes intégraux . . . . .	29
2.5.1	Théorème de Stokes-Ampères . . . . .	29
2.5.2	Théorème de Gauss-Ostrogradski . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Algèbre linéaire (MT23)</b>	<b>30</b>
3.1	Espace vectoriels . . . . .	30
3.2	Applications linéaires et matrices . . . . .	31
3.2.1	Applications linéaires . . . . .	31
3.2.2	Matrices . . . . .	32
3.3	Déterminants et systèmes linéaires . . . . .	34
3.3.1	Déterminants . . . . .	34
3.3.2	Systèmes linéaires $Ax = b$ . . . . .	35
3.4	Valeurs propres et diagonalisation . . . . .	35
3.4.1	Valeurs propres . . . . .	35
3.5	Espaces euclidiens . . . . .	37
3.5.1	Généralités . . . . .	37
3.5.2	Matrices orthogonales . . . . .	38
3.5.3	Matrices symétriques . . . . .	38
3.5.4	Formes quadratiques . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Analyse numérique (MT09)</b>	<b>39</b>
4.1	Systèmes linéaires . . . . .	39
4.1.1	Algorithme de Gauss . . . . .	39
4.1.2	Factorisation de matrices . . . . .	39
4.2	Problèmes de moindres carrées . . . . .	40
4.3	Méthodes itératives . . . . .	40
4.3.1	Définitions . . . . .	40
4.3.2	Méthodes de Newton (équation et systèmes non-linéaires) . . . . .	40
4.3.3	Résolution de systèmes linéaires (Jacobi et Gauss-Seidel) . . . . .	41
4.4	Interpolation . . . . .	42
4.5	Intégration numérique . . . . .	43
4.6	Équations différentielles . . . . .	43
4.6.1	Schémas numériques . . . . .	43
4.6.2	Propriétés . . . . .	44
4.7	Valeurs propres . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Statistiques (SY02)</b>	<b>45</b>
5.1	Éléments de probabilités . . . . .	45
5.2	Échantillonnage . . . . .	45
5.3	Estimation . . . . .	45
5.4	Intervalle de confiance . . . . .	45
5.5	Estimation optimale . . . . .	45
5.6	Régression linéaire . . . . .	45
5.7	Tests d'hypothèses . . . . .	45
5.8	Tests de conformité . . . . .	45
5.9	Tests d'homogénéité . . . . .	45
5.10	Tests d'adéquation . . . . .	45
5.11	Tests d'indépendance . . . . .	45
5.12	Analyse de la variance . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Optimisation (RO03/RO04)</b>	<b>46</b>
6.1	Algorithmes de graphe . . . . .	46
6.2	Programmation linéaire . . . . .	46
6.3	Optimisation non-linéaire . . . . .	46

<b>7</b>	<b>Formulaires</b>	<b>47</b>
7.1	Équations différentielles . . . . .	47
7.2	Trigonométrie . . . . .	47

# Chapitre 1

## Analyse dans $\mathbb{R}$ (MT90/MT91/MT12)

### 1.1 Propriétés de $\mathbb{R}$

**Structure** :  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  est un corps ordonné

**Formule du binôme** :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ avec } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

**Produit scalaire** :  $\langle x, y \rangle = xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$

**Norme ( $\mathbb{R}$ )** (valeur absolue) :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \rightarrow |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$

**Positivité** :  $|x| > 0$  et  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

**Homothétie** :  $|ax| = |a||x|$

**Inégalité triangulaire** :  $|x + y| \leq |x| + |y|$

**Convergence** :  $f(x) \rightarrow l \Leftrightarrow |f(x) - l| \rightarrow 0$

**Intervalles** :  $I$  est un intervalle si  $\forall a, b \in I, a < c < b \Rightarrow c \in I$

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \\ c \in [a, b] &\Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 1], c = \theta a + (1 - \theta)b \end{aligned}$$

**Densité de  $\mathbb{Q}$**  :

$$\forall a, b \neq \emptyset, \exists \alpha \in \mathbb{Q} \cap ]a, b[ \text{ et } \exists \beta \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap ]a, b[$$

**Ensembles bornés** : Soit  $A \subset \mathbb{R}$

**Majoration** :  $\forall x \in A, x \leq M$

**Minoration** :  $\forall x \in A, x \geq m$

**Encadrement** :  $\forall x \in A, |x| < M$

**Borne supérieure** : Plus petit des majorants (s'ils existent)

$$s = \sup A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A, x \leq s \\ \forall t < s, \exists x \in A \text{ tel que } t < x \end{array} \right.$$

**Droite numérique achevée** :  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

### 1.2 Suites réelles $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

**Définition** :  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto u_n$

**Convergence** :

$$(u_n) \rightarrow l, n \rightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

**Limite infinie :**

$$(U_n) \longrightarrow l, n \longrightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow u_n > \varepsilon)$$

**Convergences connues :**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{n!} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{k^n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln \beta)^\beta}{n^\alpha} = 0$$

**Propriétés de convergence :** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $u_n \longrightarrow l$  et  $v_n \longrightarrow l'$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Combinaison :**  $u_n + \lambda v_n \longrightarrow l + \lambda l'$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Produit :**  $u_n v_n \longrightarrow \infty$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Quotient :** Si  $l' \neq 0$ ,  $u_n/v_n \longrightarrow l/l'$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Vers zéro :** Si  $u_n \longrightarrow 0$  et  $v_n$  bornée, alors  $u_n v_n \longrightarrow 0$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Ordre :** Si  $u_n \leq v_n$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

**Suites adjacentes :**  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites adjacentes si et seulement si

$$(u_n) \text{ est croissante; } (v_n) \text{ est décroissante; } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$$

**Suite arithmétique :**

**Définition récursive :**  $u_{n+1} = u_n + r$

**Définition générale :**  $u_n = u_0 + nr$

**Somme des termes :**

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

**Suite géométrique :**

**Définition récursive :**  $u_{n+1} = q u_n$

**Définition générale :**  $u_n = q^n u_0$

**Somme des termes :**

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

**Suites récurrentes :**  $u_{n+1} = f(u_n)$

Si  $\exists l \in \mathbb{R}$  point fixe de  $f$  (i.e.  $f(l) = l$ ) et  $f$  contractante (i.e.  $f$   $k$ -lipschitzienne avec  $0 < k < 1$ ) alors  $(u_n) \longrightarrow l$

## 1.3 Fonctions réelles $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (généralités)

**Définition :**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$

**Image :**  $\forall A \subset \mathbb{R}, f(A) = \{y | \exists x \in A, y = f(x)\}$

**Image réciproque :**  $f^{-1}(B) = \{x \in D_f | f(x) \in B\}$

**Support :**  $\text{supp } \varphi = \overline{\{x | \varphi(x) \neq 0\}}$

**Correspondances :** Pour  $f : E \rightarrow F$

**Surjection :**  $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

**Injection :**  $\forall y \in F, \exists x \in E$  tel que  $y = f(x)$

**Bijection :**  $\forall y \in F, \exists ! x \in E$  tel que  $y = f(x)$  ( $f$  injective et surjective)

**Composée :**  $f \circ g(x) = f(g(x))$

**Fonction identité :**  $id : x \mapsto x$

**Bijection réciproque :** Si  $f$  bijective, alors  $\exists f^{-1}$  tel que  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$

**Convergence :**  $f(x) \longrightarrow l, x \longrightarrow a$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

**Limite à droite :**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, a < x < a + \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

**Caractérisation de la limite** (par les suites) :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \left( \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \Omega - \{a\} \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = l \right)$$

**Continuité :**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**Théorème des valeurs intermédiaires** (TVI) : Soit  $f \in C^0([a, b])$  et  $y \in \mathbb{R}$

$$f(a) < y < f(b) \Rightarrow \exists x \in [a, b], f(x) = y$$

**Condition de Lipschitz :**

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

## 1.4 Dérivation

**Dérivabilité :**  $f$  est dérivable si et seulement si

$$\exists d \in \mathbb{R}, \text{ tel que } f(x + h) = f(x) + hd + |h|\epsilon(h)$$

**Taux de variation :**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

**Théorème de Rolle :** Soit  $f \in C^0([a, b])$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = 0$$

**Théorème des accroissements finis :** Soit  $f \in C^0([a, b])$

$$\exists c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Formule de Leibniz :**

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

**Opérations :**

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g', \lambda \in \mathbb{R}; \left( \frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}; (f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$$

**Fonction réciproque :**

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

**Dérivées connues :**

$$(x^q)' = qx^{q-1}, q \in \mathbb{Z}; (e^x)' = e^x; (\ln|x|)' = \frac{1}{x}; (\cos x)' = -\sin x; (\sin x)' = \cos x; (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Saut d'une fonction :**

$$\sigma_m = f^{(m)}(0^+) - f^{(m)}(0^-), m \geq 0$$

## 1.5 Théorie de la mesure

### 1.5.1 Généralités

**Fonction indicatrice** (ou caractéristique) :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

**$\sigma$ -algèbre** (tribu) : Une famille  $\mathcal{A}$  de sous-ensemble de  $X$  est une tribu si :

1.  $X \in \mathcal{A}$
2.  $A$  est stable par complémentarité
3.  $\mathcal{A}$  est stable par union dénombrable

**Espace mesurable** : Ensemble muni d'une tribu  $(X, \mathcal{A})$

**Tribu borélienne** : Plus petite tribu de  $\mathbb{R}$  contenant tous les intervalles

**Mesure** : Une mesure  $\mu$  sur  $(X, \mathcal{A})$  est une application de  $\mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  telle que

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si  $(A_n)_{n \geq 1}$  est une suite dénombrable de  $\mathcal{A}$  deux à deux disjointes alors :  $\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$  ( $\sigma$ -additivité)

**Espace mesuré** : Le triplet  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  est appelé un espace mesuré Proposition : soit  $\bar{\mathcal{A}}$  une tribu de  $X$

1. Si  $A, B \in \bar{\mathcal{A}}$  et  $A \subset B$  alors  $\mu(A) \leq \mu(B)$
2. Si  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ ,  $A_n \in \bar{\mathcal{A}}$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_n A_n\right)$  et  $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$
3. Si  $A, B \in \bar{\mathcal{A}}$  alors  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

**Ensemble négligeable** :  $A$  est dit négligeable si  $\mu(A) = 0$

**Proposition vraie presque partout** (pp) : Une proposition est dite vraie ( $\mu$ -)presque partout sur  $X$  si elle est vraie sur  $X \setminus E$  avec  $\mu(E) = 0$

**Ensemble de mesure nulle** : Un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  est dit de mesure nulle si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une suite d'intervalles ouverts et bornés  $(I_n)$  telle que :

1.  $A \subset \bigcup_{i \geq 1} I_i$
2.  $\sum_{i \geq 1} |I_i| < \varepsilon$

**Propositions** :

1. Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle
2. Si  $A$  est de mesure nulle et  $B \subset A$ , alors  $B$  est de mesure nulle
3. Si  $A \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n$  avec chaque  $A_n$  de mesure nulle, alors  $A$  est de mesure nulle

**Fonction mesurable** :  $f : (X, \bar{\mathcal{A}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  est mesurable si  $f^{-1}(B) \in \bar{\mathcal{A}}$

### 1.5.2 Exemples de mesures

**Mesure de Lebesgue** : Il existe une unique mesure  $\lambda$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  telle que  $\forall I = [a, b]$  borné,  $\lambda([a, b]) = \lambda([a, b[) = b - a$

**Mesure de Dirac** :  $\delta_a : T \rightarrow \{0, 1\}$  avec  $T$  une tribu et  $\delta_a = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$

**Mesure de comptage** (cardinal) : Pour un ensemble dénombrable de  $\mathbb{R}$ ,  $\forall n, \mu(\{n\}) = 1$



## 1.6 Intégration

### 1.6.1 Définitions

**Fonction en escalier** : Fonctions constantes sur des intervalles

**Intégrale de Riemann** : Soit

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{I_i}$$

une fonction en escalier, on définit l'intégrale de  $f$  par

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt = \sum \alpha_i (x_{i+1} - x_i)$$

Pour une fonction quelconque, s'il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$ , deux fonctions en escalier  $f_\varepsilon$  et  $F_\varepsilon$  telle que  $f_\varepsilon \leq f \leq F_\varepsilon$  et  $I(F_\varepsilon) - I(f_\varepsilon) < \varepsilon$ , alors  $f$  est dite Riemann-intégrable et on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \sup \{I(g) | g \text{ fonction en escalier et } g \leq f\}$$

**Fonction étagée** : Fonction dont l'image est constituée d'un nombre fini de valeurs réelles

**Théorème** : Toute fonction à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  est limite de fonctions étagées

**Intégrale de Lebesgue** : Soit

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$$

une fonction étagée, on définit l'intégrale de  $f$  par rapport à la mesure  $\mu$  par

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

et pour  $E \subset X$

$$\int_E f d\mu = \int_X f 1_E d\mu$$

Pour  $f$  une fonction positive,

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu \mid s \text{ étagée et } s \leq f \right\}$$

Enfin pour une fonction quelconque, on définit :  $f^+ = \max(0, f)$  et  $f^- = \max(0, -f)$  de sorte que :

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

### 1.6.2 Propriétés

**Lien Riemann-Lebesgue** : Si  $f$  est Riemann-Intégrable, alors  $f$  est Lebesgue-intégrable

**Ensemble de fonctions intégrables** (au sens de Lebesgue) :

$$L^p(A) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_A |f|^p < \infty \right\}$$

**Fonctions localement intégrables** :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-intégrable sur tout intervalle borné ( $L^1 \subset L^1_{loc}$ )

**Intégration et dérivation** :

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

**Egalité d'intégrales** :

$$f \stackrel{pp}{=} g \Leftrightarrow \int f(t)dt = \int g(t)dt$$

**Linéarité :**

$$\int (f(t) + \lambda g(t))dt = \int f(t)dt + \lambda \int g(t)dt$$

**Relation de Chasles :** Qui implique aussi  $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

**Relation d'ordre :**

$$f \leq g \Leftrightarrow \int f(t)dt \leq \int g(t)dt$$

**Fonction périodique :** Soit  $f$  une fonction  $T$ -périodique,

$$\int_0^T f(t)dt = \int_c^{c+T} f(t)dt$$

**Inégalité triangulaire :**

$$\left| \int f(t)dt \right| \leq \int |f(t)|dt$$

**Cauchy-Schwartz :**

$$\left| \int f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int f^2(t)dt \times \int g^2(t)dt}$$

**Inégalité de Holder :**

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \int f(t)g(t)dt \leq \left( \int |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

**Théorème de la moyenne :**

$$\forall x \in [a, b], m \leq f \leq M, \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M$$

**Inégalité de la moyenne :**

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \times \int_a^b |g(x)|dx$$

**Intégrale sur un ensemble négligable :** Soit  $\mu$  une mesure alors

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$$

**Théorème fondamental :**

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

**Intégration par partie (IPP) :**

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

**Changement de variable :**

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{x=u(t)}{=} \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t)dt$$

**Propositions sur l'intégrabilité :**

- $f$  monotone  $\Rightarrow f$  Riemann-intégrable
- $f$  continue  $\Rightarrow f$  Riemann-intégrable
- $f$  pp-continue et bornée  $\Rightarrow f$  Riemann-intégrable
- $f$  pp-continue  $\Rightarrow f$  Lebesgue-intégrable
- $|f| < g$ ,  $g$  Lebesgue-intégrable  $\Rightarrow f$  Lebesgue-intégrable
- $f$  Lebesgue-intégrable  $\Leftrightarrow |f|$  Lebesgue-intégrable

### 1.6.3 Convergence

**Convergence** (Riemann) :

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \Rightarrow \int f_n(t)dt \xrightarrow{\text{unif}} \int f(t)dt$$

**Théorème de convergence monotone** (Beppo-Levi) :

$$\begin{cases} (f_n) \text{ suite croissante de fonction} \\ f_n \rightarrow f, n \rightarrow \infty \end{cases} \Leftrightarrow \int f_n \rightarrow \int f, n \rightarrow \infty$$

**Théorème de convergence dominée** :

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{pp} f \\ |f_n| < g, g \in L^1 \end{cases} \Rightarrow \int f_n \rightarrow \int f \left( \text{et même : } \int |f_n - f| \rightarrow 0 \right)$$

**Inversion somme-intégrale** :

$$(f_n) \text{ suite de fonction positive} \Rightarrow \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)dx$$

**Théorème de Fubini** :

$$f \in L^1 \Rightarrow \iint f(x, y)dx dy = \int \left( \int f(x, y)dx \right) dy$$

**Théorème de Fubini-Tonnelle** :

$$f \geq 0 \Rightarrow \iint f(x, y)dx dy = \int \left( \int f(x, y)dx \right) dy$$

**Définition** : intégrale de fonction discontinue, intégrale sur un intervalle non bornée, etc.

**Intégrales Riemann-impropre de références** :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si } \alpha < 1; \int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si } \alpha > 1; \int_0^1 \ln t dt = -1$$

**Riemann-impropre et Lebesgue** : Si  $f$  est Riemann-intégrable au sens impropre et de signe constant alors  $f$  est Lebesgue-intégrable

### 1.6.4 Intégrale de Riemann-Stieltjes

**Définition** : Si  $\alpha$  est une fonction croissante, alors elle définit une mesure. On appelle intégrale de Riemann-Stieltjes l'intégrale par rapport à cette mesure :  $\int f(x)d\alpha(x)$  et on a :

$$\alpha([a, b]) = \alpha(b^+) - \alpha(a^-)$$

$$\alpha([a, b[) = \alpha(b^-) - \alpha(a^-)$$

$$\alpha(]a, b]) = \alpha(b^-) - \alpha(a^+)$$

$$\alpha(]a, b[) = \alpha(b^+) - \alpha(a^+)$$

**Calcul** :

$$\int f(x)d\alpha(x) = \int f(x)\alpha'(x)dx$$

### 1.6.5 Fonctions définies par une intégrale

**Définition** : Soit  $f : (x, t) \rightarrow f(x, t)$ , si  $f$  est continue en  $t$  pour presque-tout  $x$  et  $|f(t, x)| \leq g(x), g \in L^1$  alors la fonction suivante est défini et est continue

$$F(t) = \int f(t, x) dx$$

**Dérivabilité** : Si  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$  existe et est continue et  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| < g(x), g \in L^1$  alors  $F$  est dérivable et

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$$

**Formule** :

$$F(t) = \int_{[u(t), v(t)]} f(x, t) dx$$
$$\frac{dF}{dt}(t) = f(t, v(t)) \frac{dv(t)}{dt} + f(t, u(t)) \frac{du(t)}{dt} + \int_{[u(t), v(t)]} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

### 1.6.6 Introduction au calcul des variations

**Problème de variation** : Trouver  $u^*$  telle que

$$u^* = \min_{u \in K} J(u) \text{ avec } J(u) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u, \dot{u}, t) dt$$

**Équation d'Euler-Lagrange** :  $u$  solution du problème de variation, alors

$$\frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, \dot{u}, t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u, \dot{u}, t) \right] = 0$$

**Intégrale première d'Euler-Lagrange** :  $\varphi(u, \dot{u}, t) = \varphi(u, \dot{u})$

$$\varphi(u, \dot{u}) = \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u, \dot{u}) \right] \dot{u} + k, k \in \mathbb{R}$$

**Condition aux limites** :

- Deux extrémités fixes :  $u(\alpha) = a$  et  $u(\beta) = b$
- Une extrémité libre :  $u(\alpha) = a$  et  $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u(\beta), \dot{u}(\beta), \beta) = 0$
- Deux extrémités libres :  $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u(\alpha), \dot{u}(\alpha), \alpha) = 0$  et  $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u(\beta), \dot{u}(\beta), \beta) = 0$

## 1.7 Séries dans $\mathbb{R}$

### 1.7.1 Généralités

**Condition nécessaire de convergence** :

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \Rightarrow u_n \rightarrow 0$$

**Espace vectoriel** : L'espace des séries convergentes est un espace vectoriel

**Critère de Cauchy** :

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$$

**Règle de Riemann** : Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$  et  $n^\alpha u_n$  majoré pour  $\alpha > 1$  alors  $\sum u_n$  converge

**Règle de d'Alembert** : Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$  et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l$  avec  $l < 1$  alors  $\sum u_n$  converge

**Séries géométrique** :

$$\sum_{n \geq 0} aq^n = a \frac{1}{1-q}$$

**Séries de Riemann** :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

**Série exponentielle** :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z, z \in \mathbb{C}$$

### 1.7.2 Séries de Taylor

**Formule générale** :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

**Formule de Taylor-Lagrange** :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}, \theta \in [0, 1]$$

**Formule de Taylor-Young** :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + h^n \epsilon(h), \epsilon(h) \longrightarrow 0, h \longrightarrow 0$$

**Séries connues** :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \cdots + \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{2p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

**Infiniment petit** :  $f$  est un infiniment petit au voisinage de  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

**Infiniment grand** :  $f$  est un infiniment grand au voisinage de  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$

**Ordre d'un infiniment petit** :  $f$  et  $g$  sont dit de même ordre si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}^*$

$f$  est d'ordre  $p$  si  $f$  et  $(x-a)^p$  sont du même ordre

**Équivalence** :

$$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

**Développements limités :**

$f$  admet un DL à l'ordre  $n$  au voisinage de  $a$  si

$$\exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \dots + \alpha_n h^n + h^n \epsilon(h), \epsilon(h) \longrightarrow 0, h \longrightarrow 0$$

$f$  admet un DL à l'ordre  $n$  au voisinage de  $+\infty$  si

$$\exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \dots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Le DL d'une fonction paire (resp. impaire) ne contient que des termes de puissances paire (resp. impaire).

**Opérations sur les DL :** Soient  $f$  et  $g$  avec  $\begin{cases} f(a+h) = P(h) + h^n \epsilon_1(h) \\ g(a+h) = Q(h) + h^n \epsilon_2(h) \end{cases}$

**Combinaison :**  $f(a+h) + \lambda g(a+h) = P(h) + \lambda Q(h) + \epsilon(h)$

**Produit :**  $f g(a+h) = P Q(a+h) + h^n \epsilon(h)$  tronqué à l'ordre  $n$

**Quotient :**  $\frac{f(a+h)}{g(a+h)}$  = quotient de  $P(h)$  par  $Q(h)$  suivant les puissances croissantes

**Primitivisation :** Si  $F' = f$  avec  $f(a+h) = \sum \alpha_i h^i$  alors  $F(a+h) = \sum \alpha_i \frac{h^{i+1}}{i+1}$

**Étude locale d'une courbe :** Soit  $x_0$  tel que  $f'(x_0) = 0$

$f''(x_0) > 0$  alors la courbe est au dessus de la tangente et  $x_0$  réalise un minimum locale

$f''(x_0) < 0$  alors la courbe est en dessous de la tangente et  $x_0$  réalise un maximum locale

$f''(x_0) = 0$  alors  $x_0$  est un point d'inflexion

**1.7.3 Séries de Fourier**

**Dans la base**  $(e^{in\omega x})_{n \in \mathbb{Z}}$

**Série de Fourier :**  $(e^{in\omega x})_{n \in \mathbb{Z}}$  avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  est une base de l'espace des fonctions  $T$ -périodiques, alors pour tout  $f$ , fonction  $T$ -périodique, on a :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \text{ avec } c_n = (f|e^{in\omega \cdot}) = \frac{1}{T} \int f(x) e^{-in\omega x} dx$$

**Egalité de Parseval :** (égalité de la norme)

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

**Dans la base**  $(\cos n\omega x, \sin n\omega x)_{n \in \mathbb{N}}$

**Série de Fourier :** Soit  $f$  une fonction  $T$ -périodique, on a

$$f(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx; a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cos n\omega x dx; b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \sin n\omega x dx$$

**Egalité de Parseval :** (égalité de la norme)

$$\|f\|_2^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$$

**Autres**

**Lien entre les coefficients** : 
$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}$$

**Convergence** :

$$f \in L^2(0, T), f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{in\omega x}$$

$$f \in L^1(0, T), c_n(f) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$$

**Théorème de Dirichlet** (convergence ponctuelle) :

$$f \in C^1 \Rightarrow SF(f)(x_0) \xrightarrow{unif} f(x_0)$$

$$f \in CM^1 \Rightarrow SF(f)(x_0) \longrightarrow \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

**Série de Fourier d'une distribution**

**Définition** :

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \text{ avec } c_n = \frac{1}{a} \langle T, e^{-in\omega s} \rangle$$

**Convergence** : La série de Fourier d'une distribution converge vers la distribution (au sens des distributions)

**Convergence d'une série trigonométrique dans  $\mathcal{D}'$**  :

$$\sum c_n e^{in\omega s} \text{ converge dans } \mathcal{D}' \Leftrightarrow |c_n| \leq A|n|^p \text{ (suite à croissance lente)}$$

## 1.8 Le corps $\mathbb{C}$

**Définition** :

$$\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$$

**Partie réelle et imaginaire** :

$$Re(a + ib) = a \text{ et } Im(a + ib) = b$$

**Module et argument** :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \arg z = \tan \frac{b}{a}$$

**Écriture d'un nombre complexe** :  $\forall z \in \mathbb{C}, \exists a, b, r, \theta \in \mathbb{R}$  tel que

$$z = a + ib = r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg z$$

**Conjugaison** : Soit  $z = a + ib$  alors  $\bar{z} = a - ib$  et

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}; \bar{\bar{z}} = z$$

$$z + \bar{z} = 2 \times Re(z); z - \bar{z} = 2i \times Im(z)$$

**Calcul avec les modules** :

$$z\bar{z} = |z|^2; \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; |z| = |\bar{z}|$$

**Calcul avec les arguments** :

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]; \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

**Formule de Moivre :**

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

**Formules d'Euler :**

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

**Théorème de D'Alembert-Gauss :** Toute équation algébrique de  $\mathbb{C}$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{C}$

**Racine  $n$ -ième :**

$$z^n = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |\alpha|^{\frac{1}{n}} \\ \arg z = \frac{\arg \alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in [0, n-1] \end{cases}$$

**Racine complexe d'une équation du second degré :**  $az^2 + bz + c = 0$

$$\delta^2 = b^2 - 4ac \text{ alors } z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

**Polynômes premiers :** Les seuls polynômes premiers de  $\mathbb{C}[X]$  sont les polynômes constants, ceux de degré 1 et ceux de degré 2 qui n'ont pas de racine réelles

**Multiplicité d'une racine :** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$

$$r \text{ de multiplicité } m \Leftrightarrow P(r) = P'(r) = \dots = P^{(n-1)}(r) = 0 \text{ et } P^{(m)}(r) \neq 0$$

**Partie entière d'une fraction rationnelle :** Soit  $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$  on peut décomposer  $F$  de façon unique tel que  $F = E + \frac{P_0}{Q}$  avec, ou  $P_0 = 0$  ou  $\deg(P_0) < \deg(Q)$

**Décomposition en élément simple dans  $\mathbb{C}(X)$  :** Soit  $F = P/Q$

Objectif : écrire  $F$  sous la forme  $F = P^* + S$  où  $P^*$  est un polynôme et  $S$  une somme d'éléments simples :

Si  $\deg(P) < \deg(Q)$  alors  $P^* = 0$

Sinon effectuer la division euclidienne

Décomposer  $Q$  en produit de facteur premier

Règles de décomposition dont les constantes  $a, b, c, d, \dots$  sont à déterminer :

$$\begin{aligned} \frac{N(x)}{(x-1)(x-2)} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \\ \frac{N(x)}{(x-1)^3(x-2)^2} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{d}{x-2} + \frac{e}{(x-2)^2} \\ \frac{N(x)}{(x-1)(x^2+1)} &= \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1} \end{aligned}$$

## 1.9 Distributions

### 1.9.1 Fonctions test ou de base : $\mathcal{D}$

**Définition :**  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite fonction test si elle est à support borné et  $\varphi \in C^\infty$

**Exemple :**  $\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

**Propriétés de  $\mathcal{D}$  :**

1.  $\mathcal{D}$  est un espace vectoriel (car  $\text{supp}(\varphi + \psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\psi)$ )
2.  $\varphi, \psi \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi\psi \in \mathcal{D}$  (car  $\text{supp}(\varphi\psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\psi)$ )
3.  $\varphi \in \mathcal{D}$  et  $f \in L^1 \Rightarrow \psi(x) = \varphi * f(x) \in \mathcal{D}$
4.  $\mathcal{D}$  ne peut pas être muni d'une norme de sorte qu'il soit complet (c-a-d où toute suite convergente est de Cauchy)

**Proposition :**  $f \in C_k^0$  peut-être approché par une fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}$  uniformément  
**convergence dans  $\mathcal{D}$  :**

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \text{supp } \varphi_n \subset K = [a, b], \forall n \geq 1 \\ \varphi_n^{(k)} \xrightarrow{\text{unif}} \varphi^{(k)} \end{cases}$$

**Proposition :**  $f \in L^1_{loc}$  et  $\forall \varphi \in \mathcal{D}$  on a  $\int f\varphi = 0 \Rightarrow f \stackrel{pp}{=} 0$



## 1.9.2 Distributions : $\mathcal{D}'$

**Définition** :  $T \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto T(\varphi) \stackrel{\text{notation}}{=} \langle T, \varphi \rangle$  tel que  $T$  soit

1. Linéaire :  $\langle T, \varphi + \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle T, \psi \rangle$
2. Continue :  $\varphi \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$

**Addition** :  $\langle T + S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle$

**Multiplication** :  $\langle \lambda T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$

**Convergence dans  $\mathcal{D}'$**  :

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Leftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Distribution régulière** :

$$f \in L^1_{loc}, \langle T_f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Distribution singulière** :

$$f \in L^1_{loc}, \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Peigne de Dirac** :  $\Delta_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na}$ ,  $a$  fixé

**Opérations** :

**Translation** :  $\tau_a f(x) = f(x - a), \langle T_{\tau_a f}, \varphi \rangle = \langle T_f, \tau_{-a} \varphi \rangle$

**Homothétie** :  $T_{f(a.)}, \langle T_{f(a.)}, \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T_f, \varphi(\frac{\cdot}{a}) \rangle$

**Transposition** :  $\check{f}(x) = f(-x), \langle T_{\check{f}}, \varphi \rangle = \langle T_f, \check{\varphi} \rangle$

**Produit** : On peut avoir  $T, S \in \mathcal{D}'$  sans  $TS \in \mathcal{D}'$ , en revanche,  
 $\forall f, g \in L^1_{loc}, \langle gf, \varphi \rangle = \langle f, g\varphi \rangle$

**Dérivation** :  $\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$

**Dérivation  $k$ -ième** :  $\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle$

**Dérivation d'une fonction discontinue à l'origine** :  $(T_f)' = \sigma_0 \delta + T_{f'}$

**Support d'une distribution** :  $\text{supp } T_f = \text{supp } f$

**Valeur principale de Cauchy** :

$$vp \int_{-A}^A \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^A \frac{dx}{x} \right\} = 0$$

**Distribution  $vp \frac{1}{x}$**  :

$$\langle vp \frac{1}{x}, \varphi \rangle = vp \int \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

## 1.10 Convolution

### 1.10.1 Convolution de fonction

**Définition sur  $\mathbb{R}$**  :

$$f * g(x) = \int f(x - t)g(t)dt$$

**Convolution sur  $\mathbb{R}_+$**  :

$$\begin{cases} \text{supp } f \subset \mathbb{R}_+ \\ \text{supp } g \subset \mathbb{R}_+ \end{cases} \Rightarrow f * g(x) = \int_0^x f(x - t)g(t)dt$$

**Support** :

$$\text{supp } f * g \subset \text{supp } f + \text{supp } g$$

**Propriétés** : Le produit de convolution est commutatif, distributif et associatif

**Convolution bornée :**

$$\begin{aligned} f, g \in L^1 &\Rightarrow \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \text{ et } f * g \text{ définit presque partout} \\ f, g \in L^2 &\Rightarrow \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \text{ et } f * g \text{ partout définit} \\ f \in L^1, g \in L^2 &\Rightarrow \|f * g\|_2 < \|f\|_1 \cdot \|g\|_2 \text{ et } f * g \text{ définit presque partout} \end{aligned}$$

**Valeur moyenne d'une fonction :**

$$m = \frac{1}{2h} f * 1_{[-h, h]}(x)$$

### 1.10.2 Convolution de suite

**Définition :**

$$u * v(n) = v * u(n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u(n-k)v(k), n \in \mathbb{N}$$

### 1.10.3 Convolution de distribution et algèbre dans $\mathcal{D}'_+$

**Produit tensoriel :** Pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$$

**Définition :** Soit  $T, S \in \mathcal{D}'$

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, \langle S, \tau_{-y} \varphi \rangle \rangle = \langle T \otimes S, \varphi(x+y) \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Dérivation :**

$$(T * S)' = T * S' = T' * S$$

**Existence :** Le produit  $T * S$  a un sens si les supports  $A$  et  $B$  de  $T$  et  $S$  sont tels que  $x \in A, y \in B, x + y$  ne puisse être borné que si  $x$  et  $y$  restent bornées tous les deux. Il est alors commutatif.

**Proposition :** Si l'une au moins de  $T$  et  $S$  est à support bornée alors  $T * S$  existe. L'ensemble des distributions à support bornée est noté  $\mathcal{E}'$

**Proposition :** Si  $T$  et  $S$  ont leur support limités à gauche (ou à droite) alors  $T * S$  existe (i.e.  $\exists a \in \mathbb{R}$ , tel que  $\text{supp } T \subset [a, \infty[$ )

$\mathcal{D}'_+$  : Ensemble des distributions à support dans  $\mathbb{R}_+$  est noté  $\mathcal{D}'_+$  ( $\subset \mathcal{D}$ )

$$T \in \mathcal{D}'_+ \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D} \text{ tel que } \text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}_-, \langle T, \varphi \rangle = 0$$

**Associativité :**

$$T, S \in \mathcal{D}'_+ \Rightarrow (T * S) * V = T * (S * V)$$

**Algèbre de convolution  $\mathcal{D}'_+$  :**

1. Le produit de convolution est une loi de composition interne

$$T, S \in \mathcal{D}'_+ \Rightarrow T * S \in \mathcal{D}'_+$$

2.  $\mathcal{D}'_+$  est un espace vectoriel
3.  $\delta$  élément neutre

$$T * \delta = T$$

4. Soit  $T \in \mathcal{D}'_+$ , on dit que  $S \in \mathcal{D}'_+$  est un élément inverse de  $T$  si  $T * S = \delta$  et on note  $S = t^{*-1}$

**Formule pour Heavyside :**  $Y^{*2} = xY(x)$  et pour  $n \geq 2$

$$Y^{*n} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} Y(x)$$

**Résolution d'équation différentielle à coefficient constant** : Soit  $D$  un opérateur différentiel tel que

$$D = a_n \frac{d^n}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$$

Alors pour résoudre l'équation  $DT = S$  :

1. Résoudre  $DE = \delta$
2. Solution générale :  $T = S * E$

**Inversion type** :

$$\left( \delta^{(n)} + a_1 \delta^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \delta' + a_n \delta \right)^{* - 1} = Yz$$

avec  $z$  solution de

$$\begin{cases} z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = 0 \\ z(0) = z'(0) = \dots = z^{(n-2)}(0) = 0 \\ z^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

## 1.11 Transformées de Fourier

### 1.11.1 Fonctions

**Définition** :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

**Transformée conjuguée** :

$$(\overline{\mathcal{F}})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\xi x} dx$$

**Inversion** : Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  alors

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi, x - pp$$

**Propriétés sur  $\hat{f}$**  :

1.  $\hat{f}$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$
- 2.

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$$

**Propriétés** :

1.

3.

$$\begin{aligned} \widehat{(\tau_{x_0} f)} &= e^{-ix_0 \xi} \\ \widehat{(e^{i\xi_0 x} f)} &= \tau_{\xi_0} \hat{f} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)} &= \hat{f} \cdot \hat{g} \\ 2\pi \widehat{(f \cdot g)} &= \hat{f} * \hat{g} \end{aligned}$$

2.

4.

$$\begin{aligned} \widehat{(f^{(n)})} &= (i\xi)^n \hat{f} \\ \widehat{((-ix)^n f)} &= (\hat{f})^{(n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f &= \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = 2\pi f \text{ pour } x - pp \\ \widehat{\widehat{f}} &= 2\pi \check{f} \end{aligned}$$

### 1.11.2 Distributions

#### Distributions tempérées

**Décroissance rapide** ( $DR$ ) :  $f$  décroît plus vite que toute puissance de  $1/|x|$

$$f \in DR \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, x^p f(x) \longrightarrow 0, x \longrightarrow \pm\infty$$

**Proposition** :

$$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap DR \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}, x^p f(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

**Espace de fonction test** :  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tel que

1.  $f \in C^\infty$
2.  $f^{(n)} \in DR, \forall n \in \mathbb{N}$

**Propriétés de  $S$**  :

1.  $S$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel
2.  $\mathcal{D} \subset S \subset L^P$
3.  $\varphi \in S \Rightarrow \hat{\varphi} \in S$
4.  $\varphi \in S$  et  $P \in \mathcal{P}_n \Rightarrow \varphi P \in S$
5.  $f, g \in S \Rightarrow fg \in S$
6.  $\varphi \in S \Rightarrow \varphi' \in S$
7.  $f, g \in S \Rightarrow f * g \in S$
8.  $f \in S \Rightarrow x^p f^{(q)}$  bornée et sommable

**Convergence dans  $S$**  :

$$\varphi_n \xrightarrow{S} 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(p)} x^q| \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty, \forall p, q \in \mathbb{N}$$

**Propriétés de convergence** :

$$\varphi_n \xrightarrow{S} \Rightarrow \begin{cases} \varphi'_n \xrightarrow{S} 0 \\ P\varphi_n \xrightarrow{S} 0 \text{ avec } P \in \mathcal{P}_n \\ \varphi_n \xrightarrow{L^1} 0 \\ \widehat{\varphi_n} \xrightarrow{S} 0 \end{cases}$$

**Espace des distributions tempérées  $S'$**  :  $T : S \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$

1. linéaire :  $\langle T, \varphi + \mu\psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \mu \langle T, \psi \rangle$
2. continue :  $\varphi_n \xrightarrow{S} \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow 0$

**Convergence dans  $S'$**  :

$$T_n \xrightarrow{S'} T \Leftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle, \varphi \in S$$

**Fonction à croissance lente** ( $CL$ ) :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in CL \Leftrightarrow |f(x)| \leq A|x|^p, |x| \longrightarrow \infty$$

**Proposition** : Toute fonction à croissance lente définit une distribution tempérée

**Transformée de Fourier dans  $S$**

**Définition** :

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle, \forall \varphi \in S$$

**Propriétés** :

1.

$$\begin{aligned}(\widehat{T})^{(n)} &= ((-ix)^n T) \\ (\widehat{T^{(n)}}) &= (i\xi)^n \widehat{T}\end{aligned}$$

3.

$$\widehat{\widehat{T}} = 2\pi \check{T}$$

2.

$$\begin{aligned}\tau_a \widehat{T} &= (\widehat{e^{ixa} T}) \\ \widehat{(\tau_a T)} &= e^{-i\xi a} \widehat{T}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\widehat{1} &= 2\pi\delta \\ \widehat{t^n} &= \frac{1}{(-i)^n} \delta^{(n)} \\ \widehat{\delta_a}(\xi) &= e^{-ia\xi}\end{aligned}$$

## 1.12 Transformées de Laplace

### 1.12.1 Fonctions

**Définition :**

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

**Théorème :**  $\tilde{f}$  est holomorphe et

$$\frac{d^k}{ds^k} \tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(x)(-x)^k e^{-sx} dx, \forall k \in \mathbb{N}$$

**Théorème :** Si  $F$  est une fonction analytique dans le demi-plan complexe  $z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > \eta$ , et si, en tant que fonction de  $\eta = \operatorname{Im}(z)$ ,  $F$  est intégrable, alors elle est la transformée de Laplace d'une fonction continue telle que

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} F(z)e^{zx} dz$$

**Théorème :** Si les transformées de Laplace coïncident pour un  $\operatorname{Re}(s)$  assez grand alors  $f = g$

**Exemples :**

1.

$$\widetilde{Y(x)x^a} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

2.

$$\widetilde{Y(x)e^{ax}} = \frac{1}{s-a}$$

**Propriétés :**

1.

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = \tilde{f}(s+a)$$

5.

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_0^s \tilde{f}(p) dp$$

2.

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n \tilde{f}(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

6.

$$\mathcal{L}(f * g) = \tilde{f} \cdot \tilde{g}$$

3.

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u) du\right) = \frac{\tilde{f}(s)}{s}$$

7. Si  $f$  est  $T$ -périodique, alors

4.

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -\tilde{f}'(s)$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st} dt}{1 - e^{-sT}}$$

**Transformée inverse :**

1. Linéarité :  $\mathcal{L}^{-1}(a\tilde{f} + b\tilde{g}) = a\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}) + b\mathcal{L}^{-1}(\tilde{g}) = af + bg$ 2. Translation :  $\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}(s-a)) = e^{at}f(t)$ 3. Modulation :  $\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}\tilde{f}(s)) = \begin{cases} f(t-a), & \text{si } t > a \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

4. Changement d'échelle :  $\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}(ks)) = \frac{1}{k}f\left(\frac{1}{k}\right)$
5. Dérivée :  $\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}^{(k)}(s)) = (-1)^k t^k f(t)$
6. Intégrale :  $\mathcal{L}^{-1}\left(\int_0^\infty \tilde{f}(s)ds\right) = \frac{f(t)}{t}Y(t)$
7. Multiplication par  $s$  :  $\mathcal{L}^{-1}(sf(s)) = f'(t) + f(0)\delta$

**Théorèmes taubériens :**

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} f(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{f}(s) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{f}(s)\end{aligned}$$

### 1.12.2 Distributions

**Définition :**  $T \in \mathcal{D}'_+$

$$\mathcal{L}(T) = \tilde{T} = \langle T, e^{-st} \rangle$$

**Exemples :**

1.  $\tilde{\delta} = 1$
2.  $\tilde{\delta}_a = e^{-as}$
3.  $\tilde{\delta}' = s$
4.  $\widetilde{\delta^{(n)}} = s^n$

# Chapitre 2

## Analyse dans $\mathbb{R}^n$ (MT22)

### 2.1 Fonction de plusieurs variables $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

#### 2.1.1 Généralités

Disque ouvert de centre  $A$  et de rayon  $\rho$  :

$$B(A, \rho) = \{M \in \mathbb{R}^n, \|\overrightarrow{AM}\| < \rho\}$$

Limité :

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall M \in \mathbb{R}^n, \|\overrightarrow{M_0 M}\| < \eta \Rightarrow |f(M) - l| < \varepsilon$$

Continuité :

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$$

Condition suffisante de continuité :

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \end{cases}, \exists \varepsilon \text{ tel que } |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon(r) \text{ avec } \varepsilon \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \Rightarrow |f(M) - l| < \varepsilon$$

Condition suffisante de non-continuité : S'il existe un chemin  $C$  tel que

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \neq f(M_0) \Rightarrow f \text{ n'est pas continue}$$

#### 2.1.2 Dérivation

Différentiabilité :  $f$  différentiable si

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + Ah + Bh + \sqrt{h^2 + k^2} \varepsilon(h, k) \text{ avec } \varepsilon \longrightarrow 0$$

Condition suffisante de différentiabilité : Si  $f$  admet des dérivées partielles premières continues en  $M_0$  alors  $f$  est différentiable en  $M_0$

Théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \in C^0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Dérivation de composée de fonctions :

1.  $\Phi(t) = f(\alpha(t), \beta(t))$

$$\Phi'(t) = \alpha'(t) \frac{\partial}{\partial x} f(\alpha(t), \beta(t)) + \beta'(t) \frac{\partial}{\partial y} f(\alpha(t), \beta(t))$$

2.  $\psi(u, v) = f(a(u, v), b(u, v))$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial a}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(f(a(u, v)), b(u, v)) + \frac{\partial b}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(f(a(u, v)), b(u, v)) \\ \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial a}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(f(a(u, v)), b(u, v)) + \frac{\partial b}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(f(a(u, v)), b(u, v)) \end{aligned}$$

3.  $\zeta(x, y) = \alpha(f(x, y))$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \alpha'(f(x, y)) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \alpha'(f(x, y))\end{aligned}$$

**Différentielle :**

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

**Formule des accroissements finis :**

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \sqrt{h^2 + k^2}\varepsilon(h, k)$$

**Taylor à l'ordre 2 :**

$$\begin{aligned}f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk \right) + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)\end{aligned}$$

**Condition nécessaire d'optimalité :**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) = 0$$

Puis, repasser à Taylor :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk \right) + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)$$

### 2.1.3 Dérivées directionnelles

**Définition :**

$$Df(x, y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}$$

Remarque :

1.  $Df(x, \vec{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$
2. Si  $f$  est différentiable, alors  $Df(x, y) = Df(x)y$

**Théorème :**

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow Df(x^*, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$$

**Existence :** Si  $f$  est continue et  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  alors  $x^*$  existe

**Unicité :** Si  $f$  est une fonction convexe, alors  $x^*$ , s'il existe, est unique

## 2.2 Analyse vectorielle

**Produit scalaire :**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos \theta$$

**Produit vectoriel :**  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$



**Produit mixte** :  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires}$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \text{volume du parallélépipède formé par } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w}$$

**Coordonnées cylindriques** :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi[$$

**Coordonnées sphériques** :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \cos \theta \\ y = \rho \cos \phi \sin \theta \\ z = \rho \sin \phi \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi[, \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

**Gradient** :

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}; \vec{\nabla}(fg) = f \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla} f$$

**Rotationnel** :

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}; \vec{\text{rot}} f \vec{V} = f \vec{\text{rot}} \vec{V} + \vec{\nabla} f \wedge \vec{V}$$

**Divergence** :

$$\text{div } f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}; \begin{cases} \text{div } f \vec{V} = f \text{div } \vec{V} + \vec{\nabla} f \cdot \vec{V} \\ \text{div } \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \vec{\text{rot}} \vec{V}_1 - \vec{V}_1 \vec{\text{rot}} \vec{V}_2 \end{cases}$$

**Laplacien** :

$$\Delta f = \text{div } \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

**Propositions** :

$$\begin{aligned} f \in C^2 &\Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{\nabla} f = 0 \\ \vec{V} &= (P, Q, R)^T \text{ avec } P, Q, R \in C^1, \vec{\text{rot}} \vec{V} = 0 \Rightarrow \exists f \text{ tel que } \vec{\nabla} f = \vec{V} \\ \vec{V} &= (P, Q, R)^T \text{ avec } P, Q, R \in C^2, \text{div } \vec{\text{rot}} \vec{V} = 0 \\ \vec{V} &= (P, Q, R)^T \text{ avec } P, Q, R \in C^1, \text{div } \vec{V} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} \text{ tel que } \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{V} \end{aligned}$$

## 2.3 Courbes et surfaces

### 2.3.1 Surfaces

**Plan** (cartésien) : Plan passant par  $M_0$  et de normal  $\vec{N} = (a, b, c)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

**Plan** (paramétrique) : Plan passant par  $M_0$  et contenant  $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$  et  $\vec{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_0 + \beta t + \beta' t' \\ z = z_0 + \gamma t + \gamma' t' \end{cases}, (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

**Distance d'un point à un plan** : Plan  $P$  de normal  $\vec{N}$  contenant  $M_0$

$$\delta(P, M) = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

**Surface** (cartésien) :

$$f(x, y, z) = 0 \text{ (implicite)}; z = f(x, y) \text{ (explicite)}$$

**Surface** (paramétrique) :

$$\begin{cases} x = Q_1(t, t') \\ y = Q_2(t, t') \\ z = Q_3(t, t') \end{cases}, (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

**Surface de révolution** : ( $S$ ) est dite de révolution autour de ( $\Delta$ ) si l'intersection avec tout plan perpendiculaire à  $\Delta$  est vide ou un cercle centré sur ( $\Delta$ )

**Vecteur normal à une surface** :

Si la surface est définie par une équation cartésienne  $f(x, y, z) = 0$  alors  $\vec{\nabla} f$  est normal à  $S$

Si la surface est définie par une équation paramétrique en  $Q_1, Q_2, Q_3$  alors  $\vec{N} = \vec{\nabla}_u Q \wedge \vec{\nabla}_v Q$  est normal à  $S$

### 2.3.2 Courbes

**Droite** (cartésien) : Vu comme l'intersection de deux plans

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

**Droite** (paramétrique) : Droite de vecteur directeur  $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$  et passant par  $M_0$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

**Distance d'un point à une droite** : Droite ( $\Delta$ ) de vecteur directeur  $V$  et passant par  $M_0$

$$\delta(M, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{V}\|}{\|\vec{V}\|}$$

**Courbe** (cartésien) : Vu comme l'intersection de deux Surfaces

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

**Courbe** (paramétrique) :

$$\begin{cases} x = Q_1(t) \\ y = Q_2(t) \\ z = Q_3(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

**Vecteur tangent à une courbe** :

Si  $C$  est définie par des équations cartésiennes en  $f_1$  et  $f_2$  alors le vecteur  $\vec{v} = \vec{\nabla} f_1 \wedge \vec{\nabla} f_2$  est tangent à  $C$ . Si  $C$  est définie par un système d'équation paramétrique en  $Q_1, Q_2, Q_3$  alors le vecteur  $\vec{v} = \vec{\nabla} Q$  est tangent à  $C$ .

**Surfaces usuelles** :

TODO : sur scilab tracer

1. Ellipsoïde
2. Cylindre elliptique
3. hyperboloïde à une et deux nappes
4. paraboloïde
5. cône

## 2.4 Intégrales dans $\mathbb{R}^n$

### 2.4.1 Intégrales doubles

**Théorème** : Si  $D = [a, b] \times [c, d]$

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \left( \int_a^b f(x)dx \right) \left( \int_c^d g(y)dy \right)$$

**Théorème de Fubini** : Si  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a < x < b, \Phi_1(x) < y < \Phi_2(x)\}$  alors

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left( \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx$$

**Aire d'un domaine** :

$$\iint_D dxdy = \text{Aire du domaine } D$$

**Masse d'un domaine** : Si on note  $\mu(x, y)$ , la masse surfacique du domaine alors la masse  $m$  du domaine est donnée par

$$\iint_D \mu(x, y)dxdy$$

**Centre de gravité** :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \iint_D x\mu(x, y)dxdy \\ y_G = \frac{1}{m} \iint_D y\mu(x, y)dxdy \end{cases}$$

**Matrice Jacobienne** :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

**Changement de variable** : (En coordonnées polaire :  $|J| = r$ )

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_D |J| f(\zeta(u, v), \eta(u, v)) du dv$$

**Moment d'inertie par rapport à une droite** :

$$\mathcal{J}_\Delta = \iint_D [\delta(M, \Delta)]^2 \mu(x, y)dxdy$$

**Moment d'inertie par rapport à un point** :

$$\mathcal{J}_A = \iint_D [\delta(M, A)]^2 \mu(x, y)dxdy = \iint_D [(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2] \mu(x, y)dxdy$$

### 2.4.2 Intégrales triples

**Théorème** : Si  $D = [a, b] \times [c, d] \times [e, i]$

$$\iiint_D f(x)g(y)h(z)dxdydz = \left( \int_a^b f(x)dx \right) \left( \int_c^d g(y)dy \right) \left( \int_e^i h(z)dz \right)$$

**Méthode des bâtons** : On note  $D_0$  la projection de  $V$  sur  $(xOy)$

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iint_{D_0} \left( \int_{\zeta(x, y)}^{\varphi(x, y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy$$

**Méthode des tranches :**

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \iint_{D(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

**Matrice Jacobienne :**

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

**Changement de variable :** (En sphérique :  $|J| = r^2 |\cos \varphi|$ )

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_\Lambda |J| f(\epsilon(u, v, w), \eta(u, v, w), \zeta(u, v, w)) du dv dw$$

**Masse d'un volume :**

$$\iiint_D \mu(x, y, z) dx dy dz$$

**Centre de gravité :**

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \iiint_V x \mu(x, y, z) dx dy dz \\ y_G = \frac{1}{m} \iiint_V y \mu(x, y, z) dx dy dz \\ z_G = \frac{1}{m} \iiint_V z \mu(x, y, z) dx dy dz \end{cases}$$

**Moment d'inertie par rapport à une droite :**

$$\mathcal{J}_\Delta = \iiint_V [\delta(M, \Delta)]^2 \mu(x, y, z) dx dy dz$$

**Moment d'inertie par rapport à un point :**

$$\mathcal{J}_A = \iiint_V [\delta(M, A)]^2 \mu(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V [(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2] \mu(x, y, z) dx dy dz$$

**Moment d'inertie par rapport à un plan :**

$$\mathcal{J}_P = \iiint_V [\delta(M, P)]^2 \mu(x, y, z) dx dy dz$$

**Théorème de Guldin :** Si  $S$  est un volume de révolution engendré par le domaine  $(D)$  autour de l'axe  $(Oz)$  alors :

$$V(S) = 2\pi x_G A(D)$$

### 2.4.3 Intégrales curvillignes

**Abscisse curvilligne :**

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

**Notation :**

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

**Longueur d'arc :**

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'(\theta)^2} d\theta$$

**Masse d'un fil :**

$$m = \left| \int_\Gamma \mu(s) ds \right|$$

**Circulation d'un champ de vecteur** : Soit  $C$  une courbe paramétrée d'extrémité  $A$  et  $B$  et d'équation  $\begin{cases} x(t), y(t), z(t) \end{cases}$ ,  
 $t \in [t_A, t_B]$  alors  $\forall \vec{V} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$ , on définit la circulation de  $\vec{V}$  le long de  $AB$  par

$$\mathcal{T}_{AB} = \int_{AB} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} (P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz) = \int_{t_A}^{t_B} (x'(t)P(M) + y'(t)Q(M) + z'(t)R(M))dt$$

**Circulation d'un champ de vecteur dérivant d'un potentiel scalaire** : Si  $\vec{\text{rot}} \vec{V} = 0$  alors  $\exists f$  telle que  $\vec{\nabla} f = \vec{V}$  et on a  $\mathcal{T}_{AB} = f(B) - f(A)$

**Formule de Green-Rieman** : Soit  $D \in \mathbb{R}^2$  limité par  $\Gamma$  et orienté dans le sens direct, sans point double.  $\forall P, Q$ ,

$$\int_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dxdy$$

**Aire d'un domaine avec Green-Rieman** : En prenant  $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$  et  $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$  on a  $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1$  d'où

$$A(D) = \iint_D dxdy = \int_{\Gamma} xdy = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} xdy - ydx$$

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2(\theta) d\theta \text{ (en polaire)}$$

## 2.4.4 Intégrales surfaciques

**Aire d'une surface paramétrée en  $(u, v)$  :**

$$A(S) = \iint_{\Delta} \|\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v\| dudv \text{ avec } \vec{T}_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{T}_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}, (u, v) \in \Delta$$

**Aire d'une surface explicité en  $z$  :**

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dxdy, (x, y) \in D$$

**Notation :**

$$d\sigma = \|\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v\| dudv$$

**Masse d'une surface :**

$$m = \iint_S \mu(M) d\sigma$$

**Centre de gravité :**

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \iint_S x \mu(M) d\sigma \\ y_G = \frac{1}{m} \iint_S y \mu(M) d\sigma \\ z_G = \frac{1}{m} \iint_S z \mu(M) d\sigma \end{cases}$$

**Moment d'inertie :**

$$\mathcal{J}_{\Delta} = \iint_S [\delta(M\Delta)]^2 \mu(M) d\sigma$$

**Vecteur normal à une surface (paramétrée) :**

$$\vec{n}_1 = -\vec{n}_2 = \frac{\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \wedge \vec{T}_v\|}$$

**Vecteur normal à une surface** (explicitée en  $z$ ) :

$$\vec{n}_1 = -\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

**Orientation d'une surface** : L'orientation associée au vecteur  $\vec{n}$  est faite dans le même sens du mouvement d'un tire-bouchon qui s'enfonce dans la direction de  $\vec{n}$

**Flux d'un champ de vecteur** :

$$\Phi_S(\vec{V}) = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma$$

## 2.5 Théorèmes intégraux

### 2.5.1 Théorème de Stokes-Ampères

Soit  $S$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  et  $\Gamma$  le bord de  $S$  (courbe fermée), alors pour  $\vec{V} = (P(M), Q(M), R(M))^T$  on a

$$\iint_S \text{rot } \vec{V} = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

C'est-à-dire

$$\mathcal{T}_{\Gamma}(\vec{V}) = \Phi_S(\text{rot } \vec{V})$$

### 2.5.2 Théorème de Gauss-Ostrogradski

Soit  $V$  un volume de  $\mathbb{R}^3$  limité par une surface  $\Sigma$ , on a

$$\iiint_V \text{div } \vec{V} = \iint_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \Phi_{\Sigma}(\vec{V})$$

# Chapitre 3

## Algèbre linéaire (MT23)

### 3.1 Espace vectoriels

**Groupe** :  $(G, +)$  est un groupe si :

- $+$  est une loi de composition interne
- $+$  est associative
- $+$  admet un élément neutre  $e$  dans  $G$  tel que  $\forall x \in G, x + e = e + x = x$
- Tout élément de  $G$  admette un symétrique ( $\forall x \in G, \exists \bar{x}$  tel que  $x + \bar{x} = \bar{x} + x = e$ )

**Espace vectoriel** :  $(E, +, \cdot)_K$  est un  $K$ -espace vectoriel si

- $(E, +)$  est un groupe commutatif
- $\cdot$  est une loi de composition externe  $K \times E \rightarrow E$
- $\cdot$  vérifie les propriétés suivantes ( $\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E$ )
  - $(\lambda\mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \vec{x})$
  - $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x} + \mu \vec{x}$
  - $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \vec{x} + \lambda \vec{y}$
  - $1_K \cdot \vec{x} = \vec{x}$

**Sous-espace vectoriel** :  $(F, +, \cdot)$  est un sous-espace vectoriel de  $(E, +, \cdot)$  si  $F \subset E$  et  $(F, +, \cdot)$  est un espace vectoriel

**Caractérisation** :  $F \subset E$  est un sous-espace vectoriel de  $(E, +, \cdot)$  si et seulement si

- $F \neq \emptyset$
- $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \in F$
- $\forall \lambda \in K, \forall \vec{x} \in F, \lambda \vec{x} \in F$

**Somme** :

$$F + G = \{z \in E | z = x + y, x \in F, y \in G\}$$

**Sous-espace supplémentaire** :  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  si

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow E = F + G \text{ et } F \cap G = \{\vec{0}\}$$

**Famille liée** :  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$  est liée s'il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  non tous nuls tel que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i = 0$$

**Famille libre** (famille non liée) :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \wedge \lambda_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i$$

**Sous-espace vectoriel engendré :**

$$\vec{x} \in \text{vect} \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p \rangle \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in K, \vec{x} = \sum \lambda_i \vec{x}_i$$

**Base :** famille libre et génératrice

**Théorème de la base incomplète :** Si  $\mathcal{G}$  est une famille génératrice de  $E$  et  $\mathcal{L}$  une famille libre avec  $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ , alors il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$

**Théorème d'existence :** Tout espace vectoriel fini, non trivial, possède une base

**Dimension :** nombre d'élément d'une base

**Propositions sur les bases :**  $E$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $\mathcal{F}$  une famille de  $p$  vecteur

- Si  $p = n$  et  $\mathcal{F}$  est, soit libre, soit génératrice, alors  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$
- Si  $p > n$  alors  $\mathcal{F}$  est liée
- Si  $p < n$  alors  $\mathcal{F}$  n'est pas génératrice

**Propositions sur les dimensions :**  $E$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$

- $\dim F \leq \dim E$
- $F = E \Leftrightarrow \dim F = \dim E$
- $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$
- $\dim F \oplus G = \dim F + \dim G$

## 3.2 Applications linéaires et matrices

### 3.2.1 Applications linéaires

$E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels sur un même corps  $K$

**Application linéaire :**  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire si

$$f(\vec{x} + \lambda \vec{y}) = f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{y})$$

En particulier on a :  $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

**Ensemble des applications linéaires :**  $\mathcal{L}(E, F)$

**Noyau :** Sous-espace vectoriel de  $E$  tel que

$$\text{Ker } f = \{ \vec{x} \in E \text{ tel que } f(\vec{x}) = \vec{0} \}$$

**Image :** Sous-espace vectoriel de  $F$  tel que

$$\text{Im } f = \{ \vec{y} \in F \text{ tel que } \exists \vec{x} \in E, \vec{y} = f(\vec{x}) \}$$

**Rang :**

$$\text{rang } f = \dim \text{Im } f$$

**Image d'une famille :** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- L'image par  $f$  d'une famille liée de  $E$  est une famille liée de  $F$
- L'image par  $f$  d'une famille génératrice de  $E$  est une famille génératrice de  $F$

**Application injective :**

- $f$  injective  $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{ \vec{0}_E \}$
- Si  $f$  est injective alors l'image par  $f$  d'une famille libre de  $E$  est une famille libre de  $F$

**Application surjective :**

- $f$  surjective  $\Leftrightarrow \text{Im } f = F$
- Si  $f$  est surjective alors l'image par  $f$  d'une famille génératrice de  $E$  est une famille génératrice de  $F$



**Application bijective :**

- $f$  bijective  $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\}$  et  $\text{Im } f = F$
- Si  $f$  est bijective alors l'image d'une base de  $E$  est une base de  $F$

**Définitions :**

**Homomorphisme :** application linéaire de  $E$  dans  $F$

**Endomorphisme :** application linéaire de  $E$  dans  $E$

**Isomorphisme :** bijection linéaire de  $E$  dans  $F$

$E$  et  $F$  sont isomorphes  $\Leftrightarrow \dim E = \dim F$

**Automorphisme :** bijection linéaire de  $E$  dans  $E$

**Théorème du rang :**

$$\dim \text{Ker } f + \text{rang } f = \dim E$$

### 3.2.2 Matrices

Soient  $f$  et  $g$  deux applications linéaires telles que :

$$\begin{array}{ccccc} E & & F & & F & & G \\ & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{g} & & & \\ \mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) & \xrightarrow{M_f} & \mathcal{F} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m) & \xrightarrow{M_g} & \mathcal{G} = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m) \end{array}$$

**Définition :** Pour chaque élément de  $\mathcal{E}$  on a :

$$f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{f}_i$$

On appelle matrice associée à  $f$  le tableau  $M_f$  de scalaire suivant :

$$\begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & \dots & f(\vec{e}_j) & \dots & f(\vec{e}_n) \\ a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{f}_1 \\ \vdots \\ \vec{f}_m \end{matrix}$$

**Somme de matrices :**  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  (associé à  $f + g$ )

**Produit par un scalaire :**  $c_{ij} = \lambda a_{ij}$  (associé à  $\lambda f$ )

**Produit de matrices :** (associé à  $g \circ f$ )

$$\begin{array}{ccccc} E & & F & & G \\ & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{g} & \\ \mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) & \xrightarrow{M_f} & \mathcal{F} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m) & \xrightarrow{M_g} & \mathcal{G} = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n) \\ E & & g \circ f & & G \\ \mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) & \xrightarrow{M_{g \circ f} = M_g M_f} & & & \mathcal{G} = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n) \end{array}$$

**Image d'un vecteur :** Si  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X$  et  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = Y$  image de  $\vec{x}$  par  $f$  alors  $Y = M_f X$

**Inverse d'une matrice carée :** Si  $CM_f = M_f C = I$  alors  $C = M_f^{-1}$  est appelée inverse de  $M_f$   
Et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

**Transposée d'une matrice :**  $(A^T)_{ij} = A_{ji}$   
Et  $(AB)^T = B^T A^T$

**Matrice de passage** : La matrice de passage de la base  $\mathcal{E}$  à la base  $\mathcal{E}'$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{id_E} & E \\ \mathcal{E}' = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) & \xrightarrow{P} & \mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_j & \dots & \vec{e}_n \\ a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_m' \end{matrix}$$

**Changement de base** (composantes d'un vecteur) : Si  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{E}$  à  $\mathcal{E}'$ , alors les coordonnées de  $X'$  dans  $\mathcal{E}'$  en fonction des coordonnées  $X$  dans  $\mathcal{E}$  sont données par  $X = PX' \Leftrightarrow X' = P^{-1}X$

**Changement de base d'un même espace** ( $E = F$ ) :

$M_f$  est la matrice associée à  $f$  quand on choisit la base  $\mathcal{E}$

$M'_f$  est la matrice associée à  $f$  quand on choisit la base  $\mathcal{E}'$

$P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{E}$  à  $\mathcal{E}'$

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{id_E} & E & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{id_E} & E \\ \mathcal{E}' & \xrightarrow{P} & \mathcal{E} & \xrightarrow{M_f} & \mathcal{E} & \xrightarrow{P^{-1}} & \mathcal{E}' \\ E & & & \xrightarrow{f} & & & E \\ \mathcal{E}' & & & \xrightarrow{M'_f = P^{-1}M_fP} & & & \mathcal{E}' \end{array}$$

**Changement d'espace vectoriel** :

$\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  sont deux bases de  $E$

$\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont deux bases de  $F$

$M_f$  est la matrice associée à  $f$  de  $\mathcal{E}$  à  $\mathcal{F}$

$M'_f$  est la matrice associée à  $f$  de  $\mathcal{E}'$  à  $\mathcal{F}'$

$P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{E}$  à  $\mathcal{E}'$

$Q$  est la matrice de passage de  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{F}'$

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{id_E} & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{id_F} & F \\ \mathcal{E}' & \xrightarrow{P} & \mathcal{E} & \xrightarrow{M_f} & \mathcal{F} & \xrightarrow{Q^{-1}} & \mathcal{F}' \\ E & & & \xrightarrow{f} & & & F \\ \mathcal{E}' & & & \xrightarrow{M'_f = Q^{-1}M_fP} & & & \mathcal{F}' \end{array}$$

**Image d'une matrice** :  $\text{Im } M_f = \text{vect} < M_{f_1}, \dots, M_{f_n} >$

$$Y \in \text{Im } M_f \Leftrightarrow X \in \mathcal{M}_{n1} \text{ tel que } Y = M_f X$$

**Rang d'une matrice** :

$$\text{rang } M_f = \dim \text{Im } M_f = \text{nombre de colonnes linéairements indépendants de la matrice}$$

**Théorème du rang** :

$$\dim \text{Ker } M_f + \text{rang } M_f = \dim E$$

**Noyau d'une matrice** :

$$\text{Ker } A = \{X \in \mathcal{M}_{n1} \text{ tel que } AX = 0\}$$

**Condition d'inversibilité d'une matrice** :

$$M_f \text{ inversible} \Leftrightarrow f \text{ inversible}$$

### 3.3 Déterminants et systèmes linéaires

#### 3.3.1 Déterminants

**Notation** : On note  $A_{|i,j|}$  la matrice obtenue, à partir de  $A$  en ôtant la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne

**Définition** :  $\det \mathcal{M}_{n,n} \rightarrow K$

Si  $n = 1$ ,  $A = (a)$  et  $\det A = a$

Si  $n > 1$ ,  $\det A = a_{11} \det A_{|1,1|} + \dots + (-1)^{k+1} a_{1k} \det A_{|1,k|} + \dots + (-1)^{n+1} \det A_{|1,n|}$

**Développement selon la  $i$ -ième ligne** :

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{|i,j|}$$

**Co-facteur** :

$$\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det A_{|i,j|}$$

**Co-matrice** :

$$[\text{co}(A)]_{ij} = \text{cof}(a_{ij})$$

**Transposée** :

$$\det A = \det A^T$$

**Matrice triangulaire** :

$$A \text{ triangulaire} \Rightarrow \det A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

**Matrice à coefficient complexe** :

$$\det \bar{A} = \overline{\det A}$$

**Déterminant d'une famille de vecteur** : Si on note  $X$  la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des  $\vec{x}_i$  dans une base donnée alors  $\det(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \det X$

**Multi-linéarité** :

$$\det(A_1, \dots, \lambda A_k, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A_k, \dots, A_n)$$

$$\det(A_1, \dots, A_{k-1}, B+C, A_{k+1}, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_{k-1}, C, A_{k+1}, \dots, A_n)$$

**Colonnes et lignes** :

- Le déterminant est une fonction multi-linéaire des colonnes/lignes
- Si deux colonnes/lignes sont égales, le déterminant est nul
- Si on échange entre elles deux colonnes/lignes, le déterminant change de signe
- Si, à une colonne, on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes, le déterminant ne change pas
- Si, à une ligne, on ajoute une combinaison linéaire des autres lignes, le déterminant ne change pas

**Produit de matrices** :

$$\det AB = \det B \det A$$

**Matrice inversible** :

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \text{ et } \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

**Base d'un espace vectoriel** :

$$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \neq 0$$

**Rang d'une matrice** : Le rang de  $A$  est le plus grand entier  $r$  tel qu'il existe une matrice inversible de dimension  $r$  extraite de  $A$

De plus,  $\text{rang } A = \text{rang } A^T$

**Famille libre** : Soit  $H = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$  une famille de vecteur de  $E$ , si on note  $X$  la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs  $\vec{x}_i$ , alors  $H$  est une famille libre s'il existe une matrice inversible  $n \times n$  extraite de  $X$

### 3.3.2 Systèmes linéaires $Ax = b$

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

**Existence de solution (matrice carrée) :**

Si  $\det A \neq 0$  le système admet une unique solution quelque soit  $b$

Sinon si  $b \in \text{Im } A$  alors le système admet une infinité de solution

Sinon, il n'en admet aucune

**Méthode de Cramer (matrice carrée) :**

$$x_i = \frac{\det A_{[i]}}{\det A} \text{ avec } A_{[i]} \text{ la matrice carrée formée en remplaçant la } i\text{-ième colonne de } A \text{ par } b$$

**Existence de solution (cas générale) :** On pose  $r = \text{rang } A$

Si les  $r$  premières colonnes forment une famille libre, alors

$$Ax = b \text{ admet une unique solution } \Leftrightarrow b \in \text{vect} < A_1, \dots, A_r >$$

**Méthode de Cramer (cas générale) :**

On note  $r = \text{rang } A$

On note  $A^*$  une matrice inversible  $r \times r$  extraite de  $A$

On note  $\hat{A}$  la matrice extraite de  $A$  dont les lignes correspondent à celles de  $A$  utilisées pour construire  $A^*$

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}x = \hat{b} \\ x \text{ vérifie les } (n-r) \text{ dernières équations} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^*x = b^* - \sum_{j=r+1}^{n-r} x_j \hat{A}_j \\ x \text{ vérifie les } (n-r) \text{ dernières équations} \end{cases}$$

**Calcul de l'inverse d'une matrice :** Il s'agit de résoudre  $\forall j, A(A^{-1})_j = I_j$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (co(A))^T$$

## 3.4 Valeurs propres et diagonalisation

### 3.4.1 Valeurs propres

**Valeur propre d'un endomorphisme :**  $\lambda \in K$  est une valeur propre de  $f \in \mathcal{L}(E, F) \Leftrightarrow \exists \vec{y} \in E, \vec{y} \neq \vec{0}$  tel que

$$f(y) = \lambda \vec{y}$$

**Valeur propre d'une matrice :**  $\lambda \in K$  est une valeur propre de  $\mathcal{M}_{nm}(K) \Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{M}_{n1}, Y \neq 0$  tel que

$$AY = \lambda Y$$

**Couple propre :**  $(\lambda, Y)$  avec  $\lambda$  valeur propre et  $Y$  un vecteur propre associé à  $\lambda$

**Polynôme caractéristique :**

$$\pi_A(s) = \det(sI - A)$$

**Caractérisation d'une valeur propre :**

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Leftrightarrow \pi_A(s) = 0$$

**Multiplicité d'une valeur propre :** On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  de multiplicité  $r$  si  $\lambda$  est une racine de multiplicité  $r$  de  $\pi_A$

De plus, si  $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$  admet  $p$  valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de multiplicité  $r_1, \dots, r_p$ , alors  $\sum_{i=1}^p r_i = n$

**Propriétés :**

- Si  $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathcal{C})$  alors  $\bar{\lambda}$  valeur propre de  $A$
- Si  $A$  est diagonale alors les valeurs propres de  $A$  sont ses termes diagonaux
- $A$  et  $A^T$  ont les mêmes valeurs propres
- Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres
- Si  $\mu_1, \dots, \mu_n$  sont les valeurs propres de  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  alors

$$\text{trace } A = \sum_{i=1}^n \mu_i \text{ et } \det A = \prod_{i=1}^n \mu_i$$

**Sous-espace propre** : Si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ , alors le sous-espace propre associé est

$$V_\lambda = \{Y \in \mathcal{M}_{n1} | AY = \lambda Y\} = \ker(A - \lambda I)$$

**Famille de vecteurs propres** : Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont des valeurs propres distinctes de  $A$ , alors  $(Y_1, \dots, Y_p)$  est une famille libre ( $Y_i$  associé à  $\lambda_i$ )

**Dimension d'un sous-espace propre** : Si  $\lambda$  est une valeur propre de multiplicité  $m$  de  $A_n$  alors  $\dim V_\lambda \leq m$

**Théorème de Cayley-Hamilton** :

$$\pi_A(A) = 0$$

## Diagonalisation

**Diagonalisation** :  $A$  est dite diagonalisable dans  $K$  s'il existe  $D \in \mathcal{M}_{nn}(K)$  diagonale et  $P \in \mathcal{M}_{nn}(K)$  inversible telle que

$$A = P^{-1}DP$$

**Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation** : Soit  $A \in \mathcal{M}_{nn}(K)$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les  $k$  valeurs propres de  $A$  de multiplicité  $m_1, \dots, m_k$ , alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

- $A$  diagonalisable
- $\forall i = 1, \dots, k, \dim \ker(A - \lambda_i I) = m_i$
- $\sum_{i=1}^n \dim \ker(A - \lambda_i I) = n$

**Condition suffisante de diagonalisation** :  $A \in \mathcal{M}_{nn}(K)$ , si  $A$  admet  $n$  valeurs propres distinctes dans  $K$  alors  $A$  est diagonalisable dans  $K$

**Proposition** : Si  $\lambda$  est valeur propre de  $A \in \mathcal{M}_{nn}(R)$  de multiplicité  $n$ , alors  $A$  diagonalisable  $\Leftrightarrow A = \lambda I$

**Calcul pratique** :

1. Déterminer les valeurs propres de  $A$  :  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$
2. Déterminer les sous-espaces propres de  $A$  pour chaque  $\lambda_i$  ( $\dim V_i = m_i$ )
3. On a alors :

$$P = \left( \underbrace{Y_1, Y_2, \dots, Y_p}_{\text{associés à } \lambda_1}, \underbrace{Y_{p+1}, \dots, Y_q}_{\text{associés à } \lambda_2}, \dots, \underbrace{Y_m, \dots, Y_n}_{\text{associés à } \lambda_k} \right)$$

4.  $D = P^{-1}AP$

**Triangulisation** : Toute matrice à coefficients complexes est semblable à une matrice triangulaire supérieure

**Application : Calcul de puissance** :

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1}$$

**Application : Résolution d'un système de suite récurrente** : Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles définies par

$$\begin{cases} u_0, v_0 \text{ données} \\ u_{n+1} = a_{11}u_n + a_{12}v_n \\ v_{n+1} = a_{21}u_n + a_{22}v_n \end{cases}$$

En posant

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

On a alors

$$X_{n+1} = AX_n \text{ et donc } X_n = A^n X_0$$

## 3.5 Espaces euclidiens

### 3.5.1 Généralités

**Produit scalaire** :  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle, E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est un produit scalaire si elle vérifie les propriétés suivantes

1. Symétrie :  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2. Linéarité :  $\langle x_1 + \mu x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \mu \langle x_2, y \rangle$
3. Positivité :  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$  et  $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

**Inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

**Famille liée** :

$$(x, y) \text{ est liée} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

**Norme** :  $x \mapsto \|x\|, E \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une norme si elle vérifie les propriétés suivantes

1. Séparativité :  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
2. Homogénéité :  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. Inégalité triangulaire :  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Proposition** : Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'un produit scalaire alors  $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$  est une norme sur  $E$

**Vecteurs orthogonaux** :  $x, y$  orthogonaux  $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$

**Famille de vecteur orthogonale** :  $(x_1, \dots, x_p)$  est dite orthogonale si  $\langle x_i, x_j \rangle = 0, \forall i, j, i \neq j$

**Famille de vecteur orthonormée** :  $(x_1, \dots, x_p)$  est dite orthonormée si elle est orthogonale et si  $\|x_i\| = 1, \forall i$

**Théorème de Pythagore** :

$$\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$$

**Sous-espace orthogonal** :

$$F^\perp = \{x \in E | \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}$$

**Caractérisation** : Si  $F = \text{vect} \langle f_1, \dots, f_p \rangle$

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \langle x, f_i \rangle = 0, \forall i$$

**Famille libre** : Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace euclidien est libre

**Théorème** : Soit  $E$  un espace euclidien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors

$$E = F \oplus F^\perp$$

**Espaces orthogonaux** : Si  $F = \text{vect} \langle f_1, \dots, f_p \rangle$  et  $G = \text{vect} \langle g_1, \dots, g_q \rangle$  alors

$$F, G \text{ orthogonaux} \Leftrightarrow \langle f_i, g_j \rangle = 0, \forall i, j$$

**Proposition** : Si  $F$  et  $G$  sont orthogonaux alors  $F \cap G = \{0\}$

**Procédé d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt** : Si  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  est une famille libre de  $E$ , alors il existe une famille orthonormée  $(y_1, y_2, \dots, y_p)$  telle que  $\text{vect} \langle x_1, x_2, \dots, x_p \rangle = \text{vect} \langle y_1, y_2, \dots, y_p \rangle, \forall k = 1 \dots p$

—  $p = 1$  :  $y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$  on a alors  $\text{vect} \langle x_1 \rangle = \text{vect} \langle y_1 \rangle$

—  $p = 2$  : on pose  $\hat{y}_2 = x_2 + \beta y_1$  et  $y_2 = \frac{\hat{y}_2}{\|\hat{y}_2\|}$

Par construction, on a  $\text{vect} \langle x_1, x_2 \rangle = \text{vect} \langle y_1, y_2 \rangle$  et  $\langle \hat{y}_2, y_1 \rangle = \langle x_2 + \beta y_1, y_1 \rangle = 0 \Rightarrow \beta = -\langle x_2, y_1 \rangle$

—  $p = 3$  : on pose  $\hat{y}_3 = x_3 + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2$  et  $y_3 = \frac{\hat{y}_3}{\|\hat{y}_3\|}$   
et  $\beta_1 = -\langle x_3, y_1 \rangle, \beta_2 = -\langle x_3, y_2 \rangle$

— ...

**Projection orthogonale** : Soit  $F$  un sous-espace de  $E$ , et soit  $(f_1, f_2, \dots, f_p)$  une base orthonormée de  $F$ , alors  $\forall x \in E, x = x_F + x_{F^\perp}$

$$x_F = \sum_{k=1}^p \langle x, f_k \rangle f_k$$

### 3.5.2 Matrices orthogonales

**Définition** :  $Q \in \mathcal{M}_{nn}(K)$  est orthogonale si et seulement si

$$(Q_i)^T Q_j = \delta_{ij} \text{ (Kronecker)}$$

**Condition nécessaire et suffisante** :

$$Q \text{ orthogonale} \Leftrightarrow Q^T Q = I \text{ (i.e. } Q^T = Q^{-1})$$

**Matrice de passage** : La matrice de passage entre deux bases orthonormées est une matrice orthogonale

**Stabilité** : Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(K)$  deux matrices orthogonales

- $A^T$  est orthogonale
- $AB$  est orthogonale

**Propositions** :

- $Q$  orthogonale  $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = \|Qx\|$  (norme usuelle de  $\mathbb{R}^n$ )
- $Q$  orthogonale  $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = \langle Qx, Qy \rangle$

### 3.5.3 Matrices symétriques

**Proposition** : Soit  $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux valeurs propres de  $A$  alors les vecteurs propres associés  $y_1$  et  $y_2$  sont orthogonaux

**Théorème** : Soit  $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique

- Toute les valeurs propres de  $A$  sont réelles
- $A$  est diagonalisable et  $P$  est orthogonale :  $D = P^T A P$

### 3.5.4 Formes quadratiques

**Définie-positivité** :

- $A$  est semi-positive si  $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T A x \geq 0$
- $A$  est définie-positive si, de plus,  $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T A x = 0 \Rightarrow x = 0$

**Proposition** :

- Les termes diagonaux d'une matrice définie positive sont strictement positifs
- Toute matrice symétrique définie-positive est inversible

**Définition** : Polynôme de degré 2 des variables  $(x_1, \dots, x_n)$

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j < n} \beta_{ij} x_i x_j$$

**Caractérisation** :

$$q \text{ est une forme quadratique} \Leftrightarrow \exists ! A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}), q(x) = x^T A x$$

# Chapitre 4

## Analyse numérique (MT09)

### 4.1 Systèmes linéaires

#### 4.1.1 Algorithme de Gauss

**Élimination de Gauss** : Soit une matrice  $A \in \mathcal{M}_{nn}$  et  $b \in \mathcal{M}_{n1}$ , pour résoudre efficacement l'équation  $Ax = b$ , on cherche à transformer  $A$  en une matrice triangulaire grâce à l'algorithme de Gauss.

On note  $A^{(0)} = A$

On trouve alors  $A^{(k+1)}$  en fonction de  $A^{(k)}$  avec :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \\ b_{ij}^{(k+1)} = b_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_{kj}^{(k)}, \text{ pour } j = k, k+1, \dots, n \end{cases}$$

L'algorithme termine pour  $k = n$

**Écriture matricielle de Gauss** : On peut écrire les équations précédentes sous la forme matricielle suivante, en notant  $\underline{A}_i$  la  $i$ -ième ligne de  $A$

$$\underline{A}_i^{(i)} = \underline{A}_i^{(i-1)} - \left( \frac{a_{i,i-1}^{(i-1)}}{a_{i-1,i-1}^{(i-1)}} \right) \underline{A}_{i-1}^{(i-1)}$$

**Pivot** : Les coefficients  $a_{kk}^{(k)}$  sont appelées les pivots de Gauss

#### 4.1.2 Factorisation de matrices

**Sous-matrice principale** : On appelle sous-matrice principale de  $A$  d'ordre  $k$  la matrice notée

$$[A]_k = (a_{ij})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k}$$

**Factorisation LU** : Il s'agit de trouver  $U \in \mathcal{M}_{nn}$  triangulaire supérieur et  $L \in \mathcal{M}_{nn}$  triangulaire inférieur telle que  $A = LU$ ,  $L$  ayant tous ses termes diagonaux égaux à 1 cf. Algorithme de Doolittle

**Existence** :

$$A \text{ est LU-factorisable} \Leftrightarrow [A]_1, [A]_2, \dots, [A]_n \text{ inversible}$$

**Unicité** : La factorisation  $LU$ , si elle existe, est unique

**Factorisation PALU** : Si  $A$  est non  $LU$ -factorisable, on peut permuter les lignes de  $A$  pour effectuer la factorisation.

Le système s'écrit alors  $PA = LU \Leftrightarrow C = LU$  avec  $C = PA$  et  $P$  la matrice carrée indiquant les permutations effectuées

**Factorisation LUPAQ** : Pour les mêmes raisons, et de manière similaire, on peut permuter les colonnes de  $A$ .

Le système devient alors  $PAQ = LU \Leftrightarrow C = LU$  avec  $C = PAQ$



**Application à la résolution de systèmes linéaires** : Si  $A$  est  $LU$ -factorisable, alors

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

(Ce qui est immédiat puisque  $L$  et  $U$  sont triangulaires)

**Factorisation  $LDL^T$**  : Si  $A$  est  $LU$ -factorisable et symétrique, alors  $\exists L, D \in \mathcal{M}_{nn}$  avec  $L$  une matrice triangulaire inférieur à diagonale unité et  $D$  une matrice diagonale telle que

$$A = LDL^T$$

**Factorisation de Cholesky ( $BB^T$ )** : Si  $A$  est une matrice symétrique définie-positive alors elle admet une factorisation unique  $A = BB^T$  avec  $B$  une matrice triangulaire inférieur dont les termes diagonaux sont positifs.  
cf. Algorithme de Cholesky

## 4.2 Problèmes de moindres carrées

**Définition** : Le problème des moindres carrées consiste à trouver  $x^*$  telle que

$$x^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$$

**Équation normale** :

$$x^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| \Leftrightarrow A^T Ax^* = A^T b$$

Cette équation provient de  $\|A(x^* + \Delta x) - b\|_2^2$

## 4.3 Méthodes itératives

### 4.3.1 Définitions

**Méthode itérative** : Les méthodes itératives consistent à, étant donné  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $f(\bar{x}) = 0$ ,  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , construire une suite  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = \bar{x}$

**Méthode des points fixes** : Pour résoudre  $f(x) = 0$ , on écrit l'équation sous la forme  $x = g(x)$  puis on construit la suite

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donnée} \\ x^{(n+1)} = g(x^{(n)}) \end{cases}$$

**Théorème de convergence** : Si  $g$  est continue et si  $(x^{(n)})_n$  converge alors  $(x^{(n)})_n$  converge vers un point fixe de  $g$

**Théorème de convergence globale** : Soit  $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction continuellement dérivable sur  $[a, b]$ . S'il existe  $k \in \mathbb{R}$  telle que  $0 \leq k < 1$  et  $\forall x \in [a, b]$ ,  $|g'(x)| \leq k$ , alors  $g$  possède un unique point fixe  $x^* \in [a, b]$  et la suite  $\begin{cases} x^{(0)} \in [a, b] \\ x^{(n+1)} = g(x^{(n)}) \end{cases}$  converge vers  $x^*$

**Théorème de convergence locale** : Soit  $x^*$  un point fixe de  $g$ , fonction continuellement dérivable vérifiant  $|g'(x)| < 1$  alors la suite  $\begin{cases} x^{(0)} \in [a, b] \\ x^{(n+1)} = g(x^{(n)}) \end{cases}$  converge vers  $x^*$  à condition que  $x^{(0)}$  soit suffisamment proche de  $x^*$

### 4.3.2 Méthodes de Newton (équation et systèmes non-linéaires)

**Méthode de Newton** : Obtenu géométriquement ou par troncature du développement de Taylor

$$x^{(0)} \in \mathbb{R} \quad x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$

**Théorème de convergence quadratique** : Soit  $g$  une fonction définie et deux fois continuellement dérivable de  $[a, b]$  dans lui-même. Soit  $x^* \in [a, b]$  tel que  $g(x^*) = x^*$  et  $g'(x^*) = 0$ . Alors la suite définie par  $\begin{cases} x^{(0)} \in [a, b] \\ x^{(n+1)} = g(x^{(n)}) \end{cases}$  converge et

$$|x^{(n+1)} - x^*| \leq \frac{M}{2} |x^{(n)} - x^*|^2 \text{ avec } M = \max_{x \in [a, b]} |g''(x)|$$

Pour Newton :  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow g(x^*) = x^*$  et  $g'(x^*) = 0$

**Matrice Jacobienne** :

$$Df(x) = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right), x \in \mathbb{R}^n$$

**Méthode de Newton pour un système d'équation** : En tronquant les développements de Taylor de dimensions  $n$  à l'ordre 1 on obtient

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - f(x^{(i)}) \times [Df(x^{(i)})]^{-1}$$

### 4.3.3 Résolution de systèmes linéaires (Jacobi et Gauss-Seidel)

**Principe générale** : Pour résoudre le système  $Ax = b$ , on utilise la suite  $x^{(k)}$  suivante :

$$x_0 \in \mathbb{R}Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$$

Avec  $A = M - N$  de sorte que, lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $(x^{(n)})_n$  converge vers  $\bar{x}$  et alors  $(M - N)\bar{x} = b \Leftrightarrow A\bar{x} = b$

**Méthode de Jacobi** : La méthode de Jacobi consiste, à chaque itération  $k$ , à résoudre chaque équation par rapport à une variable, les autres restant fixes. On obtient alors  $M = D$  et  $N = L + U$ . En pratique :

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} = b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^{(k)} \\ \vdots \\ a_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)} \\ \vdots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} = b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k)} \end{cases}$$

**Méthode de Gauss-Seidel** : Modification de la méthode de Jacobi qui consiste à utiliser pour chaque équation les composantes  $x^{(k+1)}$  déjà calculés. Il vient alors que  $M = D - L$  et  $N = U$ . En pratique :

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} = b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^{(k)} \\ \vdots \\ a_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \\ \vdots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} = b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k)} \end{cases}$$

**Théorème de convergence** : On considère la méthode itérative suivante :  $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d$  avec  $x^{(0)}$  donné

- S'il existe une norme matricielle subordonnée telle que  $\|C\| < 1$  alors la méthode converge vers la solution de  $(I - C)\bar{x} = d$  quel que soit  $x^{(0)}$
- La méthode converge si et seulement si  $\rho(C) < 1$ , avec  $\rho(C)$  = "plus grande valeur propre de  $C$ "

**Matrice à diagonale strictement dominante** : On dit que la matrice  $A$  est à diagonale strictement dominante si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall i \leq n$$

**Théorème de convergence pour Jacobi et Gauss-Seidel** : Si la matrice  $A$  est à diagonale strictement dominante alors les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent

**Théorème de convergence pour Gauss-Seidel** : Si la matrice  $A$  est symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel est convergente

## 4.4 Interpolation

**Existence** : Soient  $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$  distincts et soient  $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ , il existe un et un seul polynôme  $p \in \mathcal{P}_n$  tel que

$$p_n - (t_i) = y_i, \forall i = 0, 1, \dots, n$$

**Dans la base canonique** : Dans la base canonique  $(1, x, x^2, \dots, x^n)$  il suffit de résoudre le système  $p_i(t_i) = y_i$  i.e.

$$Ax = b \text{ avec } \begin{cases} \underline{A_i} = \begin{pmatrix} 1 & t_i & t_i^2 & \dots & t_i^n \end{pmatrix} \\ \underline{b_i} = (y_i) \\ x = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}^T \end{cases}$$

**Dans la base de Lagrange** : On appelle base de Lagrange la famille

$$(\mathcal{L}_1(t), \mathcal{L}_2(t), \dots, \mathcal{L}_n(t)) \text{ où } \mathcal{L}_i(t) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{t - t_k}{t_i - t_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i = t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le polynôme d'interpolation est alors donné par

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^n y_i \mathcal{L}_i(t)$$

**Erreur** : On note  $e_n(t) = f(t) - p_n(t)$  l'erreur d'interpolation. On note également  $\pi_n(t) = (t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_n)$  Alors (en notant  $Int(t_0, \dots, t_n)$  le plus petit interval contenant les  $t_0, \dots, t_n$ )

$$e_n(t) = \frac{\pi_n(t)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \text{ avec } \xi \in Int(t_0, \dots, t_n)$$

**Dans la base de Newton** : Dans la base de Newton  $(1, t - t_0, (t - t_0)(t - t_1), \dots, (t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_{n-1}))$ , le polynôme d'interpolation est donné par

$$p_n(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + \dots + c_n(t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_{n-1})$$

Où les  $c_k$  sont les différences divisées d'ordre  $k$

**Différence divisée** : Soit  $f$  une fonction dont on connaît les valeurs en des points distincts  $t_0, t_1, \dots, t_n$ . On appelle différence divisée l'expression suivante :

$$\begin{cases} f[a] = f(a) \\ f[a, X, b] = \frac{f[a, X] - f[X, b]}{a - b} \end{cases}$$

**Calcul pratique des différences divisées** : Les coefficients  $c_k$  sont sur la diagonale en  $k$ -ième position

$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$\dots$	$k = n$
$f[t_0]$				
$f[t_1]$	$f[t_0, t_1]$			
$f[t_2]$	$f[t_1, t_2]$	$f[t_0, t_1, t_2]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$f[t_n]$	$f[t_{n-1}, t_n]$	$f[t_{n-2}, t_{n-1}, t_n]$	$\dots$	$f[t_0, t_1, \dots, t_n]$

**Schéma de Horner** : Pour calculer  $p_3(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)(t - t_1) + c_3(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)$ , on calcul plutôt

$$p_3(t) = c_0 + (t - t_0)[c_1 + (t - t_1)[c_2 + (t - t_2)[c_3]]]$$

**Splines cubiques** : Soit  $\Delta = (a = t_0, t_1, \dots, t_n = b)$  une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ . On dit qu'une fonction  $g$  est un spline cubique si

- $g \in C^2([a, b])$
- $g$  correspond sur chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  à un polynôme de degré inférieur à 3
- $g(t_i) = y_i$

## 4.5 Intégration numérique

**Principe** : On cherche à approximer  $I(f) = \int_a^b f(x)dx$  par une fonction

$$J(f) = \sum \omega_i f(t_i)$$

Où  $\omega_i$  est appelé poids du noeud  $t_i$

**Ordre** : On dit qu'une méthode est d'ordre  $k$  si

$$I(1) = J(1), I(X) = J(X), \dots, I(X^k) = J(X^k) \text{ et } I(X^{k+1}) \neq J(X^{k+1})$$

**Erreur d'intégration** :  $e(f) = I(f) - J(f)$

**Méthode des rectangles** (ici, à gauche) : Méthode d'ordre 0 et d'erreur locale (sur  $[t_i, t_{i+1}]$ ) de  $\frac{h^2}{2} f''(\eta_0)$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n h f(t_i) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

**Méthode des rectangles centrées** : Méthode d'ordre 1 et d'erreur locale  $\frac{h^3}{24} f''(\eta_0)$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} h f\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

**Méthode des trapèzes** : Méthode d'ordre 1 et d'erreur locale  $\frac{h^3}{12} f''(\eta_0)$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} h \left( \frac{f(t_i) + f(t_{i+1})}{2} \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

**Méthode de Simpson** : Méthode d'ordre 3

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h}{3} (f(t_{i-1}) + 4f(t_i) + f(t_{i+1})) + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

## 4.6 Équations différentielles

### 4.6.1 Schémas numériques

**Équation d'ordre  $n$**  : Soit  $y^{(n)} = f(t, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$

On pose  $U = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$  et donc  $U' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ f(t, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \end{pmatrix}$  Cela revient donc à résoudre

$$U'(t) = F(t, U(t)) \text{ avec } F : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ f(t, x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

**Schéma à un pas** : Si on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $[t_0, t_1, \dots, t_k]$  alors résoudre  $y'(t) = f(t, y(t))$  sur  $[t_i, t_{i+1}]$  revient à résoudre  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$ , on utilise les méthodes d'intégration numériques classiques (intégration à gauche, à droite, trapèze, point milieu)

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

**Schéma prédicteur-correcteur à pas simple** (Euler retrograde) :

$$\begin{cases} \hat{z}_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n) \\ z_{n+1} = z_n + hf(t_{n+1}, \hat{z}_{n+1}) \end{cases}$$

**Schéma d'Euler-Cauchy** :

$$\begin{cases} \hat{z}_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n) \\ z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}(f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, \hat{z}_{n+1})) \end{cases}$$

## 4.6.2 Propriétés

Soit le schéma suivant :  $\begin{cases} z_0 = y(t_0) \\ z_{n+1} = z_n + h\Phi(t_n, z_n, h) \end{cases}$

**Erreur locale** : (C'est-à-dire l'erreur  $\tau_{n+1} = y(t_{n+1}) - z_{n+1}$  si on suppose  $z_n = y(t_n)$ )

$$\tau_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\Phi(t_n, y(t_n), h)$$

**Ordre d'un schéma** : On dit qu'un schéma est d'ordre  $p$  si

$$\exists K > 0, \max_{1 \leq n \leq N} \left| \frac{\tau_n(h)}{h} \right| \leq Kh^p$$

**Schéma consistant** : Un schéma est dit consistant si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq n \leq N} \left| \frac{\tau_n(h)}{h} \right| = 0$$

**Proposition** : Un schéma d'ordre positif est consistant

**Schéma convergent** : Un schéma est dit convergent si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq n \leq N} |y(t_i) - z_i| = 0$$

**Schéma stable** : Un schéma stable s'il existe une constante  $M$  telle que pour tout  $z_0$ , pour tout  $u_0$ , et pour toute

suite  $\epsilon_i$ , les suites  $z_i$  et  $u_i$  définies par  $\begin{cases} z_{i+1} = z_i + h\Phi(t_i, z_i, h) \\ u_{i+1} = u_i + h\Phi(t_i, u_i, h) \end{cases}$  vérifient la condition suivante

$$\forall i = 1 \dots N, |z_i - u_i| \leq M \left( |z_0 - u_0| + \sum_{k=0}^{i-1} |\epsilon_k| \right)$$

**Condition suffisante de stabilité** : Pour qu'un schéma soit stable, il suffit que  $\Phi$  soit lipschitzienne pour son deuxième argument

**Théorème de convergence** : Un schéma stable et consistant converge.

## 4.7 Valeurs propres

# Chapitre 5

## Statistiques (SY02)

5.1 Éléments de probabilités

5.2 Échantillonnage

5.3 Estimation

5.4 Intervalle de confiance

5.5 Estimation optimale

5.6 Régression linéaire

5.7 Tests d'hypothèses

5.8 Tests de conformité

5.9 Tests d'homogénéité

5.10 Tests d'adéquation

5.11 Tests d'indépendance

5.12 Analyse de la variance

## Chapitre 6

# Optimisation (RO03/RO04)

6.1 Algorithmes de graphe

6.2 Programmation linéaire

6.3 Optimisation non-linéaire

## Chapitre 7

# Formulaires

7.1 Équations différentielles

7.2 Trigonométrie