

# Mathématiques

Henri LEFEBVRE

20 octobre 2017

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Analyse dans <math>\mathbb{R}</math> (MT90/MT91/MT12)</b>	<b>2</b>
1.1	Propriétés de $\mathbb{R}$ . . . . .	2
1.2	Suites réelles $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	3
1.3	Fonctions réelles $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (généralités) . . . . .	4
1.4	Dérivation . . . . .	4
1.5	Théorie de la mesure . . . . .	5
1.5.1	Généralités . . . . .	5
1.5.2	Exemples de mesures . . . . .	6
1.6	Intégration . . . . .	6
1.6.1	Définitions . . . . .	6
1.6.2	Propriétés . . . . .	7
1.6.3	Convergence . . . . .	8
1.6.4	Intégrale de Riemann-Stieltjes . . . . .	9
1.6.5	Fonctions définies par une intégrale . . . . .	9
1.6.6	Introduction au calcul des variations . . . . .	10
1.7	Séries dans $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.7.1	Généralités . . . . .	10
1.7.2	Séries de Taylor . . . . .	11
1.7.3	Séries de Fourier . . . . .	12
1.8	Le corps $\mathbb{C}$ . . . . .	13
1.9	Distributions . . . . .	14
1.9.1	Fonctions test ou de base : $\mathcal{D}$ . . . . .	14
1.9.2	Distributions : $\mathcal{D}'$ . . . . .	15
1.10	Convolution . . . . .	15
1.10.1	Convolution de fonction . . . . .	15
1.10.2	Convolution de suite . . . . .	15
1.10.3	Convolution de distribution et algèbre dans $\mathcal{D}'_+$ . . . . .	15
1.11	Transformées de Fourier . . . . .	15
1.12	Transformées de Laplace . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Analyse dans <math>\mathbb{R}^n</math> (MT22)</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>Algèbre linéaire (MT23)</b>	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>Analyse numérique (MT09)</b>	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>Statistiques (SY02)</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Optimisation (RO04)</b>	<b>20</b>
<b>7</b>	<b>Formulaires</b>	<b>21</b>

# Chapitre 1

## Analyse dans $\mathbb{R}$ (MT90/MT91/MT12)

### 1.1 Propriétés de $\mathbb{R}$

**Structure** :  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  est un corps ordonné

**Formule du binôme** :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ avec } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

**Produit scalaire** :  $\langle x, y \rangle = xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$

**Norme ( $\mathbb{R}$ ) (valeur absolue)** :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \rightarrow |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$

**Positivité** :  $|x| > 0$  et  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

**Homothétie** :  $|ax| = |a||x|$

**Inégalité triangulaire** :  $|x + y| \leq |x| + |y|$

**Convergence** :  $f(x) \rightarrow l \Leftrightarrow |f(x) - l| \rightarrow 0$

**Intervalles** :  $I$  est un intervalle si  $\forall a, b \in I, a < c < b \Rightarrow c \in I$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$
$$c \in [a, b] \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 1], c = \theta a + (1 - \theta)b$$

**Densité de  $\mathbb{Q}$**  :

$$\forall ]a, b[ \neq \emptyset, \exists \alpha \in \mathbb{Q} \cap ]a, b[ \text{ et } \exists \beta \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap ]a, b[$$

**Ensembles bornés** : Soit  $A \subset \mathbb{R}$

**Majoration** :  $\forall x \in A, x \leq M$

**Minoration** :  $\forall x \in A, x \geq m$

**Encadrement** :  $\forall x \in A, |x| < M$

**Borne supérieure** : Plus petit des majorants (s'ils existent)

$$s = \sup A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A, x \leq s \\ \forall t < s, \exists x \in A \text{ tel que } t < x \end{array} \right.$$

**Droite numérique achevée** :  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

## 1.2 Suites réelles $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

**Définition** :  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto u_n$

**Convergence** :

$$(U_n) \longrightarrow l, n \longrightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

**Limite infinie** :

$$(U_n) \longrightarrow l, n \longrightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow u_n > \varepsilon)$$

**Convergences connues** :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{n!} = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{k^n} = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln \beta)^\beta}{n^\alpha} = 0$$

**Propriétés de convergence** : Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $u_n \longrightarrow l$  et  $v_n \longrightarrow l'$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Combinaison** :  $u_n + \lambda v_n \longrightarrow l + \lambda l'$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Produit** :  $u_n v_n \longrightarrow \infty$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Quotient** : Si  $l' \neq 0$ ,  $u_n/v_n \longrightarrow l/l'$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Vers zéro** : Si  $u_n \longrightarrow 0$  et  $v_n$  bornée, alors  $u_n v_n \longrightarrow 0$  quand  $n \longrightarrow \infty$

**Ordre** : Si  $u_n \leq v_n$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

**Suites adjacentes** :  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites adjacentes si et seulement si

$$(u_n) \text{ est croissante; } (v_n) \text{ est décroissante; } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$$

**Suite arithmétique** :

**Définition récursive** :  $u_{n+1} = u_n + r$

**Définition générale** :  $u_n = u_0 + nr$

**Somme des termes** :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

**Suite géométrique** :

**Définition récursive** :  $u_{n+1} = q u_n$

**Définition générale** :  $u_n = q^n u_0$

**Somme des termes** :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

**Suites récurrentes** :  $u_{n+1} = f(u_n)$

Si  $\exists l \in \mathbb{R}$  point fixe de  $f$  (i.e.  $f(l) = l$ ) et  $f$  contractante (i.e.  $f$   $k$ -lipschitzienne avec  $0 < k < 1$ ) alors  $(u_n) \longrightarrow l$

## 1.3 Fonctions réelles $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (généralités)

**Définition** :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$

**Image** :  $\forall A \subset \mathbb{R}, f(A) = \{y | \exists x \in A, y = f(x)\}$

**Image réciproque** :  $f^{-1}(B) = \{x \in D_f | f(x) \in B\}$

**Support** :  $\text{supp } \varphi = \overline{\{x | \varphi(x) \neq 0\}}$

**Correspondances** : Pour  $f : E \rightarrow F$

**Surjection** :  $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

**Injection** :  $\forall y \in F, \exists x \in E$  tel que  $y = f(x)$

**Bijection** :  $\forall y \in F, \exists ! x \in E$  tel que  $y = f(x)$  ( $f$  injective et surjective)

**Composée** :  $f \circ g(x) = f(g(x))$

**Fonction identité** :  $id : x \mapsto x$

**Bijection réciproque** : Si  $f$  bijective, alors  $\exists f^{-1}$  tel que  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$

**Convergence** :  $f(x) \rightarrow l, x \rightarrow a$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

**Limite à droite** :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, a < x < a + \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

**Caractérisation de la limite** (par les suites) :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \left( \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \Omega - \{a\} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l \right)$$

**Continuité** :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**Théorème des valeurs intermédiaires** (TVI) : Soit  $f \in C^0([a, b])$  et  $y \in \mathbb{R}$

$$f(a) < y < f(b) \Rightarrow \exists x \in [a, b], f(x) = y$$

**Condition de Lipschitz** :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

## 1.4 Dérivation

**Dérivabilité** :  $f$  est dérivable si et seulement si

$$\exists d \in \mathbb{R}, \text{ tel que } f(x + h) = f(x) + hd + |h|\epsilon(h)$$

**Taux de variation** :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

**Théorème de Rolle** : Soit  $f \in C^0([a, b])$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = 0$$

**Théorème des accroissements finis** : Soit  $f \in C^0([a, b])$

$$\exists c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Formule de Leibniz** :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

**Opérations** :

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g', \lambda \in \mathbb{R}; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}; (f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$$

**Fonction réciproque** :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

**Dérivées connues** :

$$(x^q)' = qx^{q-1}, q \in \mathbb{Z}; (e^x)' = e^x; (\ln |x|)' = \frac{1}{x}; (\cos x)' = -\sin x; (\sin x)' = \cos x; (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Saut d'une fonction** :

$$\sigma_m = f^{(m)}(0^+) - f^{(m)}(0^-), m \geq 0$$

## 1.5 Théorie de la mesure

### 1.5.1 Généralités

**Fonction indicatrice** (ou caractéristique) :

$$1_A(x) = \begin{pmatrix} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{pmatrix}$$

**$\sigma$ -algèbre** (tribu) : Une famille  $A$  de sous-ensemble de  $X$  est une tribu si :

1.  $X \in A$
2.  $A$  est stable par complémentarité
3.  $A$  est stable par union dénombrable

**Espace mesurable** : Ensemble muni d'une tribu  $(X, A)$

**Tribu borélienne** : Plus petite tribu de  $\mathbb{R}$  contenant tous les intervalles

**Mesure** : Une mesure  $\mu$  sur  $(X, A)$  est une application de  $A \rightarrow [0, \infty]$  telle que

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si  $(A_n)_{n \geq 1}$  est une suite dénombrable de  $A$  deux à deux disjointes alors :  $\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$  ( $\sigma$ -additivité)

**Espace mesuré** : Le triplet  $(X, A, \mu)$  est appelé un espace mesuré Proposition : soit  $\bar{x}$  une tribu de  $X$

1. Si  $A, B \in \bar{x}$  et  $A \subset B$  alors  $\mu(A) \leq \mu(B)$
2. Si  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ ,  $A_k \in \bar{x}$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_n A_n$  et  $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$
3. Si  $A, B \in \bar{x}$  alors  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

**Ensemble négligeable** :  $A$  est dit négligeable si  $\mu(A) = 0$

**Proposition vraie presque partout** (pp) : Une proposition est dite vraie ( $\mu$ -)presque partout sur  $X$  si elle est vraie sur  $X \setminus E$  avec  $\mu(E) = 0$

**Ensemble de mesure nulle** : Un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  est dit de mesure nulle si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une suite d'intervalles ouverts et bornés  $(I_n)$  telle que :

1.  $A \subset \bigcup_{i \geq 1} I_i$
2.  $\sum_{i \geq 1} |I_i| < \varepsilon$

**Propositions :**

1. Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle
2. Si  $A$  est de mesure nulle et  $B \subset A$ , alors  $B$  est de mesure nulle
3. Si  $A \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n$  avec chaque  $A_n$  de mesure nulle, alors  $A$  est de mesure nulle

**Fonction mesurable** :  $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  est mesurable si  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

## 1.5.2 Exemples de mesures

**Mesure de Lebesgue** : Il existe une unique mesure  $\lambda$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  telle que  $\forall I = [a, b]$  borné,  $\lambda([a, b]) = \lambda([a, b[) = b - a$

**Mesure de Dirac** :  $\delta_a : T \rightarrow \{0, 1\}$  avec  $T$  une tribu et  $\delta_a = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$

**Mesure de comptage** (cardinal) : Pour un ensemble dénombrable de  $\mathbb{R}$ ,  $\forall n, \mu(\{n\}) = 1$

## 1.6 Intégration

### 1.6.1 Définitions

**Fonction en escalier** : Fonctions constantes sur des intervalles

**Intégrale de Riemann** : Soit

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{I_i}$$

une fonction en escalier, on définit l'intégrale de  $f$  par

$$I(f) = \int_a^b f(t) dt = \sum \alpha_i (x_{i+1} - x_i)$$

Pour une fonction quelconque, s'il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$ , deux fonctions en escalier  $f_\varepsilon$  et  $F_\varepsilon$  telle que  $f_\varepsilon \leq f \leq F_\varepsilon$  et  $I(F_\varepsilon) - I(f_\varepsilon) < \varepsilon$ , alors  $f$  est dite Riemann-intégrable et on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \sup \{I(g) | g \text{ fonction en escalier et } g \leq f\}$$

**Fonction étagée** : Fonction dont l'image est constituée d'un nombre fini de valeurs réelles

**Théorème** : Toute fonction à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  est limite de fonctions étagées

**Intégrale de Lebesgue** : Soit

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$$

une fonction étagée, on définit l'intégrale de  $f$  par rapport à la mesure  $\mu$  par

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

et pour  $E \subset X$

$$\int_E f d\mu = \int_X f 1_E d\mu$$

Pour  $f$  une fonction positive,

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu \mid s \text{ étagée et } s \leq f \right\}$$

Enfin pour une fonction quelconque, on définit :  $f^+ = \max(0, f)$  et  $f^- = \max(0, -f)$  de sorte que :

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

### 1.6.2 Propriétés

**Lien Riemann-Lebesgue** : Si  $f$  est Riemann-Intégrable, alors  $f$  est Lebesgue-intégrable

**Ensemble de fonctions intégrables** (au sens de Lebesgue) :

$$L^p(A) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_A |f|^p < \infty \right\}$$

**Fonctions localement intégrables** :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-intégrable sur tout intervalle borné ( $L^1 \subset L^1_{loc}$ )

**Intégration et dérivation** :

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

**Egalité d'intégrales** :

$$f \stackrel{pp}{=} g \Leftrightarrow \int f(t) dt = \int g(t) dt$$

**Linéarité** :

$$\int (f(t) + \lambda g(t)) dt = \int f(t) dt + \lambda \int g(t) dt$$

**Relation de Chasles** : Qui implique aussi  $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

**Relation d'ordre** :

$$f \leq g \Leftrightarrow \int f(t) dt \leq \int g(t) dt$$

**Fonction périodique** : Soit  $f$  une fonction  $T$ -périodique,

$$\int_0^T f(t) dt = \int_c^{c+T} f(t) dt$$

**Inégalité triangulaire** :

$$\left| \int f(t) dt \right| \leq \int |f(t)| dt$$

**Cauchy-Schwartz** :

$$\left| \int f(t) g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int f^2(t) dt \times \int g^2(t) dt}$$



**Inégalité de Holder :**

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \int f(t)g(t)dt \leq \left( \int |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

**Théorème de la moyenne :**

$$\forall x \in [a, b], m \leq f \leq M, \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M$$

**Inégalité de la moyenne :**

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \times \int_a^b |g(x)|dx$$

**Intégrale sur un ensemble négligable :** Soit  $\mu$  une mesure alors

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$$

**Théorème fondamental :**

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

**Intégration par partie (IPP) :**

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

**Changement de variable :**

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{x=u(t)}{=} \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t)dt$$

**Propositions sur l'intégrabilité :**

- $f$  monotone  $\Rightarrow f$  Riemann-intégrable
- $f$  continue  $\Rightarrow f$  Riemann-intégrable
- $f$  pp-continue et bornée  $\Rightarrow f$  Riemann-intégrable
- $f$  pp-continue  $\Rightarrow f$  Lebesgue-intégrable
- $|f| < g$ ,  $g$  Lebesgue-intégrable  $\Rightarrow f$  Lebesgue-intégrable
- $f$  Lebesgue-intégrable  $\Leftrightarrow |f|$  Lebesgue-intégrable

### 1.6.3 Convergence

**Convergence (Riemann) :**

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \Rightarrow \int f_n(t)dt \xrightarrow{\text{unif}} \int f(t)dt$$

**Théorème de convergence monotone (Beppo-Levi) :**

$$\begin{cases} (f_n) \text{ suite croissante de fonction} \\ f_n \longrightarrow f, n \longrightarrow \infty \end{cases} \Leftrightarrow \int f_n \longrightarrow \int f, n \longrightarrow \infty$$

**Théorème de convergence dominée :**

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{pp} f \\ |f_n| < g, g \in L^1 \end{cases} \Rightarrow \int f_n \longrightarrow \int f \left( \text{et même : } \int |f_n - f| \longrightarrow 0 \right)$$

**Inversion somme-intégrale :**

$$(f_n) \text{ suite de fonction positive} \Rightarrow \int \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n(x) dx$$

**Théorème de Fubini :**

$$f \in L^1 \Rightarrow \iint f(x, y) dx dy = \int \left( \int f(x, y) dx \right) dy$$

**Théorème de Fubini-Tonnelé :**

$$f \geq 0 \Rightarrow \iint f(x, y) dx dy = \int \left( \int f(x, y) dx \right) dy$$

**Définition :** intégrale de fonction discontinue, intégrale sur un intervalle non bornée, etc.

**Intégrales Riemann-impropre de références :**

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si } \alpha < 1; \int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si } \alpha > 1; \int_0^1 \ln t dt = -1$$

**Riemann-impropre et Lebesgue :** Si  $f$  est Riemann-intégrable au sens impropre et de signe constant alors  $f$  est Lebesgue-intégrable

#### 1.6.4 Intégrale de Riemann-Stieltjes

**Définition :** Si  $\alpha$  est une fonction croissante, alors elle définit une mesure. On appelle intégrale de Riemann-Stieltjes l'intégrale par rapport à cette mesure :  $\int f(x) d\alpha(x)$  et on a :

$$\begin{aligned} \alpha([a, b]) &= \alpha(b^+) - \alpha(a^-) \\ \alpha([a, b[) &= \alpha(b^-) - \alpha(a^-) \\ \alpha(]a, b]) &= \alpha(b^+) - \alpha(a^+) \\ \alpha(]a, b[) &= \alpha(b^-) - \alpha(a^+) \end{aligned}$$

**Calcul :**

$$\int f(x) d\alpha(x) = \int f(x) \alpha'(x) dx$$

#### 1.6.5 Fonctions définies par une intégrale

**Définition :** Soit  $f : (x, t) \rightarrow f(x, t)$ , si  $f$  est continue en  $t$  pour presque-tout  $x$  et  $|f(t, x)| \leq g(x), g \in L^1$  alors la fonction suivante est défini et est continue

$$F(t) = \int f(t, x) dx$$

**Dérivabilité :** Si  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$  existe et est continue et  $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| < g(x), g \in L^1$  alors  $F$  est dérivable et

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$$

Formule :

$$F(t) = \int_{[u(t), v(t)]} f(x, t) dx$$

$$\frac{dF}{dt}(t) = f(t, v(t)) \frac{dv(t)}{dt} + f(t, u(t)) \frac{du(t)}{dt} + \int_{[u(t), v(t)]} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

### 1.6.6 Introduction au calcul des variations

**Problème de variation** : Trouver  $u^*$  telle que

$$u^* = \min_{u \in K} J(u) \text{ avec } J(u) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u, \dot{u}, t) dt$$

**Équation d'Euler-Lagrange** :  $u$  solution du problème de variation, alors

$$\frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, \dot{u}, t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u, \dot{u}, t) \right] = 0$$

**Intégrale première d'Euler-Lagrange** :  $\varphi(u, \dot{u}, t) = \varphi(u, \dot{u})$

$$\varphi(u, \dot{u}) = \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u, \dot{u}) \right] \dot{u} + k, k \in \mathbb{R}$$

**Condition aux limites** :

- Deux extrémités fixes :  $u(\alpha) = a$  et  $u(\beta) = b$
- Une extrémité libre :  $u(\alpha) = a$  et  $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u(\beta), \dot{u}(\beta), \beta) = 0$
- Deux extrémités libres :  $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u(\alpha), \dot{u}(\alpha), \alpha) = 0$  et  $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u(\beta), \dot{u}(\beta), \beta) = 0$

## 1.7 Séries dans $\mathbb{R}$

### 1.7.1 Généralités

**Condition nécessaire de convergence** :

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \Rightarrow u_n \rightarrow 0$$

**Espace vectoriel** : L'espace des séries convergentes est un espace vectoriel

**Critère de Cauchy** :

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$$

**Règle de Riemann** : Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$  et  $n^\alpha u_n$  majoré pour  $\alpha > 1$  alors  $\sum u_n$  converge

**Règle de d'Alembert** : Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$  et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow l$  avec  $l < 1$  alors  $\sum u_n$  converge

**Séries géométrique** :

$$\sum_{n \geq 0} aq^n = a \frac{1}{1 - q}$$

**Séries de Riemann** :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

**Série exponentielle** :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z, z \in \mathbb{C}$$

### 1.7.2 Séries de Taylor

Formule générale :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

Formule de Taylor-Lagrange :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}, \theta \in [0, 1]$$

Formule de Taylor-Young :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + h^n \epsilon(h), \epsilon(h) \longrightarrow 0, h \longrightarrow 0$$

Séries connues :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \cdots + \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n-1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{2p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

**Infiniment petit** :  $f$  est un infiniment petit au voisinage de  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

**Infiniment grand** :  $f$  est un infiniment grand au voisinage de  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$

**Ordre d'un infiniment petit** :  $f$  et  $g$  sont dit de même ordre si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}^*$

$f$  est d'ordre  $p$  si  $f$  et  $(x-a)^p$  sont du même ordre

**Équivalence** :

$$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

**Développements limités** :

$f$  admet un DL à l'ordre  $n$  au voisinage de  $a$  si

$$\exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n + h^n \epsilon(h), \epsilon(h) \longrightarrow 0, h \longrightarrow 0$$

$f$  admet un DL à l'ordre  $n$  au voisinage de  $+\infty$  si

$$\exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Le DL d'une fonction paire (resp. impaire) ne contient que des termes de puissances paire (resp. impaire).

**Opérations sur les DL** : Soient  $f$  et  $g$  avec  $\begin{cases} f(a+h) = P(h) + h^n \epsilon_1(h) \\ g(a+h) = Q(h) + h^n \epsilon_2(h) \end{cases}$

**Combinaison** :  $f(a+h) + \lambda g(a+h) = P(h) + \lambda Q(h) + \epsilon(h)$

**Produit** :  $fg(a+h) = PQ(a+h) + h^n \epsilon(h)$  tronqué à l'ordre  $n$

**Quotient** :  $\frac{f(a+h)}{g(a+h)} =$  quotient de  $P(h)$  par  $Q(h)$  suivant les puissances croissantes

**Primitivisation** : Si  $F' = f$  avec  $f(a+h) = \sum \alpha_i h^i$  alors  $F(a+h) = \sum \alpha_i \frac{h^{i+1}}{i+1}$

**Étude locale d'une courbe** : Soit  $x_0$  tel que  $f'(x_0) = 0$

$f''(x_0) > 0$  alors la courbe est au dessus de la tangente et  $x_0$  réalise un minimum locale

$f''(x_0) < 0$  alors la courbe est en dessous de la tangente et  $x_0$  réalise un maximum locale

$f''(x_0) = 0$  alors  $x_0$  est un point d'inflexion

### 1.7.3 Séries de Fourier

**Dans la base**  $(e^{in\omega x})_{n \in \mathbb{Z}}$

**Série de Fourier** :  $(e^{in\omega x})_{n \in \mathbb{Z}}$  avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  est une base de l'espace des fonctions  $T$ -périodiques, alors pour tout  $f$ , fonction  $T$ -périodique, on a :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \text{ avec } c_n = (f|e^{in\omega \cdot}) = \frac{1}{T} \int f(x) e^{-in\omega x} dx$$

**Egalité de Parseval** : (égalité de la norme)

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

**Dans la base**  $(\cos n\omega x, \sin n\omega x)_{n \in \mathbb{N}}$

**Série de Fourier** : Soit  $f$  une fonction  $T$ -périodique, on a

$$f(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx; a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cos n\omega x dx; b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \sin n\omega x dx$$

**Egalité de Parseval** : (égalité de la norme)

$$\|f\|_2^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$$

**Autres**

**Lien entre les coefficients** :  $\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}$

**Convergence** :

$$f \in L^2(0, T), f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{in\omega x}$$

$$f \in L^1(0, T), c_n(f) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$$

**Théorème de Dirichlet** (convergence ponctuelle) :

$$f \in C^1 \Rightarrow SF(f)(x_0) \xrightarrow{\text{unif}} f(x_0)$$

$$f \in CM^1 \Rightarrow SF(f)(x_0) \longrightarrow \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

**Série de Fourier d'une distribution**

**Définition :**

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \text{ avec } c_n = \frac{1}{a} \langle T, e^{-in\omega s} \rangle$$

**Convergence** : La série de Fourier d'une distribution converge vers la distribution (au sens des distributions)

**Convergence d'une série trigonométrique dans  $\mathcal{D}'$  :**

$$\sum c_n e^{in\omega s} \text{ converge dans } \mathcal{D}' \Leftrightarrow |c_n| \leq A|n|^p \text{ (suite à croissance lente)}$$

## 1.8 Le corps $\mathbb{C}$

**Définition :**

$$\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$$

**Partie réelle et imaginaire :**

$$Re(a + ib) = a \text{ et } Im(a + ib) = b$$

**Module et argument :**

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \arg z = \tan \frac{b}{a}$$

**Écriture d'un nombre complexe** :  $\forall z \in \mathbb{C}, \exists a, b, r, \theta \in \mathbb{R}$  tel que

$$z = a + ib = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg z$$

**Conjugaison** : Soit  $z = a + ib$  alors  $\bar{z} = a - ib$  et

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}; \bar{\bar{z}} = z$$

$$z + \bar{z} = 2 \times Re(z); z - \bar{z} = 2i \times Im(z)$$

**Calcul avec les modules :**

$$z\bar{z} = |z|^2; \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; |z| = |\bar{z}|$$

**Calcul avec les arguments :**

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]; \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

**Formule de Moivre :**

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

**Formules d'Euler :**

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

**Théorème de D'Alembert-Gauss :** Toute équation algébrique de  $\mathbb{C}$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{C}$

**Racine  $n$ -ième :**

$$z^n = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |\alpha|^{\frac{1}{n}} \\ \arg z = \frac{\arg \alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in [0, n-1] \end{cases}$$

**Racine complexe d'une équation du second degré :**  $az^2 + bz + c = 0$

$$\delta^2 = b^2 - 4ac \text{ alors } z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

**Polynômes premiers :** Les seuls polynômes premier de  $\mathbb{C}[X]$  sont les polynômes constants, ceux de degré 1 et ceux de degré 2 qui n'ont pas de racine réelles

**Multiplicité d'une racine :** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$

$$r \text{ de multiplicité } m \Leftrightarrow P(r) = P'(r) = \dots = P^{(n-1)}(r) = 0 \text{ et } P^{(m)}(r) \neq 0$$

**Partie entière d'une fraction rationnelle :** Soit  $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$  on peut décomposer  $F$  de façon unique tel que  $F = E + \frac{P_0}{Q}$  avec, ou  $P_0 = 0$  ou  $\deg(P_0) < \deg(Q)$

**Décomposition en élément simple dans  $\mathbb{C}(X)$  :** Soit  $F = P/Q$

Objectif : écrire  $F$  sous la forme  $F = P^* + S$  où  $P^*$  est un polynôme et  $S$  une somme d'éléments simples :

Si  $\deg(P) < \deg(Q)$  alors  $P^* = 0$

Sinon effectuer la division euclidienne

Décomposer  $Q$  en produit de facteur premier

Règles de décomposition dont les constantes  $a, b, c, d, \dots$  sont à déterminer :

$$\begin{aligned} \frac{N(x)}{(x-1)(x-2)} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \\ \frac{N(x)}{(x-1)^3(x-2)^2} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{d}{x-2} + \frac{e}{(x-2)^2} \\ \frac{N(x)}{(x-1)(x^2+1)} &= \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1} \end{aligned}$$

## 1.9 Distributions

### 1.9.1 Fonctions test ou de base : $\mathcal{D}$

**Définition :**  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite fonction test si elle est à support borné et  $\varphi \in C^\infty$

**Exemple :**  $\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

**Propriétés de  $\mathcal{D}$  :**

1.  $\mathcal{D}$  est un espace vectoriel (car  $\text{supp}(\varphi + \psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\psi)$ )
2.  $\varphi, \psi \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi\psi \in \mathcal{D}$  (car  $\text{supp}(\varphi\psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\psi)$ )
3.  $\varphi \in \mathcal{D}$  et  $f \in L^1 \Rightarrow \psi(x) = \varphi * f(x) \in \mathcal{D}$
4.  $\mathcal{D}$  ne peut pas être muni d'une norme de sorte qu'il soit complet (c-a-d où toute suite convergente est de Cauchy)

**Proposition** :  $f \in C_k^0$  peut-être approché par une fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}$  uniformément  
convergence dans  $\mathcal{D}$  :

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \text{supp } \varphi_n \subset K = [a, b], \forall n \geq 1 \\ \varphi_n^{(k)} \xrightarrow{\text{unif}} \varphi^{(k)} \end{cases}$$

**Proposition** :  $f \in L_{loc}^1$  et  $\forall \varphi \in \mathcal{D}$  on a  $\int f\varphi = 0 \Rightarrow f \stackrel{pp}{=} 0$

### 1.9.2 Distributions : $\mathcal{D}'$

**Définition** :  $T \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto T(\varphi) \stackrel{\text{notation}}{=} \langle T, \varphi \rangle$  tel que  $T$  soit

1. Linéaire :  $\langle T, \varphi + \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle T, \psi \rangle$
2. Continue :  $\varphi \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$

**Addition** :  $\langle T + S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle$

**Multiplication** :  $\langle \lambda T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$

**Convergence dans  $\mathcal{D}'$**  :

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Leftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Distribution régulière** :

$$f \in L_{loc}^1, \langle T_f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Distribution singulière** :

$$f \in L_{loc}^1, \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Peigne de Dirac** :  $\Delta_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na}, a \text{ fixé}$

## 1.10 Convolution

### 1.10.1 Convolution de fonction

**Définition sur  $\mathbb{R}$**  :

### 1.10.2 Convolution de suite

**Définition** :

### 1.10.3 Convolution de distribution et algèbre dans $\mathcal{D}'_+$

**Produit tensoriel** :

## 1.11 Transformées de Fourier

## 1.12 Transformées de Laplace



## Chapitre 2

### Analyse dans $\mathbb{R}^n$ (MT22)

## Chapitre 3

# Algèbre linéaire (MT23)

## Chapitre 4

# Analyse numérique (MT09)

## Chapitre 5

# Statistiques (SY02)

## Chapitre 6

# Optimisation (RO04)

## Chapitre 7

# Formulaires