Mathématiques

Henri LEFEBVRE

13 novembre 2017

Table des matières

1 Analyse dans $\mathbb{R}$ (MT90/MT91/MT12) **3**
1.1 Propriétés de $\mathbb{R}$ . . . 3
1.2 Suites réelles $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ . . . 3
1.3 Fonctions réelles $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (généralités) . . . 4
1.4 Dérivation . . . 5
1.5 Théorie de la mesure . . . 6
1.5.1 Généralités . . . 6
1.5.2 Exemples de mesures . . . 6
1.6 Intégration . . . 7
1.6.1 Définitions . . . 7
1.6.2 Propriétés . . . 7
1.6.3 Convergence . . . 9
1.6.4 Intégrale de Riemann-Stieltjes . . . 9
1.6.5 Fonctions définies par une intégrale . . . 10
1.6.6 Introduction au calcul des variations . . . 10
1.7 Séries dans $\mathbb{R}$ . . . 10
1.7.1 Généralités . . . 10
1.7.2 Séries de Taylor . . . 11
1.7.3 Séries de Fourier . . . 12
1.8 Le corps $\mathbb{C}$ . . . 13
1.9 Distributions . . . 14
1.9.1 Fonctions test ou de base : $\mathcal{D}$ . . . 14
1.9.2 Distibutions : $\mathcal{D}'$ . . . 15
1.10 Convolution . . . 15
1.10.1 Convolution de fonction . . . 15
1.10.2 Convolution de suite . . . 16
1.10.3 Convolution de distribution et algèbre dans $\mathcal{D}'_+$ . . . 16
1.11 Transformées de Fourier . . . 17
1.11.1 Fonctions . . . 17
1.11.2 Distributions . . . 18
1.12 Transformées de Laplace . . . 19
1.12.1 Fonctions . . . 19
1.12.2 Distributions . . . 20

2 Analyse dans $\mathbb{R}^n$ (MT22) **21**
2.1 Fonction de plusieurs variables $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ . . . 21
2.1.1 Généralités . . . 21
2.1.2 Dérivation . . . 21
2.1.3 Dérivées directionnelles . . . 22
2.2 Analyse vectorielle . . . 22
2.3 Courbes et surfaces . . . 23
2.3.1 Surfaces . . . 23
2.3.2 Courbes . . . 24
2.4 Intégrales dans $\mathbb{R}^n$ . . . 25
2.4.1 Intégrales doubles . . . 25

2.4.2 Intégrales triples . . . 25
2.4.3 Intégrales curvillignes . . . 26
2.4.4 Intégrales surfaciques . . . 27
2.5 Théorèmes intégraux . . . 28
2.5.1 Théorème de Stokes-Ampères . . . 28
2.5.2 Théorème de Gauss-Ostrogradski . . . 28

3 Algèbre linéaire (MT23) 29
3.1 Espace vectoriels . . . 29
3.2 Applications linéaires et matrices . . . 30
3.2.1 Applications linéaires . . . 30
3.2.2 Matrices . . . 31
3.3 Déterminants et systèmes linéaires . . . 33
3.4 Valeurs propres et diagonalisation . . . 33
3.5 Espaces euclidiens . . . 33

4 Analyse numérique (MT09) 34
4.1 Systèmes linéaires . . . 34
4.2 Problèmes de moindres carrées . . . 34
4.3 Méthodes itératives . . . 34
4.4 Interpolation . . . 34
4.5 Intégration numérique . . . 34
4.6 Équations différentielles . . . 34
4.7 Valeurs propres . . . 34

5 Statistiques (SY02) 35
5.1 Éléments de probabilités . . . 35
5.2 Échantillonnage . . . 35
5.3 Éstimation . . . 35
5.4 Intervalle de confiance . . . 35
5.5 Éstimation optimale . . . 35
5.6 Régression linéaire . . . 35
5.7 Tests d'hypothèses . . . 35
5.8 Tests de conformité . . . 35
5.9 Tests d'homogénéité . . . 35
5.10 Tests d'adéquation . . . 35
5.11 Tests d'indépendance . . . 35
5.12 Analyse de la variance . . . 35

6 Optimisation (RO03/RO04) 36
6.1 Algorithmes de graphe . . . 36
6.2 Programmation linéaire . . . 36
6.3 Optimisation non-linéaire . . . 36

7 Formulaires 37
7.1 Équations différentielles . . . 37
7.2 Trigonométrie . . . 37

Chapitre 1

Analyse dans $\mathbb{R}$ (MT90/MT91/MT12)

1.1 Propriétés de $\mathbb{R}$

Structure : $(\mathbb{R}, +, \dot{)}$ est un corps ordonné
Formule du binôme :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ avec } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Produit scalaire : $< x, y >= xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Norme ($\mathbb{R}$) (valeur avsolue) : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \to |x| = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases}$

Positivité : $|x| > 0$ et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Homothétie : $|ax| = |a||x|$
Inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$
Convergence : $f(x) \longrightarrow l \Leftrightarrow |f(x) - l| \longrightarrow 0$
Intervalles : I est un intervalle si $\forall a, b \in I, a < c < b \Rightarrow c \in I$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$
$$c \in [a, b] \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 1], c = \theta a + (1 - \theta)b$$

Densité de $\mathbb{Q}$:

$$\forall]a, b[\neq \emptyset, \exists \alpha \in \mathbb{Q} \cap]a, b[\text{ et } \exists \beta \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap]a, b[$$

Ensembles bornées : Soit $A \subset \mathbb{R}$
Majoration : $\forall x \in A, x \leq M$
Minoration : $\forall x \in A, x \geq m$
Encadrement : $\forall x \in A, |x| < M$
Borne supérieur : Plus petit des majorants (s'ils existent)

$$s = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq s \quad \forall t < s, \exists x \in A \text{ tel que } t < x \end{cases}$$

Droite numérique achevée : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

1.2 Suites réelles $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Définition : $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto u_n$
Convergence :

$$(U_n) \longrightarrow l, n \longrightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

Limite infinie :

$$(U_n) \longrightarrow l, n \longrightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow u_n > \varepsilon)$$

Convergences connues :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = 0\,;\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{k^n} = 0\,;\ \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln \beta)^\beta}{n^\alpha} = 0$$

Propriétés de convergence : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n \longrightarrow l$ et $v_n \longrightarrow l'$ quand $n \longrightarrow \infty$

Combinaison : $u_n + \lambda v_n \longrightarrow l + \lambda l'$ quand $n \longrightarrow \infty$

Produit : $u_n v_n \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$

Quotient : Si $l' \neq 0$, $u_n/v_n \longrightarrow l/l'$ quand $n \longrightarrow \infty$

Vers zéro : Si $u_n \longrightarrow 0$ et v_n bornée, alors $u_n v_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$

Ordre : Si $u_n \leq v_n$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$

Suites adjacentes : (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si et seulement si

$$(u_n) \text{ est croissante}\,;\ (v_n) \text{ est décroissante}\,;\ \lim_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0$$

Suite arithmétique :

Définition récursive : $u_{n+1} = u_n + r$

Définition générale : $u_n = u_0 + nr$

Somme des termes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

Suite géométrique :

Définition récursive : $u_{n=1} = qu_n$

Définition générale : $u_n = q^n u_0$

Somme des termes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$
Si $\exists l \in \mathbb{R}$ point fixe de f (i.e. $f(l) = l$) et f contractancte (i.e. f k-lipschitzienne avec $0 < k < 1$) alors $(u_n) \longrightarrow l$

1.3 Fonctions réelles $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (généralités)

Définition : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$

Image : $\forall A \subset \mathbb{R}, f(A) = \{y | \exists x \in A, y = f(x)\}$

Image réciproque : $f^{-1}(B) = \{x \in D_f | f(x) \in B\}$

Support : $\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x | \varphi(x) \neq 0\}}$

Correspondances : Pour $f : E \to F$

Surjection : $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Injection : $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$

Bijection : $\forall y \in F, \exists! x \in E$ tel que $y = f(x)$ (f injective et surjective)

Composée : $f \circ g(x) = f(g(x))$

Fonction identité : $id : x \mapsto x$

Bijection réciproque : Si f bijective, alors $\exists f^{-1}$ tel que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$

Convergence : $f(x) \longrightarrow l, x \longrightarrow a$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Limite à droite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, a < x < a + \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Caractérisation de la limite (par les suites) :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \left(\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \begin{cases} \lim_{n \to \infty} x_n = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \Omega - \{a\} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x_n) = l \right)$$

Continuité :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Théorème des valeurs intermediaires (TVI) : Soit $f \in C^0([a, b])$ et $y \in \mathbb{R}$

$$f(a) < y < f(b) \Rightarrow \exists x \in [a, b], f(x) = y$$

Condition de Lipschitz :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

1.4 Dérivation

Dérivabilité : f est dérivable si et seulement si

$$\exists d \in \mathbb{R}, \text{ tel que } f(x + h) = f(x) + hd + |h|\epsilon(h)$$

Taux de variation :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Théorème de Rolle : Soit $f \in C^0([a, b])$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = 0$$

Théorème des accroissements finis : Soit $f \in C^0([a, b])$

$$\exists c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Opérations :

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g', \lambda \in \mathbb{R} \,;\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \,;\, (f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$$

Fonction réciproque :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Dérivées connues :

$$(x^q)' = qx^{q-1}, q \in \mathbb{Z} \,;\, (e^x)' = e^x \,;\, (\ln|x|)' = \frac{1}{x} \,;\, (\cos x)' = -\sin x \,;\, (\sin x)' = \cos x \,;\, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Saut d'une fonction :

$$\sigma_m = f^{(m)}(0^+) - f^{(m)}(0^-), m \geq 0$$

1.5 Théorie de la mesure

1.5.1 Généralités

Fonction indicatrice (ou caractéristique) :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \in /A \end{cases}$$

σ-algèbre (tribu) : Une famille A de sous-ensemble de X est une tribu si :

1. $X \in A$
2. A est stable par complémentarité
3. A est stable par union dénombrable

Espace mesurable : Ensemble muni d'une tribu (X, A)

Tribu borélienne : Plus petite tribu de $\mathbb{R}$ contenant tous les intervalles

Mesure : Une mesure μ sur (X, A) est une application de $A \to [0, \infty]$ telle que

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si $(An)n \geq 1$ est une suite dénombrable de A deux à deux disjointes alors : $\mu\left(\bigcup_{n\geq1} A_n\right) = \sum_{n\geq1} \mu(A_n)$ (σ-additivité)

Espace mesuré : Le triplet (X, A, μ) est appelé un espace mesuré Proposition : soit $\bar{x}$ une tribu de X

1. Si $A, B \in \bar{x}$ et $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$
2. Si $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ..., A_k \in \bar{x}$ alors $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_n A_n$ et $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$
3. Si $A, B \in \bar{x}$ alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

Ensemble négligeable : A est dit négligeable si $\mu(A) = 0$

Proposition vraie presque partout (pp) : Une proposition est dite vraie (μ-)presque partout sur X si elle est vrai sur X E avec $\mu(E) = 0$

Ensemble de mesure nulle : Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit de mesure nulle si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'intervalles ouverts et bornés (I_n) telle que :

1. $A \subset \cup_{i\geq1} I_i$
2. $\sum_{i\geq1} |I_i| < \varepsilon$

Propositions :

1. Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle
2. Si A est de mesure nulle et $B \subset A$, alors B est de mesure nulle
3. Si $A \bigcup_{n\geq1} A_n$ avec chaque A_n de mesure nulle, alors A est de mesure nulle

Fonction mesurable : $f : (X, \bar{x}) \to (\mathbb{R}, B)$ est mesurable si $f^{-1}(B) \subset \bar{x}$

1.5.2 Exemples de mesures

Mesure de Lebesgue : Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ telle que $\forall I = [a, b]$ borné, $\lambda([a, b]) = \lambda(]a, b[) = b - a$

Mesure de Dirac : $\delta_a : T \to \{0, 1\}$ avec T une tribu et $\delta_a = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ si } a \notin A \end{cases}$

Mesure de comptage (cardinal) : Pour un ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$, $\forall n, \mu(\{n\}) = 1$

1.6 Intégration

1.6.1 Définitions

Fonction en escalier : Fonctions constantes sur des intervalles

Intégrale de Riemann : Soit

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{I_i}$$

une fonction en escalier, on définit l'intégrale de f par

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt = \sum \alpha_i (x_{i+1} - x_i)$$

Pour une fonction quelconque, s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, deux fonctions en escalier f_ε et F_ε telle que $f_\varepsilon \leq f \leq F_\varepsilon$ et $I(f_\varepsilon) - I(f_\varepsilon) < \varepsilon)$, alors f est dite Riemann-intégrable et on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \sup \{I(g) | g \text{ fonction en escalier et } g \leq f\}$$

Fonction étagée : Fonction dont l'image est constituée d'un nombre fini de valeurs réelles

Théorème : Toute fonction à valeur dans $\mathbb{R}^n$ est limite de fonctions étagées

Intégrale de Lebesgue : Soit

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$$

une fonction étagée, on définit l'intégrale de f par rapport à la mesure μ par

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

et pour $E \subset X$

$$\int_E f d\mu = \int_X f 1_E d\mu$$

Pour f une fonction positive,

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu | s \text{ étagée et } s \leq f \right\}$$

Enfin pour une fonction quelconque, on définit : $f^+ = \max(0, f)$ et $f^- = \max(0, -f)$ de sorte que :

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

1.6.2 Propriétés

Lien Riemann-Lebesgue : Si f est Riemann-Intégrable, alors f est Lebesgue-intégrable

Ensemble de fonctions intégrables (au sens de Lebesgue) :

$$L^p(A) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \int_A |f|^p < \infty \right\}$$

Fonctions localement intégrables : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrable sur tout intervalle borné ($L^1 \subset L^1_{loc}$)

Intégration et dérivation :

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Egalité d'intégrales :

$$f \overset{pp}{=} g \Leftrightarrow \int f(t)dt = \int g(t)dt$$

Linéarité :

$$\int (f(t) + \lambda g(t))dt = \int f(t)dt + \lambda \int g(t)dt$$

Relation de Chasles : Qui implique aussi $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Relation d'ordre :

$$f \leq g \Leftrightarrow \int f(t)dt \leq \int g(t)dt$$

Fonction périodique : Soit f une fonction T-périodique,

$$\int_0^T f(t)dt = \int_c^{c+T} f(t)dt$$

Inégalité triangulaire :

$$\left| \int f(t)dt \right| \leq \int |f(t)|dt$$

Cauchy-Schwartz :

$$\left| \int f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int f^2(t)dt \times \int g^2(t)dt}$$

Inégalité de Holder :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \int f(t)g(t)dt \leq \left(\int |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

Théorème de la moyenne :

$$\forall x \in [a, b], m \leq f \leq M, \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M$$

Inégalité de la moyenne :

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \times \int_a^b |g(x)|dx$$

Intégrale sur un ensemble négligable : Soit μ une mesure alors

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$$

Théorème fondamental :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

Intégration par partie (IPP) :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Changement de variable :

$$\int_a^b f(x)dx \overset{x=u(t)}{=} \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t)dt$$

Propositions sur l'intégrabilité :

— f monotone $\Rightarrow$ f Riemann-intégrable

— f continue $\Rightarrow$ f Riemann-intégrable

— f pp-continue et bornée $\Rightarrow$ f Riemann-intégrable

— f pp-continue $\Rightarrow$ f Lebesgue-intégrable

— $|f| < g$, g Lebesgue-intégrable $\Rightarrow$ f Lebesgue-intégrable

— f Lebesgue-intégrable $\Leftrightarrow$ $|f|$ Lebesgue-intégrable

1.6.3 Convergence

Convergence (Riemann) :

$$f_n \overset{unif}{\longrightarrow} f \Rightarrow \int f_n(t)dt \overset{unif}{\longrightarrow} \int f(t)dt$$

Théorème de convergence monotone (Beppo-Levi) :

$$\begin{cases} (f_n) \text{ suite croissante de fonction} \\ f_n \longrightarrow f, n \longrightarrow \infty \end{cases} \Leftrightarrow \int f_n \longrightarrow \int f, n \longrightarrow \infty$$

Théorème de convergence dominée :

$$\begin{cases} f_n \overset{pp}{\longrightarrow} f \\ |f_n| < g, g \in L^1 \end{cases} \Rightarrow \int f_n \longrightarrow \int f \left(\text{et même : } \int |f_n - f| \longrightarrow 0 \right)$$

Inversion somme-integrale :

$$(f_n) \text{ suite de fonction positive} \Rightarrow \int \sum^{\infty} f_n(x)dx = \sum^{\infty} \int f_n(x)dx$$

Théorème de Fubini :

$$f \in L^1 \Rightarrow \iint f(x,y)dxdy = \int \left(\int f(x,y)dx \right) dy$$

Théorème de Fubini-Tonnelle :

$$f \geq 0 \Rightarrow \iint f(x,y)dxdy = \int \left(\int f(x,y)dx \right) dy$$

Définition : intégrale de fonction discontinue, intégrale sur un intervalle non bornée, etc.

Intégrales Riemann-impropre de références :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si } \alpha < 1\,; \int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si } \alpha > 1\,; \int_0^1 \ln t dt = -1$$

Riemann-impropre et Lebesgue : Si f est Riemann-intégrable au sens impropre et de signe constant alors f est Lebesgue-intégrable

1.6.4 Intégrale de Riemann-Stieltjes

Définition : Si α est une fonction croissante, alors elle définit une mesure. On appelle intégrale de Riemann-Stieltjes l'intégrale par rapport à cette mesure : $\int f(x)d\alpha(x)$ et on a :

$$\begin{aligned} \alpha([a,b]) &= \alpha(b^+) - \alpha(a^-) \\ \alpha([a,b[) &= \alpha(b^-) - \alpha(a^-) \\ \alpha(]a,b[) &= \alpha(b^-) - \alpha(a^+) \\ \alpha(]a,b]) &= \alpha(b^+) - \alpha(a^+) \end{aligned}$$

Calcul :

$$\int f(x)d\alpha(x) = \int f(x)\alpha'(x)dx$$

1.6.5 Fonctions définies par une intégrale

Définition : Soit $f : (x,t) \to f(x,t)$, si f est continue en t pour presque-tout x et $|f(t,x)| \leq g(x), g \in L^1$ alors la fonction suivante est défini et est continue

$$F(t) = \int f(t,x)dx$$

Dérivabilité : Si $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ existe et est continue et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| < g(x), g \in L^1$ alors F est dérivable et

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx$$

Formule :

$$F(t) = \int_{[u(t),v(t)]} f(x,t)dx$$

$$\frac{dF}{dt}(t) = f(t,v(t))\frac{dv(t)}{dt} + f(t,u(t))\frac{du(t)}{dt} + \int_{[u(t),v(t)]} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

1.6.6 Introduction au calcul des variations

Problème de variation : Trouver u^* telle que

$$u^* = \min_{u \in K} J(u) \text{ avec } J(u) = \int_\alpha^\beta \varphi(u,\dot{u},t)dt$$

Équation d'Euler-Lagrange : u solution du problème de variation, alors

$$\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\dot{u},t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{u}}\varphi(u,\dot{u},t)\right] = 0$$

Intégrale première d'Euler-Lagrange : $\varphi(u,\dot{u},t) = \varphi(u,\dot{u})$

$$\varphi(u,\dot{u}) = \left[\frac{\partial}{\partial \dot{u}}\varphi(u,\dot{u})\right]\dot{u} + k, k \in \mathbb{R}$$

Condition aux limites :

— Deux extrémités fixes : $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$

— Une extrémité libre : $u(\alpha) = a$ et $\dfrac{\partial}{\partial \dot{u}}\varphi(u(\beta),\dot{u}(\beta),\beta) = 0$

— Deux extrémités libres : $\dfrac{\partial}{\partial \dot{u}}\varphi(u(\alpha),\dot{u}(\alpha),\alpha) = 0$ et $\dfrac{\partial}{\partial \dot{u}}\varphi(u(\beta),\dot{u}(\beta),\beta) = 0$

1.7 Séries dans $\mathbb{R}$

1.7.1 Généralités

Condition nécessaire de convergence :

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \Rightarrow u_n \longrightarrow 0$$

Espace vectoriel : L'espace des séries convergentes est un espace vectoriel

Critère de Cauchy :

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\right| < \varepsilon$$

Règle de Riemann : Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $n^\alpha u_n$ majoré pour $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge
Règle de d'Alembert : Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l$ avec $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge
Séries géométrique :

$$\sum_{n\geq 0} aq^n = a\frac{1}{1-q}$$

Séries de Riemann :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Série exponentielle :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z, z \in \mathbb{C}$$

1.7.2 Séries de Taylor

Formule générale :

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

Formule de Taylor-Lagrange :

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, \theta \in [0,1]$$

Formule de Taylor-Young :

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + h^n\epsilon(h), \epsilon(h) \longrightarrow \infty, h \longrightarrow \infty$$

Séries connues :

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha\frac{x}{1!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n-1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{2p-1}\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)} + o(x^{2p}) \\
\tan x &= x + \frac{1}{3}x + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})
\end{aligned}$$

Infiniment petit : f est un infiniment petit au voisinage de a si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$
Infiniment grand : f est un infiniment grand au voisinage de a si $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$
Ordre d'un infiniment petit : f et g sont dit de même ordre si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}^*$
f est d'ordre p si f et $(x-a)^p$ sont du même ordre
Équivalence :

$$f \backsim g \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Développements limités :
f admet un DL à l'ordre n au voisinage de a si

$$\exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n + h^n \epsilon(n), \epsilon(h) \longrightarrow 0, h \longrightarrow 0$$

f admet un DL à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ si

$$\exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Le DL d'une fonction paire (resp. impaire) ne contient que des termes de puissances paire (resp. impaire).

Opérations sur les DL : Soient f et g avec $\begin{cases} f(a+h) = P(h) + h^n \epsilon_1(h) \\ g(a+h) = Q(h) + h^n \epsilon_2(h) \end{cases}$

Combinaison : $f(a+h) + \lambda g(a+h) = P(h) + \lambda Q(h) + \epsilon(h)$

Produit : $fg(a+h) = PQ(a+h) + h^n \epsilon(h)$ tronqué à l'odre n

Quotient : $\dfrac{f(a+h)}{g(a+h)} =$ quotient de $P(h)$ par $Q(h)$ suivant les puissances croissantes

Primitivisation : Si $F' = f$ avec $f(a+h) = \sum \alpha_i h^i$ alors $F(a+h) = \sum \alpha_i \frac{h^{i+1}}{i+1}$

Étude locale d'une courbe : Soit x_0 tel que $f'(x_0) = 0$
$f''(x_0) > 0$ alors la courbe est au dessus de la tangente et x_0 réalise un minimum locale
$f''(x_0) < 0$ alors la courbe est en dessous de la tangente et x_0 réalise un maximum locale
$f''(x_0) = 0$ alors x_0 est un point d'inflexion

1.7.3 Séries de Fourier

Dans la base $(e^{in\omega x})_{n\in\mathbb{Z}}$

Série de Fourier : $(e^{in\omega x})_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ est une base de l'espace des fonctions T-périodiques, alors pour tout f, fonction T-périodique, on a :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \text{ avec } c_n = (f|e^{in\omega\cdot}) = \frac{1}{T}\int f(x)e^{-in\omega x}dx$$

Egalité de Parsseval : (égalité de la norme)

$$||f||_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$

Dans la base $(\cos n\omega x, \sin n\omega x)_{n\in\mathbb{N}}$

Série de Fourier : Soit f une fonction T-périodique, on a

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx \, ; \, a_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\cos n\omega x dx \, ; \, b_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\sin n\omega x dx$$

Egalité de Parsseval : (égalité de la norme)

$$||f||_2^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2)$$

Autres

Lien entre les coefficients : $\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases}$ et $\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}$

Convergence :

$$f \in L^2(0,T), f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{in\omega x}$$

$$f \in L^1(0,T), c_n(f) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$$

Théorème de Dirichlet (convergence ponctuelle) :

$$f \in C^1 \Rightarrow SF(f)(x_0) \overset{unif}{\longrightarrow} f(x_0)$$

$$f \in CM^1 \Rightarrow SF(f)(x_0) \longrightarrow \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Série de Fourier d'une distribution

Définition :

$$T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \text{ avec } c_n = \frac{1}{a} < T, e^{-in\omega s} >$$

Convergence : La série de Fourier d'une distribution converge vers la distribution (au sens des distributions)
Convergence d'une série trigonométrique dans $\mathcal{D}'$:

$$\sum c_n e^{in\omega s} \text{ converge dans } \mathcal{D}' \Leftrightarrow |c_n| \leq A|n|^p \text{ (suite à croissance lente)}$$

1.8 Le corps $\mathbb{C}$

Définition :

$$\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$$

Partie réelle et imaginaire :

$$Re(a + ib) = a \text{ et } Im(a + ib) = b$$

Module et argument :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \arg z = \tan \frac{b}{a}$$

Écriture d'un nombre complexe : $\forall z \in \mathbb{C}, \exists a, b, r, \theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = a + ib = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg z$$

Conjugaison : Soi $z = a + ib$ alors $\bar{z} = a - ib$ et

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,;\ \overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}\,;\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}\,;\ \overline{\overline{z}} = z$$

$$z + \overline{z} = 2 \times Re(z)\,;\ z - \overline{z} = 2i \times Im(z)$$

Calcul avec les modules :

$$z\bar{z} = |z|^2\,;\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,;\ |z_1 z_2| = |z_1||z_2|\,;\ |z| = |\bar{z}|$$

Calcul avec les arguments :

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]\,;\ \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

Formule de Moivre :
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$
Formules d'Euler :
$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\ ;\ \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$
Théorème de D'Alembert-Gauss : Toute équation algébrique de $\mathbb{C}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{C}$
Racine n-ième :
$$z^n = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |\alpha|^{\frac{1}{n}} \\ \arg z = \frac{\arg\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in [0, n-1] \end{cases}$$
Racine complexe d'une équation du second degrée : $az^2 + bz + c = 0$
$$\delta^2 = b^2 - 4ac \text{ alors } z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$
Polynomes premiers : Les seuls polynômes premier de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynomes constants, ceux de degré 1 et ceux de degré 2 qui n'ont pas de racine réelles
Multiplicité d'une racine : Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$
$$r \text{ de multiplicité } m \Leftrightarrow P(r) = P'(r) = \cdots = P^{(n-1)}(r) = 0 \text{ et } P^{(m)}(r) \neq 0$$
Partie entière d'une fraction rationnelle : Soit $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ on peut décomposer F de façon unique tel que $F = E + \frac{P_0}{Q}$ avec, ou $P_0 = 0$ ou $deg(P_0) < deg(Q)$
Décomposition en élément simple dans $\mathbb{C}(X)$: Soit $F = P/Q$
Objectif : écrire F sous la forme $F = P^* + S$ où P^* est un polynôme et S une somme d'éléments simples :
Si $deg(P) < deg(Q)$ alors $P^* = 0$
Sinon effectuer la division euclidienne
Décomposer Q en produit de facteur premier
Règles de décomposition dont les constantes $a, b, c, d, \ldots$ sont à déterminer :
$$\frac{N(x)}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$
$$\frac{N(x)}{(x-1)^3(x-2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{d}{x-2} + \frac{e}{(x-2)^2}$$
$$\frac{N(x)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

1.9 Distributions

1.9.1 Fonctions test ou de base : $\mathcal{D}$

Définition : $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite fonctio test si elle est à support borné et $\varphi \in C^\infty$

Exemple : $\varphi(x) = \begin{cases} exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \text{ si } |x| < 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Propriétés de $\mathcal{D}$:
1. $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel (car supp $(\varphi + \psi) \subset$ supp $(\varphi) \cup$ supp (ψ))
2. $\varphi, \psi \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi\psi \in \mathcal{D}$ (car supp $(\varphi\psi) \subset$ supp $(\varphi) \cap$ supp (ψ))
3. $\varphi \in \mathcal{D}$ et $f \in L^1 \Rightarrow \psi(x) = \varphi * f(x) \in \mathcal{D}$
4. D ne peut pas être muni d'une norme de sorte qu'il soit complet (c-a-d où toute suite convergente est de Cauchy)

Proposition : $f \in C_k^0$ peut-être approché par une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$ uniformement
convergence dans $\mathcal{D}$:
$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \text{supp } \varphi_n \subset K = [a,b], \forall n \geq 1 \\ \varphi_n^{(k)} \xrightarrow{unif} \varphi^{(k)} \end{cases}$$
Proposition : $f \in L_l^1 oc$ et $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ on a $\int f\varphi = 0 \Rightarrow f \overset{pp}{=} 0$

1.9.2 Distibutions : $\mathcal{D}'$

Définition : $T \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \varphi \mapsto T(\varphi) \overset{notation}{=} < T, \varphi >$ tel que T soit

1. Linéaire : $< T, \varphi + \psi > = < T, \varphi > + < T, \psi >$
2. Continue : $\varphi \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow < T, \varphi_n > \longrightarrow < T, \varphi >$

Addition : $< T + S, \varphi > = < T, \varphi > + < S, \varphi >$

Multiplication : $< \lambda T, \varphi > = \lambda < T, \varphi >$

Convergence dans $\mathcal{D}'$:

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Leftrightarrow < T_n, \varphi > \longrightarrow < T, \varphi >, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Distribution régulière :

$$f \in L^1_{loc}, < T_f, \varphi > = \int f(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Distribution singulière :

$$f \in L^1_{loc}, < \delta, \varphi > = \varphi(0), \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Peigne de Dirac : $\Delta_a = \sum_{\in \mathbb{Z}} \delta_{na}$, a fixé

Opérations :

Translation : $\tau_a f(x) = f(x - a), < T_{\tau_a f}, \varphi > = < T_f, \tau_{-a}\varphi >$

Homothétie : $T_{f(a.)}, < T_{f(a.)}, \varphi > = \frac{1}{|a|} < T_f, \varphi\left(\frac{\cdot}{a}\right) >$

Transposition : $\check{f}(x) = f(-x), < T_{\check{f}}, \varphi > = < T_f, \check{\varphi} >$

Produit : On peut avoir $T, S \in \mathcal{D}'$ sans $TS \in \mathcal{D}'$, en revanche,
$\forall f, g \in L^1_{loc}, < gf, \varphi > = < f, g\varphi >$

Dérivation : $< T', \varphi > = - < T, \varphi' >$

Dérivation k-ième : $< T^{(k)}, \varphi > = (-1)^k < T, \varphi^{(k)} >$

Dérivation d'une fonction discontinue à l'origine : $(T_f)' = \sigma_0 \delta + T_{f'}$

Support d'une distribution : supp $T_f =$ supp f

Valeur principale de Cauchy :

$$vp \int_{-A}^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{A} \frac{dx}{x} \right\} = 0$$

Distribution $vp\frac{1}{x}$:

$$< vp\frac{1}{x}, \varphi > = vp \int \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

1.10 Convolution

1.10.1 Convolution de fonction

Définition sur $\mathbb{R}$:

$$f * g(x) = \int f(x - t)g(t)dt$$

Convolution sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} \text{supp } f \subset \mathbb{R}_+ \\ \text{supp } g \subset \mathbb{R}_+ \end{cases} \Rightarrow f * g(x) = \int_0^x f(x - t)g(t)dt$$

Support :

$$\text{supp } f * g \subset \text{supp } f + \text{supp } g$$

Propriétés : Le produit de convolution est commutatif, ditributif et associatif

Convolution bornée :

$$f, g \in L^1 \Rightarrow ||f * g||_1 \leq ||f||_1.||g||_1 \text{ et } f * g \text{ définit presque partout}$$
$$f, g \in L^2 \Rightarrow ||f * g||_\infty \leq ||f||_2.||g||_2 \text{ et } f * g \text{ partout définit}$$
$$f \in L^1, g \in L^2 \Rightarrow ||f * g||_2 < ||f||_1.||g||_2 \text{ et } f * g \text{ définit presque partout}$$

Valeur moyenne d'une fonction :

$$m = \frac{1}{2h} f * 1_{[-h,h]}(x)$$

1.10.2 Convolution de suite

Définition :

$$u * v(n) = v * u(n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u(n-k)v(k), n \in \mathbb{N}$$

1.10.3 Convolution de distribution et algèbre dans $\mathcal{D}'_+$

Produit tensoriel : Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$$

Définition : Soit $T, S \in \mathcal{D}'$

$$< T * S, \varphi >=< T, < S, \tau_{-y}\varphi >>=< T \otimes S, \varphi(x + y) >, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Dérivation :

$$(T * S)' = T * S' = T' * S$$

Existence : Le produit $T * S$ a un sens si les supports A et B de T et S sont tels que $x \in A$, $y \in B$, $x + y$ ne puisse être borné que si x et y restent bornées tous les deux. Il est alors commutatif.

Proposition : Si l'une au moins de T et S est à support bornée alors $T * S$ existe. L'ensemble des distributions à support bornée est noté $\mathcal{E}'$

Proposition : Si T et S ont leur support limités à gauche (ou à droite) alors $T * S$ existe (i.e. $\exists a \in \mathbb{R}$, tel que supp $T \subset [a, \infty[$)

D'_+ : Ensemble des distributions à support dans $\mathbb{R}_+$ est noté $\mathcal{D}'_+$ $(\subset \mathcal{D})$

$$T \in \mathcal{D}'_+ \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D} \text{ tel que supp } \varphi \subset \mathbb{R}_-, < T, \varphi >= 0$$

Associativité :

$$T, S \in \mathcal{D}'_+ \Rightarrow (T * S) * V = T * (S * V)$$

Algèbre de convolution $\mathcal{D}'_+$:

1. Le produit de convolution est une loi de composition interne

$$T, S \in \mathcal{D}'_+ \Rightarrow T * S \in \mathcal{D}'_+$$

2. D'_+ est un espace vectoriel
3. δ élément neutre

$$T * \delta = T$$

4. Soit $T \in \mathcal{D}'_+$, on dit que $S \in \mathcal{D}'_+$ est un élement inverse de T si $T * S = \delta$ et on note $S = t^{*-1}$

Formule pour Heavyside : $Y^{*2} = xY(x)$ et pour $n \geq 2$

$$Y^{*n} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} Y(x)$$

Résolution d'équation différentielle à coefficient constant : Soit D un opérateur différentiel tel que

$$D = a_n \frac{d^n}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$$

Alors pour résoudre l'équation $DT = S$:

1. Résoudre $DE = \delta$
2. Solution générale : $T = S * E$

Inversion type :

$$\left(\delta^{(n)} + a_1\delta^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\delta' + a_n\delta\right)^{*-1} = Yz$$

avec z solution de

$$\begin{cases} z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}z' + a_n z = 0 \\ z(0) = z'(0) = \cdots = z^{(n-2)}(0) = 0 \\ z^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

1.11 Transformées de Fourier

1.11.1 Fonctions

Définition :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx$$

Transformée conjuguée :

$$(\overline{\mathcal{F}})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\xi x}dx$$

Inversion : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi, x - pp$$

Propriétés sur $\hat{f}$:

1. $\hat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$
2. $$\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$$

Propriétés :

1. $$\widehat{(\tau_{x_0} f)} = e^{-ix_0\xi}$$
$$\widehat{(e^{i\xi_0 x} f)} = \tau_{\xi_0}\hat{f}$$

2. $$\widehat{(f^{(n)})} = (i\xi)^n\hat{f}$$
$$(\widehat{(-ix)^n f}) = (\hat{f})^{(n)}$$

3. $$\widehat{(f * g)} = \hat{f}.\hat{g}$$
$$2\pi\widehat{(f.g)} = \hat{f} * \hat{g}$$

4. $$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = 2\pi f \text{ pour } x - pp$$
$$\hat{\hat{f}} = 2\pi\check{f}$$

1.11.2 Distributions

Distributions tempérées

Décroissance rapide (DR) : f décroit plus vite que toute puissance de $1/|x|$

$$f \in DR \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, x^p f(x) \longrightarrow 0, x \longrightarrow \pm\infty$$

Proposition :

$$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap DR \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}, x^p f(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

Espace de fonction test : $S : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tel que

1. $f \in C^\infty$
2. $f^{(n)} \in DR, \forall n \in \mathbb{N}$

Propriétés de S :

1. S est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
2. $\mathcal{D} \subset S \subset L^P$
3. $\varphi \in S \Rightarrow \hat{\varphi} \in S$
4. $\varphi \in S$ et $P \in \mathcal{P}_n \Rightarrow \varphi P \in S$
5. $f, g \in S \Rightarrow fg \in S$
6. $\varphi \in S \Rightarrow \varphi' \in S$
7. $f, g \in S \Rightarrow f * g \in S$
8. $f \in S \Rightarrow x^p f^{(q)}$ bornée et sommable

Convergence dans S :

$$\varphi_n \xrightarrow{S} 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(p)} x^q| \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty, \forall p, q \in \mathbb{N}$$

Propriétés de convergence :

$$\varphi_n \xrightarrow{S} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_n' \xrightarrow{S} 0 \\ P\varphi_n \xrightarrow{S} 0 \text{ avec } P \in \mathcal{P}_n \\ \varphi_n \xrightarrow{L^1} 0 \\ \widehat{\varphi_n} \xrightarrow{S} 0 \end{cases}$$

Espace des distributions tempérées S' : $T : S \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto < T, \varphi >$

1. linéaire : $< T, \varphi + \mu\psi > = < T, \varphi > + \mu < T, \psi >$
2. continue : $\varphi_n \xrightarrow{S} \Rightarrow < T, \varphi_n > \longrightarrow 0$

Convergence dans S' :

$$T_n \xrightarrow{S'} T \Leftrightarrow < T_n, \varphi > \longrightarrow < T, \varphi >, \varphi \in S$$

Fonction à croissance lente (CL) : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f \in CL \Leftrightarrow |f(x)| \leq A|x|^p, |x| \longrightarrow \infty$$

Proposition :Toute fonction à croissance lente définit une distribution tempérée

Transformée de Fourier dans S

Définition :

$$< \widehat{T}, \varphi > = < T, \widehat{\varphi} >, \forall \varphi \in S$$

Propriétés :

1.
$$(\widehat{T})^{(n)} = (\widehat{(-ix)^n T})$$
$$\widehat{(T^{(n)})} = (i\xi)^n \widehat{T}$$

2.
$$\tau_a \widehat{T} = (\widehat{e^{ixa} T})$$
$$\widehat{(\tau_a T)} = e^{-i\xi a} \widehat{T}$$

3.
$$\widehat{\widehat{T}} = 2\pi \check{T}$$

4.
$$\hat{1} = 2\pi\delta$$
$$\widehat{t^n} = \frac{1}{(-i)^n}\delta^{(n)}$$
$$\widehat{\delta_a}(\xi) = e^{-ia\xi}$$

1.12 Transformées de Laplace

1.12.1 Fonctions

Définition :
$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

Théorème : $\tilde{f}$ est holomorphe et
$$\frac{d^k}{ds^k}\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(x)(-x)^k e^{-sx}dx, \forall k \in \mathbb{N}$$

Théorème : Si F est une fonction analytique dans le demi-plan complexe $z \in \mathbb{C}|Re(z) > \eta 0$, et si, en tant que fonction de $\eta = Im(z)$, F est intégrable, alors elle est la transformée de Laplace d'une fonction continue telle que
$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} f(x)e^{zx}dz$$

Théorème : Si les transformées de Laplace coïncides pour un $Re(s)$ assez grand alors $f = g$

Exemples :

1.
$$\widetilde{Y(x)x^a} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

2.
$$\widetilde{Y(x)e^{ax}} = \frac{1}{s-a}$$

Propriétés :

1.
$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = \tilde{(}s+a)$$

2.
$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n\tilde{f}(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

3.
$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{\tilde{f}(s)}{s}$$

4.
$$\mathcal{L}(tf(t)) = -\tilde{f}'(s)$$

5.
$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_0^s \tilde{f}(p)dp$$

6.
$$\mathcal{L}(f * g) = \tilde{f}.\tilde{g}$$

7. Si f est T-périodique, alors
$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1 - e^{-st}}$$

Transformée inverse :

1. Linéarité : $\mathcal{L}^{-1}(a\tilde{f} + b\tilde{g}) = a\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}) + b\mathcal{L}^{-1}(\tilde{g}) = af + bg$
2. Translation : $\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}(s-a)) = e^{at}f(t)$
3. Modulation : $\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}\tilde{f}(s)) = \begin{cases} f(t-a), \text{ si } t > a \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$

4. Changement d'échelle : $\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}(ks)) = \dfrac{1}{k} f\left(\dfrac{1}{k}\right)$
5. Dérivée : $\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}^{(k)}(s)) = (-1)^k t^k f(t)$
6. Intégrale : $\mathcal{L}^{-1}\left(\int_0^\infty \tilde{f}(s)ds\right) = \dfrac{f(t)}{t} Y(t)$
7. Multiplication par s : $\mathcal{L}^{-1}(sf(s)) = f'(t) + f(0)\delta$

Théorèmes taubériens :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\tilde{f}(s)$$
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\tilde{f}(s)$$

1.12.2 Distributions

Définition : $T \in \mathcal{D}'_+$

$$\mathcal{L}(T) = \tilde{T} = < T, e^{-st} >$$

Exemples :

1. $\tilde{\delta} = 1$
2. $\tilde{\delta}_a = e^{-as}$
3. $\tilde{\delta'} = s$
4. $\widetilde{\delta^{(n)}} = s^n$

Chapitre 2

Analyse dans $\mathbb{R}^n$ (MT22)

2.1 Fonction de plusieurs variables $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

2.1.1 Généralités

Disque ouvert de centre A et de rayon ρ :

$$B(A,\rho) = \{M \in \mathbb{R}^n, ||\overrightarrow{AM} < \rho||\}$$

Limité :

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0 \text{ tel que } \forall M \in \mathbb{R}^n, ||\overrightarrow{M_0M}|| < \eta \Rightarrow |f(M) - l| < \varepsilon$$

Continuité :

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$$

Condition suffisante de continuité :

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}, \exists\varepsilon \text{ tel que } |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon(r) \text{ avec } \varepsilon \overset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow |f(M) - l| < \varepsilon$$

Condition suffisante de non-continuité : S'il existe un chemin C tel que

$$\lim_{M\to M_0} f(M) \neq f(M_0) \Rightarrow f \text{ n'est pas continue}$$

2.1.2 Dérivation

Différentiabilité : f différentiable si

$$f(x_0 + h, y_0 + h) = f(x_0, y_0) + Ah + Bh + \sqrt{h^2 + k^2}\varepsilon(h,k) \text{ avec } \varepsilon \longrightarrow 0$$

Condition suffisante de différentiabilité : Si f admet des dérivées partielles premières continues en M_0 alors f est différentiable en M_0

Théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \in C^0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

Dérivation de composée de fonctions :

1. $\Phi(t) = f(\alpha(t), \beta(t))$

$$\Phi'(t) = \alpha'(t)\frac{\partial}{\partial x}f(\alpha(t), \beta(t)) + \beta'(t)\frac{\partial}{\partial y}f(\alpha(t), \beta(t))$$

2. $\psi(u,v) = f(a(u,v), b(u,v))$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial a}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(f(a(u,v)), b(u,v)) + \frac{\partial b}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(f(a(u,v)), b(u,v))$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial a}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(f(a(u,v)), b(u,v)) + \frac{\partial b}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(f(a(u,v)), b(u,v))$$

3. $\zeta(x,y) = \alpha(f(x,y))$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\alpha'(f(x,y))$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\alpha'(f(x,y))$$

Différentielle :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Formule des accroissements finis :

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$

Taylor à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) =& f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk\right) + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k) \end{aligned}$$

Condition nécessaire d'optimalité :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*) = 0$$

Puis, repasser à Taylor :

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk\right) + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k)$$

2.1.3 Dérivées directionnelles

Définition :

$$Df(x,y) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda}$$

Remarque :

1. $Df(x, \overrightarrow{e_i}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$
2. Si f est différentiable, alors $Df(x,y) = Df(x)y$

Théorème :

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow Df(x^*,y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Existence : Si f est continue et $\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = +\infty$ alors x^* existe

Unicité : Si f est une fonction convexe, alors x^*, s'il existe, est unique

2.2 Analyse vectorielle

Produit scalaire : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = ||x||.||y|| \cos\theta$$

Produit vectoriel : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$

Produit mixte : $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires

$$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}= \text{ volume du parallélépipède formé par } \overrightarrow{u},\overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w}$$

Coordonées cylindriques :

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases} ,\theta\in[0,2\pi[$$

Coordonées sphériques :

$$\begin{cases} x=\rho\cos\phi\cos\theta \\ y=\rho\cos\phi\sin\theta \\ z=\rho\sin\phi \end{cases} ,\theta\in[0,2\pi[,\phi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

Gradient :

$$\overrightarrow{\nabla}f=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} ; \overrightarrow{\nabla}(fg)=f\overrightarrow{\nabla}g+g\overrightarrow{\nabla}f$$

Rotationnel :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} ; \overrightarrow{\text{rot}}f\overrightarrow{V}=f\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V}+\overrightarrow{\nabla}f\wedge\overrightarrow{V}$$

Divergence :

$$\text{div } f=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z} ; \begin{cases} \text{div } f\overrightarrow{V}=f\text{div }\overrightarrow{V}+\overrightarrow{\nabla}f.\overrightarrow{V} \\ \text{div }\overrightarrow{V}_1\wedge\overrightarrow{V}_2=\overrightarrow{V}_2\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V}_1-\overrightarrow{V}_1\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V}_2 \end{cases}$$

Laplacien :

$$\Delta f=\text{div }\overrightarrow{\nabla}f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Propositions :

$$\begin{aligned}
&f\in C^2\Rightarrow\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\nabla}f=0 \\
&\overrightarrow{V}=(P,Q,R)^T \text{ avec } P,Q,R\in C^1,\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V}=0\Rightarrow\exists f \text{ tel que } \overrightarrow{\nabla}f=\overrightarrow{V} \\
&\overrightarrow{V}=(P,Q,R)^T \text{ avec } P,Q,R\in C^2,\text{div }\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V}=0 \\
&\overrightarrow{V}=(P,Q,R)^T \text{ avec } P,Q,R\in C^1,\text{div }\overrightarrow{V}=0\Rightarrow\exists\overrightarrow{A} \text{ tel que } \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A}=\overrightarrow{V}
\end{aligned}$$

2.3 Courbes et surfaces

2.3.1 Surfaces

Plan (cartésien) : Plan passant par M_0 et de normal $\overrightarrow{N}=(a,b,c)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Plan (paramétrique) : Plan passant par M_0 et contenant $\overrightarrow{u}=(\alpha,\beta\gamma)$ et $\overrightarrow{v}=(\alpha',\beta',\gamma')$

$$\begin{cases} x=x_0+\alpha t+\alpha' t' \\ y=y_0+\beta t+\beta' t' \\ z=z_0+\gamma t+\gamma' t' \end{cases} ,(t,t')\in\mathbb{R}^2$$

Distance d'un point à un plan : Plan P de normal $\overrightarrow{N}$ contenat M_0

$$\delta(P,M) = \frac{|\overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{N}|}{||\overrightarrow{N}||}$$

Surface (cartésien) :

$$f(x,y,z) = 0 \text{ (implicite) ; } z = f(x,y) \text{ (explicite)}$$

Surface (paramétrique) :

$$\begin{cases} x = Q_1(t,t') \\ y = Q_2(t,t') \\ z = Q_3(t,t') \end{cases} , (t,t') \in \mathbb{R}^2$$

Surface de révolution : (S) est dite de révolution autour de (Δ) si l'intersection avec tout plan perpendiculaire à Δ est vide ou un cercle centré sur (Δ)

Vecteur normal à une surface :
Si la surface est définit par une équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$ alors $\overrightarrow{\nabla} f$ est normal à S
Si la surface est définit par une équation paramétrique en Q_1, Q_2, Q_3 alors $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{\nabla}_u Q \wedge \overrightarrow{\nabla}_v Q$ est normal à S

2.3.2 Courbes

Droite (cartésien) : Vu comme l'intersection de deux plans

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Droite (paramétrique) : Droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta\gamma)$ et passant par M_0

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

Distance d'un point à une droite : Droite (Δ) de vecteur directeur V et passant par M_0

$$\delta(M,\Delta) = \frac{||\overrightarrow{M_0M} \wedge \overrightarrow{V}||}{||\overrightarrow{V}||}$$

Courbe (cartésien) : Vu comme l'intersection de deux Surfaces

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Courbe (paramétrique) :

$$\begin{cases} x = Q_1(t) \\ y = Q_2(t) \\ z = Q_3(t) \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

Vecteur tangent à une courbe :
Si C est définit par des équations cartésiennes en f_1 et f_2 alors e vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla} f_1 \wedge \overrightarrow{\nabla} f_2$ est tangent à C Si C est définit par un système d'équation paramétrique en Q_1, Q_2, Q_3 alors le vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla} Q$ est tangent à C

Surfaces usuelles :

TODO : sur scilab tracer

1. Ellipsoïde
2. Cyclindre elliptique
3. hyperboloïde à une et deux nappe(s)
4. paraboloïde
5. cône

2.4 Intégrales dans $\mathbb{R}^n$

2.4.1 Intégrales doubles

Théorème : Si $D = [a, b] \times [c, d]$

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$

Théorème de Fubini : Si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} | a < x < b, \Phi_1(x) < y < \Phi_2(x)\}$ alors

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x, y)dy\right) dx$$

Aire d'un domaine :

$$\iint_D dxdy = \text{ Aire du domaine } D$$

Masse d'un domaine : Si on note $\mu(x, y)$, la masse surfacique du domaine alors la masse m du domaine est donnée par

$$\iint_D \mu(x, y)dxdy$$

Centre de gravité :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \iint_D x\mu(x, y)dxdy \\ y_G = \frac{1}{m} \iint_D y\mu(x, y)dxdy \end{cases}$$

Matrice Jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Changement de variable : (En coordonées polaire : $|J| = r$)

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_D elta|J|f(_\zeta(u, v), \eta(u, v))dudv$$

Moment d'inertie par rapport à une droite :

$$\mathcal{J}_\Delta = \iint_D [\delta(M, \Delta)]^2 \mu(x, y)dxdy$$

Moment d'inertie par rapport à un point :

$$\mathcal{J}_A = \iint_D [\delta(M, A)]^2 \mu(x, y)dxdy = \iint_D [(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2]\mu(x, y)dxdy$$

2.4.2 Intégrales triples

Théorème : Si $D = [a, b] \times [c, d] \times [e, i]$

$$\iiint_D f(x)g(y)h(z)dxdydz = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)\left(\int_e^i h(z)dz\right)$$

Méthode des bâtons : On note D_0 la projection de V sur (xOy)

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iint_{D_0} \left(\int_{\zeta(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x, y, z)dz\right) dxdy$$

Méthode des tranches :

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{D(z)} f(x,y,z)dxdy\right) dz$$

Matrice Jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Changement de variable : (En sphérique : $|J| = r^2|\cos\varphi|$)

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Lambda |J| f(\epsilon(u,v,w), \eta(u,v,w), \zeta(u,v,w))dudvdx$$

Masse d'un volume :

$$\iiint_D \mu(x,y,z)dxdydz$$

Centre de gravité :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m}\iiint_V x\mu(x,y,z)dxdydz \\ y_G = \frac{1}{m}\iiint_V y\mu(x,y,z)dxdydz \\ z_G = \frac{1}{m}\iiint_V z\mu(x,y,z)dxdydz \end{cases}$$

Moment d'inertie par rapport à une droite :

$$\mathcal{J}_\Delta = \iiint_V [\delta(M,\Delta)]^2 \mu(x,y,z)dxdydz$$

Moment d'inertie par rapport à un point :

$$\mathcal{J}_A = \iiint_V [\delta(M,A)]^2 \mu(x,y,z)dxdydz = \iiint_V [(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2]\mu(x,y,z)dxdydz$$

Moment d'inertie par rapport à un plan :

$$\mathcal{J}_P = \iiint_V [\delta(M,P)]^2 \mu(x,y,z)dxdydz$$

Théorème de Guldin : Si S est un volume de révolution engendré par le domaine (D) autour de l'axe (Oz) alors :

$$V(S) = 2\pi x_G A(D)$$

2.4.3 Intégrales curvillignes

Abscisse curvilligne :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(t) + y'(t) + z'(t)}dt$$

Notation :

$$ds = \sqrt{x'(t) + y'(t) + z'(t)}dt$$

Longueur d'arc :

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'(\theta)}d\theta$$

Masse d'un fil :

$$m = \left|\int_\Gamma \mu(s)ds\right|$$

Circulation d'un champ de vecteur : Soit C une courbe paramétrée d'extrémité A et B et d'équation $\begin{cases} x(t), y(t), z(t) \end{cases}$, $t \in [t_A, t_B]$ alors $\forall \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$, on définit la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de AB par

$$\mathcal{T}_{AB} = \int_{AB} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{dl} = \int_{AB} (P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz) = \int_{t_A}^{t_B} (x'(t)P(M) + y'(t)Q(M) + z'(t)R(M)dt)$$

Circulation d'un champ de vecteur dérivant d'un potentiel scalaire : Si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} = 0$ alors $\exists f$ telle que $\overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{V}$ et on a $\mathcal{T}_{AB} = f(B) - f(A)$

Formule de Green-Rieman : Soit $D \in \mathbb{R}^2$ limité par Γ et orienté dans le sens direct, sans point double. $\forall P, Q$,

$$\int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy$$

Aire d'un domaine avec Green-Rieman : En prenant $P(x,y) = -\frac{1}{2}y$ et $Q(x,y) = \frac{1}{2}x$ on a $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1$ d'où

$$A(D) = \iint_D dxdy = \int_\Gamma xdy = \frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx$$

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2(\theta)d\theta \text{ (en polaire)}$$

2.4.4 Intégrales surfaciques

Aire d'une surface paramétrée en (u,v) :

$$A(S) = \iint_\Delta ||\overrightarrow{T_u} \wedge \overrightarrow{T_v}||dudv \text{ avec } \overrightarrow{T_u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{T_v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}, (u,v) \in \Delta$$

Aire d'une surface explicité en z :

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 1}dxdy, (x,y) \in D$$

Notation :

$$d\sigma = ||\overrightarrow{T_u} \wedge \overrightarrow{T_v}||dudv$$

Masse d'une surface :

$$m = \iint_S \mu(M)d\sigma$$

Centre de gravité :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m}\iint_S x\mu(M)d\sigma \\ y_G = \frac{1}{m}\iint_S y\mu(M)d\sigma \\ z_G = \frac{1}{m}\iint_S z\mu(M)d\sigma \end{cases}$$

Moment d'inertie :

$$\mathcal{J}_\Delta = \iint_S [\delta(M\Delta)]^2\mu(M)d\sigma$$

Vecteur normal à une surface (paramétrée) :

$$\overrightarrow{n_1} = -\overrightarrow{n_2} = \frac{\overrightarrow{T_u} \wedge \overrightarrow{T_v}}{||\overrightarrow{T_u} \wedge \overrightarrow{T_v}||}$$

Vecteur normal à une surface (explicitée en z) :

$$\overrightarrow{n_1} = -\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 1}}$$

Orientation d'une surface : L'orientation associée au vecteur $\overrightarrow{n}$ est faite dans le même sens du mouvement d'un tire-bouchon qui s'enfonce dans la direction de $\overrightarrow{n}$

Flux d'un champ de vecteur :

$$\Phi_S(\overrightarrow{V}) = \iint_S \overrightarrow{V}.\overrightarrow{n}\, d\sigma$$

2.5 Théorèmes intégraux

2.5.1 Théorème de Stokes-Ampères

Soit S une surface de $\mathbb{R}^3$ et Γ le bord de S (courbe fermée), alors pour $\overrightarrow{V} = (P(M), Q(M), R(M))^T$ on a

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V} = \oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$$

C'est-à-dire

$$\mathcal{T}_\Gamma(\overrightarrow{V}) = \Phi_S(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V})$$

2.5.2 Théorème de Gauss-Ostrogradski

Soit V un volume de $\mathbb{R}^3$ limité par une surface Σ, on a

$$\iiint_V \text{div}\ \overrightarrow{V} = \iint_\Sigma \overrightarrow{V}.\overrightarrow{n}\, d\sigma = \Phi_\Sigma(\overrightarrow{V})$$

Chapitre 3

Algèbre linéaire (MT23)

3.1 Espace vectoriels

Groupe : $(G, +)$ est un groupe si :

- $+$ est une loi de composition interne
- $+$ est associative
- $+$ admet un élement neutre e dans G tel que $\forall x \in G, x + e = e + x = x$
- Tout élement de G admette un symétrique ($\forall x \in G, \exists \bar{x}$ tel que $x + \bar{x} = \bar{x} + x = e$)

Espace vectoriel : $(E, +, .)_K$ est un K-espace vectoriel si

- $(E, +)$ est un groupe commutatif
- . est une loi de composition externe $K \times E \to E$
- . vérifie les propriétés suivantes ($\forall \lambda, \mu \in K, \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$)
  - $(\lambda\mu).\overrightarrow{x} = \lambda.(\mu\overrightarrow{x})$
  - $(\lambda + \mu).\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x} + \mu\overrightarrow{x}$
  - $\lambda.(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y}$
  - $1_K.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$

Sous-espace vectoriel : $(F, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ si $F \subset E$ et $(F, +, .)$ est un espace vectoriel

Caractérisation : $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ si et seulement si

- $F \neq \emptyset$
- $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F$
- $\forall \lambda \in K, \forall \overrightarrow{x} \in F, \lambda\overrightarrow{x} \in F$

Somme :

$$F + G = \{z \in E | z = x + y, x \in F, y \in E\}$$

Sous-espace supplémentaire : F et G sont supplémentaire dans E si

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow E = F + G \text{ et } F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$$

Famille liée : $(\overrightarrow{x_1}, \ldots \overrightarrow{x_p})$ est liée s'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{x_i} = 0$$

Famille libre (famille non liée) :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0\overrightarrow{x_i} = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i$$

Sous-espace vectoriel engendré :

$$\overrightarrow{x} \in \text{vect } < \overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_p} > \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K, \overrightarrow{x} = \sum \lambda_i \overrightarrow{x_i}$$

Base : famille libre et génératrice

Théorème de la base incomplète : Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ une famille libre avec $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$

Théorème d'existence : Tout espace vectoriel fini, non trivial, possède une base

Dimension : nombre d'élément d'une base

Propositions sur les bases : E est un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{F}$ une famille de p vecteur

— Si $p = n$ et $\mathcal{F}$ est, soit libre, soir génératrice, alors $\mathcal{F}$ est une base de E

— Si $p > n$ alors $\mathcal{F}$ est liée

— Si $p < n$ alors $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice

Propositions sur les dimensions : E est un espace vectoriel de dimension n, F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E

— $\dim F \leq \dim E$

— $F = E \Leftrightarrow \dim F = \dim E$

— $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$

— $\dim F \oplus G = \dim F + \dim G$

3.2 Applications linéaires et matrices

3.2.1 Applications linéaires

E et F sont deux espaces vectoriels sur un même corps K

Application linéaire : $f : E \to F$ est une application linéaire si

$$f(\overrightarrow{x} + \lambda \overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}) + \lambda f(\overrightarrow{y})$$

En particulier on a : $f(\overrightarrow{0}_E) = \overrightarrow{0}_F$

Ensemble des applications linéaires : $\mathcal{L}(E, F)$

Noyeau : Sous-espace vectoriel de E tel que

$$\text{Ker } f = \{\overrightarrow{x} \in E \text{ tel que } f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}\}$$

Image : Sous-espace vectoriel de F tel que

$$\text{Im } f = \{\overrightarrow{y} \in F \text{ tel que } \exists \overrightarrow{x} \in E, \overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})\}$$

Rang :

$$\text{rang } f = \dim \text{Im } f$$

Image d'une famille : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

— L'image par f d'une famille liée de E est une famille liée de F

— L'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F

Application injective :

— f injective $\Leftrightarrow$ Ker $f = \{\overrightarrow{0_E}\}$

— Si f est injective alors l'image par f d'une famille libre de E est une famille libre de F

Application surjective :

— f surjective $\Leftrightarrow$ Ker $f = F$

— Si f est surjective alors l'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F

Application bijective :

- f bijective $\Leftrightarrow$ Ker $=\{0\}$ et Im $f = F$
- Si f est bijective alors l'image d'une base de E est une base de F

Définitions :

Homomorphisme : application linéaire de E dans F

Endomorphisme : application linéaire de E dans E

Isomorphisme : bijection linéaire de E dans F
E et F sont isomorphes$\Leftrightarrow \dim E = \dim F$

Automorphisme : bijection linéaire de E dans E

Théorème du rang :

$$\dim \mathrm{Ker}\ f + \mathrm{rang}\ f = \dim E$$

3.2.2 Matrices

Soient f et g deux applications linéaires telles que :

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{\quad f \quad} & F & & F & \xrightarrow{\quad g \quad} & G \\ \mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}) & M_f & \mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_m}) & & \mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_n}) & M_g & \mathcal{G} = (\overrightarrow{g_1}, \ldots, \overrightarrow{g_m}) \end{array}$$

Définition : Pour chaque élément de $\mathcal{E}$ on a :

$$f(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \overrightarrow{f_i}$$

On appelle matrice associé à f le tableau M_f de scalaire suivant :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} f(\overrightarrow{e_1}) & \ldots & f(\overrightarrow{e_j}) & \ldots & f(\overrightarrow{e_n}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{f_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{f_m} \end{array} \end{array}$$

Somme de matrices : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (associé à $f+g$)

Produit par un scalaire : $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ (associé à λf)

Produit de matrices : (associé à $g \circ f$)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\quad f \quad} & F & \xrightarrow{\quad g \quad} & G \\ \mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}) & M_f & \mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_n}) & M_g & \mathcal{G} = (\overrightarrow{g_1}, \ldots, \overrightarrow{g_n}) \\ E & & \xrightarrow{\qquad\qquad g \circ f \qquad\qquad} & & G \\ \mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}) & & M_{g \circ f} = M_g M_f & & \mathcal{G} = (\overrightarrow{g_1}, \ldots, \overrightarrow{g_n}) \end{array}$$

Image d'un vecteur : Si $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X$ et $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = Y$ image de $\overrightarrow{x}$ par f alors $Y = M_f X$

Inverse d'une matrice carée : Si $CM_f = M_f C = I$ alors $C = M_{f^{-1}}$ est appelée inverse de M_f
Et $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Transposée d'une matrice : $(A^T)_{ij} = A_{ji}$
Et $(AB)^T = B^T A^T$

Matrice de passage : La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad id_E \quad} & E \\ \mathcal{E}' = (\overrightarrow{e'_1}, \dots, \overrightarrow{e'_n}) & P & \mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_m}) \end{array}$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overrightarrow{e_1} & \dots & \overrightarrow{e_j} & \dots & \overrightarrow{e_n} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \overrightarrow{e'_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{e'_m} \end{array}$$

Changement de base (composantes d'un vecteur) : Si P est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$, alors les coordonées de X' dans $\mathcal{E}'$ en fonction des coordonées X dans $\mathcal{E}$ sont données par $X = PX' \Leftrightarrow X' = P^{-1}X$

Changement de base d'un même espace $(E = F)$:
M_f est la matrice associée à f quand on choisit la base $\mathcal{E}$
M'_f est la matrice associée à f quand on choisit la base $\mathcal{E}'$
P est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{\quad id_E \quad} & E & \xrightarrow{\quad f \quad} & E & \xrightarrow{\quad id_E \quad} & E \\ \mathcal{E}' & P & \mathcal{E} & M_f & \mathcal{E} & P^{-1} & \mathcal{E}' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad f \qquad\qquad\qquad} & E \\ \mathcal{E}' & M'_f = P^{-1} M_f P & \mathcal{E}' \end{array}$$

Changement d'espace vectoriel :
$\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux bases de E
$\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux bases de F
M_f est la matrice associée à f de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$
M'_f est la matrice associée à f de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{F}'$
P est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$
Q est la matrice de passage de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{\quad id_E \quad} & E & \xrightarrow{\quad f \quad} & F & \xrightarrow{\quad id_F \quad} & F \\ \mathcal{E}' & P & \mathcal{E} & M_f & \mathcal{F} & Q^{-1} & \mathcal{F}' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad f \qquad\qquad\qquad} & F \\ \mathcal{E}' & M'_f = Q^{-1} M_f P & \mathcal{F}' \end{array}$$

Image d'une matrice : $\text{Im } M_f = \text{vect} < M_{f_1}, \dots, M_{f_n} >$

$$Y \in \text{Im } M_f \Leftrightarrow X \in \mathcal{M}_{n1} \text{ tel que } Y = M_f X$$

Rang d'une matrice :

$$\text{rang } M_f = \dim \text{Im } M_f = \text{ nombre de colonnes linéairements indépendants de la matrice}$$

Théorème du rang :

$$\dim \text{Ker } M_f + \text{rang } M_f = \dim E$$

Noyau d'une matrice :

$$\text{Ker } A = \{X \in \mathcal{M}_{n1} \text{ tel que } AX = 0\}$$

Condition d'inversibilité d'une matrice :

$$M_f \text{ inversible} \Leftrightarrow f \text{ inversible}$$

3.3 Déterminants et systèmes linéaires

3.4 Valeurs propres et diagonalisation

3.5 Espaces euclidiens

Chapitre 4

Analyse numérique (MT09)

4.1 Systèmes linéaires

4.2 Problèmes de moindres carrées

4.3 Méthodes itératives

4.4 Interpolation

4.5 Intégration numérique

4.6 Équations différentielles

4.7 Valeurs propres

Chapitre 5

Statistiques (SY02)

5.1 Éléments de probabilités

5.2 Échantillonnage

5.3 Éstimation

5.4 Intervalle de confiance

5.5 Éstimation optimale

5.6 Régression linéaire

5.7 Tests d'hypothèses

5.8 Tests de conformité

5.9 Tests d'homogénéité

5.10 Tests d'adéquation

5.11 Tests d'indépendance

5.12 Analyse de la variance

Chapitre 6

Optimisation (RO03/RO04)

6.1 Algorithmes de graphe

6.2 Programmation linéaire

6.3 Optimisation non-linéaire

Chapitre 7

Formulaires

7.1 Équations différentielles

7.2 Trigonométrie