

Mathématiques

Henri LEFEBVRE

14 octobre 2017

Table des matières

1	Analyse dans \mathbb{R} (MT90/MT91/MT12)	2
1.1	Propriétés de \mathbb{R}	2
1.2	Suites réelles $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$	3
1.3	Fonctions réelles $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (généralités)	4
1.4	Dérivation	4
1.5	Théorie de la mesure	5
1.5.1	Généralités	5
1.5.2	Exemples de mesures	6
1.6	Intégration	6
1.6.1	Définitions	6
1.6.2	Propriétés	7
1.6.3	Convergence	8
1.6.4	Fonctions définies par une intégrale	9
1.6.5	Introduction au calcul des variations	9
1.7	Séries dans \mathbb{R}	9
1.8	Le corps \mathbb{C}	9
1.9	Distributions	9
1.10	Convolution	9
1.11	Transformées de Fourier	9
1.12	Transformées de Laplace	9
2	Analyse dans \mathbb{R}^n (MT22)	10
3	Algèbre linéaire (MT23)	11
4	Analyse numérique (MT09)	12
5	Statistiques (SY02)	13
6	Optimisation (RO04)	14
7	Formulaires	15

Chapitre 1

Analyse dans \mathbb{R} (MT90/MT91/MT12)

1.1 Propriétés de \mathbb{R}

Structure : $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps ordonné

Formule du binôme :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ avec } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Produit scalaire : $\langle x, y \rangle = xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Norme (\mathbb{R}) (valeur absolue) : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \rightarrow |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$

Positivité : $|x| > 0$ et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Homothétie : $|ax| = |a||x|$

Inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$

Convergence : $f(x) \rightarrow l \Leftrightarrow |f(x) - l| \rightarrow 0$

Intervalles : I est un intervalle si $\forall a, b \in I, a < c < b \Rightarrow c \in I$

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \\ c \in [a, b] &\Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 1], c = \theta a + (1 - \theta)b \end{aligned}$$

Densité de \mathbb{Q} :

$$\forall]a, b[\neq \emptyset, \exists \alpha \in \mathbb{Q} \cap]a, b[\text{ et } \exists \beta \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap]a, b[$$

Ensembles bornés : Soit $A \subset \mathbb{R}$

Majoration : $\forall x \in A, x \leq M$

Minoration : $\forall x \in A, x \geq m$

Encadrement : $\forall x \in A, |x| < M$

Borne supérieure : Plus petit des majorants (s'ils existent)

$$s = \sup A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A, x \leq s \\ \forall t < s, \exists x \in A \text{ tel que } t < x \end{array} \right.$$

Droite numérique achevée : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

1.2 Suites réelles $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Définition : $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto u_n$

Convergence :

$$(U_n) \longrightarrow l, n \longrightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

Limite infinie :

$$(U_n) \longrightarrow l, n \longrightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow u_n > \varepsilon)$$

Convergences connues :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{n!} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{k^n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln \beta)^\beta}{n^\alpha} = 0$$

Propriétés de convergence : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_n \longrightarrow l$ et $v_n \longrightarrow l'$ quand $n \longrightarrow \infty$

Combinaison : $u_n + \lambda v_n \longrightarrow l + \lambda l'$ quand $n \longrightarrow \infty$

Produit : $u_n v_n \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$

Quotient : Si $l' \neq 0$, $u_n/v_n \longrightarrow l/l'$ quand $n \longrightarrow \infty$

Vers zéro : Si $u_n \longrightarrow 0$ et v_n bornée, alors $u_n v_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$

Ordre : Si $u_n \leq v_n$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

Suites adjacentes : (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si et seulement si

$$(u_n) \text{ est croissante; } (v_n) \text{ est décroissante; } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$$

Suite arithmétique :

Définition récursive : $u_{n+1} = u_n + r$

Définition générale : $u_n = u_0 + nr$

Somme des termes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

Suite géométrique :

Définition récursive : $u_{n+1} = q u_n$

Définition générale : $u_n = q^n u_0$

Somme des termes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$

Si $\exists l \in \mathbb{R}$ point fixe de f (i.e. $f(l) = l$) et f contractante (i.e. f k -lipschitzienne avec $0 < k < 1$) alors $(u_n) \longrightarrow l$

1.3 Fonctions réelles $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (généralités)

Définition : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$

Image : $\forall A \subset \mathbb{R}, f(A) = \{y | \exists x \in A, y = f(x)\}$

Image réciproque : $f^{-1}(B) = \{x \in D_f | f(x) \in B\}$

Support : $\text{supp } \varphi = \overline{\{x | \varphi(x) \neq 0\}}$

Correspondances : Pour $f : E \rightarrow F$

Surjection : $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Injection : $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$

Bijection : $\forall y \in F, \exists ! x \in E$ tel que $y = f(x)$ (f injective et surjective)

Composée : $f \circ g(x) = f(g(x))$

Fonction identité : $id : x \mapsto x$

Bijection réciproque : Si f bijective, alors $\exists f^{-1}$ tel que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$

Convergence : $f(x) \longrightarrow l, x \longrightarrow a$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Limite à droite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, a < x < a + \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Caractérisation de la limite (par les suites) :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \left(\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \Omega - \{a\} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l \right)$$

Continuité :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) : Soit $f \in C^0([a, b])$ et $y \in \mathbb{R}$

$$f(a) < y < f(b) \Rightarrow \exists x \in [a, b], f(x) = y$$

Condition de Lipschitz :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

1.4 Dérivation

Dérivabilité : f est dérivable si et seulement si

$$\exists d \in \mathbb{R}, \text{ tel que } f(x+h) = f(x) + hd + |h|\epsilon(h)$$

Taux de variation :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Théorème de Rolle : Soit $f \in C^0([a, b])$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = 0$$

Théorème des accroissements finis : Soit $f \in C^0([a, b])$

$$\exists c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Opérations :

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g', \lambda \in \mathbb{R}; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}; (f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$$

Fonction réciproque :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Dérivées connues :

$$(x^q)' = qx^{q-1}, q \in \mathbb{Z}; (e^x)' = e^x; (\ln|x|)' = \frac{1}{x}; (\cos x)' = -\sin x; (\sin x)' = \cos x; (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Saut d'une fonction :

$$\sigma_m = f^{(m)}(0^+) - f^{(m)}(0^-), m \geq 0$$

1.5 Théorie de la mesure

1.5.1 Généralités

Fonction indicatrice (ou caractéristique) :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

σ -algèbre (tribu) : Une famille A de sous-ensemble de X est une tribu si :

1. $X \in A$
2. A est stable par complémentarité
3. A est stable par union dénombrable

Espace mesurable : Ensemble muni d'une tribu (X, A)

Tribu borélienne : Plus petite tribu de \mathbb{R} contenant tous les intervalles

Mesure : Une mesure μ sur (X, A) est une application de $A \rightarrow [0, \infty]$ telle que

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite dénombrable de A deux à deux disjointes alors : $\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$ (σ -additivité)

Espace mesuré : Le triplet (X, A, μ) est appelé un espace mesuré Proposition : soit \bar{x} une tribu de X

1. Si $A, B \in \bar{x}$ et $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$
2. Si $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots, A_k \in \bar{x}$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_n A_n$ et $\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$
3. Si $A, B \in \bar{x}$ alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

Ensemble négligeable : A est dit négligeable si $\mu(A) = 0$

Proposition vraie presque partout (pp) : Une proposition est dite vraie (μ -)presque partout sur X si elle est vraie sur $X \setminus E$ avec $\mu(E) = 0$

Ensemble de mesure nulle : Un sous-ensemble A de \mathbb{R} est dit de mesure nulle si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'intervalles ouverts et bornés (I_n) telle que :

1. $A \subset \bigcup_{i \geq 1} I_i$
2. $\sum_{i \geq 1} |I_i| < \varepsilon$

Propositions :

1. Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle
2. Si A est de mesure nulle et $B \subset A$, alors B est de mesure nulle
3. Si $A \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n$ avec chaque A_n de mesure nulle, alors A est de mesure nulle

Fonction mesurable : $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ est mesurable si $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

1.5.2 Exemples de mesures

Mesure de Lebesgue : Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\forall I = [a, b]$ borné, $\lambda([a, b]) = \lambda([a, b[) = b - a$

Mesure de Dirac : $\delta_a : T \rightarrow \{0, 1\}$ avec T une tribu et $\delta_a = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$

Mesure de comptage (cardinal) : Pour un ensemble dénombrable de \mathbb{R} , $\forall n, \mu(\{n\}) = 1$

1.6 Intégration

1.6.1 Définitions

Fonction en escalier : Fonctions constantes sur des intervalles

Intégrale de Riemann : Soit

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{I_i}$$

une fonction en escalier, on définit l'intégrale de f par

$$I(f) = \int_a^b f(t) dt = \sum \alpha_i (x_{i+1} - x_i)$$

Pour une fonction quelconque, s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, deux fonctions en escalier f_ε et F_ε telle que $f_\varepsilon \leq f \leq F_\varepsilon$ et $I(F_\varepsilon) - I(f_\varepsilon) < \varepsilon$, alors f est dite Riemann-intégrable et on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \sup \{I(g) \mid g \text{ fonction en escalier et } g \leq f\}$$

Fonction étagée : Fonction dont l'image est constituée d'un nombre fini de valeurs réelles

Théorème : Toute fonction à valeur dans \mathbb{R}^n est limite de fonctions étagées

Intégrale de Lebesgue : Soit

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$$

une fonction étagée, on définit l'intégrale de f par rapport à la mesure μ par

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

et pour $E \subset X$

$$\int_E f d\mu = \int_X f 1_E d\mu$$

Pour f une fonction positive,

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu \mid s \text{ étagée et } s \leq f \right\}$$

Enfin pour une fonction quelconque, on définit : $f^+ = \max(0, f)$ et $f^- = \max(0, -f)$ de sorte que :

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

1.6.2 Propriétés

Lien Riemann-Lebesgue : Si f est Riemann-Intégrable, alors f est Lebesgue-intégrable

Ensemble de fonctions intégrables (au sens de Lebesgue) :

$$L^p(A) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_A |f|^p < \infty \right\}$$

Fonctions localement intégrables : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrable sur tout intervalle borné ($L^1 \subset L^1_{loc}$)

Intégration et dérivation :

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Egalité d'intégrales :

$$f \stackrel{pp}{=} g \Leftrightarrow \int f(t) dt = \int g(t) dt$$

Linéarité :

$$\int (f(t) + \lambda g(t)) dt = \int f(t) dt + \lambda \int g(t) dt$$

Relation de Chasles : Qui implique aussi $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Relation d'ordre :

$$f \leq g \Leftrightarrow \int f(t) dt \leq \int g(t) dt$$

Fonction périodique : Soit f une fonction T -périodique,

$$\int_0^T f(t) dt = \int_c^{c+T} f(t) dt$$

Inégalité triangulaire :

$$\left| \int f(t) dt \right| \leq \int |f(t)| dt$$

Cauchy-Schwartz :

$$\left| \int f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int f^2(t) dt \times \int g^2(t) dt}$$

Inégalité de Holder :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \int f(t)g(t) dt \leq \left(\int |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

Théorème de la moyenne :

$$\forall x \in [a, b], m \leq f \leq M, \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M$$

Inégalité de la moyenne :

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \times \int_a^b |g(x)| dx$$

Intégrale sur un ensemble négligable : Soit μ une mesure alors

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$$

Théorème fondamental :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

Intégration par partie (IPP) :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Changement de variable :

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{x=u(t)}{=} \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t) dt$$

Propositions sur l'intégrabilité :

- f monotone $\Rightarrow f$ Riemann-intégrable
- f continue $\Rightarrow f$ Riemann-intégrable
- f pp-continue et bornée $\Rightarrow f$ Riemann-intégrable
- f pp-continue $\Rightarrow f$ Lebesgue-intégrable
- $|f| < g$, g Lebesgue-intégrable $\Rightarrow f$ Lebesgue-intégrable
- f Lebesgue-intégrable $\Leftrightarrow |f|$ Lebesgue-intégrable

1.6.3 Convergence

1.6.4 Fonctions définies par une intégrale

1.6.5 Introduction au calcul des variations

1.7 Séries dans \mathbb{R}

1.8 Le corps \mathbb{C}

1.9 Distributions

1.10 Convolution

1.11 Transformées de Fourier

1.12 Transformées de Laplace

Chapitre 2

Analyse dans \mathbb{R}^n (MT22)

Chapitre 3

Algèbre linéaire (MT23)

Chapitre 4

Analyse numérique (MT09)

Chapitre 5

Statistiques (SY02)

Chapitre 6

Optimisation (RO04)

Chapitre 7

Formulaires