Mathématiques

Henri LEFEBVRE

22 octobre 2017

Table des matières

Chapitre 1

Analyse dans $\mathbb{R}$ (MT90/MT91/MT12)

1.1 Propriétés de $\mathbb{R}$

Structure : $(\mathbb{R}, +, \dot{)}$ est un corps ordonné

Formule du binôme :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ avec } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Produit scalaire : $< x, y >= xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Norme ($\mathbb{R}$) (valeur avsolue) : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \to |x| = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases}$

Positivité : $|x| > 0$ et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Homothétie : $|ax| = |a||x|$

Inégalité triangulaire : $|x+y| \leq |x| + |y|$

Convergence : $f(x) \longrightarrow l \Leftrightarrow |f(x) - l| \longrightarrow 0$

Intervalles : I est un intervalle si $\forall a, b \in I, a < c < b \Rightarrow c \in I$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$
$$c \in [a, b] \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 1], c = \theta a + (1 - \theta) b$$

Densité de $\mathbb{Q}$:

$$\forall]a, b[\neq \emptyset, \exists \alpha \in \mathbb{Q} \cap]a, b[\text{ et } \exists \beta \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap]a, b[$$

Ensembles bornées : Soit $A \subset \mathbb{R}$

Majoration : $\forall x \in A, x \leq M$

Minoration : $\forall x \in A, x \geq m$

Encadrement : $\forall x \in A, |x| < M$

Borne supérieur : Plus petit des majorants (s'ils existent)

$$s = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq s \quad \forall t < s, \exists x \in A \text{ tel que } t < x \end{cases}$$

Droite numérique achevée : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

1.2 Suites réelles $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Définition : $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto u_n$

Convergence :

$$(U_n) \longrightarrow l, n \longrightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{tel que}\ \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

Limite infinie :

$$(U_n) \longrightarrow l, n \longrightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{tel que}\ \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow u_n > \varepsilon)$$

Convergences connues :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = 0\,;\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{k^n} = 0\,;\ \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln\beta)^\beta}{n^\alpha} = 0$$

Propriétés de convergence : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n \longrightarrow l$ et $v_n \longrightarrow l'$ quand $n \longrightarrow \infty$

Combinaison : $u_n + \lambda v_n \longrightarrow l + \lambda l'$ quand $n \longrightarrow \infty$

Produit : $u_n v_n \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$

Quotient : Si $l' \neq 0$, $u_n/v_n \longrightarrow l/l'$ quand $n \longrightarrow \infty$

Vers zéro : Si $u_n \longrightarrow 0$ et v_n bornée, alors $u_n v_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$

Ordre : Si $u_n \leq v_n$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$

Suites adjacentes : (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si et seulement si

$$(u_n)\ \text{est croissante}\,;\ (v_n)\ \text{est décroissante}\,;\ \lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$$

Suite arithmétique :

Définition récursive : $u_{n+1} = u_n + r$

Définition générale : $u_n = u_0 + nr$

Somme des termes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

Suite géométrique :

Définition récursive : $u_{n=1} = qu_n$

Définition générale : $u_n = q^n u_0$

Somme des termes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$
Si $\exists l \in \mathbb{R}$ point fixe de f (i.e. $f(l) = l$) et f contractancte (i.e. f k-lipschitzienne avec $0 < k < 1$) alors $(u_n) \longrightarrow l$

1.3 Fonctions réelles $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (généralités)

Définition : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$

Image : $\forall A \subset \mathbb{R}, f(A) = \{y | \exists x \in A, y = f(x)\}$

Image réciproque : $f^{-1}(B) = \{x \in D_f | f(x) \in B\}$

Support : supp $\varphi = \overline{\{x|\varphi(x) \neq 0\}}$

Correspondances : Pour $f : E \to F$

Surjection : $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Injection : $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$

Bijection : $\forall y \in F, \exists! x \in E$ tel que $y = f(x)$ (f injective et surjective)

Composée : $f \circ g(x) = f(g(x))$

Fonction identité : $id : x \mapsto x$

Bijection réciproque : Si f bijective, alors $\exists f^{-1}$ tel que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$

Convergence : $f(x) \longrightarrow l, x \longrightarrow a$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Limite à droite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, a < x < a + \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Caractérisation de la limite (par les suites) :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \left(\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \begin{cases} \lim_{n \to \infty} x_n = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \Omega - \{a\} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x_n) = l \right)$$

Continuité :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Théorème des valeurs intermediaires (TVI) : Soit $f \in C^0([a, b])$ et $y \in \mathbb{R}$

$$f(a) < y < f(b) \Rightarrow \exists x \in [a, b], f(x) = y$$

Condition de Lipschitz :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

1.4 Dérivation

Dérivabilité : f est dérivable si et seulement si

$$\exists d \in \mathbb{R}, \text{ tel que } f(x + h) = f(x) + hd + |h|\epsilon(h)$$

Taux de variation :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Théorème de Rolle : Soit $f \in C^0([a, b])$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = 0$$

Théorème des accroissements finis : Soit $f \in C^0([a,b])$

$$\exists c \in [a,b] \text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Opérations :

$$(f+\lambda g)' = f' + \lambda g', \lambda \in \mathbb{R}\,;\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}\,;\ (f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$$

Fonction réciproque :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Dérivées connues :

$$(x^q)' = qx^{q-1}, q \in \mathbb{Z}\,;\ (e^x)' = e^x\,;\ (\ln|x|)' = \frac{1}{x}\,;\ (\cos x)' = -\sin x\,;\ (\sin x)' = \cos x\,;\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Saut d'une fonction :

$$\sigma_m = f^{(m)}(0^+) - f^{(m)}(0^-), m \geq 0$$

1.5 Théorie de la mesure

1.5.1 Généralités

Fonction indicatrice (ou caractéristique) :

$$1_A(x) = \begin{pmatrix} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \in /A \end{pmatrix}$$

σ-algèbre (tribu) : Une famille A de sous-ensemble de X est une tribu si :

1. $X \in A$
2. A est stable par complémentarité
3. A est stable par union dénombrable

Espace mesurable : Ensemble muni d'une tribu (X, A)

Tribu borélienne : Plus petite tribu de $\mathbb{R}$ contenant tous les intervalles

Mesure : Une mesure μ sur (X, A) est une application de $A \to [0, \infty]$ telle que

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si $(An)n \geq 1$ est une suite dénombrable de A deux à deux disjointes alors : $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$ (σ-additivité)

Espace mesuré : Le triplet (X, A, μ) est appelé un espace mesuré Proposition : soit $\bar{x}$ une tribu de X

1. Si $A, B \in \bar{x}$ et $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$
2. Si $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ..., A_k \in \bar{x}$ alors $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_n A_n$ et $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$
3. Si $A, B \in \bar{x}$ alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

Ensemble négligeable : A est dit négligeable si $\mu(A) = 0$

Proposition vraie presque partout (pp) : Une proposition est dite vraie (μ-)presque partout sur X si elle est vrai sur X E avec $\mu(E) = 0$

Ensemble de mesure nulle : Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit de mesure nulle si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'intervalles ouverts et bornés (I_n) telle que :

1. $A \subset \cup_{i\geq 1} I_i$
2. $\sum_{i\geq 1} |I_i| < \varepsilon$

Propositions :

1. Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle
2. Si A est de mesure nulle et $B \subset A$, alors B est de mesure nulle
3. Si $A \bigcup_{n\geq 1} A_n$ avec chaque A_n de mesure nulle, alors A est de mesure nulle

Fonction mesurable : $f : (X, \bar{x}) \to (\mathbb{R}, B)$ est mesurable si $f^{-1}(B) \subset \bar{x}$

1.5.2 Exemples de mesures

Mesure de Lebesgue : Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ telle que $\forall I = [a, b]$ borné, $\lambda([a, b]) = \lambda(]a, b[) = b - a$

Mesure de Dirac : $\delta_a : T \to \{0, 1\}$ avec T une tribu et $\delta_a = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ si } a \notin A \end{cases}$

Mesure de comptage (cardinal) : Pour un ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$, $\forall n, \mu(\{n\}) = 1$

1.6 Intégration

1.6.1 Définitions

Fonction en escalier : Fonctions constantes sur des intervalles

Intégrale de Riemann : Soit

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{I_i}$$

une fonction en escalier, on définit l'intégrale de f par

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt = \sum \alpha_i (x_{i+1} - x_i)$$

Pour une fonction quelconque, s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, deux fonctions en escalier f_ε et F_ε telle que $f_\varepsilon \leq f \leq F_\varepsilon$ et $I(f_\varepsilon) - I(f_\varepsilon) < \varepsilon$), alors f est dite Riemann-intégrable et on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \sup\{I(g) | g \text{ fonction en escalier et } g \leq f\}$$

Fonction étagée : Fonction dont l'image est constituée d'un nombre fini de valeurs réelles

Théorème : Toute fonction à valeur dans $\mathbb{R}^n$ est limite de fonctions étagées

Intégrale de Lebesgue : Soit

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$$

une fonction étagée, on définit l'intégrale de f par rapport à la mesure μ par

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

et pour $E \subset X$

$$\int_E f d\mu = \int_X f 1_E d\mu$$

Pour f une fonction positive,

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu | s \text{ étagée et } s \leq f \right\}$$

Enfin pour une fonction quelconque, on définit : $f^+ = \max(0, f)$ et $f^- = \max(0, -f)$ de sorte que :

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

1.6.2 Propriétés

Lien Riemann-Lebesgue : Si f est Riemann-Intégrable, alors f est Lebesgue-intégrable

Ensemble de fonctions intégrables (au sens de Lebesgue) :

$$L^p(A) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \int_A |f|^p < \infty \right\}$$

Fonctions localement intégrables : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrable sur tout intervalle borné ($L^1 \subset L^1_{loc}$)

Intégration et dérivation :

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Egalité d'intégrales :

$$f \overset{pp}{=} g \Leftrightarrow \int f(t)dt = \int g(t)dt$$

Linéarité :

$$\int (f(t) + \lambda g(t))dt = \int f(t)dt + \lambda \int g(t)dt$$

Relation de Chasles : Qui implique aussi $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Relation d'ordre :

$$f \leq g \Leftrightarrow \int f(t)dt \leq \int g(t)dt$$

Fonction périodique : Soit f une fonction T-périodique,

$$\int_0^T f(t)dt = \int_c^{c+T} f(t)dt$$

Inégalité triangulaire :

$$\left| \int f(t)dt \right| \leq \int |f(t)|dt$$

Cauchy-Schwartz :

$$\left| \int f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int f^2(t)dt \times \int g^2(t)dt}$$

Inégalité de Holder :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow \int f(t)g(t)dt \leq \left(\int |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

Théorème de la moyenne :

$$\forall x \in [a,b], m \leq f \leq M, \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq M$$

Inégalité de la moyenne :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \times \int_a^b |g(x)|dx$$

Intégrale sur un ensemble négligable : Soit μ une mesure alors

$$\mu(E)=0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$$

Théorème fondamental :

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$$

Intégration par partie (IPP) :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Changement de variable :

$$\int_a^b f(x)dx \overset{x=u(t)}{=} \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t)dt$$

Propositions sur l'intégrabilité :

- f monotone $\Rightarrow f$ Riemann-intégrable
- f continue $\Rightarrow f$ Riemann-intégrable
- f pp-continue et bornée $\Rightarrow f$ Riemann-intégrable
- f pp-continue $\Rightarrow f$ Lebesgue-intégrable
- $|f| < g$, g Lebesgue-intégrable $\Rightarrow f$ Lebesgue-intégrable
- f Lebesgue-intégrable $\Leftrightarrow |f|$ Lebesgue-intégrable

1.6.3 Convergence

Convergence (Riemann) :

$$f_n \overset{unif}{\longrightarrow} f \Rightarrow \int f_n(t)dt \overset{unif}{\longrightarrow} \int f(t)dt$$

Théorème de convergence monotone (Beppo-Levi) :

$$\begin{cases} (f_n) \text{ suite croissante de fonction} \\ f_n \longrightarrow f, n \longrightarrow \infty \end{cases} \Leftrightarrow \int f_n \longrightarrow \int f, n \longrightarrow \infty$$

Théorème de convergence dominée :

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{pp} f \\ |f_n| < g, g \in L^1 \end{cases} \Rightarrow \int f_n \longrightarrow \int f \left(\text{et même : } \int |f_n - f| \longrightarrow 0\right)$$

Inversion somme-integrale :

$$(f_n) \text{ suite de fonction positive} \Rightarrow \int \sum^{\infty} f_n(x)dx = \sum^{\infty} \int f_n(x)dx$$

Théorème de Fubini :

$$f \in L^1 \Rightarrow \iint f(x,y)dxdy = \int \left(\int f(x,y)dx\right) dy$$

Théorème de Fubini-Tonnelle :

$$f \geq 0 \Rightarrow \iint f(x,y)dxdy = \int \left(\int f(x,y)dx\right) dy$$

Définition : intégrale de fonction discontinue, intégrale sur un intervalle non bornée, etc.
Intégrales Riemann-impropre de références :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si } \alpha < 1\,; \int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si } \alpha > 1\,; \int_0^1 \ln t dt = -1$$

Riemann-impropre et Lebesgue : Si f est Riemann-intégrable au sens impropre et de signe constant alors f est Lebesgue-intégrable

1.6.4 Intégrale de Riemann-Stieltjes

Définition : Si α est une fonction croissante, alors elle définit une mesure. On appelle intégrale de Riemann-Stieltjes l'intégrale par rapport à cette mesure : $\int f(x)d\alpha(x)$ et on a :

$$\begin{aligned} \alpha([a,b]) &= \alpha(b^+) - \alpha(a^-) \\ \alpha([a,b[) &= \alpha(b^-) - \alpha(a^-) \\ \alpha(]a,b[) &= \alpha(b^-) - \alpha(a^+) \\ \alpha(]a,b]) &= \alpha(b^+) - \alpha(a^+) \end{aligned}$$

Calcul :

$$\int f(x)d\alpha(x) = \int f(x)\alpha'(x)dx$$

1.6.5 Fonctions définies par une intégrale

Définition : Soit $f : (x,t) \to f(x,t)$, si f est continue en t pour presque-tout x et $|f(t,x)| \leq g(x), g \in L^1$ alors la fonction suivante est défini et est continue

$$F(t) = \int f(t,x)dx$$

Dérivabilité : Si $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ existe et est continue et $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| < g(x), g \in L^1$ alors F est dérivable et

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx$$

Formule :

$$F(t) = \int_{[u(t),v(t)]} f(x,t)dx$$

$$\frac{dF}{dt}(t) = f(t,v(t))\frac{dv(t)}{dt} + f(t,u(t))\frac{du(t)}{dt} + \int_{[u(t),v(t)]} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

1.6.6 Introduction au calcul des variations

Problème de variation : Trouver u^* telle que

$$u^* = \min_{u \in K} J(u) \text{ avec } J(u) = \int_\alpha^\beta \varphi(u,\dot{u},t)dt$$

Équation d'Euler-Lagrange : u solution du problème de variation, alors

$$\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\dot{u},t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{u}}\varphi(u,\dot{u},t)\right] = 0$$

Intégrale première d'Euler-Lagrange : $\varphi(u,\dot{u},t) = \varphi(u,\dot{u})$

$$\varphi(u,\dot{u}) = \left[\frac{\partial}{\partial \dot{u}}\varphi(u,\dot{u})\right]\dot{u} + k, k \in \mathbb{R}$$

Condition aux limites :

- Deux extrémités fixes : $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$
- Une extrémité libre : $u(\alpha) = a$ et $\frac{\partial}{\partial \dot{u}}\varphi(u(\beta),\dot{u}(\beta),\beta) = 0$
- Deux extrémités libres : $\frac{\partial}{\partial \dot{u}}\varphi(u(\alpha),\dot{u}(\alpha),\alpha) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial \dot{u}}\varphi(u(\beta),\dot{u}(\beta),\beta) = 0$

1.7 Séries dans $\mathbb{R}$

1.7.1 Généralités

Condition nécessaire de convergence :

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \Rightarrow u_n \longrightarrow 0$$

Espace vectoriel : L'espace des séries convergentes est un espace vectoriel

Critère de Cauchy :

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\right| < \varepsilon$$

Règle de Riemann : Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $n^\alpha u_n$ majoré pour $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge

Règle de d'Alembert : Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l$ avec $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge

Séries géométrique :

$$\sum_{n \geq 0} aq^n = a\frac{1}{1-q}$$

Séries de Riemann :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Série exponentielle :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z, z \in \mathbb{C}$$

1.7.2 Séries de Taylor

Formule générale :

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

Formule de Taylor-Lagrange :

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, \theta \in [0,1]$$

Formule de Taylor-Young :

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + h^n\epsilon(h), \epsilon(h) \longrightarrow \infty, h \longrightarrow \infty$$

Séries connues :

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha\frac{x}{1!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n-1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{2p-1}\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)} + o(x^{2p}) \\
\tan x &= x + \frac{1}{3}x + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})
\end{aligned}$$

Infiniment petit : f est un infiniment petit au voisinage de a si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$
Infiniment grand : f est un infiniment grand au voisinage de a si $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$
Ordre d'un infiniment petit : f et g sont dit de même ordre si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}^*$
f est d'ordre p si f et $(x-a)^p$ sont du même ordre
Équivalence :

$$f \backsim g \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Développements limités :
f admet un DL à l'ordre n au voisinage de a si

$$\exists \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n + h^n\epsilon(n), \epsilon(h) \longrightarrow 0, h \longrightarrow 0$$

f admet un DL à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ si

$$\exists \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Le DL d'une fonction paire (resp. impaire) ne contient que des termes de puissances paire (resp. impaire).

Opérations sur les DL : Soient f et g avec $\begin{cases} f(a+h) = P(h) + h^n\epsilon_1(h) \\ g(a+h) = Q(h) + h^n\epsilon_2(h) \end{cases}$

Combinaison : $f(a+h) + \lambda g(a+h) = P(h) + \lambda Q(h) + \epsilon(h)$

Produit : $fg(a+h) = PQ(a+h) + h^n\epsilon(h)$ tronqué à l'odre n

Quotient : $\dfrac{f(a+h)}{g(a+h)} =$ quotient de $P(h)$ par $Q(h)$ suivant les puissances croissantes

Primitivisation : Si $F' = f$ avec $f(a+h) = \sum \alpha_i h^i$ alors $F(a+h) = \sum \alpha_i \frac{h^{i+1}}{i+1}$

Étude locale d'une courbe : Soit x_0 tel que $f'(x_0) = 0$
$f''(x_0) > 0$ alors la courbe est au dessus de la tangente et x_0 réalise un minimum locale
$f''(x_0) < 0$ alors la courbe est en dessous de la tangente et x_0 réalise un maximum locale
$f''(x_0) = 0$ alors x_0 est un point d'inflexion

1.7.3 Séries de Fourier

Dans la base $(e^{in\omega x})_{n\in\mathbb{Z}}$

Série de Fourier : $(e^{in\omega x})_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ est une base de l'espace des fonctions T-périodiques, alors pour tout f, fonction T-périodique, on a :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \text{ avec } c_n = (f|e^{in\omega \cdot}) = \frac{1}{T}\int f(x)e^{-in\omega x}dx$$

Egalité de Parsseval : (égalité de la norme)

$$||f||_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$

Dans la base $(\cos n\omega x, \sin n\omega x)_{n\in\mathbb{N}}$

Série de Fourier : Soit f une fonction T-périodique, on a

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx\,;\; a_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\cos n\omega x dx\,;\; b_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\sin n\omega x dx$$

Egalité de Parsseval : (égalité de la norme)

$$||f||_2^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2)$$

Autres

Lien entre les coefficients : $\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases}$ et $\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}$

Convergence :

$$f \in L^2(0,T), f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\omega x}$$

$$f \in L^1(0,T), c_n(f) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$$

Théorème de Dirichlet (convergence ponctuelle) :

$$f \in C^1 \Rightarrow SF(f)(x_0) \stackrel{unif}{\longrightarrow} f(x_0)$$

$$f \in CM^1 \Rightarrow SF(f)(x_0) \longrightarrow \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Série de Fourier d'une distribution

Définition :

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \text{ avec } c_n = \frac{1}{a} < T, e^{-in\omega s} >$$

Convergence : La série de Fourier d'une distribution converge vers la distribution (au sens des distributions)

Convergence d'une série trigonométrique dans $\mathcal{D}'$:

$$\sum c_n e^{in\omega s} \text{ converge dans } \mathcal{D}' \Leftrightarrow |c_n| \leq A|n|^p \text{ (suite à croissance lente)}$$

1.8 Le corps $\mathbb{C}$

Définition :

$$\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$$

Partie réelle et imaginaire :

$$Re(a + ib) = a \text{ et } Im(a + ib) = b$$

Module et argument :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \arg z = \tan \frac{b}{a}$$

Écriture d'un nombre complexe : $\forall z \in \mathbb{C}, \exists a, b, r, \theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = a + ib = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i \sin\theta) \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg z$$

Conjugaison : Soi $z = a + ib$ alors $\bar{z} = a - ib$ et

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,;\; \overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}\,;\; \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}\,;\; \overline{\overline{z}} = z$$

$$z + \overline{z} = 2 \times Re(z)\,;\; z - \overline{z} = 2i \times Im(z)$$

Calcul avec les modules :

$$z\bar{z} = |z|^2\,;\; \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,;\; |z_1 z_2| = |z_1||z_2|\,;\; |z| = |\bar{z}|$$

Calcul avec les arguments :

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]\,;\; \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

Formule de Moivre :

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

Formules d'Euler :
$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\ ;\ \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$
Théorème de D'Alembert-Gauss : Toute équation algébrique de $\mathbb{C}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{C}$
Racine n-ième :
$$z^n = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |\alpha|^{\frac{1}{n}} \\ \arg z = \frac{\arg \alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in [0, n-1] \end{cases}$$
Racine complexe d'une équation du second degrée : $az^2 + bz + c = 0$
$$\delta^2 = b^2 - 4ac \text{ alors } z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$
Polynomes premiers : Les seuls polynômes premier de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynomes constants, ceux de degré 1 et ceux de degré 2 qui n'ont pas de racine réelles
Multiplicité d'une racine : Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$
$$r \text{ de multiplicité } m \Leftrightarrow P(r) = P'(r) = \cdots = P^{(n-1)}(r) = 0 \text{ et } P^{(m)}(r) \neq 0$$
Partie entière d'une fraction rationnelle : Soit $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ on peut décomposer F de façon unique tel que $F = E + \frac{P_0}{Q}$ avec, ou $P_0 = 0$ ou $deg(P_0) < deg(Q)$
Décomposition en élément simple dans $\mathbb{C}(X)$: Soit $F = P/Q$
Objectif : écrire F sous la forme $F = P^* + S$ où P^* est un polynôme et S une somme d'éléments simples :
Si $deg(P) < deg(Q)$ alors $P^* = 0$
Sinon effectuer la division euclidienne
Décomposer Q en produit de facteur premier
Règles de décomposition dont les constantes $a, b, c, d, \ldots$ sont à déterminer :
$$\frac{N(x)}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$
$$\frac{N(x)}{(x-1)^3(x-2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{d}{x-2} + \frac{e}{(x-2)^2}$$
$$\frac{N(x)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

1.9 Distributions

1.9.1 Fonctions test ou de base : $\mathcal{D}$

Définition : $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite fonctio test si elle est à support borné et $\varphi \in C^\infty$

Exemple : $\varphi(x) = \begin{cases} exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \text{ si } |x| < 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Propriétés de $\mathcal{D}$:

1. $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel (car supp $(\varphi + \psi) \subset$ supp $(\varphi) \cup$ supp (ψ))
2. $\varphi, \psi \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi\psi \in \mathcal{D}$ (car supp $(\varphi\psi) \subset$ supp $(\varphi) \cap$ supp (ψ))
3. $\varphi \in \mathcal{D}$ et $f \in L^1 \Rightarrow \psi(x) = \varphi * f(x) \in \mathcal{D}$
4. D ne peut pas être muni d'une norme de sorte qu'il soit complet (c-a-d où toute suite convergente est de Cauchy)

Proposition : $f \in C_k^0$ peut-être approché par une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$ uniformement

convergence dans $\mathcal{D}$:

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \text{supp } \varphi_n \subset K = [a,b], \forall n \geq 1 \\ \varphi_n^{(k)} \xrightarrow{unif} \varphi^{(k)} \end{cases}$$

Proposition : $f \in L_l^1oc$ et $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ on a $\int f\varphi = 0 \Rightarrow f \overset{pp}{=} 0$

1.9.2 Distibutions : $\mathcal{D}'$

Définition : $T \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \varphi \mapsto T(\varphi) \overset{notation}{=} < T, \varphi >$ tel que T soit

1. Linéaire : $< T, \varphi + \psi > = < T, \varphi > + < T, \psi >$
2. Continue : $\varphi \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow < T, \varphi_n > \longrightarrow < T, \varphi >$

Addition : $< T + S, \varphi > = < T, \varphi > + < S, \varphi >$

Multiplication : $< \lambda T, \varphi > = \lambda < T, \varphi >$

Convergence dans $\mathcal{D}'$:

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Leftrightarrow < T_n, \varphi > \longrightarrow < T, \varphi >, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Distribution régulière :

$$f \in L^1_{loc}, < T_f, \varphi > = \int f(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Distribution singulière :

$$f \in L^1_{loc}, < \delta, \varphi > = \varphi(0), \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Peigne de Dirac : $\Delta_a = \sum_{\in \mathbb{Z}} \delta_{na}$, a fixé

Opérations :

Translation : $\tau_a f(x) = f(x-a), < T_{\tau_a f}, \varphi > = < T_f, \tau_{-a}\varphi >$

Homothétie : $T_{f(a.)}, < T_{f(a.)}, \varphi > = \frac{1}{|a|} < T_f, \varphi\left(\frac{\cdot}{a}\right) >$

Transposition : $\check{f}(x) = f(-x), < T_{\check{f}}, \varphi > = < T_f, \check{\varphi} >$

Produit : On peut avoir $T, S \in \mathcal{D}'$ sans $TS \in \mathcal{D}'$, en revanche,
$\forall f, g \in L^1_{loc}, < gf, \varphi > = < f, g\varphi >$

Dérivation : $< T', \varphi > = - < T, \varphi' >$

Dérivation k-ième : $< T^{(k)}, \varphi > = (-1)^k < T, \varphi^{(k)} >$

Dérivation d'une fonction discontinue à l'origine : $(T_f)' = \sigma_0 \delta + T_{f'}$

Support d'une distribution : supp $T_f =$ supp f

Valeur principale de Cauchy :

$$vp \int_{-A}^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{A} \frac{dx}{x} \right\} = 0$$

Distribution $vp\frac{1}{x}$:

$$< vp\frac{1}{x}, \varphi > = vp \int \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

1.10 Convolution

1.10.1 Convolution de fonction

Définition sur $\mathbb{R}$:

$$f * g(x) = \int f(x-t)g(t)dt$$

Convolution sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} \text{supp } f \subset \mathbb{R}_+ \\ \text{supp } g \subset \mathbb{R}_+ \end{cases} \Rightarrow f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

Support :

$$\text{supp } f * g \subset \text{supp } f + \text{supp } g$$

Propriétés : Le produit de convolution est commutatif, ditributif et associatif

Convolution bornée :

$$\begin{aligned} f, g \in L^1 &\Rightarrow ||f * g||_1 \leq ||f||_1.||g||_1 \text{ et } f * g \text{ définit presque partout} \\ f, g \in L^2 &\Rightarrow ||f * g||_\infty \leq ||f||_2.||g||_2 \text{ et } f * g \text{ partout définit} \\ f \in L^1, g \in L^2 &\Rightarrow ||f * g||_2 < ||f||_1.||g||_2 \text{ et } f * g \text{ définit presque partout} \end{aligned}$$

Valeur moyenne d'une fonction :

$$m = \frac{1}{2h} f * 1_{[-h,h]}(x)$$

1.10.2 Convolution de suite

Définition :

$$u * v(n) = v * u(n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u(n-k)v(k), n \in \mathbb{N}$$

1.10.3 Convolution de distribution et algèbre dans $\mathcal{D}'_+$

Produit tensoriel : Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$$

Définition : Soit $T, S \in \mathcal{D}'$

$$< T * S, \varphi > = < T, < S, \tau_{-y}\varphi >> = < T \otimes S, \varphi(x+y) >, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Dérivation :

$$(T * S)' = T * S' = T' * S$$

Existence : Le produit $T * S$ a un sens si les supports A et B de T et S sont tels que $x \in A$, $y \in B$, $x + y$ ne puisse être borné que si x et y restent bornées tous les deux. Il est alors commutatif.

Proposition : Si l'une au moins de T et S est à support bornée alors $T * S$ existe. L'ensemble des distributions à support bornée est noté $\mathcal{E}'$

Proposition : Si T et S ont leur support limités à gauche (ou à droite) alors $T * S$ existe (i.e. $\exists a \in \mathbb{R}$, tel que supp $T \subset [a, \infty[$)

D'_+ : Ensemble des distributions à support dans $\mathbb{R}_+$ est noté $\mathcal{D}'_+$ ($\subset \mathcal{D}$)

$$T \in \mathcal{D}'_+ \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D} \text{ tel que supp } \varphi \subset \mathbb{R}_-, < T, \varphi >= 0$$

Associativité :

$$T, S \in \mathcal{D}'_+ \Rightarrow (T * S) * V = T * (S * V)$$

Algèbre de convolution $\mathcal{D}'_+$:

1. Le produit de convolution est une loi de composition interne

$$T, S \in \mathcal{D}'_+ \Rightarrow T * S \in \mathcal{D}'_+$$

2. D'_+ est un espace vectoriel
3. δ élément neutre

$$T * \delta = T$$

4. Soit $T \in \mathcal{D}'_+$, on dit que $S \in \mathcal{D}'_+$ est un élement inverse de T si $T * S = \delta$ et on note $S = t^{*-1}$

Formule pour Heavyside : $Y^{*2} = xY(x)$ et pour $n \geq 2$

$$Y^{*n} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} Y(x)$$

Résolution d'équation différentielle à coefficient constant : Soit D un opérateur différentiel tel que

$$D = a_n \frac{d^n}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$$

Alors pour résoudre l'équation $DT = S$:

1. Résoudre $DE = \delta$
2. Solution générale : $T = S * E$

Inversion type :

$$\left(\delta^{(n)} + a_1 \delta^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\delta' + a_n \delta\right)^{*-1} = Yz$$

avec z solution de

$$\begin{cases} z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} z' + a_n z = 0 \\ z(0) = z'(0) = \cdots = z^{(n-2)}(0) = 0 \\ z^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

1.11 Transformées de Fourier

1.12 Transformées de Laplace

Chapitre 2

Analyse dans $\mathbb{R}^n$ (MT22)

Chapitre 3

Algèbre linéaire (MT23)

Chapitre 4

Analyse numérique (MT09)

Chapitre 5

Statistiques (SY02)

Chapitre 6

Optimisation (RO04)

Chapitre 7

Formulaires