

Mathématiques

Henri LEFEBVRE

22 octobre 2017

Table des matières

1	Analyse dans \mathbb{R} (MT90/MT91/MT12)	2
1.1	Propriétés de \mathbb{R}	2
1.2	Suites réelles $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$	3
1.3	Fonctions réelles $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (généralités)	4
1.4	Dérivation	4
1.5	Théorie de la mesure	5
1.5.1	Généralités	5
1.5.2	Exemples de mesures	6
1.6	Intégration	6
1.6.1	Définitions	6
1.6.2	Propriétés	7
1.6.3	Convergence	8
1.6.4	Intégrale de Riemann-Stieltjes	9
1.6.5	Fonctions définies par une intégrale	9
1.6.6	Introduction au calcul des variations	10
1.7	Séries dans \mathbb{R}	10
1.7.1	Généralités	10
1.7.2	Séries de Taylor	11
1.7.3	Séries de Fourier	12
1.8	Le corps \mathbb{C}	13
1.9	Distributions	14
1.9.1	Fonctions test ou de base : \mathcal{D}	14
1.9.2	Distributions : \mathcal{D}'	15
1.10	Convolution	15
1.10.1	Convolution de fonction	15
1.10.2	Convolution de suite	16
1.10.3	Convolution de distribution et algèbre dans \mathcal{D}'_+	16
1.11	Transformées de Fourier	16
1.12	Transformées de Laplace	16
2	Analyse dans \mathbb{R}^n (MT22)	17
3	Algèbre linéaire (MT23)	18
4	Analyse numérique (MT09)	19
5	Statistiques (SY02)	20
6	Optimisation (RO04)	21
7	Formulaires	22

Chapitre 1

Analyse dans \mathbb{R} (MT90/MT91/MT12)

1.1 Propriétés de \mathbb{R}

Structure : $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps ordonné

Formule du binôme :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ avec } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Produit scalaire : $\langle x, y \rangle = xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Norme (\mathbb{R}) (valeur absolue) : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \rightarrow |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$

Positivité : $|x| > 0$ et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Homothétie : $|ax| = |a||x|$

Inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$

Convergence : $f(x) \rightarrow l \Leftrightarrow |f(x) - l| \rightarrow 0$

Intervalles : I est un intervalle si $\forall a, b \in I, a < c < b \Rightarrow c \in I$

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \\ c \in [a, b] &\Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 1], c = \theta a + (1 - \theta)b \end{aligned}$$

Densité de \mathbb{Q} :

$$\forall]a, b[\neq \emptyset, \exists \alpha \in \mathbb{Q} \cap]a, b[\text{ et } \exists \beta \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap]a, b[$$

Ensembles bornés : Soit $A \subset \mathbb{R}$

Majoration : $\forall x \in A, x \leq M$

Minoration : $\forall x \in A, x \geq m$

Encadrement : $\forall x \in A, |x| < M$

Borne supérieure : Plus petit des majorants (s'ils existent)

$$s = \sup A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A, x \leq s \\ \forall t < s, \exists x \in A \text{ tel que } t < x \end{array} \right.$$

Droite numérique achevée : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

1.2 Suites réelles $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Définition : $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto u_n$

Convergence :

$$(U_n) \longrightarrow l, n \longrightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

Limite infinie :

$$(U_n) \longrightarrow l, n \longrightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow u_n > \varepsilon)$$

Convergences connues :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{n!} = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{k^n} = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln \beta)^\beta}{n^\alpha} = 0$$

Propriétés de convergence : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_n \longrightarrow l$ et $v_n \longrightarrow l'$ quand $n \longrightarrow \infty$

Combinaison : $u_n + \lambda v_n \longrightarrow l + \lambda l'$ quand $n \longrightarrow \infty$

Produit : $u_n v_n \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$

Quotient : Si $l' \neq 0$, $u_n/v_n \longrightarrow l/l'$ quand $n \longrightarrow \infty$

Vers zéro : Si $u_n \longrightarrow 0$ et v_n bornée, alors $u_n v_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$

Ordre : Si $u_n \leq v_n$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

Suites adjacentes : (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si et seulement si

$$(u_n) \text{ est croissante; } (v_n) \text{ est décroissante; } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$$

Suite arithmétique :

Définition récursive : $u_{n+1} = u_n + r$

Définition générale : $u_n = u_0 + nr$

Somme des termes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

Suite géométrique :

Définition récursive : $u_{n+1} = q u_n$

Définition générale : $u_n = q^n u_0$

Somme des termes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$

Si $\exists l \in \mathbb{R}$ point fixe de f (i.e. $f(l) = l$) et f contractante (i.e. f k -lipschitzienne avec $0 < k < 1$) alors $(u_n) \longrightarrow l$

1.3 Fonctions réelles $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (généralités)

Définition : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$

Image : $\forall A \subset \mathbb{R}, f(A) = \{y | \exists x \in A, y = f(x)\}$

Image réciproque : $f^{-1}(B) = \{x \in D_f | f(x) \in B\}$

Support : $\text{supp } \varphi = \overline{\{x | \varphi(x) \neq 0\}}$

Correspondances : Pour $f : E \rightarrow F$

Surjection : $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Injection : $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$

Bijection : $\forall y \in F, \exists ! x \in E$ tel que $y = f(x)$ (f injective et surjective)

Composée : $f \circ g(x) = f(g(x))$

Fonction identité : $id : x \mapsto x$

Bijection réciproque : Si f bijective, alors $\exists f^{-1}$ tel que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$

Convergence : $f(x) \rightarrow l, x \rightarrow a$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Limite à droite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, a < x < a + \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Caractérisation de la limite (par les suites) :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \left(\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \Omega - \{a\} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l \right)$$

Continuité :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) : Soit $f \in C^0([a, b])$ et $y \in \mathbb{R}$

$$f(a) < y < f(b) \Rightarrow \exists x \in [a, b], f(x) = y$$

Condition de Lipschitz :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

1.4 Dérivation

Dérivabilité : f est dérivable si et seulement si

$$\exists d \in \mathbb{R}, \text{ tel que } f(x + h) = f(x) + hd + |h|\epsilon(h)$$

Taux de variation :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Théorème de Rolle : Soit $f \in C^0([a, b])$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = 0$$

Théorème des accroissements finis : Soit $f \in C^0([a, b])$

$$\exists c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Opérations :

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g', \lambda \in \mathbb{R}; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}; (f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$$

Fonction réciproque :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Dérivées connues :

$$(x^q)' = qx^{q-1}, q \in \mathbb{Z}; (e^x)' = e^x; (\ln |x|)' = \frac{1}{x}; (\cos x)' = -\sin x; (\sin x)' = \cos x; (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Saut d'une fonction :

$$\sigma_m = f^{(m)}(0^+) - f^{(m)}(0^-), m \geq 0$$

1.5 Théorie de la mesure

1.5.1 Généralités

Fonction indicatrice (ou caractéristique) :

$$1_A(x) = \begin{pmatrix} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{pmatrix}$$

σ -algèbre (tribu) : Une famille A de sous-ensemble de X est une tribu si :

1. $X \in A$
2. A est stable par complémentarité
3. A est stable par union dénombrable

Espace mesurable : Ensemble muni d'une tribu (X, A)

Tribu borélienne : Plus petite tribu de \mathbb{R} contenant tous les intervalles

Mesure : Une mesure μ sur (X, A) est une application de $A \rightarrow [0, \infty]$ telle que

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite dénombrable de A deux à deux disjointes alors : $\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$ (σ -additivité)

Espace mesuré : Le triplet (X, A, μ) est appelé un espace mesuré Proposition : soit \bar{x} une tribu de X

1. Si $A, B \in \bar{x}$ et $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$
2. Si $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$, $A_k \in \bar{x}$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_n A_n$ et $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$
3. Si $A, B \in \bar{x}$ alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

Ensemble négligeable : A est dit négligeable si $\mu(A) = 0$

Proposition vraie presque partout (pp) : Une proposition est dite vraie (μ -)presque partout sur X si elle est vraie sur $X \setminus E$ avec $\mu(E) = 0$

Ensemble de mesure nulle : Un sous-ensemble A de \mathbb{R} est dit de mesure nulle si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'intervalles ouverts et bornés (I_n) telle que :

1. $A \subset \bigcup_{i \geq 1} I_i$
2. $\sum_{i \geq 1} |I_i| < \varepsilon$

Propositions :

1. Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle
2. Si A est de mesure nulle et $B \subset A$, alors B est de mesure nulle
3. Si $A \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n$ avec chaque A_n de mesure nulle, alors A est de mesure nulle

Fonction mesurable : $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ est mesurable si $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

1.5.2 Exemples de mesures

Mesure de Lebesgue : Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\forall I = [a, b]$ borné, $\lambda([a, b]) = \lambda([a, b[) = b - a$

Mesure de Dirac : $\delta_a : T \rightarrow \{0, 1\}$ avec T une tribu et $\delta_a = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$

Mesure de comptage (cardinal) : Pour un ensemble dénombrable de \mathbb{R} , $\forall n, \mu(\{n\}) = 1$

1.6 Intégration

1.6.1 Définitions

Fonction en escalier : Fonctions constantes sur des intervalles

Intégrale de Riemann : Soit

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{I_i}$$

une fonction en escalier, on définit l'intégrale de f par

$$I(f) = \int_a^b f(t) dt = \sum \alpha_i (x_{i+1} - x_i)$$

Pour une fonction quelconque, s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, deux fonctions en escalier f_ε et F_ε telle que $f_\varepsilon \leq f \leq F_\varepsilon$ et $I(F_\varepsilon) - I(f_\varepsilon) < \varepsilon$, alors f est dite Riemann-intégrable et on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \sup \{ I(g) \mid g \text{ fonction en escalier et } g \leq f \}$$

Fonction étagée : Fonction dont l'image est constituée d'un nombre fini de valeurs réelles

Théorème : Toute fonction à valeur dans \mathbb{R}^n est limite de fonctions étagées

Intégrale de Lebesgue : Soit

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$$

une fonction étagée, on définit l'intégrale de f par rapport à la mesure μ par

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

et pour $E \subset X$

$$\int_E f d\mu = \int_X f 1_E d\mu$$

Pour f une fonction positive,

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu \mid s \text{ étagée et } s \leq f \right\}$$

Enfin pour une fonction quelconque, on définit : $f^+ = \max(0, f)$ et $f^- = \max(0, -f)$ de sorte que :

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

1.6.2 Propriétés

Lien Riemann-Lebesgue : Si f est Riemann-Intégrable, alors f est Lebesgue-intégrable

Ensemble de fonctions intégrables (au sens de Lebesgue) :

$$L^p(A) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_A |f|^p < \infty \right\}$$

Fonctions localement intégrables : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrable sur tout intervalle borné ($L^1 \subset L^1_{loc}$)

Intégration et dérivation :

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Egalité d'intégrales :

$$f \stackrel{pp}{=} g \Leftrightarrow \int f(t) dt = \int g(t) dt$$

Linéarité :

$$\int (f(t) + \lambda g(t)) dt = \int f(t) dt + \lambda \int g(t) dt$$

Relation de Chasles : Qui implique aussi $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Relation d'ordre :

$$f \leq g \Leftrightarrow \int f(t) dt \leq \int g(t) dt$$

Fonction périodique : Soit f une fonction T -périodique,

$$\int_0^T f(t) dt = \int_c^{c+T} f(t) dt$$

Inégalité triangulaire :

$$\left| \int f(t) dt \right| \leq \int |f(t)| dt$$

Cauchy-Schwartz :

$$\left| \int f(t) g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int f^2(t) dt \times \int g^2(t) dt}$$

Inégalité de Holder :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \int f(t)g(t)dt \leq \left(\int |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

Théorème de la moyenne :

$$\forall x \in [a, b], m \leq f \leq M, \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M$$

Inégalité de la moyenne :

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \times \int_a^b |g(x)|dx$$

Intégrale sur un ensemble négligable : Soit μ une mesure alors

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$$

Théorème fondamental :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

Intégration par partie (IPP) :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Changement de variable :

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{x=u(t)}{=} \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t)dt$$

Propositions sur l'intégrabilité :

- f monotone $\Rightarrow f$ Riemann-intégrable
- f continue $\Rightarrow f$ Riemann-intégrable
- f pp-continue et bornée $\Rightarrow f$ Riemann-intégrable
- f pp-continue $\Rightarrow f$ Lebesgue-intégrable
- $|f| < g$, g Lebesgue-intégrable $\Rightarrow f$ Lebesgue-intégrable
- f Lebesgue-intégrable $\Leftrightarrow |f|$ Lebesgue-intégrable

1.6.3 Convergence

Convergence (Riemann) :

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \Rightarrow \int f_n(t)dt \xrightarrow{\text{unif}} \int f(t)dt$$

Théorème de convergence monotone (Beppo-Levi) :

$$\begin{cases} (f_n) \text{ suite croissante de fonction} \\ f_n \longrightarrow f, n \longrightarrow \infty \end{cases} \Leftrightarrow \int f_n \longrightarrow \int f, n \longrightarrow \infty$$

Théorème de convergence dominée :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n \xrightarrow{pp} f \\ |f_n| < g, g \in L^1 \end{array} \right. \Rightarrow \int f_n \longrightarrow \int f \left(\text{et même : } \int |f_n - f| \longrightarrow 0 \right)$$

Inversion somme-intégrale :

$$(f_n) \text{ suite de fonction positive} \Rightarrow \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x) dx$$

Théorème de Fubini :

$$f \in L^1 \Rightarrow \iint f(x, y) dx dy = \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy$$

Théorème de Fubini-Tonnelé :

$$f \geq 0 \Rightarrow \iint f(x, y) dx dy = \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy$$

Définition : intégrale de fonction discontinue, intégrale sur un intervalle non bornée, etc.

Intégrales Riemann-impropre de références :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si } \alpha < 1; \int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si } \alpha > 1; \int_0^1 \ln t dt = -1$$

Riemann-impropre et Lebesgue : Si f est Riemann-intégrable au sens impropre et de signe constant alors f est Lebesgue-intégrable

1.6.4 Intégrale de Riemann-Stieltjes

Définition : Si α est une fonction croissante, alors elle définit une mesure. On appelle intégrale de Riemann-Stieltjes l'intégrale par rapport à cette mesure : $\int f(x) d\alpha(x)$ et on a :

$$\begin{aligned} \alpha([a, b]) &= \alpha(b^+) - \alpha(a^-) \\ \alpha([a, b[) &= \alpha(b^-) - \alpha(a^-) \\ \alpha(]a, b]) &= \alpha(b^+) - \alpha(a^+) \\ \alpha(]a, b[) &= \alpha(b^-) - \alpha(a^+) \end{aligned}$$

Calcul :

$$\int f(x) d\alpha(x) = \int f(x) \alpha'(x) dx$$

1.6.5 Fonctions définies par une intégrale

Définition : Soit $f : (x, t) \rightarrow f(x, t)$, si f est continue en t pour presque-tout x et $|f(t, x)| \leq g(x), g \in L^1$ alors la fonction suivante est défini et est continue

$$F(t) = \int f(t, x) dx$$

Dérivabilité : Si $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ existe et est continue et $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| < g(x), g \in L^1$ alors F est dérivable et

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$$

Formule :

$$F(t) = \int_{[u(t), v(t)]} f(x, t) dx$$

$$\frac{dF}{dt}(t) = f(t, v(t)) \frac{dv(t)}{dt} + f(t, u(t)) \frac{du(t)}{dt} + \int_{[u(t), v(t)]} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

1.6.6 Introduction au calcul des variations

Problème de variation : Trouver u^* telle que

$$u^* = \min_{u \in K} J(u) \text{ avec } J(u) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u, \dot{u}, t) dt$$

Équation d'Euler-Lagrange : u solution du problème de variation, alors

$$\frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, \dot{u}, t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u, \dot{u}, t) \right] = 0$$

Intégrale première d'Euler-Lagrange : $\varphi(u, \dot{u}, t) = \varphi(u, \dot{u})$

$$\varphi(u, \dot{u}) = \left[\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u, \dot{u}) \right] \dot{u} + k, k \in \mathbb{R}$$

Condition aux limites :

- Deux extrémités fixes : $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$
- Une extrémité libre : $u(\alpha) = a$ et $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u(\beta), \dot{u}(\beta), \beta) = 0$
- Deux extrémités libres : $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u(\alpha), \dot{u}(\alpha), \alpha) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \varphi(u(\beta), \dot{u}(\beta), \beta) = 0$

1.7 Séries dans \mathbb{R}

1.7.1 Généralités

Condition nécessaire de convergence :

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \Rightarrow u_n \longrightarrow 0$$

Espace vectoriel : L'espace des séries convergentes est un espace vectoriel

Critère de Cauchy :

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$$

Règle de Riemann : Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $n^\alpha u_n$ majoré pour $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge

Règle de d'Alembert : Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l$ avec $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge

Séries géométrique :

$$\sum_{n \geq 0} aq^n = a \frac{1}{1 - q}$$

Séries de Riemann :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Série exponentielle :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z, z \in \mathbb{C}$$

1.7.2 Séries de Taylor

Formule générale :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

Formule de Taylor-Lagrange :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}, \theta \in [0, 1]$$

Formule de Taylor-Young :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + h^n \epsilon(h), \epsilon(h) \longrightarrow 0, h \longrightarrow 0$$

Séries connues :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \cdots + \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n-1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{2p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Infiniment petit : f est un infiniment petit au voisinage de a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

Infiniment grand : f est un infiniment grand au voisinage de a si $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$

Ordre d'un infiniment petit : f et g sont dit de même ordre si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}^*$

f est d'ordre p si f et $(x-a)^p$ sont du même ordre

Équivalence :

$$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Développements limités :

f admet un DL à l'ordre n au voisinage de a si

$$\exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n + h^n \epsilon(h), \epsilon(h) \longrightarrow 0, h \longrightarrow 0$$

f admet un DL à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ si

$$\exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Le DL d'une fonction paire (resp. impaire) ne contient que des termes de puissances paire (resp. impaire).

Opérations sur les DL : Soient f et g avec $\begin{cases} f(a+h) = P(h) + h^n \epsilon_1(h) \\ g(a+h) = Q(h) + h^n \epsilon_2(h) \end{cases}$

Combinaison : $f(a+h) + \lambda g(a+h) = P(h) + \lambda Q(h) + \epsilon(h)$

Produit : $fg(a+h) = PQ(a+h) + h^n \epsilon(h)$ tronqué à l'ordre n

Quotient : $\frac{f(a+h)}{g(a+h)} =$ quotient de $P(h)$ par $Q(h)$ suivant les puissances croissantes

Primitivisation : Si $F' = f$ avec $f(a+h) = \sum \alpha_i h^i$ alors $F(a+h) = \sum \alpha_i \frac{h^{i+1}}{i+1}$

Étude locale d'une courbe : Soit x_0 tel que $f'(x_0) = 0$

$f''(x_0) > 0$ alors la courbe est au dessus de la tangente et x_0 réalise un minimum locale

$f''(x_0) < 0$ alors la courbe est en dessous de la tangente et x_0 réalise un maximum locale

$f''(x_0) = 0$ alors x_0 est un point d'inflexion

1.7.3 Séries de Fourier

Dans la base $(e^{in\omega x})_{n \in \mathbb{Z}}$

Série de Fourier : $(e^{in\omega x})_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est une base de l'espace des fonctions T -périodiques, alors pour tout f , fonction T -périodique, on a :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \text{ avec } c_n = (f|e^{in\omega \cdot}) = \frac{1}{T} \int f(x) e^{-in\omega x} dx$$

Egalité de Parseval : (égalité de la norme)

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

Dans la base $(\cos n\omega x, \sin n\omega x)_{n \in \mathbb{N}}$

Série de Fourier : Soit f une fonction T -périodique, on a

$$f(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx; a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cos n\omega x dx; b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \sin n\omega x dx$$

Egalité de Parseval : (égalité de la norme)

$$\|f\|_2^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$$

Autres

Lien entre les coefficients : $\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}$

Convergence :

$$f \in L^2(0, T), f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{in\omega x}$$

$$f \in L^1(0, T), c_n(f) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$$

Théorème de Dirichlet (convergence ponctuelle) :

$$f \in C^1 \Rightarrow SF(f)(x_0) \xrightarrow{\text{unif}} f(x_0)$$

$$f \in CM^1 \Rightarrow SF(f)(x_0) \longrightarrow \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Série de Fourier d'une distribution

Définition :

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \text{ avec } c_n = \frac{1}{a} \langle T, e^{-in\omega s} \rangle$$

Convergence : La série de Fourier d'une distribution converge vers la distribution (au sens des distributions)

Convergence d'une série trigonométrique dans \mathcal{D}' :

$$\sum c_n e^{in\omega s} \text{ converge dans } \mathcal{D}' \Leftrightarrow |c_n| \leq A|n|^p \text{ (suite à croissance lente)}$$

1.8 Le corps \mathbb{C}

Définition :

$$\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$$

Partie réelle et imaginaire :

$$Re(a + ib) = a \text{ et } Im(a + ib) = b$$

Module et argument :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \arg z = \tan \frac{b}{a}$$

Écriture d'un nombre complexe : $\forall z \in \mathbb{C}, \exists a, b, r, \theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = a + ib = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg z$$

Conjugaison : Soit $z = a + ib$ alors $\bar{z} = a - ib$ et

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}; \bar{\bar{z}} = z$$

$$z + \bar{z} = 2 \times Re(z); z - \bar{z} = 2i \times Im(z)$$

Calcul avec les modules :

$$z\bar{z} = |z|^2; \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; |z| = |\bar{z}|$$

Calcul avec les arguments :

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]; \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

Formule de Moivre :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

Formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Théorème de D'Alembert-Gauss : Toute équation algébrique de \mathbb{C} admet au moins une solution dans \mathbb{C}

Racine n -ième :

$$z^n = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |\alpha|^{\frac{1}{n}} \\ \arg z = \frac{\arg \alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in [0, n-1] \end{cases}$$

Racine complexe d'une équation du second degré : $az^2 + bz + c = 0$

$$\delta^2 = b^2 - 4ac \text{ alors } z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

Polynômes premiers : Les seuls polynômes premier de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes constants, ceux de degré 1 et ceux de degré 2 qui n'ont pas de racine réelles

Multiplicité d'une racine : Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$

$$r \text{ de multiplicité } m \Leftrightarrow P(r) = P'(r) = \dots = P^{(n-1)}(r) = 0 \text{ et } P^{(m)}(r) \neq 0$$

Partie entière d'une fraction rationnelle : Soit $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ on peut décomposer F de façon unique tel que $F = E + \frac{P_0}{Q}$ avec, ou $P_0 = 0$ ou $\deg(P_0) < \deg(Q)$

Décomposition en élément simple dans $\mathbb{C}(X)$: Soit $F = P/Q$

Objectif : écrire F sous la forme $F = P^* + S$ où P^* est un polynôme et S une somme d'éléments simples :

Si $\deg(P) < \deg(Q)$ alors $P^* = 0$

Sinon effectuer la division euclidienne

Décomposer Q en produit de facteur premier

Règles de décomposition dont les constantes a, b, c, d, \dots sont à déterminer :

$$\begin{aligned} \frac{N(x)}{(x-1)(x-2)} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \\ \frac{N(x)}{(x-1)^3(x-2)^2} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{d}{x-2} + \frac{e}{(x-2)^2} \\ \frac{N(x)}{(x-1)(x^2+1)} &= \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1} \end{aligned}$$

1.9 Distributions

1.9.1 Fonctions test ou de base : \mathcal{D}

Définition : $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite fonction test si elle est à support borné et $\varphi \in C^\infty$

Exemple : $\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Propriétés de \mathcal{D} :

1. \mathcal{D} est un espace vectoriel (car $\text{supp}(\varphi + \psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\psi)$)
2. $\varphi, \psi \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi\psi \in \mathcal{D}$ (car $\text{supp}(\varphi\psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\psi)$)
3. $\varphi \in \mathcal{D}$ et $f \in L^1 \Rightarrow \psi(x) = \varphi * f(x) \in \mathcal{D}$
4. \mathcal{D} ne peut pas être muni d'une norme de sorte qu'il soit complet (c-a-d où toute suite convergente est de Cauchy)

Proposition : $f \in C_k^0$ peut-être approché par une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$ uniformément convergence dans \mathcal{D} :

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \text{supp } \varphi_n \subset K = [a, b], \forall n \geq 1 \\ \varphi_n^{(k)} \xrightarrow{\text{unif}} \varphi^{(k)} \end{cases}$$

Proposition : $f \in L_{loc}^1$ et $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ on a $\int f\varphi = 0 \Rightarrow f \stackrel{pp}{=} 0$

1.9.2 Distributions : \mathcal{D}'

Définition : $T \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto T(\varphi) \stackrel{\text{notation}}{=} \langle T, \varphi \rangle$ tel que T soit

1. Linéaire : $\langle T, \varphi + \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle T, \psi \rangle$

2. Continue : $\varphi \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$

Addition : $\langle T + S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle$

Multiplication : $\langle \lambda T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$

Convergence dans \mathcal{D}' :

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Leftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Distribution régulière :

$$f \in L_{loc}^1, \langle T_f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Distribution singulière :

$$f \in L_{loc}^1, \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Peigne de Dirac : $\Delta_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na}, a$ fixé

Opérations :

Translation : $\tau_a f(x) = f(x - a), \langle T_{\tau_a f}, \varphi \rangle = \langle T_f, \tau_{-a} \varphi \rangle$

Homothétie : $T_{f(a)}, \langle T_{f(a)}, \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T_f, \varphi(\frac{\cdot}{a}) \rangle$

Transposition : $\check{f}(x) = f(-x), \langle T_{\check{f}}, \varphi \rangle = \langle T_f, \check{\varphi} \rangle$

Produit : On peut avoir $T, S \in \mathcal{D}'$ sans $TS \in \mathcal{D}'$, en revanche, $\forall f, g \in L_{loc}^1, \langle gf, \varphi \rangle = \langle f, g\varphi \rangle$

Dérivation : $\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$

Dérivation k -ième : $\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle$

Dérivation d'une fonction discontinue à l'origine : $(T_f)' = \sigma_0 \delta + T_{f'}$

Support d'une distribution : $\text{supp } T_f = \text{supp } f$

Valeur principale de Cauchy :

$$vp \int_{-A}^A \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^A \frac{dx}{x} \right\} = 0$$

Distribution $vp \frac{1}{x}$:

$$\langle vp \frac{1}{x}, \varphi \rangle = vp \int \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

1.10 Convolution

1.10.1 Convolution de fonction

Définition sur \mathbb{R} :

1.10.2 Convolution de suite

Définition :

1.10.3 Convolution de distribution et algèbre dans \mathcal{D}'_+

Produit tensoriel :

1.11 Transformées de Fourier

1.12 Transformées de Laplace

Chapitre 2

Analyse dans \mathbb{R}^n (MT22)

Chapitre 3

Algèbre linéaire (MT23)

Chapitre 4

Analyse numérique (MT09)

Chapitre 5

Statistiques (SY02)

Chapitre 6

Optimisation (RO04)

Chapitre 7

Formulaires