Le théorème d'incomplétude de Gödel

Lefebvre Henri

15 novembre 2015

Table des matières

1 Idée générale de la démonstration

1.1 Introduction

La démonstration telle que présentée par Gödel dans son ouvrage "Sur les propositions formellement indécidables des Principia Mathematica et des systèmes apparentés" de 1931 est hautement technique. Elle demande d'abord des connaissances précises sur l'oeuvre "Principia Mathematica" d'Alfred North Whitehead et de Bertrand Russell. Elle nécessite ensuite une maitrise de 46 définitions préalables introduites par Gödel utiles au raisonnement. La tâche s'annonce donc fastidieuse.

Cette section a pour objectif de présenter les étapes de la démonstration de Gödel sans entrer dans les détails techniques et peu intelligibles pour les non-spécialistes.
Nous commencerons par énumérer les différentes étapes de la démonstration, permettant au lecteur d'avoir une vue d'ensemble de la démonstration et du lien entre chaque étape intermédiaire. (Je tiens à préciser que cette partie est largement inspiré de la première partie du livre "Le théorème de Gödel", écrite par Ernest Nagel et James R. Newman)

Les grandes étapes de la démonstration sont assez simples à suivre :
Soit (S) un système capable de formaliser l'arithmétique (addition et multiplication) de manière axiomatique, régi par des règles d'inférences précises.
Godël veut montrer qu'une proposition du système (S) est indécidable ; c'est-à-dire qu'il veut démontrer qu'il existe une formule du système (S) qu'on ne peut ni démontrer ni réfuter en utilisant uniquement les axiomes du système et les règles d'inférences qui lui sont associées (*modus ponens*, substitutions, etc.).

Cette formule, notée G dans toute la suite de ce rapport, Gödel la choisit minutieusement. Celle-ci peut s'apparenter en un sens au *paradox du menteur* qui énnonce "Je suis en train de mentir" :

$$G : \text{"}G \text{ n'est pas démontrable"}$$

La formule G affirme donc d'elle même qu'elle n'est pas démontrable. Il s'agit de démontrer l'indécidabilité de G dans le système (S), capable de formaliser l'arithmétique, si celui-ci est consistant. Or, *a priori*, la formule G est une formule externe à ce système, en ce sens qu'elle ne semble pas exprimer de concept arithmétique. Ce que Gödel montre tout d'abord, c'est que des concepts métamathématiques tels que "La formule A est démontrable" peut s'exprimer au sein du système (S). Ensuite, il montre comment construire grâce à cette projection un énoncé arithmétique équivalent à G.

Les étapes que nous devons suivre apparaissent donc clairement :

1. Projeter les conceps métamathématiques dans le système (S) (arithmétique) tels que "La formule A est démontrable"
2. Construire la formule G dans (S)
3. Etablir que G n'est pas démontrable si (S) est consistant.

Gödel finit par remarquer que, puisque que G n'est pas démontrable, elle est manifestement vraie. Ainsi le système (S) considéré contient au moins un énoncé indécidable et pourtant vrai. Un tel système est dit incomplet. Ce qui explique le qualificatif associé à ce théorème : Théorème d'incomplétude.

1.2 Sur la construction de la formule G au sein du système (S)

1.2.1 Sur la projection de concepts métamathématiques dans le système (S)

La métamathéatique est le domaine qui étudie les relations entre les formules mathématiques. C'est à dire qu'elle commente, avec un certain recul, les formules du système (S). Le système (S) en revanche est capable de formaliser l'arithmétique, c'est à dire qu'il traite des relations entre des nombres. L'idée de Gödel est d'associer à chaque formule du système (S) un nombre unique, de telle manière à ce qu'étudier les relations entre les formules revienne à étudier les relations entre les nombres qui leurs sont associés, c'est à dire, à faire de l'arithmétique. De tels nombres sont appelés "nombres de Gödel".

1.2.1.1 La numérotation de Gödel

Le premier objectif est donc de trouver un moyen non ambigü d'associer un nombre à toute formule du système (S). Afin d'établir une correspondance bi-univoque entre métamathématique et arithmétique, il est clair que le nombre associé à chaque formule doit être unique. La première constatation que l'on puisse faire sur toute formule ou suite de formules de (S) est qu'elle est constituée d'une suite finie de symboles.
Gödel fait donc la distinction entre différents types de symboles :

- **Les symboles constants** : en nombre fini (comme $\exists, =, \vee, \sim$, ainsi que des signes de ponctuation.)
- **Les variables numériques** : qui sont substituables par des nombres et qui sont en nombre infini (comme x, y, z,...)
- **Les variabes propositionnelles** : qui sont substituables par des propositions et qui sont en nombre infini (comme p, q, r...)
- **Les variables prédicatives** : qui sont substituabes par des prédicats et qui sont en nombre infini (comme P, Q, R...)

Gödel décide donc, d'abord, d'associer un nombre unique à chaque symbole. Cette numérotation est *a priori* arbitraire, on verra cela dit qu'elle comporte plusieurs avantages. En premier lieu, Gödel commence par numéroter les symboles constants du système, au nombre de 10. Il associe donc un nombre unique entre 1 et 10 à chacun de ces symboles (Le tableau 1 en Annexe présente cette numérotation). Les autres classes de symboles sont en nombre infini, ainsi il est impossible d'associer tous les nombres supérieurs à 10 à une seule de ces catégories, par exemple, aux variables numériques. Un tel choix ne laisserait ni de place pour les autres catégories ni de place pour les nombres associés aux formules formées de ces symboles, chaque nombre devant être unique. Gödel choisit alors d'associer chaque variable numérique à un nombre premier supérieur à 10 (Tableau 2). Les nombres premiers étant en nombre infini (Théorème d'Euclide), ce choix laisse suffisament de place pour d'autres symboles ou toute suite de symboless. Pareillement, il associe aux variables propositionnelles des nombres premiers élevés au carré (Tableau 3), et aux variables prédicatives des nombres premiers élevés au cube (Tableau 4).

Gödel appelle la fonction ϕ qui associe chaque symbole à son nombre (de Gödel), puis par extension, celle qui associera toute formule ou suite de formules à son nombre de Gödel. On a par exemple : $\phi('' = '') = 5$. Comme chaque symbole est associé à un nombre unique, il est clair que ϕ doit être bijective.

La prochaine étape reste désormais d'associer un nombre unique à chaque formule du système (S), et, à chaque suite de formules. Par exemple, si on considère la formule "$0 = 0$" qui appartient à (S), on sait qu'à chaque symbole qui la constitue correspond un nombre unique. Le problème est alors de savoir construire un nombre unique à partir de ces nombres. Gödel utilise pour cela de manière astucieuse le théorème fondamentale de l'arithmétique énonçant que tout nombre entier peut se décomposer en un produit de nombres premiers unique, à l'ordre des facteurs près. Il décide alors d'associer à une formule le nombre n construit de la manière suivante : en appelant p_i le i-ème nombre premier dans l'ordre croissant et $w(i)$ le i-ème symbole de la formule considérée,

$$n = \sum p_i^{\phi(w(i))}$$

Par exemple, dans le cas la formule "$0 = 0$", on a $\phi("0") = 6$ et $\phi(" = ") = 5$, d'où le nombre associé

$$\phi("0 = 0") = 2^{\phi("0")} \times 3^{\phi("=")} \times 5^{\phi("0")} = 2^6 \times 3^5 \times 5^6$$

Enfin, il reste à savoir associer chaque suite de formules à un nombre, unique lui aussi. Ce nombre est construit de manière analogue. Chaque formule étant associée à un nombre, une suite de formules sera associé à un nombre N construit de la manière suivante : en appelant $f(i)$ la i-ème formule de la suite de formules,

$$N = \sum p_i^{\phi(f(i))}$$

Par exemple, si on considère la démonstration suivante :

$$(\exists x)(x = sy)$$
$$(\exists x)(x = s0)$$

Cette suite de formules démontre qu'il existe bel et bien un suivant au nombre 0 à partir de l'axiome "$(\exists x)(x = sy)$" de Peano. Si on note, a le nombre associé à la première formule (ou $a = \phi("(\exists x)(x = sy)"))$ et c le nombre associé à la conclusion (ou $c = \phi("(\exists x)(x = s0)"))$, alors le nombre D associé à cette suite de formules est donné par :

$$D = 2^{\phi("(\exists x)(x=sy)")} \times 3^{\phi("(\exists x)(x=s0)")} = 2^a \times 3^c$$

Nous nous trouvons donc en connaissance d'une fonction, définissable sans ambiguité, qui associe à toute suite de symboles, quelle qu'elle soit, un nombre. Il peut être alors intéressant de s'assurer que la fonction ϕ est toujours bijective. Autrement dit, qu'également à tout nombre correspond une formule unique. Pour cela, considérons le nombre $m \in \mathbb{N}$ sans rien lui présuposer.
Grace au théorème fondamental de l'arithmétique, on sait qu'il existe $n_1, n_2, n_3, ...$ uniques telle que $m = 2^{n_1} \times 3^{n_2} \times 5^{n_3} \times \cdots \times p_i^{n_i} \times \cdots$.
Grâce à la numération de Gödel, on sait que :

- Si $m \leq 10$, alors m correspond à un symbole qu'on peut retrouver grace au tableau 1
- Si $m > 10$ et $m = p$, alors m correspond à une variable numérique (Tableau 2)
- Si $m > 10$ et $m = p^2$, alors m correspond à une variable propositionnelle (Tableau 3)
- Si $m > 10$ et $m = p^3$, alors m correspond à une variable prédicative (Tableau 4)
- Sinon, m correpond à une suite de formules ou une suite de symboles dont les nombres de Gödel sont $n_1, n_2, n_3, ...$

(avec p un nombre premier)

Nous avons, à ce stade, associé toute formule ou suite de formules à un nombre entier. La dernière étape, pour pouvoir prétendre avoir projeté les métamathématiques dans l'arithmétique, consiste à étudier la nature des relations entre les nombres de Gödel relativement aux relations entre les formules qui leur sont associé. Nous commencerons par donner un exemple simple de relation entre "assertion métamathématique" et "assertion arithmétique", dans l'objectif de familiariser le lecteur avec de telles considérations. Ensuite, nous établirons une relation du système (S) équivalente à la relation métamathématique "est une démonstration de", enfin, nous nous intéresserons à une projection du concept de "substitution", d'ordre métamathématique, dans le système (S). Les deux derniers exemples seront nécessaires à la création de la formule G, affirmant d'elle même qu'elle n'est pas démontrable.

1.2.1.2 Premier exemple de projection : ”*est une partie de*”

Considérons la formule de (S) : A : "$(p \vee p) \supset p$". Nous pouvons dire à l'égard de A, que la formule "$(p \vee p)$" en est une partie. Une telle proposition est d'ordre métamathématique car elle commente une formule mathématique. Nous allons essayer de projeter ce concept dans le système (S) à l'aide de la numérotation de Gödel.

Nous savons déterminer sans ambiguité les nombres de Gödel assocés à A et à "$(p \vee p)$" par la fonction ϕ détaillée plus haut. On a notamment :

$$\phi(A) = \phi(\text{''}(p \vee p) \supset p\text{''}) = 2^8 \times 3^{11^2} \times 5^2 \times 7^{11^2} \times 11^9 \times 13^3 \times 17^{11^2}$$
$$\phi(\text{''}(p \vee p)\text{''}) = 2^8 \times 3^{11^2} \times 5^2 \times 7^{11^2} \times 11^9$$

Il apparait alors clairement que "$(p \vee p)$" est une partie de A si et seulement si "$\phi(\text{''}(p \vee p)\text{''})$ est facteur de $\phi(A)$". Or, la relation "est facteur de" est bien définie au sein du système (S). Ainsi la relation métamathématique "est une partie de" se retrouve projetée au sein du système (S).

1.2.1.3 Deuxième exemple de projection : ”*est une démonstration de*”

Soit une suite de formules D de (S), dans laquelle figure la formule C. A condition que les différentes formules qui composent D s'enchainent de manière logique (relativement aux règles d'inférences), on peut dire que "D est une démonstration de C".

Par exemple, considérons la démonstration déjà énoncée dans ce rapport :

$$(\exists x)(x = sy)$$
$$(\exists x)(x = s0)$$

Grâce à la fonction ϕ, on peut calculer le nombre associé à chaque formule. On appelle a le nombre de la première formule, c le nombre de la deuxième formule, et d le nombre de la suite de formules qui constitue notre démonstration. On a par ailleurs :

$$d = 2^a \times 3^c$$

Il apparait clairement qu'il existe un lien arithmétique, bien que non trivial, entre le nombre de la conclusion c et le nombre de la démonstration d. Non trivial à plus forte raison que les différentes formules doivent s'enchainer de manière logique. Nous appelons l'existence d'un tel lien arithmétique (et logique) la relation "Dem". La relation est alors vérifiée entre c et d et on peut écrire :

$$\text{Dem}(d, c) \Leftrightarrow D \text{ est une démonstration de } C$$

La relation "Dem" est bien définie dans le système (S), et elle s'applique à deux entiers naturels, l'un quelconque, l'autre élement d'un ensemble L contenant tous les nombres de Gödel qui représentent une suite de formules se déduisant logiquement des axiomes de (S).

On a, par ailleurs, la négation logique "$\sim$ Dem" :

$$\sim \text{Dem}(m, n) \Leftrightarrow \phi^{-1}(m) \text{ n'est pas une démonstration de } \phi^{-1}(n)$$

1.2.1.4 Autre exemple de projection : la substitution

Considérons toujours la démonstration de l'existence d'un successeur immédiat de 0 que nous venons d'étudier. Pour passer de la première formule à la seconde, nous avons substitué y par 0. Si on regarde à nouveau les nombres de Gödel a et c qui leur sont associés, on préssent l'existence d'un calcul qui permet de passer de a à c. Pour s'en convaincre, on peut se dire qu'il existe un algorithme assez simple qui transforme a en c, il suffit qu'il décompose a en produit de facteurs premiers, et qu'il change les exposants égaux à $\phi(y) = 13$ par $\phi(0) = 6$. Un tel algorithme réalise une fonction sans ambiguité. On appelle cette fonction "sub". Et on a :

$$c = \text{sub}(a, \phi(y), \phi(0)) \Leftrightarrow \text{La formule } C \text{ est la formule } A \text{ à laquelle on a substitué } y \text{ par } 0$$

1.2.2 Sur l'expression de G dans (S)

Nous arrivons maintenant à une étape cruciale du raisonnement de Gödel, la construction de G dans (S). Soit une formule Y de (S) et considérons la proposition A : "La formule Yn'est pas démontrable". On note $m = \phi(Y)$ le nombre de Gödel associé à Y et $n = \phi(A)$ le nombre de Gödel associé à A. Nous pouvons reformuler cette proposition par "Toute suite de formules n'est pas une démonstration de Y", ou encore : "Pour tout nombre de Gödel x, x ne vérifie pas la relation de démonstration avec m", c'est à dire :

$$A : (x)(\sim \text{Dem}(x, m))$$

Nous avons donc une formule A qui énonce "La formule Y n'est pas démontrable". Or, il est clair qu'en remplaçant Y par A on obtient une formule qui énoncerait d'elle même qu'elle n'est pas démontrable. Ce qui correspond exactement à la proposition G que nous voulons construire. Il n'est pas inutile de rappeler que le nombre de Gödel associé à la formule A dans laquelle on substitue Y par A est $\text{sub}(\phi(A), \phi(Y), \phi(A)) = \text{sub}(n, m, n)$. On a alors finalement :

$$G : (x)(\sim \text{Dem}(x, \text{sub}(n, m, n)))$$

Ce qui montre bien que la proposition G est exprimable dans (S).

1.3 Sur le caractère indécidable de G

Nous savons désormais que G est un proposition de (S), il reste alors à montrer que G est formellement indécidable dans (S) si (S) est consistant (C'est-à-dire s'il ne contient pas de contradiction). Un raisonnement simple nous permet d'affirmer que si G est démontrable, alors $\sim G$ est démontrable. Et qu'inversement, si $\sim G$ est démontrable, alors G est démontrable.
On rappelle que :

$$G : \text{"}G \text{ n'est pas démontrable"}$$
$$\sim G : \text{"}G \text{ est démontrable"}$$

Supposons donc que G soit démontrable. C'est-à-dire que "G est démontrable" est vrai dans (S). Ce qui montre $\sim G$. Supposons d'autre part que $\sim G$ soit démontrable. Donc, "G est démontrable" est démontrable. Donc "G est démontrable" est vraie dans (S). D'où, G est démontrable dans (S).
Nous obtenons donc :

$$G \text{ démontrable} \Leftrightarrow \sim G \text{ démontrable}$$

Cette équivalence signifie que, si G est démontrable, alors on aboutit à une contradiction. En effet, dans ce cas, et G et $\sim G$ sont démontrable et donc vraie au sens de (S). Ceci signifie que si G est démontrable, alors (S) n'est pas un système consistant. C'est-à-dire :

$$G \text{ démontrable} \Rightarrow (S) \text{ n'est pas consistant}$$

Ou encore, en passant par la contraposée, on a :

$$(S) \text{ est consistant} \Rightarrow G \text{ non démontrable}$$

1.4 Sur l'incomplétude du système (S) (Premier théorème)

Nous arrivons désormais au point ultime de la démonstration du premier théorème de Gödel. Nous avons à présent une formule G de (S) qui n'est ni démontrable, ni réfutable, si (S) est consistant.
Nous rappelons que :

$$G : \text{"}G \text{ n'est pas démontrable"}$$

Or, si G n'est pas démontrable, alors G est manifestement vraie. En effet, G énonce d'elle même qu'elle n'est pas démontrable. Nous nous trouvons alors avec une proposition G de (S) qui n'est pas démontrable et pourtant vraie. Ceci montre donc l'incomplétude du système (S).

Ce que Gödel montre également, et que nous ne traiterons pas ici, c'est que même si (S) est récursivement axiomatisable (c'est-à-dire, même si à tout moment il nous est possible d'ajouter comme axiome les formules non démontrable dans (S)), il existera toujours une proposition non démontrable et pourtant vraie.

Nous pouvons alors annoncer :

Théorème : Dans n'importe quelle théorie récursivement axiomatisable, cohérente et capable de « formaliser l'arithmétique », on peut construire un énoncé arithmétique qui ne peut être ni prouvé ni réfuté dans cette théorie.

1.5 Sur la consistance du système (S) (Deuxième théorème)

2 Annexe

Constantes	Numéro de Gödel	Signification
$\sim$	1	Non
$\vee$	2	Ou
$\supset$	3	Si... Alors...
$\exists$	4	Il existe
$=$	5	Egale
0	6	Zéro
s	7	Successeur immédiat de
(	8	Ponctuation
)	9	Ponctuation
,	10	Ponctuation

Table 1 – Numérotation des constantes

Variables numériques	Numéro de Gödel	Substitution possible
x	11	0
y	13	$ss0$
z	17	y
...	p	...

Table 2 – Numérotation des variables numériques

Variables propositionnelles	Numéro de Gödel	Substitution possible
p	11^2	"$0 = 0$"
q	13^2	"$(\exists x)(x = s0)$"
r	17^2	p
...	p^2	...

Table 3 – Numérotation des variables propositionnelles

Variables prédicatives	Numéro de Gödel	Substitution possible
P	11^3	"*Plus grand que*"
Q	13^3	"*Est démontrable*"
R	17^3	P
...	p^3	...

Table 4 – Numérotation des variables prédicatives