

PS23 : Ondes et électromagnétisme

D'après un cours de
P. Lanceleur et E. Perrey-Debain

Retranscrit par
H. Lefebvre

2016

Table des matières

I	Electromagnétisme	3
1	Electrostatique	4
1.1	Structure de la matière	4
1.2	Forces, champs et potentielles	5
1.2.1	Force de Coulomb	5
1.2.2	Champ électrostatique	5
1.2.3	Application	6
1.3	Théorème de Gauss	7
1.3.1	Notion d'angle solide	7
1.3.2	Flux d'un champ électrostatique	7
1.3.3	Théorème de Gauss	7
1.3.4	Equation de Maxwell-Gauss	8
1.4	Energies et travail	8
1.4.1	Cas d'une charge ponctuelle	8
1.4.2	Cas d'une distribution de charge	9
1.4.3	Surfaces équipotentiels	10
2	Conducteur en équilibre	11
2.1	Conducteurs isolés	11
2.2	Influence électrostatique	11
2.3	Application : Condensateur	12
3	Magnétostatique	13
3.1	Introduction	13
3.2	Champ magnétique	13
3.2.1	Champ créé par une charge en mouvement	13
3.2.2	Champ créé par un ensemble de charges	13
3.2.3	Champ créé par un circuit électrique	13
3.3	Théorème d'Ampère	14
3.3.1	Théorème d'Ampère	14
3.3.2	Equation de Maxwell-Thomson	15
3.3.3	Equation de Maxwell-Ampère	15
3.4	Actions magnétiques	15
3.4.1	Force magnétique subit par une particule chargée	15
3.4.2	Force magnétique subit par un circuit	16
4	Electrocinétique et induction	17
4.1	Electrocinétique	17
4.1.1	Loi d'Ohm	17
4.1.2	Conservation de la charge	17
4.2	Induction	18
4.2.1	Expérience de Faraday	18
4.2.2	Equation de Maxwell-Faraday	18
4.2.3	Auto-induction et induction mutuelle	19
4.2.4	Retour sur les équations de Maxwell	19

II Ondes	20
5 Equation des ondes et solutions	21
5.1 Définitions	21
5.2 Description	21
6 Ondes planes et harmoniques	23
6.1 Définitions	23
6.2 Equation d'Helmutz	24
6.3 Direction quelconque	24
6.4 Représentation	25
6.5 Exemples d'ondes planes harmoniques	25
6.5.1 Ondes électromagnétiques	25
6.5.2 Ondes transversales dans une corde	27
6.5.3 Ondes sonores (longitudinales)	27
6.5.4 Ondes dans un barreau élastique	30
7 Ondes 2D et 3D	31
7.1 Formalisme complexe	31
7.2 Ondes 2D en cartésien	31
7.3 Ondes 3D en sphérique	31
7.3.1 Equation d'onde	31
7.3.2 Impédance acoustique en 3D	32
7.3.3 Intensité et puissance	32
7.4 Effet Doppler	33
7.5 Ondes 2D circulaires	34
8 Conditions aux limites	35
8.1 Interface entre deux milieux	35
8.2 Changement de section de tube	36
8.3 Incidence oblique (2D)	37
9 Ondes stationnaires et modes guidés	39
9.1 Ondes stationnaires	39
9.1.1 Mur infiniment rigide	39
9.1.2 Tube avec ouverture	40
9.1.3 Tube unidimensionnel de longueur finie	40
9.2 Modes guidés	41
9.2.1 Tube 2D	41
9.2.2 Cavité 2D	42
10 Interférences	43
10.1 Interférences entre deux ondes	43
10.2 Diffraction	44

Première partie

Electromagnétisme

Chapitre 1

Electrostatique

L'électrostatique est le domaine de la physique qui étudie les phénomènes créés par des charges électriques statiques. Depuis l'antiquité, il est connu que certains matériaux (dont l'ambre) attirent des objets de petites tailles après avoir été frottés. Le mot grec pour "ambre" est elek-tron.

1.1 Structure de la matière

La vision moderne de la matière décrit celle-ci comme étant constituée d'atomes. Ceux-ci sont eux-même composés d'un noyau (1911, Rutherford) autour duquel "gravite" une sorte de nuage composé d'électrons et portant l'essentiel de la masse. Ces électrons se repoussent les uns les autres mais restent confinés autour du noyau car celui-ci possède une charge positive qui les attire. On attribue cette charge positive à des particules appelées protons. Il existe un autre type de particule, les neutrons, portant une charge électrique nulle.

Dans le tableau de Mandeliev, tout élément X est représenté par la notation

$$X_Z^A$$

où A est le nombre de masse (nombre total de nucléon) et Z le numéro atomique (nombre de protons). La charge électrique nucléaire totale est donc

$$Q = +Ze$$

Et le cortège électrique possède une charge

$$Q = -Ze$$

Ce qui assure la neutralité de l'atome.

Numérique : Voici quelques données numériques :

$$\begin{array}{ll} \text{Electron} & \left\{ \begin{array}{l} Q_e = -e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \\ m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg} \end{array} \right. \\ \text{Proton} & \left\{ \begin{array}{l} Q_p = +e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \\ m_p = 1.672 \times 10^{-27} \text{ kg} \end{array} \right. \\ \text{Neutron} & \left\{ \begin{array}{l} Q_n = 0 \\ m_n = 1.674 \times 10^{-27} \text{ kg} \end{array} \right. \end{array}$$

A l'heure actuelle, l'univers est descriptible à l'aide des 4 forces fondamentales :

- Force nucléaire faible (radioactivité)
- Force nucléaire forte (cohésion du noyau)
- Force électromagnétique (cohésion de l'atome)
- Force gravitationnelle (cohésion des corps astro-physiques)

Un matériau est ainsi constitué d'un grand nombre de charges électriques, mais celles-ci sont toutes compensées. Des charges en excès ou en manque, non compensées, sont responsables des effets électriques.

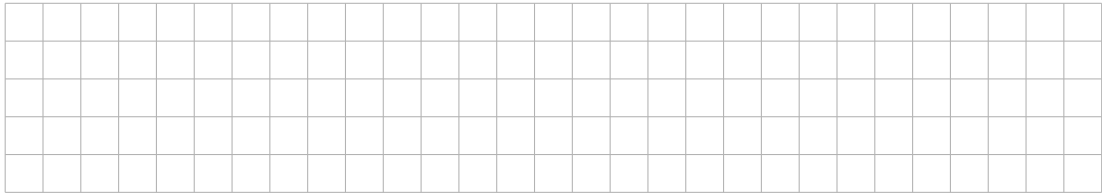
Conducteur parfait : Un matériau est dit conducteur parfait si lorsqu'il devient électrisé, les porteurs de charges non compensées peuvent se déplacer librement dans tout le volume occupé par le matériau. (exemple : électrolyse, conducteur ohmique)

Isolant parfait : Un matériau est dit isolant (ou diélectrique) parfait si les porteurs de charges restent "immobiles".

1.2 Forces, champs et potentielles

1.2.1 Force de Coulomb

Charles Auguste Coulomb (1736-1806) a effectué une série de mesures qui lui ont permis de déterminer avec un certain degré de précision les propriétés de la force électrostatiques. La force est radiale et proportionnelle au produit des charges et varie comme l'inverse du carré de la distance entre les charges.



Définition : La force exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une autre charge q_2 est :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \vec{u}_{1,2}$$

Où $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$, ϵ la permittivité du vide (en Farad par mètre) et où $\vec{u}_{1,2}$ est vecteur unitaire allant de 1 vers 2. (Attention, dans un milieu différent du vide, la constante de permittivité doit être adaptée)

Remarque : Pour un électron, la force de gravité est hautement négligeable par rapport à la force électromagnétique, en effet

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{Gm_e^2}{r^2} \right)^{-1} = 4 \times 10^{42}$$

1.2.2 Champ électrostatique

Pour une charge ponctuelle, on peut remarquer que $\frac{\vec{F}_{1/2}}{q_2}$ ne dépend que de la charge q_1 et de la distance $r_{1,2}$. On appelle cette quantité vectorielle "champ électrique"

Champ électrostatique : Une charge q en un point P de l'espace, crée en un point M de l'espace un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en V/m telle que :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

Champ créé par un ensemble de charge : D'après le principe de superposition, le champ résultant en un point M est égale à la somme de tous les champs électriques de chacune des

charges q_i ($i = 1 \dots n$) placés en P_i . De sorte qu'en notant $\vec{r}_i = P_i \vec{M}$ et $\vec{u}_i = \vec{r}_i / ||\vec{r}_i||$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

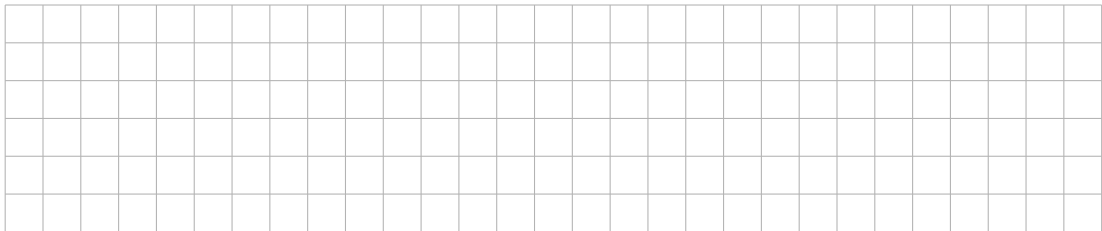
En pratique, cette expression n'est que rarement utilisée puisque nous sommes amenés à considérer un nombre gigantesque de particules. Il est donc plus habile d'utiliser des distributions continues de charge. Il s'agit d'une approximation, permettant de remplacer une somme discrète presque infinie par une somme continue :

$$\vec{E}(M) = \int_{dist} \frac{dq(P)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

Avec $dq(P)$ la charge en P et $\vec{r} = P \vec{M}$

Densités : Pour caractériser la distribution de charges sur un volume, on introduit les densités de charges suivantes

Densité linéique	Densité surfacique	Densité volumique
$\lambda = \frac{dq}{dl}$	$\sigma = \frac{dq}{dS}$	$\rho = \frac{dq}{dV}$
$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda}{r^2} \vec{u} dl$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\sigma}{r^2} \vec{u} dl$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho}{r^2} \vec{u} dl$



1.2.3 Application

Ces phénomènes électrostatiques sont utilisés par exemple pour dévier une particule de charge q . En effet, d'après le principe fondamentale de la dynamique :

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{qE}{2mv_0^2} x^2$$



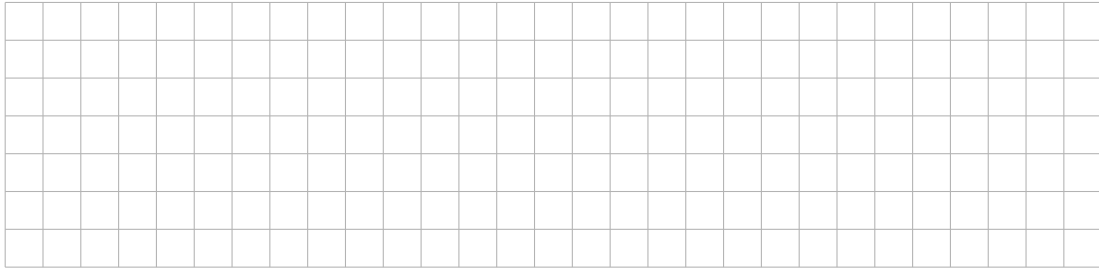
1.3 Théorème de Gauss

1.3.1 Notion d'angle solide

La notion d'angle solide est l'extension naturelle dans l'espace de l'angle défini sur un plan.

Définition : L'angle solide élémentaire $d\Omega$, délimité par un cône coupant un élément de surface dS' à distance r de son sommet O vaut :

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2}$$



D'une façon générale, le cône peut intercepter une surface quelconque dS dont la normale \vec{n} fait un angle θ avec le vecteur unitaire \vec{u} . On a alors bien sûr $\vec{n} \cdot \vec{u} = \cos \theta$ et on peut considérer que $dS' = dS \cos \theta$, d'où

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2} = \frac{dS \vec{n} \cdot \vec{u}}{r^2}$$

1.3.2 Flux d'un champ électrostatique

On considère une charge ponctuelle q en O . Le flux du champ \vec{E} dû à q à travers une surface élémentaire $d\vec{S} = dS\vec{n}$ est

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

1.3.3 Théorème de Gauss

Que se passe-t-il si on s'intéresse au flux total à travers une surface fermée ?



Bilan du flux sur le cône $d\Omega$: Comme la surface considérée est fermée, le nombre de traversées du cône est toujours impair (cf. ci-dessus). Ainsi, pour une traversée :

$$d\Phi = \frac{qd\Omega}{4\pi\epsilon_0}$$

Pour trois traversées :

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(d\Omega - d\Omega + d\Omega) = \frac{qd\Omega}{4\pi\epsilon_0}$$

Ceci se vérifie encore pour un nombre supérieur de traversées du cône. Et, en intégrant selon toutes les distances, on trouve :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} d\Phi = \iint_{\Sigma} \frac{qd\Omega}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ce résultat se généralise encore pour un nombre quelconque de charges, c'est le théorème de Gauss.

Théorème de Gauss :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

1.3.4 Equation de Maxwell-Gauss

Le théorème de Gauss-Ostrogradski (MT22) nous permet d'affirmer que

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV$$

Or, dans le cas d'une distribution volumique de charge, on a

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

Ce qui nous permet de déduire la première des équations de Maxwell :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

1.4 Energies et travail

1.4.1 Cas d'une charge ponctuelle

Prenons une particule "test" de charge q_t placée dans un champ électrostatique \vec{E} créé par une autre charge q placée au point P . Pour déplacer la charge q_t du point A au point B , un opérateur doit fournir une force qui s'oppose à la force de Coulomb. Si ce déplacement est fait suffisamment lentement, $\vec{F} = -q_t \vec{E}$ et le travail fourni par l'opérateur est donné par

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = -q_t \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot d\vec{l}}{r^2} = -q_t \int_A^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta dl = -q_t \int_A^B \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Par ailleurs, si on note $V(M)$ le potentiel électrostatique tel que

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

On trouve que

$$W_A^B = q_t(V(B) - V(A))$$



Remarque : La force électrostatique est conservative

Energie potentielle : L'énergie potentielle d'une particule chargée q_t placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener de façon quasi-statique cette particule de l'infini à sa position actuelle.

$$U = W_{\infty}^M = q_t(V(M) - V(\infty)) = q_t V(M) \text{ Car, par convention : } V(\infty) = 0$$

Relation entre $\vec{E}(M)$ et $U(M)$: Considérons deux points très proche M et M' . On a $M\vec{M}' = \vec{dl}$. On a alors d'une part

$$dV = V(M') - V(M) = - \int_M^{M'} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Et d'autre part

$$V = V(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \vec{\text{grad}} V \cdot \vec{dl}$$

D'où l'égalité suivante :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$$

1.4.2 Cas d'une distribution de charge

Fixons une particule de charge q_1 . Le travail nécessaire pour amener une charge q_2 est

$$U_2 = q_2 V_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

De même, le travail pour amener une troisième charge q_3 est

$$U_3 = q_3(V_{13} + V_{23}) = \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

Enfin, pour n charges q_i , on trouve

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j < i} \frac{q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

Où V_i est le potentiel en i dû aux autres charges.

Ce résultat se généralise pour une distribution de charge par

$$U = \frac{1}{2} \int_{dist} dq(M) V(M) \text{ où } V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{dist} \frac{dq}{r}$$

Remarque : V est exprimé en Volt (V) alors que V est exprimé en électron-volt (eV). $1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

1.4.3 Surfaces équipotentielles

Définition : La surface équipotentielle est telle que le potentiel V est constant en tout point de celle-ci.

$$V(x, y, z) = \text{cte} \Rightarrow dV = \vec{\text{grad}} V \cdot \vec{dl} = 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$

Chapitre 2

Conducteur en équilibre

2.1 Conducteurs isolés

Définition : L'équilibre électrostatique d'un conducteur est atteint lorsqu'une charge électrique ne se déplace plus à l'intérieur du conducteur. Cela entraîne nécessairement que :

- Le champ électrostatique total est nul dans le conducteur. (i.e. $\vec{E} = 0$ et donc $V = \text{cte}$)
- Les charges sont localisées à la surface.

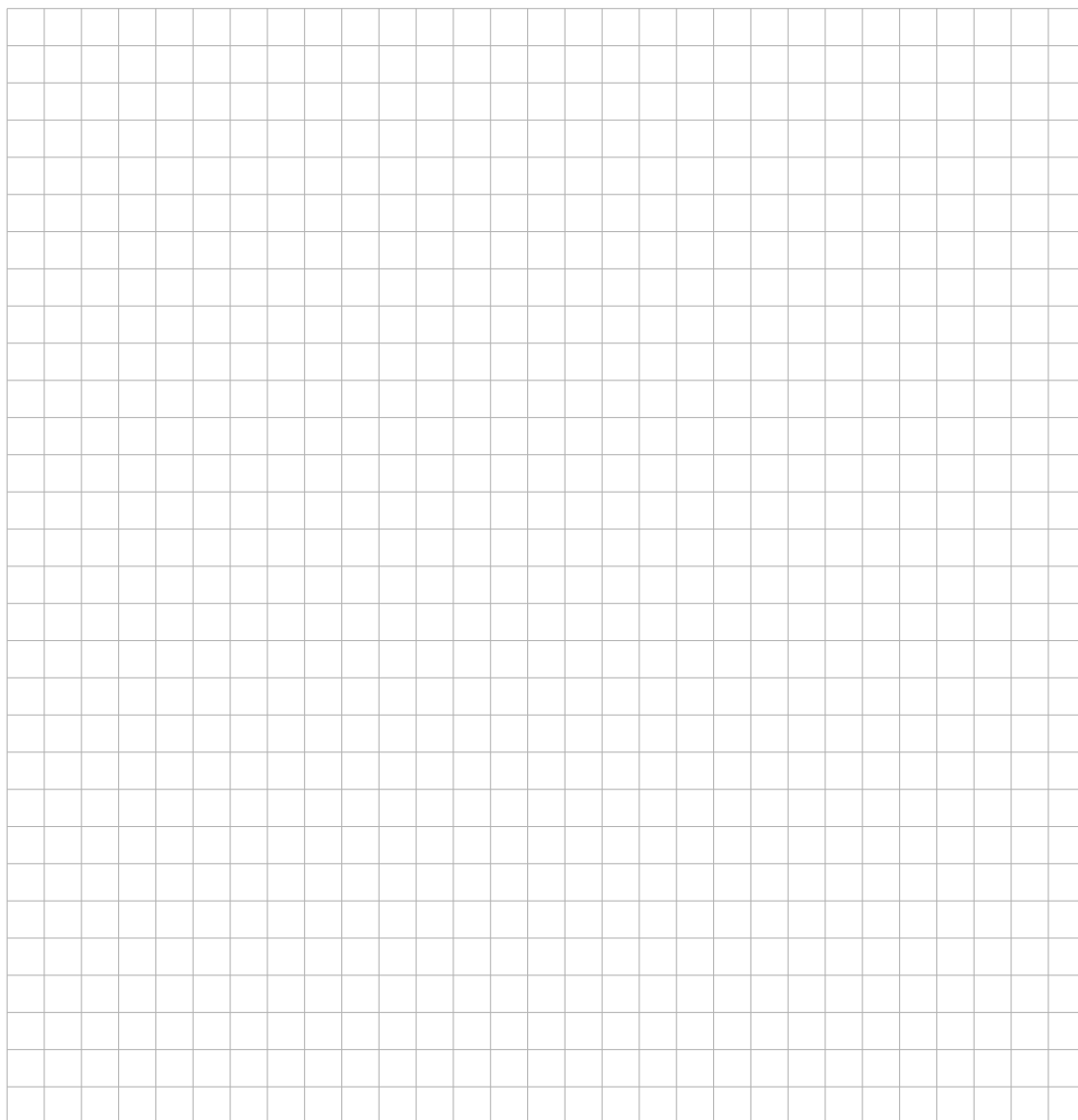
Théorème : Le champ électrostatique à proximité immédiate d'un conducteur de densité surfacique σ vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$$

2.2 Influence électrostatique



2.3 Application : Condensateur



Chapitre 3

Magnétostatique

3.1 Introduction

La magnétostatique est l'étude du magnétisme dans les situations où le champ magnétique ne dépend pas du temps. Il existe deux sources de champs magnétiques : le courant électrique et la matière aimantée. L'analyse du champ magnétique commence avec l'expérience de Orsted (1820, 40 ans après Coulomb) : il place un fil conducteur au dessus d'une boussole par hasard et y fait passer un courant.

3.2 Champ magnétique

3.2.1 Champ créé par une charge en mouvement

Le champ magnétique créé en un point M par une particule q située en P et animée d'une vitesse \vec{v} est

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Remarque : L'unité du champ magnétique est le Tesla. μ_0 est la perméabilité du vide et vaut $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

3.2.2 Champ créé par un ensemble de charges

Le principe de superposition nous permet de déduire que, pour un ensemble de charge, le champ magnétique vaut :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=0}^n \frac{q_i \vec{v}_i \wedge \vec{u}_i}{r_i^1}$$

Et pour une distribution de charge continu :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\nu} \frac{dq\vec{v} \wedge \vec{u}}{r^1}$$

3.2.3 Champ créé par un circuit électrique

Considérons un conducteur métallique, les porteurs de charge sont les électrons et on a

$$dq\vec{v} = nq\vec{v}d\nu = \vec{j}d\nu\vec{v}$$

Avec n la densité de porteur de charge, \vec{j} le vecteur densité et ν le volume ($d\nu = Sdl$). On a évidemment $d\vec{l} = \vec{v}dt$.

On s'intéresse ici à une partie infinitésimale d'un circuit. Calculons le champ magnétique élémentaire :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \right] d\vec{l} \wedge \vec{u}$$

Or,

$$\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = I d\vec{l}$$



Avec I le courant. On trouve la fameuse loi de Biot et Savart :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Remarque : Le courant électrique est donnée par $I = nevS$ avec n la densité de porteur de charge, e la charge d'un électron, v la vitesse moyenne de dérive et S la section du fil considéré.

3.3 Théorème d'Ampère

3.3.1 Théorème d'Ampère

Considérons tout d'abord un fil de longueur infinie, on a notamment :

$$O\vec{M} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \text{ et donc } dO\vec{M} = d\vec{l} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$

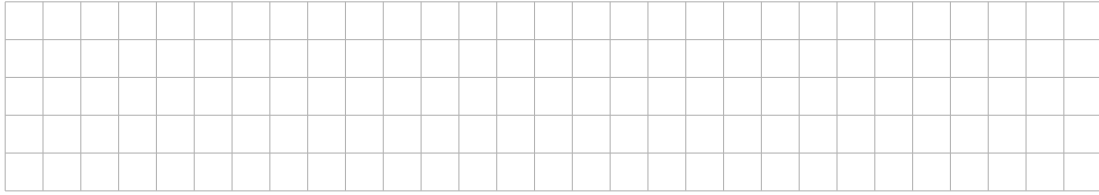
Le calcul de la circulation du champ magnétique selon une courbe fermée est alors assez remarquable :

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \oint_\Gamma \frac{d\theta}{2\pi}$$

Deux cas sont alors possibles, soit Γ est une courbe qui n'enlace pas le fil, auquel cas $\oint_\Gamma \frac{d\theta}{2\pi} = 0$. Soit Γ enlace le fil et alors $\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ (car alors $\oint_\Gamma \frac{d\theta}{2\pi} = 1$). Ce résultat se généralise par le théorème d'Ampère.

Théorème d'Ampère : La circulation de \vec{B} le long d'une courbe orientée, fermée, appelée alors contour d'Ampère, est égale à μ_0 fois la somme algébrique des courants qui traversent la surface S_Γ délimité par Γ . Ou encore :

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{Total}$$

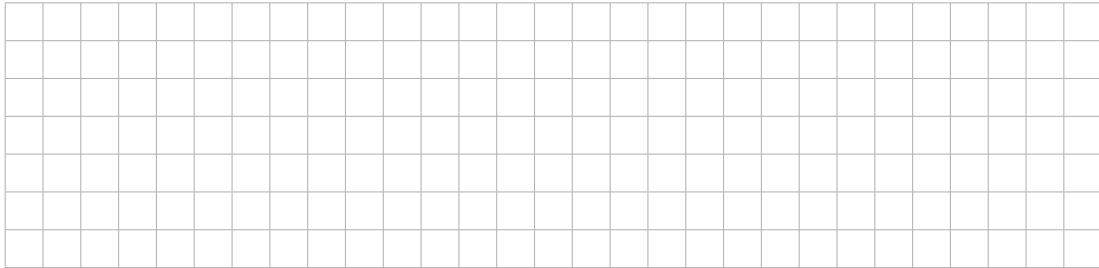


Remarque : Le choix du sens de la circulation est arbitraire.

3.3.2 Equation de Maxwell-Thomson

Rappel : Pour une charge placée en O animée d'une vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_z$, on trouve que

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 q \vec{v} \wedge \vec{e}_\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$



Equation de Maxwell-Thomson : On a toujours :

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

3.3.3 Equation de Maxwell-Ampère

On vient d'établir que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_{\Gamma}} \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

Or, la relation suivante est aussi vérifiée (MT22) :

$$\iint_{S_{\Gamma}} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Ce qui nous permet de déduire

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Remarque importante : Ceci est vrai uniquement si \vec{j} est constant

3.4 Actions magnétiques

3.4.1 Force magnétique subit par une particule chargée

Force de Lorentz : La force totale, électrique et magnétique, subie par une particule de charge q et de vitesse \vec{v} (mesuré dans un référentiel galiléen) est

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Remarque : La composante magnétique ne fournit pas de travail.

Etudions la trajectoire d'une particule chargée en présence d'un champ magnétique. On considère une particule de masse m et de charge q . A $t = 0$, $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$. Le principe fondamental de la dynamique nous donne

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Rappel PS21 :

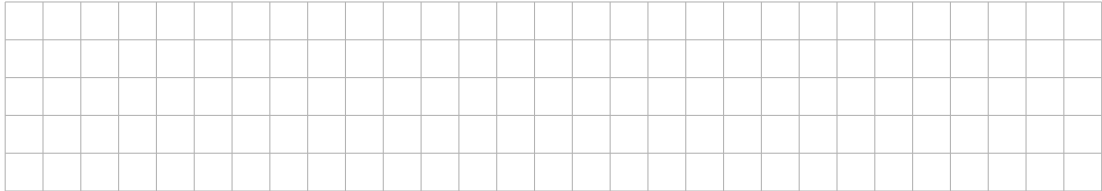
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = a_T \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$$

Or, on a clairement $q\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{T}$, ce qui implique que

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \text{ et donc } v = v_0 = \text{cte}$$

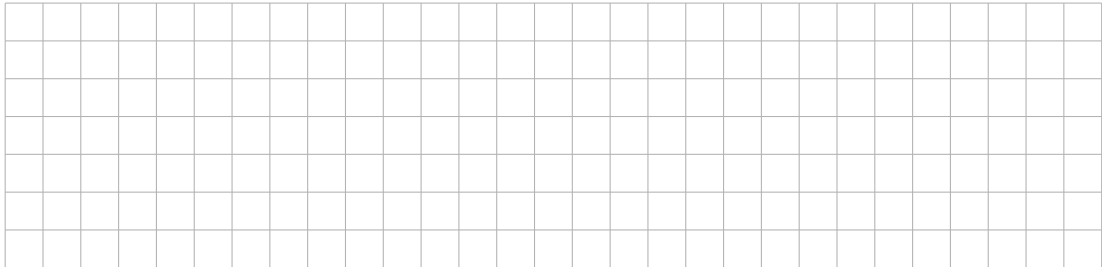
D'où finalement

$$m \frac{v_0^2}{R} = |qv_0 B| \Rightarrow R = \left| \frac{mv_0}{qB} \right| = \text{cte}$$



3.4.2 Force magnétique subit par un circuit

Force de Laplace :



La force magnétique s'exerçant sur un élément de volume $d\nu = Sd\vec{l}$ s'écrit

$$d\vec{F} = dq\vec{v} \wedge \vec{B} = \left[\iint_{\Sigma} \vec{j} dS \right] d\vec{l} \wedge \vec{B} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Ainsi, la force totale subit par un fil, appelé force de Laplace est :

$$\vec{F} = I \int_{\text{circuit}} d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Remarque : A partir de la force de Lorentz, qui est une force microscopique agissant sur des particules individuelles, nous avons obtenu une force macroscopique agissant sur un solide. La force de Laplace est capable de déplacer le solide et donc d'exercer un travail non nul. Il faut interpréter cette force comme la résultante de l'action des particules sur le réseau cristallin. En fait, cela se traduit par la présence d'un champ électrostatique : la champ de Hall (cf. Wikipedia).

Remarque 2 : C'est par la mesure de cette force qu'a été défini l'Ampère. L'Ampère est l'intensité du courant dans deux fils situés à 1 m et produisant une attraction réciproque $F = 2 \times 10^{-7}$ N.

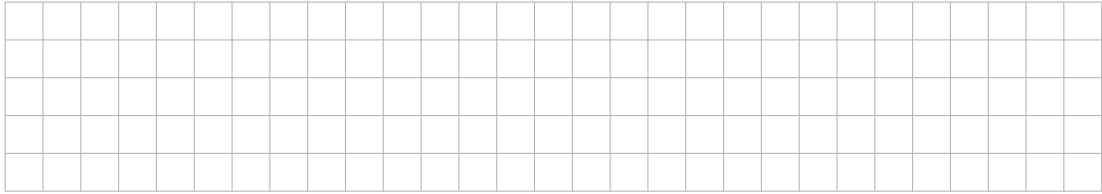
Chapitre 4

Electrocinétique et induction

4.1 Electrocinétique

4.1.1 Loi d'Ohm

Rappel :



Le courant traversant un tronçon de circuit de section S est

$$I = \frac{dQ}{dt} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

Dans la plupart des conducteurs, on observe une proportionnalité entre la densité de courant (\vec{j}) et le champ électromoteur : $\vec{E}_m = \frac{\vec{F}}{q}$ (où \vec{F} est la force responsable du mouvement des électrons)

Loi d'ohm :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}_m$$

Où γ est appelé conductivité et $\eta = \gamma^{-1}$ est appelé la résistivité.

On définit alors la résistance d'un conducteur de section S et de longueur L par

$$R = \frac{\int_L \vec{E}_m \cdot d\vec{l}}{I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS} = \frac{\int_L \vec{E}_m \cdot d\vec{l}}{\iint_S \gamma \vec{E}_m \cdot \vec{n} dS}$$

Remarque : Si E_m est constant, alors $R = \frac{\eta L}{S}$

Remarque 2 : Si le champ électromoteur est d'origine électrostatique pure, alors $\vec{E}_m = -\text{grad } V$ et donc :

$$R = \frac{\int_L \vec{E}_m \cdot d\vec{l}}{I} = \frac{-\int_L \text{grad } V \cdot d\vec{l}}{I} = \frac{V_A - V_B}{I}$$

4.1.2 Conservation de la charge

Considérons une surface S délimité par un volume ν . Alors,

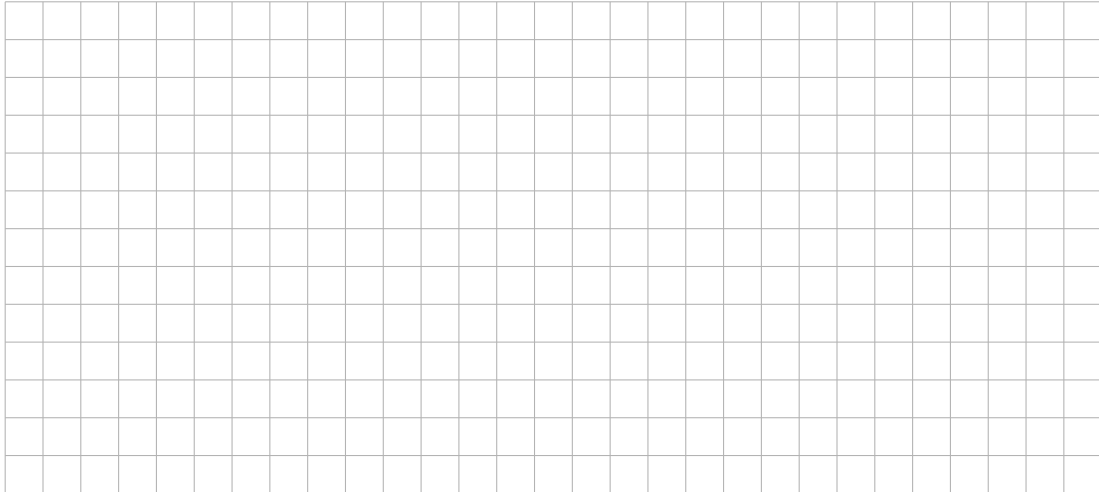
$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_{\nu} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\nu = - \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\nu} \text{div } \vec{j} d\nu$$

D'où finalement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

4.2 Induction

4.2.1 Expérience de Faraday



Loi de Faraday : La variation temporelle du flux magnétique à travers un circuit fermé y engendre une force électromotrice induite notée e ou fem telle que

$$e = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Où $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$

Loi de Lenz : L'induction produit des effets qui s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance. Par exemple, Si B augmente, le circuit C va être telle qu'il va créer un champ B_2 qui va s'opposer à l'accroissement de B .

4.2.2 Equation de Maxwell-Faraday

Lorsqu'un courant variable circule dans un circuit, un champ magnétique est créé. Dans ce cas précis, la force induite doit être dû à la composante électrique de la force de Lorentz. On a :

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \right)$$

Or, on a (MT22) :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{n} dl$$

D'où enfin, l'équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

4.2.3 Auto-induction et induction mutuelle

Un circuit isolé est parcouru par un courant I , ce courant engendre un champ magnétique, et donc un flux

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \left(\oint_C \frac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2} \right) \right] . I = L.I$$

En notant

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \left(\oint_C \frac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2} \right)$$

Enfin, d'après Faraday, la relation bien connue suivante est toujours vérifiée :

$$e = -L \frac{dI}{dt}$$

4.2.4 Retour sur les équations de Maxwell



Deuxième partie

Ondes

Chapitre 5

Equation des ondes et solutions

5.1 Définitions

Perturbation : Petite variation d'une quantité physique

Onde : Perturbation dynamique de toute quantité physique rendant compte de l'état d'un milieu, susceptible de se propager dans l'espace et le temps.

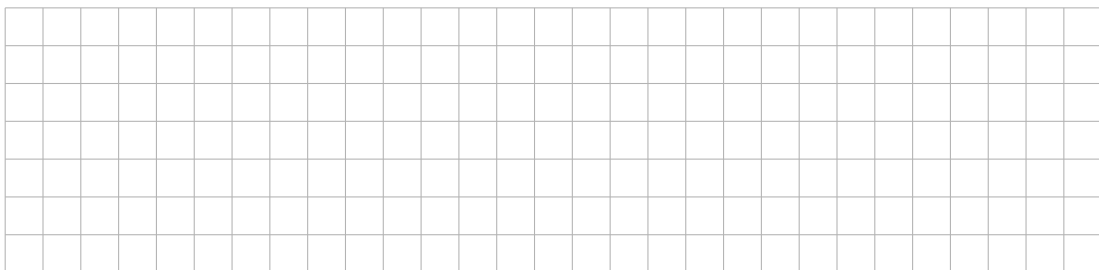
Propagation : Déplacement au cours du temps du phénomène dans un milieu qui "reste immobile" et revient à son état initial après le passage de l'onde.

Equation d'onde Si φ est une onde, alors :

$$\Delta\varphi(M, t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(M, t) = 0, \forall M, t$$

Remarque : L'équation d'onde traduit bien la définition donnée ci-dessus : $\Delta\varphi$ représente la variation spatiale alors que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ représente la variation temporelle du phénomène. Le terme $1/c_0^2$ rend homogène la formule.

5.2 Description



Ici, la perturbation qui a lieu en $t = t_0$ se propage dans le temps. C'est à dire que la "même perturbation" se retrouve à l'instant suivant $t = t_0 + \Delta t$.

Célérité : En une durée $\Delta t = t - t_0$, l'onde se propage sur une distance $d = x - x_0$. On note alors $c = \frac{x-x_0}{t-t_0}$ la célérité de l'onde qui correspond au déplacement de la perturbation.

Remarque : Ne pas confondre vitesse et célérité! En effet, la vitesse est associée à un déplacement de masse alors que la célérité est liée à la propagation d'un phénomène.

Ici par exemple, l'onde est transversale et $v = dy/dt$, avec $c \gg v$

Propagation :

$$c = \frac{x - x_0}{t - t_0} \Leftrightarrow c(t - t_0) = x - x_0 \Leftrightarrow x - ct = x_0 - ct_0$$

Or $x_0 - ct_0$ est constant ! On appelle alors " $x - ct$ " le propagateur de l'onde.

Progression : On établit facilement le sens de la propagation en fonction du propagateur :

- $x - ct$: l'onde se propage dans le sens des x croissant (signes différents)
- $x + ct$: l'onde se propage dans le sens des x décroissant (signes identiques)

Solutions de l'équation (Proposition) : $\varphi(M, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ est solution de l'équation des ondes.

Preuve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi = \frac{\partial^2(f+g)}{\partial x^2} = f'' + g'' \\ \frac{\partial(f+g)}{\partial t} = -c(f + g) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi = \frac{\partial^2(f+g)}{\partial x^2} = f'' + g'' \\ \frac{\partial^2(f+g)}{\partial t^2} = c^2(f'' + g'') \end{array} \right. \Rightarrow \Delta \varphi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = f'' + g'' - \frac{1}{c_0^2} (c^2(f'' + g'')) = 0$$

Chapitre 6

Ondes planes et harmoniques

6.1 Définitions

Onde plane : Onde qui ne dépend que d'une seule variable cartésienne

Onde harmonique : Onde dont le profil est sinusoïdal ($\sim \cos, \sin$)

Notation : Dans tout le cours, on notera

A : Amplitude (de la même unité que φ)

ω : Pulsation (en rad/s)

δ : Déphasage (en rad)

f : Fréquence (en Hz)

T : Période temporelle

Définition mathématique : On sait que φ est une onde plane harmonique progressive si $\varphi(x, t) = f(x - ct)$ avec f une fonction sinusoïdale.

Considérons donc qu'à l'instant $t = 0$ une perturbation soit provoquée par une source sinusoïdale.

On a alors :

$$\varphi(0, t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

Avec, par définition, $\omega = 2\pi f$ et $f = T^{-1}$

On peut alors écrire :

$$\varphi(0, t) = A \cos(2\pi f t + \delta) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right)$$

Or, la perturbation qui a lieu en $t = 0$ a lieu également un instant plus tard $t + \Delta t$ en x (phénomène de propagation à la célérité c) :

$$\varphi(x, t + \Delta t) = \varphi(0, t) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right)$$

D'où :

$$\varphi(x, t) = \varphi(0, t - \Delta t) = A \cos\left(2\pi\left(\frac{t - \Delta t}{T}\right) + \delta\right) = A \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{c\Delta t}{cT}\right) + \delta\right) = A \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right) + \delta\right)$$

En posant $\lambda = cT$ la longueur d'onde, on a :

$$\varphi(x, t) = A \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

On pose également $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$



$$\forall t, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \varphi(x + n\lambda, t) = \varphi(x, t)$$



$$\forall t, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \varphi(x, t + nT) = \varphi(x, t)$$

6.2 Equation d'Helmotz

Etant donné notre connaissance de la forme général des ondes planes harmoniques, on peut simplifier l'équation d'onde les concernant, en effet :

$$\begin{cases} \Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \\ \varphi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \delta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega t - kx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx) = -\omega^2 \varphi(x, t) \end{cases}$$

On a alors :

$$\Delta\varphi + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi = 0 \Leftrightarrow \Delta\varphi + k^2 \varphi = 0$$

Cette équation est appelée "équation d'Helmotz".

6.3 Direction quelconque

Jusqu'ici, les ondes se propageaient selon l'axe \vec{e}_x . Pour une direction quelconque, on introduit le vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{n}$ où \vec{n} est dans la direction de propagation de l'onde ($||\vec{n}|| = 1$).

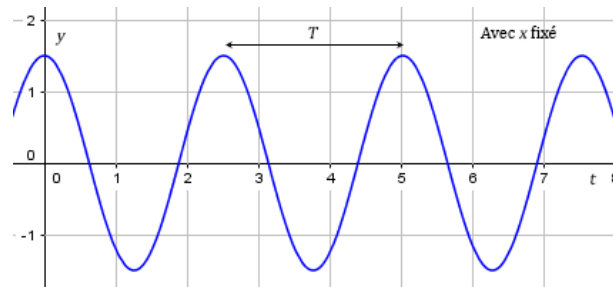
Ceci permet d'écrire pour $\vec{r} = O\vec{M}$ (fixe) :

$$\varphi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

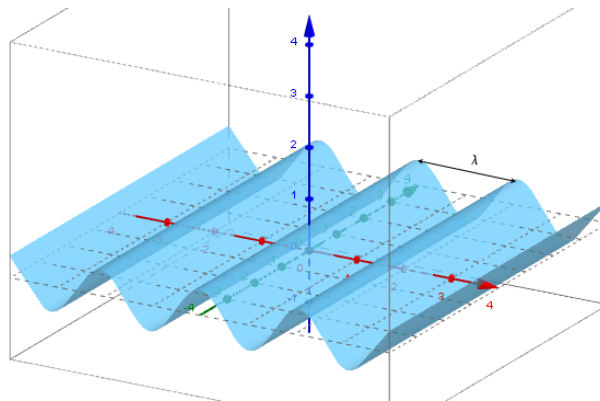
On a, par ailleurs, la relation suivante, appelée relation de dispersion : $\vec{k}^2 = k^2$

6.4 Représentation

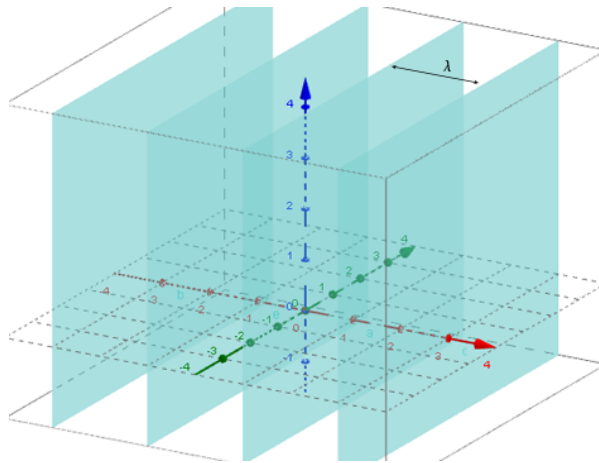
Représentation en 1D :



Représentation en 2D :



Représentation en 3D :



6.5 Exemples d'ondes planes harmoniques

6.5.1 Ondes électromagnétiques

Célérité :

Le champ électromagnétique \vec{E} vérifie l'équation d'onde

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Pour étudier la propagation des ondes électromagnétiques, on se place en dehors de la source ($\vec{j} = 0$ et $\rho = 0$). Les équations de Maxwell donnent alors :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Or :

$$\Delta \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}$$

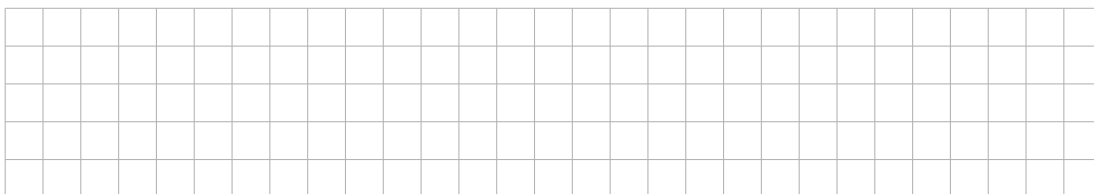
(car $\operatorname{div} \vec{E} = 0$)

D'autre part :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \operatorname{rot} \vec{B} \right) = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}$$

D'où :

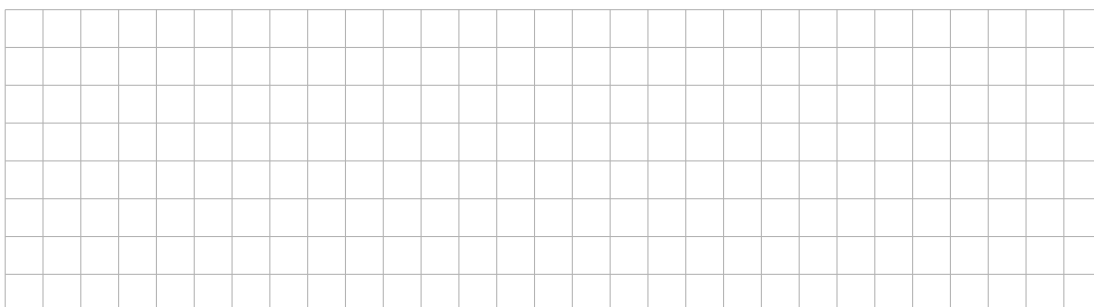
$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}}$$



Spectre électromagnétique :



Orientation de \vec{k} , \vec{E} et \vec{B} :



Energies et Puissance

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 B^2$$

$$\vec{p} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

On note également la vitesse d'énergie comme étant : $v_{\text{energie}} = \frac{\|\vec{p}\|}{U} = c$

Remarque : Pour le soleil, $p = 1,4 \cdot 10^3 \text{ W/m}^3$.

6.5.2 Ondes transversales dans une corde



On a : $dF_y = \tau'_y - \tau_y = \tau \sin \alpha' - \tau \sin \alpha \approx \tau(\alpha' - \alpha) = \tau d\alpha = \tau \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$
De plus, $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$. D'où, $dF_y = \tau \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx = \tau \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx$.

PFD : $\sum F = m\gamma \Rightarrow dF_y = dm \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ avec $dm = \frac{M}{L} dx = \rho_L dx$ (ρ_L : masse linéique). Ou encore : $dF_y = \rho_L \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx$.

On a alors :

$$\begin{cases} dF_y = \rho_L \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx \\ dF_y = \tau \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \Delta \varphi - \frac{\rho_L}{\tau} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_L}}$$

6.5.3 Ondes sonores (longitudinales)

On se place dans un milieu où règnent les champs :

Pression : $p_T(M, t) = p_0 + p(M, t)$ ($p \ll p_0$)

Masse volumique : $\rho_T(M, t) = \rho_0 + \rho(M, t)$ ($\rho \ll \rho_0$)

Vitesse des particules d'air : $v_T(M, t) = v_0 + v(M, t)$ ($v_0 = 0$ ici)

Les constantes p_0, ρ_0 représentent la pression et la masse volumique du milieu "au repos". Les fonctions p, v et ρ représentent la perturbation dans ce milieu.



On approxime classiquement $\xi(x + dx) \approx \xi(x) + d\xi$.

Nous allons établir trois équations liées au problème : l'équation d'état, l'équation de conservation de la masse volumique, et le PFD sur l'élément de surface S .

Equation d'état

On introduit tout d'abord une nouvelle quantité appelée "Module de compressibilité" (en Pascal) dont on se servira plus tard :

$$\kappa = \rho_0 \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

La pression est fonction de la masse volumique, donc on peut écrire $p_T = f(\rho_T)$ (avec $p_0 = f(\rho_0)$). Etant donné que ρ est petit devant ρ_0 , on peut appliquer les formules de Taylor sur f :

$$p_T = f(\rho_T) = f(\rho_0 + \rho) \approx f(\rho_0) + \rho \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0) = p_0 + \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0)$$

Or, $p = p_T - p_0$. On trouve alors l'équation d'état :

$$p = \rho \frac{\kappa}{\rho_0}$$

Equation de conservation de la masse

La masse élémentaire est à tout instant $dm = \rho_T dV$, où dV est un volume élémentaire. En particulier :

$$\begin{cases} \text{Avant la perturbation :} & dm = \rho_0 S dx \\ \text{Pendant la perturbation :} & dm = \rho_T S(dx + d\xi) \end{cases}$$

En approximant $d\xi \approx \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$, la conservation de la masse volumique avant et pendant la perturbation s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho_0 S dx &= \rho_T S(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx) \\ \Rightarrow \rho_0 S dx &= \rho_T S dx (1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}) \\ \Rightarrow \rho_0 &= \rho_T (1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}) \\ \Rightarrow \rho_T &= \rho_0 (1 + \frac{\partial \xi}{\partial x})^{-1} \\ \Rightarrow \rho_T &= \rho_0 (1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}) \text{ car } \frac{\partial \xi}{\partial x} \ll 1 \end{aligned}$$

Equation du PFD : équation d'Euler

Bilan des forces : Pressions $F(x, t)$ à gauche, pression $F(x + dx, t)$ à droite.

$$\begin{aligned} \sum F_{ext} &= dm \gamma \\ \Rightarrow F(x) - F(x + dx) &= dm \gamma \\ \Rightarrow p_T(x, t)S - p_T(x + dx, t)S &= \rho_T dV \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\ \Rightarrow p_T(x, t)S - p_T(x, t)S - dx \frac{\partial p_T}{\partial x} S &= \rho_T S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial p_T}{\partial x} &= -\rho_T \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Résolution

On a donc :

$$\begin{cases} p = \rho \frac{\kappa}{\rho_0} & (1) \\ \rho_T = \rho_0 (1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}) & (2) \\ \frac{\partial p_T}{\partial x} = -\rho_T \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} & (3) \end{cases}$$

L'équation (2) donne

$$\rho_T - \rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\rho_T - \rho_0}{\rho_0} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

D'où, dans (1),

$$p = \frac{\rho}{\rho_0} \kappa = -\kappa \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_T}{\partial x} = -\rho_T \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &\Leftrightarrow \frac{\partial(p_0+p)}{\partial x} = -\rho_T \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\ &\Leftrightarrow -\kappa \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\rho_T \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\ &\Leftrightarrow \Delta \xi - \frac{\rho_T}{\kappa} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0\end{aligned}$$

Et par identification dans l'équation des ondes :

$$c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} = \sqrt{\gamma R_s T_0} \text{ Dans l'air : } c = 20\sqrt{273 + T^C}$$

Impédance acoustique

Pour la commodité des calculs, on pose $\alpha = t - \frac{x}{c}$, on a alors : $\xi(x, t) = f(\alpha)$ et :

$$\begin{cases} p = -\kappa \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\kappa \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\kappa}{c_0} f'(\alpha) \\ v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = f'(\alpha) \end{cases}$$

On a alors :

$$p = \frac{\kappa}{c_0} v = \rho_0 c_0 v$$

On appelle "impédance acoustique" le rapport : $Z(x, t) = \frac{p(x, t)}{v(x, t)}$

Remarque : Pour une onde plane progressive on a toujours : $Z = \rho_0 c_0$

Pour l'air :

Pour l'eau :

Remarque : L'équation " $p(x, t) = -\kappa \frac{\partial \xi}{\partial x}$ " met en évidence la quadrature de phase entre p et ξ ($\delta = \pi/2$).

Energies

Densité volumique d'énergie :

$$U(x, t) = \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{p^2}{Z^2} + v^2 \right)$$

$$\bar{U} = \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\bar{p}^2}{Z^2} + \bar{v}^2 \right)$$

Flux de puissance acoustique :

$$F(t) = pv$$

On appelle intensité acoustique, la valeur moyenne :

$$I = \bar{F} = \bar{p}\bar{v}$$

Niveau acoustique

La définition du niveau acoustique se fait à l'aide de la pression effective définie comme la moyenne de la pression au carré. En anglais, et souvent en acoustique, on la note p_{RMS} , pour *Root Mean Square*, car elle est égale à

$$p_{eff} = p_{RMS} = \sqrt{\bar{p}^2} = \frac{p}{\sqrt{2}}$$

On introduit alors le niveau de pression acoustique comme (en dB) :

$$L_p = 10 \log \left(\frac{p_{RMS}^2}{p_{ref}^2} \right)$$

Et le niveau d'intensité acoustique (en dB) :

$$L_I = 10 \log \left(\frac{I}{I_{ref}} \right)$$

Composition de niveaux

Soient deux machines M_1 et M_2 émettant des ondes sonores :

$$M_1 \rightarrow L_{p_1} = 10 \log\left(\frac{p_1^2}{p_{ref}^2}\right)$$
$$M_2 \rightarrow L_{p_2} = 10 \log\left(\frac{p_2^2}{p_{ref}^2}\right)$$

Si les deux machines émettent des ondes de fréquences différentes ou un spectre large voir un bruit blanc (i.e. toutes les fréquences sonores), alors le niveau sonore résultant est :

$$L_{p_{1+2}} = 10 \log\left(\frac{p_1^2 + p_2^2}{p_{ref}^2}\right)$$

Sinon, le niveau sonore résultant est :

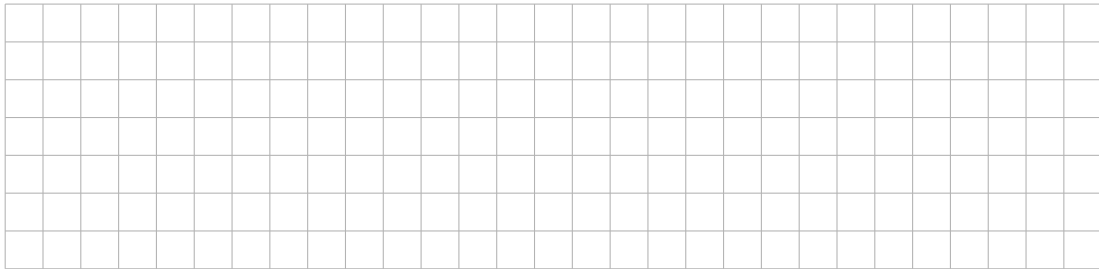
$$L_{p_{1+2}} = \max(L_{p_1}, L_{p_2}) + \Delta L$$

Où ΔL est fonction de la différence des niveaux :

$ L_{p_1} - L_{p_2} $	ΔL
0 - 1	3 dB
2 - 3	2 dB
4 - 9	1 dB
> 10	0 dB

6.5.4 Ondes dans un barreau élastique

Introduction



On appelle τ la "contrainte" et :

$$\tau = \frac{F}{S}$$

La loi de Hooke (élastique linéaire) dit que, lors d'une traction, $\Delta L \propto F$. D'où :

$$\tau = \frac{\Delta L}{L}$$

Ondes

L'étude des ondes dans un barreau élastique est similaire à celle des ondes sonores où l'on remplace la pression p par la contrainte τ et le module de compressibilité κ par le module d'Young E . D'où, en notant ξ le déplacement :

$$\tau = -E \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Et avec des développements analogues à la partie précédente :

$$\Delta \xi - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Remarque : Les ondes de compressions, qui sont longitudinales, ne sont pas les seules existantes dans un barreau. Il peut exister également une onde transversale dite de cisaillement et, en notant G le module de cisaillement : $c_T = \sqrt{G/\rho}$

Chapitre 7

Ondes 2D et 3D

7.1 Formalisme complexe

Durant notre étude des ondes 2D, 3D et même 1D, nous allons devoir travailler constamment avec les fonctions sin et cos. Pour faciliter les calculs, on préférera travailler avec des fonctions complexes dont la partie réelle ou la partie imaginaire représente la véritable onde physique. Par exemple, si ξ est une onde définie par

$$\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

On travaillera davantage avec la fonction complexe $\tilde{\xi}$ dont la partie réelle est ξ :

$$\tilde{\xi} = \xi_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + i \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \xi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

L'addition de deux ondes devient donc plus simple à traiter qu'en réel. Il ne faut cela dit pas oublier que l'onde physique véritable est bien $\Re(\tilde{\xi})$.

7.2 Ondes 2D en cartésien

Une onde 2D en cartésien s'écrit :

$$\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Et, pour un vecteur d'onde

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} k_x = k \cos \theta \\ k_y = k \sin \theta \end{cases}$$

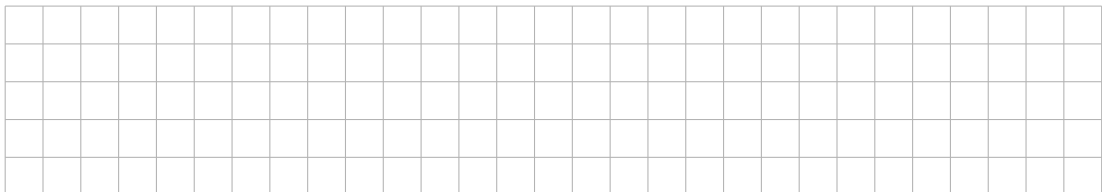
on a :

$$k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

Remarque : On remarquera que \vec{k} et \vec{v} sont colinéaires, il sera intéressant, lorsque nous voudrons calculer la direction de \vec{v} connaissant \vec{k} , de s'intéresser au rapport $\frac{k_y}{k_x} = \tan \theta$

7.3 Ondes 3D en sphérique

7.3.1 Equation d'onde



Dans cette partie, $\varphi(M, t) = f(r, \theta, \psi, t)$, or, par symétrie sphérique, on remarque que φ est invariant selon θ et ψ , d'où :

$$\varphi(M, t) = f(r, t)$$

Par ailleurs, l'équation d'onde en sphérique est :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\varphi) = 0 \end{aligned}$$

Il semble que $r\varphi$ soit sujette à cette équation, or les solutions progressives de celle-ci sont de la forme $f(t - \frac{r}{c}) + g(t + \frac{r}{c})$. D'où :

$$r\varphi(r, t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right) \Rightarrow \varphi(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{g\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r}$$

Remarque : La partie en $x - r/c$ correspond à une onde divergente (s'éloignant de la source). La partie en $x + r/c$ correspond à une onde convergente (se dirigeant vers la source, possible par réflexion).

Equation générale : Alors qu'en 1D on avait $\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$, ici on a :

$$\varphi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \text{ et } \vec{k} = \vec{e}_r$$

7.3.2 Impédance acoustique en 3D

Notre étude des ondes acoustiques nous a donné, en une dimension, l'équation

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Cette équation se généralise en 3D par

$$(\vec{\text{grad}} p) \cdot \vec{e}_r = \frac{\partial p}{\partial r} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Remarque : en 3D sphérique, seul p et ρ vérifient l'équation d'onde (pas v !)

Cela dit, on sait que si $p \propto e^{-i\omega t}$ alors $v \propto e^{-i\omega t}$. On a donc

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -i\omega v(r, t) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = -i\rho_0 \omega v(r, t)$$

Par ailleurs, on sait que $p = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}$. D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= -\frac{A}{r^2} e^{i(kr - \omega t)} + \frac{A}{r} i k e^{i(kr - \omega t)} \\ &= \left(i k - \frac{1}{r} \right) \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \\ &= \left(i k - \frac{1}{r} \right) p(r, t) \end{aligned}$$

On peut alors exprimer le rapport $Z = \frac{p(r, t)}{v(r, t)}$:

$$-i\rho_0 \omega v(r, t) = \left(i k - \frac{1}{r} \right) p(r, t) \Rightarrow Z = \frac{-i\rho_0 \omega}{i k - \frac{1}{r}} = \rho_0 c_0 \frac{1}{1 + \frac{i}{kr}}$$

7.3.3 Intensité et puissance

Intensité :

$$I = \bar{p}v = \Re(p)\Re(v) = \left(\frac{p + p^*}{2} \right) \left(\frac{v + v^*}{2} \right) = \frac{1}{4}(\bar{p}v + p\bar{v}) = \frac{1}{2}\Re(p\bar{v})$$

En utilisant les symétries sphériques, on trouve :

$$I = \frac{|p|^2}{2\rho_0 c_0}$$

Puissance : On définit la puissance acoustique comme

$$P = \iint_{\Sigma} \vec{I} \cdot \vec{n} dS \text{ où } \Sigma \text{ est une surface fermée}$$

En utilisant les symétries sphériques, on trouve :

$$P = 4\pi R^2 I(R)$$

7.4 Effet Doppler

Lors du déplacement d'une source sonore, la fréquence reçue par un récepteur qui ne bouge pas est différente de celle émise et fonction de la vitesse de la source. En effet, supposons qu'à un instant $t = t_0$, une source S , dont la position est $x_S(t) = v_S t$, émette un son de fréquence f (et de période T). Un observateur est placé en $x = 0$. Le temps t_1 auquel le récepteur R reçoit la première crête est donc :

$$t_1 = t_0 + \frac{v_S t_0}{c_0}$$

Une période temporelle T plus tard, l'émetteur envoie une seconde crête. Celle-ci sera reçue à l'instant t_2 :

$$t_2 = t_0 + T + \frac{v_S(t_0 + T)}{c_0}$$

Or, la période temporelle reçue par le récepteur est bien la différence entre les temps auxquels il perçoit les deux crêtes. D'où :

$$T' = t_2 - t_1 = \left(1 - \frac{v_S}{c_0}\right)T$$

Ce phénomène est appelé effet Doppler. On introduit par ailleurs une nouvelle quantité M appelée nombre de Mach telle que :

$$M = \frac{v_S}{c_0}$$



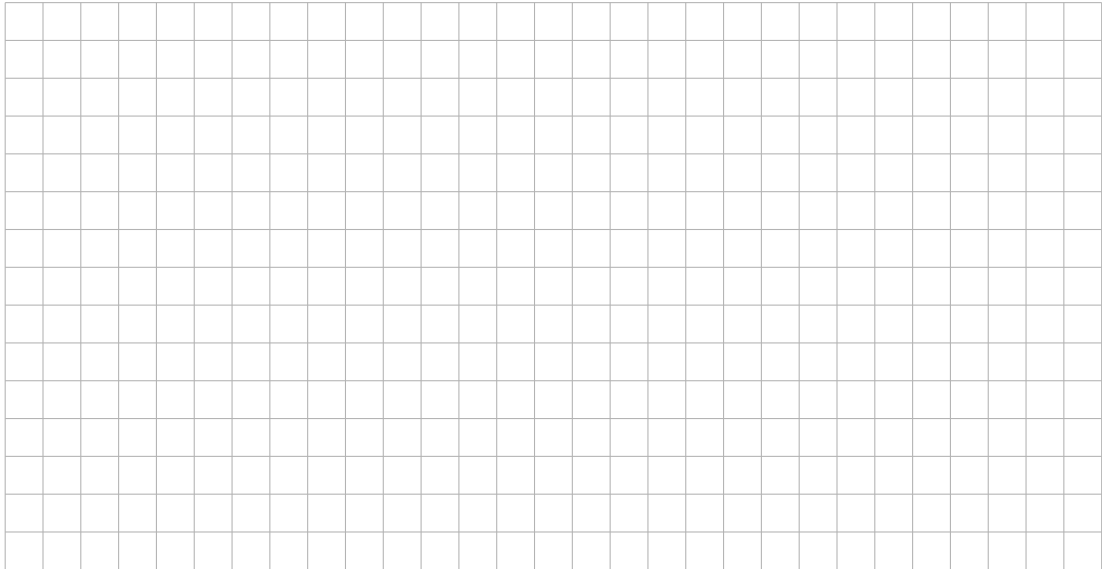
7.5 Ondes 2D circulaires



Chapitre 8

Conditions aux limites

8.1 Interface entre deux milieux



Lorsqu'une onde se propage sur une interface séparant deux milieux isotropes différents, deux phénomènes se produisent : la transmission et la réflexion. On note alors :

$$\begin{aligned}\text{Onde incidente} & : p_i(x, t) = P_{a_i} e^{i(k_i x - \omega t)} \\ \text{Onde réfléchi} & : p_r(x, t) = P_{a_r} e^{i(k_r x - \omega t)} \\ \text{Onde transmise} & : p_t(x, t) = P_{a_t} e^{i(k_t x - \omega t)}\end{aligned}$$

Notre but dans cette partie est de réussir à trouver k_r, k_t, P_{a_r} et P_{a_t} en fonction k_i et P_{a_i} .

Tout d'abord, on peut remarquer que :

$$k_i = \frac{\omega}{c_1} \text{ et } k_r = \frac{\omega}{c_1}$$

D'où les premières relations :

$$\begin{cases} k_i = k_r = \frac{\omega}{c_1} = k_1 \\ k_t = \frac{\omega}{c_2} = k_2 \end{cases}$$

Pour trouver les valeurs de P_{a_r} et P_{a_t} , on introduit les rapports suivants

$$\begin{cases} R_p = \frac{p_r(M, t)}{p_i(M, t)} \\ T_p = \frac{p_t(M, t)}{p_i(M, t)} \end{cases}, \begin{cases} R_J = \frac{J_r(M, t)}{J_i(M, t)} \\ T_J = \frac{J_t(M, t)}{J_i(M, t)} \end{cases}, \text{ et } \begin{cases} R_v = \frac{v_r(M, t)}{v_i(M, t)} \\ T_v = \frac{v_t(M, t)}{v_i(M, t)} \end{cases}$$

Or, sur l'interface, on a évidemment une continuité de la pression et de la vitesse des particules.
Ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\begin{aligned} p_1(0, t) &= p_2(0, t), \forall t \\ v_1(0, t) &= v_2(0, t), \forall t \end{aligned}$$

Avec : $\forall x, t$

$$\begin{aligned} p_1(x, t) &= p_i(x, t) + p_r(x, t) = P_{a_i} e^{i(k_1 x - \omega t)} + P_{a_r} e^{i(k_1 x - \omega t)} \\ p_2(x, t) &= p_t(x, t) = P_{a_t} e^{i(k_2 x - \omega t)} \end{aligned}$$

En particulier, en $x = 0$, on a :

$$\begin{cases} p_1(0, t) = (P_{a_i} + P_{a_r}) e^{-i\omega t} \\ p_2(0, t) = P_{a_t} e^{-i\omega t} \\ p_1(0, t) = p_2(0, t) \end{cases} \Rightarrow P_{a_i} + P_{a_r} = P_{a_t}$$

On établit de manière analogue que :

$$v_{a_i} + v_{a_r} = v_{a_t}$$

Or, par définition :

$$Z_\alpha = \frac{p_\alpha}{v_\alpha} \Rightarrow \begin{cases} v_{a_i} = \frac{P_{a_i}}{Z_1} \\ v_{a_r} = -\frac{P_{a_r}}{Z_1} \\ v_{a_t} = \frac{P_{a_t}}{Z_2} \end{cases}$$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} P_{a_i} + P_{a_r} = P_{a_t} \\ \frac{P_{a_i}}{Z_1} - \frac{P_{a_r}}{Z_1} = \frac{P_{a_t}}{Z_2} \end{cases}$$

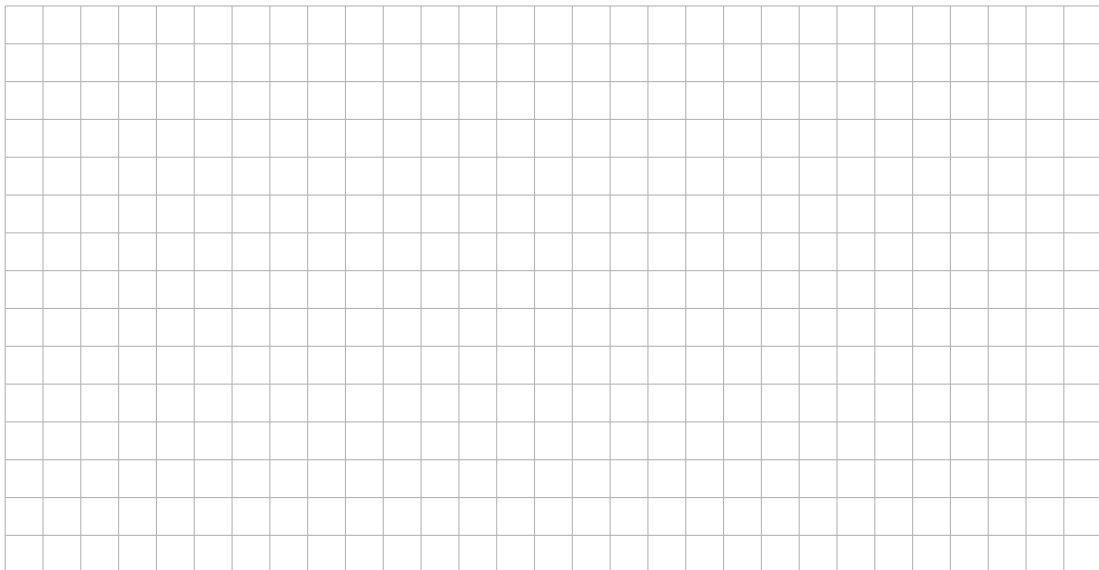
Enfin, ceci nous permet de trouver les résultats fondamentaux suivant :

$$\begin{cases} R_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \\ T_p = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} R_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ T_v = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{cases}$$

Remarque importante : Les relations suivantes sont toujours vérifiées :

$$1 + R_p = T_p \quad \text{et} \quad R_J + T_J = 1$$

8.2 Changement de section de tube



De même que pour une interface entre deux milieux différents, lorsqu'une onde arrive à un changement de section de tube (comme décrit sur l'image), il y a réflexion et transmission d'ondes bien qu'il d'agisse du même milieu de part et d'autres.

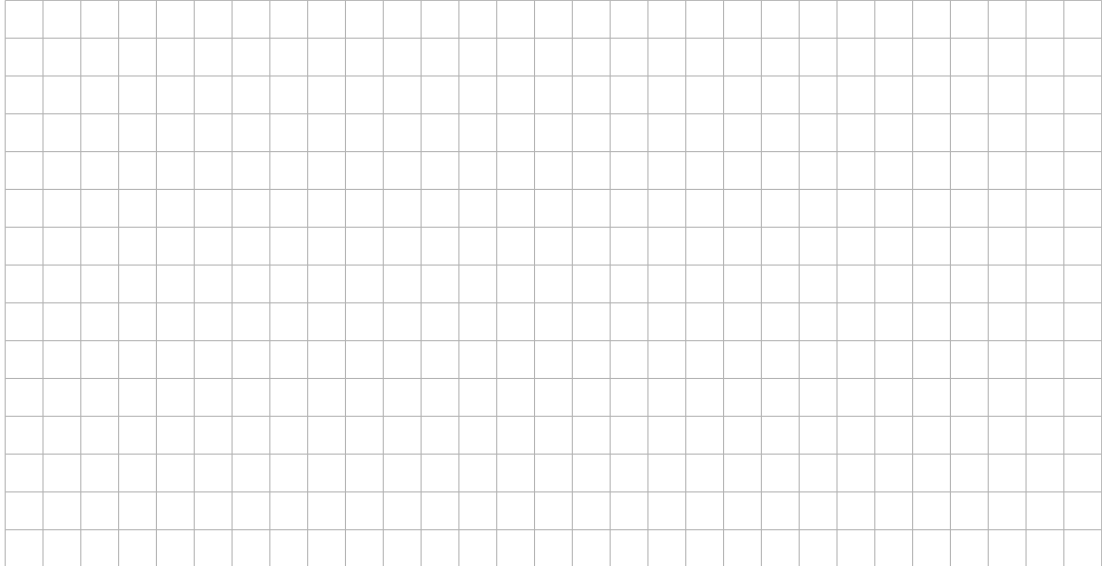
Ici, il y a continuité des pressions et des débits. (Le débit est défini comme : $Q_\alpha(x, t) = S_\alpha v_\alpha$). Et par un raisonnement analogue à ce qui vient d'être fait, on trouve :

$$\begin{cases} P_{a_i} + P_{a_r} = P_{a_t} \\ Q_{a_t} + Q_{a_r} = Q_{a_t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_{a_i} + P_{a_r} = P_{a_t} \\ S_1(v_{a_i} + v_{a_r}) = v_{a_t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_{a_i} + P_{a_r} = P_{a_t} \\ S_1(\frac{P_{a_i}}{Z_0} + \frac{v_{a_r}}{Z_0}) = S_2 \frac{v_{a_t}}{Z_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_{a_i} + P_{a_r} = P_{a_t} \\ S_1(P_{a_i} - P_{a_r}) = S_2 P_{a_t} \end{cases}$$

On trouve alors les formules suivantes :

$$\begin{cases} R_p = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \\ T_p = \frac{2S_1}{S_1 + S_2} \end{cases}, \begin{cases} R_Q = \frac{S_2 - S_1}{S_1 + S_2} \\ T_Q = \frac{2S_2}{S_1 + S_2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} R_J = R_p^2 \\ T_J = \frac{4S_1 S_2}{(S_1 + S_2)^2} \end{cases}$$

8.3 Incidence oblique (2D)



Cette partie est une généralisation de la partie précédente dans le cas 2D. De manière analogue, on a bien ici :

$$\begin{cases} \|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_r\| = \|\vec{k}_1\| \\ \|\vec{k}_t\| = \|\vec{k}_2\| \end{cases}$$

Au niveau l'interface, il y a évidemment continuité des pressions et des phases. En effet, on ne saurait avoir au même endroit, un minimum de pression et un maximum.

Continuité de la phase : Mathématiquement, la continuité des phases à l'interface se traduit par

$$k_{i_x} = k_{t_x} = k_{r_x} = k_x$$

Ceci a pour conséquence les lois de Snell-Descartes, en effet :

$$k_{i_x} = k_{r_x} \Leftrightarrow k_1 \sin \theta_i = k_1 \sin \theta_r \Leftrightarrow \sin \theta_i = \sin \theta_r \text{ (1ere loi de Snell)}$$

$$k_{i_x} = k_{t_x} \Leftrightarrow k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t \Leftrightarrow \sin \theta_t = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_i \text{ (2ieme loi de Snell)}$$

On peut distinguer alors deux cas. Soit $c_1 > c_2$, auquel cas $\theta_t < \theta_i$. Soit $c_1 < c_2$, et $\theta_t = \sin^{-1}(\frac{c_2}{c_1} \sin \theta_i)$, or, θ_t est ainsi calculable uniquement si

$$\frac{c_2}{c_1} \sin \theta_i \leq 1 \Leftrightarrow \sin \theta_i \leq \frac{c_1}{c_2}$$

On note alors θ_c l'angle critique telle que

$$\theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$$

Si $\theta_i > \theta_c$ alors aucune onde n'est transmise durablement vers le milieu (2). Seul une onde evanescente est transmise.

Continuité des pressions : La continuité des pressions au niveau de l'interface nous donne, comme pour le cas 1D :

$$p_1(x, 0, t) = p_2(x, 0, t) \Rightarrow P_{a_i} e^{ik_1 x} + P_{a_r} e^{ik_1 x} = P_{a_t} e^{ik_2 x} \Rightarrow P_{a_i} + P_{a_r} = P_{a_t}$$

Toutes ces considérations nous mènent aux formules portant sur les rapport R_p, T_p , etc. Il suffit pour les trouver d'utiliser les formules du cas en deux dimensions, en substituant $Z_1 \rightarrow \frac{Z_1}{\cos \theta_i}$ et $Z_2 \rightarrow \frac{Z_2}{\cos \theta_i}$

Remarque importante : Là encore, on a

$$R_p + 1 = T_p \text{ et } R_J + T_J = 1$$

Chapitre 9

Ondes stationnaires et modes guidés

9.1 Ondes stationnaires

9.1.1 Mur infiniment rigide



Pour modéliser la rencontre d'une onde avec un mur infiniment rigide, on considère un milieu d'impédance acoustique $Z_1 = \rho_0 c_0$ et un autre milieu d'impédance infini (le mur) : $Z_2 = +\infty$. On a alors

$$\begin{cases} R_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \approx \frac{Z_2}{Z_2} = 1 \\ R_v \approx 1 \end{cases}$$

On peut alors écrire le champ de pression totale

$$p_1 = p_i + p_r = p_{a_i}(e^{ikx} + e^{-ikx})e^{-i\omega t} = 2p_{a_i} \cos(kx)e^{-i\omega t}$$

Si nous revenons à l'onde véritable réelle, on trouve alors

$$p_1 = 2p_{a_i} \cos \omega t \cos kx$$

De même, on peut établir l'onde de vitesse :

$$v_1 = v_i + v_r = v_{a_i}(e^{ikx} - e^{-ikx})e^{-i\omega t} = 2i \sin(kx)e^{-i\omega t} = 2 \sin(kx)e^{-i\omega t + \pi/2}$$

En réelle on trouve alors

$$v_1 = 2 \sin(kx) \sin(-i\omega t)$$

Les expressions ainsi obtenues ne sont pas progressives, en effet, on ne sait pas trouver de fonction f telle que $p_1 = f(x \pm c)$. Cette expression correspond à une onde dite stationnaire. L'onde ne se propage pas dans le temps ou dans l'espace, mais voit son amplitude varier. C'est le résultat de l'addition de deux ondes allant en sens opposé. Nous allons étudier ces variations d'amplitude.

On peut remarquer que $p_1(x, t)$ est minimale quand $|\cos(kx)|$ est minimal également. Or

$$\begin{aligned}
 \cos(kx) = 0 &\Leftrightarrow \cos(kx) = \cos \frac{\pi}{2} \\
 &\Leftrightarrow xk = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2k} + \frac{2n\pi}{k} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi c}{2\omega} + \frac{2n\pi c}{k} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi c}{4\pi f} + \frac{2n\pi c}{2\pi f} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \frac{c}{f} + n \frac{c}{f} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2}
 \end{aligned}$$

De même, on remarque que p_1 est maximal si $|\cos(kx)|$ est maximal, et avec le même genre de développement, on trouve :

$$\cos(kx) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\lambda}{2} + n\lambda$$

Remarque : Comme la pression et la vitesse sont en quadrature de phase, les ventres de pressions sont les noeuds de vitesses.

9.1.2 Tube avec ouverture



Dans le cas d'un tube avec ouverture, on considère un tube présentant deux sections : la première S_1 et la seconde $S_2 = +\infty$. On peut donc établir que

$$R_p = -1$$

Et de manière analogue à la partie précédente, la pression totale dans S_1 se trouve être

$$p_1 = p_i + p_r = 2P_{a_i} i \sin(kx) e^{-i\omega t} = 2P_{a_i} \sin(kx) \sin(\omega t)$$

9.1.3 Tube unidimensionnel de longueur finie



Dans le cas d'un tube unidimensionnel de longueur finie, on considère un tube de longueur L fermé par deux murs infiniment rigides de telle façon à ce qu'on ait :

$$\begin{cases} R_p(0) = \frac{p_+(0,t)}{p_-(0,t)} = 1 \\ R_p(L) = \frac{p_+(L,t)}{p_-(L,t)} = 1 \end{cases}$$

Or, on connaît la forme générale de p_+ et p_- , à savoir $p_\alpha = P_{a_\alpha} e^{i(kx \pm \omega t)}$, ceci nous permet d'établir que :

$$R_p(L) = \frac{P_{a_-}}{P_{a_+}} e^{-2ikL}$$

On a donc

$$\begin{cases} P_{a_+} = P_{a_-} \\ e^{2ikL} = 1 \end{cases}$$

Or, en constatant que $1 = e^{i2n\pi}$, il vient que

$$2ikL = 2in\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}$$

On appelle alors fréquence angulaire de résonance la quantité déduite suivante

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

9.2 Modes guidés

9.2.1 Tube 2D



Posons tout d'abord notre problème, ici, une onde se propage et est réfléchi sur un mur rigide. Calculons le champ de pression totale :

$$p(x, z, t) = p_+ + p_- = P_{a_+} e^{i(\vec{k}_+ \cdot \vec{r} - \omega t)} + P_{a_-} e^{i(\vec{k}_- \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Or d'après notre étude du phénomène de réflexions, on sait que

$$k_+ = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} \text{ et } k_- = \begin{pmatrix} -k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$$

On a encore :

$$\begin{cases} R_p(0) = 1 \\ R_p(L) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_p(0) = \frac{P_{a_+}}{P_{a_-}} \\ R_p(L) = \frac{P_{a_+}}{P_{a_-}} e^{i2k_x L} \end{cases}$$

Comme dans la partie précédente, cela mène à l'égalité $e^{i2k_x L} = e^{i2n\pi}$, d'où

$$k_{x_n} = \frac{n\pi}{L}$$

De plus, on sait que $\|\vec{k}\| = k^2$ et $k = \frac{\omega}{c}$, Ce qui nous permet de trouver

$$k_{z_n} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

Remarque : Si $\omega/c > n\pi/L$, alors $k_z \in \mathbb{R}$, l'onde est en mode progressif. Sinon, $k_z \in \mathbb{C}$, l'onde est en mode évanescent.

9.2.2 Cavité 2D



Ici, l'onde est entourée de mur infiniment rigide, d'où les égalités suivantes

$$\forall z, x, t, R_p = \frac{p_+(0, z, t)}{p_-(0, z, t)} = \frac{p_+(L, z, t)}{p_-(L, z, t)} = \frac{p_+(x, 0, t)}{p_-(x, 0, t)} = \frac{p_+(x, H, t)}{p_-(x, H, t)} = 1$$

Ce qui conduit aux relations

$$\begin{cases} k_{x_n} = \frac{n\pi}{L} \\ k_{z_m} = \frac{m\pi}{H} \end{cases}$$

Et on trouve la fréquence de résonnance ω_{nm} :

$$\omega_{nm} = \pi c \sqrt{\left(\frac{n}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{H}\right)^2}$$

Les ondes de pressions correspondantes sont alors de la forme

$$p_{mn} = 4P_{a+} \cos(k_{x_n} x) \cos(k_{z_m} z) e^{-i\omega_{nm} t}$$

Remarques : Les résultats précédents peuvent se généraliser en trois dimensions par un tube infini ou une cavité 3D.

Chapitre 10

Interférences

10.1 Interférences entre deux ondes

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux phénomènes d'interférence. C'est à dire étudier ce qui se passe lorsque deux ondes se "rencontrent" dans un cas général. Considérons donc le schémas suivant



Ici, deux ondes ξ_1 et ξ_2 sont émises de deux sources différentes telle que

$$\xi_1 = \xi_{01} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_1 - \omega t)} \text{ et } \xi_2 = \xi_{02} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_2 - \omega t)}$$

En un point M , un observateur reçoit une seule onde $\xi(M)$, somme des deux premières :

$$\xi(M, t) = \xi_1 + \xi_2 = (\xi_{01} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} + \xi_{02} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_2}) e^{-i\omega t}$$

Rappel : Soit $z \in (\mathbb{C})$, $|z|^2 = zz^*$ où z^* désigne le conjugué de z

Calculons l'amplitude de l'onde ξ :

$$|\xi|^2 = |\xi_1 + \xi_2|^2 = (\xi_1 + \xi_2)(\xi_1 + \xi_2)^* = \xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02} \cos(k(r_1 - r_2))$$

On pose alors dans la suite de ce cours $\delta = k(r_1 - r_2)$ la différence de phase. On a alors :

$$|\xi| = \sqrt{\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02} \cos \delta}$$

Deux cas sont alors à étudier :

- $\cos \delta = 1 \Leftrightarrow k(r_1 - r_2) = 2n\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = 2n\pi \Leftrightarrow r_1 - r_2 = n\lambda, n \in \mathbb{N}$ Dans ce cas, l'interférence est dite constructive car l'amplitude de l'onde est $|\xi| = \xi_{01} + \xi_{02}$
- $\cos \delta = -1 \Leftrightarrow k(r_1 - r_2) = (2n+1)\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = (2n+1)\pi \Leftrightarrow r_1 - r_2 = (n + \frac{1}{2})\lambda, n \in \mathbb{N}$ Dans ce cas, l'interférence est dite destructive car l'amplitude de l'onde est $|\xi| = |\xi_{01} - \xi_{02}|$

Remarque : Dans le cas des ondes sonores, on trouve facilement que $|p|^2 = A^2 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos \delta \right)$

10.2 Diffraction

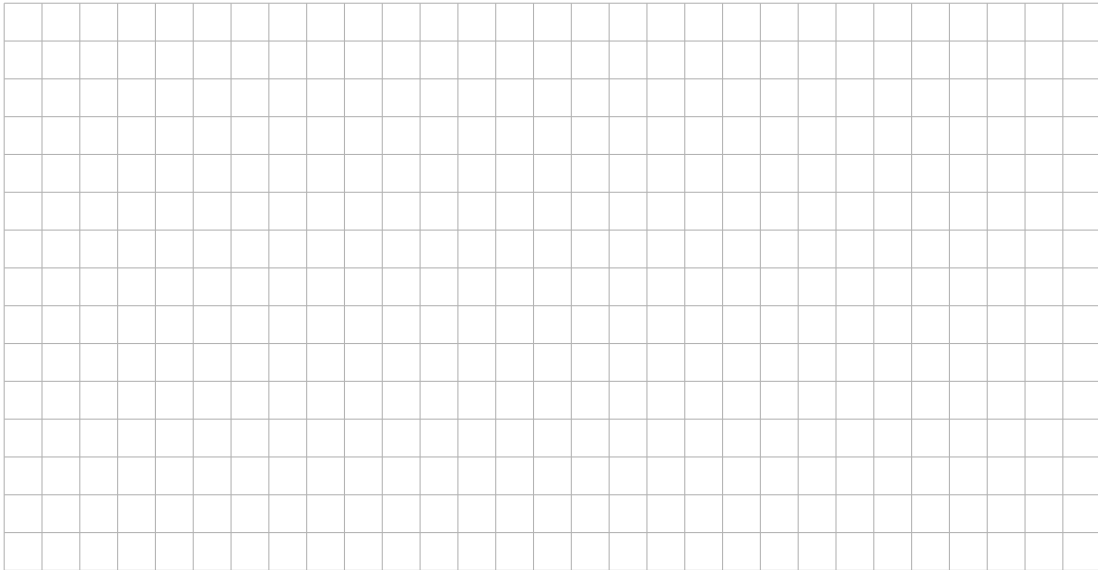
Le phénomène de diffraction trouve une explication dans le Principe de Huygens, énoncé comme suit :

Principe de Huygens : Chaque point de la surface d'onde est une source secondaire de l'onde.

Ceci explique parfaitement l'expérience d'Young bien connue.



Expérience d'Young : Une onde est émise par une source, elle se propage jusqu'à un plan où se trouvent deux ouvertures. Plus loin, un écran est placé. Sur celui-ci, on voit que l'onde présente une figure de diffraction.



La disposition du système est telle que $a \ll D$ et donc $a \ll r_1$, $a \ll r_2$. On a alors $r_1 \approx r_2$ et $\xi_{01} = \xi_{02} = \xi_0$. On peut calculer l'amplitude de l'onde en un point M du plan :

$$|\xi| = \sqrt{2\xi_0^2 + 2\xi_0^2 \cos \delta} = \xi_0 \sqrt{2(1 + \cos \delta)} = \xi_0 \sqrt{2(2 \cos^2 \frac{\delta}{2})} = 2\xi_0 \cos \frac{\delta}{2}$$

Comme $a \ll D$, on peut considérer que $S_1M \parallel S_2M$, alors $S_2M = S'M$. Or, $S_1M = S_1S' + S'M = a \sin \theta + S'M$.

De plus si $\theta \ll 1$ rad, alors $\sin \theta \approx \theta$. D'où, $S_1M = a\theta + S'M$ et donc $r_1 - r_2 = a\theta$.

Enfin, par des considérations géométriques on a $\tan \theta = \frac{x}{D} \approx \theta$. D'où $r_1 - r_2 = \frac{ax}{D}$ et finalement

$$\delta = \frac{kax}{D} = \frac{2\pi ax}{D}$$

On remarque par ailleurs que $|\xi|$ est maximal quand $\cos \frac{\delta}{2}$ est maximal.

$$\cos \frac{\delta}{2} = \cos n\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi ax}{\lambda D} = 2n\pi \Leftrightarrow x_n = \frac{n\lambda D}{a}$$

De même on trouve la position des minimums :

$$x_n = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda D}{a}$$

On définit enfin l'interfrange i comme la distance entre deux franges, soit

$$i = x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda D}{a}$$